การหามิติแฟรกทอลโดยวิธีนับทรงรี

AN ELLIPSOID-COUNTING APPROACH TO FRACTAL DIMENSIONS ESTIMATION

พสิษฐ์ ศศิกาญจน์

PASIT SASIKARN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2551

การหามิติแฟรกทอลโดยวิธีนับทรงรี

AN ELLIPSOID-COUNTING APPROACH TO FRACTAL DIMENSIONS ESTIMATION

พสิษฐ์ สสิกาญจน์

PASIT SASIKARN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2551

KMITL-2008-SC-M-002-429

AN ELLIPSOID-COUNTING APPROACH TO FRACTAL DIMENSIONS ESTIMATION

PASIT SASIKARN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN COMPUTER SCIENCE
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2008

KMITL-2008-SC-M-002-429

สำนักบริหารวิชาการ

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การหามิติแฟรกทอลโดยวิธีนับทรงรี

An Ellipsoid-Counting Approach to Fractal Dimensions Estimation

ชื่อนักศึกษา นายพสิษฐ์ สสิกาญจน์

รหัสประจำตัว 47063710

ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา วิทยาการคอมพิวเตอร์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.กรกช ประชุมรักษ์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.วีระ บุญจริง	
ผศ.ดร.จีรพร ศรีสวัสดิ์	
ดร.เฉลิมศักดิ์ เลิศวงศ์เสถียร	
ผศ.ดร.กรกช ประชุมรักษ์	

วัน / เดือน/ ปี ที่สอบ 29 สิงหาคม 2551 เวลา 16.30-17.30 น.

สถานที่สอบ ณ อาคารจุฬาภรณวลัยลักษณ์ 1 ห้อง 217

สำนักบริหารวิชาการรับรองแล้ว

(รศ.ดร.รวีวรรณ ชินะตระกูล)

ผู้อำนวยการสำนักบริหารวิชาการ

วันที่.....13.......**เดือน**.....ตุลาคม.......**พ.ศ**.....2551.....

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การหามิติแฟรกทอลโดยวิธีนับทรงรี
นักศึกษา	นายพสิษฐ์ สสิกาญจน์
รหัสประจำตัว	47063710
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิทยาการคอมพิวเตอร์
พ.ศ	2551
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ. ดร. กรกช ประชุมรักษ์

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างวิธีใหม่สำหรับหาค่ามิติแฟรกทอลของต้นไม้ ซึ่งจะแตกต่างจากงานวิจัยในอดีตที่ใช้วิธีนับกล่อง (Box counting) เนื่องจากรูปทรงของกล่องที่ใช้หาค่ามิติมีรูปทรงเป็นลูกบาศก์ ซึ่งไม่สอดคล้องกับต้นไม้ซึ่งประกอบด้วยใบไม้ที่มีลักษณะ โค้งและแบน จึงทำให้เกิดปัญหาของจำนวนช่องว่างในลูกบาศก์ที่ใช้ในการหาค่ามิติ ช่องว่างเหล่านั้นจะส่งผลต่อค่ามิติที่คำนวณได้

จากปัญหาดังกล่าว ผู้วิจัยจึงได้เสนอวิธีการใหม่ โดยใช้รูปทรง ที่แตกต่างจากรูปทรงเดิมที่เป็นลูกบาศก์มาเป็นรูปทรงรี ซึ่งการใช้รูปทรงรีมาทำการหาค่ามิติ จะช่วยลดช่องว่างที่เกิดจากการหาค่ามิติด้วยลูกบาศก์ เพราะมีรูปทรงใกล้เคียงกับใบไม้ จึงมีผลทำให้ค่ามิติที่หาออกมาได้ มีความความถูกต้องจากการเปรียบเทียบการทดลองค่ามิติที่คำนวณได้กับค่ามาตรฐาน

Thesis Title	An Ellipsoid-Counting Approach to Fractal Dimension Estimation
Student	Mr. Pasit Sasikarn
Student ID.	47063710
Degree	Master of Science
Program	Computer Science
Year	2008
Thesis Advisor	Asst. Prof. Dr. Korakot Prachumrak

ABSTRACT

This thesis proposes a new method to compute fractal dimensions of trees. Trees are composed of leaves which mostly have round and flat shapes. The previous box counting method which applies boxes or cube to calculate fractal dimensions are not suitable for the characteristics of trees, due to leaves do not fit the cubes perfectly. There are many lost spaces for this method which can make the fractal dimension of trees to be incorrect.

From the above problem, this thesis presents a new method to compute fractal dimension applying ellipsoids instead of boxes. Ellipsoids reduce the space occurred in the box counting method, because they are similar to the shapes of the leaves. This thesis results show the prove that fractal dimensions of trees computed by ellipsoid – counting method are closer to the dimension from theories than box-counting method.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์นี้มิอาจจะสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี หากมิได้รับคำแนะนำ คำชี้แจง ความรู้ และความเอาใจใส่จาก ผศ.ดร.กรกช ประชุมรักษ์ ผู้เป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ซึ่งท่านได้สละเวลาให้กับข้าพเจ้าอย่างเต็มที่ จึงใคร่ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.วีระ บุญจริง ผศ.ดร.จีรพร ศรีสวัสดิ์ และดร.เฉลิมศักดิ์ เลิศวงศ์เสถียร คณะกรรมการสอบหัวข้อ และ โครงร่างวิทยานิพนธ์ ที่กรุณาให้คำแนะนำตลอดจนข้อชี้แนะจนในที่สุดทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้

ขอขอบพระคุณบิดา มารดา และพี่ๆ ที่สนันสนุนให้ได้เรียนในระดับที่ได้ตั้งใจ อีกทั้งยังได้ดูแลเรื่องค่าใช้จ่ายต่างๆระหว่างศึกษาเป็นอย่างดีอีกด้วย

ขอขอบคุณพี่ๆ และเพื่อนๆ ทุกคน โดยเฉพาะ นางสาวศศิวิมล เรืองทองที่ให้คำปรึกษา และช่วยอำนวยความสะดวกในด้านต่างๆ

สำหรับคุณงามความดีและประโยชน์อันใดที่เกิดขึ้นจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดา มารดา อาจารย์ทุกท่านซึ่งเป็นที่เคารพรักยิ่ง ตลอดจนญาติพี่น้อง และเพื่อนๆทุกคน

พสิษฐ์ สสิกาญจน์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป(ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

แฟรกทอลคือรูปทรงที่ไม่สามารถนิยามได้ด้วยเรขาคณิตทั่วไป ตัวอย่างของแฟรกทอลที่สามารถพบในธรรมชาติได้แก่ ต้นไม้ ก้อนเมฆ เกล็ดหิมะ เป็นต้น รูปทรงแฟรกทอลนั้นมีคุณสมบัติพิเศษที่แตกต่างจากรูปทรงชนิดอื่นที่ไม่ใช่แฟรกทอล คือค่ามิติของแฟรกทอลไม่เป็นจำนวนเต็ม [1] [9] แต่จะมีค่าเป็นเลขทศนิยมที่อยู่ในช่วงมิติยูคลิเดียน (Euclidean space) ซึ่งมิติยูคลิเดียนจะมีค่าเป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0-3

ค่ามิติของแฟรกทอลเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวของแฟรกทอล ซึ่งสามารถนำคุณสมบัติดังกล่าวมาใช้เป็นเครื่องมือในจำแนกวัตถุที่เป็นแฟรกทอลได้ วิธีการหาค่ามิติของแฟรกทอลสามารถหาได้จากหลายวิธี หนึ่งในนั้น คือ วิธีการหาค่ามิติแบบนับกล่อง (Box counting) ซึ่งเป็นวิธีการที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในการหาค่ามิติของแฟรกทอล โดยวัตถุที่นำมาหาค่ามิติจะต้องอยู่ในระนาบ XY หรือเป็นวัตถุที่มีเพียงความกว้างและความยาวแต่ไม่มีความลึก [5] เช่น ภาพถ่ายทางพื้นดิน ภาพถ่ายในแนวระนาบ XY แต่ในการหามิติแฟรกทอลของวัตถุที่มีความลึก ไม่สามารถใช้วิธีหาค่ามิติแบบนับกล่องมาใช้ได้ เนื่องจากรูปทรงที่ใช้ค่ามิติมีรูปทรงไม่สอดคล้องกับวัตถุที่ทำการหาค่ามิติ จึงได้มีการพัฒนาวิธีการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ (Cube counting) เป็นวิธีการที่ใช้รูปทรงลูกบาศก์ที่มีความสอดคล้องกับวัตถุที่หาค่ามิติมากกว่ารูปทรงที่ใช้ในวิธีการนับกล่อง ค่ามิติแฟรกทอลที่หาได้จากวิธีการนับลูกบาศก์ มีค่าใกล้เคียงกับค่ามิติแฟรกทอลทางทฤษฎีมากกว่าวิธีนับกล่อง แต่ยังมีวัตถุแฟรกทอลที่ไม่สอดคล้องกับรูปทรงลูกบาศก์อีกจำนวนมาก ตัวอย่างเช่น ต้นไม้ที่ประกอบไปด้วยใบที่มีลักษณะโค้งและแบน เป็นต้น จากเหตุผลดังกล่าวเมื่อเปลี่ยนรูปทรงที่ใช้หาค่ามิติเป็นรูปทรงอื่น ที่มีความสอดคล้องกับวัตถุแฟรกทอลมากกว่ารูปทรงลูกบาศก์ ค่ามิติแฟรกทอลที่หาออกมาได้มีค่าใกล้เคียงกับค่ามิติทางทฤษฎีมากขึ้นกว่าวิธีนับลูกบาศก์

งานวิจัยนี้พัฒนาวิธีการหาค่ามิติแฟรกทอลวัตถุที่มีความลึก โดยเน้นไปยังวิธีการหาค่ามิติแบบนับทรงรี (Ellipsoid counting) ซึ่งรูปทรงที่ใช้หาค่ามิติที่เป็นทรงรีนี้จะสามารถแก้ไขปัญหาของการหาค่ามิติแบบนับกล่องและการหาค่ามิตินับลูกบาศก์ที่มีรูปทรงไม่สอดคล้องกับวัตถุได้ ข้อมูลที่ทำการทดลองใช้ข้อมูลต้นไม้ที่ทราบค่ามิติแฟรกทอลทางทฤษฎี เพื่อนำเปรียบเทียบผลกับวิธีการหาค่ามิติที่ได้ทำการพัฒนาขึ้น

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

งานวิจัยฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาค่ามิติของแฟรกทอลที่มีความลึก โดยใช้ข้อมูลต้นไม้แฟรกทอลเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบค่ามิติของแฟรกทอลจากวิธีการหาค่ามิติแบบนับทรงรีที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น กับวิธีการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ที่มีผู้คิดค้นไว้แล้ว ว่าค่ามิติของแฟรกทอลแบบใดที่มีค่าใกล้เคียงกับการหาค่ามิติแฟรกทอลทางทฤษฎีมากกว่า ทั้งนี้เพื่อให้ทราบว่าแบบนับทรงรีที่ใช้ในการหาค่ามิตินี้จะสามารถแก้ไขปัญหาของการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ที่มีรูปทรงไม่สอดคล้องกับวัตถุนั่นเอง

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

งานวิจัยนี้มีสมมติฐานว่า ถ้าทำการเปลี่ยนวิธีที่ใช้หามิติของแฟรกทอลจากแบบนับทรงลูกบาศก์มาเป็นแบบนับทรงรี จะมีผลทำให้สามารถหาค่ามิติของแฟรกทอลได้ดีกว่า เนื่องจากแบบนับทรงลูกบาศก์ที่ใช้หาค่ามิตินั้นมีรูปทรงไม่สอดคล้องกับรูปทรงของแฟรกทอลที่นำมาหาค่ามิติ กล่าวคือ การใช้แบบนับทรงลูกบาศก์มาทำการหาค่ามิติแฟรกทอลของใบไม้ที่มีลักษณะโค้งและแบน จะมีผลทำให้เกิดช่องว่างจำนวนมากภายในลูกบาศก์ที่ใช้หาค่ามิติ [11] ดังนั้นวิธีการที่จะแก้ไขปัญหาดังกล่าวนี้ คือ การนำแบบนับรูปทรงที่มีความใกล้เคียงกับใบไม้มาทำการหาค่ามิติของแฟรกทอล จะทำให้สามารถลดช่องว่างที่เกิดขึ้นให้น้อยลงได้ และค่ามิติที่หาได้นั้นจะมีความใกล้เคียงกับค่ามาตรฐานมากขึ้น

1.4 ขอบเขตการวิจัย

จากการศึกษา พบว่า การหาค่ามิติของแฟรกทอลแบบนับลูกบาศก์มีข้อจำกัดคือ เมื่อนำมาหาค่ามิติของแฟรกทอลรูปทรงอื่นๆ เช่น ใบไม้ ต้นไม้ ก้อนเมฆ เป็นต้น ค่าที่ได้นั้นเมื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่ามิติของแฟรกทอลทางทฤษฎีจะก่อให้เกิดความคลาดเคลื่อน ทั้งนี้เนื่องจากการเกิดช่องว่างจำนวนมากภายในลูกบาศก์ที่ใช้หาค่ามิตินั่นเอง ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงพัฒนาวิธีการหาค่ามิติของแฟรกทอลแบบนับทรงรีขึ้นมา เพื่อแก้ข้อจำกัดดังกล่าว ซึ่งงานวิจัยนี้จะเน้นข้อมูลการหาค่ามิติของต้นไม้แฟรกทอลเป็นเกณฑ์ โดยจะทำการวัดประสิทธิภาพวิธีการหามิติของแฟรกทอล ซึ่งได้จากการเปรียบเทียบการหาค่ามิติของแบบนับลูกบาศก์กับการหาค่ามิติแบบนับทรงรีที่ได้พัฒนาขึ้นมา ว่ามีความแตกต่างจากการหาค่ามิติทางทฤษฎีหรือไม่ อย่างไร

1.5 ขั้นตอนของการศึกษาและดำเนินงานวิจัย

งานวิจัยนี้มีขั้นตอนการศึกษาและดำเนินงานวิจัยดังนี้

1. ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหามิติของแฟรกทอล
2. ศึกษาทฤษฎีแฟรกทอล
3. ศึกษาขั้นตอนวิธี (Algorithm) การหามิติแบบนับกล่อง 2 มิติ
4. ตั้งสมมติฐาน โดยคาดว่าการเปลี่ยนรูปทรงให้มีความลึก จะทำให้สามารถหาค่ามิติของแฟรกทอลที่มีความลึกได้
5. นำเสนอวิธีการหาค่ามิติที่ทำการเปลี่ยนรูปทรงให้มีความลึกดังที่ได้ตั้งสมมติฐาน
6. พัฒนาโดยใช้ภาษาซี (C Language) และOpen GL มาเป็นตัวสนับสนุนในการแสดงผล
7. วิเคราะห์ผลการทดลองโดยการเปรียบเทียบค่ามิติของรูปทรงแฟรกทอลที่ทราบค่ามิติทางทฤษฎีกับค่ามิติที่หาได้จากวิธีที่พัฒนาขึ้น ว่ามีความเบี่ยงเบนจากค่ามิติทางทฤษฎีหรือไม่ อย่างไร
8. สรุปผลการทดลองพร้อมเสนอแนวทางการพัฒนางานวิจัย

1.6 ข้อจำกัดของการศึกษา

ข้อจำกัดของการศึกษาของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีดังต่อไปนี้

1. ข้อมูลที่นำมาใช้ในการทดลองต้องสามารถนำมาใช้ได้ใน Open GL
2. ไม่สามารถทำการทดลองกับรูปทรงที่ทำ Mapping texture แทนการสร้างรายละเอียดพื้นผิวของรูปทรงที่มีความลึกได้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แนวคิดเบื้องต้นเกี่ยวกับแฟรกทอล

แฟรกทอล คือ รูปทรงที่ไม่สามารถนิยามได้ด้วยเรขาคณิตทั่วไป เนื่องจากวัตถุแฟรกทอลไม่สามารถนิยามรูปทรงได้อย่างชัดเจน แต่วัตถุแฟรกทอลจะมีรูปแบบของการทำซ้ำแบบเดิมอย่างไม่มีที่สิ้นสุด โดยรูปแบบของการทำซ้ำดังกล่าวนี้มีหลากหลายแบบ แตกต่างกันไปตามกลุ่มของสูตรที่ใช้ในการสร้างแฟรกทอล ซึ่งแต่ละสูตรที่ใช้จะเป็นการผสมผสานกันระหว่างศิลปะกับสูตรทางคณิตศาสตร์ แฟรกทอลที่ปรากฏในธรรมชาติได้แก่ ต้นไม้ เกล็ดหิมะ การตกตะกอนในแหล่งน้ำ รูปทรงของชายฝั่ง ภูเขา หรือกระทั่งก้อนเมฆ [6]

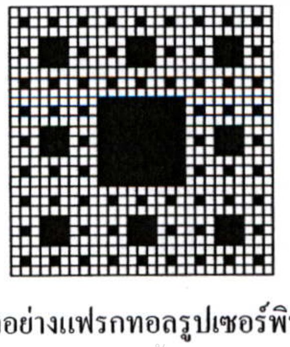
ทฤษฎีของแฟรกทอล สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับงานสาขาอื่นได้อีกมากมาย เช่น การหาขนาดของชายฝั่งจากภาพถ่ายดาวเทียม ทางด้านกราฟิกส์ดีไซน์ การวิเคราะห์ตลาดลงทุน หรือแม้แต่ การนำไปใช้บีบอัดข้อมูลเพื่อประหยัดเนื้อที่ของหน่วยความจำ โดยอาศัยหลักการความคล้าย (Self-similarity) ของแฟรกทอล

2.1.1 คุณสมบัติของแฟรกทอล

แฟรกทอลมีคุณสมบัติหลัก 4 ข้อดังต่อไปนี้

2.1.1.1 รูปทรงที่ไม่สามารถนิยามได้ด้วยเรขาคณิตทั่วไป

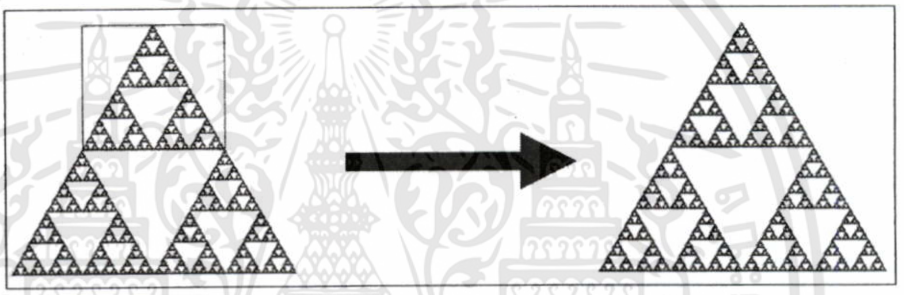
รูปทรงเรขาคณิตทั่วไปที่สามารถนิยามรูปทรงได้อย่างชัดเจน เช่น วงกลม วงรี สี่เหลี่ยม เป็นต้น แต่รูปทรงแฟรกทอลนั้นเป็นรูปทรงที่มีการทำซ้ำจนได้รูปทรงที่มีรายละเอียดซับซ้อนที่ไม่สามารถใช้นิยามทางเรขาคณิตมาอธิบายได้ ตัวอย่างเช่น รูปที่ 2.1 เซอร์พินสกีคาร์เพ็ด (Sierpinski Carpet)



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างแฟรกทอลรูปเซอร์พินสกีคาร์เพ็ด

2.1.1.2 มีความคล้ายคลึงในตัวเอง

รูปทรงที่มีความคล้ายคลึงในตนเอง หมายถึง รูปทรงที่มีรายละเอียดส่วนใดส่วนหนึ่งเหมือนกับตนเอง ซึ่งรูปทรงแฟรกทอลนี้เป็นรูปทรงที่มีรายละเอียดความซ้ำซ้อนที่คล้ายกันทั้งรูปทรง เมื่อทำการขยายส่วนต่างๆ ของรูปทรงจะได้รายละเอียดที่เหมือนกันทุกๆ ขนาด หรืออาจจะกล่าวได้ว่ามีความคล้ายกับตัววัตถุต้นแบบ ตัวอย่างจากรูปสามเหลี่ยมเซอร์พินสกี (Sierpinski Triangle) เมื่อขยายส่วนบนของรูปจะเห็นว่ามีรายละเอียดของรูปทรงเหมือนกับรูปต้นแบบ และทำการขยายต่อไปอีกก็จะได้รายละเอียดที่เหมือนกับรูปทรงเดิม ดังรูปที่ 2.2

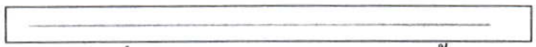


รูปที่ 2.2 รูปสามเหลี่ยมเซอร์พินสกี

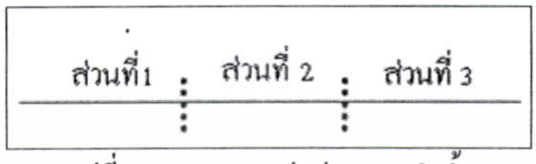
2.1.1.3 มีรูปแบบการทำซ้ำที่แน่นอน

รูปทรงแฟรกทอลนั้นมีรูปแบบการทำซ้ำที่แน่นอน ซึ่งในรายละเอียดของแต่ละส่วนที่ทำซ้ำนั้นจะมีความคล้ายกับรูปต้นแบบ แต่มีการเปลี่ยนแปลงจากรูปต้นแบบบางประการ เช่น มีขนาดที่เล็กลง มีมุมที่เอียงต่างกัน เป็นต้น อย่างไรก็ตามเมื่อทำการขยายขนาดส่วนย่อยของส่วนย่อยเดิมพบว่ารูปแบบของการทำซ้ำจะเป็นรูปแบบที่เหมือนกับรูปต้นแบบ จากตัวอย่างสามารถหารูปแบบของการทำซ้ำออกมาได้ดังนี้

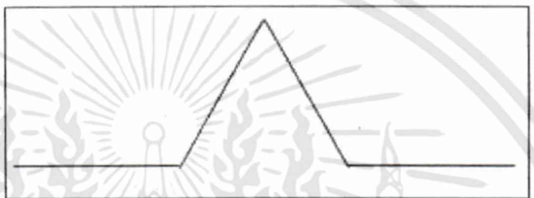
รูปที่ 2.3 (ข) เป็นการแบ่งรูปต้นแบบออกเป็น 3 ส่วนรูปที่ 2.3 (ค) จะได้มาจากการนำรูปที่มีขนาดเป็น 1/3 เท่าของขนาดรูปต้นแบบเดิม มาวางในส่วนที่ 1 จากนั้นในส่วนที่ 2 จะนำรูปที่มีขนาด 1/3 เท่าของขนาดเดิม 2 รูปมาทำการหมุน โดยที่รูปที่ 1 จะหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นมุม 60 องศา รูปที่ 2 จะหมุนในทิศทวนเข็มนาฬิกา 240 องศา และในส่วนที่ 3 จะนำเอารูปที่มีขนาดเป็น 1/3 เท่ามาวางลงไป จนได้ออกมาดังรูปที่ 2.3 (ค)



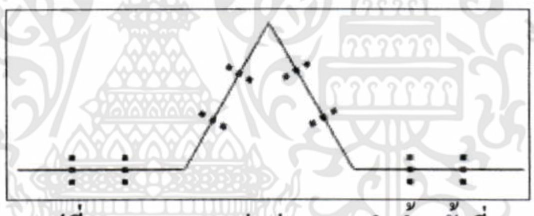
รูปที่ 2.3 (ก) รูปต้นแบบการทำซ้ำ



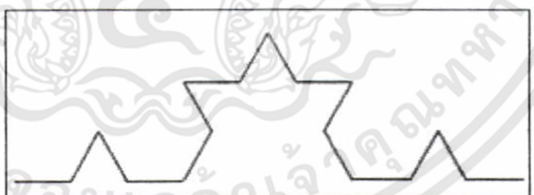
รูปที่ 2.3 (ข) การแบ่งส่วนการทำซ้ำ



รูปที่ 2.3 (ค) การทำซ้ำขั้นที่ 1



รูปที่ 2.3 (ง) การแบ่งส่วนการทำซ้ำครั้งที่1



รูปที่ 2.3 (จ) การทำซ้ำขั้นที่ 2

ในการทำซ้ำขั้นที่ 2 จะทำการแบ่งรูปการทำซ้ำขั้นตอนที่ 1 เป็นอีก 3 ส่วน ซึ่งจะได้ออกมา ดังรูปที่ 2.3 (ค) แล้วทำการทำซ้ำเหมือนการทำซ้ำขั้นที่ 1 จะได้ผล ดังรูปที่ 2.3 (จ)

2.1.1.4 มีค่ามิติไม่เป็นจำนวนเต็ม

มิติ คือ พารามิเตอร์ที่ใช้ในการวัดค่าคุณลักษณะของวัตถุ เช่น ความยาว ความกว้าง ความสูง เป็นต้น ซึ่งค่าที่ออกมานั้นเป็นจำนวนของพารามิเตอร์ที่ใช้บ่งบอกคุณสมบัติของวัตถุ ตัวอย่างเช่น ตำแหน่งบนแผนที่ จะมีพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ ค่าละติจูดและค่าลองจิจูด ค่ามิติที่ออกมานั้นจะเป็น 2 มิติ แต่ถ้าเป็นตำแหน่งของเครื่องบินที่อยู่บนอากาศจะมีพารามิเตอร์ 3 ตัว คือ ละติจูด ลองจิจูด และความสูงจากระดับพื้นดิน ดังนั้นจึงได้ค่ามิติออกมาเป็น 3 มิติ โดยค่ามิติของวัตถุทั่วไปจะวัดจากคุณลักษณะ 3 อย่าง คือ ความกว้าง ความยาว และความสูง ตัวอย่างค่ามิติของรูปทรงเรขาคณิต หรือมิติของยูคลิเดียน (Euclidean space) จะมีค่าดังนี้

1. จุดจะมี 0 มิติ เพราะว่าไม่มีค่าความกว้าง ความยาว หรือความลึกใดมาระบุ
2. เส้นตรงจะมี 1 มิติ เพราะมีความยาวมาเป็นค่าบ่งบอกลักษณะ
3. รูปทรงในระนาบ เช่นวงกลม สามเหลี่ยม หรือสี่เหลี่ยม จะมี 2 มิติ โดยมีความยาวและความกว้างเป็นค่าบ่งบอกลักษณะ
4. รูปทรงที่มีปริมาตร เช่น ลูกบาศก์ จะมี 3 มิติ โดยมีความกว้าง ความยาว และความสูง เป็นค่าบ่งบอกลักษณะ

รูปทรงเรขาคณิตทั่วไปนั้นจะมีค่ามิติยูคลิเดียนเป็นเลขจำนวนเต็ม แต่ค่ามิติของแฟรกทอลนั้น จะมีความพิเศษแตกต่างจากรูปทรงทั่วไป คือ ค่ามิติจะอยู่ระหว่างจำนวนเต็มสองจำนวน หรืออาจจะกล่าวได้ว่า มีค่ามิติไม่เป็นจำนวนเต็ม เช่น รูปสามเหลี่ยมที่เป็นรูปทรงเรขาคณิตปกติจะมีค่ามิติเป็น 2 แต่ถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมเซอร์พินสกี (รูปที่ 2.3) ซึ่งเป็นรูปทรงแฟรกทอลนั้น จะมีค่ามิติเป็น 1.5849 กล่าวคือ จะมีค่าอยู่ระหว่างจำนวนเต็ม 2 จำนวน ได้แก่ 1 กับ 2 ดังนั้นการที่จะรู้ว่าค่ามิติมีค่าเป็นเท่าไรนั้น จะต้องใช้วิธีการเฉพาะในการหาค่ามิติ โดยที่วิธีการเหล่านี้จะถูกเรียกว่าการหามิติของแฟรกทอล ซึ่งมีอยู่หลายวิธี ดังที่จะได้กล่าวต่อไป

2.2 การหามิติของแฟรกทอล

การหาค่ามิติของแฟรกทอลนั้น มีหลายวิธี หลากหลายนิยาม ดังนี้

2.2.1 การหามิติแบบฮูสดอร์ฟ (Hausdorff dimension)

นิยามของการหาค่ามิติแบบฮูสดอร์ฟ กล่าวไว้ว่า ถ้าเราลดขนาดของวัตถุลงเป็น 1/S เท่าในทุกทิศทางของวัตถุ หน่วยวัด (ความยาว, พื้นที่) เพิ่มขึ้นเป็น $N=S^D$ เท่าสามารถแปลงเป็นสมการโดยการใส่ log ทั้ง 2 ข้างจะได้สมการดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}} \tag{2.1}$$

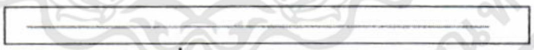
เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนส่วนที่แตกตัว

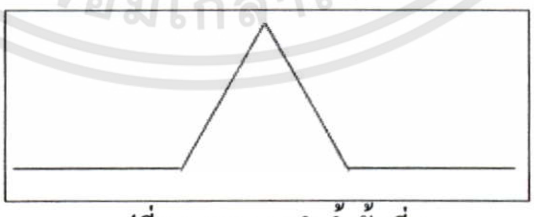
S = ความยาวส่วนที่แตกตัวกับวัตถุเดิมที่ถูกแทนที่

การหาค่ามิติทำได้โดยการนำรูปต้นแบบมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์ว่ามีการแตกตัวเป็นสัดส่วนระหว่างจำนวนของส่วนที่แตกตัวในการสร้างแต่ละครั้ง กับขนาดที่เปลี่ยนไปของแต่ละส่วนที่แตกตัว

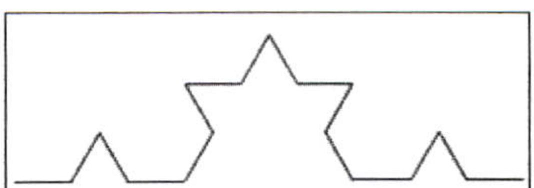
ตัวอย่าง การหาค่ามิติโดยใช้การหามิติแบบฮูสดอร์ฟ



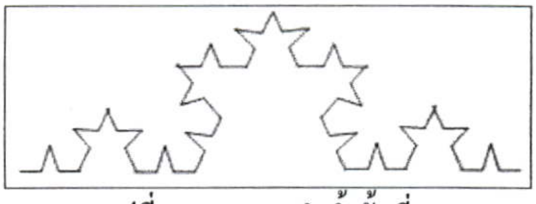
รูปที่ 2.3 (ก) รูปต้นแบบ



รูปที่ 2.3 (ค) การทำซ้ำขั้นที่ 1



รูปที่ 2.3 (จ) การทำซ้ำขั้นที่ 2



รูปที่ 2.3 (ฉ) การทำซ้ำขั้นที่ 3

จากรูปที่ 2.3 (ก) ถึงรูปที่ 2.3 (ฉ) เป็นรูปแบบของการทำซ้ำโดยจะมีวัตถุเริ่มต้น เมื่อนำการแปลงดังกล่าวมาทำเป็นให้มาอยู่ในรูปแบบสมการของการหาค่ามิติ จะพบว่ารูปต้นแบบจะมีการแตกตัวออกเป็น 4 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนที่แตกตัวจะมีความยาวเป็น 1/3 เท่าของรูปต้นแบบ เพราะฉะนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 4 และ S จะมีค่าเป็น 1/3 เมื่อนำค่ามาใส่สมการ จะได้ผลดังนี้

$$N = 4$$

$$S = 1/3$$

$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

$$= 1.26$$

เพราะฉะนั้น ค่ามิติของรูปที่ 2.3 จะมีค่าเป็น 1.26

วิธีการหามิติแบบฮูสดอร์ฟมีข้อเสียคือ จะต้องรู้รูปแบบการทำซ้ำของแฟรกทอลเสียก่อนจึงจะสามารถคำนวณหาค่ามิติได้

2.2.2 การหามิติแบบสหสัมพันธ์ (Correlation dimension)

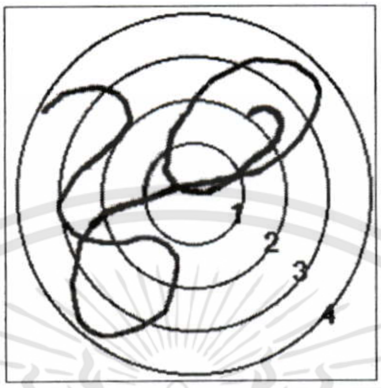
การหามิติแบบสหสัมพันธ์ จะมีหลักการทำงานคล้ายการหามิติแบบฮูสดอร์ฟ แต่ต่างกันที่การหามิติแบบสหสัมพันธ์จะใช้ทรงกลม โดยสามารถนิยามวงกลมที่ใช้หาค่ามิติได้ดังนี้ ให้รัศมีเป็น R และให้ N เป็นจำนวนพิกเซลของแฟรกทอลที่อยู่ในวงกลม การทำงานจะทำการสร้างวงกลมขนาด R ที่จุดศูนย์กลางของวัตถุ แล้วทำการหาจำนวนพิกเซลที่วงกลมนี้ครอบอยู่แล้วนำมาหาค่ามิติตามสมการของการหามิติแบบสหสัมพันธ์ดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log R} \tag{2.2}$$

D เป็นค่ามิติ

N เป็นจำนวนพิกเซลของแฟรกทอล

R เป็นรัศมีวงกลมมีหน่วยเป็นพิกเซล



รูปที่ 2.4 ตัวอย่างการหามิติแบบสหสัมพันธ์กับวัตถุ

ตัวอย่างการหามิติแบบสหสัมพันธ์กับวัตถุ รูปที่ 2.4

วงกลมที่ 1 มีรัศมี 63 พิกเซลมีพิกเซลที่อยู่ในวงกลม 144 พิกเซลได้ค่ามิติ เป็น

$$D = \frac{\log 144}{\log 63}$$

$$= 1.35$$

วงกลมที่ 2 มีรัศมี 117 พิกเซลมีพิกเซลที่อยู่ในวงกลม 303 พิกเซลได้ค่ามิติเป็น

$$D = \frac{\log 303}{\log 117}$$

$$= 1.35$$

วงกลมที่ 3 มีรัศมี 171 พิกเซลมีพิกเซลที่อยู่ในวงกลม 478 พิกเซลได้ค่ามิติเป็น

$$D = \frac{\log 478}{\log 171}$$

$$= 1.35$$

วงกลมที่ 4 มีรัศมี 225 พิกเซลมีพิกเซลที่อยู่ในวงกลม 664 พิกเซลได้ค่ามิติเป็น

$$D = \frac{\log 664}{\log 225}$$

$$= 1.35$$

2.2.3 การหามิติแบบนับกล่อง (Box Counting Dimensional)

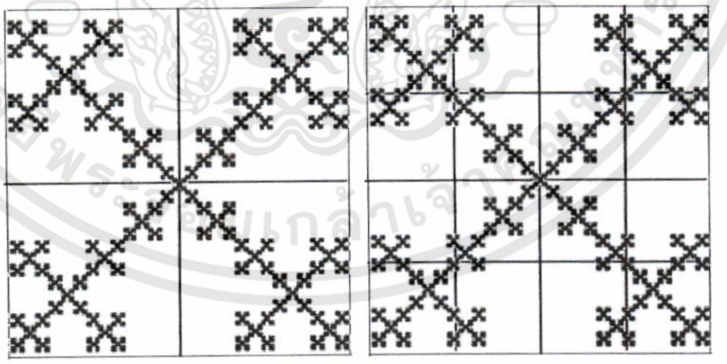
การหามิติแบบนับกล่องจะเป็นวิธีการหาค่ามิติของวัตถุที่อยู่ในแนวระนาบ XY [5] หรืออาจจะกล่าวว่าการหามิติของวัตถุที่มีแค่ความกว้างและความยาวเท่านั้น การทำงานเริ่มต้นจากการสร้างกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาดใหญ่พอที่จะครอบวัตถุแฟรกทอลได้พอดี ขั้นตอนต่อมาทำการแบ่งกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ครอบแฟรกทอล ออกเป็น 4 ส่วน และทำการวนซ้ำแบ่งกล่องอีกที่ละ 4 ส่วน โดยที่จะทำการแบ่งกล่องที่ได้ทำการแบ่งไปแล้ว จากนั้นทำการนับจำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอล เพื่อนำมาคำนวนหาค่ามิติ โดยมีสมการของการหามิติแบบนับกล่องดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}} \qquad (2.3)$$

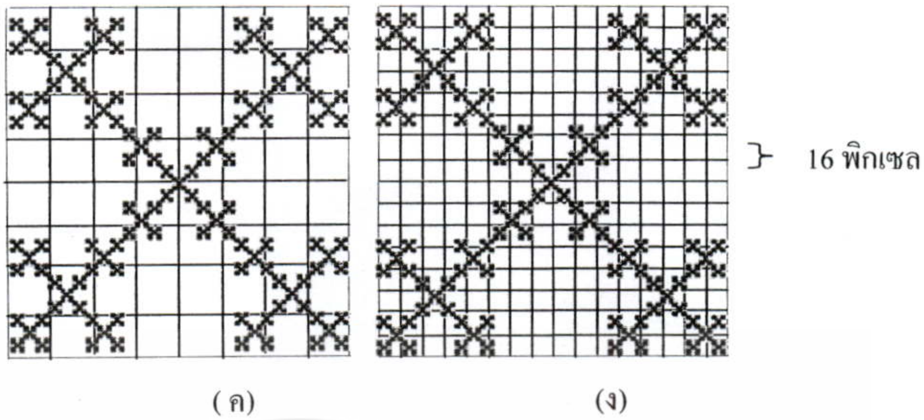
เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่

S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ



(ก) (ข)



รูปที่ 2.5 ตัวอย่างแบ่งกล่องและการหามิติแบบนับกล่อง

ตัวอย่างของวิธีหาค่ามิติแฟรกทอลแบบนับกล่อง

ขั้นตอนแรกจะทำการสร้างกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสครอบแฟรกทอล จากนั้นทำการแบ่งกล่องออกเป็น 4 ส่วนดังรูปที่ 2.5 (ก) การเพิ่มจำนวนกล่องที่ใช้ในการหาค่ามิติให้มีจำนวนมากขึ้น สามารถทำได้โดยการวนซ้ำแบ่งกล่องในแต่ละกล่องที่ทำการแบ่งไปแล้วออกเป็นอีก 4 ส่วน ตัวอย่างเช่นจากรูปที่ 2.5 (ก) เป็นการแบ่งกล่องครั้งที่ 1 จะมีสี่เหลี่ยมจัตุรัส จำนวน 4 กล่อง จากรูปที่ 2.5 (ข) เป็นการแบ่งกล่องครั้งที่ 2 จะทำการวนซ้ำแบ่งกล่องในกล่องที่ได้จากการวนซ้ำครั้งที่ 1 ที่มีอยู่ 4 กล่อง จะมีจำนวนกล่องใหม่เป็น 16 กล่อง เมื่อทำการหาค่ามิติในการแบ่งกล่องครั้งที่ 1 จะเห็นว่าได้ว่า มีกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเป็น 128 พิกเซลที่มีเนื้อแฟรกทอลอยู่เป็นจำนวน 4 กล่อง เมื่อนำมาใส่ในสมการหาค่ามิติแบบนับกล่องจะได้ว่า

$$D = -\frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 4

S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 2

$$D = -\frac{\log 4}{\log \frac{1}{2}}$$

$$= 2$$

ดังนั้นค่ามิติที่ได้จะมีค่าเท่ากับ 2

เมื่อทำการหาค่ามิติในการแบ่งกล่องครั้งที่ 2 จะเห็นว่าได้ว่ามีกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเป็น 64 พิกเซล ที่มีเนื้อแฟรกทอลอยู่เป็นจำนวน 4 กล่อง เมื่อนำมาใส่ในสมการการหาค่ามิติแบบนับกล่องจะได้ว่า

$$D = -\frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 16

S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 4

$$D = -\frac{\log 16}{\log \frac{1}{4}}$$

$$= 2$$

ดังนั้นค่ามิติที่ได้จะมีค่าเท่ากับ 2

เมื่อทำการหาค่ามิติในการแบ่งกล่องครั้งที่ 3 จะเห็นว่าได้ว่ามีกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเป็น 32 พิกเซล ที่มีเนื้อแฟรกทอลอยู่เป็นจำนวน 48 กล่อง เมื่อนำมาใส่ในสมการหาค่ามิติแบบนับกล่องจะได้ว่า

$$D = -\frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 48

S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 8

$$D = -\frac{\log 48}{\log \frac{1}{8}}$$

ดังนั้นค่ามิติที่ได้จะมีค่าเท่ากับ 1.86

เมื่อทำการหาค่ามิติในการแบ่งกล่องครั้งที่ 4 จะเห็นว่าได้ว่ามีกล่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดเป็น 16 พิกเซลที่มีเนื้อแฟรกทอลอยู่เป็นจำนวน 152 กล่อง เมื่อนำมาใส่ในสมการหาค่ามิติแบบนับกล่องจะได้ว่า

$$D = -\frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 152

S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 16

$$D = -\frac{\log 152}{\log \frac{1}{16}}$$

ดังนั้นค่ามิติที่ได้จะมีค่าเท่ากับ 1.81

อย่างไรก็ตามจะเห็นได้ว่า ยิ่งทำการแบ่งกล่องที่ใช้ในการหาค่ามิติจำนวนมากขึ้นเพียงใด ก็จะยิ่งทำให้ค่ามิติที่ออกมานั้นมีความละเอียดมากขึ้นเพียงนั้น

2.2.4 วิธีการหาค่ามิติแบบสองพื้นผิว (Two- Surface method)

ในการทำงานของวิธีการหาค่ามิติแบบสองพื้นผิว [2] จะใช้ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ผิว 2 ชนิด ได้แก่พื้นผิวคอนเว็กซ์ฮัล (Convex hull) ที่ห่อหุ้มตัววัตถุ กับพื้นพิวของการวัดวัตถุที่ขนาด δ โดยมีสมการในการหาค่าดังสมการดังนี้

$$D = \frac{\log(S_l)}{\log(S_c)} x2 \quad (2.4)$$

S_l = พื้นที่ใบ

S_c = พื้นที่ของ convex hull

D = ค่ามิติ

วิธีการหาค่ามิติแบบสองพื้นผิวเป็นวิธีการหาค่ามิติที่ค่อนข้างแม่นยำ แต่ยังมีข้อเสียที่ไม่สามารถใช้คอมพิวเตอร์คำนวณได้ทั้งหมด ยังจะต้องใช้คนมาช่วยในการหาค่ามิติในการแยกส่วนประกอบของต้นไม้ซึ่งเป็นขั้นที่ซับซ้อนและไม่สามารถกำหนดกฎเกณฑ์ในการแยกได้ตายตัว

ในการหาค่ามิติแบบสองพื้นผิวของต้นไม้นั้นจะแบ่งส่วนประกอบต้นไม้ออกเป็นส่วนๆ โดยแบ่งออกเป็น 4 ประเภทได้แก่

1. ยอดอ่อน
2. กิ่ง
3. ก้าน
4. ต้น

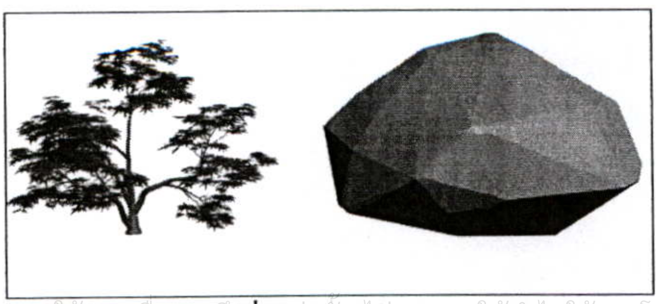
นำส่วนประกอบของต้นไม้ทั้ง 4 ส่วน มาทำการหาค่ามิติตามขั้นตอนของวิธีการหาค่ามิติแบบสองพื้นผิวทีละส่วนประกอบของต้นไม้

ขั้นที่ 1 ทำการสร้างคอนเว็กซ์ฮัลของต้นไม้ วิธีการในการหาคอนเว็กซ์ฮัลมีอยู่มากมายหลายวิธีแต่วิธีการที่ได้รับความนิยมมาใช้คือวิธีการควิกฮัล (Quick hull) เนื่องมาจากสามารถหาได้ อย่างรวดเร็วโดยมี pseudo code ของการทำงานดังนี้

```
QUICKHULL (S, l, r)

if S={ } then return ()
   else if S={l, r} then return (l, r)     // a single convex hull edge
      else
         z = index of a point that is furthest (max distance) from xy.
         Let A be the set containing points strictly right of (x, z)
         Let B be the set containing points strictly right of (z, y)
         return {QUICKHULL (A, x, z) U (z) U QUICKHULL (B, z, y)}
```

ขั้นที่ 2 ทำการหาพื้นที่ผิวหน้าของคอนเว็กซ์ฮัลโดยที่คอนเว็กซ์ฮัลจะมีลักษณะเป็นรูปทรงหลายเหลี่ยม (Polygon) ที่ห้อหุ้มวัตถุอยู่ ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 คอนเว็กซ์ฮัล

ขั้นที่ 3 หาพื้นที่ผิวหน้าใบทั้งหมดของตัววัตถุ ซึ่งใบจะเป็นส่วนที่มีคุณลักษณะของแฟรกทอลซึ่งใบแต่ละใบขนาดไม่เท่ากัน

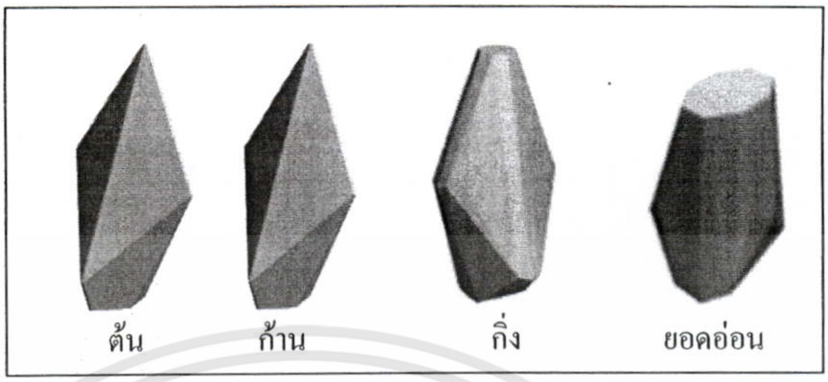
ขั้นที่ 4 นำค่าพื้นที่ที่ได้มาเข้าสมการแล้วหาค่าเฉลี่ยของค่ามิติ

$$D = \frac{\log(S_l)}{\log(S_e)} x2$$

ตัวอย่าง การหาค่ามิติแบบสองพื้นผิวโดยใช้ต้นไม้ AC1 ดังรูปที่ 2.7 มีขนาด 140×300×140 พิกเซล ซึ่งกิ่งแต่ละชนิดมีขนาดที่เท่ากัน

รูปที่ 2.7 ต้นไม้ AC 1

ขั้นที่ 1 ทำการสร้าง คอนเว็กซ์ฮัลของต้นไม้ AC1 จะได้ ผลออกมาดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 คอนเว็กซ์ฮัลของต้น AC1

ขั้นที่ 2 ทำการหาพื้นที่ผิวหน้าของคอนเว็กซ์ฮัลโดยที่ตัวคอนเว็กซ์จะมีลักษณะเป็นรูปทรงหลายเหลี่ยมดังรูปที่ 2.8 โดยมีพื้นที่ผิวของกิ่งแต่ละชนิดดังนี้

ต้นมีพื้นที่เป็น	91,589,000	พิกเซล
ก้านมีพื้นที่เป็น	10,127,800	พิกเซล
กิ่งมีพื้นที่เป็น	1,172,560	พิกเซล
ยอดอ่อนมีพื้นที่เป็น	125,512	พิกเซล

ขั้นที่ 3 หาพื้นที่ผิวหน้าใบทั้งหมดของตัววัตถุโดยที่ต้นไม้ AC1 มีใบทั้งหมด 625 ใบ แต่ละใบจะมีขนาด 1,090 พิกเซลเท่ากันทุกใบ ดังนั้นมีพื้นที่ผิวหน้าดังต่อไปนี้

ต้นมีใบทั้งหมด	625 ใบ และมีพื้นที่เป็น	681,250	พิกเซล
ก้านมีใบทั้งหมด	125 ใบ และมีพื้นที่เป็น	136,250	พิกเซล
กิ่งที่มีใบทั้งหมด	25 ใบ และมีพื้นที่เป็น	27,250	พิกเซล
ยอดอ่อนมีใบ	5 ใบ และมีพื้นที่เป็น	5,450	พิกเซล

ขั้นที่ 4 นำพื้นที่ผิวหน้าของคอนเว็กซ์ฮัลและพื้นที่ผิวของกิ่งแต่ละชนิดที่หาได้มาเข้าสมการ

$$D = \frac{\log(S_l)}{\log(S_e)} x2$$

เมื่อ

S_l = พื้นที่ใบ

S_e = พื้นที่ของ convex hull

D = ค่ามิติ

ต้นมีค่ามิติเป็น	log (681,250)/log(91,589,000) x2	= 1.465
ก้านมีค่ามิติเป็น	log (136,250)/log(10,127,800) x2	= 1.465
กิ่งที่มีค่ามิติเป็น	log (27,250)/log(1,172,560) x2	= 1.465
ยอดอ่อนมีค่ามิติเป็น	log (5450)/log(125,512) x2	= 1.465

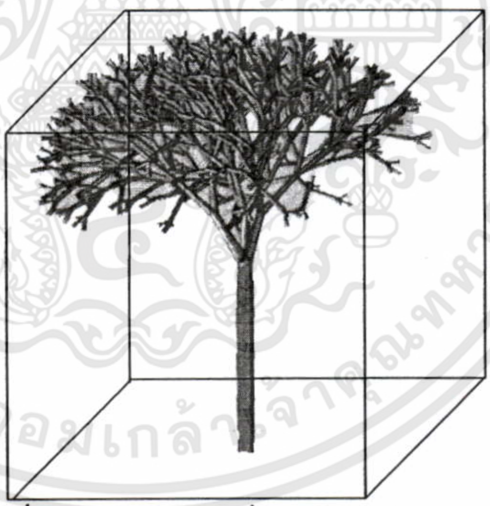
เมื่อทำการหาค่าเฉลี่ยของค่ามิติที่หาได้ จะมีค่ามิติเป็น 1.465

2.2.5 การหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์

วิธีการหาค่ามิติแบบนับกล่อง 2 มิติ ได้ทำการแบ่งกล่องที่ใช้หาค่ามิติในแนวระนาบเท่านั้นซึ่งไม่อาจหาค่ามิติของวัตถุที่มีความลึก เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว จึงใช้ลูกบาศก์มาแทนสี่เหลี่ยมจัตุรัส และใช้การทำซ้ำแตกลูกบาศก์ เป็น 8 ส่วน แทนการแบ่งกล่องในแนวระนาบ

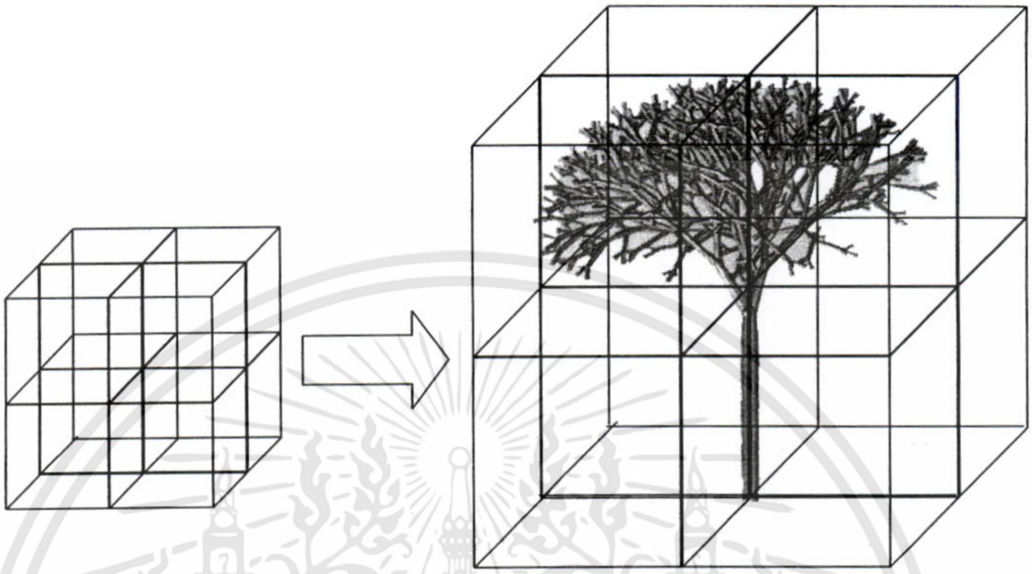
โดยแบ่งขั้นตอนในการทำงานออกเป็น 3 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 สร้างลูกบาศก์ที่มีขนาดใหญ่พอดีกับวัตถุแล้วนำมาครอบวัตถุ

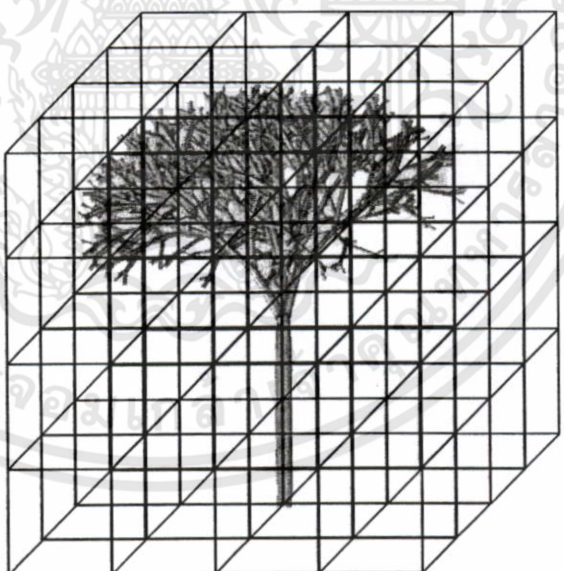


รูปที่ 2.9 สร้างลูกบาศก์ที่มีขนาดใหญ่ครอบวัตถุ

ขั้นที่ 2 ทำการแตกลูกบาศก์ออกเป็น 8 ส่วน แต่ละส่วนมีขนาดเท่ากัน ดังรูปที่ 2.10 จะเห็นได้ว่ามีการแบ่งลูกบาศก์ในทางลึก การเพิ่มจำนวนลูกบาศก์ที่ใช้ในการหาค่ามิติให้มีจำนวนมากขึ้น สามารถทำได้โดยการวนซ้ำแตกลูกบาศก์ ในแต่ละลูกบาศก์ออกเป็น 8 ส่วน ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.10 การแบ่งลูกบาศก์ในทางลึก



รูปที่ 2.11 การแตกลูกบาศก์ออกเป็น 8 ส่วน

ขั้นที่ 3 ทำการคำนวนค่ามิติโดยใช้สมการ ดังนี้

$$D = -\frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ N = จำนวนลูกบาศก์ที่ครอบแฟรกทอล

S = สัดส่วนการแตกตัวที่ทำการแบ่ง

D = ค่ามิติ

จากรูปตัวอย่างที่ 3.2 สามารถหาค่ามิติได้ดังนี้

N = 24

S = 4

$$D = -\frac{\log 24}{\log \frac{1}{4}}$$

$$= 2.2924$$

2.3 การสร้างต้นไม้แฟรกทอล

การสร้างต้นไม้แฟรกทอลแบ่งออกมาเป็น 2 วิธี คือ L-System และ IFS ซึ่งจะมีรายละเอียดการสร้างดังต่อไปนี้ [3] [10] [7]

2.3.1 ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบท (context-free grammars)

ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบทคือไวยากรณ์ที่มีนิยามเลียนแบบไวยากรณ์ภาษาที่ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น

Sentence	สร้างได้จาก Noun phrase ตามด้วย Verb
Noun phrase	ให้เป็น Verb หรือ Adjective ตามด้วย Noun phrase
Noun	ให้เป็น boy หรือ girl
Adjective	ให้เป็น little
Verb	ให้เป็น walk

ซึ่งสามารถนำมากำหนดเป็นกฎเกณฑ์ในการสร้างประโยคในภาษาอังกฤษอย่างง่ายๆ ดังนี้

< Sentence >	→	< Noun phrase >< Verb >	(1)
< Noun phrase >	→	< Noun >|< Adjective >< Noun phrase >	(2)
< Noun >	→	boy| girl	(3)
< Adjective >	→	little	(4)
< Verb >	→	walk	(5)

จากกฎเกณฑ์ทั้ง 5 ข้อข้างต้น สามารถสร้างประโยคว่า little girl walk , little boy walk , little little girl walk ต่างก็เป็นประโยคตามกฎเกณฑ์ทั้ง 5 ข้อ จะเห็นว่าคำ little, girl, walk, boy, ไม่สามารถเปลี่ยนแปลงเป็นอย่างอื่น โดยที่เรียกคำเหล่านี้ว่าคำปลายทาง (terminal) และในส่วนของ < Noun phrase >, < Noun >, < Adjective >, < Verb >, < Sentence > สามารถแทนคำไปได้เรื่อยๆ จะเรียกคำเหล่านี้ว่าตัวแปร (variable) และ < Sentence > ว่าสัญลักษณ์เริ่มต้น (start symbol) เรียกกฎข้อ 1-5 ว่า การผลิต (production)

ไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบทแต่ละชุดจะประกอบไปด้วย

1. เซตของตัวแปรเขียนแทนด้วย **V**
2. เซตของคำปลายทางเขียนแทนด้วย **T**
3. เซตของการผลิตเขียนแทนด้วย **P**
4. สัญลักษณ์เริ่มต้นเขียนแทนด้วย **S**

2.3.2 L-system (Linden Mayer systems)

L-System หรือ Lindenmayer system เป็นไวยากรณ์ไม่พึ่งบริบทชนิดหนึ่ง [3] [7] ซึ่งนิยมนำมาใช้เป็นโมเดลในการสร้างต้นไม้ หรือการเจริญเติบโตของต้นไม้ ซึ่งวัตถุที่ถูกสร้างจากวิธี L-System นั้น มีคุณสมบัติเป็นแฟรกทอล เช่นเดียวกับวัตถุที่ถูกสร้างจากวิธีการ IFS

การทำงานของ L-System นั้นจะนำไวยากรณ์ (Grammars) สายอักขระ (Axiom) และ กฎ (Rule) มาสร้างรูปทรง ในการสร้างรูปทรงด้วย L-System นั้น จะนำสายอักขระมาทำการแปลงตามกฎ ซึ่งตัวสายอักขระจะถูกแทนด้วย สายอักขระเดิม สายอักขระใหม่ เส้นตรงหรือรูปทรงอื่นๆ โดยที่กฎจะเป็นข้อกำหนดในการแปลง เช่น กำหนดการแทนสายอักขระด้วยอักขระ การแปลงตำแหน่งต่างๆ การหมุน เป็นต้น รูปแบบของไวยากรณ์ของ L-System สามารถนิยามได้ดังนี้

G = $\{V, S, \omega, P\}$

G เป็นไวยากรณ์ของ L-System

- **V** คือเซตของตัวแปร ที่ จะแทนได้
- **S** เซตของค่าคงที่ ที่ไม่สามารถแทนที่ได้
- **ω** คือ ตัวสัญญาลักษณ์จาก V ที่ใช้เป็นค่าเริ่มต้นของการสร้าง
- **P** จะเป็นเซตของกฎของการแทนที่ของตัวสัญญา

ในส่วนต่อมาจะเป็น ตัวอย่างการทำงานของ L-System โดยที่ตัวอย่างที่ 1จะเป็นการแปลงเฉพาะสายอักขระโดยที่ไม่มีการแทนสายอักขระด้วยรูปหรือเส้นตรงใดๆ ตัวอย่างที่ 2 จะเป็นการสร้างต้นไม้ 2 มิติด้วยวิธี L-System ต้นไม้ที่สร้างขึ้นมานั้นจะมีลักษณะดังรูปที่ 2.12 และในตัวอย่างที่ 3 จะเป็นการสร้างต้นไม้ที่มีความลึก ด้วยวิธี L-System ต้นไม้ที่สร้างขึ้นมานั้นจะมีลักษณะดังรูปที่ 2.13

ตัวอย่างที่ 1 การแทนสายอักขระ

V : A B

S : none

ω : A

P : (A ⟶ AB), (B ⟶ A)

ผลที่ได้

รอบที่ 1

สายอักขระ เป็น⟶ A

รอบที่ 2

สายอักขระ เป็น⟶ AB

รอบที่ 3

สายอักขระ เป็น⟶ ABA

รอบที่ 4

สายอักขระ เป็น⟶ ABAAB

รอบที่ 5

สายอักขระ เป็น⟶ ABAABABA

ตัวอย่างที่ 2 การสร้างต้นไม้ 2 มิติด้วยวิธีการของ L-System

V : F

S : +- []

ω : F

P : FF+[+F-[[F]-F]]-[-F[F+F]]

F : เคลื่อนที่โดยลากเส้น

\+ : หมุนไป 30 องศา ในทิศตามเข็มนาฬิกาบนแกน Z

\- : หมุนไป 30 องศา ในทิศทวนเข็มนาฬิกาบนแกน Z

[: เก็บข้อมูลลง stack

] : ดึงข้อมูลออกจาก stack

รูปที่ 2.12 ต้นไม้ 2 มิติที่ได้จากการทำซ้ำในแต่ละรอบ n=1, n=2, n=3, n=4

ตัวอย่างที่ 3 การสร้างต้นไม้ ที่มีความลึกด้วยวิธีการของ L-System

V : F

S : +-*/ []

ω : F

P : FF+[+*F-/F-/F]-[-/F+*F+*F]

F : เคลื่อนที่โดยลากเส้น

\+ : หมุนไปในทิศตามเข็มนาฬิกาบนแกน Z

\- : หมุนไป 30 องศา ในทิศทวนเข็มนาฬิกาบนแกน Z

* : หมุนไป 30 องศา ในทิศตามเข็มนาฬิกาบนแกน y

/ : หมุนไป 30 องศา ในทิศทวนเข็มนาฬิกาบนแกน y

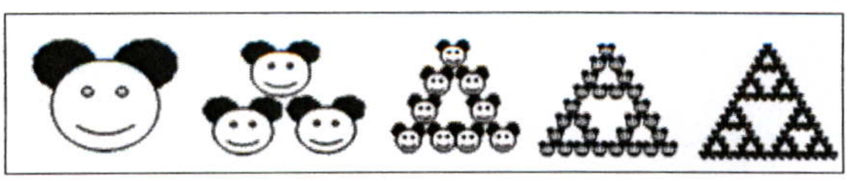
[: เก็บข้อมูลลง stack

] : ดึงข้อมูลออกจาก stack

รูปที่ 2.13 ต้นไม้ที่มีความลึก ได้จากการทำซ้ำในแต่ละรอบ n=1, n=2, n=3, n=4

2.3.3 IFS (Iterated Function System)

IFS คือ การทำการวนซ้ำของเซต หรืออาจจะกล่าวได้ว่าเป็นการนำเซตของรูปทรงมาทำการวนซ้ำ เพื่อสร้างรูปทรงที่มีลักษณะซ้ำในรูปแบบที่แน่นอน และจะมีรายละเอียดที่เป็นลักษณะเดิมซ้ำไปเรื่อยๆ โดยที่การทำซ้ำในแต่ละครั้งนั้น จะทำการแปลงรูปโดยการนำเอารูปต้นแบบมาทำการแปลงแบบต่างๆ



ก ข ค ง จ

รูปที่ 2.14 แสดงขั้นตอนในการสร้างแฟรกทอล

จากตัวอย่างรูปที่ 2.14 เป็นตัวอย่างการสร้างรูปแฟรกทอลอย่างง่ายโดยจะใช้รูปที่ 2.14 (ก) เป็นรูปต้นแบบมาเข้าขบวนการของ IFS จนเป็นผลลัพธ์ออกมาเป็นรูปที่ 2.14 (จ) ซึ่งในการทำ IFS แต่ละครั้งนั้น รูปทรงจะมีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ซึ่งผลของการแปลงรูปในการแปลงแต่ละครั้งนั้น จะขึ้นอยู่กับสมการที่ใช้ในการแปลงโดยที่ IFS หนึ่งระบบสามารถเขียนออกมาเป็นสมการได้ดังนี้

กำหนดให้

$$S = \bigcup_i fi(S) \tag{2.5}$$

เมื่อ

$S \subset R^n$ และ $fi : R^n \longrightarrow R^n$

i เป็นจำนวนของการแปลง

fi จะเป็นสมการของการแปลง

S จะเป็นการเซตของรูปทรง

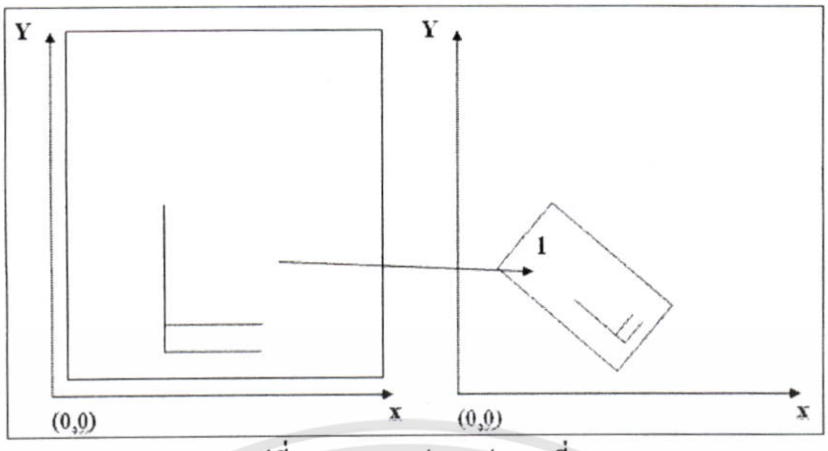
ตัวอย่างที่ 1 การสร้างใบเฟิร์น 2 มิติ

การสร้างใบเฟิร์น 2 มิติจะมีการแปลงอยู่ 4 รูปแบบ การแปลงรูปแบบที่ 1 จะทำการแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1} = 0.85\, x + 0.04\, y_n$$

$$y_{n+1} = -0.04\, x + 0.85\, y_n + 1.6$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.15 จะเห็นว่ารูปมีขนาดที่เล็กลง แล้วถูกหมุนไปจากตำแหน่งเดิม และมีการย้ายตำแหน่งจากเดิมเลื่อนลงมาทางซ้ายล่าง



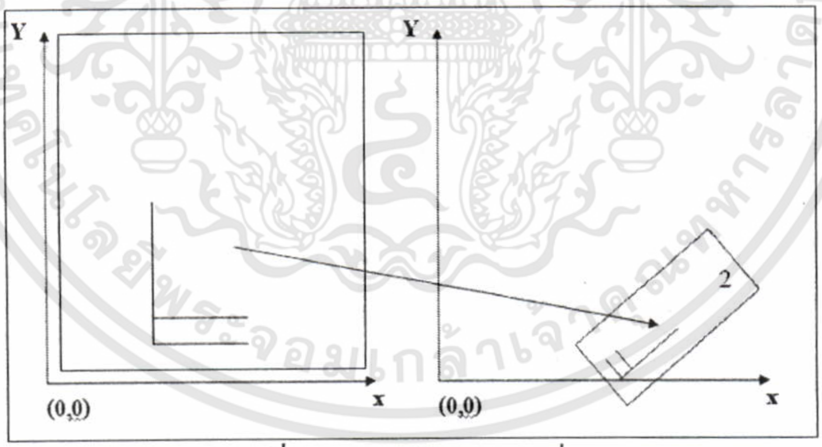
รูปที่ 2.15 การแปลงรูปแบบที่ 1

การแปลงรูปแบบที่ 2 จะ ทำการแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1} = 0.2\ x_n - 0.26\ y_n$$

$$y_{n+1} = 0.23\ x_n + 0.22\ y_n + 1.6$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.16 จะเห็นว่ารูปมีขนาดที่เล็กลง ซึ่งรูปจะถูกหมุนไปจากตำแหน่งเดิม แล้วทำการย้ายตำแหน่งจากเดิมเลื่อนลงมาทางขวาล่าง และยังทำการพลิกกลับด้านจากด้านหน้าเป็นด้านหลัง



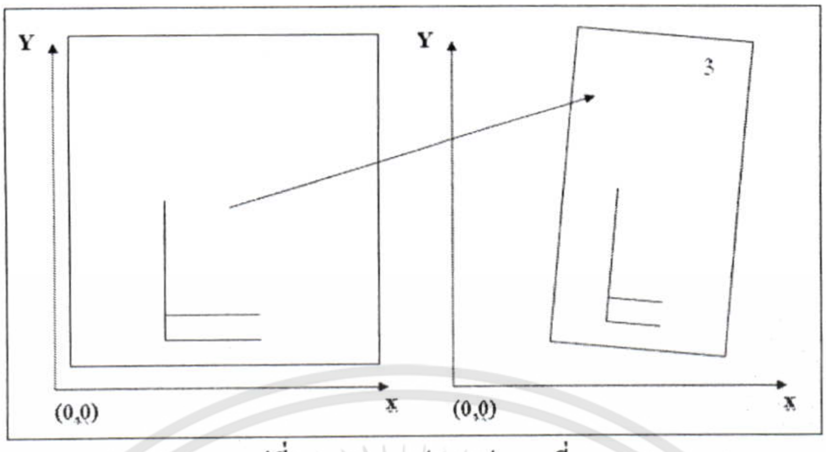
รูปที่ 2.16 การแปลงรูปแบบที่ 2

การแปลงรูปแบบที่ 3 จะ ทำแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1} = -0.15\ x_n + 0.28\ y_n$$

$$y_{n+1} = 0.26\ x_n + 0.24\ y_n + 0.44$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.17 จะเห็นว่ารูปมีขนาดที่เล็กลง แล้วถูกหมุนไปจากตำแหน่งเดิม และมีการย้ายตำแหน่งจากเดิมเลื่อนขึ้นมาทางขวาบน



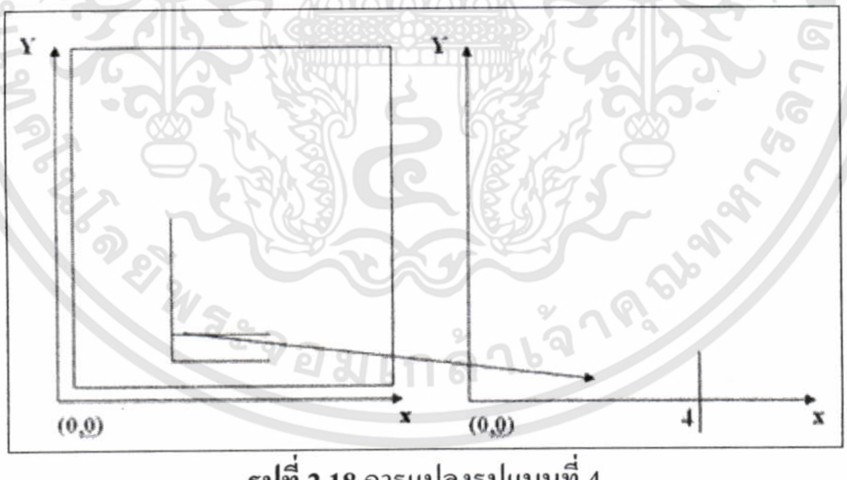
รูปที่ 2.17 การแปลงรูปแบบที่ 3

การแปลงรูปแบบที่ 4 จะ ทำแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1} = 0$$

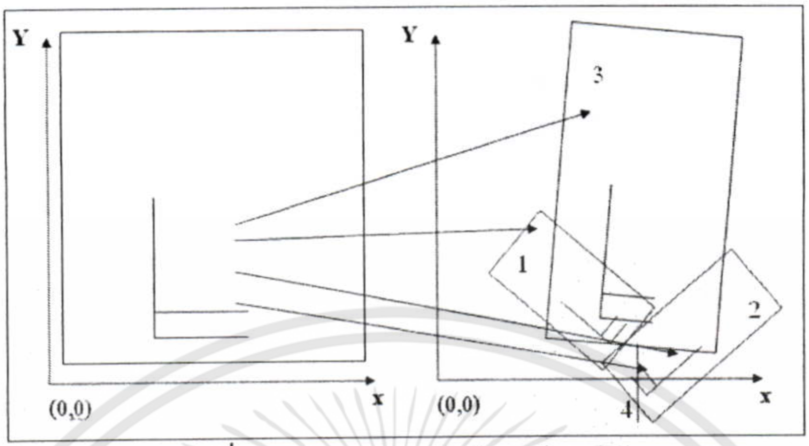
$$y_{n+1} = 0.16\ y_n$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.18 จะเห็นว่ารูปมีขนาดที่เล็กลง



รูปที่ 2.18 การแปลงรูปแบบที่ 4

เมื่อนำการแปลงทั้ง 4 แบบมารวมกัน ผลของการแปลงจะได้ดังรูปที่ 2.19



รูปที่ 2.19 ขบวนการสร้างใบเฟิร์น 2 มิติ

ในการทำ IFS ด้วยสมการของการแปลงข้างต้น ไม่ว่าจะใช้รูปเริ่มต้นในการแปลงเป็นรูปใดก็ตาม ผลที่ได้นั้นจะเหมือนกันทุกครั้งคือ จะได้รูปใบเฟิร์นดังรูปที่ 2.20

รูปที่ 2.20 ใบเฟิร์นที่สร้างจากสมการ IFS

ตัวอย่างที่ 2 การสร้างใบเฟิร์น 3 มิติ

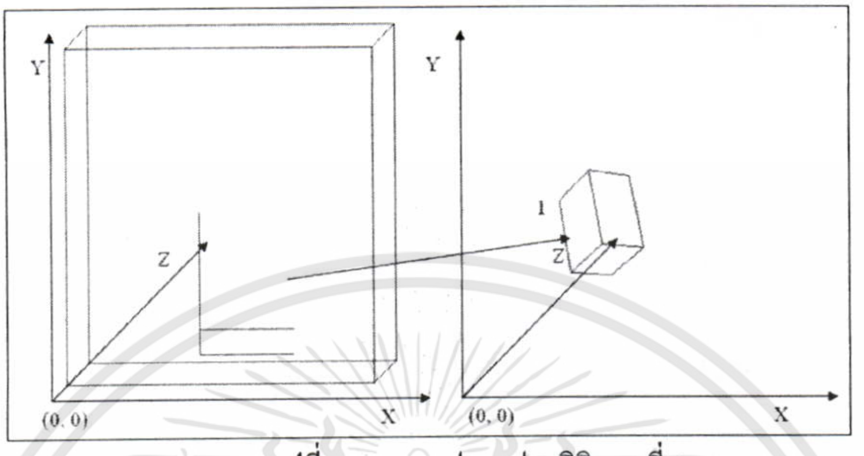
การสร้างใบเฟิร์น 2 มิติจะมีการแปลงอยู่ 4 รูปแบบ การแปลงรูปแบบที่ 1 จะทำการแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1} = 0$$

$$y_{n+1} = 0.16\ y_n$$

$$z_{n+1} = z+0.1$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.21 จะเห็นว่ารูปมีขนาดที่เล็กลง แล้วถูกหมุนไปจากตำแหน่งเดิม และมีการย้ายตำแหน่งจากเดิมเลื่อนลงมาทางซ้ายล่าง



รูปที่ 2.21 การแปลงรูป 3 มิติแบบที่ 1

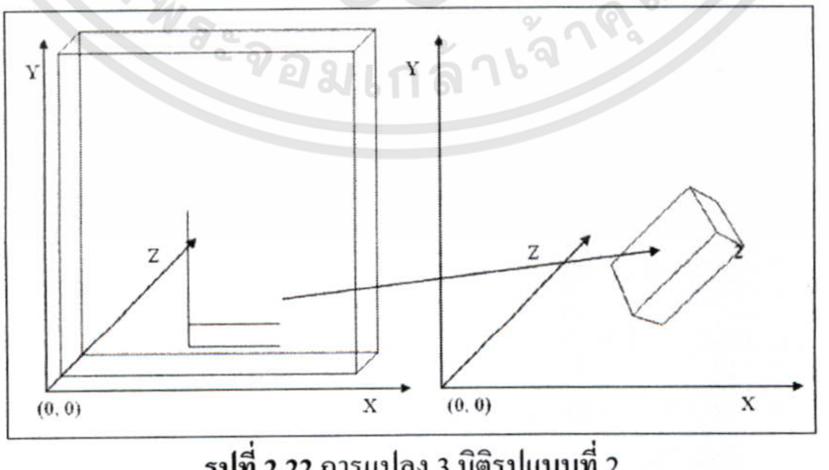
การแปลงรูปแบบที่ 2 จะ ทำแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1} = 0.85x$$

$$y_{n+1} = 0.85\,x + 0.1\,y_n + 0.16$$

$$z_{n+1} = -0.1\,y_n + 0.85z_n + 0.4$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.22 จะเห็นว่ารูปมีขนาดเล็กลง โดยรูปจะถูกหมุนไปจากตำแหน่งเดิม แล้วทำการย้ายตำแหน่งจากเดิมเลื่อนลงมาทางขวาล่าง และยังทำการพลิกกลับด้านจากด้านหน้าเป็นด้านหลัง



รูปที่ 2.22 การแปลง 3 มิติรูปแบบที่ 2

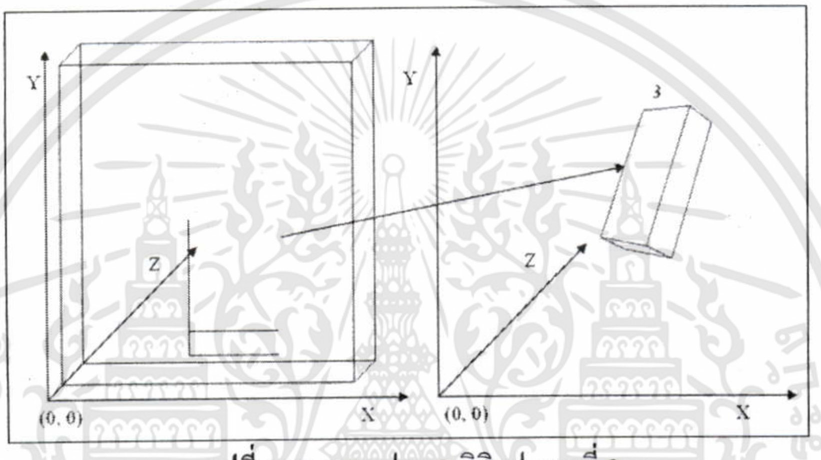
การแปลงรูปแบบที่ 3 จะทำการแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1}= -0.15\ x_n+0.28\ y_n$$

$$y_{n+1}=-0.15\ x_n+0.28\ y_n\ \ +0.8$$

$$z_{n+1}= 0.3z_n\ \ +0.2$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.23 จะเห็นว่ารูปมีขนาดเล็กลง แล้วถูกหมุนไปจากตำแหน่งเดิม และมีการย้ายตำแหน่งจากเดิมเลื่อนขึ้นมาทางขวาบน



รูปที่ 2.23 การแปลง 3 มิติรูปแบบที่ 3

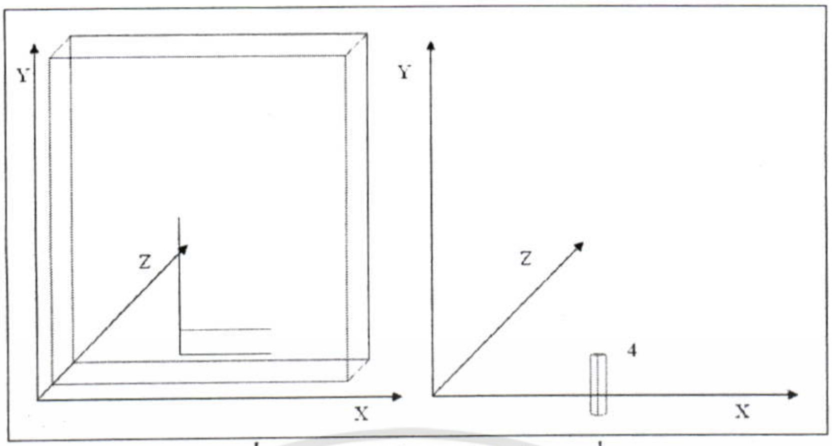
การแปลงรูปแบบที่ 4 จะทำการแปลงรูปโดยใช้สมการดังนี้

$$x_{n+1}= -0.15\ x_n+0.28\ y_n$$

$$y_{n+1}= 0.15\ x_n+0.28\ y_n\ \ +0.8$$

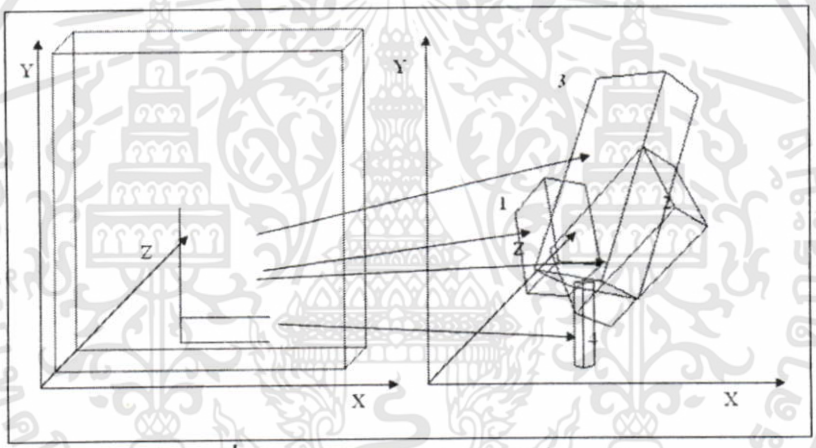
$$z_{n+1}= 0.3z_n\ \ +0.3$$

ผลของการแปลงจะออกมาดังรูปที่ 2.24จะเห็นว่ารูปจะถูกแปลงเป็นเส้นตรงขนาดเล็กลง



รูปที่ 2.24 การแปลง 3 มิติรูปแบบที่ 4

เมื่อนำการแปลงทั้ง 4 แบบมารวมกัน ผลของการแปลงจะได้ดังรูปที่ 2.25



รูปที่ 2.25 ขบวนการสร้างใบเฟิร์น 3 มิติ

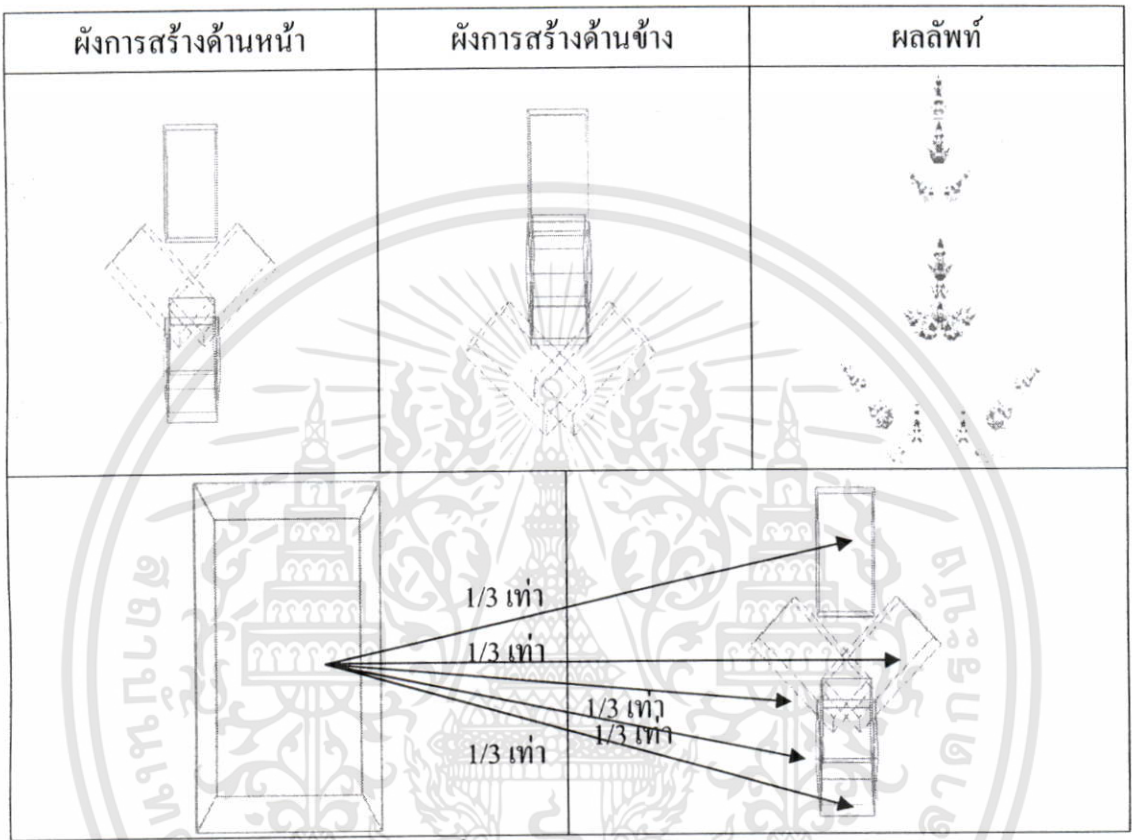
ในการทำ IFS ด้วยสมการของการแปลงข้างต้น ไม่ว่าจะใช้รูปเริ่มต้นในการแปลงเป็นรูปใดก็ตาม ผลที่ได้ออกนั้นจะเหมือนกันทุกครั้งคือ จะได้รูปใบเฟิร์นดังรูปที่ 2.26

รูปที่ 2.26 ใบเฟิร์นที่สร้างจากIFS

2.4 การสร้างและการหาค่ามิติของต้นไม้ที่นำมาใช้ในงานวิจัย

ต้นไม้ทางทฤษฎีที่ใช้ในการทดลองถูกสร้างขึ้นมาจากวิธีการ IFS ดังนี้

2.4.1 ต้นไม้ AC1



รูปที่ 2.27 ผังการสร้างต้นไม้ AC1

ซึ่งต้นไม้ดังกล่าวสามารถคำนวนหาค่ามิติของแฟรกทอลได้โดยจะทำการคำนวนจากผังการสร้างที่ใช้ในการสร้างต้นไม้ จากรูปที่ 2.27 จะพบว่าต้นไม้ AC1 มีการแตกตัวโดยใช้รูปต้นแบบแตกตัวออกเป็น 5 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนที่แตกตัวจะมีขนาดเป็น 1/3 เท่าของรูปต้นแบบ เพราะฉะนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 5 และ S จะมีค่าเป็น 1/3 เมื่อนำค่ามาสร้างสมการ จะได้ผลดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 5

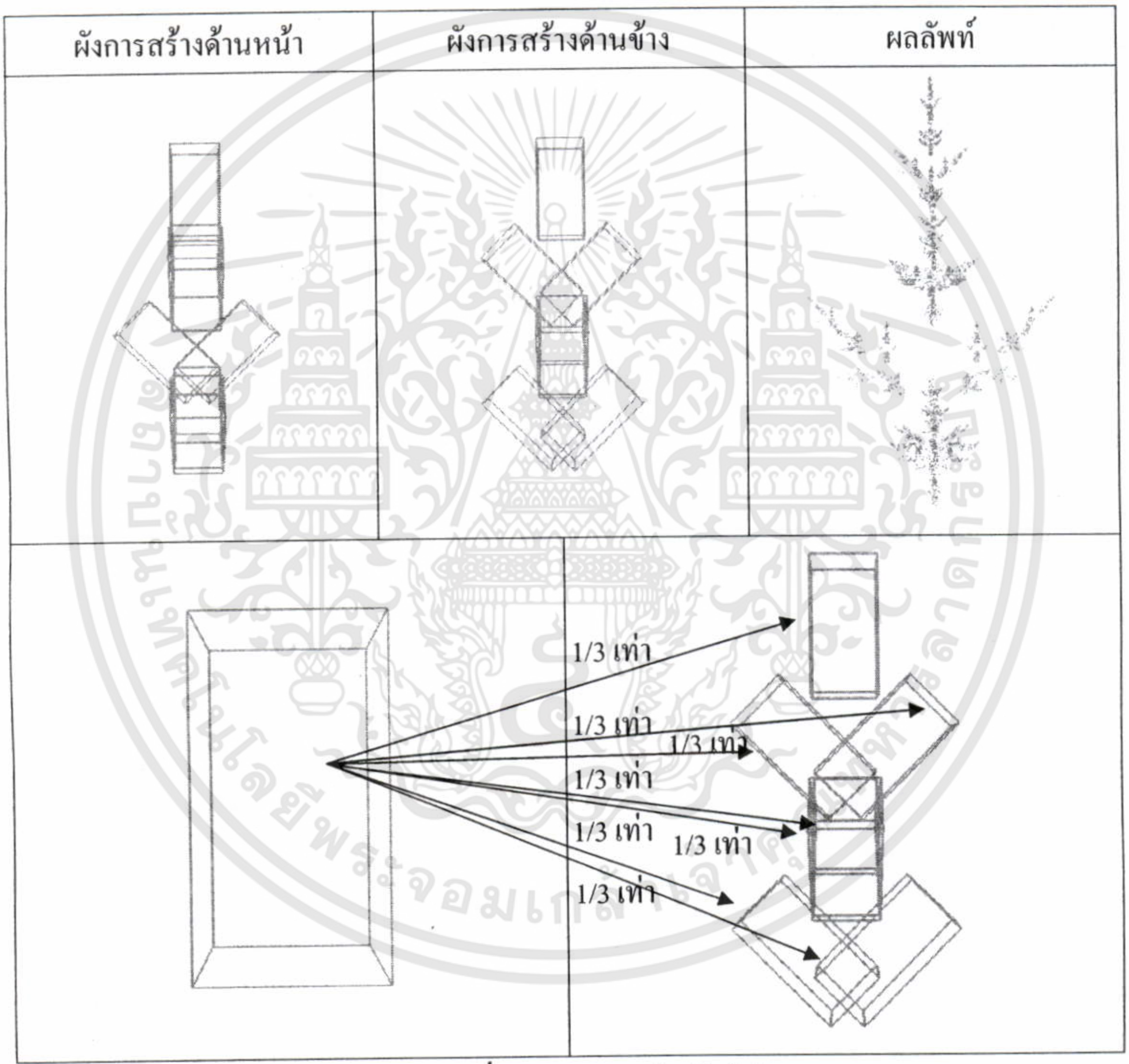
S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 1/3

$$D = \frac{\log 5}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

$$D = 1.4649$$

ดังนั้นค่ามิติของรูปที่ 2.27 จะมีค่าเท่ากับ 1.4649

2.4.2 ต้นไม้ AC2



รูปที่ 2.28 ผังการสร้างต้นไม้ AC2

จากรูปที่ 2.28 จะพบว่าต้นไม้ AC2 มีการแตกตัวโดยใช้รูปต้นแบบแตกตัวออกเป็น 7 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนที่แตกตัวจะมีขนาดเป็น 1/3 เท่าของรูปต้นแบบ เพราะฉะนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 7 และ S จะมีค่าเป็น 1/3 เมื่อนำค่ามาใส่สมการ จะได้ผลดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 7

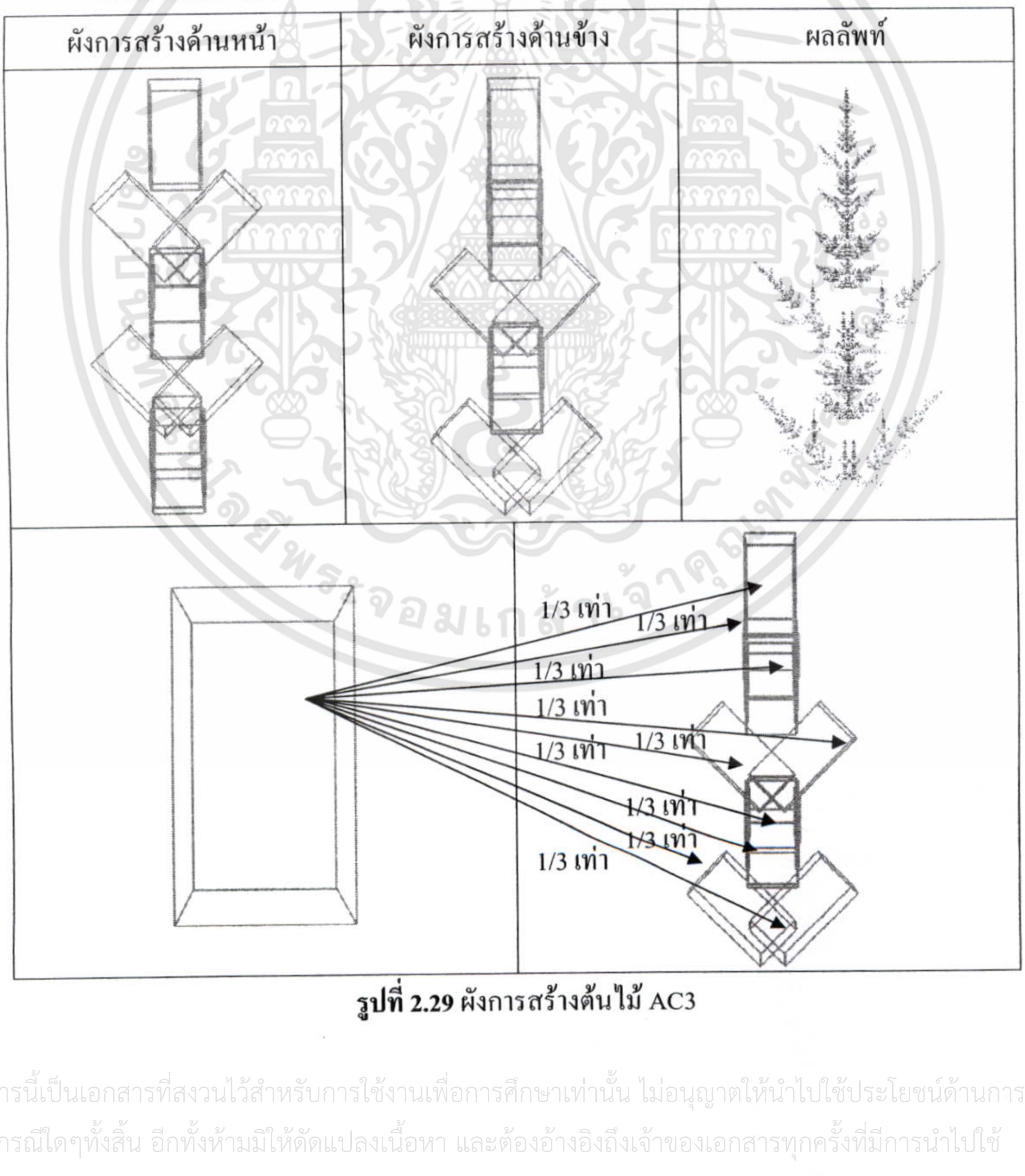
S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 1/3

$$D = \frac{\log 7}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

D = 1.7712

ดังนั้นค่ามิติของรูปที่ 2.28 จะมีค่าเท่ากับ 1.7712

2.4.3 ต้นไม้ AC3



รูปที่ 2.29 ผังการสร้างต้นไม้ AC3

จากรูปที่ 2.29 จะพบว่าต้นไม้ AC3 มีการแตกตัวโดยใช้รูปต้นแบบแตกตัวออกเป็น 9 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนที่แตกตัวจะมีขนาดเป็น 1/3 เท่าของรูปต้นแบบ เพราะฉะนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 9 และ S จะมีค่าเป็น 1/3 เมื่อนำค่ามาใส่สมการ จะได้ผลดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 9

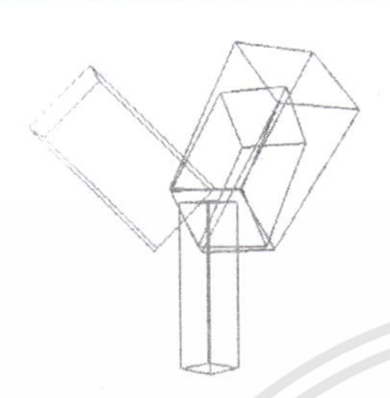
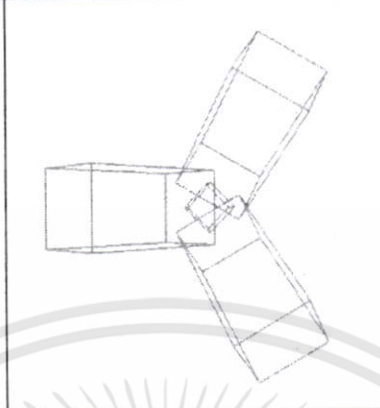
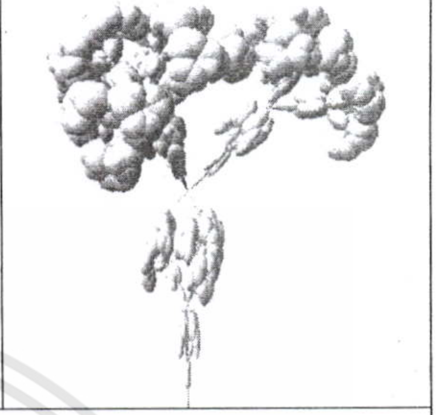
S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 1/3

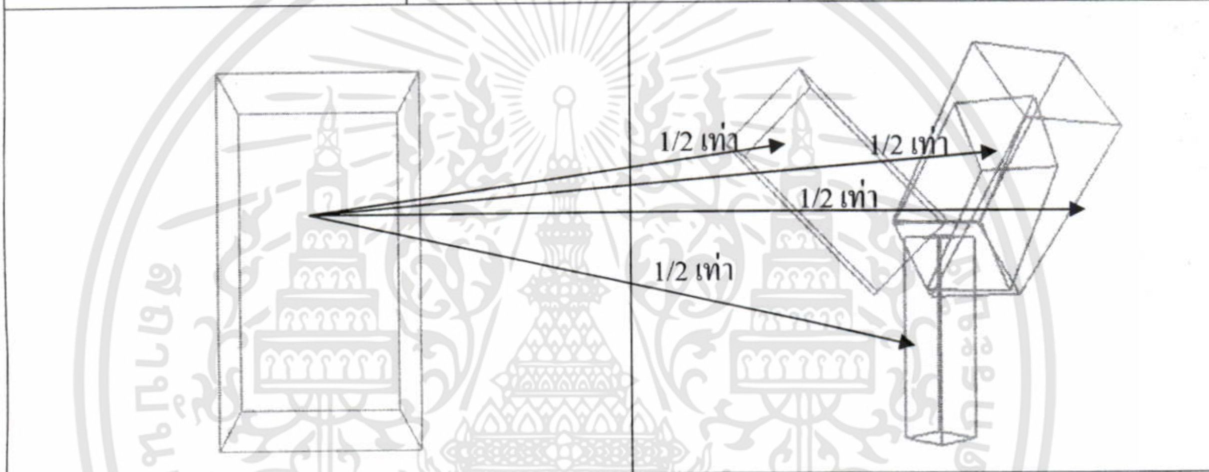
$$D = \frac{\log 9}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

$$D = 2$$

ดังนั้นค่ามิติของรูปที่ 2.29 จะมีค่าเท่ากับ 2

2.4.4 ต้นไม้ BC1

ผังการสร้างด้านหน้า	ผังการสร้างด้านบน	ผลลัพท์
		



รูปที่ 2.30 ผังการสร้างต้นไม้ BC1

จากรูปที่ 2.30 จะพบว่าต้นไม้ BC1 มีการแตกตัวโดยใช้รูปต้นแบบแตกตัวออกเป็น 9 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนที่แตกตัวจะมีขนาดเป็น 1/3 เท่าของรูปต้นแบบ เพราะฉะนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 9 และ S จะมีค่าเป็น 1/3 เมื่อนำค่ามาใส่สมการ จะได้ผลดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = **จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 4**

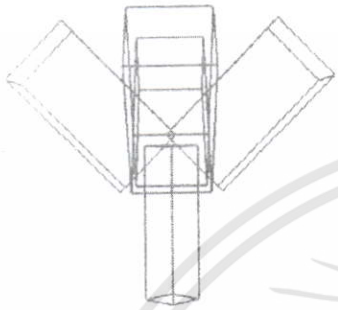
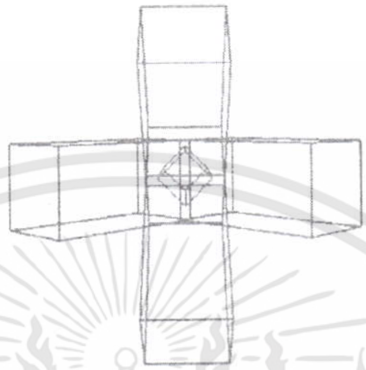
S = **สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 1/2**

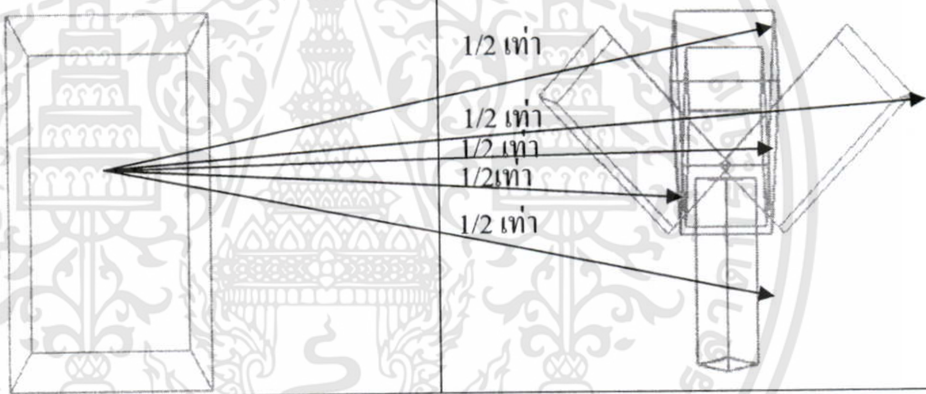
$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$D = 2$$

เพราะฉะนั้น ค่ามิติของรูปที่ 2.30 จะมีค่าเป็น 2

2.4.5 ต้นไม้ BC2

ผังการสร้างด้านหน้า	ผังการสร้างด้านบน	ผลลัพท์
		



รูปที่ 2.31 ผังการสร้างต้นไม้ BC2

จากรูปที่ 2.31 จะพบว่าต้นไม้ BC2 มีการแตกตัวโดยใช้รูปต้นแบบแตกตัวออกเป็น 5 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนที่แตกตัวจะมีขนาดเป็น 1/2 เท่าของรูปต้นแบบ เพราะฉะนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 5 และ S จะมีค่าเป็น 1/2 เมื่อนำค่ามาใส่สมการ จะได้ผลดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 5

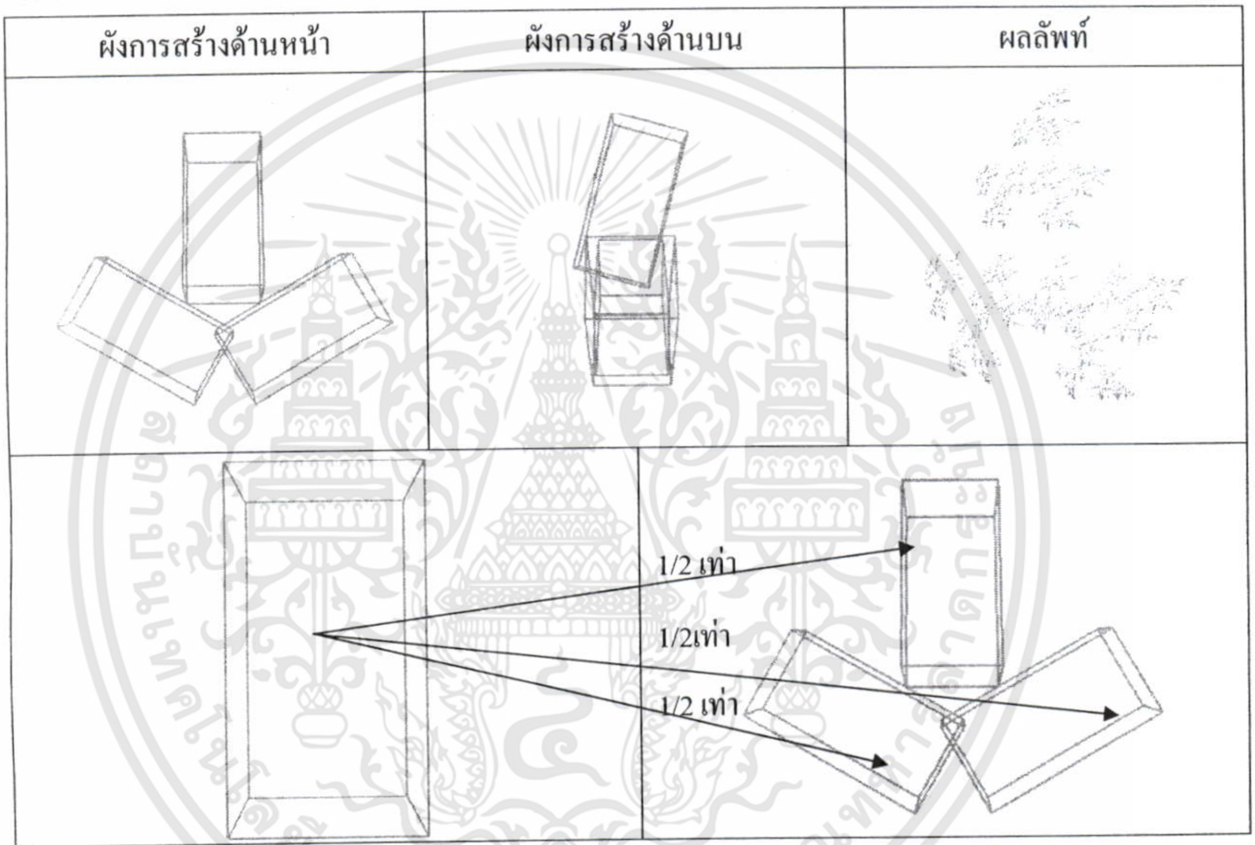
S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = 1/2

$$D = \frac{\log 5}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

D $= 2.3219$

เพราะฉะนั้น ค่ามิติของรูปที่ 2.31 จะมีค่าเป็น 2.3219

2.4.6 ต้นไม้ CC1



รูปที่ 2.32 ผังการสร้างต้นไม้ CC1

จากรูปที่ 2.32 จะพบว่าต้นไม้ CC1 มีการแตกตัวโดยใช้รูปต้นแบบแตกตัวออกเป็น 3 ส่วนโดยที่แต่ละส่วนที่แตกตัวจะมีขนาดเป็น 1/2 เท่าของรูปต้นแบบ เพราะฉะนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 3 และ S จะมีค่าเป็น 1/2 เมื่อนำค่ามาใส่สมการ จะได้ผลดังนี้

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อ D = ค่ามิติ

N = จำนวนกล่องที่ครอบแฟรกทอลอยู่ = 3

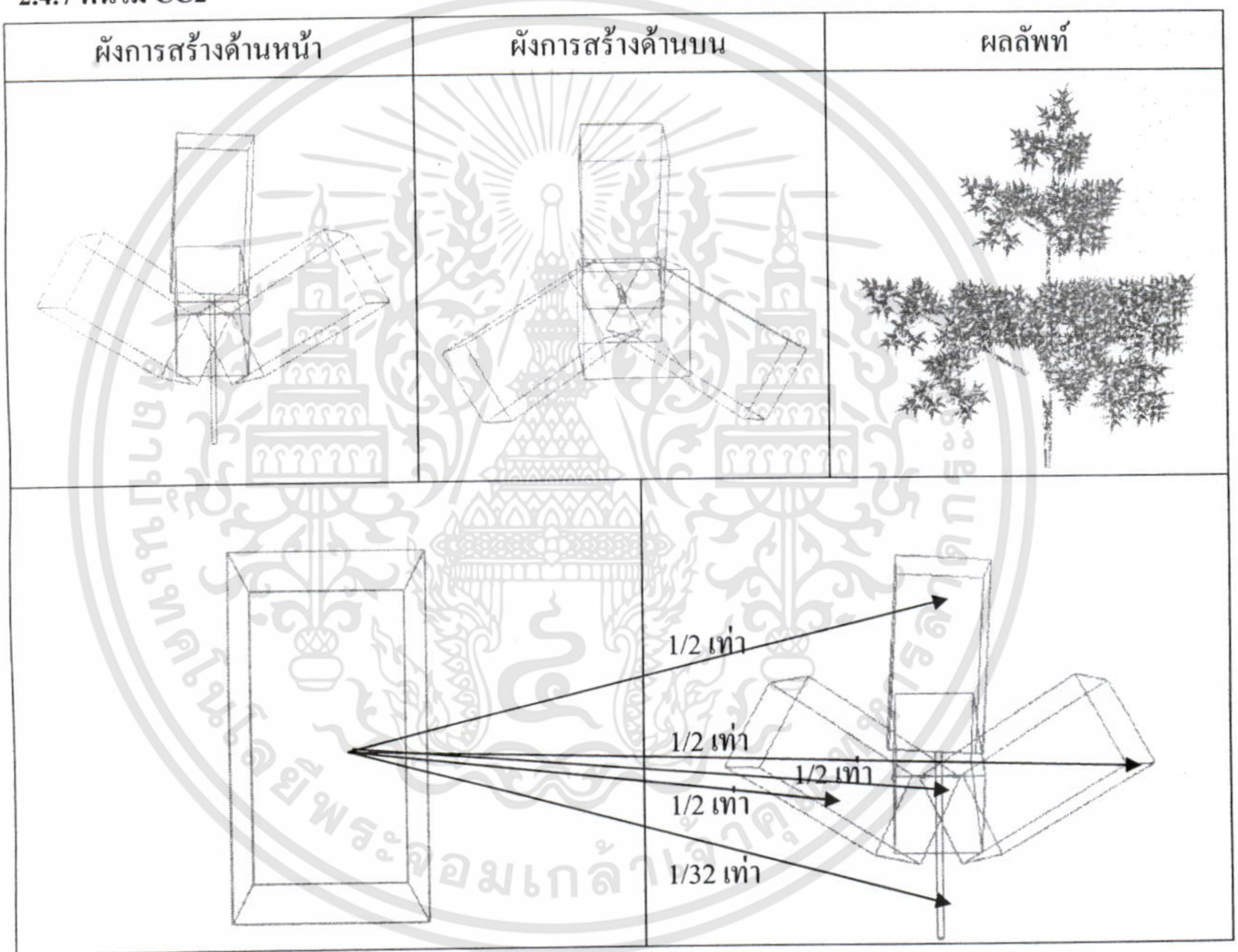
S = สัดส่วนการแตกตัวที่ใช้หาค่ามิติ = ½

$$D = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$D \;\; = 1.5849$

เพราะฉะนั้น ค่ามิติของรูปที่ 2.32 จะมีค่าเป็น 1.5849

2.4.7 ต้นไม้ CC2



รูปที่ 2.33 ผังการสร้างต้นไม้ CC2

จากรูปที่ 2.32 จะพบว่าต้นไม้ CC2 มีการแตกตัวโดยใช้รูปต้นแบบแตกตัวออกเป็น 5 ส่วนโดยที่ 4 ส่วนแรกที่แตกตัวจะมีขนาดเป็น 1/2 เท่าของรูปต้นแบบ และอีก 1 ส่วนแตกตัวเป็น 1/32 เท่าของรูปต้นแบบ ดังนั้นค่า N ของการหาค่ามิติจะเท่ากับ 5 แต่ค่า S จะมี 2 ค่า ได้แก่ 1/2 เท่า และ 1/32 เท่า ทั้งนี้เนื่องจาก ต้นไม้ CC2 มีสัดส่วนในการแตกตัว 2 สัดส่วน จึงต้องทำการแปลงสมการเพื่อหาค่าใหม่ ดังนี้

จากผังการสร้างต้นไม้ CC2 รูปที่ 2.32 กำหนดให้จำนวนที่แตกตัวทั้งหมด เท่ากับ ผลรวมของจำนวนที่แตกตัวแต่ละส่วน

โดยที่จำนวนการแตกตัวหาได้จากสมการ

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

เมื่อแปลงสมการในข้างต้น จะได้สมการใหม่คือ

$$(1/S)^D = N \tag{2.6}$$

จากการกำหนดให้จำนวนที่แตกตัวทั้งหมดเท่ากับผลรวมของจำนวนที่แตกตัวแต่ละส่วน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการดังนี้

$$N = \sum (1/S)^D \tag{2.7}$$

เมื่อนำจำนวนการแตกตัวของรูปตั้งต้นเท่าจำนวนหลังทำการแตกตัว

โดยที่จำนวนการแตกตัวของรูปตั้งต้น

S=1

$$N = \sum (1/S)^D$$
$$N = \sum (1/1)^D$$
$$N = 1^D \tag{2.8}$$

และจำนวนหลังการแตกตัวของรูปตั้งต้น

S= 1/2 และ 1/32

$$N = \sum (1/S)^D$$

$$N = \frac{1}{2}^D + \frac{1}{2}^D + \frac{1}{2}^D + \frac{1}{2}^D + \frac{1}{32}^D \tag{2.9}$$

เมื่อนำสมการที่ 2.8 แทนค่าในสมการที่ 2.9 จะได้ผลออกมาดังนี้

$$N = \sum (1/S)^D$$
$$1^D = \frac{1}{2}^D + \frac{1}{2}^D + \frac{1}{2}^D + \frac{1}{2}^D + \frac{1}{32}^D$$
$$1^D = 4\frac{1}{2}^D + \frac{1}{32}^D$$

ทำการแทนค่า $(\frac{1}{2})^D$ ด้วย ϕ

$$\phi = (\frac{1}{2})^D$$

จะได้ดังสมการต่อไปนี้

$$1^{D} = 4\phi + \phi^{5}$$

จะได้ค่ามิติออกมาเป็น

$$D = 2.0827$$

เพราะฉะนั้น ค่ามิติของรูปที่ 2.32 จะมีค่าเป็น 2.0827

บทที่ 3
การหามิติแฟรกทอลโดยวิธีนับทรงรี

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับ วิธีการหาค่ามิติแฟรกทอลด้วยวิธีการแบบใหม่ โดยเน้นการแก้ปัญหาของการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ ที่มีรูปทรงไม่สอดคล้องกับวัตถุที่ทำการหาค่ามิติ โดยวิธีการหามิติแบบใหม่นี้ได้ทำการเปลี่ยนรูปทรงของกล่องจากเดิมที่เป็นกล่อง 2 มิติทรงสี่เหลี่ยมและลูกบาศก์มาเป็นรูปทรงรี การหามิติแบบใช้ทรงรีได้ถูกพัฒนาขึ้นจากภาษาซี และใช้ Open GL มาเป็นตัวช่วยในการแสดงภาพ 3 มิติ

3.1 การหาค่ามิติแบบนับทรงรี

วิธีการหาค่ามิติแบบนับทรงรีได้พัฒนาขึ้นจากวิธีการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ เพื่อแก้ไขปัญหาของวิธีการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ ที่ทำการหาค่ามิติมีรูปทรง ที่ไม่ได้สอดคล้องกับลูกบาศก์ที่ใช้หาค่ามิติ เช่นรูปทรงของใบไม้มีลักษณะที่โค้ง และแบนคล้ายทรงรี เมื่อใช้วิธีการค่ามิติแบบนับลูกบาศก์มาทำการหาค่ามิติจะทำให้เกิดช่องว่างจำนวนมากภายในลูกบาศก์ เพื่อที่จะแก้ไขปัญหาของลูกบาศก์ที่ใช้การหาค่ามิติมีรูปร่างไม่เหมาะสมกับต้นไม้ที่ทำการหาค่ามิติด้วยวิธีการเปลี่ยนลูกบาศก์มาเป็นกลุ่มทรงรี

กลุ่มทรงรีที่ใช้ในการหาค่ามิตินั้นจะมีปริมาตรเท่ากับลูกบาศก์ที่ใช้ในการหาค่ามิติโดยที่จะมีความยาวแกนเอกเป็น $b = \dfrac{L}{2x\sqrt[3]{\dfrac{22}{21}}}$ ซึ่งมาจากการให้ปริมาตรของ 1 ลูกบาศก์เท่ากัน ปริมาตรของทรงรี 8 หน่วยจะพิสูจน์ได้ดังนี้

$$V_c = 8xV_e$$

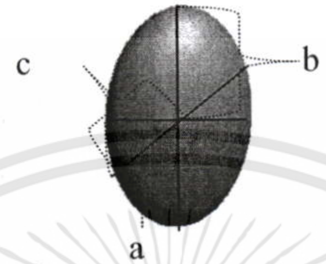
$$L^3 = 8x\frac{4}{3}\pi abc = 8x\frac{4}{3}\pi\frac{b^3}{4} = \frac{176}{21}b^3$$

$$L = 2bx\sqrt[3]{\frac{22}{21}}$$

L	เป็นความยาวของลูกบาศก์
a, c	เป็นความยาวแกนโท
b	เป็นความยาวแกนเอก
V_c	เป็นปริมาตรของลูกบาศก์
V_e	เป็นปริมาตรของทรงรี

3.1.1 การสร้างกลุ่มทรงรี

กลุ่มวงรีที่ใช้ในการหาค่ามิติถูกสร้างจากวงรีที่มีของความยาวแกนเอก ต่อแกนโท เป็น 2 เท่า ดังรูปที่ 3.1 การจัดวางทรงรีแต่ละกลุ่มเป็นดังรูปที่ 3.2 ทรงรีแต่ละหน่วยสัมผัสกันพอดี



รูปที่ 3.1 ทรงรีที่มีขนาดของแกนเอกเป็น 2 เท่าของแกนโท

กำหนดให้

- ทรงรี ทรงที่ 1 หรือลูกเริ่มต้น มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุด (a, b, c) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-a)^2}{d^2}+\frac{(y-b)^2}{(2d)^2}+\frac{(z-c)^2}{d^2}=1 \tag{3.1}$$

- ทรงรี ทรงที่ 2 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุด (a+2d, b, c) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-(a+2d))^2}{d^2}+\frac{(y-b)^2}{(2d)^2}+\frac{(z-c)^2}{d^2}=1 \tag{3.2}$$

- ทรงรี ทรงที่ 3 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุด (a, b, c+2d) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-a)^2}{d^2}+\frac{(y-b)^2}{(2d)^2}+\frac{(z-(c+2d))^2}{d^2}=1 \tag{3.3}$$

- ทรงรี ทรงที่ 4 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุด (a+2d, b, c+2d) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-(a+2d))^2}{d^2}+\frac{(y-b)^2}{(2d)^2}+\frac{(z-(c+2d))^2}{d^2}=1 \tag{3.4}$$

- ทรงรี ทรงที่ 5 หรือลูกเริ่มต้นมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (a+d, b-k, c+d) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-(a+d))^2}{d^2}+\frac{(y-(b-k))^2}{(2d)^2}+\frac{(z-(c+d))^2}{d^2}=1 \tag{3.5}$$

- ทรงรี ทรงที่ 6 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุด (a+3d, b-k, c+d) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-(a+3d))^2}{d^2}+\frac{(y-(b-k))^2}{(2d)^2}+\frac{(z-(c+d))^2}{d^2}=1 \quad (3.6)$$

- ทรงรี ทรงที่ 7 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุด (a+d, b-k,c+3d) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-(a+d))^2}{d^2}+\frac{(y-(b-k))^2}{(2d)^2}+\frac{(z-(c+3d))^2}{d^2}=1 \quad (3.7)$$

- ทรงรี ทรงที่ 8 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุด (a+3d, b-k, c+3d) มีสมการทรงรีเป็น

$$\frac{(x-(a+3d))^2}{d^2}+\frac{(y-(b-k))^2}{(2d)^2}+\frac{(z-(c+3d))^2}{d^2}=1 \quad (3.8)$$

a,b,c เป็นจุดพิกัด7

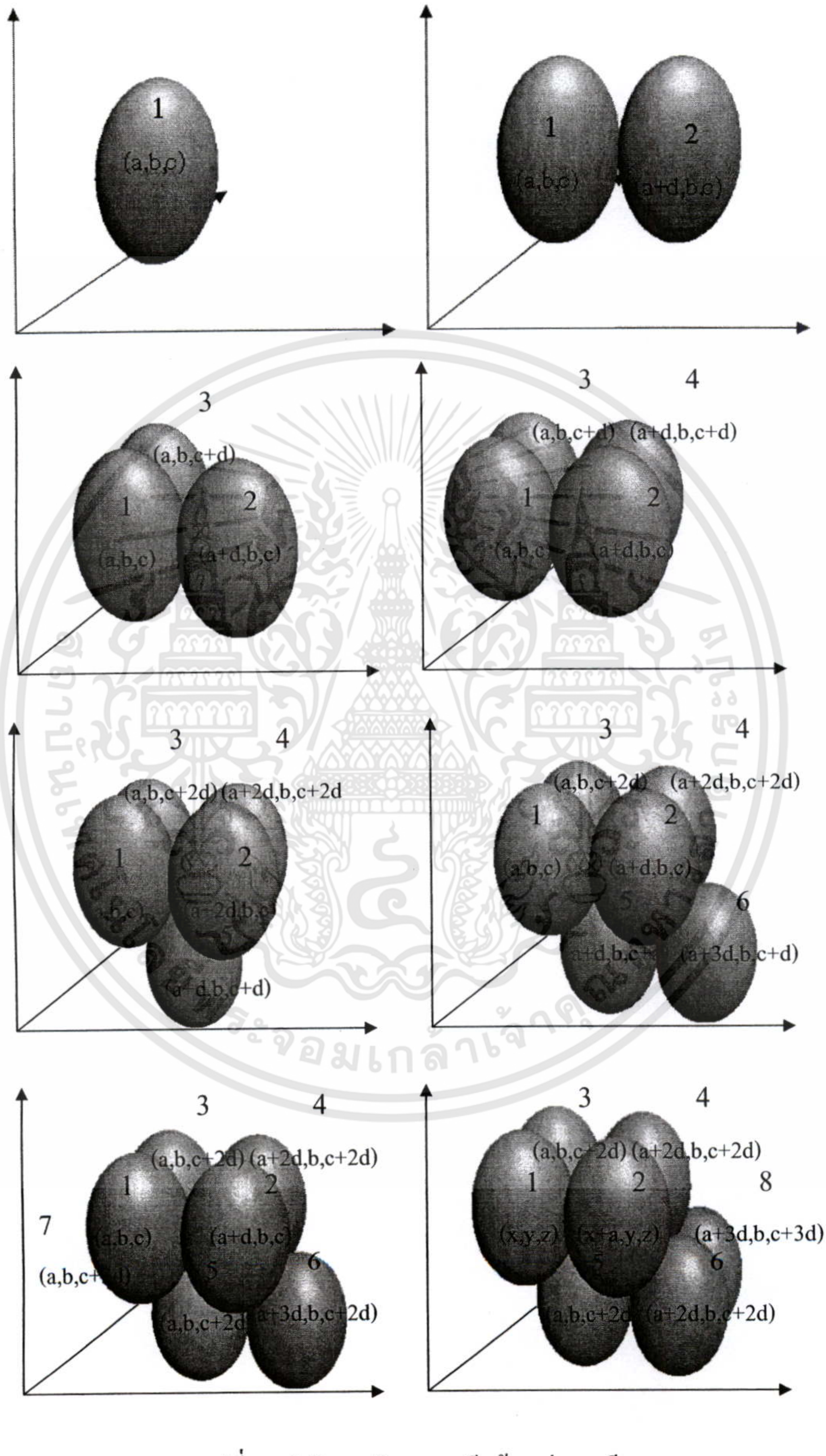
d เป็นความยาวของแกนโท

k เป็นระยะห่างตามแนวแกน Y จากจุดกึ่งกลางของทรงรีหน่วยที่ 1-4 ไปยังศูนย์กลางของทรงรีหน่วยที่ 5

การวางทรงรีวางไล่จากทรงรี ทรงที่ 1 ไปถึงทรงรี ทรงที่ 8 ดังรูป แต่ละทรงรีสัมพัสพอดีโดยที่ทรงรีลูกที่ 5 ถูกวางอยู่ระหว่างช่องว่างของทรงรี ทรงที่ 1-4 ดัง รูปที่ 3.2 จะมีระยะตามแกน y มีค่าเท่ากัน k หาได้จาก การหาจุดสัมผัสพอดี ของทรงรี 1-4 กับ ทรงรีทรงที่ 5 จะได้

$$k\begin{cases}(3.1)=(3.5)\\(3.2)=(3.5)\\(3.3)=(3.5)\\(3.4)=(3.5)\\\Delta=0\end{cases}$$

k เป็นระยะห่างตามแนวแกน y จากจุดกึ่งกลางของทรงรี ทรงที่ 1-4 ไปยังศูนย์กลางของทรงรีหน่วยที่ 5

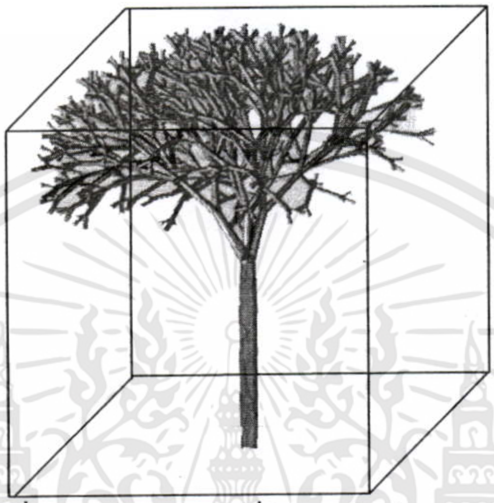


รูปที่ 3.2 ลำดับการจัดวางทรงรีสร้างกลุ่มทรงรี

3.1.2 ขั้นตอนการหาค่ามิติ

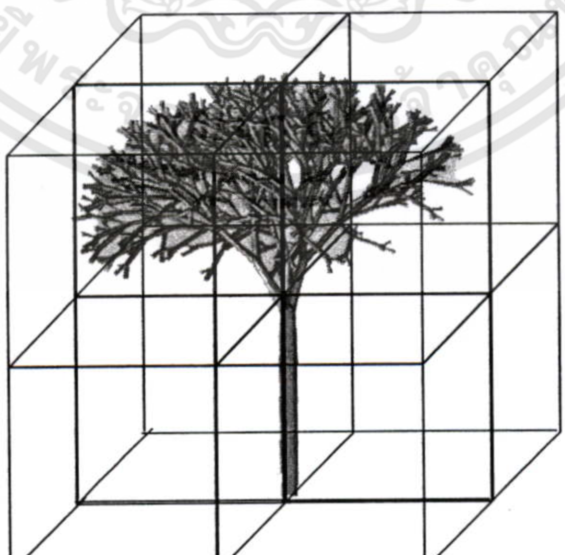
ขั้นตอนการในทำงานนี้จะแบ่งออกเป็น 4 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 สร้างลูกบาศก์ที่มีขนาดใหญ่พอดีกับรูปทรงแฟรกทอลแล้วนำมาครอบดังรูปที่3.3



รูปที่ 3.3 สร้างลูกบาศก์ที่มีขนาดใหญ่ครอบวัตถุ

ขั้นที่ 2 ทำการแบ่งลูกบาศก์ออกเป็น 8 ส่วน โดยในแต่ละส่วนมีขนาดเท่ากัน ดังรูปที่ 3.4 จะเห็นได้ว่ามีการแบ่งลูกบาศก์ในทางลึกด้วย ถ้าต้องการเพิ่มจำนวนลูกบาศก์ที่ใช้ในการหาค่ามิติให้มีจำนวนมากขึ้น สามารถทำได้โดยการแตกลูกบาศก์ที่ได้ทำการแตกไปแล้วออกเป็น 8 ส่วน



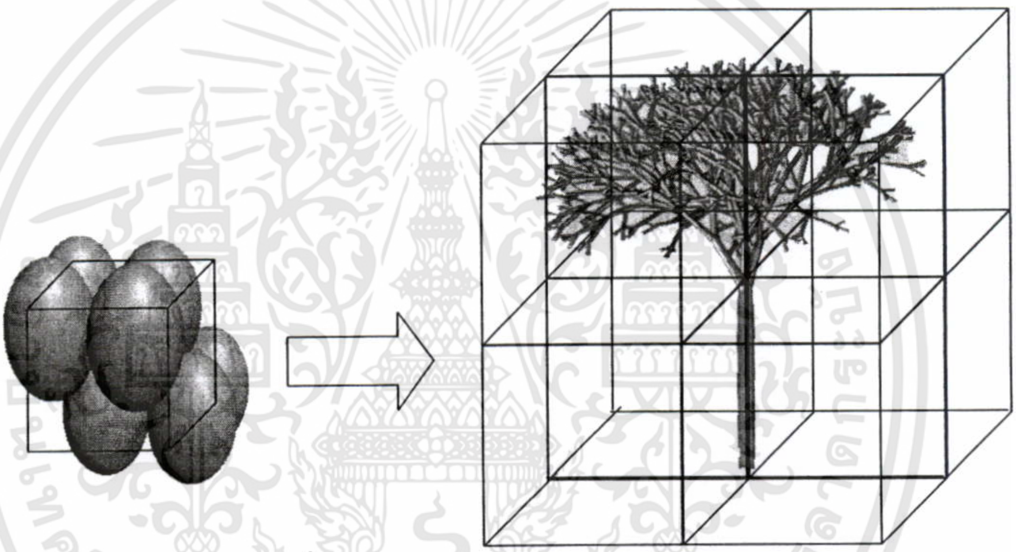
รูปที่ 3.4 การแบ่งลูกบาศก์ในทางลึก

ขั้นที่ 3 ทำการแทนลูกบาศก์แต่ละหน่วย ด้วยกลุ่มทรงรี ซึ่งมีปริมาตรเท่ากับลูกบาศก์ที่ใช้ในการหาค่ามิติจากขั้นตอนที่ 2 วางจุดศูนย์กลางของกลุ่มทรงรี ให้ตรงกับ จุดศูนย์กลางของ ลูกบาศก์ ดังรูปที่ 3.5 โดยที่ความยาวแกนเอกมาจะมีสัดส่วนกันความยาวของลูกบาศก์เป็น 2 เท่า จะได้ผลลัพ์ออกมาดังรูปที่ 3.6

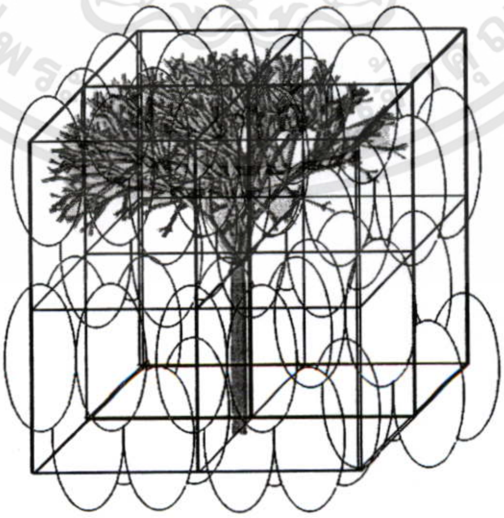
$$b = \frac{L}{2x\sqrt[3]{\frac{22}{21}}}$$

L เป็น ความยาวของลูกบาศก์

b เป็นความยาวแกนเอก



รูปที่ 3.5 การแทนทรงรีในลูกบาศก์



รูปที่ 3.6 ตัวอย่างการแทนทรงรีในลูกบาศก์

ขั้นที่ 4 ทำการคำนวนค่ามิติโดยใช้สมการ ดังนี้

$$D = -\frac{\log N}{\log \frac{1}{S}}$$

กำหนดให้

N : จำนวนลูกบาศก์ที่ครอบแฟรกทอล

S : จำนวนวงรีที่ใช้แบ่งเซกเมนต์

D : เป็นค่ามิติ

จากรูปตัวอย่างที่ 3.6 สามารถหาค่ามิติได้ดังนี้

N = 26 , S = 4

$$D = -\frac{\log 26}{\log \frac{1}{4}} = 2.350$$

บทที่ 4

ผลการทดลอง

การวิจัยนี้เป็นการศึกษาเปรียบเทียบผลการทดลองของค่ามิติที่ได้จากวิธีการหาค่ามิติแฟรกทอลแบบทรงรีกับค่ามิติแฟรกทอลที่ได้จากวิธีการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ โดยใช้ค่ามิติของแฟรกทอลทางทฤษฎีเป็นเกณฑ์มาตรฐานในการวัดค่ามิติที่ใกล้เคียง ซึ่งผู้วิจัยได้พัฒนาโปรแกรมต้นแบบที่ใช้สำหรับหาค่ามิติแฟรกทอลด้วยภาษาซี (C Language) แล้วนำไปทดลองกับข้อมูลวัตถุแฟรกทอลโดยใช้ข้อมูลต้นไม้ที่ถูกสร้างจากวิธีการไอเอฟเอสซึ่งสามารถคำนวณค่ามิติทางทฤษฎีได้

4.1. ลักษณะข้อมูลที่ใช้ในการทดลอง

ข้อมูลที่ใช้ในการทดลองเป็นข้อมูลจุดยอด (Vertex) ของแบบจำลองต้นไม้ 3 มิติที่จำลองจากต้นไม้ในทางทฤษฎี ซึ่งแบบจำลองต้นไม้ 3 มิติที่ใช้ในการทดลองนี้จะถูกสร้างขึ้นโดยใช้โปรแกรมสร้างแบบจำลอง 3 มิติ คือ 3D Studio MAX

4.1.1 การเตรียมข้อมูล

ในการเตรียมข้อมูลทดลอง การทำงานแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอนได้แก่ การสร้างแบบจำลองต้นไม้ 3 มิติ การแปลงข้อมูลมาเป็นเอเอสอี (ASE) และ การนำเข้าข้อมูล (Import) ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างแบบจำลองต้นไม้ 3 มิติ

การสร้างแบบจำลองต้นไม้จะสร้างด้วยโปรแกรมสร้างแบบจำลอง 3 มิติซึ่งในงานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม 3D Studio MAX โดยจำลองจากข้อมูลที่เป็นตำแหน่งส่วนประกอบต่างๆ ของต้นไม้ ตัวอย่างเช่น ยอด หน่อ ใบ เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 2 การแปลงข้อมูลมาเป็นเอเอสอี

แบบจำลองต้นไม้ที่สร้างขึ้นสามารถแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปแบบของเอเอสอี (ASE - ASCII Scene Export) ซึ่งมีข้อมูลหลัก คือ จุดยอดของต้นไม้ที่ได้สร้างขึ้น [12] ดังตัวอย่างในรูปที่ 4.1 แสดงตัวอย่างของข้อมูลภายในไฟล์ .ASE

```
*3DSMAX_ASCIIEXPORT	200
*COMMENT "AsciiExport Version  2.00 - Wed May 02 12:57:34 2007"
*SCENE {
	*SCENE_FILENAME ""
	*SCENE_FIRSTFRAME 0
	*SCENE_LASTFRAME 100
	*SCENE_FRAMESPEED 30
	*SCENE_TICKSPERFRAME 160
	*SCENE_BACKGROUND_STATIC 0.0000	0.0000	0.0000
	*SCENE_AMBIENT_STATIC 0.0000	0.0000	0.0000
}
*MATERIAL_LIST {
	*MATERIAL_COUNT 0
}
*GEOMOBJECT {
	*NODE_NAME "Box01"
	*NODE_TM {
		*NODE_NAME "Box01"
		*INHERIT_POS 0 0 0
		*INHERIT_ROT 0 0 0
		*INHERIT_SCL 0 0 0
		*TM_ROW0 1.0000	0.0000	0.0000
		*TM_ROW1 0.0000	1.0000	0.0000
		*TM_ROW2 0.0000	0.0000	1.0000
		*TM_ROW3 -3.6276	-6.5608	0.0000
		*TM_POS -3.6276	-6.5608	0.0000
		*TM_ROTAXIS 0.0000	0.0000	0.0000
		*TM_ROTANGLE 0.0000
		*TM_SCALE 1.0000	1.0000	1.0000
		*TM_SCALEAXIS 0.0000	0.0000	0.0000
		*TM_SCALEAXISANG 0.0000
```

รูปที่ 4.1 แสดงตัวอย่างข้อมูลภายในไฟล์ .ASE

```
*MESH {
	*TIMEVALUE 0
	*MESH_NUMVERTEX 8
	*MESH_NUMFACES 12
	*MESH_VERTEX_LIST {
		*MESH_VERTEX	0 -22.5082	-24.8083	0.0000
		*MESH_VERTEX	1 15.2530	-24.8083	0.0000
		*MESH_VERTEX	2 -22.5082	11.6867	0.0000
		*MESH_VERTEX	3 15.2530	11.6867	0.0000
		*MESH_VERTEX	4 -22.5082	-24.8083	38.6634
		*MESH_VERTEX	5 15.2530	-24.8083	38.6634
		*MESH_VERTEX	6 -22.5082	11.6867	38.6634
		*MESH_VERTEX	7 15.2530	11.6867	38.6634
	}
	*MESH_FACE_LIST {
		*MESH_FACE  0:  A:  0 B:  2 C:  3 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 2	*MESH_MTLID 1
		*MESH_FACE  1:  A:  3 B:  1 C:  0 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 2	*MESH_MTLID 1
		*MESH_FACE  2:  A:  4 B:  5 C:  7 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 3	*MESH_MTLID 0
		*MESH_FACE  3:  A:  7 B:  6 C:  4 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 3	*MESH_MTLID 0
		*MESH_FACE  4:  A:  0 B:  1 C:  5 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 4	*MESH_MTLID 4
		*MESH_FACE  5:  A:  5 B:  4 C:  0 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 4	*MESH_MTLID 4
		*MESH_FACE  6:  A:  1 B:  3 C:  7 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 5	*MESH_MTLID 3
		*MESH_FACE  7:  A:  7 B:  5 C:  1 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 5	*MESH_MTLID 3
		*MESH_FACE  8:  A:  3 B:  2 C:  6 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 6	*MESH_MTLID 5
		*MESH_FACE  9:  A:  6 B:  7 C:  3 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 6	*MESH_MTLID 5
		*MESH_FACE 10:  A:  2 B:  0 C:  4 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 7	*MESH_MTLID 2
		*MESH_FACE 11:  A:  4 B:  6 C:  2 AB:  1 BC:  1 CA:  0	*MESH_SMOOTHING 7	*MESH_MTLID 2
	}
```

รูปที่ 4.2 แสดงข้อมูลจุดและสามเหลี่ยมภายในไฟล์ .ASE

จากรูปที่ 4.2

- MESH_NUMVERTEX คือ ค่าจำนวนจุดของวัตถุ 3D มีจำนวนจุดทั้งหมด จากตัวอย่างจะมีจุดทั้งหมด 8 จุด
- MESH_NUMFACES คือ ค่าจำนวนของสามเหลี่ยมที่ประกอบเป็นวัตถุ 3D จากตัวอย่างมีหน้า ทั้งหมด 12 หน้า (Face)
- MESH_VERTEX คือ ค่าของจุดพิกัด x y z ของแต่ละจุด VERTEX
- MESH_FACE คือ ค่าของจุด VERTEX ของหน้าตัดสามเหลี่ยม โดยจะนำค่าพิกัดมาจาก MESH_VERTEX

ขั้นตอนที่ 3 การนำเข้าข้อมูล

นำเข้าข้อมูลจุดยอด (Vertex) ที่อยู่ในรูปแบบของไฟล์เอเอสอี ซึ่งได้จากการแปลงข้อมูลในโปรแกรม 3D Studio Max ไปสู่โปรแกรมที่ผู้วิจัยพัฒนาขึ้น เพื่อทำการหาค่ามิติด้วยการใช้คำสั่งลำลอง (Pseudo Code) ในการอ่านค่าจุดยอดของต้นไม้ ดังนี้

```
ifstream text1("normal.ase"); //เป็นการเปิด ไฟล์ normal.ase เพื่อทำการอ่าน
และเก็บบันทึกค่า
while(text1)
{
   text1>>str;
      nobj = strcmp (str,"*GEOMOBJECT");
      {
        // ภายในส่วนนี้จะทำการเก็บจำนวนของ Object ที่ถึงสร้างขึ้น
      }
      nve =strcmp (str,"*MESH_NUMVERTEX");
      {
        // เก็บตำแหน่งของจุดต่างๆในแต่ละ Object
      }
      m=strcmp (str,"*MESH_FACE");
      {
        // เก็บข้อมูลของรูปหลายเหลี่ยมว่าประกอบด้วย จุดยอด อะไร
        //บ้าง 3 จุดยอด
      }
      n=strcmp (str,"*MESH_FACENORMAL");
      {
        // เก็บ Vexter normal ของแต่ละ Polygon
      }
```

```
            nvn=strcmp(str,"*MESH_VERTEXNORMAL");
            {
              // เก็บค่า Vexter normal ของแต่ละ จุดยอด
            }
      }
```

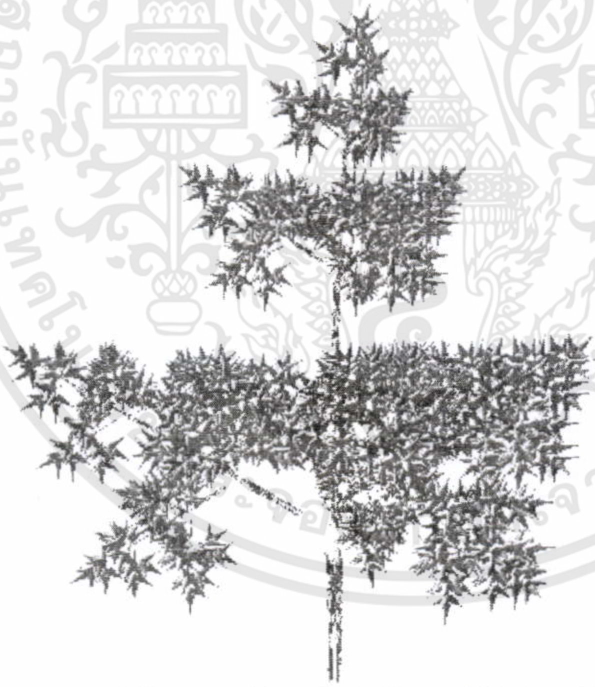
4.1.2 ข้อมูลที่ใช้ในการทดลอง

เป็นต้นไม้ทางทฤษฎี ที่ถูกสร้างจากวิธีการไอเอฟเอส ซึ่งสามารถคำนวนหาค่ามิติทางทฤษฎี

ลำดับ	รูปภาพ	ชนิดต้นไม้	ค่ามิติทางทฤษฎี
1		Ac1	1.4649

ลำดับ	รูปภาพ	ชนิดต้นไม้	ค่ามิติทางทฤษฎี
2		AC2	1.7712
3		AC3	2

ลำดับ	รูปภาพ	ชนิดต้นไม้	ค่ามิติทางทฤษฎี
4		Bc1	2
5		BC2	2.3219

ลำดับ	รูปภาพ	ชนิดต้นไม้	ค่ามิติทางทฤษฎี
6		CC1	1.5849
7		CC2	2.0827

4.2 เครื่องมือในการทดลอง

เครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการทดลองมีคุณสมบัติดังนี้

หน่วยประมวลผลกลาง (CPU)	:	Pentium(R) 4 CPU 1.60GHz
หน่วยความจำหลัก (RAM)	:	512 MD SD-RAM
หน่วยความจำสำรอง (Hard Disk)	:	20 GB
ระบบปฏิบัติการ (OS)	:	Windows XP
โปรแกรมที่ใช้พัฒนา	:	Microsoft Visual Studio 6

4.3 ผลการทดลอง

4.3.1 ผลการทดลองเปรียบเทียบความความถูกต้อง

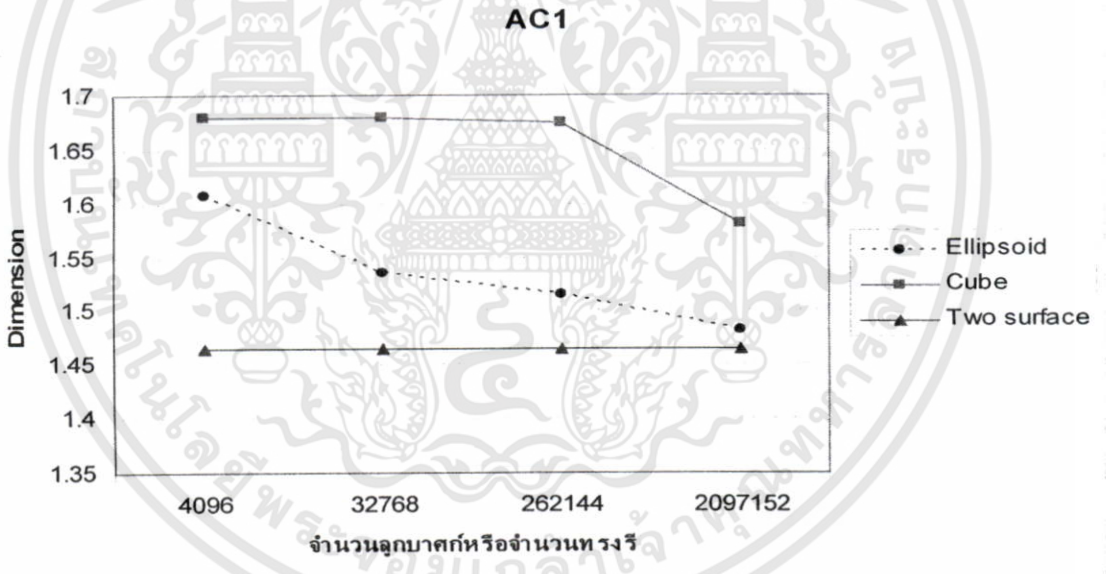
ผลการทดลองจะทำการเปรียบเทียบค่ามิติที่หาด้วยวิธีการนับทรงรีกับการนับลูกบาศก์ โดยใช้ค่ามิติทางทฤษฎีเป็นเกณฑ์มาตรฐาน ดังตารางที่ 4.1 แสดงค่ามิติแฟรกทอลของวิธีนับลูกบาศก์ของต้นไม้ที่ใช้ในการทดลองตามจำนวนลูกบาศก์ที่ใช้ในการหาค่ามิติ ตารางที่ 4.2 แสดงค่ามิติ แฟรกทอลของวิธีนับทรงรีของต้นไม้ที่ใช้ในการทดลองตามจำนวนทรงรีที่ใช้ในการหาค่ามิติ

ชื่อ \ จำนวนลูกบาศก์	4096	32768	262144	2097152	ค่ามิติทางทฤษฎี
AC1	1.784888	1.680176	1.679692	1.67487	1.4649
AC2	2.054792	1.998871	1.925445	1.851946	1.7712
AC3	2.206637	2.154957	2.121745	2.099722	2
BC1	2.403677	2.303731	2.210814	2.12848	2
BC2	2.717919	2.626417	2.486835	2.285432	2.3219
CC1	1.976723	1.920725	1.913801	1.91215	1.5849
CC2	2.275822	2.236851	2.183471	2.126351	2.0827

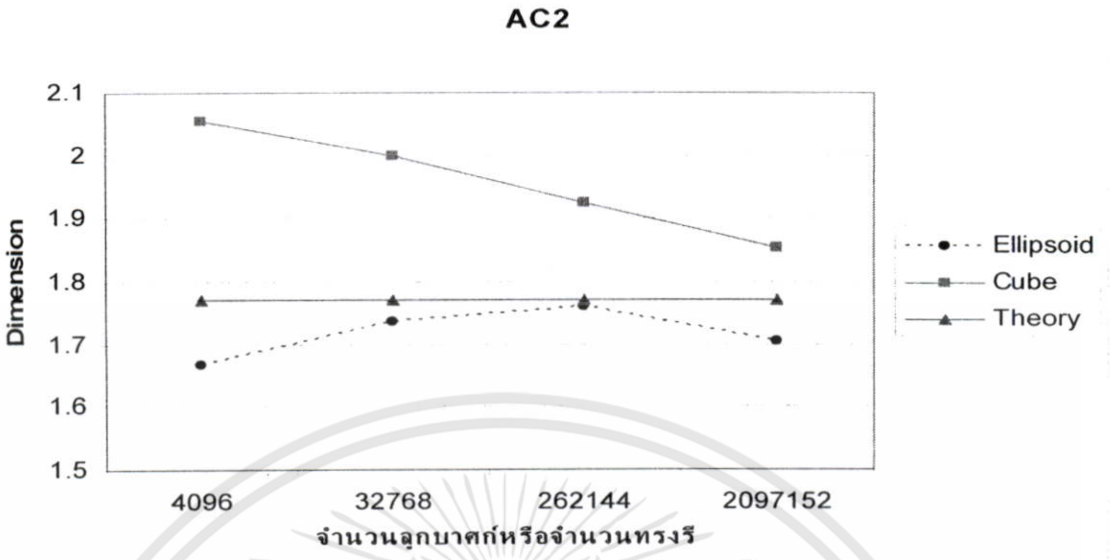
ตารางที่ 4.1 ค่ามิติแบบนับลูกบาศก์

จำนวนทรงรี / ชื่อ	4096	32768	262144	2097152	ค่ามิติทางทฤษฎี
AC1	1.678561	1.606685	1.53572	1.561745	1.4649
AC2	1.668106	1.735896	1.761009	1.705024	1.7712
AC3	1.860736	1.883571	1.918131	1.892963	2
BC1	1.943697	2.051242	1.93853	1.885273	2
BC2	2.327131	2.404908	2.197284	1.962763	2.3219
CC1	1.910964	1.772837	1.771559	1.740741	1.5849
CC2	1.979716	2.090448	2.026224	1.945631	2.0827

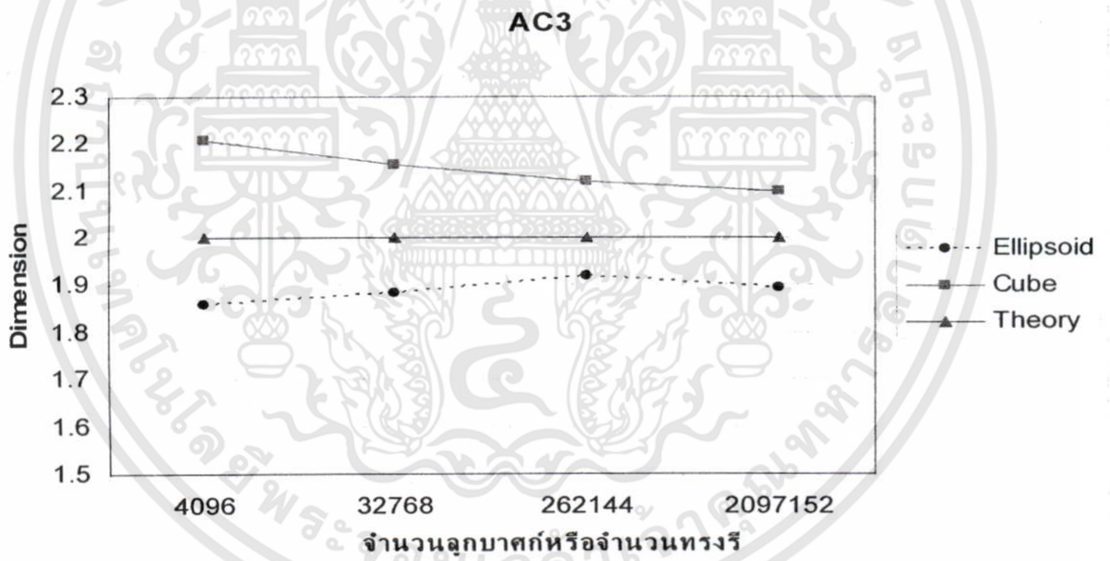
ตารางที่4.2 ค่ามิติแบบนับทรงรี



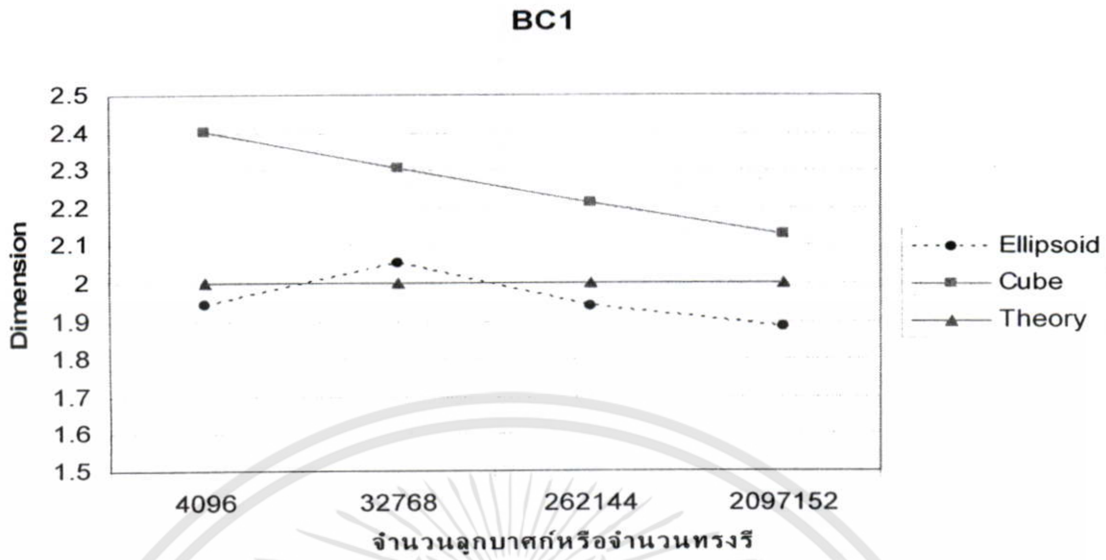
รูปที่ 4.3 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น AC1



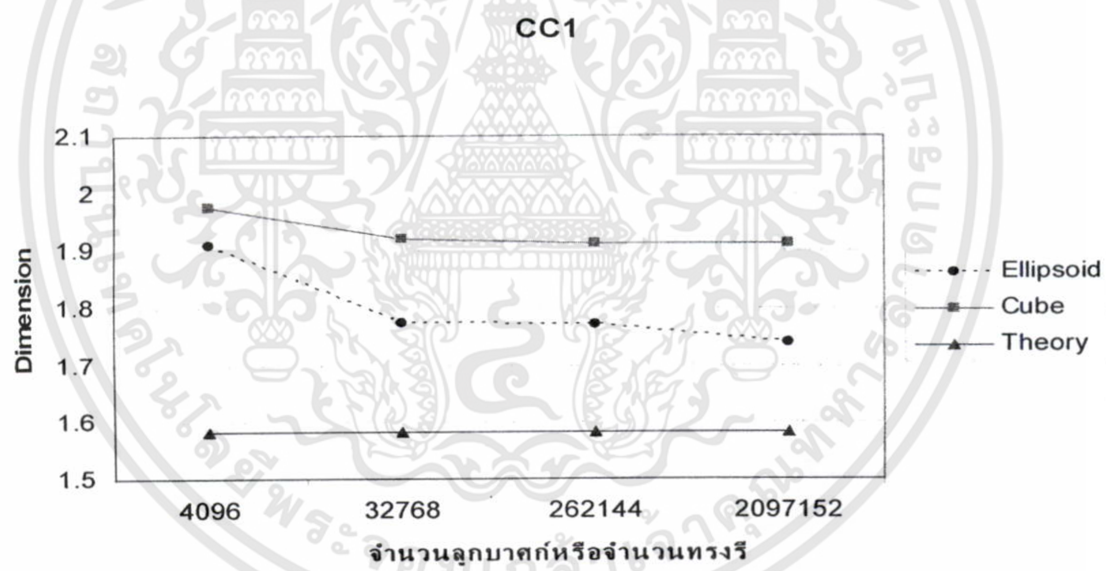
รูปที่ 4.4 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น AC2



รูปที่ 4.5 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น AC3

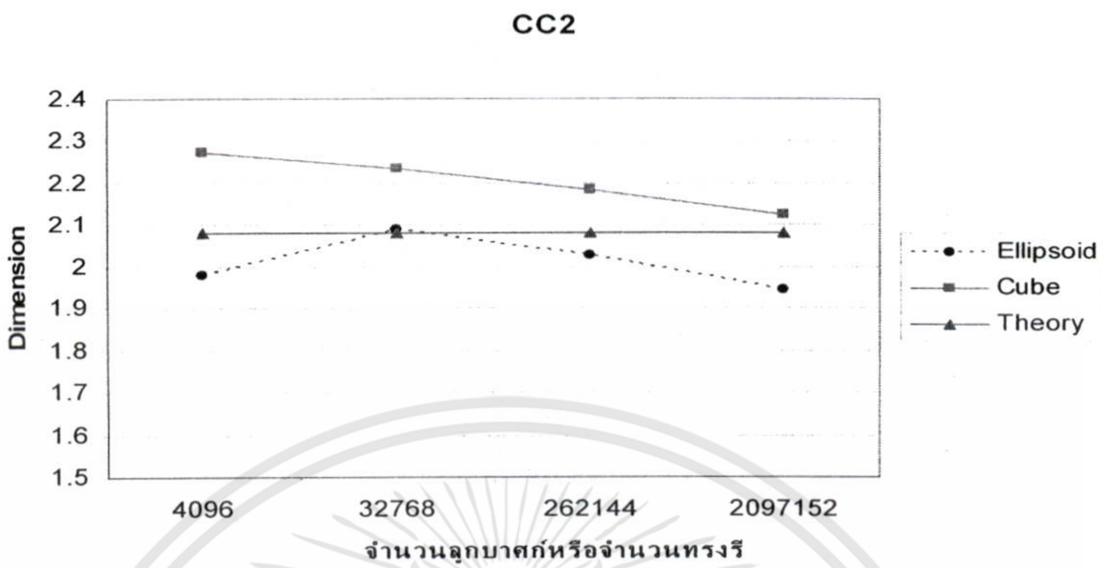


รูปที่ 4.6 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น BC1

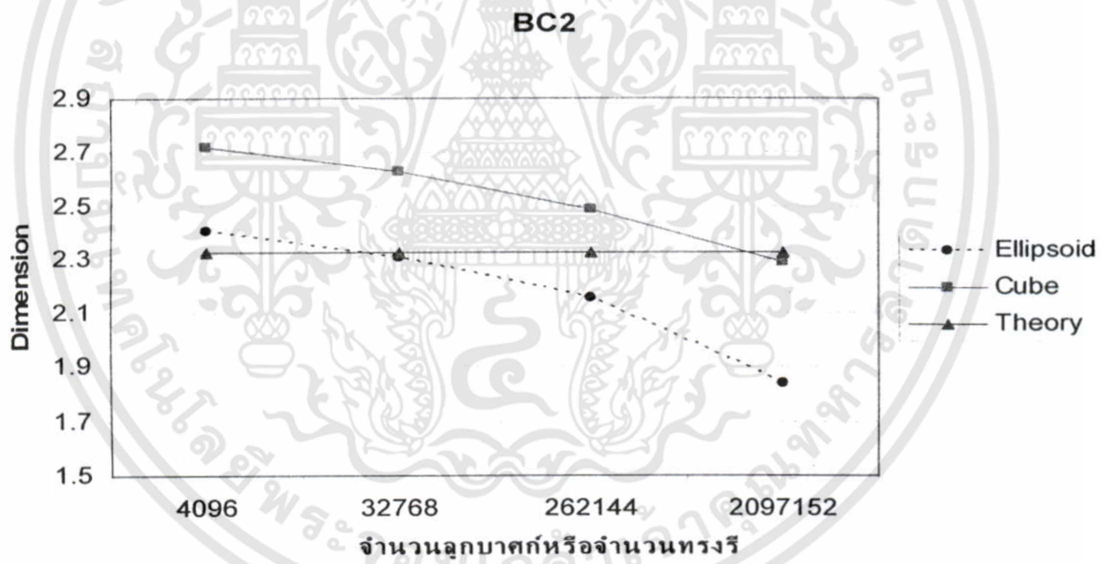


รูปที่ 4.7 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น CC1

จากรูปที่ 4.3 - 4.7 ต้นAC1, ต้นAC2, ต้นAC3, ต้นBC1 และ ต้นCC1พบว่าค่ามิติที่ได้จากวิธีการนับทรงรีจะมีความถูกต้องใกล้เคียงกับค่ามิติทางทฤษฎีมากกว่าค่ามิติที่ได้จากวิธีการนับลูกบาศก์



รูปที่ 4.8 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น CC2



รูปที่ 4.9 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น BC2

จากรูปที่ 4.8 - 4.9 ต้นBC2 และต้นCC2 พบว่าเมื่อยังใช้จำนวนลูกบาศก์หรือทรงรีจำนวนเป็นจำนวนน้อยในการหาค่ามิติ ค่ามิติที่ได้จากวิธีการนับทรงรี จะมีความถูกต้องใกล้เคียงกับค่ามิติทางทฤษฎีมากกว่าค่ามิติที่ได้จากวิธีการนับลูกบาศก์ แต่จะพบว่าเมื่อมีการใช้จำนวนลูกบาศก์หรือทรงรีเป็นจำนวนมากขึ้น ค่ามิติที่ได้จากวิธีการนับลูกบาศก์มีค่าใกล้เคียงค่ามิติทางทฤษฎีมากกว่าวิธีการนับทรงรี เนื่องมาจากรูปทรงที่นำมาทดลองมีจำนวนจุดที่น้อยเมื่อใช้จำนวนลูกบาศก์หรือทรงรีขึ้น จึงมีผลทำให้ค่ามิติที่ได้จากวิธีการนับทรงรีมีค่าต่ำลง

4.3.2 ผลการทดลองเปรียบเทียบความเร็ว

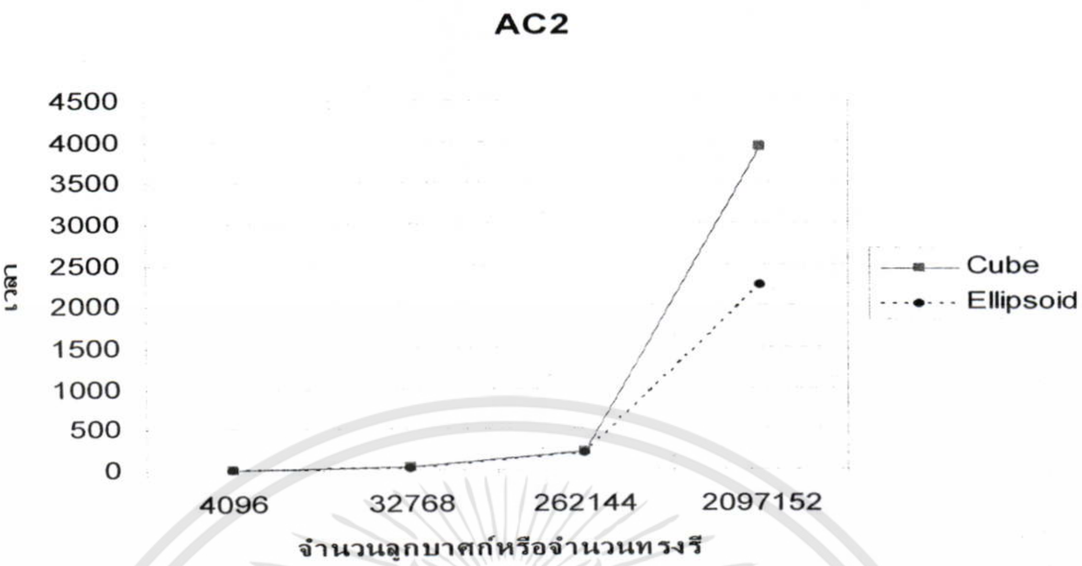
ผลการทดลองจะทำการเปรียบเทียบความเร็วที่หาได้ด้วยวิธีการนับทรงรีกับการนับลูกบาศก์ โดยตารางที่ 4.3 แสดงเวลาในการหาค่ามิติแฟรกทอลของวิธีนับลูกบาศก์ของต้นไม้ที่ใช้ในการทดลองตามจำนวนลูกบาศก์ที่ใช้ในการหาค่ามิติ ตารางที่ 4.4 แสดงเวลาในการหาค่ามิติแฟรกทอลของวิธีนับทรงรีของต้นไม้ที่ใช้ในการทดลองตามจำนวนทรงรีที่ใช้ในการหาค่ามิติ

ชื่อ \ จำนวนลูกบาศก์	4096	32768	262144	2097152
AC1	5	84	654	5157
AC2	4	29	223	2246
AC3	22	160	1310	10209
BC1	2	13	96	726
BC2	5	40	297	2212
CC1	60	460	3636	28360
CC2	45	337	2610	20194

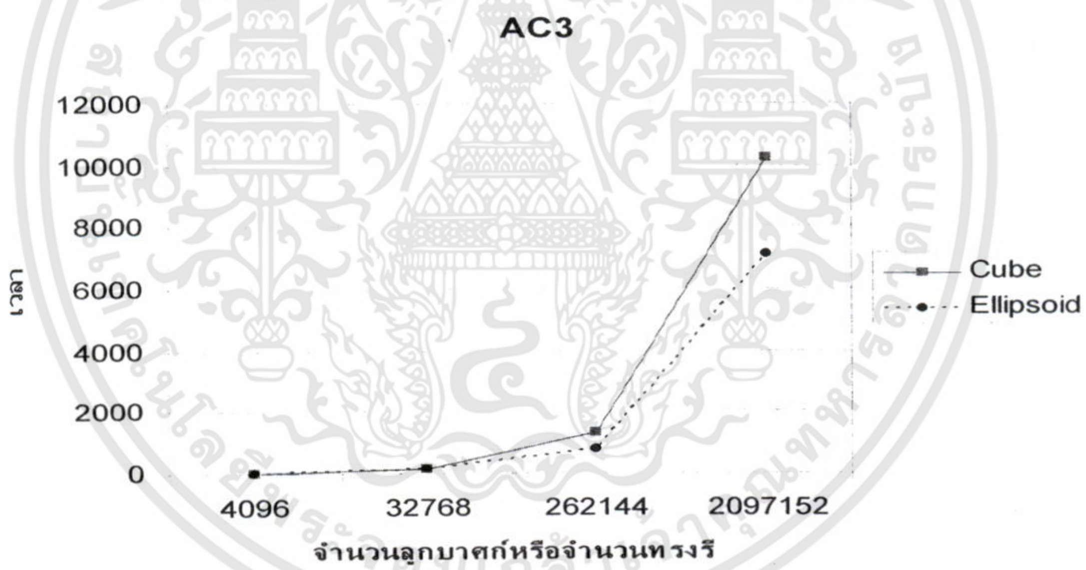
ตารางที่ 4.10 เวลาที่ใช้หาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ (วินาที)

ชื่อ \ จำนวนทรงรี	4096	32768	262144	2097152
AC1	7	233	759	6070
AC2	4	24	193	3916
AC3	14	122	764	7100
BC1	2	9	76	681
BC2	5	32	299	2670
CC1	79	299	2256	21343
CC2	47	206	1832	16949

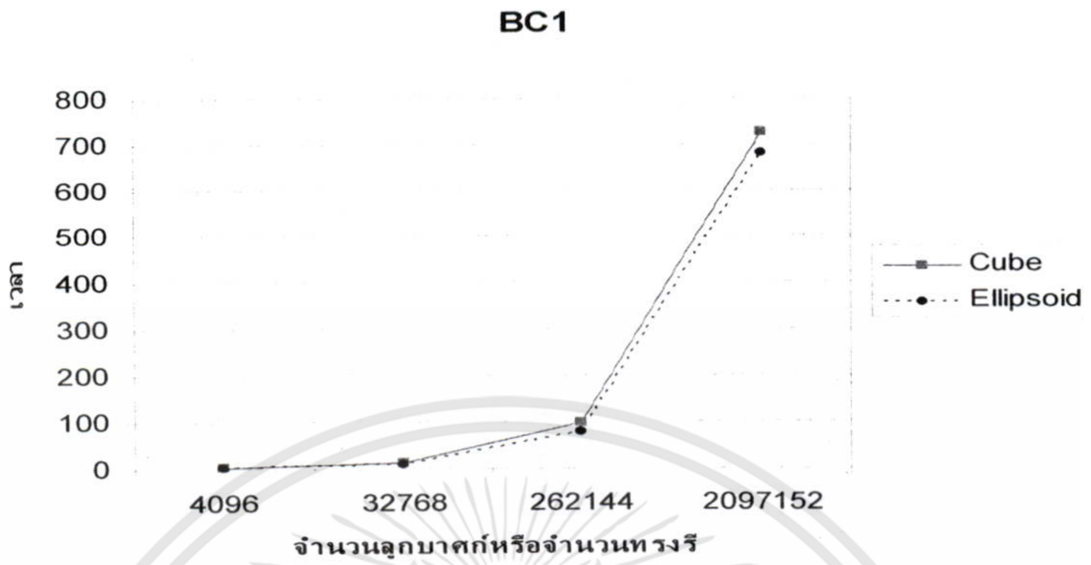
ตารางที่ 4.11 เวลาที่ใช้หาค่ามิติแบบนับทรงรี (วินาที)



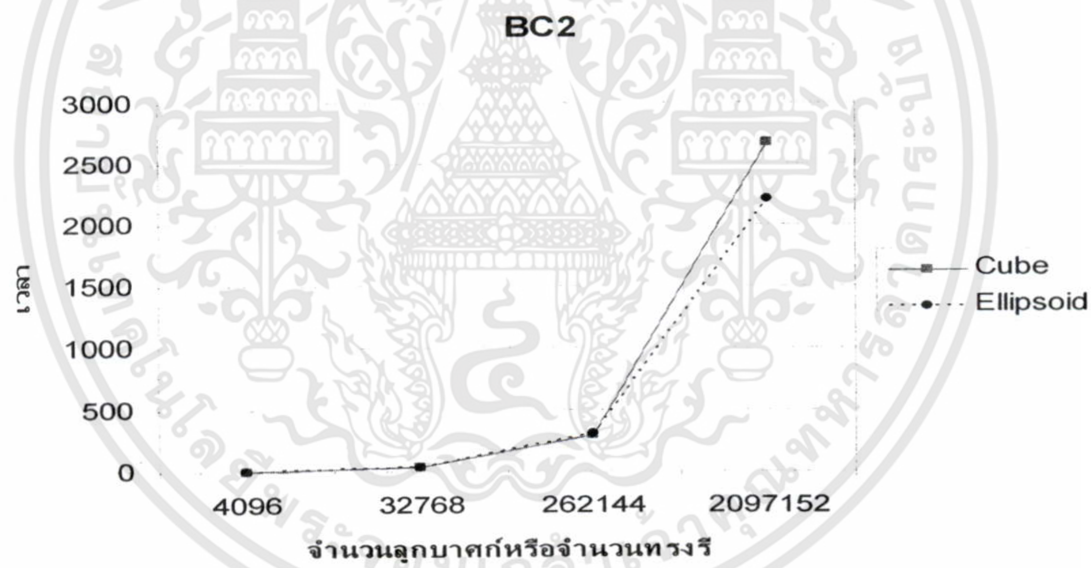
รูปที่ 4.12 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น AC2 (วินาที)



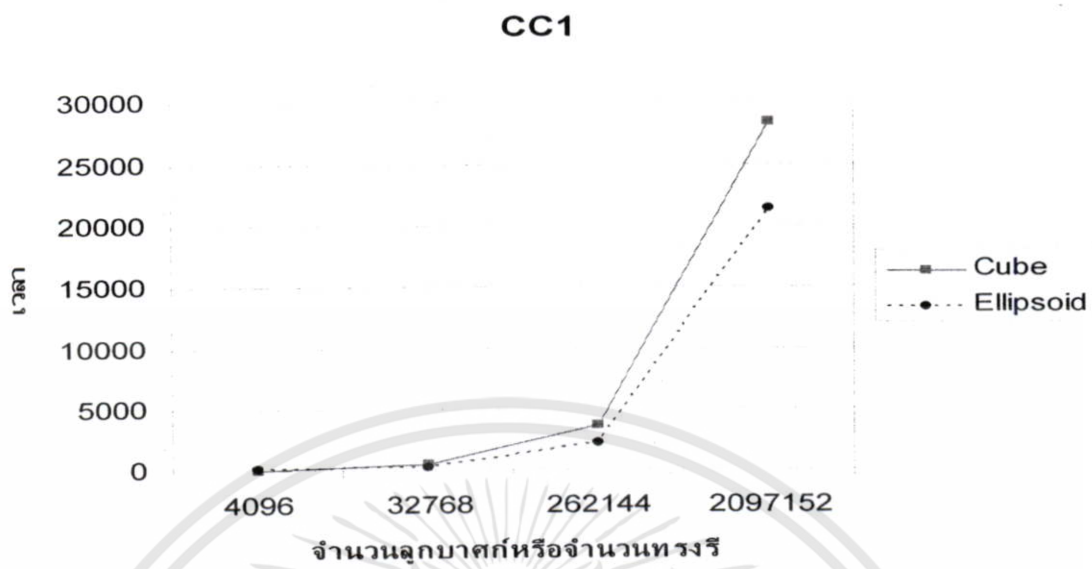
รูปที่ 4.13 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น AC3 (วินาที)



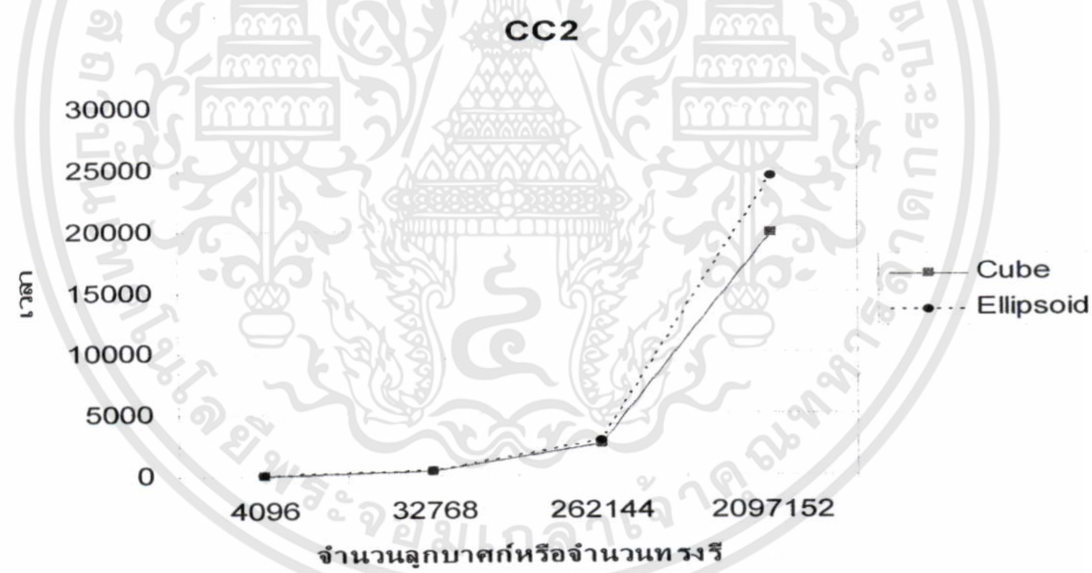
รูปที่ 4.14 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น BC1 (วินาที)



รูปที่ 4.15 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น BC2 (วินาที)

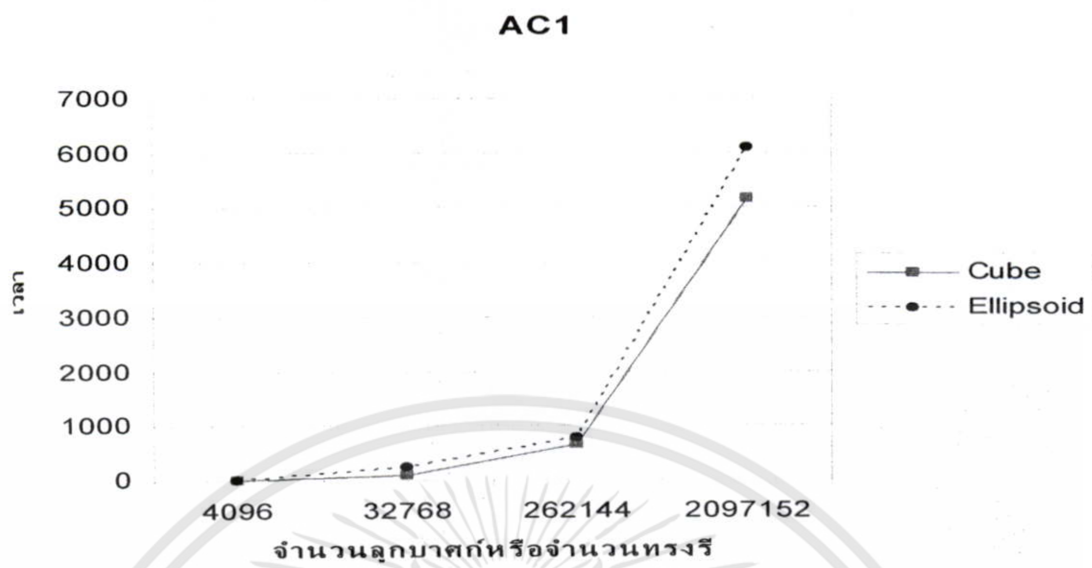


รูปที่ 4.16 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น CC1 (วินาที)



รูปที่ 4.17 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น CC2 (วินาที)

จากรูปที่ 4.12 - 4.17 พบว่าในช่วงแรกของการหาค่ามิติของวิธีนับทรงรีและวิธีนับลูกบาศก์ ซึ่งใช้จำนวนลูกบาศก์และทรงรีจำนวนที่น้อย จะใช้เวลาในการหาค่ามิติใกล้เคียงกัน แต่จะพบความแตกต่างอย่างชัดเจนเมื่อจำนวนลูกบาศก์และทรงรี ที่ใช้หาค่ามิติจำนวนมากขึ้น โดยพบว่าวิธีการนับทรงรีจะใช้เวลาในการหาค่ามิติน้อยกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการนับลูกบาศก์



รูปที่ 4.18 เปรียบเทียบค่ามิติของต้น AC1

จากรูปที่ 4.18 พบว่าในช่วงแรกของการหาค่ามิติของวิธีนับทรงรีและวิธีนับลูกบาศก์ ซึ่งใช้จำนวนลูกบาศก์และทรงรีจำนวนน้อย จะใช้เวลาในการหาค่ามิติใกล้เคียงกัน แต่จะพบความแตกต่างอย่างชัดเจนเมื่อจำนวนลูกบาศก์และทรงรีที่ใช้หาค่ามิติมีจำนวนมากขึ้น โดยพบว่าวิธีการนับทรงรีจะใช้เวลาในการหาค่ามิติมากกว่าวิธีการนับลูกบาศก์ อันเป็นผลมาจากรูปทรงของใบของต้นไม้ที่นำมาใช้ในการทดลองมีลักษณะคล้ายกับลูกบาศก์มากกว่ารูปทรงรี จึงทำให้ทรงรีจะใช้เวลาในการคำนวนหาจุดนานกว่ารูปทรงลูกบาศก์

4.4 สรุปผลการทดลอง

จากผลการทดลอง ซึ่งเป็นการศึกษาเปรียบเทียบการหาค่ามิติแฟรกทอลของต้นไม้ที่มีใบเป็นรูปทรงต่างๆ เช่น ใบรูปทรงรี CC1, ใบรูปทรงพีระมิด AC1 โดยวิธีการนับทรงรีนั้นมีค่ามิติที่ใกล้เคียงกับการหามิติทางทฤษฎีกว่าวิธีการนับลูกบาศก์ พบว่าในช่วงแรกของการหาค่ามิติแฟรกทอลทั้ง 2 วิธีใช้เวลาในการหาค่ามิติออกมาใกล้เคียงกัน แต่อย่างไรก็ตามพบว่าเมื่อจำนวนลูกบาศก์หรือทรงรี ที่ใช้ในการหาค่ามิติมีจำนวนมากขึ้น วิธีการนับทรงรีจะให้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่ามิติทางทฤษฎีมากกว่าวิธีการนับลูกบาศก์ยิ่งขึ้น และนอกจากนี้ยังพบว่าเวลาที่ใช้ในการหาค่ามิติของการนับทรงรีน้อยกว่าวิธีการนับลูกบาศก์อีกด้วย

บทที่ 5
สรุปและข้อเสนอแนะ

5.1. สรุปผลการวิจัย

งานวิจัยฉบับนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อหาค่ามิติของแฟรกทอลที่มีความลึก โดยใช้ข้อมูลต้นไม้แฟรกทอลเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบค่ามิติของแฟรกทอลจากวิธีการหาค่ามิติแบบนับทรงรีที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น กับวิธีการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ที่มีผู้คิดค้นไว้แล้ว ว่าค่ามิติของแฟรกทอลแบบใดที่มีค่าใกล้เคียงกับการหาค่ามิติแฟรกทอลทางทฤษฎีมากกว่า ซึ่งจากผลการทดลองสรุปได้ว่า วิธีการหาค่ามิติแบบนับทรงรีนั้นมีค่ามิติที่ใกล้เคียงกับค่ามิติทางทฤษฎีกว่าวิธีการหาค่ามิติแบบนับลูกบาศก์ และวิธีนับทรงรียังใช้เวลาในการหาค่ามิติน้อยกว่าวิธีนับลูกบาศก์ ถึงแม้ว่าในช่วงแรกของการหาค่ามิติแฟรกทอลทั้ง 2 วิธีจะใช้เวลาในการหาค่ามิติออกมาใกล้เคียงกัน แต่อย่างไรก็ตามพบว่าเมื่อจำนวนลูกบาศก์หรือทรงรีที่ใช้ในการหาค่ามิติมีจำนวนมากขึ้น พบว่าเวลาที่ใช้ในการหาค่ามิติของการนับทรงรีน้อยกว่าวิธีการนับลูกบาศก์อีกด้วย

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า การนำทรงรีมาทำการหาค่ามิติแฟรกทอลของต้นไม้ ให้ค่ามิติใกล้เคียงกับค่ามิติทางทฤษฎี มากกว่าการใช้รูปทรงลูกบาศก์ และยังใช้เวลาที่ใช้ในการหาค่ามิติน้อยกว่าวิธีการแบบนับลูกบาศก์ เนื่องจากทรงรีมีรูปทรงสอดคล้องกับใบของต้นไม้มากกว่ารูปทรงลูกบาศก์ จึงมีผลให้ค่ามิติที่ออกมามีค่าใกล้เคียงกับค่ามิติทางทฤษฎีมากยิ่งขึ้น

5.2. ข้อเสนอแนะ

- พัฒนาวิธีการหาค่ามิติโดยใช้รูปทรงอื่น เช่น ห้าเหลี่ยม หกเหลี่ยม แปดเหลี่ยม เป็นต้น เพื่อให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่ามาตรฐานทางทฤษฎีมากขึ้นกว่าทรงรี
- พัฒนาค่ามิติแฟรกทอลของรูปทรงที่ไม่ใช่ต้นไม้ เช่น ตึก ภูเขา เมฆ เป็นต้น
- พัฒนาวิธีการหาค่ามิติของต้นไม้จริงใดๆ เพื่อเป็นค่ามาตรฐานในการเปรียบเทียบแทนการใช้ค่าทางทฤษฎี

เอกสารอ้างอิง

[1] Feng, J., Lin, W.C. and Chen, C.T. "Fractional box-counting approach to fractal dimension estimation." **Proceedings of International Conference on Pattern Recognition.** 1996. pp. 854-858.

[2] Godin, C., Puech, O., Boudon, F. and Sinoquet, H. "Estimating the fractal dimension of plants using the two surface method. Ananalysis based on 3D- digitized tree foliage." **Fractals.**, vol.14,no.3,September 2006 .pp 149-163

[3] Godin, C. "Representing and encoding plant architecture: a review." **Annales of Forest Sciences 2000 5/6.** pp. 413-438.

[4] Godin, C., Puech, O., Boudon, F and Sinoquet, H. "Space occupation by tree crowns obeys fractals laws: evidence from 3D digitized plants." **Fourth International Workshop on Functional-Structural Tree and Stand Models, Montpellier**. 2004.

[5] Huang, S.J. and Lin, J.M. "Application of Box Counting Method-Based Fractal Geometry Technique for Disturbance Detection in Power Systems", **IEEE PES 2003 General Meeting.** 2003. pp. 1604-1608.

[6] Mandelbrot B.B. **The fractal geometry of nature,** W.N. Freeman, USA, 1983

[7] Oppelt, A.L., Kurth, W., Dzierzon, H., Jentschke, G. and Godbold, D.L. "Structure and fractal dimensions of root systems of four co-occurring fruit tree Species." **Botswana.Ann. For. Sci. 57.** 2000. pp. 463-475.

[8] Pfister, H., Zwicker, M., van Baar, J. and Gross, M. "Surfels: Surface Elements as Rendering Primitives." **ACM SIGGRAPH**, 2000. pp. 335-342.

[9] Plotnick, R.E., Gardner, R.H., Hargrove, W.W., Prestegaard, K. and Perlmutter, M. "Lacunarity analysis: A general technique for the analysis of spatial patterns." **PHYSICAL REVIEW E**, 1996.

[10] Prusinkiewicz, P., Muendermann, L., Karwowski, R. and Lane, Brendan. "The use of positional information in the modeling of plants." **SIGGRAPH**, 2001. pp 289-300.

[11] Silva, D. Da., Boudon, F., Godin, C., Puech, O., Smith, C. and Sinoquet H. "A Critical Appraisal of the Box Counting Method to Assess the Fractal Dimension of Tree Crowns." **ISVC (1).** 2006. pp. 751-760.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – สกุล	นายพสิษฐ์ สสิกาญจน์
วัน เดือน ปีเกิด	10 กรกฎาคม 2524
ที่อยู่	32 เทศบาล12 ต.ปากน้ำ อ.เมือง จ สมุทรปราการ10270
ประวัติการศึกษา	2546 จบการศึกษาปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิทยาการคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยบูรพา