การคำนวณเชิงตัวเลขของตัวแบบปฏิกิริยาคายความร้อนที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่ในวัสดุพรุนโดยวิธีผลต่างจำกัดและวิธีการจัดตำแหน่ง

A NUMERICAL COMPUTATION OF AN EXOTHERMIC REACTIONS MODEL WITH CONSTANT HEAT SOURCE IN A PORCUS MEDIUM USING A FINITE DIFFERENCE METHOD AND A COLLOCATION METHOD

พรรณภา พุ่มศิริ

พิมพ์ภัทร์ เพ็งพิศ

ฐานนท์ พลอยมุกดา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2556

การคำนวณเชิงตัวเลขของตัวแบบปฏิกิริยาคายความร้อนที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่ในวัสดุพรุนโดยวิธีผลต่างจำกัดและวิธีการจัดตำแหน่ง

A NUMERICAL COMPUTATION OF AN EXOTHERMIC REACTIONS MODEL WITH CONSTANT HEAT SOURCE IN A POROUS MEDIUM USING A FINITE DIFFERENCE METHOD AND A COLLOCATION METHOD

พรรณนภา พุ่มศิริ
พิมพ์ภัทร์ เพ็งพิต
อานนท์ พลอยมุกดา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตรคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2556

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A NUMERICAL COMPUTATION OF AN EXOTHERMIC REACTIONS MODEL WITH CONSTANT HEAT SOURCE IN A POROUS MEDIUM USING A FINITE DIFFERENCE METHOD AND A COLLOCATION METHOD

PANNAPA BHUMSIRI
PIMPAT PENGPIT
ARNON PLOYMUKDA

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2013

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การคำนวณเชิงตัวเลขของตัวแบบปฏิกิริยาคายความร้อนที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่ในวัสดุพรุนโดยวิธีผลต่างจำกัดและวิธีการจัดตำแหน่ง A numerical computation of an exothermic reactions model with constant heat source in a porous medium using a finite difference method and a collocation method
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพรรณนภา พุ่มศิริ 53050080 นางสาวพิมพ์ภัทร์ เพ็งพิต 53050086 นายอานนท์ พลอยมุกดา 53050144
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์จินดา ไชยช่วย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย อาจารย์พุทธพร วานิชกร

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2556

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อาจารย์ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ ประธานกรรมการ	
รศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์ กรรมการ	
อาจารย์จินดา ไชยช่วย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อาจารย์พุทธพร วานิชกร กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	พุทธพร วานิชกร

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การคำนวณเชิงตัวเลขของตัวแบบปฏิกิริยาคายความร้อนที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่ในวัสดุพรุนโดยวิธีผลต่างจำกัดและวิธีการจัดตำแหน่ง A numerical computation of an exothermic reactions model with constant heat source in a porous medium using a finite difference method and a collocation method
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพรรณนภา พุ่มศิริ 53050080 นางสาวพิมพ์ภัทร์ เพ็งพิต 53050086 นายอานนท์ พลอยมุกดา 53050144
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
หลักสูตร	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2556
อาจารย์ที่ปรึกษา	อาจารย์จินดา ไชยช่วย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย อาจารย์พุทธพร วานิชกร

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ อธิบายระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของตัวแบบปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุน มีสมการควบคุมเป็นสมการรูปแบบอุณหภูมิในสภาวะคงตัวของสภาพการนำความร้อนที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่ โดยใช้วิธีผลต่างจำกัดและวิธีการจัดตำแหน่งในการหาผลเฉลยของสมการ

คำสำคัญ พหุนามเชบีเชฟ พหุนามเลอจองด์ วิธีการจัดตำแหน่ง วิธีผลต่างจำกัด อนุกรมเทย์เลอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Problem Title	A Numerical Computation of an Exothermic Reactions Model with Constant Heat Source in a Porous Medium Using a Finite Difference and a Collocation Method
Students	Ms. Pannapa Bhumsiri 53050080
	Ms. Pimpat Pengpit 53050086
	Mr. Arnon Ploymukda 53050144
Degree	Bachelor of Science
Major Program	Applied Mathematics
Academic Year	2013
Advisor	Chinda Chaichuay
	Assist.Prof.Dr.Nopparat Pochai
	Buddhaporn Vanishkorn

ABSTRACT

This special problem has described a numerical method for solving exothermic reaction model in porous medium. The governing equation is the steady-state energy balance equation of the temperature profile in conduction state with constant heat source. A finite difference and collocation technique for solving the equation are proposed.

Keywords: Chebyshev Polynomials, Legendre Polynomials, Collocation Method, Finite Difference Method, Taylor Series

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาจากอาจารย์จินดา ไชยช่วย ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย และอาจารย์พุทธพร วานิชกร อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ซึ่งได้ให้คำแนะนำและตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ มาโดยตลอด คณะผู้จัดทำรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณา และกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้ด้วย

กราบขอบพระคุณ ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ และ รศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์ ประธานและกรรมการสอบปัญหาพิเศษ ตลอดจนคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่คอยอบรมสั่งสอนและประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ต่างๆ ให้แก่คณะผู้จัดทำตลอดมา รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่คอยช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ช่วยสนับสนุนและห่วงใยด้วยดีเสมอมา ตลอดจนเพื่อนๆ และท่านผู้เกี่ยวข้องที่มิได้กล่าวนามข้างต้น ซึ่งมีส่วนช่วยในการทำปัญหาพิเศษ จนบรรลุผลสำเร็จด้วยดี

คณะผู้จัดทำ

กุมภาพันธ์ 2557

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูปภาพ	VII
สารบัญตาราง	X
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ	1
1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
1. 5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน	2
1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน	3
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	4
2.1 พื้นฐานและแนวคิดเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์	4
2.1.1 การหาเส้นสัมผัสจากกราฟของฟังก์ชัน	4
2.1.2 อนุพันธ์	5
2.2 ค่าคลาดเคลื่อน	6
2.2.1 สาเหตุที่ก่อให้เกิดค่าคลาดเคลื่อน	6
2.2.2 นิยามเกี่ยวกับค่าคลาดเคลื่อน	6
2.2.3 สัญกรณ์โอใหญ่	7
2.2.4 อันดับความแม่นยำ	9
2.3 การประมาณค่าฟังก์ชันโดยอนุกรมเทย์เลอร์	10
2.3.1 อนุกรมเทย์เลอร์	10
2.3.2 เศษเหลือจากการประมาณค่าของอนุกรมเทย์เลอร์	11
2.3.3 การประมาณค่าโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์	11
2.4 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข	16
2.5 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด	23

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
2.5.1 ปัญหาเชิงเส้นกับเงื่อนไขขอบดีรีเคล	24
2.5.2 ปัญหาเชิงเส้นกับเงื่อนไขขอบที่ไม่ใช่เงื่อนไขขอบดีรีเคล	29
2.6 ระเบียบวิธีการจัดตำแหน่ง	35
2.6.1 วิธีการจัดตำแหน่ง	35
2.6.2 พหุนามเชิงตั้งฉาก	47
2.6.3 พหุนามเลอจองด์	47
2.6.4 พหุนามเชบีเชฟ	49
2.6.5 วิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉาก	50
บทที่ 3 วิธีการดำเนินงานวิจัย	**60**
3.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์	60
3.2 ผลเฉลยแม่นตรง	61
3.2.1 ผลเฉลยทั่วไป	61
3.2.2 ผลเฉลยเฉพาะ	62
3.2.3 ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ	62
3.3 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีผลต่างจำกัด	63
3.4 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่ง	67
3.4.1 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์	69
3.4.2 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง [0,1]	79
3.4.3 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟ	90
3.4.4 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีคอลโลเคชันเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง [0,1]	91
บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล	**101**
4.1 ผลเฉลยแม่นตรง	107
4.2 ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด	108

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
4.3 ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง	117
4.3.1 ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์	117
4.3.2 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง [0,1]	132
4.3.4 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง [0,1]	148
บทที่ 5 สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ	**165**
5.1 สรุปผลวิจัย	165
5.2 ข้อเสนอแนะ	174
หนังสืออ้างอิง	**175**
ภาคผนวก	**177**
ภาคผนวก ก	178
ภาคผนวก ข	193
ภาคผนวก ค	219

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ

รูปที่		หน้า
2.1	ความชันของเส้นสัมผัส คือ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	4
2.2	ตัวอย่างของสัญกรณ์โอใหญ่ โดย $f(x)\in O(g(x))$ ซึ่งหมายความว่า มี C (เช่น $C=1$) และ x_0 (เช่น $x_0=5$) ที่ทำให้ $\lvert f(x)\rvert \le C\lvert g(x)\rvert$ เมื่อ $x\ge x_0$	8
2.3	ความหมายของค่าอนุพันธ์โดยประมาณและค่าอนุพันธ์แท้จริง	17
2.4	การเปรียบเทียบระหว่างค่าอนุพันธ์แม่นตรงกับค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบต่างๆ	18
2.5	รูปสำหรับตัวอย่างที่ 4	27
2.6	จุดสมมติที่จุดปลาย $x=a$	30
2.7	จุดสมมติที่จุดปลาย $x=b$	31
2.8	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\left(e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right)\Big/\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=1-\frac{50}{39}(1-x^2)$ และ $v(x)=1-0.9403(1-x^2)-1.6010x^2(1-x^2)$	41
2.9	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\left(e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right)\Big/\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)=1-0.9403(1-x^2)-1.6010x^2(1-x^2)$ และ $w(x)=1-0.9587(1-x^2)-1.8513x^2(1-x^2)$	44
2.10	พหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$ อันดับ 0 ถึง 5	48
2.12	พหุนามเชบีเชฟ $T_n(x)$ อันดับ 0 ถึง 5	50
2.12	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})(-1+x)}\left(-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}x}\right)}{-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}}}$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=\frac{1516}{2101}+\frac{666}{2101}x^2-\frac{81}{2101}x^3$ และ $v(x)=\frac{649}{907}+\frac{294}{907}x^2-\frac{36}{907}x^3$	58

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปที่		หน้า
3.1	จุดสมมติที่จุด $z = z_0$	65
4.1	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.25$ กับ ผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}} + 12$	109
4.2	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.1$ กับ ผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}} + 12$	111
4.3	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.05$ กับ ผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}} + 12$	113
4.4	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.25$ 0.1 และ 0.05 กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}} + 12$	114
4.5	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ กับผลเฉลย แม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	119
4.6	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_4(z)$ กับผลเฉลย แม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	122
4.7	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_5(z)$ กับผลเฉลย แม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	125
4.8	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ $u_4(z)$ และ $u_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	127
4.9	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ กับผลเฉลย แม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	134
4.10	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_4(z)$ กับผลเฉลย แม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	137

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปที่		หน้า
4.11	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	140
4.12	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ $v_4(z)$ และ $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	142
4.13	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	150
4.14	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	153
4.15	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	156
4.16	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ $q_4(z)$ และ $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$	158

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1.1	ระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน	3
2.1	อันดับความแม่นยำของวิธีเชิงตัวเลขบางวิธี	10
2.2	สรุปผลที่ได้จากการประมาณค่าของ $f(x)=-0.1x^4-0.15x^3-0.5x^2-0.25x+1.2$ ที่ $x=1$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับ n ตั้งแต่ 0 จนถึง 4	14
2.3	สรุปผลที่ได้จากการประมาณค่าของ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับ n ตั้งแต่ 0 จนถึง 6	16
2.4	ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง	20
2.5	ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างย้อนหลังที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง	20
2.6	ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสอง	20
2.7	ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับสอง	21
2.8	ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างย้อนหลังที่มีค่าความแม่นยำอันดับสอง	21
2.9	ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสี่	22
2.10	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณ w กับผลเฉลยแม่นตรง $u(x)=\sin(\pi x)$	33
2.11	รูปแบบเมทริกซ์ของวิธีผลต่างจำกัดของปัญหาค่าขอบเชิงเส้น $y''=p(x)y'+q(x)y+r(x)$ เมื่อ $x\in[a,b]$ ภายใต้เงื่อนไขขอบดีรีเคล เงื่อนไขขอบนอยมันน์ และเงื่อนไขขอบโรบิน	32
2.12	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณ w กับผลเฉลยแม่นตรง $u(x)=-\cos x+\left(\frac{3}{8}\right)\sin x-\left(\frac{1}{6}\right)\sin 3x$	40
2.13	เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\left(e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right)\Big/\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=1-\frac{50}{39}\left(1-x^2\right)$ และ $v(x)=1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right)$	42
2.14	ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=1-\frac{50}{39}\left(1-x^2\right)$ และ $v(x)=1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right)$	43

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

2.15 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x) = \left(e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)} \left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right) \Big/ \left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลย โดยประมาณ $v(x) = 1 - 0.9403\left(1-x^2\right) - 1.6010x^2\left(1-x^2\right)$ และ $w(x) = 1 - 0.9587\left(1-x^2\right) - 1.8513x^2\left(1-x^2\right)$ 45

2.16 ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $v(x) = 1 - 0.9403\left(1-x^2\right) - 1.6010x^2\left(1-x^2\right)$ และ $w(x) = 1 - 0.9587\left(1-x^2\right) - 1.8513x^2\left(1-x^2\right)$ 46

2.17 รากของพหุนามเลอจองด์ $P_m(x)$ บนช่วง $[0,1]$ 52

2.18 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})(-1+x)}\left(-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}x}\right)}{-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}}}$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x) = \frac{1516}{2101} + \frac{666}{2101}x^2 - \frac{81}{2101}x^3$ และ $v(x) = \frac{649}{907} + \frac{294}{907}x^2 - \frac{36}{907}x^3$ 57

2.19 ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u(x) = \frac{1516}{2101} + \frac{666}{2101}x^2 - \frac{81}{2101}x^3$ และ $v(x) = \frac{649}{907} + \frac{294}{907}x^2 - \frac{36}{907}x^3$ 59

3.1 พหุนามเลอจองด์ $P_m(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5 70

3.2 พหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ $P_m^*(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5 80

3.3 พหุนามเชบีเชฟ $T_m(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5 90

3.4 พหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ $T_m^*(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5 91

4.1 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ $h = 0.25$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}} + 12$ 108

4.2 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ $h = 0.1$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}} + 12$ 111

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่		หน้า
4.3	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ $h=0.05$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}}+12$	112
4.4	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ $10,50,100,500$ และ 1000 กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$	115
4.5	เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ $10,50,100,500$ และ 1000	116
4.6	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$	118
4.7	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$	121
4.8	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$	124
4.9	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ $u_4(z)$ และ $u_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$	126
4.10	เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ $u_4(z)$ และ $u_5(z)$	128
4.11	เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_6(z)$ $u_7(z)$ $u_8(z)$ $u_9(z)$ และ $u_{10}(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$	130
4.12	เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_6(z)$ $u_7(z)$ $u_8(z)$ $u_9(z)$ และ $u_{10}(z)$	131

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

4.13 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 133

4.14 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 136

4.15 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 139

4.16 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ $v_4(z)$ และ $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 141

4.17 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ $v_4(z)$ และ $v_5(z)$ 143

4.18 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_6(z)$ $v_7(z)$ $v_8(z)$ $v_9(z)$ และ $v_{10}(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 146

4.19 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_6(z)$ $v_7(z)$ $v_8(z)$ $v_9(z)$ และ $v_{10}(z)$ 147

4.20 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 149

4.21 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 152

4.22 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 155

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

4.23 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ $q_4(z)$ และ $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 157

4.24 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ $q_4(z)$ และ $q_5(z)$ 159

4.25 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_6(z)$ $q_7(z)$ $q_8(z)$ $q_9(z)$ และ $q_{10}(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 162

4.26 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_6(z)$ $q_7(z)$ $q_8(z)$ $q_9(z)$ และ $q_{10}(z)$ 163

5.1 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ $10, 50, 100, 500$ และ 1000 กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 165

5.2 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ $10, 50, 100, 500$ และ 1000 166

5.3 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ $u_i(z)$ สำหรับ $i = 3, 4, ..., 10$ เมื่อ i คือจำนวนฟังก์ชันฐานหลัก กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 167

5.4 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ $u_i(z)$ สำหรับ $i = 3, 4, ..., 10$ เมื่อ i คือ จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก 168

5.5 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ $v_i(z)$ สำหรับ $i = 3, 4, ..., 10$ เมื่อ i คือจำนวนฟังก์ชันฐานหลัก กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$ 169

5.6 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ $v_i(z)$ สำหรับ $i = 3, 4, ..., 10$ เมื่อ i คือ จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก 170

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

5.7 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ $q_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,...,10$ เมื่อ i คือจำนวนฟังก์ชันฐานหลัก กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$ 171

5.8 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ $q_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,5,6$ เมื่อ i คือ จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก 172

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและความเป็นมาของปัญหา

การออกแบบตัวอาคาร สิ่งที่ต้องคำนึงถึง คือ รูปทรงที่ความสวยงาม ทันสมัย การใช้งาน การถ่ายเทอากาศ การระบายความร้อน ข้อจำกัดด้านงบประมาณ ฯลฯ

ด้านการระบายความร้อนในตัวอาคาร การออกแบบผนังอาคารเป็นส่วนสำคัญในการช่วยปรับสภาพในตัวอาคารได้มาก การออกแบบและเลือกใช้วัสดุก่อผนังที่ดี มีส่วนช่วยในการลดความร้อนให้กับผนังอาคารและปรับสภาพภายในตัวอาคารให้เหมาะกับการอยู่อาศัยของมนุษย์

การเลือกใช้วัสดุพรุนก่อผนัง จะช่วยป้องกันความร้อนได้มากกว่าวัสดุก่อผนังอื่น เนื่องจากฟองอากาศเล็กๆ ที่อยู่ในเนื้อวัสดุพรุน จะเป็นฉนวนช่วยกันความร้อนได้เป็นอย่างดี นอกจากนี้ วัสดุพรุนยังมีคุณสมบัติดูดและคายความร้อนเร็ว ไม่อมความร้อนไว้นาน แล้วมาแผ่ความร้อนในตอนกลางคืน ซึ่งเป็นเวลาพักผ่อนของผู้อยู่อาศัย

สมการการคายความร้อนในวัสดุพรุน สามารถกำหนดตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีรูปแบบสมการเป็น

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2} + B\phi^2\left(1-\frac{\theta_0}{B}\right)\exp\left(\frac{\gamma\theta_0}{\gamma+\theta_0}\right) = 0$$

โดยสมการดังกล่าวเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นที่ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นตรงได้ จึงต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยโดยประมาณ โดยผู้วิจัยได้ทำการศึกษาวิธีผลต่างจำกัดและวิธีการจัดตำแหน่ง ซึ่งเป็นวิธีที่มีความแม่นยำในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 เพื่อศึกษาปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุน

1.2.2 เพื่อศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุน

1.2.3 เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีผลต่างจำกัด และวิธีการจัดตำแหน่ง และสามารถนำมาประยุกต์ใช้หาผลเฉลยของตัวแบบการคายความร้อนในวัสดุพรุนได้

1.2.4 สามารถหาผลเฉลยของตัวแบบการคายความร้อนในวัสดุพรุนโดยใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เพื่อลดระยะเวลาการคำนวณ

1.2.5 นำปัญหาพิเศษที่ได้ศึกษาไปประยุกต์ใช้กับปัญหาจริงที่ใกล้เคียงกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

1.3.1 ปฏิกิริยาคายความร้อนเป็นปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุนเท่านั้น

1.3.2 ปฏิกิริยาคายความร้อนเป็นปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุนที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนชนิดคงที่

1.3.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดที่ศึกษามีอันดับความแม่นยำไม่เกินอันดับสอง

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้ศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (วิธีผลต่างจำกัด และวิธีการจัดตำแหน่ง) ของสมการเชิงอนุพันธ์

1.4.2 สามารถนำความรู้ทางด้านระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมาใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้

1.4.3 ได้ศึกษาโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยในการคำนวณ และสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาอื่นๆ ได้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1.5.1 กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ

1.5.2 ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา

1.5.3 ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข คือ วิธีผลต่างจำกัด และวิธีการจัดตำแหน่ง

1.5.4 ศึกษาโปรแกรมที่เกี่ยวข้องในการคำนวณหาผลเฉลย

1.5.5 นำความรู้ และวิธีการที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการแก้ปัญหา

1.5.6 สรุปผลการวิจัย

1.5.7 จัดทำปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งนำเสนองานวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

12 เดือน

ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

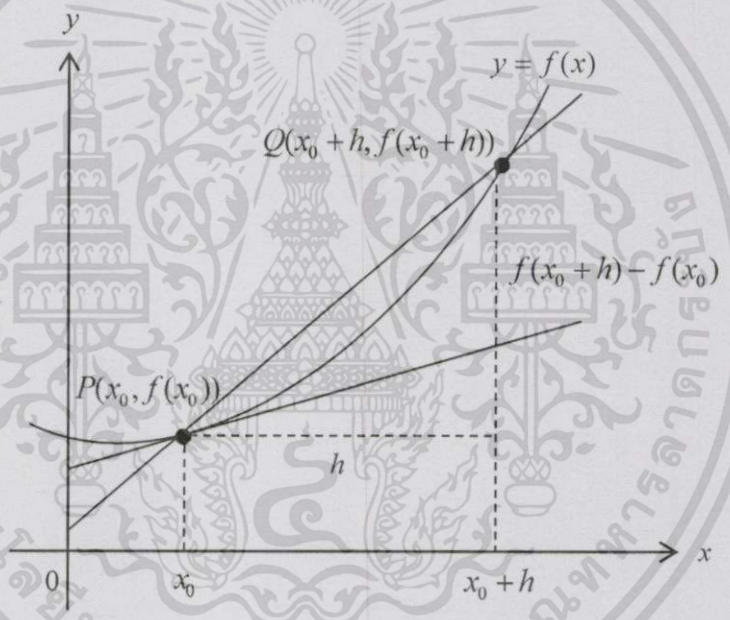
ขั้นตอนการดำเนินงาน/ระยะเวลา	ระยะเวลาในการดำเนินงาน											
	ปี 2556									ปี 2557		
	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.
1.กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ	←	→										
2.ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา		←	→	→								
3.ศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในหาผลเฉลยของปัญหา			←	→	→	→	→					
4.ศึกษาโปรแกรมที่เกี่ยวข้องในการคำนวณหาผลเฉลย						←	→	→				
5.นำความรู้ และวิธีการที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการแก้ปัญหา						←	→	→	→	→		
6.สรุปผลการวิจัย									←	→	→	
7.จัดทำปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งนำเสนอ										←	→	→

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 พื้นฐานและแนวคิดเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์

2.1.1 การหาเส้นสัมผัสจากกราฟของฟังก์ชัน

ในการหาเส้นสัมผัสของโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ ใช้หลักการเคลื่อนเข้าใกล้ (Dynamic Approach) เราคำนวณหาความชันของเส้นตัดที่จุด $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ เคลื่อนตามเส้นโค้งเข้าสู่ P แล้วหาลิมิตของความชันเมื่อ $h \to 0$ (รูปที่ 2.1) ถ้ามีลิมิต เรียกค่าลิมิตนี้ว่า ความชันของเส้นโค้งที่จุด P และกำหนดเส้นสัมผัสที่จุด P ให้มีความชันนี้



รูปที่ 2.1 ความชันของเส้นสัมผัส คือ $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

นิยาม 1 ความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(x_0, f(x_0))$ คือ

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{(เมื่อลิมิตหาค่าได้)}$$

เส้นสัมผัสกับเส้นโค้งที่ P คือเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P ด้วยความชันนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.2 อนุพันธ์

เรานิยามความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = x_0$ เป็น

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

เราเรียกลิมิตนี้ (ถ้ามี) ว่า อนุพันธ์ของ f ที่ x_0

นิยาม 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เทียบกับตัวแปร x คือ ฟังก์ชัน $f'(x)$ ซึ่งมีค่าที่ x เป็น

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

โดยที่ลิมิตจะต้องหาค่าได้ (สัญลักษณ์อื่นที่ใช้ได้แก่ y' $\frac{dy}{dx}$ $\frac{df(x)}{dx}$ ฯลฯ)

การหาอนุพันธ์เป็นการดำเนินการที่ถือได้ว่าเป็นหัวใจหลักอย่างหนึ่งของแคลคูลัส การหาอนุพันธ์นี้เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการวัดหรือหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ ไม่ว่าปริมาณดังกล่าวจะเกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ทางกายภาพ ชีวภาพ เศรษฐกิจ สังคม ฯลฯ ดังนั้นจึงไม่แปลกนักที่จะพบว่าการหาอนุพันธ์นี้ได้ถูกใช้งานหรือมีบทบาทอยู่ในแทบทุกศาสตร์ สำหรับสาขาวิชาที่พบว่ามีการใช้การหาอนุพันธ์ในการหาผลลัพธ์ที่ต้องการอยู่บ่อยครั้ง ได้แก่ สาขาวิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์

ในการหาอนุพันธ์เชิงวิเคราะห์ สำหรับฟังก์ชันที่ไม่ซับซ้อน เช่น หา $\frac{df(x)}{dx}$ เมื่อ $f(x) = x^n$ หรือ $f(x) = e^x$ สามารถทำได้ง่าย เนื่องจากฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันที่ไม่มีความซับซ้อนเมื่อเทียบกับฟังก์ชันที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ของธรรมชาติจริงๆ ซึ่งต้องอาศัยฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากกว่าฟังก์ชันมูลฐานที่เราพบกันบ่อย ซึ่งได้แก่ ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ลอการิทึม ตรีโกณมิติ และฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเหล่านี้ ตัวอย่างของฟังก์ชันที่ซับซ้อนขึ้นมา เช่น

$$e^{-x^2} \quad \frac{e^{-x^2}}{x} \quad x\tan x \quad \frac{1}{\ln x} \quad \frac{\sin x}{x} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$$

และฟังก์ชันที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติก็มักจะเป็นผลคูณหรือฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันเหล่านี้ ซึ่งยิ่งมีความซับซ้อนขึ้นไปอีก นอกจากนี้ ข้อมูลต่างๆ ที่อธิบายปรากฏการณ์หรือผลการทดลองทั้งจากในห้องปฏิบัติการและคอมพิวเตอร์ต่างอยู่ในรูปของตารางหรือกราฟของข้อมูล ซึ่งไม่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้โดยตรง

ด้วยเหตุนี้วิธีการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขจึงเป็นวิธีที่จำเป็น เมื่อฟังก์ชันที่เราสนใจมีความซับซ้อนยุ่งยากมากๆ จนการหาอนุพันธ์ไม่สามารถทำได้ในทางปฏิบัติ หรือทำได้แต่มีความยุ่งยาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซับซ้อนเกินไป ซึ่งกว่าจะทำให้งานสำเร็จลุล่วงได้ อาจจะต้องใช้เวลานาน ดังนั้นเราจึงควรที่จะต้องใช้วิธีการอื่นที่ดีกว่า ซึ่งวิธีที่ใช้กันมาก คือ วิธีการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข

2.2 ค่าคลาดเคลื่อน

2.2.1 สาเหตุที่ก่อให้เกิดค่าคลาดเคลื่อน

"ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข เกิดจากการนำค่าประมาณมาใช้แทนค่าจริง"

ค่าคลาดเคลื่อนนั้นเกิดขึ้นได้จากหลายสาเหตุ ซึ่งสามารถอธิบายได้โดยสังเขป ดังต่อไปนี้

1. ความคลาดเคลื่อนจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ เกิดจากการที่ไม่สามารถจำลองแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสภาพที่เป็นจริงของปรากฏการณ์ของธรรมชาติได้อย่างสมบูรณ์ ผลของการคำนวณเชิงตัวเลขที่ตามมาจึงเป็นผลที่มีความคลาดเคลื่อน

2. ค่าคลาดเคลื่อนจากการแพร่กระจาย เป็นความผิดพลาดที่เกิดขึ้นขณะทำการคำนวณในขั้นตอนหนึ่งซึ่งจะมีผลไปสู่การคำนวณอีกขั้นตอนหนึ่ง

3. ค่าคลาดเคลื่อนจากความเผอเรอ เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากมนุษย์ นับตั้งแต่การกรอกข้อมูลผิด พิมพ์ตัวเลขผิด ไปจนถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีส่วนผิดและไม่ได้ตรวจสอบโดยถี่ถ้วน

4. ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation Error) เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดพจน์บางพจน์ของสมการที่ทำการคำนวณทิ้งไป ดังเช่นการคำนวณฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ซึ่งเขียนในรูปแบบของอนุกรมอนันต์ ในการคำนวณ เราได้ใช้จำนวนพจน์ที่อยู่ในช่วงแรกของสมการอยู่จำนวนหนึ่ง โดยส่วนที่เหลือนั้นได้ถูกตัดทิ้งไป ส่วนที่ตัดทิ้งไปนั้นก่อให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย

5. ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Round-off Error) เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดทอนตัวเลขในการคำนวณ สาเหตุมาจากความจำกัดของเนื้อที่ของเครื่องคำนวณ

2.2.2 นิยามเกี่ยวกับค่าคลาดเคลื่อน

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน ค่าจริง และค่าประมาณ คือ

ค่าจริง = ค่าประมาณ + ค่าคลาดเคลื่อน

ถ้าใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ E แทนค่าคลาดเคลื่อน จะได้

E = ค่าจริง – ค่าประมาณ

นิยาม 3 **ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์** $|E|$

$$|E| = |\text{ ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ }|$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 4 ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ E_r

$$E_r = \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}}$$

นิยาม 5 ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ε_r

$$\varepsilon_r = \left| \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}} \right| \times 100\%$$

โดยทั่วไป การวิเคราะห์เชิงตัวเลข ไม่จำเป็นเสมอไปที่จะต้องทราบค่าจริง แต่จะสามารถนำค่าประมาณมาใช้แทนค่าจริงได้ โดยพิจารณาจากค่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ

นิยาม 6 ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ ε_a

$$\varepsilon_a = \left| \frac{\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนสุดท้าย}}{\text{ค่าประมาณสุดท้าย}} \right| \times 100\%$$

2.2.3 สัญกรณ์โอใหญ่ (Big Oh Notation)

แนวคิดของสัญกรณ์โอใหญ่ถูกคิดโดยนักทฤษฎีจำนวนชื่อ เพาล์ บาชมันน์ (Paul Bachmann) จากงานตีพิมพ์ของเขาที่ชื่อว่า ทฤษฎีจำนวนวิเคราะห์ (Analytische Zahlentheorie) ในปี ค.ศ.1894 โดยครั้งนั้นยังไม่ได้ใช้ตัวสัญกรณ์โอใหญ่ สำหรับตัวสัญกรณ์โอใหญ่นั้นถูกใช้อย่างแพร่หลายโดยนักทฤษฎีจำนวนชาวเยอรมันที่มีชื่อว่า เอ็ดมุนด์ ลานเดา (Edmund Landau) ชื่อของเขาบางครั้งได้รับการยกย่องให้เป็นชื่อของสัญกรณ์โอใหญ่ว่าเป็น สัญกรณ์ของลานเดา (Landau notation) สำหรับตัวสัญกรณ์ที่เขียนเป็นรูปโอใหญ่นั้นได้แนวคิดมาจากคำว่า "Order of" ซึ่งเดิมทีนั้นเขียนโดยใช้เป็นโอไมครอนใหญ่

อัตราการเติบโตของฟังก์ชันใดๆ มีค่าเป็นสัญกรณ์โอใหญ่ของอีกฟังก์ชันหนึ่งแล้ว แสดงว่าอัตราการเติบโตของฟังก์ชันใดๆ นั้น จะโตน้อยกว่าหรือเท่ากับอัตราการเติบโตของฟังก์ชันดังกล่าว ดังนั้นจึงอาจนิยามได้ว่า

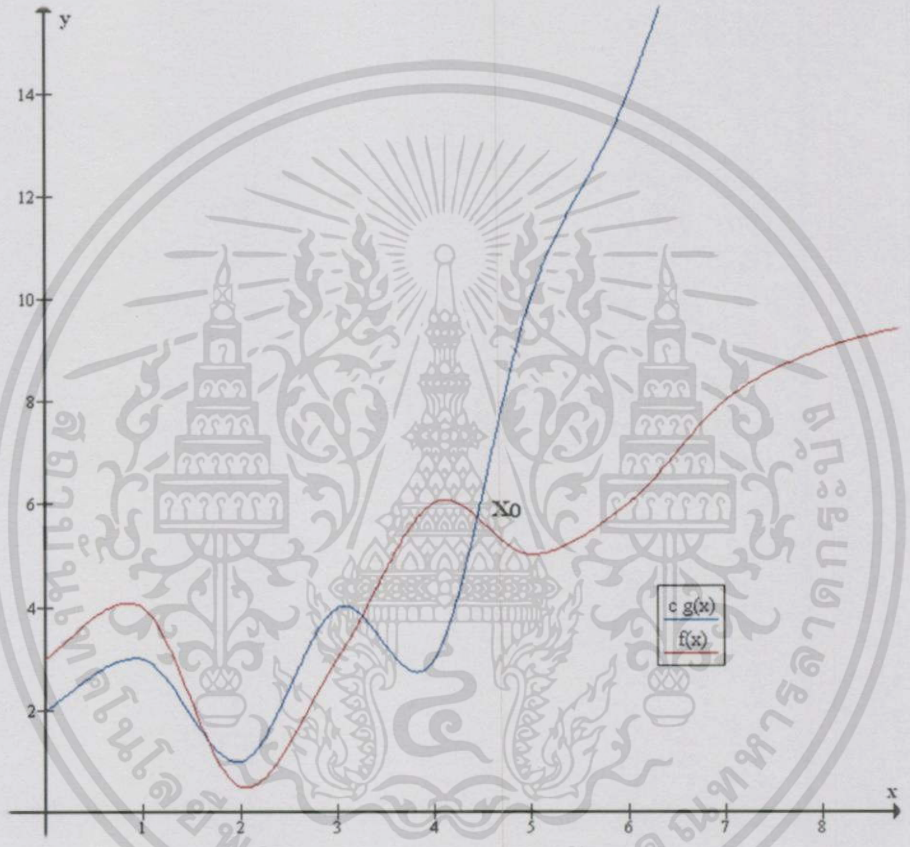
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 7 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริงใดๆ แล้วจะกล่าวว่า

$$f(x) \in O(g(x)) \text{ เมื่อ } x \to \infty$$

ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ C และ x_0 ที่ทำให้

$$|f(x)| \le C|g(x)| \text{ สำหรับทุก } x \ge x_0$$



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างของสัญกรณ์โอใหญ่ โดย $f(x) \in O(g(x))$ ซึ่งหมายความว่า มี C (เช่น $C = 1$) และ x_0 (เช่น $x_0 = 5$) ที่ทำให้ $|f(x)| \le C|g(x)|$ เมื่อ $x \ge x_0$

อย่างไรก็ตาม นิยามนี้จำกัดเฉพาะกรณี $x \to \infty$ เท่านั้น ซึ่งไม่เพียงพอต่อการอธิบายในกรณีที่ $x \to a$ ดังนั้น จึงอาจใช้นิยามในอีกรูปแบบ ในการขยายไปถึงสัญกรณ์โอใหญ่กณิกนันต์ ซึ่งเป็นพิจารณาอัตราการเติบโตของฟังก์ชันรอบๆ จุด a ใด ๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 8 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ จะกล่าวว่า

$$f(x) \in O(g(x)) \text{ เมื่อ } x \to a$$

ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $d > 0$ และ C ที่ซึ่ง

$$|f(x)| \le C|g(x)| \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } |x-a| < d$$

ในบางครั้งสัญกรณ์โอใหญ่อาจมีการครอบคลุมมากเกินไป เช่น $O(n^2) \subset O(n^3)$ เป็นต้น จึงทำให้สำหรับฟังก์ชันใดๆ อาจอยู่ในเซตของสัญกรณ์โอใหญ่หลายค่า จึงมีการกำหนดรูปแบบฟังก์ชันอย่างง่าย ให้ตอบในรูปสัญกรณ์โอใหญ่มาตรฐานน้อยสุด กล่าวคือ ตอบในรูปแบบมาตรฐานที่เล็กที่สุด เรามักจะอนุโลมให้ใช้จากสัญลักษณ์เท่ากับ (=) แทนสัญลักษณ์สมาชิก ($\in$) เมื่อใช้กับรูปสัญกรณ์โอใหญ่มาตรฐานน้อยสุดนี้

นิยาม 9 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริงใดๆ แล้วจะกล่าวว่า

$$f(x) = O(g(x)) \text{ เมื่อ } x \to a$$

ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $d > 0$ และ C ที่ซึ่ง

$$|f(x)| \le C|g(x)| \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } |x-a| < d$$

จากนิยามข้างต้น จะได้ว่า

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } |x-a| \le d$$

ตัวอย่างเช่น

$$2x^3 = O(x^2) \text{ เมื่อ } x \to 0 \text{ ซึ่ง } \frac{2x^3}{x^2} = 2x < 1 \text{ สำหรับทุก } x < \frac{1}{2}$$

2.2.4 อันดับความแม่นยำ

ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข อันดับความแม่นยำ (Order of Accuracy) จะบอกถึงอัตราการลู่เข้าของค่าประมาณเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สู่ผลเฉลยแม่นตรง ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์จะกล่าวได้ว่ามีความแม่นยำอันดับที่ n ถ้าค่าคลาดเคลื่อน E เป็นสัดส่วนกับขนาดความกว้างช่วงย่อย h ยกกำลัง n นั่นคือ

$E(h) = Ch^n$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่

สัญกรณ์โอใหญ่ที่ใช้แทนความแม่นยำอันดับที่ n ของวิธีเชิงตัวเลข คือ $O(h^n)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 อันดับความแม่นยำของวิธีเชิงตัวเลขบางวิธี

วิธีเชิงตัวเลข	อันดับความแม่นยำ
ผลต่างข้างหน้า	$O(h)$
ผลต่างย้อนหลัง	$O(h)$
ผลต่างกลาง	$O(h^2)$
รุงเงอ-คุททาอันดับสี่	$O(h^4)$

2.3 การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

2.3.1 อนุกรมเทย์เลอร์

นิยาม 10 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับบนช่วงๆ หนึ่งที่มีจุด x_0 อยู่ในช่วงนั้น จะได้ว่าอนุกรมเทย์เลอร์ที่เกิดจาก f ที่จุด $x = x_0$ คือ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

อนุกรมแมคคลอรีน มีรูปแบบเป็น

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด $x = 0$

นิยาม 11 **พหุนามเทย์เลอร์อันดับ n**

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์อันดับ k เมื่อ $k = 1, 2, ..., N$ ซึ่งเป็นช่วงที่รวมจุด x_0 ด้วย ดังนั้น เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ ตั้งแต่ 1 ถึง N จะได้ว่า พหุนามเทย์เลอร์อันดับ n ที่เกิดจาก f ที่จุด $x = x_0$ เป็นพหุนามดังนี้

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.2 เศษเหลือจากการประมาณของพหุนามเทย์เลอร์

เรานิยามเศษเหลือ (Remainder) $R_n(x)$ ดังนี้

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

ค่าจริง ค่าประมาณ เศษเหลือ

$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณ

ทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นการประมาณค่าเศษเหลือที่เกี่ยวข้องกับพหุนามเทย์เลอร์

ทฤษฎีบท 12 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด I ที่มี x_0 อยู่ในช่วงนั้น ดังนั้น สำหรับ x ใดๆ ในช่วง I จะมีค่า c ที่อยู่ระหว่าง x และ x_0 ซึ่ง

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

เมื่อ

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

เราสามารถเขียนพจน์ของเศษเหลือสำหรับการประมาณค่าด้วยพหุนามเทย์เลอร์ในรูปสัญกรณ์โอใหญ่ได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 13 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด I ที่มี x_0 อยู่ในช่วงนั้น ให้ $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์อันดับที่ n ของ f ที่ x_0 แล้ว

$$f(x) = P_n(x) + O\left((x-x_0)^{n+1}\right)$$

2.3.3 การประมาณค่าโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

อนุกรมเทย์เลอร์เป็นอนุกรมที่ใช้ในการหาค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x จากค่าของฟังก์ชันและค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ กันของฟังก์ชันนั้นที่ตำแหน่ง x_0 ซึ่งอยู่ใกล้เคียงกัน ถึงแม้ว่าอนุกรมเทย์เลอร์จะประกอบด้วยพจน์ทั้งหมดจำนวนอนันต์พจน์ แต่ความหมายของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถทำความ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เข้าใจได้โดยไม่ยากนัก สมมติว่าเราทำการประมาณอนุกรมเทย์เลอร์นี้ด้วยการใช้พจน์เพียงพจน์เดียว นั่นคือ

$$f(x) \approx f(x_0) \tag{2.1}$$

สมการ (2.1) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์ และจะเป็นค่าประมาณที่มีค่าเท่ากับค่าจริง ถ้าฟังก์ชันที่นำมาประมาณค่าเป็นฟังก์ชันค่าคงที่

หากเราใช้อนุกรมเทย์เลอร์ที่ประมาณด้วยการใช้พจน์จำนวน 2 พจน์ ดังนี้

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) \tag{2.2}$$

เนื่องจาก $f'(x_0)$ เป็นค่าของความชัน ดังนั้นสมการ (2.2) นี้ จึงเปรียบเสมือนสมการเส้นตรง และจะให้ค่าที่ถูกต้องเสมอ หากฟังก์ชันที่กำหนดให้นั้นมีการเปลี่ยนแปลงในลักษณะเชิงเส้นตรง สมการ (2.2) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง

ในทำนองเดียวกัน หากฟังก์ชันที่กำหนดมาให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันกำลังสอง อนุกรมเทย์เลอร์ที่ประกอบด้วย 3 พจน์

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) \tag{2.3}$$

จะสามารถให้ค่าที่ถูกต้องได้ ดังนั้น สำหรับฟังก์ชันโดยทั่วไปที่อยู่ในรูปแบบที่ซับซ้อนและไม่ได้อยู่ในรูปแบบของสมการพหุนาม อนุกรมเทย์เลอร์ที่จะใช้แทนฟังก์ชันดังกล่าวจึงจำเป็นต้องประกอบด้วยพจน์เป็นจำนวนอนันต์พจน์ นั่นคือ

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \cdots \tag{2.4}$$

ความสำคัญของอนุกรมเทย์เลอร์ดังแสดงในสมการ (2.4) สามารถแสดงให้เห็นได้โดยชัดเจนมากขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าประมาณโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์ถึงอันดับสี่ของฟังก์ชัน

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2 \tag{2.5}$$

ที่ $x = 1$ จากค่าของฟังก์ชันและค่าของอนุพันธ์อันดับต่างๆ ที่ $x_0 = 0$ พร้อมทั้งหาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_r)

<u>วิธีทำ</u>

สำหรับปัญหานี้ เราทราบว่าค่าจริง $f(1) = 0.2$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์

$$f(x) \approx f(x_0)$$

$$f(1) \approx f(0) = 1.2$$

$$\varepsilon_r = \left| \frac{0.2 - 1.2}{0.2} \right| \times 100\% = 500\%$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

จาก

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$
$$f'(0) = -0.4(0)^3 - 0.45(0)^2 - 1.0(0) - 0.25 = -0.25$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1-0) f'(0) = 1.2 - 0.25 = 0.95$$
$$\varepsilon_r = \left| \frac{0.2 - 0.95}{0.2} \right| \times 100\% = 375\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0)$$

จาก

$$f''(x) = -1.2x^2 - 0.9x - 1.0$$
$$f''(0) = -1.2(0)^2 - 0.9(0) - 1.0 = -1.0$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1-0) f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!} f''(0)$$
$$f(1) \approx 1.2 - 0.25(1) - \frac{1}{2} = 0.45$$
$$\varepsilon_r = \left| \frac{0.2 - 0.45}{0.2} \right| \times 100\% = 125\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสาม

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0)$$

จาก

$$f'''(x) = -2.4x - 0.9$$
$$f'''(0) = -2.4(0) - 0.9 = -0.9$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1-0) f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!} f''(0) + \frac{(1-0)^3}{3!} f'''(0)$$
$$f(1) \approx 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15 = 0.3$$
$$\varepsilon_r = \left| \frac{0.2 - 0.3}{0.2} \right| \times 100\% = 50\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสี่

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{4!} f^{(4)}(x_0)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก

$$f^{(4)}(x) = -2.4$$
$$f^{(4)}(0) = -2.4$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1-0)f'(0) + \frac{(1-0)^2}{2!}f''(0) + \frac{(1-0)^3}{3!}f'''(0) + \frac{(1-0)^4}{4!}f^{(4)}(0)$$
$$f(1) \approx 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15 - 0.1 = 0.2$$
$$\varepsilon_r = \left|\frac{0.2-0.2}{0.2}\right| \times 100\% = 0\%$$

จะเห็นว่า $\varepsilon_r = 0\%$ แสดงว่าไม่มีค่าคลาดเคลื่อน

ตารางที่ 2.2 สรุปผลที่ได้จากการประมาณค่าของ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ ที่ $x = 1$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับ n ตั้งแต่ 0 จนถึง 4

อันดับ n	ค่าประมาณ $f(1)$	ε_r %
0	1.20	500
1	0.95	375
2	0.45	125
3	0.30	50
4	0.20	0

โดยทั่วไปแล้วค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ n จะให้ค่าถูกต้องตรงกับค่าจริง ถ้าฟังก์ชันที่ใช้เป็นฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ n แต่ถ้าเป็นฟังก์ชันอื่นๆ ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เช่น ฟังก์ชันเอกซ์โปแนลเชียล และฟังก์ชันคลื่นรูปไซน์ ค่าประมาณด้วยอันดับที่จำกัด อาจจะไม่ให้ค่าถูกต้องตรงกับค่าจริง แต่สามารถนำค่าประมาณดังกล่าวมาใช้ได้ ถ้าพิจารณาว่าเศษเหลือจากค่าประมาณมีค่าน้อยมาก หรือพิจารณาจากร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้อนุกรมเทย์เลอร์ประมาณค่าของฟังก์ชัน

$$f(x)=\cos x \tag{2.6}$$

ที่ $x=\frac{\pi}{3}$ จากค่าของฟังก์ชันและค่าของอนุพันธ์อันดับต่างๆ ที่ $x_0=\frac{\pi}{4}$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 0 ถึงอันดับ 6

<u>วิธีทำ</u>

เราทราบว่า $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=0.5$ และสำหรับปัญหานี้

$$x-x_0=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์

$$f(x)\approx f(x_0)$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx 0.707106781$$

$$\varepsilon_r=\left|\frac{0.5-0.707106781}{0.5}\right|\times 100\%=41.42\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง

$$f(x)\approx f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$$

จาก

$$f'(x)=-\sin x$$

จะได้

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx 0.521986659$$

$$\varepsilon_t=\left|\frac{0.5-0.521986659}{0.5}\right|\times 100\%=4.40\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง

$$f(x)\approx f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)$$

จาก

$$f''(x)=-\cos x$$

จะได้

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\approx 0.497754491$$

$$\varepsilon_r=\left|\frac{0.5-0.497754491}{0.5}\right|\times 100\%=0.45\%$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะเห็นได้ว่า เมื่อเพิ่มจำนวนพจน์ในอนุกรมเทย์เลอร์ ค่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์จะค่อยๆ ลดลง ดังตารางที่ 2.3 แสดงให้เห็นว่า การประมาณค่าด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ในอันดับที่สูงขึ้น ค่าประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย

ตารางที่ 2.3 สรุปผลที่ได้จากการประมาณค่าของ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับ n ตั้งแต่ 0 จนถึง 6

อันดับ n	ค่าประมาณ $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\varepsilon_r\,\%$
0	0.707106781	41.42
1	0.521986659	4.40
2	0.497754491	0.45
3	0.499869147	2.62×10^{-2}
4	0.500007551	1.51×10^{-3}
5	0.500000304	6.08×10^{-5}
6	0.499999988	2.40×10^{-6}

2.4 การหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลข

ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ในแขนงต่างๆ ส่วนใหญ่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ ความเข้าใจในคุณสมบัติทางกายภาพของสมการเหล่านี้มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งที่จะนำไปสู่การเลือกใช้ระเบียบวิธีที่ถูกต้องเหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหานั้น ก่อนทำความเข้าใจสมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ เราจำเป็นต้องเข้าใจความหมายของค่าอนุพันธ์ ค่าอนุพันธ์บ่งบอกถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตามต่อตัวแปรต้น ดังเช่นอธิบายโดยรูปที่ 2.3

รูปที่ 2.3(ก) แสดงลักษณะของตัวแปรตาม y ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามตัวแปรต้น x ค่าอนุพันธ์โดยประมาณ คือ

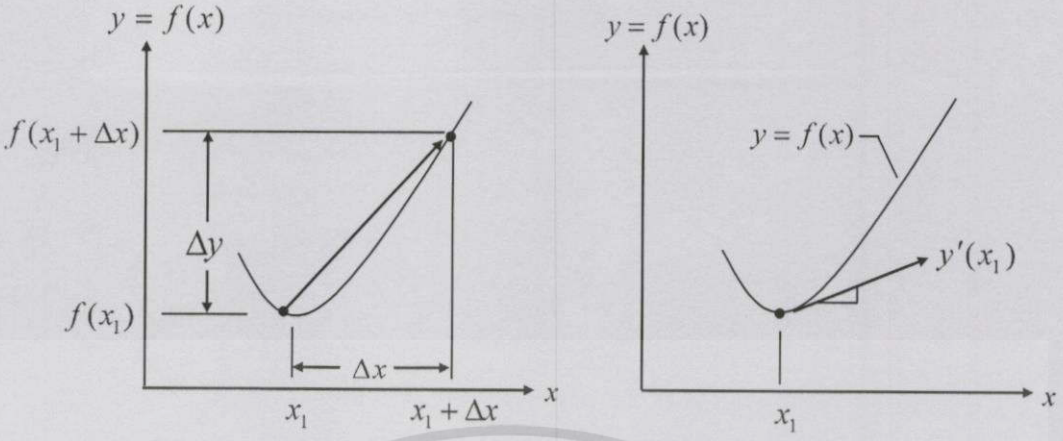
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \tag{2.7}$$

เมื่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต้น Δx ลู่เข้าสู่ศูนย์ เราจะได้ค่าอนุพันธ์ที่แท้จริงที่จุด x_1 นั้น

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} \tag{2.8}$$

ค่า $\frac{dy}{dx}$ นี้มีความหมายของค่าความชันที่จุด x_1 นั่นเอง ซึ่งโดยทั่วไปมักใช้สัญลักษณ์เป็น y' หรือ $f'(x)$ ดังแสดงในรูปที่ 2.3(ข)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



(ก) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณ (ข) ค่าอนุพันธ์แท้จริง

รูปที่ 2.3 ความหมายของค่าอนุพันธ์โดยประมาณและค่าอนุพันธ์แท้จริง

ในวิชาแคลคูลัสนั้น หากกำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ มาให้ เราสามารถหาค่าอนุพันธ์โดยใช้สูตรต่างๆ เช่น ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนาม ดังนี้

$$y = f(x) = x^n \tag{2.9}$$

เราสามารถหาค่าอนุพันธ์แม่นตรงได้โดยตรง คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} \tag{2.10}$$

เป็นต้น แต่ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้นั้นไม่อยู่ในรูปแบบที่ง่ายต่อการหาค่าอนุพันธ์ดังเช่นในตัวอย่างที่ยกขึ้นมานี้ ดังนั้น โดยปกติเราจะทำการหาค่าอนุพันธ์โดยประมาณ ซึ่งสามารถทำได้โดยสะดวก เราจะเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการ (2.4) ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูปแบบ ดังนี้

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!}f''(x_i) + \cdots \tag{2.11}$$

โดย h แทนระยะห่างระหว่างตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} เราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้จากอนุกรมเทย์เลอร์นี้ ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!}f''(x_i) + \cdots \tag{2.12}$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \tag{2.13}$$

โดย $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย

เราสามารถประมาณค่า $f'(x_i)$ เป็น

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} \tag{2.14}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการ (2.14) นี้ เรียกว่า สมการผลต่างข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference) ที่เรียกเป็นผลต่างข้างหน้าก็เพราะว่าเราใช้ค่าของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_i และ x_{i+1} เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ลักษณะของค่าอนุพันธ์โดยประมาณที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นตรงได้แสดงรูปที่ 2.4(ก)

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (2.11) เราสามารถเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์อีกครั้ง แต่หาค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i-1} ดังนี้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \ldots \tag{2.15}$$

ซึ่งนำไปสู่ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้ ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_i) - \ldots \tag{2.16}$$

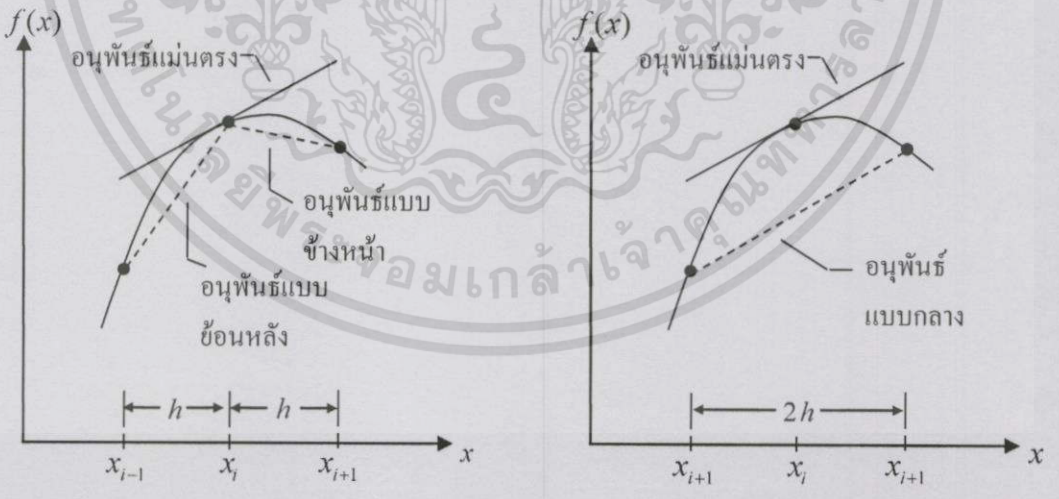
หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{2.17}$$

เราสามารถประมาณค่า $f'(x_i)$ เป็น

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} \tag{2.18}$$

สมการ (2.18) นี้ เรียกว่า สมการผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference) ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่ เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นตรงได้แสดงในรูป 2.4(ก)



(ก) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบข้างหน้าและแบบย้อนหลัง

(ข) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบกลาง

รูปที่ 2.4 การเปรียบเทียบระหว่างค่าอนุพันธ์แม่นตรงกับค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หากเรานำสมการ (2.11) ลบสมการ (2.15)

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x_i) + \ldots \quad (2.19)$$

ซึ่งเราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง x_i ได้ คือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) - \ldots \quad (2.20)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \quad (2.21)$$

เราสามารถประมาณค่า $f'(x_i)$ เป็น

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \quad (2.22)$$

สมการ (2.22) นี้ เรียกว่า สมการผลต่างกลาง (Central Difference) ที่มีความแม่นยำอันดับสอง ซึ่งต่างจากความแม่นยำที่เกิดขึ้นในสมการสองแบบที่แล้วซึ่งอยู่ในอับดับหนึ่ง ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นจากสมการผลต่างกลางนี้ได้เปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นตรงดังแสดงในรูปที่ 2.4 (ข)

ในการหาค่าอนุพันธ์ที่มีค่าอันดับสูงขึ้นไป เช่น ค่าอนุพันธ์อันดับสอง เราสามารถดำเนินการในทำนองเดียวกัน โดยเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ที่ใช้คำนวณฟังก์ชันที่ตำแหน่ง x_{i+2} จากค่าต่างๆ ที่ x_i ดังนี้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + (2h)f'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_i) + \ldots \quad (2.23)$$

หากเราเอา 2 คูณเข้ากับสมการ (2.15) แล้วลบออกจากสมการ (2.23) นี้ จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \ldots. \quad (2.24)$$

ซึ่งก่อให้เกิดสมการค่าอนุพันธ์อันดับสอง ดังนี้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (2.25)$$

เราสามารถประมาณค่า $f''(x_i)$ เป็น

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} \quad (2.26)$$

สมการนี้ เรียกว่า สมการผลต่างข้างหน้าอันดับสอง (Second Forward Difference) สมการค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไปสามารถสร้างขึ้นได้โดยใช้กระบวนการในทำนองเดียวกัน รวมทั้งค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ เนื่องจากการแบ่งย่อยแบบย้อนหลัง และแบบตรงกลาง ค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ จากการแบ่งย่อยแบบข้างหน้า แบบย้อนหลัง และแบบตรงกลาง ได้สรุปในตาราง 2.4 2.5 และ 2.6 ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.4 ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$$

ตารางที่ 2.5 ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างย้อนหลังที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$$

ตารางที่ 2.6 ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสอง

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 3f(x_{i+1}) + 3f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{h^3}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสามารถเพิ่มความแม่นยำของค่าอนุพันธ์ที่ได้โดยเริ่มจากสมการ (2.17)

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h} - \frac{h}{2}f''(x_i) + O(h^2) \qquad (2.27)$$

แล้วแทนค่าอนุพันธ์อันดับสองจากสมการ (2.25) ลงในสมการนี้แล้วจัดพจน์ จะได้

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \qquad (2.28)$$

สมการของค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ได้ใหม่นี้มีค่าความแม่นยำสูงขึ้น เนื่องจากมีความแม่นยำอันดับสอง กระบวนการที่ประกอบด้วยขั้นตอนในลักษณะเช่นนี้สามารถนำไปสร้างสมการของค่าอนุพันธ์อันดับต่างๆ เพื่อให้มีค่าความแม่นยำที่สูงขึ้นได้ ทั้งในแบบผลต่างข้างหน้า ผลต่างย้อนหลัง และผลต่างกลาง ดังแสดงในตารางที่ 2.7 2.8 และ 2.9 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.7 ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับสอง

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}$$

$$f''(x_i) = \frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})-24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})-5f(x_i)}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{-2f(x_{i+5})+11f(x_{i+4})-24f(x_{i+3})+26f(x_{i+2})-14f(x_{i+1})+3f(x_i)}{h^4}$$

ตารางที่ 2.8 ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างย้อนหลังที่มีความแม่นยำอันดับสอง

$$f'(x_i) = \frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h}$$

$$f''(x_i) = \frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2}$$

$$f'''(x_i) = \frac{5f(x_i)-18f(x_{i-1})+24f(x_{i-2})-14f(x_{i-3})+3f(x_{i-4})}{2h^3}$$

$$f^{(4)}(x_i) = \frac{3f(x_i)-14f(x_{i-1})+26f(x_{i-2})-24f(x_{i-3})+11f(x_{i-4})-2f(x_{i-5})}{h^4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.9 ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสี่

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12h}$$

$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2}$$

$$f'''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{8h^3}$$

$$f^{(4)}(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+12f(x_{i+2})-39f(x_{i+1})+56f(x_i)-39f(x_{i-1})+12f(x_{i-2})}{6h^4}$$
$$-\frac{f(x_{i-3})}{6h^4}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน

$$f(x)=2x^3-5x^2+3x+1 \qquad (2.29)$$

ที่ $x=1.0$ โดยใช้ $h=0.1$ ด้วยวิธีผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง วิธีผลต่างย้อนหลังที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง และวิธีผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสอง พร้อมทั้งเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลเฉลยแม่นตรง

<u>วิธีทำ</u>

จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ในสมการ (2.29) สมการอนุพันธ์แม่นตรง คือ

$$f'(x)=6x^2-10x+3 \qquad (2.30)$$

ดังนั้น ค่าอนุพันธ์แม่นตรงที่ $x=1.0$ คือ

$$f'(1.0)=6(1.0)^2-10(1.0)+3=-1.0 \qquad (2.31)$$

เมื่อเราใช้ $h=0.1$

ที่ $x_{i-1}=0.9$ จะได้ $f(x_{i-1})=1.108$

ที่ $x_i=1.0$ จะได้ $f(x_i)=1.000$

ที่ $x_{i+1}=1.1$ จะได้ $f(x_{i+1})=0.912$

ค่าเหล่านี้ สามารถนำไปใช้ในสมการแรกของตารางที่ 2.4 ถึง 2.6 ก่อให้เกิดค่าอนุพันธ์ โดยประมาณและร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_r) ดังนี้

ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างข้างหน้า

$$f'(1.0)=\frac{0.912-1.000}{0.1}=-0.88 \qquad \varepsilon_r=12\% \qquad (2.32)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างย้อนหลัง

$$f'(1.0)=\frac{1.000-1.108}{0.1}=-1.08 \qquad \varepsilon_r=12\% \qquad (2.33)$$

ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างกลาง

$$f'(1.0)=\frac{0.912-1.108}{2(0.1)}=-0.98 \qquad \varepsilon_r=2\% \qquad (2.34)$$

จากผลลัพธ์ของค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างแบบต่างๆ ดังแสดงในสมการ (2.32) ถึง (2.34) เราจะเห็นได้ว่า ค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างกลางมีค่าความเที่ยงตรงสูงกว่าอนุพันธ์ที่ได้โดยวิธีผลต่างข้างหน้าและย้อนหลัง ซึ่งถูกต้องสอดคล้องกับความเข้าใจจากขั้นตอนที่เราได้สร้างสมการเหล่านี้ขึ้นมา

2.5 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method)

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง

$$y''=f(x,y,y') \quad \text{สำหรับ } a\le x\le b \qquad (2.35)$$

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\alpha_3$$

$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=\beta_3 \qquad (2.36)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า f อยู่ในรูปแบบ

$$f(x,y,y')=p(x)y'+q(x)y+r(x) \qquad (2.37)$$

สำหรับบางฟังก์ชัน p q และ r ปัญหาค่าขอบนี้ จะเรียกว่าปัญหาค่าขอบเชิงเส้น

เงื่อนไขขอบ

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\alpha_3$$

$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=\beta_3$$

เป็นผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันไม่ทราบค่าและอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เรียกว่าเงื่อนไขขอบโรบิน (Robin Boundary Condition) กรณีเฉพาะของปัญหาค่าขอบโรบินเมื่อระบุค่าของฟังก์ชันไม่ทราบค่า

$$y(a)=\alpha \quad \text{และ/หรือ} \quad y(b)=\beta$$

จะเรียกว่า เงื่อนไขขอบดีรีเคล (Dirichlet Boundary Condition) และเมื่อระบุค่าของอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันไม่ทราบค่า

$$y'(a)=\alpha \quad \text{และ/หรือ} \quad y'(b)=\beta$$

จะเรียกว่า เงื่อนไขขอบนอยมันน์ (Neumann Boundary Condition)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดจะพิจารณาใน 2 กรณี คือ

1. ปัญหาเชิงเส้นกับเงื่อนไขขอบดีรีเคล
2. ปัญหาเชิงเส้นกับเงื่อนไขขอบที่ไม่ใช่เงื่อนไขขอบดีรีเคล

2.5.1 ปัญหาเชิงเส้นกับเงื่อนไขขอบดีรีเคล

พิจารณาปัญหาเชิงเส้น

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \text{ สำหรับ } a \le x \le b \tag{2.38}$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบดีรีเคล

$$y(a) = \alpha \text{ และ } y(b) = \beta \tag{2.39}$$

เริ่มจากเลือกจำนวนเต็มบวก N เพื่อแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่าๆ กัน ซึ่งมีจุดปลายช่วงย่อยคือ จุดตัด $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 0,1,2,...,N$ เมื่อ $h = \dfrac{(b-a)}{N}$

ที่จุดตัดภายใน x_i สำหรับ $i = 1,2,...,N-1$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์อยู่ในรูป

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \tag{2.40}$$

เมื่อกระจาย $y(x_{i-1})$ และ $y(x_{i+1})$ ในรูปพหุนามเทย์เลอร์อันดับสามรอบจุด x_i โดยสมมติว่า $y \in C^4[x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^+) \tag{2.41}$$

สำหรับบาง $\xi_i^+ \in (x_i, x_{i+1})$ และ

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(x_i) + \frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi_i^-) \tag{2.42}$$

สำหรับบาง $\xi_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$

นำสมการ (2.41) บวกกับสมการ (2.42)

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2y''(x_i) + \frac{h^4}{24}\left[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)\right]$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] - \frac{h^2}{24}\left[y^{(4)}(\xi_i^+) + y^{(4)}(\xi_i^-)\right] \tag{2.43}$$

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (Intermediate Value Theorem) จะได้

สูตรผลต่างกลางสำหรับ $y''(x_i)$

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})\right] - \frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_i) \tag{2.44}$$

สำหรับบาง $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วนสูตรผลต่างกลางสำหรับ $y'(x_i)$ สามารถหาได้ด้วยวิธีการเดียวกัน โดยเริ่มจากกระจาย $y(x_{i-1})$ และ $y(x_{i+1})$ ในรูปพหุนามเทย์เลอร์อันดับสอง โดยสมมติว่า $y \in C^3[x_{i-1}, x_{i+1}]$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(\eta_i^+) \tag{2.45}$$

สำหรับบาง $\eta_i^+ \in (x_i, x_{i+1})$ และ

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{6}y'''(\eta_i^-) \tag{2.46}$$

สำหรับบาง $\eta_i^- \in (x_{i-1}, x_i)$

นำ (-1) คูณกับสมการ (2.46) แล้วบวกกับสมการ (2.45)

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = 2y'(x_i) + \frac{h^3}{3}\left[y'''(\eta_i^+) + y'''(\eta_i^-)\right]$$

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})\right] - \frac{h^2}{6}\left[y'''(\eta_i^+) + y'''(\eta_i^-)\right] \tag{2.47}$$

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะได้

สูตรผลต่างกลางสำหรับ $y'(x_i)$

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[y(x_{i+1}) - (x_{i-1})\right] - \frac{h^2}{12}y'''(\eta_i) \tag{2.48}$$

สำหรับบาง $\eta_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$

นำสมการ (2.44) และ (2.48) แทนในสมการ (2.40) จะได้

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

$$-\frac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right] \tag{2.49}$$

จากนั้นตัดพจน์ของเศษเหลือ $\frac{h^2}{12}\left[2p(x_i)y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right]$ ออก แล้วแทนผลเฉลยแม่นตรง $y(x_i)$ ด้วยผลเฉลยโดยประมาณ w_i สำหรับ $i = 1, 2, 3, \ldots, N-1$

$$\left(\frac{2w_i - w_{i+1} - w_{i-1}}{h^2}\right) = p(x_i)\left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) + q(x_i)w_i + r(x_i) \tag{2.50}$$

จากเงื่อนไขขอบ $y(a) = \alpha$ และ $y(b) = \beta$ กำหนดให้

$$w_0 = \alpha$$

$$w_N = \beta$$

เราจะพิจารณาสมการ (2.50) ในรูปแบบ

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1} + \left(2 + h^2q(x_i)\right)w_i - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1} = -h^2r(x_i) \tag{2.51}$$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, N-1$

สำหรับ $i = 1$

$$-\left(1 + \frac{h}{2}p(x_0)\right)w_0 + \left(2 + h^2q(x_1)\right)w_1 - \left(1 - \frac{h}{2}p(x_1)\right)w_2 = -h^2r(x_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทน $w_0 = \alpha$ จะได้

$$\left(2+h^2q(x_1)\right)w_1 - \left(1-\frac{h}{2}p(x_1)\right)w_2 = -h^2r(x_1) + \left(1+\frac{h}{2}p(x_0)\right)\alpha \qquad (2.52)$$

สำหรับ $i = 2,3,\ldots,N-2$

$$-\left(1+\frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1} + \left(2+h^2q(x_i)\right)w_i - \left(1-\frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1} = -h^2r(x_i) \qquad (2.53)$$

สำหรับ $i = N-1$

$$-\left(1+\frac{h}{2}p(x_{N-1})\right)w_{N-2} + \left(2+h^2q(x_{N-1})\right)w_{N-1} - \left(1-\frac{h}{2}p(x_{N-1})\right)w_N = -h^2r(x_{N-1})$$

แทน $w_N = \beta$ จะได้

$$-\left(1+\frac{h}{2}p(x_{N-1})\right)w_{N-2} + \left(2+h^2q(x_{N-1})\right)w_{N-1} = -h^2r(x_{N-1}) + \left(1-\frac{h}{2}p(x_{N-1})\right)\beta \qquad (2.54)$$

ระบบสมการสำหรับ $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{N-1}$ สามารถเขียนเป็นเมทริกซ์สามแถวทแยง (Tridiagonal Matrix) ขนาด $(N-1)\times(N-1)$ ในรูปแบบ $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & u_1 & & & & & \\ l_2 & d_2 & u_2 & & & & \\ & l_3 & d_3 & u_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & l_{N-3} & d_{N-3} & u_{N-3} \\ & & & & & l_{N-2} & d_{N-2} & u_{N-2} \\ & & & & & & l_{N-1} & d_{N-1} \end{bmatrix} \qquad (2.55)$$

โดยที่

$$d_i = 2 + h^2q(x_i) \qquad (2.56)$$

$$u_i = -1 + \frac{h}{2}p(x_i) \qquad (2.57)$$

$$l_i = -1 - \frac{h}{2}p(x_i) \qquad (2.58)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เวกเตอร์ **w** และ **b** คือ

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_{N-2} \\ w_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} -h^2 r(x_1)+\left(1+\frac{h}{2}p(x_1)\right)\alpha \\ -h^2 r(x_2) \\ . \\ . \\ . \\ -h^2 r(x_{N-2}) \\ -h^2 r(x_{N-1})+\left(1-\frac{h}{2}p(x_{N-1})\right)\beta \end{bmatrix} \tag{2.59}$$

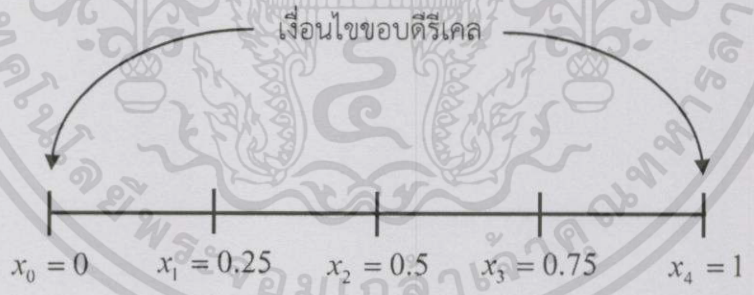
ตัวอย่างที่ 4 พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$-u''+\pi^2 u = 2\pi^2 \sin(\pi x) \tag{2.60}$$
$$u(0)=u(1)=0$$

<u>วิธีทำ</u>

จากสมการ (2.38) จะได้ว่า $p(x)=0$ $q(x)=\pi^2$ และ $r(x)=-2\pi^2\sin(\pi x)$

เริ่มจากแบ่งช่วง $[0,1]$ ออกเป็น $N=4$ ช่วงย่อย จะได้ $h=\frac{1}{4}$ และมีจุดตัดเป็น $x_i=a+ih=0+i\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{i}{4}$ สำหรับ $i=0,1,2,3,4$



รูปที่ 2.5 รูปสำหรับตัวอย่างที่ 4

ที่จุดภายใน x_i สำหรับ $i=1,2,3$ จะมีสมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$-u_i''+\pi^2 u_i = 2\pi^2 \sin\left(\frac{i}{4}\pi\right) \tag{2.61}$$

แล้วแทนอนุพันธ์อันดับสองด้วยการประมาณค่าด้วยสูตรผลต่างกลาง จะได้สมการเป็น

$$\frac{-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}+O(h^2)+\pi^2 u_i = 2\pi^2 \sin\left(\frac{i}{4}\pi\right) \tag{2.62}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้น ตัดพจน์ของค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายออกแล้วแทนผลเฉลยแม่นตรง u_i ด้วยผลเฉลย โดยประมาณ w_i และคูณทั้งสองข้างสมการด้วย $\left(\frac{1}{4}\right)^2$ แล้วจัดรูปสมการ จะได้

$$-w_{i-1}+\left[2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right]w_i-w_{i+1}=2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\left(\frac{i}{4}\pi\right) \qquad (2.63)$$

แทน $i=1,2,3$ และ $w_0=w_N=0$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขขอบดีรีเคลในสมการ (2.63) จะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 & -1 & \\ -1 & 2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 & -1 \\ & -1 & 2+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ 2\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \\ \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \end{bmatrix}$$

ผลเฉลยของระบบสมการสามแถวทแยง คือ

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} 0.725371 & 1.025830 & 0.725371 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

ตารางที่ 2.10 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณ w กับผลเฉลยแม่นตรง $u(x)=\sin(\pi x)$

x	ผลเฉลยโดยประมาณ w	ผลเฉลยแม่นตรง $u(x)$	$\lvert u-w \rvert$
0.00	0.000000	0.000000	–
0.25	0.725371	0.707107	0.018264
0.50	1.025830	1.000000	0.025830
0.75	0.725371	0.707107	0.018264
1.00	0.000000	0.000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5.2 ปัญหาเชิงเส้นกับเงื่อนไขขอบที่ไม่ใช่เงื่อนไขขอบดีรีเคล

จากเงื่อนไขขอบนอยมันน์

$$y'(a)=\alpha \quad \text{หรือ} \quad y'(b)=\beta$$

เป็นกรณีเฉพาะของเงื่อนไขขอบโรบิน

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\alpha_3 \quad \text{หรือ} \quad \beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=\beta_3$$

(ให้ $\alpha_1=0$ หรือ $\beta_1=0$) เราจะหาระบบสมการเชิงเส้นสำหรับการประมาณค่าผลต่างจำกัดของปัญหาค่าขอบเชิงเส้น

$$y''=p(x)y'+q(x)y+r(x) \text{ สำหรับ } a\le x\le b$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบโรบิน

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\alpha_3$$
$$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=\beta_3$$

โดยสมมติว่า $\alpha_2\neq 0$ และ $\beta_2\neq 0$

ให้ N เป็นจำนวนเต็มบวก และแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่าๆ กัน ซึ่ง

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{N-1}<x_N=b$$

เมื่อ $x_i=a+ih$ สำหรับ $i=0,1,\ldots,N$ และ $h=\dfrac{b-a}{N}$

เราจะได้ $N+1$ สมการที่ใช้คำนวณค่า w_i สำหรับ $i=0,1,2,\ldots,N$ โดย $N-1$ สมการได้จากส่วนก่อนหน้าที่กล่าวมาแล้ว นั่นคือ

$$-\left(1+\frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i-1}+\left(2+h^2q(x_i)\right)w_i-\left(1-\frac{h}{2}p(x_i)\right)w_{i+1}=-h^2r(x_i)$$

สำหรับแต่ละ $i=1,2,\ldots,N-1$

จากเงื่อนไขขอบที่ $x=a$

$$\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\alpha_3$$

เราจะแทนค่าอนุพันธ์ในเงื่อนไขขอบที่ $x=a$ ด้วยการประมาณค่าผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับสอง

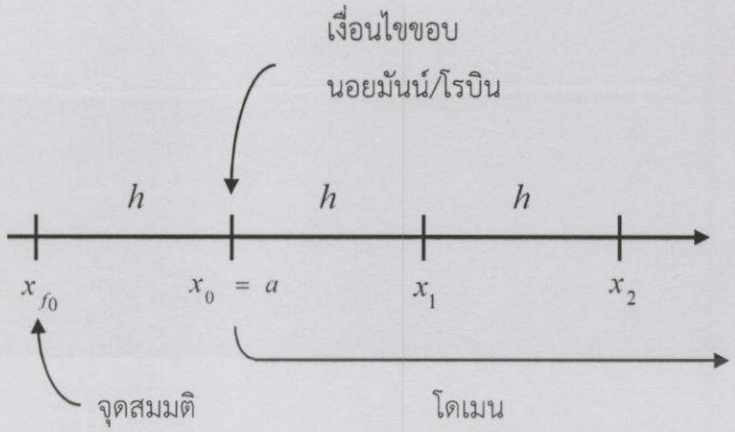
$$y'(x_i)\approx\frac{-3y(x_i)+4y(x_{i+1})-y(x_{i+2})}{2h} \tag{2.64}$$

แต่การประมาณค่าด้วยผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับสอง จะทำให้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ไม่เป็นเมทริกซ์สามแถวทแยง การประมาณค่าด้วยผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่งจะทำให้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์สามแถวทแยง แต่มีความแม่นยำน้อย

อีกวิธีที่ทำให้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์สามแถวทแยง และมีค่าความแม่นยำอันดับสอง คือการสร้างจุดสมมติ (Fictitious Node) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่ $x=x_0$ เป็น

$$-\left(1+\frac{h}{2}p(x_0)\right)w_{f_0}+\left(2+h^2q(x_0)\right)w_0-\left(1-\frac{h}{2}p(x_0)\right)w_1=-h^2r(x_0) \tag{2.65}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.6 จุดสมมติที่จุดปลาย $x = a$

เราต้องกำจัด w_{f_0} ออกจากสมการ จากเงื่อนไขขอบโรบิน

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \alpha_3 \Rightarrow \alpha_1 w_0 + \alpha_2 \left(\frac{w_1 - w_{f_0}}{2h} \right) = \alpha_3$$

โดยการแทนอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยการประมาณค่าผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสอง จะได้ค่าของ w_{f_0} คือ

$$w_{f_0} = w_1 - \frac{2h}{\alpha_2}(\alpha_3 - \alpha_1 w_0) \tag{2.66}$$

แทนสมการ (2.66) ในสมการ (2.65) จะได้สมการผลต่างจำกัดที่ $x = a$

$$\left(2 + h^2 q(x_0) - (2 + hp(x_0)) h \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) w_0 - 2w_1 = -h^2 r(x_0) - (2 + hp(x_0)) h \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \tag{2.67}$$

สำหรับปัญหาค่าขอบนอยมันน์ ให้ $\alpha_1 = 0$ จะได้สมการผลต่างจำกัดเป็น

$$(2 + h^2 q(x_0)) w_0 - 2w_1 = -h^2 r(x_0) - (2 + hp(x_0)) h\alpha \tag{2.68}$$

เมื่อ $\alpha = \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}$

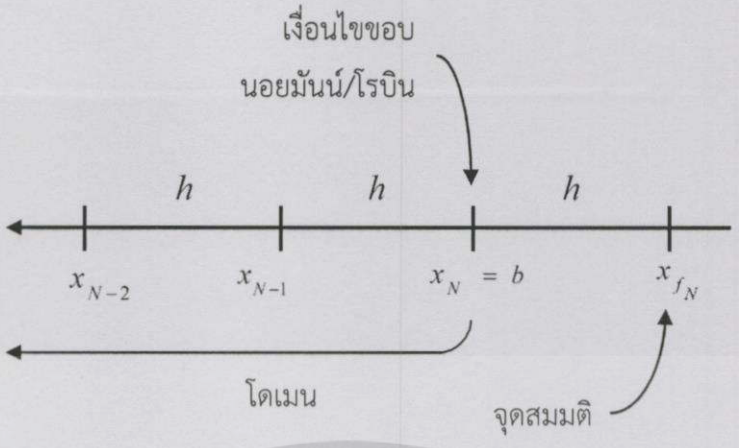
สำหรับที่ $x = b$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$-\left(1 + \frac{h}{2} p(x_N) \right) w_{N-1} + (2 + h^2 q(x_N)) w_N - \left(1 - \frac{h}{2} p(x_N) \right) w_{f_N} = -h^2 r(x_N) \tag{2.69}$$

เราต้องกำจัด w_{f_N} ออกจากสมการ จากเงื่อนไขขอบโรบิน

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3 \Rightarrow \beta_1 w_0 + \beta_2 \left(\frac{w_{f_N} - w_{N-1}}{2h} \right) = \beta_3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.7 จุดสมมติที่จุดปลาย $x = b$

โดยการแทนอนุพันธ์อันดับหนึ่งด้วยการประมาณค่าผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสอง จะได้ค่าของ w_{f_N} คือ

$$w_{f_N} = w_{N-1} + \frac{2h}{\beta_2}(\beta_3 - \beta_1 w_N) \tag{2.70}$$

แทนสมการ (2.70) ในสมการ (2.69) จะได้สมการผลต่างจำกัดเป็น

$$-2w_{N-1} + \left(2 + h^2 q(x_N) + (2 - hp(x_N))h\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) w_N = -h^2 r(x_N) + (2 - hp(x_N))h\frac{\beta_3}{\beta_2} \tag{2.71}$$

สำหรับปัญหาค่าขอบนอยมันน์ที่ $x = b$ จะได้สมการผลต่างจำกัดเป็น

$$-2w_{N-1} + (2 + h^2 q(x_N))w_N = -h^2 r(x_N) + (2 - hp(x_N))h\beta \tag{2.72}$$

เมื่อ $\beta = \frac{\beta_3}{\beta_2}$

เราจะได้สมการผลต่างจำกัด $N+1$ สมการ โดยเริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ได้ผลลัพธ์เป็นระบบสมการเชิงเส้นกับตัวไม่ทราบค่า ให้ $\mathbf{w} = [w_0 \;\; w_1 \;\; w_2 \;\; \ldots \;\; w_N]^T$ แทนเวกเตอร์ของตัวไม่ทราบค่า และให้เมทริกซ์ A และเวกเตอร์ $\mathbf{b}$ แสดงไว้ในตารางที่ 2.10 แล้วสมการผลต่างจำกัดจะอยู่ในรูป $A\mathbf{w} = \mathbf{b}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.11 รูปแบบเมทริกซ์ของวิธีผลต่างจำกัดของปัญหาค่าขอบเชิงเส้น $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ เมื่อ $x \in [a,b]$ ภายใต้เงื่อนไขขอบดีรีเคล เงื่อนไขขอบนอยมันน์ และเงื่อนไขขอบโรบิน

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & & & \\ l_1 & d_1 & u_1 & & & & \\ & l_2 & d_2 & u_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & l_{N-1} & d_{N-1} & u_{N-1} \\ & & & & & a_{N+1,N} & a_{N+1,N+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -h^2 r(x_1) \\ -h^2 r(x_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -h^2 r(x_{N-1}) \\ b_{N+1} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$d_i = 2 + h^2 q(x_i)$$

$$u_i = -1 + \frac{h}{2} p(x_i)$$

$$l_i = -1 - \frac{h}{2} p(x_i)$$

$$a_{11} = \begin{cases} 1 & \text{เงื่อนไขขอบดีรีเคลที่ } x = a \\ d_0 & \text{เงื่อนไขขอบนอยมันน์ที่ } x = a \\ d_0 + 2hl_0 \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} & \text{เงื่อนไขขอบโรบินที่ } x = a \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a_{12} = \begin{cases} 0 & \text{เงื่อนไขขอบดีรีเคลที่ } x = a \\ -2 & \text{อื่น} \end{cases}$$

$$a_{N+1,N+1} = \begin{cases} 1 & \text{เงื่อนไขขอบดีรีเคลที่ } x = b \\ d_N & \text{เงื่อนไขขอบนอยมันน์ที่ } x = b \\ d_N - 2hu_N \dfrac{\beta_1}{\beta_2} & \text{เงื่อนไขขอบโรบินที่ } x = b \end{cases}$$

$$a_{N+1,N} = \begin{cases} 0 & \text{เงื่อนไขขอบดีรีเคลที่ } x = b \\ -2 & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

$$b_1 = \begin{cases} \alpha & \text{เงื่อนไขขอบดีรีเคลที่ } x = a \\ -h^2 r(x_0) + 2hl_0\alpha & \text{เงื่อนไขขอบนอยมันน์ที่ } x = a \\ -h^2 r(x_0) + 2hl_0 \dfrac{\alpha_3}{\alpha_2} & \text{เงื่อนไขขอบโรบินที่ } x = a \end{cases}$$

$$b_{N+1} = \begin{cases} \beta & \text{เงื่อนไขขอบดีรีเคลที่ } x = b \\ -h^2 r(x_N) - 2hu_N\beta & \text{เงื่อนไขขอบนอยมันน์ที่ } x = b \\ -h^2 r(x_N) - 2hu_N \dfrac{\beta_3}{\beta_2} & \text{เงื่อนไขขอบโรบินที่ } x = b \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 5 ปัญหาที่มีเงื่อนไขหนึ่งเป็นเงื่อนไขขอบนอยมันน์ และอีกเงื่อนไขหนึ่งเป็นเงื่อนไขขอบโรบิน

$$u''+u=\sin(3x) \text{ สำหรับ } 0\le x\le\frac{\pi}{2} \tag{2.73}$$

ภายใต้เงื่อนไขขอบโรบินที่ $x=0$

$$u(0)+u'(0)=-1$$

และเงื่อนไขขอบนอยมันน์ที่ $x=\frac{\pi}{2}$

$$u'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

<u>วิธีทำ</u>

เริ่มจากแบ่งช่วง $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ออกเป็น 4 ช่วงย่อย จะได้ $h=\frac{\pi}{8}$ และ $x_i=\frac{i\pi}{8}$ สำหรับ $i=0,1,2,3,4$

จากสมการ (2.38) จะได้ว่า $p(x)=0$ $q(x)=-1$ และ $r(x)=\sin(3x)$ สำหรับแต่ละ i

$$p(x_i)=0$$

$$q(x_i)=-1$$

$$r(x_i)=\sin\left[3\left(\frac{i\pi}{8}\right)\right]$$

สำหรับเงื่อนไขขอบโรบินที่ $x=0$ เรามี $\alpha_1=\alpha_2=1$ และ $\alpha_3=-1$ ส่วนเงื่อนไขขอบนอยมันน์ที่ $x=\frac{\pi}{2}$ เรามี $\beta=1$

โดยใช้ตารางที่ 2.11 จะได้ระบบสมการผลต่างจำกัด คือ

$$\begin{bmatrix} d-\frac{\pi}{4} & -2 & & & \\ -1 & d & -1 & & \\ & -1 & d & -1 & \\ & & -1 & d & -1 \\ & & & -2 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} \\ -\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ -\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ -\left(\frac{\pi}{8}\right)^2\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right) \\ \left(\frac{\pi}{8}\right)^2+\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$d = 2 - \left(\frac{\pi}{8}\right)^2$$

ผลเฉลยของระบบสมการสามแถวทแยง คือ

$$\mathbf{w} = [\ -1.023672 \quad -0.935445 \quad -0.560486 \quad 0.00995175 \quad 0.529840\ ]^T$$

ตารางที่ 2.12 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณ w กับผลเฉลยแม่นตรง $u(x) = -\cos x + \left(\frac{3}{8}\right)\sin x - \left(\frac{1}{8}\right)\sin 3x$

x	ผลเฉลยโดยประมาณ w	ผลเฉลยแม่นตรง $u(x)$	$\lvert u - w \rvert$
0	–1.023672	–1.000000	0.023672
$\frac{\pi}{8}$	–0.935445	–0.895858	0.039587
$\frac{\pi}{4}$	–0.560486	–0.530330	0.030156
$\frac{3\pi}{8}$	0.00995175	0.0116068	0.001655
$\frac{\pi}{2}$	0.519840	0.500000	0.019840

2.6 ระเบียบวิธีการจัดตำแหน่ง (Collocation Method)

2.6.1 วิธีการจัดตำแหน่ง

พิจารณาปัญหาค่าขอบเชิงเส้น

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x) \qquad a \le x \le b \quad (2.74)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y(a) = \alpha_3$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \beta_3 \quad (2.75)$$

เริ่มจากการสมมติผลเฉลยเชิงตัวเลขของ $y(x)$ อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชัน $u_j(x)$ นั่นคือ

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x) \quad (2.76)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อกำหนดให้ n แทนจำนวนของฟังก์ชันฐานหลัก (Basis Function) ที่ได้จากการแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น $n-1$ ช่วงย่อย

c_j แทนสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่ต้องการหาค่า

$u_j(x)$ แทนฟังก์ชันฐานหลัก ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าจะเลือกให้ฟังก์ชันที่มีสมบัติหรือลักษณะเฉพาะแบบใดเพื่อใช้ในการคำนวณ

ในการคำนวณสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่า $c_1,c_2,\ldots,c_n$ จะกำหนดเงื่อนไขการจัดตำแหน่ง (Collocation Condition) n เงื่อนไข เพื่อให้ได้ระบบสมการเชิงเส้นขนาด $n\times n$ สำหรับ c_j

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ โดยที่ $a=x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ และให้ $u(x)=\sum_{j=1}^{n}c_ju_j(x)$ ที่จุด $x_1=a$ และ $x_n=b$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ นั่นคือ

$$\alpha_1u(a)+\alpha_2u'(a)=\alpha_3 \tag{2.77}$$

$$\beta_1u(b)+\beta_2u'(b)=\beta_3 \tag{2.78}$$

พิจารณาสมการ (2.77)

$$\alpha_1u(a)+\alpha_2u'(a)=\alpha_3$$

$$\alpha_1\sum_{j=1}^{n}c_ju_j(a)+\alpha_2\sum_{j=1}^{n}c_ju_j'(a)=\alpha_3$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_i\left[\alpha_1u_j(a)+\alpha_2u_j'(a)\right]=\alpha_3 \tag{2.79}$$

พิจารณาสมการ (2.78)

$$\beta_1u(b)+\beta_2u'(b)=\beta_3$$

$$\beta_1\sum_{j=1}^{n}c_ju_j(b)+\beta_2\sum_{j=1}^{n}c_ju_j'(b)=\beta_3$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_j\left[\beta_1u_j(b)+\beta_2u_j'(b)\right]=\beta_3 \tag{2.80}$$

จะได้สมการการจัดตำแหน่ง 2 สมการ ต้องการอีก $n-2$ สมการ โดยการแทนผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)$ ในสมการ (2.73)

$$u''(x)+p(x)u'(x)+q(x)u(x)=r_a(x) \qquad a\le x\le b \tag{2.81}$$

โดยทั่วไปแล้ว $r_a(x)\neq r(x)$ จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(x)=r_a(x)-r(x) \tag{2.82}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ $c_1,c_2,\ldots,c_n$ ของ $u(x)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(x)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_a^b w_i(x)R(x)dx=0 \tag{2.83}$$

เมื่อ $w_i(x)$ คือ ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่เลือกใช้ วิธีการนี้เรียกว่า วิธีถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Weighted Residuals Method)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับวิธีการจัดตำแหน่งจะเลือกฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักเป็นฟังก์ชันเดลตาของดิแร็ก (Dirac Delta Function) คือ

$$w_i(x) = \delta(x - x_i) \quad a \le x_i \le b \tag{2.84}$$

โดยฟังก์ชันเดลตาของดิแร็ก นิยามคือ

$$\delta(x - x_i) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x = x_i \\ 0 & \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases} \tag{2.85}$$

และมีสมบัติว่า

$$\int_a^b a(x)\delta(x - x_i)dx = a(x_i) \tag{2.86}$$

จะได้สมการ (2.83) เป็น

$$\int_a^b R(x)\delta(x - x_i)dx = R(x_i) = 0 \qquad i = 2,3,\ldots,n-1 \tag{2.87}$$

จะได้

$$\begin{gathered} r_a(x_i) - r(x_i) = 0 \\ r_a(x_i) = r(x_i) \\ u''(x_i) + p(x_i)u'(x_i) + q(x_i)u(x_i) = r(x_i) \end{gathered} \tag{2.88}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j''(x_i) + p(x_i)\sum_{j=1}^{n} c_j u_j'(x_i) + q(x_i)\sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x_i) = r(x_i)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_i \left[u_j''(x_i) + p(x_i)u_j'(x_i) + q(x_i)u_j(x_i) \right] = r(x_i) \tag{2.89}$$

จะได้ระบบสมการ

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[\alpha_1 u_j(x_1) + \alpha_2 u_j'(x_1) \right] = \alpha_3$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[u_j''(x_i) + p(x_i)u_j'(x_i) + q(x_i)u_j(x_i) \right] = r(x_i) \qquad i = 2,3,\ldots,n-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[\beta_1 u_j(x_n) + \beta_2 u_j'(x_n) \right] = \beta_3$$

หรือเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{2.90}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & \cdots & d_{2,n} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & \cdots & d_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,1} & d_{n,2} & d_{n,3} & \cdots & d_{n,n} \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$d_{1,j} = \alpha_1 u_j(x_1) + \alpha_2 u_j'(x_1) \qquad 1 \le j \le n$$
$$d_{i,j} = u_j''(x_j) + p(x_j)u_j'(x_j) + q(x_j)u_j(x_j) \qquad 2 \le i \le n-1 \quad 1 \le j \le n$$
$$d_{n,j} = \beta_1 u_j(x_n) + \beta_2 u_j'(x_n) \qquad 1 \le j \le n$$

และ

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ r(x_2) \\ r(x_3) \\ \vdots \\ r(x_{n-1}) \\ \beta_3 \end{bmatrix} \tag{2.92}$$

ถ้า $\det A \neq 0$ แล้วจะได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบเชิงเส้นเป็น

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(x) \qquad a \le x \le b$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ หาได้จากระบบสมการ (2.90)

ตัวอย่างที่ 6 พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ที่นิยามบนช่วง [0,1] กับเงื่อนไขขอบของสมการปฏิกิริยาการแพร่ (Diffusion-Reaction Equation)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - \alpha^2 y = 0 \tag{2.93}$$
$$y'(0) = 0 \tag{2.94}$$
$$y(1) = 1 \tag{2.95}$$

เมื่อค่าคงที่ α แทนอัตราการเกิดปฏิกิริยา

ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาค่าขอบนี้คือ

$$y(x) = \frac{e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}\left(2\beta\cosh(\beta x) + \sinh(\beta x)\right)}{2\beta\cosh(\beta) + \sinh(\beta)} \tag{2.96}$$

เมื่อ $\beta = \dfrac{\sqrt{4\alpha^2+1}}{2}$

จงใช้วิธีการจัดตำแหน่งในการประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบนี้ เมื่อ $\alpha = 10$

วิธีทำ การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 2 จุด

เลือกผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบอยู่ในรูปแบบ

$$u(x) = c_1 + c_2(1-x^2) \tag{2.97}$$

ในที่นี้ $u_1(x) = 1$ และ $u_2(x) = 1-x^2$ เป็นฟังก์ชันฐานหลัก และกำหนดให้ $u(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y(1) = 1$ นั่นคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(1)=1 \tag{2.98}$$

จะได้ $c_1=1$ ส่วน $u(x)$ ที่ $x=0$ นั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y'(0)=0$ แล้ว (เนื่องจาก $u(0)=0$) เราต้องการสมการเพิ่มอีก 1 สมการเพื่อหาค่า c_2

แทนผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)$ ในสมการ (2.93)

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}-100u=r_a(x) \tag{2.99}$$

เมื่อ $r_a(x)$ แทนผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)$ ในสมการ (2.93) จะได้เศษเหลือคือ

$$R(x)=r_a(x)$$

$$R(x)=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}-100u$$

$$R(x)=-2c_2-2c_2x-100\left(1+c_2\left(1-x^2\right)\right) \tag{2.100}$$

ต้องการทำให้เศษเหลือ $R(x)$ มีค่าน้อยที่สุดโดย

$$\int_0^1 R(x)\delta(x-x_1)dx=0$$

เมื่อ x_1 คือจุดการจัดตำแหน่งที่อยู่ในช่วง $(0,1)$ จะได้

$$R(x_1)=0$$

$$-2c_2-2c_2x_1-100\left(1+c_2\left(1-x_1^2\right)\right)=0$$

$$c_2=-\frac{100}{2+2x_1+100\left(1-x_1^2\right)} \tag{2.101}$$

เลือก $x_1=0.5$ จะได้ $c_2=-\frac{50}{39}$

และผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งคือ

$$u(x)=1-\frac{50}{39}\left(1-x^2\right) \tag{2.102}$$

การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

เลือกผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบอยู่ในรูปแบบ

$$v(x)=c_1+c_2\left(1-x^2\right)+c_3x^2\left(1-x^2\right) \tag{2.103}$$

ในที่นี้ $\left\{1,1-x^2,x^2\left(1-x^2\right)\right\}$ เป็นฟังก์ชันฐานหลัก เราต้องการให้ $v(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y(1)=1$ โดยกำหนดให้

$$v(1)=1 \tag{2.104}$$

จะได้ $c_1=1$ ส่วน $v(x)$ ที่ $x=0$ นั้นสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y'(0)=0$ แล้ว (เนื่องจาก $v(0)=0$) เราต้องการสมการเพิ่มอีก 2 สมการเพื่อหาค่า c_2 และ c_3

แทนผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)$ ในสมการ (2.93)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}-100v=s_a(x) \tag{2.105}$$

เมื่อ $s_a(x)$ แทนผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)$ ในสมการ (2.93) จะได้เศษเหลือคือ

$$R(x)=s_a(x) \tag{2.106}$$

$$R(x)=\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}-100v$$

$$R(x)-2c_2+2c_3-12c_3x^2-2c_2x+2c_3x-4c_3x^3-100\left(1+c_2\left(1-x^2\right)+c_3x^2\left(1-x^2\right)\right)$$

ต้องการทำให้เศษเหลือ $R(x)$ มีค่าน้อยที่สุดโดย

$$\int_0^1 R(x)\delta(x-x_i)\,dx=0 \quad i=1,2$$

เมื่อ x_1 และ x_2 คือ จุดการจัดตำแหน่งที่อยู่ในช่วง $(0,1)$ จะได้

$$R(x_1)=0 \tag{2.107}$$

และ

$$R(x_2)=0 \tag{2.108}$$

เลือก $x_1=\frac{1}{3}$ และ $x_2=\frac{2}{3}$ จะได้ระบบสมการ

$$-91.5577c_2-8.6894c_3=100 \tag{2.109}$$

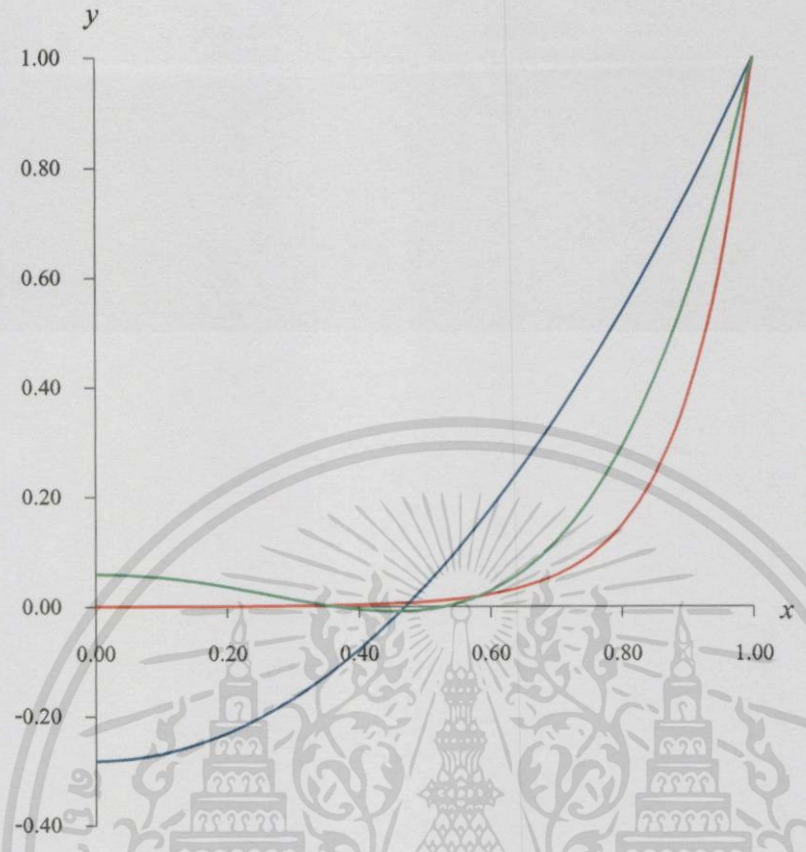
$$-58.8845c_2-27.8778c_3=100 \tag{2.110}$$

จะได้ $c_2=-0.9403$ และ $c_3=-1.6010$

และผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งคือ

$$v(x)=1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right) \tag{2.111}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.8 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\left(e^{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}x\right)}\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right)\Big/\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=1-\frac{50}{39}\left(1-x^2\right)$ และ $v(x)=1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.13 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\left(e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right)\Big/\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=1-\frac{50}{39}\left(1-x^2\right)$ และ $v(x)=1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right)$

x	$y(x)$	$u(x)$	$v(x)$
0.00	0.0001	–0.2821	0.0597
0.05	0.0002	–0.2789	0.0581
0.10	0.0002	–0.2693	0.0533
0.15	0.0003	–0.2533	0.0456
0.20	0.0005	–0.2308	0.0358
0.25	0.0008	–0.2020	0.0247
0.30	0.0013	–0.1667	0.0132
0.35	0.0021	–0.1250	0.0028
0.40	0.0033	–0.0770	–0.0050
0.45	0.0053	–0.0225	–0.0084
0.50	0.0086	0.0384	–0.0054
0.55	0.0138	0.1057	0.0063
0.60	0.0223	0.1795	0.0293
0.65	0.0358	0.2596	0.0663
0.70	0.0576	0.3461	0.1204
0.75	0.0927	0.4391	0.1946
0.80	0.1492	0.5384	0.2926
0.85	0.2401	0.6442	0.4181
0.90	0.3863	0.7564	0.5749
0.95	0.6215	0.8750	0.7042
1.00	1.0000	1.0000	1.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.14 ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=1-\frac{50}{39}\left(1-x^2\right)$ และ $v(x)=1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right)$

x	$\lvert y(x)-u(x)\rvert$	$\lvert y(x)-v(x)\rvert$
0.00	0.2822	0.0596
0.05	0.2791	0.0579
0.10	0.2695	0.0531
0.15	0.2536	0.0453
0.20	0.2313	0.0353
0.25	0.2028	0.0239
0.30	0.1680	0.0119
0.35	0.1271	0.0007
0.40	0.0803	0.0083
0.45	0.0278	0.0137
0.50	0.0298	0.0140
0.55	0.0919	0.0075
0.60	0.1572	0.0070
0.65	0.2238	0.0305
0.70	0.2885	0.0628
0.75	0.3464	0.1019
0.80	0.3892	0.1434
0.85	0.4041	0.1780
0.90	0.3701	0.1886
0.95	0.2535	0.1459
1.00	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

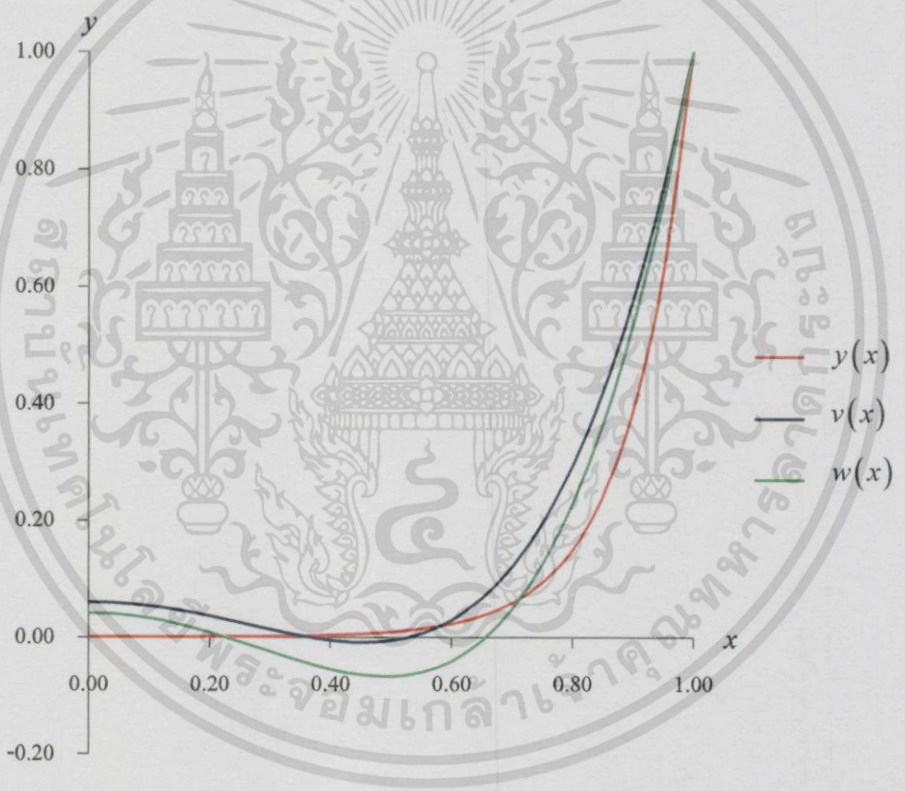
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางที่ 2.13 และ 2.14 จะเห็นได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณมี $v(x)$ ความแม่นยำมากกว่าผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)$

สำหรับวิธีการจัดตำแหน่งในตัวอย่างที่ 6 โดยการเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด เราเลือกจุดการจัดตำแหน่งในโดเมน [0,1] คือ $x_1=\frac{1}{3}$ และ $x_2=\frac{2}{3}$ ซึ่งมีระยะห่างระหว่างจุดเท่ากัน ถ้าเราเลือกจุดที่มีระยะห่างระหว่างจุดไม่เท่ากันคือ $x_1=\frac{1}{4}$ และ $x_2=\frac{3}{4}$ แล้ว จะได้ $c_2=-0.9587$ และ $c_3=-1.8513$ และได้ผลเฉลยโดยประมาณเป็น

$$w(x)=1-0.9587\left(1-x^2\right)-1.8513x^2\left(1-x^2\right) \qquad (2.112)$$

จากตารางที่ 2.15 และ 2.16 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $w(x)$ มีความแม่นยำมากกว่าผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)$ นั่นคือ การเลือกจุดการจัดตำแหน่งเป็นสิ่งที่จำเป็น เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ดี ซึ่งจะกล่าวในส่วนต่อไปว่าจุดการจัดตำแหน่งใดเป็นจุดที่ดีที่สุด



รูปที่ 2.9 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\left(e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right)\Big/\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)=1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right)$ และ $w(x)=1-0.9587\left(1-x^2\right)-1.8513x^2\left(1-x^2\right)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.15 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x) = \left(e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)}\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}x\right)\right)\right)\Big/\left(\sqrt{401}\cosh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)+\sinh\left(\frac{\sqrt{401}}{2}\right)\right)$ กับผลเฉลยโดยประมาณ $v(x) = 1-0.9403\left(1-x^2\right)-1.6010x^2\left(1-x^2\right)$ และ $w(x) = 1-0.9587\left(1-x^2\right)-1.8513x^2\left(1-x^2\right)$

x	$y(x)$	$v(x)$	$w(x)$
0.00	0.0001	0.0597	0.0413
0.05	0.0002	0.0581	0.0391
0.10	0.0002	0.0533	0.0326
0.15	0.0003	0.0456	0.0222
0.20	0.0005	0.0358	0.0086
0.25	0.0008	0.0247	–0.0073
0.30	0.0013	0.0132	–0.0240
0.35	0.0021	0.0028	–0.0403
0.40	0.0033	–0.0050	–0.0541
0.45	0.0053	–0.0084	–0.0635
0.50	0.0086	–0.0054	–0.0661
0.55	0.0138	0.0063	–0.0593
0.60	0.0223	0.0293	–0.0401
0.65	0.0358	0.0663	–0.0054
0.70	0.0576	0.1204	0.0484
0.75	0.0927	0.1946	0.41250
0.80	0.1492	0.2926	0.2283
0.85	0.2401	0.4181	0.3628
0.90	0.3863	0.5749	0.5329
0.95	0.6215	0.7042	0.7436
1.00	1.0000	1.0000	1.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.16 ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $v(x) = 1-0.9403(1-x^2)-1.6010x^2(1-x^2)$ และ $w(x) = 1-0.9587(1-x^2)-1.8513x^2(1-x^2)$

x	$\lvert y(x)-v(x)\rvert$	$\lvert y(x)-w(x)\rvert$
0.00	0.0596	0.0412
0.05	0.0579	0.0389
0.10	0.0531	0.0324
0.15	0.0453	0.0219
0.20	0.0353	0.0081
0.25	0.0239	0.0081
0.30	0.0119	0.0253
0.35	0.0007	0.0424
0.40	0.0083	0.0574
0.45	0.0137	0.0688
0.50	0.0140	0.0747
0.55	0.0075	0.0731
0.60	0.0070	0.0624
0.65	0.0305	0.0412
0.70	0.0628	0.0092
0.75	0.1019	0.0323
0.80	0.1434	0.0791
0.85	0.1780	0.1227
0.90	0.1886	0.1466
0.95	0.1459	0.1221
1.00	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6.2 พหุนามเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Polynomials)

พหุนามเชิงตั้งฉาก คือ ฟังก์ชันชนิดพิเศษที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเชิงตั้งฉากกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (Weighting Function) $w(x) \geq 0$ บนช่วง $[a,b]$ โดย

$$\int_a^b w(x)\phi_n(x)\phi_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n \neq m \\ c(n) > 0 & \text{ถ้า } n = m \end{cases} \tag{2.113}$$

พหุนามเชิงตั้งฉากที่ถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวาง ได้แก่ พหุนามเลอจองด์ (Legendre Polynomials) พหุนามเชบีเชฟ (Chebyshev Polynomials) พหุนามแอร์มิต (Hermite Polynomials) และพหุนามลาแกร์ (Lagguerre Polynomials)

สมบัติของพหุนามเชิงตั้งฉาก

1.ความสัมพันธ์เวียนเกิด

เซตของพหุนามเชิงตั้งฉาก $\{\phi_k | k = 1,2,...,N\}$ จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดสามจุด

$$\phi_{k+1}(x) = (a_k x + b_k)\phi_k(x) + c_k\phi_{k-1}(x) \tag{2.114}$$

เมื่อ a_k b_k และ c_k คือสัมประสิทธิ์ที่เป็นค่าคงที่

2.การมีรากที่เป็นจำนวนจริง

แต่ละพหุนามในลำดับเชิงตั้งฉากจะมีรากที่แตกต่างกันทั้งหมดเป็นจำนวนจริงภายในช่วงที่มีภาวะเชิงตั้งฉาก สมบัตินี้จะไม่มีในพหุนามอื่น

2.6.3 พหุนามเลอจองด์

พหุนามเลอจองด์เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วง $[-1,1]$ กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก

$$w(x) = 1 \tag{2.115}$$

โดยเงื่อนไขเชิงตั้งฉากคือ

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n \neq m \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{ถ้า } n = m \end{cases} \tag{2.116}$$

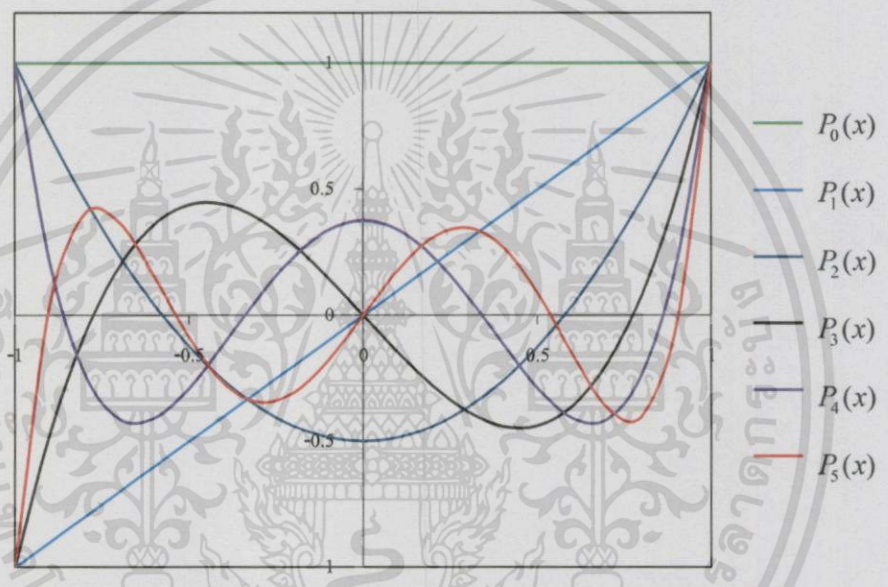
และสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{2.117}$$

โดยที่ $P_0(x) = 1$ และ $P_1(x) = x$ จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\
P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8} \\
P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{70}{8}x^3 + \frac{15}{8}x \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.118}
$$



รูปที่ 2.10 พหุนามเลอจองด์ $P_n(x)$ อันดับ 0 ถึง 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6.4 พหุนามเชบีเชฟ

พหุนามเชบีเชฟ $T_n(x)$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วง $[-1,1]$ กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.119}$$

โดยเงื่อนไขเชิงตั้งฉากคือ

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_n(x)T_m(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{ถ้า } n\neq m\\ \pi & \text{ถ้า } n=m=0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{ถ้า } n=m>0\end{cases} \tag{2.120}$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิดคือ

$$\begin{aligned}T_0(x)&=1\\ T_1(x)&=x\\ T_{n+1}&=2xT_n-T_{n-1}\end{aligned} \tag{2.121}$$

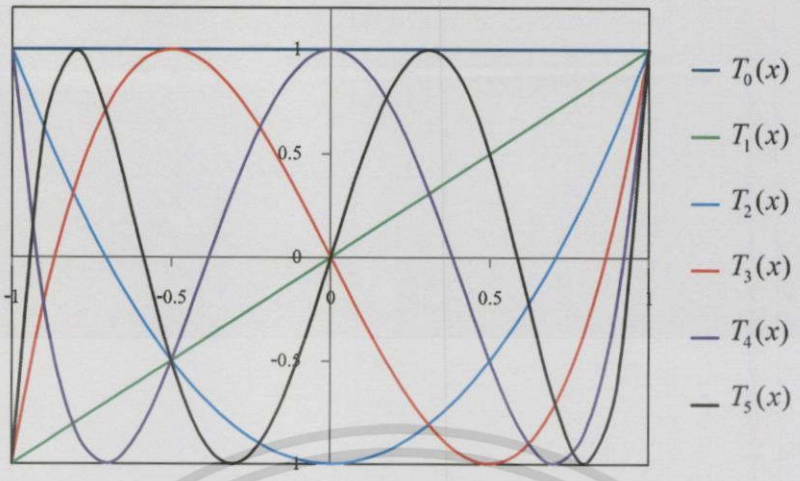
จะได้

$$\begin{aligned}T_0(x)&=1\\ T_1(x)&=x\\ T_2(x)&=2x^2-1\\ T_3(x)&=4x^3-3x\\ T_4(x)&=8x^4-8x^2+1\\ T_5(x)&=16x^5-20x^3+5x\\ &\vdots\end{aligned} \tag{2.122}$$

และรากของ $T_n(x)$ คือ

$$x_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\quad k=1,2,\ldots,n \tag{2.123}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.11 พหุนามเชบีเชฟ $T_n(x)$ อันดับ 0 ถึง 5

2.6.5 วิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Collocation Method)

จากที่กล่าวมาก่อนหน้านี้ จะเห็นได้ว่าความแม่นยำของวิธีการจัดตำแหน่งขึ้นอยู่กับจำนวนและตำแหน่งของจุดการจัดตำแหน่ง โดยเฉพาะการวางตำแหน่งของจุดจะมีผลต่อความแม่นยำอย่างมากเมื่อเราเลือกจุดการจัดตำแหน่งน้อยๆ

Villadsen และ Stewart [22] ได้เสนอวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากขึ้นเป็นครั้งแรกในปี ค.ศ.1967 พวกเขาพบว่าการเลือกจุดการจัดตำแหน่งที่เป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉากจะให้ผลลัพธ์ที่ดี พวกเขาเลือกฟังก์ชันประมาณค่า (Trial Function) เป็นพหุนามจาโคบี (Jacobi Polynomials) และเลือกจุดการจัดตำแหน่งเป็นรากของตัวเศษ (Zeros) ที่สอดคล้องกับพหุนาม ต่อมาในปี ค.ศ. 1972 Finlayson ใช้วิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากในการหาผลเฉลยของปัญหาทางวิศวกรรมเคมี Fan Chen และ Erickson ใช้วิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากในการหาผลเฉลยของสมการที่เกิดจากปฏิกิริยาเคมี และ Finlayson ได้ประยุกต์วิธีการจัดตำแหน่งกับปัญหาไม่เชิงเส้นในปี ค.ศ.1980 ในเวลาต่อมา วิธีการจัดตำแหน่งนี้ได้ถูกใช้ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมเคมีต่างๆ

วิธีนี้จะเลือกฟังก์ชันประมาณค่า $u(x)$ เป็นผลรวมเชิงเส้น

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{P}_{j-1}(x) \tag{2.124}$$

ของอนุกรมของพหุนามเชิงตั้งฉาก $\hat{P}_m(x)$ โดยที่

$$\begin{aligned}
\hat{P}_0(x) &= a_{0,0} \\
\hat{P}_1(x) &= a_{1,0} + a_{1,1}x \\
\hat{P}_2(x) &= a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2 \\
&\vdots \\
\hat{P}_m(x) &= a_{m,0} + a_{m,1}x + a_{m,2}x^2 + \ldots + a_{m,m}x^m
\end{aligned} \tag{2.125}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือเขียนในรูปแบบ

$$\hat{P}_m(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{m,k} x^k \qquad m = 1,2,...,n-1$$

เมื่อ $a_{m,k}$ คือสัมประสิทธิ์ของพหุนามที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเชิงตั้งฉากที่นิยามโดย

$$\int_a^b w(x)\hat{P}_l(x)\hat{P}_m(x)dx = 0 \qquad l = 0,1,2,...,m-1$$

ถ้า $\hat{P}_m(x)$ เป็นเซตของพหุนามเลอจองด์ จะมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)$ เป็น 1

สมการการแปลง (Transformation Equation) สำหรับการเปลี่ยน x ในช่วง $[a,b]$ เป็น z ในช่วง $[c,d]$ คือ

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{z-c}{d-c} \tag{2.126}$$

ช่วงการหาปริพันธ์มาตรฐานของพหุนามเลอจองด์ $P_m(z)$ คือ $[-1,1]$ จะใช้สมการ (2.126) ในการเปลี่ยนพหุนามเลอจองด์ $P_m(z)$ เป็นพหุนามเลอจองด์ $P_m(x)$ บนช่วง $[0,1]$ จะได้พหุนามเลอจองด์คือ

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= -1+2x \\
P_2(x) &= 1-6x+6x^2 \\
P_3(x) &= -1+12x-30x^2+20x^3 \\
P_4(x) &= 1-20x+90x^2-140x^3+70x^4 \\
P_5 &= -1+30x-210x^2+560x^3-630x^4+252x^5 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.127}$$

รากของพหุนามเหล่านี้แสดงไว้ในตารางที่ 2.17

พิจารณาสมการ (2.119)

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{P}_{j-1}(x)$$

$$u(x) = c_1(a_{0,0}) + c_2(a_{1,0} + a_{1,1}x) + c_3(a_{2,0} + a_{2,1}x + a_{2,2}x^2) + ..$$

$$+c_n(a_{n-1,0} + a_{n-1,1}x + a_{n-1,2}x^2 + ... + a_{n-1,n-1}x^{n-1})$$

$$u(x) = (c_1a_{0,0} + c_2a_{1,0} + c_3a_{2,0} + ... + c_na_{n-1,0}) + (c_2a_{1,1} + c_3a_{2,1} + ... + c_na_{n-1,1})x$$

$$+(c_3a_{2,2} + ... + c_na_{n-1,2})x^2 + ... + (c_na_{n-1,n-1})x^{n-1}$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i-1}^{n-1} c_{j+1}a_{j,i-1}x^{i-1} \tag{2.128}$$

จะได้ฟังก์ชันประมาณค่า $u(x)$ เป็น

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i x^{i-1} \quad \text{เมื่อ } d_i = \sum_{j=i-1}^{n-1} c_{j+1}a_{j,i-1} \tag{2.129}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.17 รากของพหุนามเลอจองด์ $P_m(x)$ บนช่วง [0,1]

m	x_k
1	0.5000000000
2	0.2113248654 0.7886751346
3	0.1127016654 0.5000000000 0.8872983346
4	0.0694318442 0.3300094782 0.6699905218 0.9305681558
5	0.0469100770 0.2307653449 0.5000000000 0.7692346551 0.9530899230

ตัวอย่างที่ 7 พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-y=0 \qquad 0\le x\le 1 \qquad (2.130)$$

$$y'(0)=0 \qquad (2.131)$$

$$y(1)=1 \qquad (2.132)$$

ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาค่าขอบนี้คือ

$$y(x)=\frac{e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})(-1+x)}\left(-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}x}\right)}{-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}}} \qquad (2.133)$$

จงใช้วิธีการจัดตำแหน่งและวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากในการประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>วิธีทำ</u> ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง

เลือกผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบอยู่ในรูปแบบ

$$u(x)=c_1(1)+c_2(1+x)+c_3(1+x^2)+c_4(x+x^3) \tag{2.134}$$

เราต้องการให้ $u(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y(1)=1$ โดยกำหนดให้ $u(1)=1$ จะได้

$$c_1+2c_2+2c_3+2c_4=1 \tag{2.135}$$

ส่วน $u(x)$ ที่ $x=0$ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y'(0)=0$ จะได้

$$u'(0)=0$$

$$c_2+c_4=0 \tag{2.136}$$

ต้องการอีก 2 สมการ กำหนดให้ $0=x_1<x_2<x_3<x_4=1$

แทนผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)$ ในสมการ (2.125) จะได้

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}-u=r_a(x) \tag{2.137}$$

เมื่อ $r_a(x)$ แทนผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)$ ในสมการ (2.130) จะได้เศษเหลือคือ

$$R(x)=r_a(x)$$

$$R(x)=\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}-u$$

$$R(x)=\left[c_3(2)+c_4(6x)\right]+\left[c_2+c_3(2x)+c_4(1+3x^2)\right]$$
$$-\left[c_1+c_2(1+x)+c_3(1+x^2)+c_4(x+x^3)\right]$$

$$R(x)=-c_1-c_2x+c_3(1+2x-x^2)+c_4(1+5x+3x^2-x^3) \tag{2.138}$$

ต้องการทำให้เศษเหลือ $R(x)$ มีค่าน้อยที่สุดโดย

$$\int_0^1 R(x)\delta(x-x_i)dx=0 \quad i=2,3$$

เมื่อ x_2 และ x_3 คือ จุดการจัดตำแหน่งที่อยู่ในช่วง $(0,1)$ จะได้

$$R(x_2)=0 \tag{2.139}$$

และ

$$R(x_3)=0 \tag{2.140}$$

เลือก $x_2=\frac{1}{3}$ และ $x_3=\frac{2}{3}$ จะได้

$$R\left(\frac{1}{3}\right)=0$$

$$-c_1-\frac{1}{3}c_2+\frac{14}{9}c_3+\frac{80}{27}c_4=0 \tag{2.141}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$R\left(\frac{2}{3}\right)=0$$

$$-c_1-\frac{2}{3}c_2+\frac{17}{3}c_3+\frac{145}{27}c_4=0 \qquad (2.142)$$

จากสมการ (2.135) (2.136) (2.141) และ (2.142) จะได้ระบบสมการ

$$c_2+c_4=0$$

$$-c_1-\frac{1}{3}c_2+\frac{14}{9}c_3+\frac{80}{27}c_4=0$$

$$-c_1-\frac{2}{3}c_2+\frac{17}{3}c_3+\frac{145}{27}c_4=0$$

$$c_1+2c_2+2c_3+2c_4=1$$

หรือเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{3} & \frac{14}{9} & \frac{80}{27} \\ -1 & -\frac{2}{3} & \frac{17}{3} & \frac{145}{27} \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2.143)$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} \frac{769}{2101} & \frac{81}{2101} & \frac{666}{2101} & -\frac{81}{2101} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)$ คือ

$$u(x)=\frac{769}{2101}+\frac{81}{2101}(1+x)+\frac{666}{2101}(1+x^2)-\frac{81}{2101}(x+x^3)$$

$$u(x)=\frac{1516}{2101}+\frac{666}{2101}x^2-\frac{81}{2101}x^3 \qquad (2.144)$$

ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉาก

เลือกผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบอยู่ในรูปแบบ

$$v(x)=c_1(1)+c_2(-1+2x)+c_3(1-6x+6x^2)+c_4(-1+12x-30x^2+20x^3) \qquad (2.145)$$

ต้องการให้ $v(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y(1)=1$ โดยกำหนดให้ $v(1)=1$ จะได้

$$c_1+c_2+c_3+c_4=1 \qquad (2.146)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ส่วน $v(x)$ ที่ $x=0$ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $y'(0)=0$ จะได้

$$v'(0)=0$$
$$2c_2-6c_3+12c_4=0$$
$$c_2-3c_3+6c_4=0 \qquad (2.147)$$

ต้องการอีก 2 สมการ กำหนดให้ $0=x_1<x_2<x_3<x_4=1$

แทนผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)$ ในสมการ (2.130) จะได้

$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}-v=s_a(x) \qquad (2.148)$$

เมื่อ $s_a(x)$ แทนผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)$ ในสมการ (2.125) จะได้เศษเหลือคือ

$$R(x)=s_a(x)$$
$$R(x)=\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{dv}{dx}-v$$
$$R(x)=\left[c_3(12)+c_4(-60+120x)\right]+\left[c_2(2)+c_3(-6+12x)+c_4(12-60x+60x^3)\right]$$
$$-\left[c_1+c_2(-1+2x)+c_3(1-6x+6x^2)+c_4(-1+12x-30x^2+20x^3)\right]$$
$$R(x)=-c_1-c_2(3-2x)+c_3(5+18x-6x^2)+c_4(-47+48x+90x^2-20x^3) \qquad (2.149)$$

ต้องการทำให้เศษเหลือ $R(x)$ มีค่าน้อยที่สุดโดย

$$\int_0^1 R(x)\delta(x-x_i)dx=0 \quad i=2,3$$

เมื่อ x_2 และ x_3 คือ จุดการจัดวางที่อยู่ในช่วง $(0,1)$ จะได้

$$R(x_2)=0 \qquad (2.150)$$

และ

$$R(x_3)=0 \qquad (2.151)$$

เลือก $x_2=\frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$ และ $x_3=\frac{1}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)$ ซึ่งเป็นรากของพหุนามเลอจองด์อันดับสองบนช่วง $[0,1]$ จะได้

$$R\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)=0$$
$$-c_1+\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)c_2+\left(12-2\sqrt{3}\right)c_3+\left(2-\frac{182}{3\sqrt{3}}\right)c_4=0 \qquad (2.152)$$

และ

$$R\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)=0$$
$$-c1+\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)c_2+\left(12+2\sqrt{3}\right)c_3+\left(2+\frac{182}{3\sqrt{3}}\right)c_4=0 \qquad (2.153)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.146) (2.147) (2.152) และ (2.153) จะได้ระบบสมการ

$$c_2 - 3c_3 + 6c_4 = 0$$

$$-c_1 + \left(2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)c_2 + \left(12 - 2\sqrt{3}\right)c_3 + \left(2 - \frac{182}{3\sqrt{3}}\right)c_4 = 0$$

$$-c1 + \left(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)c_2 + \left(12 + 2\sqrt{3}\right)c_3 + \left(2 + \frac{182}{3\sqrt{3}}\right)c_4 = 0$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1$$

หรือเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 6 \\ -1 & 2+\frac{1}{\sqrt{3}} & 12-2\sqrt{3} & 2-\frac{182}{3\sqrt{3}} \\ -1 & 2-\frac{1}{\sqrt{3}} & 12+2\sqrt{3} & 2+\frac{182}{3\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.154}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{738}{907} & \frac{654}{4535} & \frac{40}{907} & -\frac{9}{4535} \end{bmatrix}^T$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $v(x)$ คือ

$$v(x) = \frac{738}{907} + \frac{654}{4535}(-1+2x) + \frac{40}{907}\left(1-6x+6x^2\right) - \frac{9}{4535}\left(-1+12x-30x^2+20x^3\right)$$

$$v(x) = \frac{649}{907} + \frac{294}{907}x^2 - \frac{36}{907}x^3 \tag{2.155}$$

จากตารางที่ 2.18 และ 2.19 จะเห็นได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉาก $v(x)$ มีความแม่นยำมากกว่าผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u(x)$

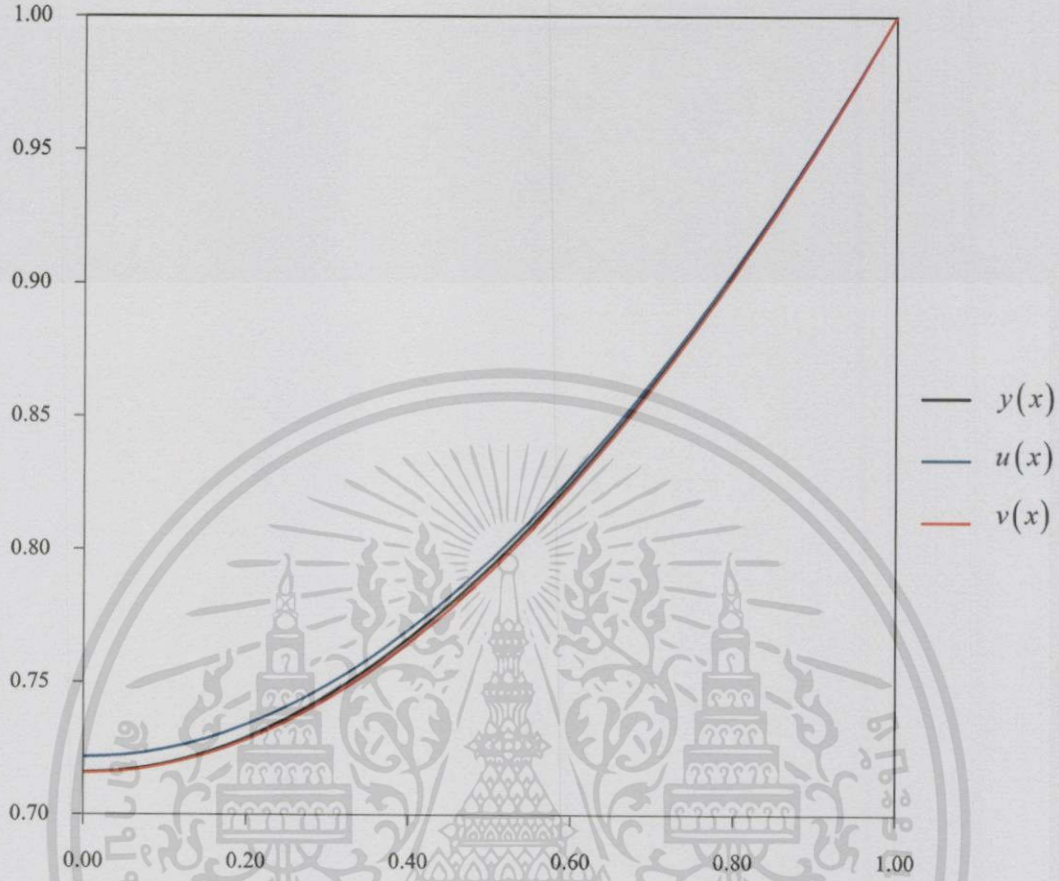
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.18 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})(-1+x)}\left(-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}x}\right)}{-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}}}$

กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=\dfrac{1516}{2101}+\dfrac{666}{2101}x^2-\dfrac{81}{2101}x^3$ และ $v(x)=\dfrac{649}{907}+\dfrac{294}{907}x^2-\dfrac{36}{907}x^3$

x	$y(x)$	$u(x)$	$v(x)$
0.00	0.7157	0.7216	0.7155
0.05	0.7165	0.7223	0.7164
0.10	0.7191	0.7247	0.7187
0.15	0.7233	0.7286	0.7227
0.20	0.7291	0.7339	0.7282
0.25	0.7364	0.7408	0.7352
0.30	0.7451	0.7490	0.7436
0.35	0.7552	0.7587	0.7536
0.40	0.7666	0.7698	0.7649
0.45	0.7794	0.7822	0.7776
0.50	0.7935	0.7960	0.7916
0.55	0.8087	0.8110	0.8070
0.60	0.8253	0.8274	0.8237
0.65	0.8430	0.8449	0.8416
0.70	0.8619	0.8637	0.8608
0.75	0.8820	0.8836	0.8811
0.80	0.9033	0.9047	0.9027
0.85	0.9257	0.9269	0.9254
0.90	0.9493	0.9502	0.9492
0.95	0.9741	0.9746	0.9741
1.00	1.0000	1.0000	1.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.12 เปรียบเทียบผลเฉลยแม่นตรง $y(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})(-1+x)}\left(-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}x}\right)}{-1+\sqrt{5}+\left(1+\sqrt{5}\right)e^{\sqrt{5}}}$

กับผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=\dfrac{1516}{2101}+\dfrac{666}{2101}x^2-\dfrac{81}{2101}x^3$ และ $v(x)=\dfrac{649}{907}+\dfrac{294}{907}x^2$

$-\dfrac{36}{907}x^3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.19 ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u(x)=\frac{1516}{2101}+\frac{666}{2101}x^2-\frac{81}{2101}x^3$ และ $v(x)=\frac{649}{907}+\frac{294}{907}x^2-\frac{36}{907}x^3$

x	$\lvert y(x)-u(x)\rvert$	$\lvert y(x)-v(x)\rvert$
0.00	5.8935×10^{-3}	1.2196×10^{-4}
0.05	5.8011×10^{-3}	1.9660×10^{-4}
0.10	5.5600×10^{-3}	3.8504×10^{-4}
0.15	5.2181×10^{-3}	6.4023×10^{-4}
0.20	4.8156×10^{-3}	9.2280×10^{-4}
0.25	4.3855×10^{-3}	1.2006×10^{-3}
0.30	3.9543×10^{-3}	1.4481×10^{-3}
0.35	3.5419×10^{-3}	1.6459×10^{-3}
0.40	3.1629×10^{-3}	1.7807×10^{-3}
0.45	2.8262×10^{-3}	1.8443×10^{-3}
0.50	2.5356×10^{-3}	1.8336×10^{-3}
0.55	2.2905×10^{-3}	1.7504×10^{-3}
0.60	2.0854×10^{-3}	1.6006×10^{-3}
0.65	1.9111×10^{-3}	1.3945×10^{-3}
0.70	1.7543×10^{-3}	1.1462×10^{-3}
0.75	1.5981×10^{-3}	8.7361×10^{-4}
0.80	1.4220×10^{-3}	5.9788×10^{-4}
0.85	1.2023×10^{-3}	3.4358×10^{-4}
0.90	9.1242×10^{-4}	1.3831×10^{-4}
0.95	5.2248×10^{-4}	1.2663×10^{-5}
1.00	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

วัสดุพรุน คือ ของแข็งที่ภายในเนื้อวัสดุมีช่องว่างหรือรูพรุนที่เชื่อมต่อกันเป็นโครงข่าย วัสดุพรุนตามธรรมชาติ เช่น ไม้ เนื้อเยื่อปอดของมนุษย์ หินทราย และรังผึ้ง สมบัติที่สำคัญของวัสดุพรุน คือ มีพื้นที่ผิวต่อปริมาตรสูง ทำให้มีค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทความร้อนโดยการพาความร้อนสูง อีกทั้งวัสดุพรุนเป็นของแข็งที่มีค่าการนำความร้อนและการแผ่รังสีความร้อนสูง ทำให้วัสดุพรุนสามารถเปลี่ยนรูปพลังงานความร้อนได้ดีระหว่างความร้อนในรูปของการพาและการแผ่รังสี จึงกล่าวได้ว่าวัสดุพรุนเป็นอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน (Heat Exchanger) ที่มีประสิทธิภาพสูงและมีขนาดกะทัดรัด

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับรูปแบบอุณหภูมิของสภาพการนำความร้อนของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุน โดย S. Subramanian และ V. Balaktaiah [21] มีรูปแบบเป็น

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2} + B\phi^2\left(1-\frac{\theta_0}{B}\right)\exp\left(\frac{\gamma\theta_0}{\gamma+\theta_0}\right) = 0 \qquad (3.1)$$

โดยกำหนดเงื่อนไขขอบเป็น

$$\frac{d\theta_0}{dz} = 0 \quad \text{ที่} \quad z = 0$$

$$\theta_0 = 0 \quad \text{ที่} \quad z = 1$$

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นี้ประกอบด้วยกลุ่มตัวแปรไร้มิติ (Dimensionless Groups) ดังนี้

θ_0 คือ อุณหภูมิในสภาวะคงตัว (Steady-State)

z คือ แกนพิกัดไร้มิติแนวตั้ง

B คือ อุณหภูมิสูงสุดที่เป็นไปได้ (อุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นแบบแอเดียแบติก (Adiabatic)) เมื่อไม่มีการพาความร้อนตามธรรมชาติ

ϕ^2 คือ อัตราส่วนของเวลาลักษณะเฉพาะ (Characteristic Time) ของการนำความร้อนของปฏิกิริยา

γ คือ พลังงานกระตุ้น

ถ้าแหล่งกำเนิดความร้อนเป็นค่าคงที่แล้ว สมการ (3.1) จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2} + B\phi^2\left(1-\frac{\theta_0}{B}\right) = 0 \qquad (3.2)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเป็น

$$\frac{d\theta_0}{dz} = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad z = 0 \qquad (3.3)$$

$$\theta_0 = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad z = 1 \qquad (3.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 ผลเฉลยแม่นตรง

พิจารณาสมการ (3.2) ในรูปแบบ

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2}-\phi^2\theta_0 = -B\phi^2 \tag{3.5}$$

โดยกำหนดเงื่อนไขขอบ คือ

$$\frac{d\theta_0}{dz} = 0 \text{ ที่ } z=0$$

และ

$$\theta_0 = 0 \text{ ที่ } z=1$$

เมื่อ $\phi^2 \neq 0$ และ B เป็นค่าคงตัว

ผลเฉลยของสมการ (3.5) เขียนได้ในรูปแบบ

$$\theta_0 = \theta_h + \theta_p$$

เมื่อ

θ_h คือ ผลเฉลยทั่วไป

θ_p คือ ผลเฉลยเฉพาะ

3.2.1 ผลเฉลยทั่วไป

พิจารณาสมการเอกพันธ์

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2}-\phi^2\theta_0 = 0 \tag{3.6}$$

กำหนดผลเฉลยของสมการ (3.6) อยู่ในรูป $\theta_0 = e^{rz}$ เมื่อ r เป็นค่าคงตัว แล้วแทน $\theta_0 = e^{rz}$ ในสมการ (3.6) จะได้

$$\frac{d^2\left(e^{rz}\right)}{dz^2}-\phi^2\left(e^{rz}\right) = 0$$

$$r^2e^{rz}-\phi^2e^{rz} = 0$$

$$e^{rz}\left(r^2-\phi^2\right) = 0$$

จะได้สมการลักษณะเฉพาะ คือ

$$r^2-\phi^2 = 0$$

รากคือ $r = \pm\phi$

จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.5) คือ

$$\theta_h = c_1e^{\phi z}+c_2e^{-\phi z} \tag{3.7}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.2 ผลเฉลยเฉพาะ

พิจารณาทางด้านขวาของสมการ (3.5)

$$f(z) = -B\phi^2$$

สมมติ $\theta_p = A$ สำหรับบางค่าคงตัว A

แทน $\theta_p = A$ ในสมการ (3.5) จะได้

$$\frac{d^2(A)}{dz^2} - \phi^2(A) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 A = -B\phi^2$$

$$A = B$$

ผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$\theta_p = B \tag{3.8}$$

3.2.3 ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

จาก (3.7) และ (3.8) จะได้ผลเฉลยของสมการ (3.5) เป็น

$$\theta_0 = c_1 e^{\phi z} + c_2 e^{-\phi z} + B \tag{3.9}$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ (3.9) จะได้

$$\frac{d\theta_0}{dz} = c_1\phi e^{\phi z} - c_2\phi e^{-\phi z}$$

จากเงื่อนไข $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$ จะได้

$$0 = c_1\phi - c_2\phi$$

$$0 = (c_1 - c_2)\phi$$

เนื่องจาก $\phi \neq 0$ ดังนั้น

$$c_1 = c_2$$

แทนค่า $c_1 = c_2$ ในสมการ (3.9) จะได้

$$\theta_0 = c_1\left(e^{\phi z} + e^{-\phi z}\right) + B \tag{3.10}$$

จากเงื่อนไข $\theta_0 = 0$ ที่ $z = 1$ จะได้

$$0 = c_1\left(e^{\phi} + e^{-\phi}\right) + B$$

$$c_1 = -\frac{B}{e^{\phi} + e^{-\phi}}$$

แทนค่า c_1 ในสมการ (3.10) จะได้ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเป็น

$$\theta_0 = -\frac{B\left(e^{\phi z} + e^{-\phi z}\right)}{e^{\phi} + e^{-\phi}} + B \tag{3.11}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีผลต่างจำกัด

พิจารณาสมการ (3.2) ในรูปแบบ

$$\theta_0'' = p(z)\theta_0' + q(z)\theta_0 + r(z) \tag{3.12}$$

เมื่อ $p(z)=0$ $q(z)=\phi^2$ และ $r(z)=-B\phi^2$

เลือกจำนวนเต็มบวก N เพื่อแบ่งช่วง $[a,b]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่าๆกัน โดยมีจุดปลายช่วงย่อยเป็นจุดตัด $z_i = a+ih$ สำหรับแต่ละ $i=0,1,2,...,N$ เมื่อ $h=\dfrac{(b-a)}{N}$

ที่จุดตัดภายใน z_i สำหรับแต่ละ $i=0,1,2,...,N-1$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์เป็น

$$\theta_0''(z_i) = p(z_i)\theta_0'(z_i) + q(z_i)\theta_0(z_i) + r(z_i) \tag{3.13}$$

สมมติว่า $\theta_0 \in C^4[z_{i-1}, z_{i+1}]$ หาค่า θ_0 ที่จุด z_{i+1} และ z_{i-1} โดยการกระจายพหุนามเทย์เลอร์อันดับสามรอบจุด z_i

$$\theta_0(z_{i+1}) = \theta_0(z_i+h) = \theta_0(z_i) + h\theta_0'(z_i) + \frac{h^2}{2}\theta_0''(z_i) + \frac{h^3}{6}\theta_0'''(z_i) + \frac{h^4}{24}\theta_0^{(4)}(\xi_i^+) \tag{3.14}$$

สำหรับบาง $\xi_i^+ \in (z_i, z_{i+1})$ และ

$$\theta_0(z_{i-1}) = \theta_0(z_i-h) = \theta_0(z_i) - h\theta_0'(z_i) + \frac{h^2}{2}\theta_0''(z_i) - \frac{h^3}{6}\theta_0'''(z_i) + \frac{h^4}{24}\theta_0^{(4)}(\xi_i^+) \tag{3.15}$$

สำหรับบาง $\xi_i^- \in (z_{i-1}, z_i)$

นำสมการ (3.14) บวกกับสมการ (3.15) จะได้

$$\begin{aligned}\theta_0(z_{i+1}) + \theta_0(z_{i-1}) &= 2\theta_0(z_i) + h^2\theta_0''(z_i) + \frac{h^4}{24}\left[\theta_0^{(4)}(\xi_i^+) + \theta_0^{(4)}(\xi_i^-)\right] \\ \theta_0''(z_i) &= \frac{1}{h^2}\left[\theta_0(z_{i+1}) - 2\theta_0(z_i) + \theta_0(z_{i-1})\right] - \frac{h^2}{24}\left[\theta_0^{(4)}(\xi_i^+) + \theta_0^{(4)}(\xi_i^-)\right]\end{aligned} \tag{3.16}$$

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะได้

$$\theta_0''(z_i) = \frac{1}{h^2}\left[\theta_0(z_{i+1}) - 2\theta_0(z_i) + \theta_0(z_{i-1})\right] - \frac{h^2}{12}\theta_0^{(4)}(\xi_i) \tag{3.17}$$

สำหรับบาง $\xi_i \in (z_{i-1}, z_{i+1})$

หาค่า θ_0 ที่จุด z_{i+1} และ z_{i-1} โดยการกระจายพหุนามเทย์เลอร์อันดับสองรอบจุด z_i

$$\theta_0(z_{i+1}) = \theta_0(z_i+h) = \theta_0(z_i) + h\theta_0'(z_i) + \frac{h^2}{2}\theta_0''(z_i) + \frac{h^3}{6}\theta_0'''(\eta_i^+) \tag{3.18}$$

สำหรับบาง $\eta_i^+ \in (z_i, z_{i+1})$ และ

$$\theta_0(z_{i-1}) = \theta_0(z_i-h) = \theta_0(z_i) - h\theta_0'(z_i) + \frac{h^2}{2}\theta_0''(z_i) - \frac{h^3}{6}\theta_0'''(\eta_i^-) \tag{3.19}$$

สำหรับบาง $\eta_i^- \in (z_{i-1}, z_i)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการ (3.18) ลบกับสมการ (3.19)

$$\theta_0(z_{i+1})-\theta_0(z_{i-1})=2h\theta_0'(z_i)+\frac{h^3}{3}\left[\theta_0'''(\eta_i^+)-\theta_0'''(\eta_i^-)\right]$$

$$\theta_0'(z_i)=\frac{1}{2h}\left[\theta_0(z_{i+1})-\theta_0(z_{i-1})\right]-\frac{h^2}{6}\left[\theta_0'''(\eta_i^+)-\theta_0'''(\eta_i^-)\right] \qquad (3.20)$$

โดยทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง จะได้

$$\theta_0'(z_i)=\frac{1}{2h}\left[\theta_0(z_{i+1})-\theta_0(z_{i-1})\right]-\frac{h^2}{6}\theta_0'''(\eta_i) \qquad (3.21)$$

สำหรับบาง $\eta_i \in (z_{i-1}, z_{i+1})$

นำสมการ (3.17) และ (3.21) แทนในสมการ (3.13)

$$\frac{\theta_0(z_{i+1})-2\theta_0(z_i)+\theta_0(z_{i-1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}\theta_0^{(4)}(\xi_i)$$

$$= p(z_i)\left[\frac{\theta_0(z_{i+1})-\theta_0(z_{i-1})}{2h}+\frac{h^2}{6}\theta_0'''(\eta_i)\right]+q(z_i)\theta_0(z_i)+r(z_i)$$

$$\frac{\theta_0(z_{i+1})-2\theta_0(z_i)+\theta_0(z_{i-1})}{h^2}=p(z_i)\left[\frac{\theta_0(z_{i+1})-\theta_0(z_{i-1})}{2h}\right]+q(z_i)\theta_0(z_i)+r(z_i)$$

$$-\frac{h^2}{12}\left[2p(z_i)\theta_0'''(\eta_i)-\theta_0^{(4)}(\xi_i)\right] \qquad (3.22)$$

จากนั้นตัดพจน์ของเศษเหลือ $\frac{h^2}{12}\left[2p(z_i)\theta_0'''(\eta_i)-\theta_0^{(4)}(\xi_i)\right]$ ออก แล้วแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z_i)$ ด้วยผลเฉลยโดยประมาณ w_i สำหรับ $i=0,1,2,...,N$ จะได้

$$\frac{w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}}{h^2}=p(z_i)\left[\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}\right]+q(z_i)w_i+r(z_i) \qquad (3.23)$$

จากเงื่อนไขขอบดีรีเคล

$$\theta_0(z_N)=0$$

กำหนดให้

$$w_N=0 \qquad (3.24)$$

และเงื่อนไขขอบนอยมันน์

$$\theta_0'(z_0)=0$$

โดยวิธีผลต่างกลาง

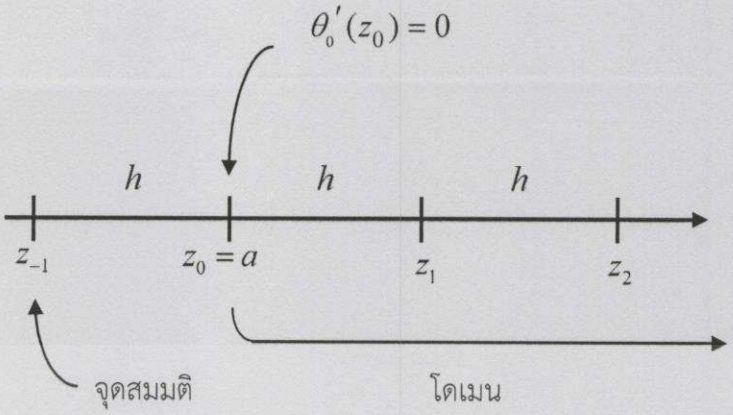
$$\frac{\theta_0(z_1)-\theta_0(z_{-1})}{2h}=0$$

$$\theta_0(z_{-1})=\theta_0(z_1)$$

กำหนดให้

$$w_{-1}=w_1 \qquad (3.25)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.1 จุดสมมติที่จุด $z=z_0$

จากสมการ (3.23) จะได้สมการผลต่างจำกัด

$$\frac{-w_{i+1}+2w_i-w_{i-1}}{h^2}+p(z_i)\left[\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}\right]+q(z_i)w_i = -r(z_i)$$

$$-\left[1+\frac{h}{2}p(z_i)\right]w_{i-1}+\left[2+h^2q(z_i)\right]w_i-\left[1-\frac{h}{2}p(z_i)\right]w_{i+1} = -h^2r(z_i) \quad (3.26)$$

สำหรับ $i=0$ จะได้

$$-\left[1+\frac{h}{2}p(z_0)\right]w_{-1}+\left[2+h^2q(z_0)\right]w_0-\left[1-\frac{h}{2}p(z_0)\right]w_1 = -h^2r(z_0)$$

แทน $w_{-1}=w_1$ จะได้

$$-\left[1+\frac{h}{2}p(z_i)\right]w_1+\left[2+h^2q(z_i)\right]w_0-\left[1-\frac{h}{2}p(z_i)\right]w_1 = -h^2r(z_0)$$

$$\left[2+h^2q(z_i)\right]w_0-2w_1 = -h^2r(z_0) \quad (3.27)$$

สำหรับ $i=1,2,...,N-2$ จะได้

$$-\left[1+\frac{h}{2}p(z_i)\right]w_{i-1}+\left[2+h^2q(z_i)\right]w_i-\left[1-\frac{h}{2}p(z_i)\right]w_{i+1} = -h^2r(z_0)$$

(3.28)

สำหรับ $i=N-1$ จะได้

$$-\left[1+\frac{h}{2}p(z_{N-1})\right]w_{N-2}+\left[2+h^2q(z_{N-1})\right]w_{N-1}-\left[1-\frac{h}{2}p(z_{N-1})\right]w_N = -h^2r(z_{N-1})$$

แทนค่า $w_N=0$ จะได้

$$-\left[1-\frac{h}{2}p(z_{N-1})\right]w_{N-2}+\left[2+h^2q(z_{N-1})\right]w_{N-1} = -h^2r(z_{N-1}) \quad (3.29)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการ (3.27) ถึง (3.29) มาเขียนในรูปเมทริกซ์ จะได้ระบบสมการผลต่างจำกัดสำหรับปัญหาค่าขอบ $\theta_0'' = p(z)\theta_0' + q(z)\theta_0 + r(z)$ ภายใต้เงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$ และ $\theta_0 = 0$ ที่ $z = 1$ คือ

$$K\mathbf{w} = \bar{\mathbf{b}} \tag{3.30}$$

เมื่อ

$$K = \begin{bmatrix} 2+h^2q(z_0) & -2 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -\left(1+\frac{h}{2}p(z_1)\right) & 2+h^2q(z_1) & -\left(1-\frac{h}{2}p(z_1)\right) & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -\left(1+\frac{h}{2}p(z_2)\right) & 2+h^2q(z_2) & -\left(1-\frac{h}{2}p(z_2)\right) & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -\left(1-\frac{h}{2}p(z_{N-2})\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -\left(1+\frac{h}{2}p(z_{N-1})\right) & 2+h^2q(z_{N-1}) \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

และ

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} -h^2r(z_0) \\ -h^2r(z_1) \\ -h^2r(z_2) \\ . \\ . \\ . \\ -h^2r(z_{N-1}) \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

แทน $p(z) = 0$ $q(z) = \phi^2$ และ $r(z) = -B\phi^2$ ในสมการเมทริกซ์ (3.30) จะได้ระบบสมการผลต่างจำกัดสำหรับปัญหาค่าขอบ $\frac{d^2\theta_0}{dz^2} + B\phi^2\left(1 - \frac{\theta_0}{B}\right) = 0$ ภายใต้เงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$ และ $\theta_0 = 0$ ที่ $z = 1$ คือ

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b} \tag{3.33}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 2+h^2\phi^2 & -2 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2+h^2\phi^2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2\phi^2 & -1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & 2+h^2\phi^2 \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

และ

$$\mathbf{w}=\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} h^2B\phi^2 \\ h^2B\phi^2 \\ h^2B\phi^2 \\ . \\ . \\ . \\ h^2B\phi^2 \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

3.4 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการวางตำแหน่ง

พิจารณาสมการ (3.5)

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2}-\phi^2\theta_0=-B\phi^2$$

โดยกำหนดเงื่อนไขขอบ คือ

$$\frac{d\theta_0}{dz}=0 \quad \text{ที่} \quad z=0$$

และ

$$\theta_0=0 \quad \text{ที่} \quad z=1$$

เมื่อ $\phi^2\neq 0$ และ B เป็นค่าคงตัว

เริ่มจากการสมมติผลเฉลยโดยประมาณของ $\theta_0(z)$ ให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชัน $u_j(z)$ นั่นคือ

$$u(z)=\sum_{j=1}^{n}c_ju_j(z) \tag{3.36}$$

เมื่อกำหนดให้ n แทนจำนวนของฟังก์ชันฐานหลัก (Basis Function) ที่ได้จากการแบ่งช่วง $[0,1]$ ออกเป็น $n-1$ ช่วงย่อย

c_j แทนสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่ต้องการหาค่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$u_j(z)$ แทนฟังก์ชันฐานหลัก ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าจะเลือกให้ฟังก์ชันที่มีสมบัติหรือลักษณะเฉพาะแบบใดเพื่อใช้ในการคำนวณ

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ โดยที่ $0 = z_1 < z_2 < \ldots < z_n = 1$ และให้ $u(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่จุด $z_1 = 0$

$$u'(0) = 0 \tag{3.37}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j'(0) = 0 \tag{3.38}$$

และ $u(z)$ ที่ $z_n = 1$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0 = 0$ นั่นคือ

$$u(1) = 0 \tag{3.39}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j(1) = 0 \tag{3.40}$$

จะได้สมการการจัดตำแหน่ง 2 สมการ ต้องการอีก $n-2$ สมการ โดยการแทนผลเฉลยโดยประมาณ $u(z)$ ในสมการ (3.5)

$$u''(z) - \phi^2 u(z) = L(z) \tag{3.41}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j''(z) - \phi^2 \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(z) = L(z)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[c_j u_j''(z) - \phi^2 c_j u_j(z) \right] = L(z)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_i \left[u_j''(z) - \phi^2 u_j(z) \right] = L(z) \tag{3.42}$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง θ_0 ด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u(z)$ จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.43}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ของ $u(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_i)dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3,\ldots,n-1 \tag{3.44}$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$

$$L(z_i) = -B\phi^2 \tag{3.45}$$

สำหรับ $i = 2,3,\ldots,n-1$

จะได้ระบบสมการเป็น

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j'(z_1) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left[u_j''(z_i) - \phi^2 u_j(z_i) \right] = -B\phi^2 \qquad i = 2,3,...,n-1$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j u_j(z_n) = 0$$

หรือเขียนในรูปสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.46}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & \cdots & d_{2,n} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & \cdots & d_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n,1} & d_{n,2} & d_{n,3} & \cdots & d_{n,n} \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

โดยที่

$$d_{1,j} = u_j'(z_1) \qquad 1 \le j \le n$$

$$d_{i,j} = u_j''(z_i) - \phi^2 u_j(z_i) \qquad 2 \le i \le n-1 \quad 1 \le j \le n$$

$$d_{n,j} = u_j(z_n) \qquad 1 \le j \le n$$

และ

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ \vdots \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.48}$$

ถ้า $\det A \neq 0$ แล้วจะได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบเชิงเส้นเป็น

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(z) \qquad 0 \le z \le 1$$

เมื่อ $c_1, c_2, ..., c_n$ หาได้จากระบบสมการ (3.46)

3.4.1 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์

เริ่มจากการสมมติผลเฉลยโดยประมาณ $u_n(z)$ อยู่ในรูป

$$u_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j P_{j-1}(z) \tag{3.49}$$

เมื่อ $P_{j-1}(z)$ คือ พหุนามเลอจองด์อันดับที่ $j-1$ โดยพหุนามเลอจองด์อันดับที่ 0 ถึง 5 แสดงไว้ในตารางที่ 3.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.1 พหุนามเลอจองด์ $P_m(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5

m	$P_m(z)$
0	1
1	z
2	$\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}$
3	$\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z$
4	$\frac{35}{8}z^4-\frac{30}{8}z^2+\frac{3}{8}$
5	$\frac{63}{8}z^5-\frac{70}{8}z^3+\frac{15}{8}z$

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$u_n(z)=\sum_{j=1}^{n}c_jP_{j-1}(z)$$

เลือก $n=3$ จะได้

$$u_3(z)=\sum_{j=1}^{3}c_jP_{j-1}(z) \tag{3.50}$$

$$u_3(z)=c_1P_0(z)+c_2P_1(z)+c_3P_2(z)$$

$$u_3(z)=c_1(1)+c_2(z)+c_3\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right) \tag{3.51}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 และ z_3 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3=1$

ให้ $u_3(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$u_3(1)=c_1(1)+c_2(1)+c_3\left(\frac{3}{2}(1)^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$u_3(1)=c_1+c_2+c_3$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3=0 \tag{3.52}$$

และสอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$

$$u_3'(z)=c_2+c_3(3z)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_3'(0) = c_2 + c_3\left(3(0)\right)$$

จะได้

$$c_2 = 0 \tag{3.53}$$

ต้องการอีก 1 สมการ

พิจารณา

$$u_3(z) = c_1 + c_2 z + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$u_3'(z) = c_2 + c_3\left(3z\right)$$

$$u_3''(z) = 3c_3$$

แทน $u_3(z)$ $u_3'(z)$ และ $u_3''(z)$ ลงในสมการ (3.5)

$$u_3''(z) - \phi^2 u_3(z) = L(z) \tag{3.54}$$

$$3c_3 - \phi^2\left[c_1 + c_2 z + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right)\right] = L(z)$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z + c_3\left(3 + \frac{\phi^2}{2} - \frac{3\phi^2}{2}z^2\right) = L(z) \tag{3.55}$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $u_3(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.56}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 และ c_3 ของ $u(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_2)\,dz = R(z_2) = 0 \tag{3.57}$$

เมื่อ $0 < z_2 < 1$

จะได้

$$L(z_2) + B\phi^2 = 0$$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$

เลือก $z_2 = \frac{1}{2}$ จะได้

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{1}{2}\right) + c_3\left(3 + \frac{\phi^2}{2} - \frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{2}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{1}{8}\phi^2\right)c_3 = -B\phi^2 \tag{3.58}$$

จากสมการ (3.52) (3.53) และ (3.58) จะได้ระบบสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_2 = 0$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{2}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{1}{8}\phi^2\right) c_3 = -B\phi^2$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

เขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.59}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 3 + \frac{1}{8}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.60}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$u_3(z) = c_1 + c_2(z) + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 และ c_3 หาได้จากระบบสมการ (3.59)

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$u_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j P_{j-1}(z)$$

เลือก $n = 4$ จะได้

$$u_4(z) = \sum_{j=1}^{4} c_j P_{j-1}(z) \tag{3.62}$$

$$u_4(z) = c_1 P_0(z) + c_2 P_1(z) + c_3 P_2(z) + c_4 P_3(z)$$

$$u_4(z) = c_1(1) + c_2(z) + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) + c_4\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right) \tag{3.63}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 และ z_4 โดยที่ $0 = z_1 < z_2 < z_3 < z_4 = 1$

ให้ $u_4(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0 = 0$ ที่ $z = 1$

$$u_4(1) = c_1 + c_2(1) + c_3\left(\frac{3}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}\right) + c_4\left(\frac{5}{2}(1)^3 - \frac{3}{2}(1)\right)$$

$$u_4(1) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0 \tag{3.64}$$

และ $u_4(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$

$$u_4'(z) = c_2 + c_3(3z) + c_4\left(\frac{15}{2}z^2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$u'(0) = c_2 + c_3(3(0)) + c_4\left(\frac{15}{2}(0)^2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$u'(0) = c_2 - \frac{3}{2}c_4$$

จะได้

$$c_2 - \frac{3}{2}c_4 = 0 \tag{3.65}$$

ต้องการอีก 2 สมการ

พิจารณา

$$u_4(z) = c_1 + c_2 z + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) + c_4\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right)$$

$$u_4'(z) = c_2 + c_3(3z) + c_4\left(\frac{15}{2}z^2 - \frac{3}{2}\right)$$

$$u_4''(z) = 3c_3 + c_4(15z)$$

แทน $u_4(z)$ $u_4'(z)$ และ $u_4''(z)$ ในสมการ (3.5)

$$u_4''(z) - \phi^2 u_4(z) = L(z) \tag{3.66}$$

$$\left[3c_3 + c_4(15z)\right] - \phi^2\left[c_1 + c_2 z + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) + c_4\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right)\right] = L(z)$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}z^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}z^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)z\right) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $u_4(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.67}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 และ c_4 ของ $u_4(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_i)\,dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3 \tag{3.68}$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$L(z_i) = -B\phi^2 \tag{3.69}$$

สำหรับ $i = 2,3$

เลือก $z_2 = \frac{1}{3}$ และ $z_3 = \frac{2}{3}$

พิจารณา $L(z_2) = -B\phi^2$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z_2 + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}{z_2}^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}{z_2}^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)z_2\right) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{1}{3}\right) + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right) = -B\phi$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{3}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{1}{3}\phi^2\right)c_3 + \left(5 + \frac{11}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2 \qquad \text{n} \qquad (3.70)$$

พิจารณา $L(z_3) = -B\phi^2$

$$L(z_3) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z_3 + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}{z_3}^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}{z_3}^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)z_3\right) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{2}{3}\right) + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -B\phi$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{2}{3}\phi^2 c_2 + \left(3 - \frac{1}{6}\phi^2\right)c_3 + \left(10 + \frac{7}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2 \tag{3.71}$$

จากสมการ (3.64) (3.65) (3.70) และ (3.71) จะได้ระบบสมการ

$$c_2 - \frac{3}{2}c_4 = 0$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{3}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{1}{3}\phi^2\right)c_3 + \left(5 + \frac{11}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{2}{3}\phi^2 c_2 + \left(3 - \frac{1}{6}\phi^2\right)c_3 + \left(10 + \frac{7}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

หรือเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.72}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\phi^2 & -\frac{1}{3}\phi^2 & 3+\frac{1}{3}\phi^2 & 5+\frac{11}{27}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{2}{3}\phi^2 & 3-\frac{1}{6}\phi^2 & 10+\frac{7}{27}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.73}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$u_4(z)=c_1+c_2(z)+c_3\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right)+c_4\left(\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 และ c_4 หาได้จากระบบสมการ (3.72)

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$u_n(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j P_{j-1}(z)$$

เลือก $n=5$ จะได้

$$u_5(z)=\sum_{j=1}^{5} c_j P_{j-1}(z) \tag{3.75}$$

$$u_5(z)=c_1P_0(z)+c_2P_1(z)+c_3P_2(z)+c_4P_3(z)+c_5P_4(z)$$

$$u_5(z)=c_1(1)+c_2(z)+c_3\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right)+c_4\left(\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z\right)+c_5\left(\frac{35}{8}z^4-\frac{30}{8}z^2+\frac{3}{8}\right) \tag{3.76}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 z_4 และ z_5 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3<z_4<z_5=1$

ให้ $u_5(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$u_5(1)=c_1(1)+c_2(1)+c_3\left(\frac{3}{2}(1)^2-\frac{1}{2}\right)+c_4\left(\frac{5}{2}(1)^3-\frac{3}{2}(1)\right)+c_5\left(\frac{35}{8}(1)^4-\frac{30}{8}(1)^2+\frac{3}{8}\right)$$

$$u_5(1)=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=0 \tag{3.77}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $u_5(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$

$$u_5'(z) = c_2(1) + c_3(3z) + c_4\left(\frac{15}{2}z^2 - \frac{3}{2}\right) + c_5\left(\frac{35}{2}z^3 - \frac{15}{2}z\right)$$

$$u_5'(0) = c_2 + c_3(3(0)) + c_4\left(\frac{15}{2}(0)^2 - \frac{3}{2}\right) + c_5\left(\frac{35}{2}(0)^3 - \frac{15}{2}(0)\right)$$

$$u_5'(0) = c_2 - \frac{3}{2}c_4$$

จะได้

$$c_2 - \frac{3}{2}c_4 = 0 \tag{3.78}$$

ต้องการอีก 3 สมการ

พิจารณา

$$u_5(z) = c_1 + c_2 z + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) + c_4\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right) + c_5\left(\frac{35}{8}z^4 - \frac{30}{8}z^2 + \frac{3}{8}\right)$$

$$u_5'(z) = c_2 + c_3(3z) + c_4\left(\frac{15}{2}z^2 - \frac{3}{2}\right) + c_5\left(\frac{35}{2}z^3 - \frac{15}{2}z\right)$$

$$u_5''(z) = 3c_3 + c_4(15z) + c_5\left(\frac{105}{2}z^2 - \frac{15}{2}\right)$$

แทน $u_5(z)$ $u_5'(z)$ และ $u_5''(z)$ ในสมการ (3.5)

$$u_5''(z) - \phi^2 u_5(z) = L(z) \tag{3.79}$$

$$\left[3c_3 + c_4(15z) + c_5\left(\frac{105}{2}z^2 - \frac{15}{2}\right)\right]$$

$$-\phi^2\left[c_1 + c_2 z + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) + c_4\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right) + c_5\left(\frac{35}{8}z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{3}{8}\right)\right] = L(z)$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}z^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}z^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)z\right)$$

$$+c_5\left(-\frac{35\phi^2}{8}z^4 + \left(\frac{105}{2} + \frac{15\phi^2}{4}\right)z^2 - \left(\frac{3\phi^2}{8} + \frac{15}{2}\right)\right) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $u_5(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.80}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 ของ $u_5(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_i)\,dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3,4 \tag{3.81}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$L(z_i)+B\phi^2=0$$
$$L(z_i)=-B\phi^2 \tag{3.82}$$

สำหรับ $i=2,3,4$

เลือก $z_2=\frac{1}{4}$ $z_3=\frac{1}{2}$ และ $z_4=\frac{3}{4}$

จะได้

$$L(z_2)=-B\phi^2$$
$$L(z_3)=-B\phi^2$$
$$L(z_4)=-B\phi^2$$

พิจารณา $L(z_2)=-B\phi^2$

$$L(z_2)=-B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2z_2+c_2\left(3-\frac{3\phi^2}{2}z_2{}^2+\frac{\phi^2}{2}\right)+c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}z_2{}^3+\left(15+\frac{3\phi^2}{2}\right)z_2\right)$$
$$+c_5\left(-\frac{35\phi^2}{8}z_2{}^4+\left(\frac{105}{2}+\frac{15\phi^2}{4}\right)z_2{}^2-\left(\frac{3\phi^2}{8}+\frac{15}{2}\right)\right)=-B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2\left(\frac{1}{4}\right)+c_3\left(3-\frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{\phi^2}{2}\right)+c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(15+\frac{3\phi^2}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$
$$+c_5\left(-\frac{35\phi^2}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^4+\left(\frac{105}{2}+\frac{15\phi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{3\phi^2}{8}+\frac{15}{2}\right)\right)=-B\phi^2$$

$$-\phi^2c_1-\frac{1}{4}\phi^2c_2+\left(3+\frac{13}{32}\phi^2\right)c_3+\left(\frac{15}{4}+\frac{43}{128}\phi^2\right)c_4-\left(\frac{135}{32}+\frac{323}{2048}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2 \tag{3.83}$$

พิจารณา $L(z_3)=-B\phi^2$

$$L(z_3)=-B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2z_3+c_3\left(3-\frac{3\phi^2}{2}z_3{}^2+\frac{\phi^2}{2}\right)+c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}z_3{}^3+\left(15+\frac{3\phi^2}{2}\right)z_3\right)$$
$$+c_5\left(-\frac{35\phi^2}{8}z_3{}^4+\left(\frac{105}{2}+\frac{15\phi^2}{4}\right)z_3{}^2-\left(\frac{3\phi^2}{8}+\frac{15}{2}\right)\right)=-B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)+c_3\left(3-\frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\phi^2}{2}\right)+c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(15+\frac{3\phi^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$+c_5\left(-\frac{35\phi^2}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{105}{2}+\frac{15\phi^2}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3\phi^2}{8}+\frac{15}{2}\right)\right)=-B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{2}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{1}{8}\phi^2\right)c_3 + \left(\frac{15}{2} + \frac{7}{16}\phi^2\right)c_4 + \left(\frac{45}{8} + \frac{37}{128}\phi^2\right)c_5 = -B\phi^2 \tag{3.84}$$

พิจารณา $L(z_4) = -B\phi^2$

$$L(z_4) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z_4 + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}{z_4}^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}{z_4}^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)z_4\right)$$
$$+c_5\left(-\frac{35\phi^2}{8}{z_4}^4 + \left(\frac{105}{2} + \frac{15\phi^2}{4}\right){z_4}^2 - \left(\frac{3\phi^2}{8} + \frac{15}{2}\right)\right) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{3}{4}\right) + c_3\left(3 - \frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{\phi^2}{2}\right) + c_4\left(-\frac{5\phi^2}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(15 + \frac{3\phi^2}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$
$$+c_5\left(-\frac{35\phi^2}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{105}{2} + \frac{15\phi^2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3\phi^2}{8} + \frac{15}{2}\right)\right) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{3}{4}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{11}{32}\phi^2\right)c_3 + \left(\frac{45}{4} + \frac{9}{128}\phi^2\right)c_4 + \left(\frac{705}{32} + \frac{717}{2048}\phi^2\right)c_5 = -B\phi^2 \tag{3.85}$$

จากสมการ (3.77) (3.78) (3.83) (3.84) และ (3.85) จะได้ระบบสมการ

$$c_2 - \frac{3}{2}c_4 = 0$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{4}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{13}{32}\phi^2\right)c_3 + \left(\frac{15}{4} + \frac{43}{128}\phi^2\right)c_4 - \left(\frac{135}{32} + \frac{323}{32}\phi^2\right)c_5 = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{2}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{1}{8}\phi^2\right)c_3 + \left(\frac{15}{2} + \frac{7}{16}\phi^2\right)c_4 + \left(\frac{45}{8} + \frac{37}{128}\phi^2\right)c_5 = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{3}{4}\phi^2 c_2 + \left(3 + \frac{11}{32}\phi^2\right)c_3 + \left(\frac{45}{4} + \frac{9}{128}\phi^2\right)c_4 + \left(\frac{705}{32} + \frac{717}{2048}\phi^2\right)c_5 = -B\phi^2$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 0$$

หรือเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.86}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{4}\phi^2 & 3+\frac{13}{32}\phi^2 & \frac{15}{4}+\frac{43}{128}\phi^2 & -\frac{135}{32}-\frac{323}{32}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 3+\frac{1}{8}\phi^2 & \frac{15}{2}+\frac{7}{16}\phi^2 & \frac{45}{8}+\frac{37}{128}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{3}{4}\phi^2 & 3+\frac{11}{32}\phi^2 & \frac{45}{4}+\frac{9}{128}\phi^2 & \frac{705}{32}+\frac{717}{2048}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.87}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.88}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$u_5(z)=c_1+c_2(z)+c_3\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right)+c_4\left(\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z\right)+c_5\left(\frac{35}{8}z^4-\frac{30}{8}z^2+\frac{3}{8}\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 หาได้จากระบบสมการ (3.86)

(4) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด

ในกรณีที่เลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด ก็ทำในทำนองเดียวกับการเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 4 และ 5 จุดดังที่กล่าวมาแล้ว แต่เมื่อจุดการจัดตำแหน่งมากขึ้น การคำนวณก็ยิ่งซับซ้อนมากขึ้นเช่นกัน จึงจำเป็นต้องใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการช่วยคำนวณ

3.4.2 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$

สมมติผลเฉลยโดยประมาณของ $\theta_0(z)$ ให้อยู่ในรูป

$$v_n(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j P_{j-1}^{*}(z) \tag{3.89}$$

เมื่อ $P_{j-1}^{*}(z)$ คือ พหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ อันดับที่ $j-1$ โดยพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ อันดับที่ 0 ถึง 5 แสดงไว้ในตารางที่ 3.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 พหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ $P_m^*(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5

m	$P_m^*(z)$
0	1
1	$2z-1$
2	$6z^2-6z+1$
3	$20z^3-30z^2+12z-1$
4	$70z^4-140z^3+90z^2-20z+1$
5	$252z^5-630z^4+560z^3-210z^2+30z-1$

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$v_n(z)=\sum_{j=1}^{n}c_j P_{j-1}^*(z)$$

เลือก $n=3$ จะได้

$$v_3(z)=\sum_{j=1}^{3}c_j P_{j-1}^*(z) \tag{3.90}$$

$$v_3(z)=c_1P_0^*(z)+c_2P_1^*(z)+c_3P_2^*(z)$$

$$v_3(z)=c_1(1)+c_2(2z-1)+c_3\left(6z^2-6z+1\right) \tag{3.91}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 และ z_3 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3=1$

ให้ $v_3(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$v_3(1)=c_1+c_2(2(1)-1)+c_3\left(6(1)^2-6(1)+1\right)$$

$$v_3(1)=c_1+c_2+c_3$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3=0 \tag{3.92}$$

และ $v_3(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\dfrac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$

$$v_3'(z)=2c_2+c_3(12z-6)$$

$$v_3'(0)=2c_2+c_3(12(0)-6)$$

จะได้

$$2c_2-6c_3=0 \tag{3.93}$$

ต้องการอีก 1 สมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา

$$v_3(z) = c_1 + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right)$$

$$v_3'(z) = c_2(2) + c_3(12z - 6)$$

$$v_3''(z) = 12c_3$$

แทน $v_3(z)$ $v_3'(z)$ และ $v_3''(z)$ ในสมการ (3.5)

$$v_3''(z) - \phi^2 v_3(z) = L(z) \tag{3.94}$$

$$12c_3 - \phi^2\left[c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right)\right] = L(z)$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2(-2z+1) + c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2 z - 6\phi^2 z^2\right) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $v_3(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.95}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 และ c_3 ของ $v_3(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_2)\,dz = R(z_2) = 0 \tag{3.96}$$

จะได้

$$L(z_2) + B\phi^2 = 0$$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2(-2z_2 + 1) + c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2 z_2 - 6\phi^2 {z_2}^2\right) = -B\phi^2 \tag{3.97}$$

เลือก $z_2 = \frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นรากของพหุนาม $P_1^*(z) = 2z - 1$

จะได้

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(-2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) + c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2\left(\frac{1}{2}\right) - 6\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 + \left(12 + \frac{1}{2}\phi^2\right)c_3 = -B\phi^2 \tag{3.98}$$

จากสมการ (3.92) (3.93) และ (3.98) จะได้ระบบสมการ

$$2c_2 - 6c_3 = 0$$

$$-\phi^2 c_1 + \left(12 + \frac{1}{2}\phi^2\right)c_3 = -B\phi^2$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

เขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.99}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -\phi^2 & 0 & 12+\frac{1}{2}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.101}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$v_3(z)=c_1+c_2(2z-1)+c_3\left(6z^2-6z+1\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 และ c_3 หาได้จากระบบสมการ (3.99)

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$v_n(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j P_{j-1}^{*}(z)$$

เลือก $n=4$ จะได้

$$v_4(z)=\sum_{j=1}^{4} c_j P_{j-1}^{*}(z) \tag{3.102}$$

$$v_4(z)=c_1P_0^{*}(z)+c_2P_1^{*}(z)+c_3P_2^{*}(z)+c_4P_3^{*}(z)$$

$$v_4(z)=c_1(1)+c_2(2z-1)+c_3\left(6z^2-6z+1\right)+c_4\left(20z^3-30z^2+12z-1\right) \tag{3.103}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 และ z_4 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3<z_4=1$

ให้ $v_4(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$v_4(1)=c_1+c_2\left(2(1)-1\right)+c_3\left(6(1)^2-6(1)+1\right)+c_4\left(20(1)^3-30(1)^2+12(1)-1\right)$$

$$v_4(1)=c_1+c_2+c_3+c_4$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3+c_4=0 \tag{3.104}$$

และ $v_4(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\dfrac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$

$$v_4'(z)=c_2(2)+c_3(12z-6)+c_4\left(60z^2-60z+12\right)$$

$$v_4'(0)=c_2(2)+c_3\left(12(0)-6\right)+c_4\left(60(0)^2-60(0)+12\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_4'(0) = 2c_2 - 6c_3 + 12c_4$$

จะได้

$$2c_2 - 6c_3 + 12c_4 = 0 \tag{3.105}$$

ต้องการอีก 2 สมการ

พิจารณา

$$v_4(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right) + c_4\left(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1\right)$$

$$v_4'(z) = c_2(2) + c_3\left(12z - 6\right) + c_4\left(60z^2 - 60z + 12\right)$$

$$v_4''(z) = c_3\left(12\right) + c_4\left(120z - 60\right)$$

แทน $v_4(z)$ $v_4'(z)$ และ $v_4''(z)$ ในสมการ (3.5)

$$v_4''(z) - \phi^2 v_4(z) = L(z) \tag{3.106}$$

$$\left[c_3(12) + c_4(120z-60)\right] - \phi^2\left[c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right)\right.$$
$$\left. + c_4\left(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1\right)\right] = L(z)$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2 z\right) + c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2 z - 6\phi^2 z^2\right)$$
$$+ c_4\left(-60 + \phi^2 + 120z - 12\phi^2 z + 30\phi^2 z^2 - 20\phi^2 z^3\right) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $v_4(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.107}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 และ c_4 ของ $v_4(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_i)\,dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3 \tag{3.108}$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$

$$L(z_i) = -B\phi^2 \tag{3.109}$$

สำหรับ $i = 2,3$

เลือก $z_2 = \frac{1}{6}\left(3 - \sqrt{3}\right)$ และ $z_3 = \frac{1}{6}\left(3 + \sqrt{3}\right)$ ซึ่งเป็นรากของพหุนาม $P_2^*(z) = 6z^2 - 6z + 1$

พิจารณา $L(z_2) = -B\phi^2$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2 z_2\right) + c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2 z_2 - 6\phi^2 {z_2}^2\right)$$
$$+ c_4\left(-60 + \phi^2 + 120z_2 - 12\phi^2 z_2 + 30\phi^2 {z_2}^2 - 20\phi^2 {z_2}^3\right) = -B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)\right)+c_3\left(12-\phi^2+6\phi^2\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)-6\phi^2\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)^2\right)$$

$$+c_4\left(-60+\phi^2+120\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)-12\phi^2\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)+30\phi^2\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)^2\right.$$

$$\left.-20\phi^2\left(\frac{1}{6}(3-\sqrt{3})\right)^3\right)=-B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}c_2+12c_3+\left(-20\sqrt{3}-\frac{2\phi^2}{3\sqrt{3}}\right)c_4=-B\phi^2 \qquad (3.110)$$

พิจารณา $L\left(z_3\right)=-B\phi^2$

$$L\left(z_3\right)=-B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2 z_3\right)+c_3\left(12-\phi^2+6\phi^2 z_3-6\phi^2 {z_3}^2\right)$$

$$+c_4\left(-60+\phi^2+120z_3-12\phi^2 z_3+30\phi^2 {z_3}^2-20\phi^2 {z_3}^3\right)=-B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)\right)+c_3\left(12-\phi^2+6\phi^2\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)-6\phi^2\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)^2\right)$$

$$+c_4\left(-60+\phi^2+120\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)-12\phi^2\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)+30\phi^2\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)^2\right.$$

$$\left.-20\phi^2\left(\frac{1}{6}(3+\sqrt{3})\right)^3\right)=-B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1-\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}c_2+12c_3+\left(20\sqrt{3}+\frac{2\phi^2}{3\sqrt{3}}\right)c_4=-B\phi^2 \qquad (3.111)$$

จากสมการ (3.104) (3.105) (3.110) และ (3.111) จะได้ระบบสมการ

$$2c_2-6c_3+12c_4=0$$

$$-\phi^2 c_1+\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}c_2+12c_3+\left(-20\sqrt{3}-\frac{2\phi^2}{3\sqrt{3}}\right)c_4=-B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1-\frac{\phi^2}{\sqrt{3}}c_2+12c_3+\left(20\sqrt{3}+\frac{2\phi^2}{3\sqrt{3}}\right)c_4=-B\phi^2$$

$$c_1+c_2+c_3+c_4=0$$

หรือเขียนในรูปประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \qquad (3.112)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 12 \\ -\phi^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\phi^2 & 12 & -20\sqrt{3}-\frac{2}{3\sqrt{3}}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\phi^2 & 12 & 20\sqrt{3}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.113}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.114}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$v_4(z)=c_1+c_2(2z-1)+c_3\left(6z^2-6z+1\right)+c_4\left(20z^3-30z^2+12z-1\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 และ c_4 หาได้จากระบบสมการ (3.112)

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$v_n(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j P_{j-1}^{*}(z)$$

เลือก $n=5$ จะได้

$$v_5(z)=\sum_{j=1}^{5} c_j P_{j-1}^{*}(z) \tag{3.115}$$

$$v_5(z)=c_1P_0^{*}(z)+c_2P_1^{*}(z)+c_3P_2^{*}(z)+c_4P_3^{*}(z)+c_5P_4^{*}(z)$$

$$v_5(z)=c_1(1)+c_2(2z-1)+c_3\left(6z^2-6z+1\right)+c_4\left(20z^3-30z^2+12z-1\right)$$
$$+c_5\left(70z^4-140z^3+90z^2-20z+1\right) \tag{3.116}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 z_4 และ z_5 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3<z_4<z_5=1$

ให้ $v_5(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$v_5(1)=c_1+c_2\left(2(1)-1\right)+c_3\left(6(1)^2-6(1)+1\right)+c_4\left(20(1)^3-30(1)^2+12(1)-1\right)$$
$$+c_5\left(70(1)^4-140(1)^3+90(1)^2-20(1)+1\right)$$

$$v_5(1)=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \tag{3.117}$$

และ $v_5(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$

$$v_5'(z) = c_2(2) + c_3(12z-6) + c_4(60z^2 - 60z + 12) + c_5(280z^3 - 420z^2 + 180z - 20)$$

$$v_5'(0) = c_2(2) + c_3(12(0)-6) + c_4(60(0)^2 - 60(0) + 12) + c_5(280(0)^3 - 420(0)^2 + 180(0) - 20)$$

$$v_5'(0) = 2c_2 - 6c_3 + 12c_4 - 20c_5$$

จะได้

$$2c_2 - 6c_3 + 12c_4 - 20c_5 = 0 \tag{3.118}$$

ต้องการอีก 3 สมการ

พิจารณา

$$v_5(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3(6z^2 - 6z + 1) + c_4(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1) + c_5(70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1)$$

$$v_5'(z) = c_2(2) + c_3(12z-6) + c_4(60z^2 - 60z + 12) + c_5(280z^3 - 420z^2 + 180z - 20)$$

$$v_5''(z) = c_3(12) + c_4(120z - 60) + c_5(840z^2 - 840z + 180)$$

แทน $v_5(z)$ $v_5'(z)$ และ $v_5''(z)$ ในสมการ (3.5) จะได้

$$v_5''(z) - \phi^2 v_5(z) = L(z) \tag{3.119}$$

$$\left[c_3(12) + c_4(120z-60) + c_5(840z^2 - 840z + 180)\right] - \phi^2\left[c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3(6z^2 - 6z + 1) + c_4(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1) + c_5(70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1)\right] = L(z)$$

$$c_1(-\phi^2) + c_2(\phi^2 - 2\phi^2 z) + c_3(12 - \phi^2 + 6\phi^2 z - 6\phi^2 z^2) + c_4(-60 + \phi^2 + 120z - 12\phi^2 z + 30\phi^2 z^2 - 20\phi^2 z^3) + c_5(180 - \phi^2 - 840z + 20\phi^2 z + 840z^2 - 90\phi^2 z^2 + 140\phi^2 z^3 - 70\phi^2 z^4) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $v_5(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.120}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 ของ $v_5(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z-z_i)dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3,4 \tag{3.121}$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$

$$L(z_i) = -B\phi^2 \tag{3.122}$$

สำหรับ $i = 2,3,4$

เลือก $z_2 = \frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)$ $z_3 = \frac{1}{2}$ และ $z_4 = \frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)$ ซึ่งเป็นรากของพหุนาม

$P_3^*(z) = 20z^3 - 30z^2 + 12z - 1$

พิจารณา $L(z_2) = -B\phi^2$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2 z_2\right) + c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2 z_2 - 6\phi^2 {z_2}^2\right)$$
$$+c_4\left(-60 + \phi^2 + 120z_2 - 12\phi^2 z_2 + 30\phi^2 {z_2}^2 - 20\phi^2 {z_2}^3\right)$$
$$+c_5\left(180 - \phi^2 - 840z_2 + 20\phi^2 z_2 + 840{z_2}^2 - 90\phi^2 {z_2}^2 + 140\phi^2 {z_2}^3 - 70\phi^2 {z_2}^4\right) = -B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)\right)$$
$$+c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right) - 6\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)^2\right)$$
$$+c_4\left(-60 + \phi^2 + 120\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right) - 12\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right) + 30\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)^2\right.$$
$$\left.-20\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)^3\right) + c_5\left(180 - \phi^2 - 840\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right) + 20\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)\right.$$
$$+840\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)^2 - 90\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)^2 + 140\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)^3$$
$$\left.-70\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5-\sqrt{15}\right)\right)^4\right) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2 c_2 + \left(12 - \frac{2\phi^2}{5}\right)c_3 - 12\sqrt{15}c_4 + \left(96 + \frac{3\phi^2}{10}\right)c_5 = -B\phi \tag{3.123}$$

พิจารณา $L(z_3) = -B\phi^2$

$$L(z_3) = -B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2 z_3\right) + c_3\left(12 - \phi^2 + 6\phi^2 z_3 - 6\phi^2 {z_3}^2\right)$$
$$+c_5\left(180 - \phi^2 - 840z_3 + 20\phi^2 z_3 + 840{z_3}^2 - 90\phi^2 {z_3}^2 + 140\phi^2 {z_3}^3 - 70\phi^2 {z_3}^4\right) = -B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)+c_3\left(12-\phi^2+6\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)-6\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$+c_4\left(-60+\phi^2+120\left(\frac{1}{2}\right)-12\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)+30\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-20\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$$
$$+c_5\left(180-\phi^2-840\left(\frac{1}{2}\right)+20\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)+840\left(\frac{1}{2}\right)^2-90\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right.$$
$$\left.+140\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^3-70\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)=-B\phi^2$$

$$-\phi^2c_1+\left(12+\frac{\phi^2}{2}\right)c_3+\left(-30-\frac{3\phi^2}{8}\right)c_5=-B\phi^2 \qquad (3.124)$$

พิจารณา $L\left(z_4\right)=-B\phi^2$

$$L\left(z_4\right)=-B\phi^2$$
$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2z_4\right)+c_3\left(12-\phi^2+6\phi^2z_4-6\phi^2{z_4}^2\right)$$
$$+c_4\left(-60+\phi^2+120z_4-12\phi^2z_4+30\phi^2{z_4}^2-20\phi^2{z_4}^3\right)$$
$$+c_5\left(180-\phi^2-840z_4+20\phi^2z_4+840{z_4}^2-90\phi^2{z_4}^2+140\phi^2{z_4}^3-70\phi^2{z_4}^4\right)=-B\phi^2$$
$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)\right)$$
$$+c_3\left(12-\phi^2+6\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)-6\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)^2\right)$$
$$+c_4\left(-60+\phi^2+120\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)-12\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)+30\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)^2\right.$$
$$\left.-20\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)^3\right)+c_5\left(180-\phi^2-840\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)+20\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)\right.$$
$$+840\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)^2-90\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)^2+140\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)^3$$
$$\left.-70\phi^2\left(\frac{1}{10}\left(5+\sqrt{15}\right)\right)^4\right)=-B\phi^2$$

$$-\phi^2c_1-\sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2c_2+\left(12-\frac{2\phi^2}{5}\right)c_3+12\sqrt{15}c_4+\left(96+\frac{3\phi^2}{10}\right)c_5=-B\phi \qquad (3.125)$$

จากสมการ (3.117) (3.118) (3.123) (3.124) และ (3.125) จะได้ระบบสมการ

$$2c_2-6c_3+12c_4-20c_5=0$$
$$-\phi^2c_1+\sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2c_2+\left(12-\frac{2\phi^2}{5}\right)c_3-12\sqrt{15}c_4+\left(96+\frac{3\phi^2}{10}\right)c_5=-B\phi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\phi^2 c_1 + \left(12 + \frac{\phi^2}{2}\right)c_3 + \left(-30 - \frac{3\phi^2}{8}\right)c_5 = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2 c_2 + \left(12 - \frac{2\phi^2}{5}\right)c_3 + 12\sqrt{15}c_4 + \left(96 + \frac{3\phi^2}{10}\right)c_5 = -B\phi$$

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 0$$

หรือเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.126}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 12 & -20 \\ -\phi^2 & \sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2 & 12 - \frac{2}{5}\phi^2 & -12\sqrt{15} & 96 + \frac{3}{10}\phi^2 \\ -\phi^2 & 0 & 12 + \frac{1}{2}\phi^2 & 0 & -30 - \frac{3}{8}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2 & 12 + \frac{1}{8}\phi^2 & \sqrt{15} & 96 + \frac{3}{10}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.127}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$v_5(z) = c_1 + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right) + c_4\left(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1\right) + c_5\left(70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 หาได้จากระบบสมการ (3.126)

(4) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด

ในกรณีที่เลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด ก็ทำในทำนองเดียวกับการเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 4 และ 5 จุดดังที่กล่าวมาแล้ว แต่เมื่อจุดการจัดตำแหน่งมากขึ้น การคำนวณก็ยิ่งซับซ้อนมากขึ้นเช่นกัน จึงจำเป็นต้องใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการช่วยคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.3 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟ

สมมติผลเฉลยโดยประมาณของ $\theta_0(z)$ ให้อยู่ในรูป

$$p_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_{j-1}(z) \tag{3.129}$$

เมื่อ $T_{j-1}(z)$ คือ พหุนามเชบีเชฟอันดับที่ $j-1$ โดยพหุนามเชบีเชฟอันดับที่ 0 ถึง 5 แสดงไว้ในตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 พหุนามเชบีเชฟ $T_m(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5

m	$T_m(z)$
0	1
1	z
2	$2z^2-1$
3	$4z^3-3z$
4	$8z^4-8z^2+1$
5	$16z^5-20z^3+5z$

เนื่องจากการประมาณค่าโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่เลือกฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟ โดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 4 และ 5 จุดนั้น ได้ผลลัพธ์เหมือนกับการประมาณค่าโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่เลือกฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในส่วนก่อนหน้านี้ ดังนั้นการประมาณค่าโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่เลือกฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟนั้นจะไม่กล่าวถึงอีก แต่จะแสดงไว้ในภาคผนวก ก

3.4.4 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$

สมมติผลเฉลยโดยประมาณของ $\theta_0(z)$ ให้อยู่ในรูป

$$q_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_{j-1}^{*}(z) \tag{3.130}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $T_{j-1}^{*}(z)$ คือ พหุนามเชบีเชฟบนช่วง [0,1] อันดับที่ $j-1$ โดยพหุนามเชบีเชฟบนช่วง [0,1] อันดับที่ 0 ถึง 5 แสดงไว้ในตารางที่ 3.4

ตารางที่ 3.4 พหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ $T_m^{*}(z)$ อันดับที่ 0 ถึง 5

m	$T_m^{*}(z)$
0	1
1	$2z-1$
2	$8z^2-8z+1$
3	$32z^3-48z^2+18z-1$
4	$128z^4-256z^3+160z^2-32z+1$
5	$512z^5-1280z^4+1120z^3-400z^2+50z-1$

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$q_n(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j T_{j-1}^{*}(z)$$

เลือก $n=3$ จะได้

$$q_3(z)=\sum_{j=1}^{3} c_j T_{j-1}^{*}(z) \tag{3.131}$$

$$q_3(z)=c_1T_0^{*}(z)+c_2T_1^{*}(z)+c_3T_2^{*}(z)$$

$$q_3(z)=c_1(1)+c_2(2z-1)+c_3\left(8z^2-8z+1\right) \tag{3.132}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 และ z_3 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3=1$

ให้ $q_3(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$q_3(1)=c_1+c_2\left(2(1)-1\right)+c_3\left(8(1)^2-8(1)+1\right)$$

$$q_3(1)=c_1+c_2+c_3$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3=0 \tag{3.133}$$

และ $q_3(z)$ ที่เงื่อนไขขอบ $\dfrac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$

$$q'(z)=2c_2+c_3(16z-8)$$

$$q'(0)=2c_2+c_3\left(16(0)-8\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$2c_2 - 8c_3 = 0 \tag{3.134}$$

ต้องการอีก 1 สมการ

พิจารณา

$$q_3(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2 - 8z + 1\right)$$

$$q^{3'}(z) = c_2\left(2\right) + c_3\left(16z - 8\right)$$

$$q_3''(z) = 16c_3$$

แทน $q_3(z)$ $q_3'(z)$ และ $q_3''(z)$ ในสมการ (3.5)

$$q_3''\left(z\right) - \phi^2 q_3\left(z\right) = L\left(z\right) \tag{3.135}$$

$$16c_3 - \phi^2\left[c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2 - 8z + 1\right)\right] = L\left(z\right)$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(-2z+1\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2 z - 8\phi^2 z^2\right) = L\left(z\right)$$

เมื่อ $L\left(z\right)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0\left(z\right)$ ด้วย $q_3\left(z\right)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R\left(z\right) = L\left(z\right) + B\phi^2 \tag{3.136}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 และ c_3 ของ $q_3\left(z\right)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R\left(z\right)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R\left(z\right)\delta\left(z - z_2\right)dz = R\left(z_2\right) = 0 \tag{3.137}$$

จะได้

$$L\left(z_2\right) + B\phi^2 = 0$$

$$L\left(z_2\right) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(-2z_2 + 1\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2 z_2 - 8\phi^2 {z_2}^2\right) = -B\phi^2 \tag{3.138}$$

เลือก $z_2 = \dfrac{1}{2}$ ซึ่งเป็นรากของพหุนาม $T_1^*\left(z\right) = 2z - 1$

จะได้

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(-2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2\left(\frac{1}{2}\right) - 8\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 + \left(16 + \phi^2\right)c_3 = -B\phi^2 \tag{3.139}$$

จากสมการ (3.133) (3.134) และ (3.139) จะได้ระบบสมการ

$$2c_2 - 8c_3 = 0$$

$$-\phi^2 c_1 + \left(16 + \phi^2\right)c_3 = -B\phi^2$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

เขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.140}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -\phi^2 & 0 & 16+\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.141}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$q_3(z)=c_1+c_2(2z-1)+c_3\left(8z^2-8z+1\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 และ c_3 หาได้จากระบบสมการ (3.140)

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$q_n(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j T_{j-1}^{*}(z)$$

เลือก $n=4$ จะได้

$$q_4(z)=\sum_{j=1}^{4} c_j T_{j-1}^{*}(z) \tag{3.143}$$

$$q_4(z)=c_1T_0^{*}(z)+c_2T_1^{*}(z)+c_3T_2^{*}(z)+c_4T_3^{*}(z)$$

$$q_4(z)=c_1(1)+c_2(2z-1)+c_3\left(8z^2-8z+1\right)+c_4\left(32z^3-48z^2+18z-1\right) \tag{3.144}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 และ z_4 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3<z_4=1$

ให้ $q_4(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$q_4(1)=c_1+c_2(2(1)-1)+c_3\left(8(1)^2-8(1)+1\right)+c_4\left(32(1)^3-48(1)^2+18(1)-1\right)$$

$$q_4(1)=c_1+c_2+c_3+c_4$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3+c_4=0 \tag{3.145}$$

และ $u(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\dfrac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$

$$q_4'(z)=c_2(2)+c_3(16z-8)+c_4\left(96z^2-96z+18\right)$$

$$q_4'(0)=c_2(2)+c_3\left(16(0)-8\right)+c_4\left(96(0)^2-96(0)+18\right)$$

$$q_4'(0)=2c_2-8c_3+18c_4$$

จะได้

$$2c_2-8c_3+18c_4=0 \tag{3.146}$$

ต้องการอีก 2 สมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณา

$$q_4(z) = c_1 + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2 - 8z + 1\right) + c_4\left(32z^3 - 48z^2 + 18z - 1\right)$$

$$q_4'(z) = c_2(2) + c_3\left(16z - 8\right) + c_4\left(96z^2 - 96z + 18\right)$$

$$q_4''(z) = c_3(16) + c_4\left(192z - 96\right)$$

แทน $q_4(z)$ $q_4'(z)$ และ $q_4''(z)$ ลงในสมการ (3.5)

$$q_4''(z) - \phi^2 q_4(z) = L(z) \tag{3.147}$$

$$\left[c_3(16) + c_4(192z - 96)\right] - \phi^2\left[c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2 - 8z + 1\right)\right.$$

$$\left. + c_4\left(32z^3 - 48z^2 + 18z - 1\right)\right] = L(z)$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2 z\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2 z - 8\phi^2 z^2\right)$$

$$+ c_4\left(-96 + \phi^2 + 196z - 18\phi^2 z + 48\phi^2 z^2 - 32\phi^2 z^3\right) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $q_4(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.148}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 และ c_4 ของ $q_4(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_i)\,dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3 \tag{3.149}$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$

$$L(z_i) = -B\phi^2 \tag{3.150}$$

สำหรับ $i = 2,3$

เลือก $z_2 = \frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)$ และ $z_3 = \frac{1}{4}\left(2 + \sqrt{2}\right)$ ซึ่งเป็นรากของพหุนาม $T_2^*(z) = 8z^2 - 8z + 1$

พิจารณา $L(z_2) = -B\phi^2$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2 z_2\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2 z_2 - 8\phi^2 {z_2}^2\right)$$

$$+ c_4\left(-96 + \phi^2 + 196z_2 - 18\phi^2 z_2 + 48\phi^2 {z_2}^2 - 32\phi^2 {z_2}^3\right) = -B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right)\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right)\right.$$

$$\left. - 8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right)^2\right) + c_4\left(-96 + \phi^2 + 196\left(\frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right)\right.$$

$$\left. - 18\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right) + 48\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right)^2 - 32\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2 - \sqrt{2}\right)\right)^3\right) = -B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\phi^2 c_1 + \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} c_2 + 16c_3 + \left(-48\sqrt{2} - \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} \right) c_4 = -B\phi^2 \tag{3.151}$$

พิจารณา $L(z_3) = -B\phi^2$

$$L(z_3) = -B\phi^2$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2 z_3\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2 z_3 - 8\phi^2 {z_3}^2\right)$$
$$+ c_4\left(-96 + \phi^2 + 196 z_3 - 18\phi^2 z_3 + 48\phi^2 {z_3}^2 - 32\phi^2 {z_3}^3\right)$$

$$c_1\left(-\phi^2\right) + c_2\left(\phi^2 - 2\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\right) + c_3\left(16 - \phi^2 + 8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\right.$$
$$\left. -8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^2\right) + c_4\left(-96 + \phi^2 + 196\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\right.$$
$$\left. -18\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right) + 48\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^2 - 32\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)\right)^3\right) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} c_2 + 16c_3 + \left(48\sqrt{2} + \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} \right) c_4 = -B\phi^2 \tag{3.152}$$

จากสมการ (3.145) (3.146) (3.151) และ (3.152) จะได้ระบบสมการ

$$2c_2 - 8c_3 + 18c_4 = 0$$
$$-\phi^2 c_1 + \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} c_2 + 16c_3 + \left(-48\sqrt{2} - \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} \right) c_4 = -B\phi^2$$
$$-\phi^2 c_1 - \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} c_2 + 16c_3 + \left(48\sqrt{2} + \frac{\phi^2}{\sqrt{2}} \right) c_4 = -B\phi^2$$
$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

หรือเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{3.153}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 18 \\ -\phi^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 & 16 & -48\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 & 16 & 48\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.154}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.155}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$q_4(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2-8z+1\right) + c_4\left(32z^3-48z^2+18z-1\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 และ c_4 หาได้จากระบบสมการ (3.153)

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$q_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_{j-1}^*(z)$$

เลือก $n=5$ จะได้

$$q_5(z) = \sum_{j=1}^{5} c_j T_{j-1}^*(z) \tag{3.156}$$

$$q_5(z) = c_1T_0^*(z) + c_2T_1^*(z) + c_3T_2^*(z) + c_4T_3^*(z) + c_5T_4^*(z)$$

$$q_5(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2-8z+1\right) + c_4\left(32z^3-48z^2+18z-1\right) + c_5\left(128z^4-160z^3+256z^2-32z+1\right) \tag{3.157}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 z_4 และ z_5 โดยที่ $0 = z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1$

ให้ $q_5(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0 = 0$ ที่ $z=1$

$$q_5(1) = c_1 + c_2(2(1)-1) + c_3\left(8(1)^2-8(1)+1\right) + c_4\left(32(1)^3-48(1)^2+18(1)-1\right) + c_5\left(128(1)^4-160(1)^3+256(1)^2-32(1)+1\right)$$

$$q_5(1) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$$

จะได้

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 = 0 \tag{3.158}$$

และ $q_5(z)$ สอดคล้องเงื่อนไขขอบ $\dfrac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z=0$

$$q_5'(z) = c_2(2) + c_3(16z-8) + c_4\left(96z^2-96z+18\right) + c_5\left(512z^3-768z^2+320z-32\right)$$

$$q_5'(0) = c_2(2) + c_3(16(0)-8) + c_4\left(96(0)^2-96(0)+18\right) + c_5\left(512(0)^3-768(0)^2+320(0)-32\right)$$

$$q_5'(0) = 2c_2 - 8c_3 + 18c_4 - 32c_5$$

จะได้

$$2c_2 - 8c_3 + 18c_4 - 32c_5 = 0 \tag{3.159}$$

ต้องการอีก 3 สมการ

พิจารณา

$$q_5(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2-8z+1\right) + c_4\left(32z^3-48z^2+18z-1\right) + c_5\left(128z^4-256z^3+160z^2-32z+1\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$q_5'(z) = c_2(2) + c_3(16z-8) + c_4(96z^2-96z+18) + c_5(512z^3-768z^2+320z-32)$$

$$q_5''(z) = c_3(16) + c_4(192z-96) + c_5(1536z^2-1536z+320)$$

แทน $q_5(z)$ $q_5'(z)$ และ $q_5''(z)$ ในสมการ (3.5)

$$q_5''(z) - \phi^2 q_5(z) = L(z) \tag{3.160}$$

$$\left[c_3(16) + c_4(192z-96) + c_5(1536z^2-1536z+320)\right]$$
$$-\phi^2\left[c_1 + c_2(2z-1) + c_3(8z^2-8z+1) + c_4(32z^3-48z^2+18z-1)\right.$$
$$\left.+c_5(128z^4-256z^3+160z^2-32z+1)\right] = L(z)$$

$$c_1(-\phi^2) + c_2(\phi^2-2\phi^2 z) + c_3(16-\phi^2+8\phi^2 z-8\phi^2 z^2)$$
$$+c_4(-96+\phi^2+192z-18\phi^2 z+48\phi^2 z^2-32\phi^2 z^3)$$
$$+c_5(320-\phi^2-1536z+32\phi^2 z+1536z^2-160\phi^2 z^2+256\phi^2 z^3-128\phi^2 z^4) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $q_5(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{3.161}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 ของ $q_5(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z-z_i)dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3,4 \tag{3.162}$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$
$$L(z_i) = -B\phi^2 \tag{3.163}$$

สำหรับ $i = 2,3,4$

เลือก $z_2 = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$ $z_3 = \frac{1}{2}$ และ $z_4 = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$ ซึ่งเป็นรากของพหุนาม $T_3^*(z) = 32z^3 - 48z^2 + 18z - 1$

พิจารณา $L(z_2) = -B\phi^2$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$

$$c_1(-\phi^2) + c_2(\phi^2-2\phi^2 z_2) + c_3(16-\phi^2+8\phi^2 z_2-8\phi^2 {z_2}^2)$$
$$+c_4(-96+\phi^2+192z_2-18\phi^2 z_2+48\phi^2 {z_2}^2-32\phi^2 {z_2}^3) + c_5(320-\phi^2-1536z_2$$
$$+32\phi^2 z_2+1536{z_2}^2-160\phi^2 {z_2}^2+256\phi^2 {z_2}^3-128\phi^2 {z_2}^4) = -B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\right)+c_3\left(16-\phi^2+8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\right.$$
$$\left.-8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2\right)+c_4\left(-96+\phi^2+192\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)\right.$$
$$\left.-18\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)+48\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2-32\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^3\right)$$
$$+c_5\left(320-\phi^2-1536\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)+32\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)+1536\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2\right.$$
$$\left.-160\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^2+256\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^3-128\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2-\sqrt{3}\right)\right)^4\right)=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2c_2+\left(16-\frac{1}{2}\phi^2\right)c_3-48\sqrt{3}c_4+\left(224+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2 \qquad (3.164)$$

พิจารณา $L\left(z_3\right)=-B\phi^2$

$$L\left(z_3\right)=-B\phi^2$$
$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2z_3\right)+c_3\left(16-\phi^2+8\phi^2z_3-8\phi^2{z_3}^2\right)$$
$$+c_4\left(-96+\phi^2+192z_3-18\phi^2z_3+48\phi^2{z_3}^2-32\phi^2{z_3}^3\right)+c_5\left(320-\phi^2-1536z_3\right.$$
$$\left.+32\phi^2z_3+1536{z_3}^2-160\phi^2{z_3}^2+256\phi^2{z_3}^3-128\phi^2{z_3}^4\right)=-B\phi^2$$
$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)\right)+c_3\left(16-\phi^2+8\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)-8\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$+c_4\left(-96+\phi^2+192\left(\frac{1}{2}\right)-18\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)+48\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2-32\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)+c_5\left(320-\phi^2\right.$$
$$\left.-1536\left(\frac{1}{2}\right)+32\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)+1536\left(\frac{1}{2}\right)^2-160\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+256\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^3-128\phi\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)=-B\phi$$
$$-\phi^2c_1+\left(16+\phi^2\right)c_3+\left(-64-\phi^2\right)c_5=-B\phi^2 \qquad (3.165)$$

พิจารณา $L\left(z_4\right)=-B\phi^2$

$$L\left(z_4\right)=-B\phi^2$$
$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2z_4\right)+c_3\left(16-\phi^2+8\phi^2z_4-8\phi^2{z_4}^2\right)$$
$$+c_4\left(-96+\phi^2+192z_4-18\phi^2z_4+48\phi^2{z_4}^2-32\phi^2{z_4}^3\right)+c_5\left(320-\phi^2-1536z_4\right.$$
$$\left.+32\phi^2z_4+1536{z_4}^2-160\phi^2{z_4}^2+256\phi^2{z_4}^3-128\phi^2{z_4}^4\right)=-B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c_1\left(-\phi^2\right)+c_2\left(\phi^2-2\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\right)+c_3\left(16-\phi^2+8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\right.$$
$$\left.-8\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2\right)+c_4\left(-96+\phi^2+192\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\right.$$
$$\left.-18\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)+48\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2-32\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^3\right)$$
$$+c_5\left(320-\phi^2-1536\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)+32\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)+1536\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2\right.$$
$$\left.-160\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^2+256\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^3-128\phi^2\left(\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)^4\right)=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2c_2+\left(16-\frac{1}{2}\phi^2\right)c_3+48\sqrt{3}c_4+\left(224+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2 \tag{3.166}$$

จากสมการ (3.158) (3.159) (3.164) (3.165) และ (3.166) จะได้ระบบสมการ

$$2c_2-8c_3+18c_4-32c_5=0$$
$$-\phi^2c_1+\frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2c_2+\left(16-\frac{1}{2}\phi^2\right)c_3-48\sqrt{3}c_4+\left(224+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1+\left(16+\phi^2\right)c_3+\left(-64-\phi^2\right)c_5=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1-\frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2c_2+\left(16-\frac{1}{2}\phi^2\right)c_3+48\sqrt{3}c_4+\left(224+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2$$
$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=0$$

หรือเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \tag{3.167}$$

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix}
0 & 2 & -8 & 18 & -32 \\
-\phi^2 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2 & 16-\frac{1}{2}\phi^2 & -48\sqrt{3} & 224+\frac{1}{2}\phi^2 \\
-\phi^2 & 0 & 16+\phi^2 & 0 & -64-\frac{1}{2}\phi^2 \\
-\phi^2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2 & 16-\frac{1}{2}\phi^2 & 48\sqrt{3} & 224+\frac{1}{2}\phi^2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix} \tag{3.168}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.169}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$q_5(z) = c_1 + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2 - 8z + 1\right) + c_4\left(32z^3 - 48z^2 + 18z - 1\right) + c_5\left(128z^4 - 160z^3 + 256z^2 - 32z + 1\right)$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 หาได้จากระบบสมการ (3.167)

(4) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด

ในกรณีที่เลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด ก็ทำในทำนองเดียวกับการเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 4 และ 5 จุดดังที่กล่าวมาแล้ว แต่เมื่อจุดการจัดตำแหน่งมากขึ้น การคำนวณก็ยิ่งซับซ้อนมากขึ้นเช่นกัน จึงจำเป็นต้องใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์ในการช่วยคำนวณ

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

จากการศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบสำหรับรูปแบบอุณหภูมิของสภาพการนำความร้อนของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุน

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2} + B\phi^2\left(1-\frac{\theta_0}{B}\right) = 0 \tag{4.1}$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเป็น

$$\frac{d\theta_0}{dz} = 0 \quad \text{ที่} \quad z=0 \tag{4.2}$$

และ

$$\theta_0 = 0 \quad \text{ที่} \quad z=1 \tag{4.3}$$

โดยมีผลเฉลยแม่นตรงของปัญหาค่าขอบ คือ

$$\theta_0 = -\frac{B\left(e^{\phi z}+e^{-\phi z}\right)}{e^{\phi}+e^{-\phi}} + B \tag{4.4}$$

และมีผลเฉลยโดยประมาณ ดังนี้

ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด

ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัดสามารถคำนวณได้จากระบบสมการเมทริกซ์

$$A\mathbf{w} = \mathbf{b} \tag{4.5}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2\phi^2 & -2 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ -1 & 2+h^2\phi^2 & -1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2\phi^2 & -1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & -1 & 2+h^2\phi^2 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_{N-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -h^2 B\phi^2 \\ -h^2 B\phi^2 \\ -h^2 B\phi^2 \\ . \\ . \\ . \\ -h^2 B\phi^2 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักพหุนามเลอจองด์

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_3(z)$ อยู่ในรูป

$$u_3(z) = c_1 + c_2(z) + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{4.8}$$

เมื่อ c_1 c_2 และ c_3 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{4.9}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 3+\frac{1}{8}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_4(z)$ อยู่ในรูป

$$u_4(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right) + c_4\left(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1\right) \tag{4.12}$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 และ c_4 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{4.13}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\phi^2 & -\frac{1}{3}\phi^2 & 3+\frac{1}{3}\phi^2 & 5+\frac{11}{27}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{2}{3}\phi^2 & 3-\frac{1}{6}\phi^2 & 10+\frac{7}{27}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_5(z)$ อยู่ในรูป

$$u_5(z)=c_1(1)+c_2(z)+c_3\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right)+c_4\left(\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z\right)+c_5\left(\frac{35}{8}z^4-\frac{30}{8}z^2+\frac{3}{8}\right) \tag{4.16}$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \tag{4.17}$$

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{4}\phi^2 & 3+\frac{13}{32}\phi^2 & \frac{15}{4}+\frac{43}{128}\phi^2 & -\frac{135}{32}-\frac{323}{32}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 3+\frac{1}{8}\phi^2 & \frac{15}{2}+\frac{7}{16}\phi^2 & \frac{45}{8}+\frac{37}{128}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{3}{4}\phi^2 & 3+\frac{11}{32}\phi^2 & \frac{45}{4}+\frac{9}{128}\phi^2 & \frac{705}{32}+\frac{717}{2048}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.19}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_3(z)$ อยู่ในรูป

$$v_3(z) = c_1 + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right) \tag{4.20}$$

เมื่อ c_1 c_2 และ c_3 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{4.21}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -\phi^2 & 0 & 12 + \frac{1}{2}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_4(z)$ อยู่ในรูป

$$v_4(z) = c_1(1) + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2 - 6z + 1\right) + c_4\left(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1\right) \tag{4.24}$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 และ c_4 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{4.25}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 12 \\ -\phi^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}\phi^2 & 12 & -20\sqrt{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{\sqrt{3}}\phi^2 & 12 & 20\sqrt{3} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_5(z)$ อยู่ในรูป

$$v_5(z) = c_1 + c_2(2z-1) + c_3\left(6z^2-6z+1\right) + c_4\left(20z^3-30z^2+12z-1\right) + c_5\left(70z^4-140z^3+90z^2-20z+1\right) \tag{4.28}$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{4.29}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 12 & -20 \\ -\phi^2 & \sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2 & 12-\frac{2}{5}\phi^2 & -12\sqrt{15} & 96+\frac{3}{10}\phi^2 \\ -\phi^2 & 0 & 12+\frac{1}{2}\phi^2 & 0 & -30-\frac{3}{8}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\sqrt{\frac{3}{5}}\phi^2 & 12+\frac{1}{8}\phi^2 & \sqrt{15} & 96+\frac{3}{10}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_3(z)$ อยู่ในรูป

$$q_3(z) = c_1 + c_2(2z-1) + c_3\left(8z^2-8z+1\right) \tag{4.32}$$

เมื่อ c_1 c_2 และ c_3 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{4.33}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -\phi^2 & 0 & 12+\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\-B\phi^2\\0\end{bmatrix} \tag{4.35}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_4(z)$ อยู่ในรูป

$$q_4(z)=c_1(1)+c_2(2z-1)+c_3\left(8z^2-8z+1\right)+c_4\left(32z^3-48z^2+18z-1\right) \tag{4.36}$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 และ c_4 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \tag{4.37}$$

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -8 & 18\\ -\phi^2 & \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 & 16 & -48\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2\\ -\phi^2 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2 & 16 & 48\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{4.38}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\-B\phi^2\\-B\phi^2\\0\end{bmatrix} \tag{4.39}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_5(z)$ อยู่ในรูป

$$q_5(z)=c_1+c_2(2z-1)+c_3\left(8z^2-8z+1\right)+c_4\left(32z^3-48z^2+18z-1\right)$$
$$+c_5\left(128z^4-160z^3+256z^2-32z+1\right) \tag{4.40}$$

เมื่อ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 หาได้จากระบบสมการ

$$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \tag{4.41}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 18 & -32 \\ -\phi^2 & \frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2 & 16-\frac{1}{2}\phi^2 & -48\sqrt{3} & 224+\frac{1}{2}\phi^2 \\ -\phi^2 & 0 & 16+\phi^2 & 0 & -64-\frac{1}{2}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3}\phi^2 & 16-\frac{1}{2}\phi^2 & 48\sqrt{3} & 224+\frac{1}{2}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

จากงานวิจัยของ N. Pochai และ J. Jaisaardsuetron [20] สมมติว่าอุณหภูมิสูงสุดที่ไม่มีการพาความร้อนตามธรรมชาติ B คือ 12.00 อัตราส่วนของเวลาลักษณะเฉพาะของการนำความร้อนของตัวก่อกำเนิดความร้อน ϕ^2 คือ 0.5 และแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่ จึงไม่มีพลังงานกระตุ้น $\gamma=0$ จะได้ปัญหาค่าขอบเป็น

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2}+6\left(1-\frac{\theta_0}{12}\right)=0 \quad (4.44)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเป็น

$$\frac{d\theta_0}{dz}=0 \text{ ที่ } z=0$$

$$\theta_0=0 \text{ ที่ } z=1$$

4.1 ผลเฉลยแม่นตรง

จากสมการ (4.4) แทนค่า $B=12$ และ $\phi=\sqrt{0.5}$ จะได้

$$\theta_0=-\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12 \quad (4.45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด

เลือก $N=4$ จะได้ $h=0.25$ โดยสมการ (4.5) แทนค่า $B=12$ และ $\phi=\sqrt{0.5}$ จะได้ระบบสมการผลต่างจำกัดเป็น

$$\begin{bmatrix} 2+0.25^2(0.5) & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2+0.25^2(0.5) & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2+0.25^2(0.5) & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2+0.25^2(0.5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25^2(12\times 0.5) \\ 0.25^2(12\times 0.5) \\ 0.25^2(12\times 0.5) \\ 0.25^2(12\times 0.5) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2.03125 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2.03125 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2.03125 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2.03125 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.375 \\ 0.375 \\ 0.375 \\ 0.375 \end{bmatrix}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

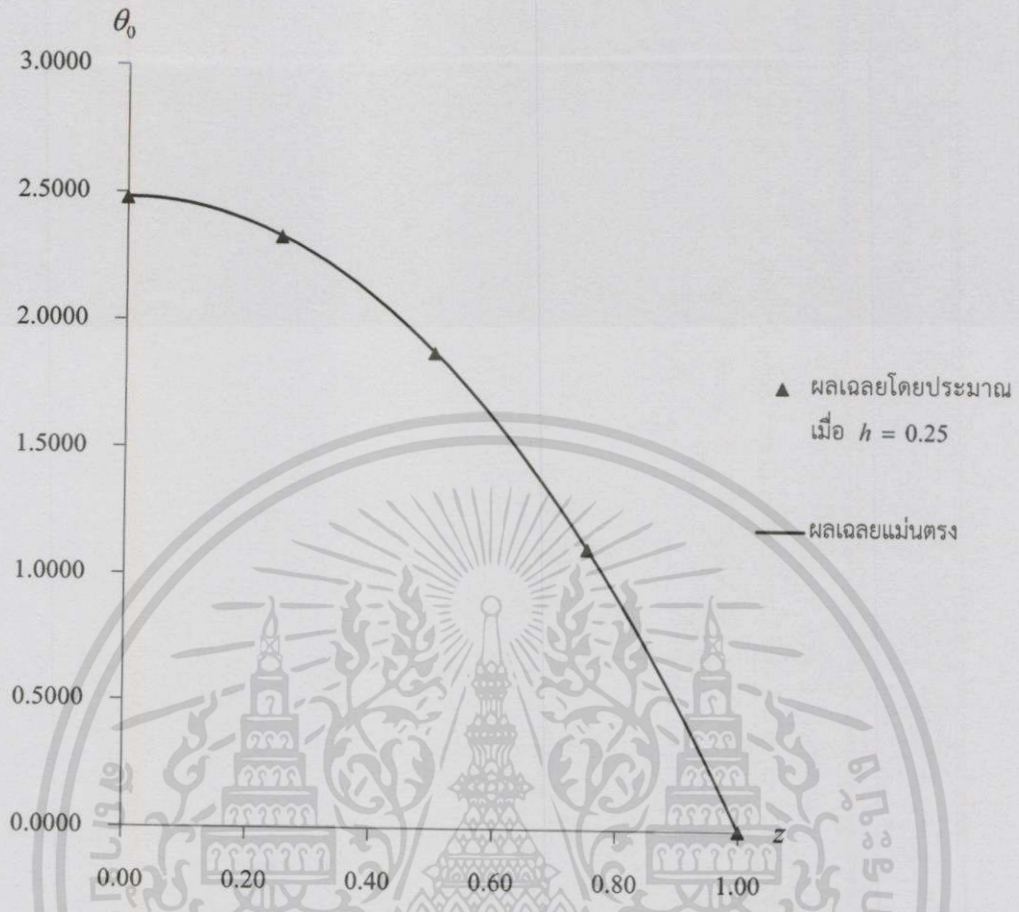
$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.4753 \\ 2.3265 \\ 1.8754 \\ 1.1079 \end{bmatrix}$$

ตารางที่ 4.1 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ $h=0.25$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$

z	$\theta_0(z)$	w	$\lvert \theta_0(z)-w \rvert$
0.00	2.480661819	2.475345142	5.3167×10^{-3}
0.25	2.331534413	2.326522409	5.0120×10^{-3}
0.50	1.879479816	1.8754035025	4.0763×10^{-3}
0.75	1.110334495	1.107890955	2.4435×10^{-3}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.25$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

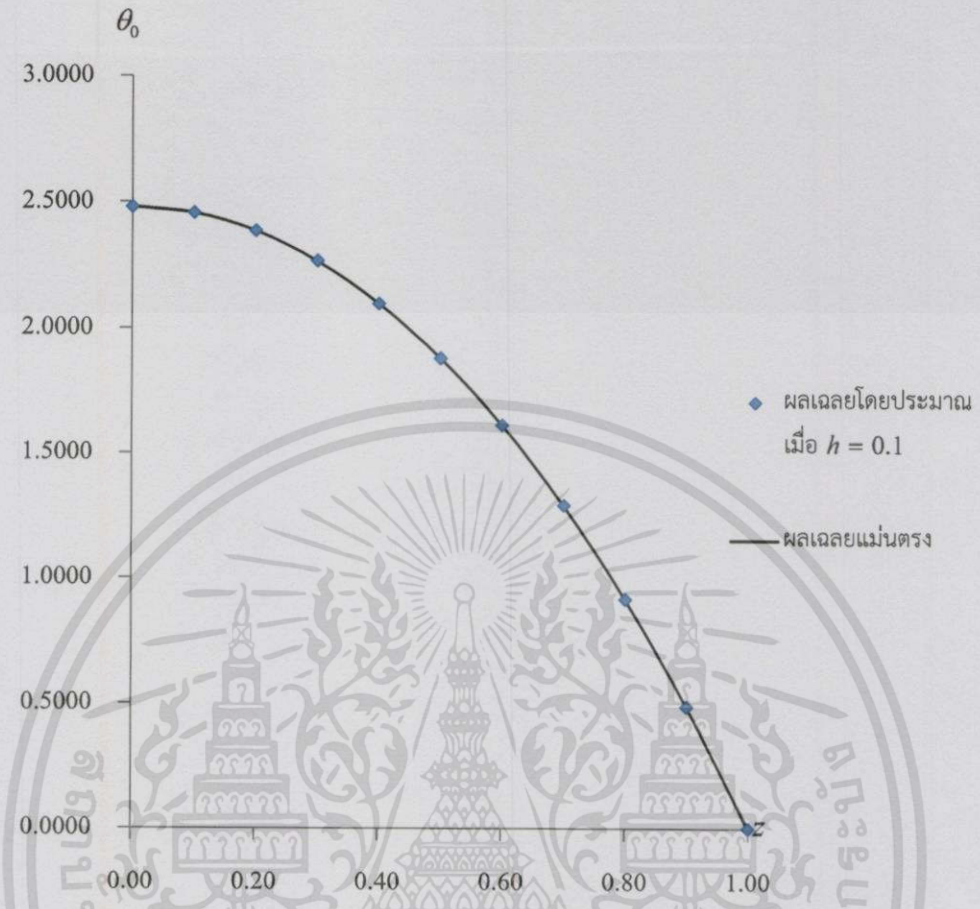
เมื่อ $h=0.1$ จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ w ดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ $h=0.1$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$

z	$\theta_0(z)$	w	$\lvert\theta_0(z)-w\rvert$
0.00	2.480661819	2.479808503	8.5332×10^{-4}
0.10	2.456853556	2.456008025	8.4553×10^{-4}
0.20	2.385309676	2.384487586	8.2209×10^{-4}
0.30	2.265672310	2.264889585	7.8272×10^{-4}
0.40	2.097343023	2.096616033	7.2699×10^{-4}
0.50	1.879479816	1.878825560	6.5426×10^{-4}
0.60	1.610992921	1.610429215	5.6371×10^{-4}
0.70	1.290539343	1.290085016	4.5433×10^{-4}
0.80	0.916516147	0.916191243	3.2490×10^{-4}
0.90	0.487052437	0.486878425	1.7401×10^{-4}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง "ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.1$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

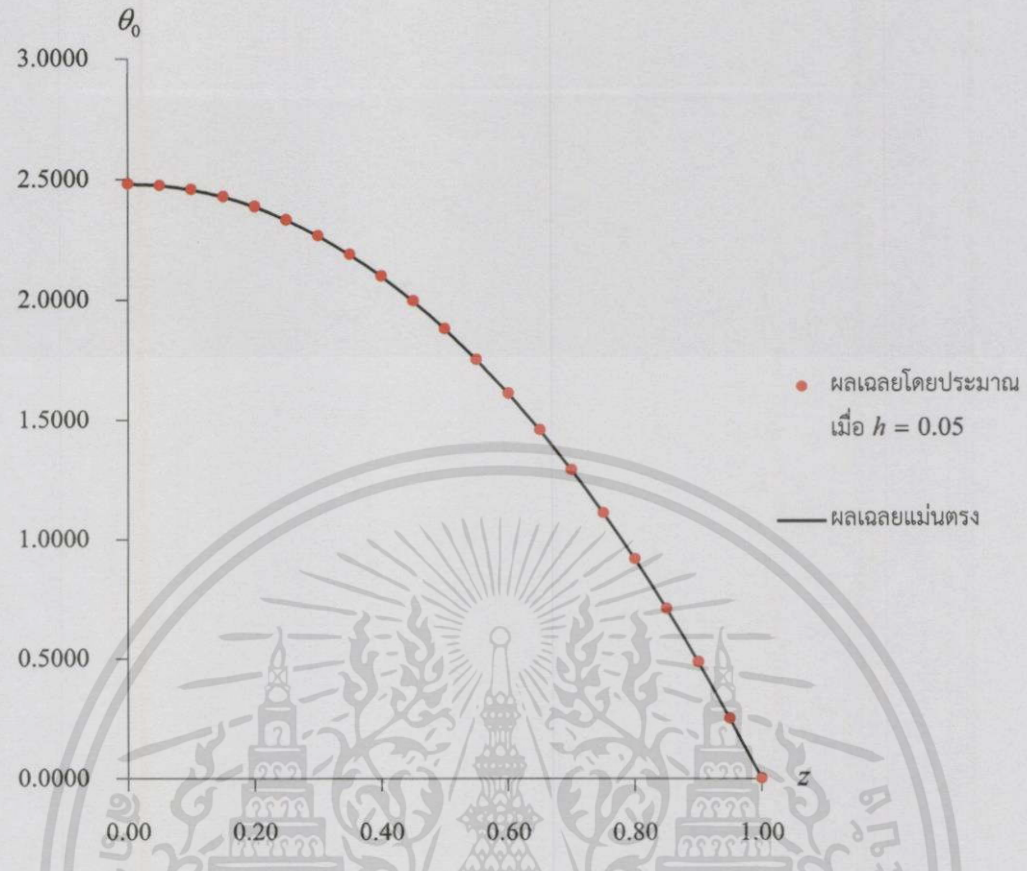
เมื่อ $h = 0.05$ จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ w ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ $h = 0.05$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	w	$\lvert \theta_0(z) - w \rvert$
0.00	2.480661819	2.480448395	2.1342×10^{-4}
0.05	2.474711613	2.474498675	2.1294×10^{-4}
0.10	2.456853556	2.456642079	2.1148×10^{-4}
0.15	2.427065323	2.426856285	2.0904×10^{-4}
0.20	2.385309676	2.385104062	2.0561×10^{-4}
0.25	2.331534413	2.331333218	2.0120×10^{-4}
0.30	2.265672310	2.265476541	1.9577×10^{-4}
0.35	2.187641030	2.187451710	1.8932×10^{-4}
0.40	2.097343023	2.097161194	1.8183×10^{-4}
0.45	1.994665405	1.994492129	1.7328×10^{-4}
0.50	1.879479816	1.879316179	1.6364×10^{-4}
0.55	1.751642260	1.751489374	1.5289×10^{-4}
0.60	1.610992921	1.610851931	1.4099×10^{-4}
0.65	1.457355971	1.457228053	1.2792×10^{-4}
0.70	1.290539343	1.290425710	1.1363×10^{-4}
0.75	1.110334495	1.110236399	9.8096×10^{-5}
0.80	0.916516147	0.916434884	8.1263×10^{-5}
0.85	0.708842001	0.708778912	6.3089×10^{-5}
0.90	0.487052437	0.487008914	4.3523×10^{-5}
0.95	0.250870190	0.250847677	2.2512×10^{-5}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

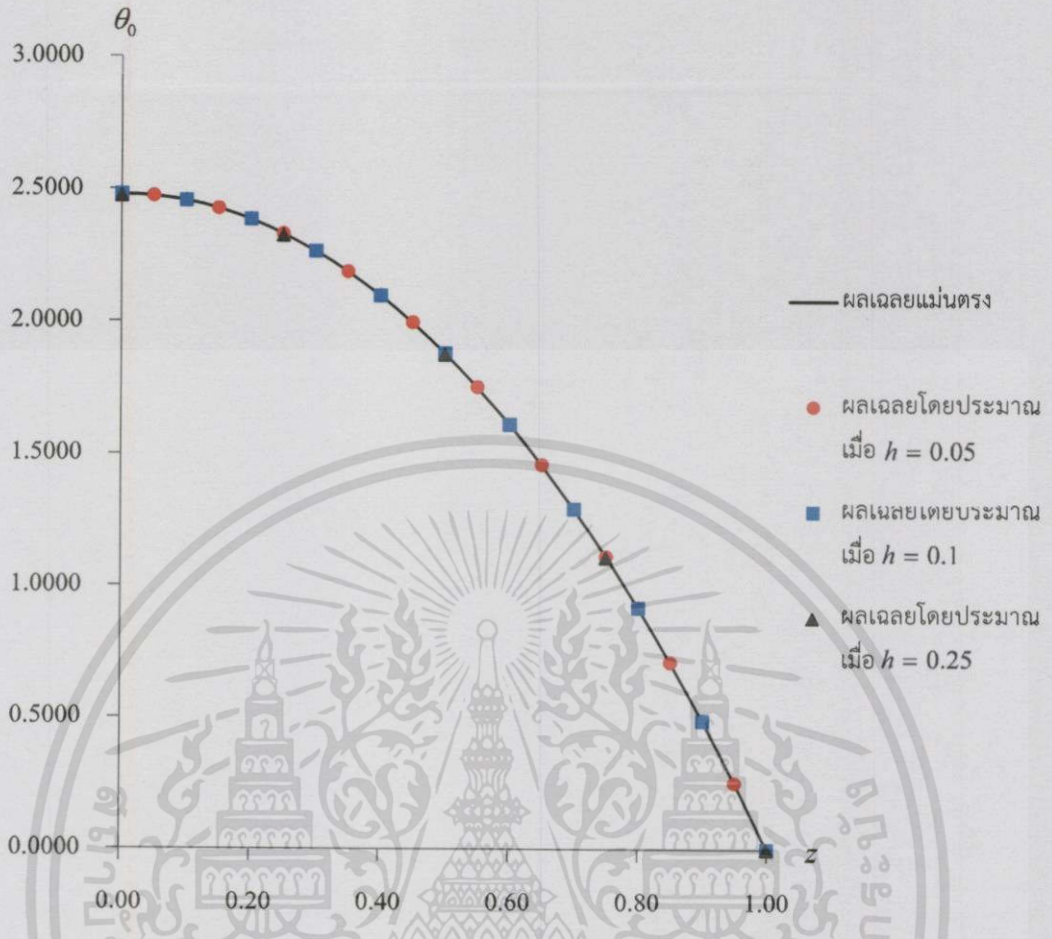
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.3 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.05$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.4 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ $h = 0.25$ 0.1 และ 0.05 กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ 10,50,100,500 และ 1000 กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	w				
		$N=10$	$N=50$	$N=100$	$N=500$	$N=1000$
0.00	2.480661819	2.479808503	2.480627667	2.480653281	2.480661478	2.480661734
0.10	2.456853556	2.456008025	2.456819715	2.456845096	2.456853218	2.456853471
0.20	2.385309676	2.384487586	2.385276773	2.385301450	2.385309347	2.385309594
0.30	2.265672310	2.264889585	2.265640983	2.265664478	2.265671997	2.265672232
0.40	2.097343023	2.096616033	2.097313926	2.097335748	2.097342732	2.097342950
0.50	1.879479816	1.878825560	1.879453631	1.879473270	1.879479555	1.879479751
0.60	1.610992921	1.610429215	1.610970360	1.610987281	1.610992696	1.610992865
0.70	1.290539343	1.290085016	1.290521160	1.290534797	1.290539162	1.290539298
0.80	0.916516147	0.916191243	0.916503143	0.916512896	0.916516017	0.916516115
0.90	0.487052437	0.486878425	0.487045473	0.487050696	0.487052367	0.487052420
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 4.5 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ 10,50,100,500 และ 1000

z	$\lvert \theta_0(z) - w \rvert$				
	$N=10$	$N=50$	$N=100$	$N=500$	$N=1000$
0.00	8.5332×10^{-4}	3.4152×10^{-5}	8.5382×10^{-6}	3.4153×10^{-7}	8.5382×10^{-8}
0.10	$8.4553\times10^{4-}$	3.3841×10^{-5}	8.4603×10^{-6}	3.3841×10^{-7}	8.4603×10^{-8}
0.20	8.2209×10^{-4}	3.2902×10^{-5}	8.2257×10^{-6}	3.2903×10^{-7}	8.2258×10^{-8}
0.30	7.8272×10^{-4}	3.1327×10^{-5}	7.8319×10^{-6}	3.1328×10^{-7}	7.8319×10^{-8}
0.40	7.2699×10^{-4}	2.9096×10^{-5}	7.2742×10^{-6}	2.9097×10^{-7}	7.2742×10^{-8}
0.50	6.5426×10^{-4}	2.6185×10^{-5}	6.5464×10^{-6}	2.6186×10^{-7}	6.5465×10^{-8}
0.60	5.6371×10^{-4}	2.2561×10^{-5}	5.6404×10^{-6}	2.2562×10^{-7}	5.6404×10^{-8}
0.70	4.5433×10^{-4}	1.8184×10^{-5}	4.5460×10^{-6}	1.8184×10^{-7}	4.5460×10^{-8}
0.80	3.2490×10^{-4}	1.3004×10^{-5}	3.2510×10^{-6}	1.3004×10^{-7}	3.2510×10^{-8}
0.90	1.7401×10^{-4}	6.9645×10^{-6}	1.7412×10^{-6}	6.9647×10^{-8}	1.7412×10^{-8}
1.00	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

จากตารางที่ 4.4 และ 4.5 จะเห็นว่าได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัดเมื่อจำนวนช่วงย่อย N เป็น 1000 มีความแม่นยำที่สุด แล้วตามด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัดเมื่อจำนวนช่วงย่อย N เป็น 500, 100, 50 และ 10 ตามลำดับ นั่นคือ จะได้ว่าเมื่อเราแบ่งจำนวนช่วงย่อย N มากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้น

4.3 ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง

4.3.1 ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

โดยสมการ (3.59) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{49}{16} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.46}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{32}{19} & 0 & -\frac{32}{19} \end{bmatrix}^T$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $u_3(z)$ อยู่ในรูป

$$u_3(z) = \frac{32}{19} - \frac{32}{19}\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{4.47}$$

$$u_3(z) = \frac{48}{19} - \frac{48}{19}z^2 \tag{4.48}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u_3(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.6 และรูปที่ 4.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

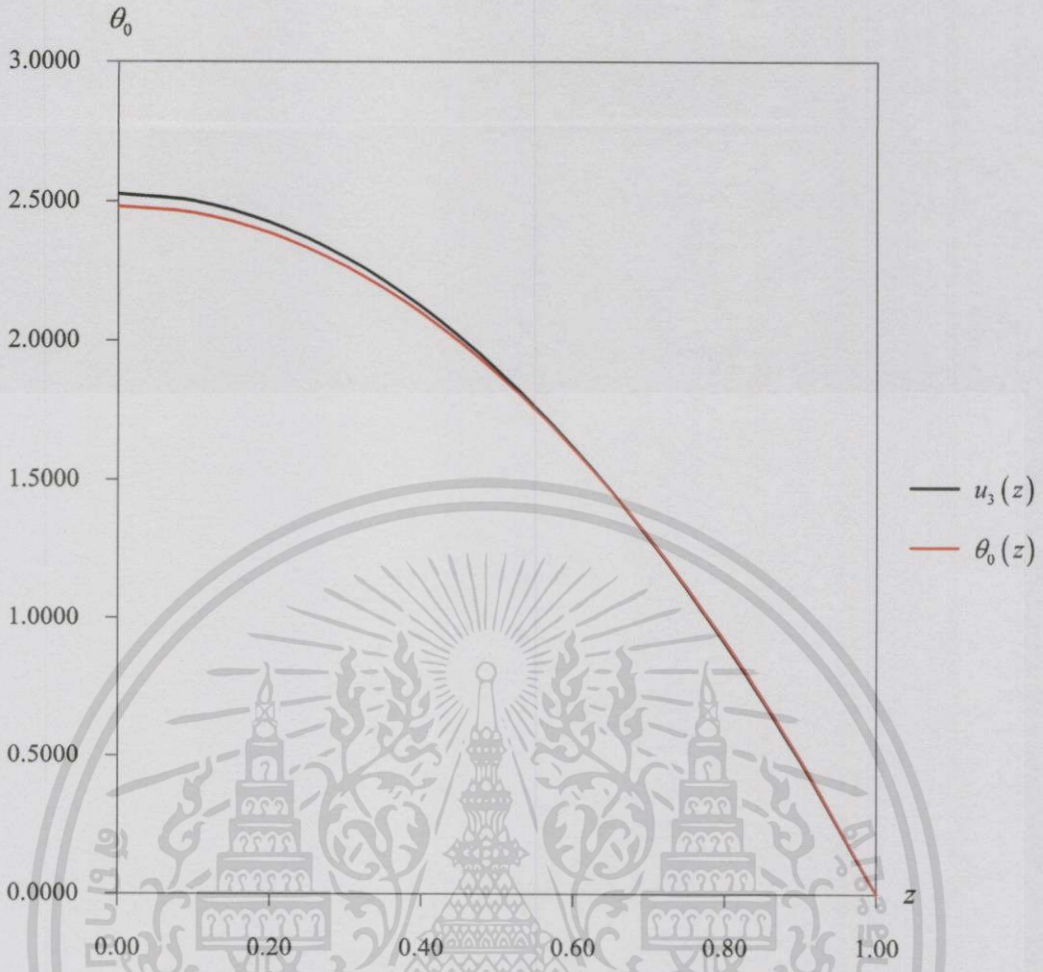
ตารางที่ 4.6 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	$u_3(z)$	$\lvert \theta_0(z) - u_3(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.526315789	4.5654×10^{-2}
0.10	2.456853556	2.501052632	4.4199×10^{-2}
0.20	2.385309676	2.425263158	3.9953×10^{-2}
0.30	2.265672310	2.298947368	3.3275×10^{-2}
0.40	2.097343023	2.122105263	2.4762×10^{-2}
0.50	1.879479816	1.894736842	1.5257×10^{-2}
0.60	1.610992921	1.616842105	5.8492×10^{-3}
0.70	1.290539343	1.288421053	2.1183×10^{-3}
0.80	0.916516147	0.909473684	7.0425×10^{-3}
0.90	0.487052437	0.480000000	7.0524×10^{-3}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง "ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

โดยสมการ (3.72) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{19}{6} & \frac{281}{54} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{35}{12} & \frac{547}{54} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{4.49}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{4122}{2423} & -\frac{1458}{12115} & -\frac{3636}{2423} & -\frac{972}{12115} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

และได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_4(z)$ อยู่ในรูป

$$u_4(z) = \frac{4122}{2423} - \frac{1458}{12115}z - \frac{3636}{2423}\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{972}{12115}\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right) \tag{4.50}$$

$$u_4(z) = \frac{5940}{2423} - \frac{5454}{2423}z^2 - \frac{486}{2423}z^3 \tag{4.51}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u_4(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.7 และรูปที่ 4.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

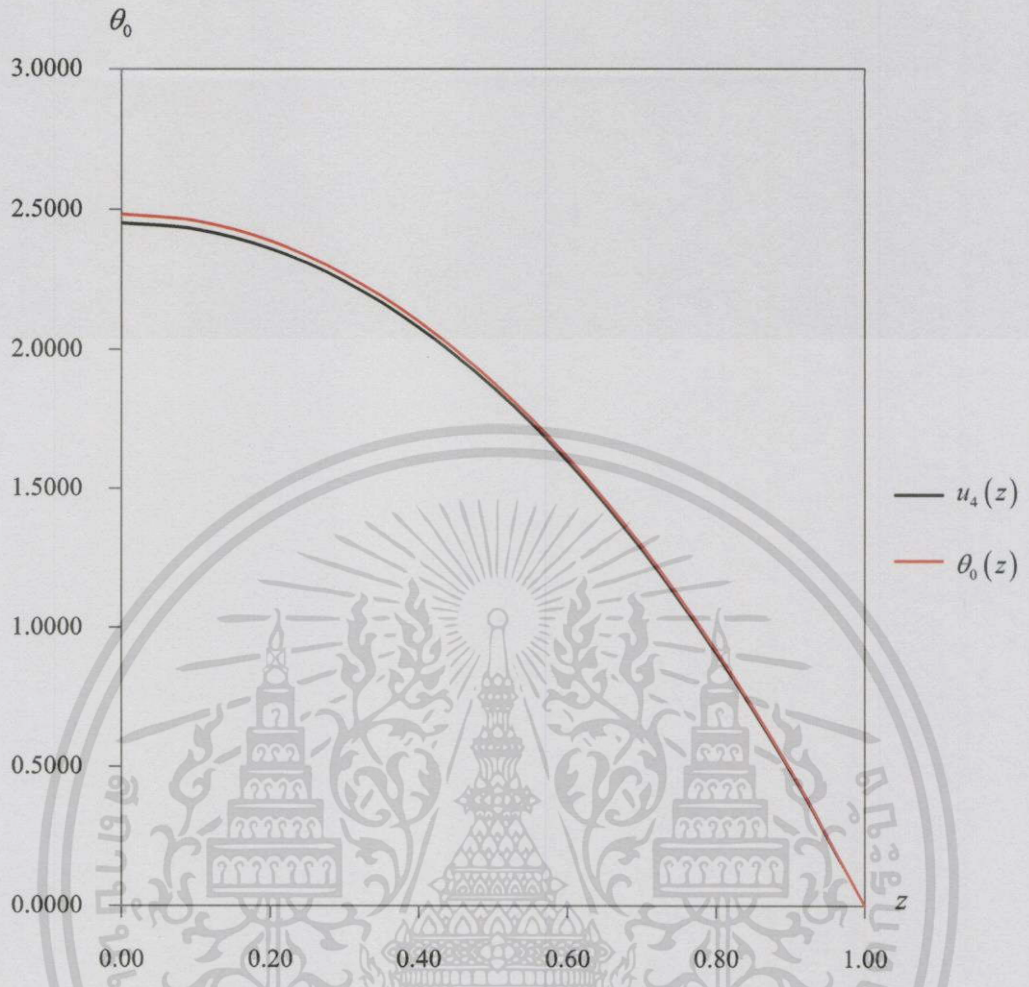
ตารางที่ 4.7 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	$u_4(z)$	$\lvert \theta_0(z) - u_4(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.451506397	2.9155×10^{-2}
0.10	2.456853556	2.428796533	2.8057×10^{-2}
0.20	2.385309676	2.359864631	2.5445×10^{-2}
0.30	2.265672310	2.243507222	2.2165×10^{-2}
0.40	2.097343023	2.078520842	1.8822×10^{-2}
0.50	1.879479816	1.863702022	1.5778×10^{-2}
0.60	1.610992921	1.597847297	1.3146×10^{-2}
0.70	1.290539343	1.279753199	1.0786×10^{-2}
0.80	0.916516147	0.908216261	8.2999×10^{-3}
0.90	0.487052437	0.482033017	5.0194×10^{-3}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด

โดยสมการ (3.86) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \frac{205}{64} & \frac{1003}{256} & -\frac{17603}{4096} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{49}{16} & \frac{247}{32} & \frac{1477}{256} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & \frac{181}{64} & \frac{2889}{256} & \frac{90957}{4096} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{12283936}{7375175} \quad \frac{6912}{1475035} \quad -\frac{2432672}{1475035} \quad \frac{4608}{1475035} \quad -\frac{178176}{7375175} \right]^{\mathrm{T}}$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $u_5(z)$ อยู่ในรูป

$$u_5(z) = \frac{12283936}{7375175} + \frac{6912}{1475035} z - \frac{2432672}{1475035}\left(\frac{3}{2}z - \frac{1}{2}\right) + \frac{4608}{1475035}\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right) - \frac{178176}{7375175}\left(\frac{35}{8}z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{3}{8}\right) \tag{4.53}$$

$$u_5(z) = \frac{731952}{295007} - \frac{3515376}{1475035} z^2 + \frac{2304}{295007} z^3 - \frac{155904}{1475035} z^4 \tag{4.54}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u_5(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.8 และรูปที่ 4.7

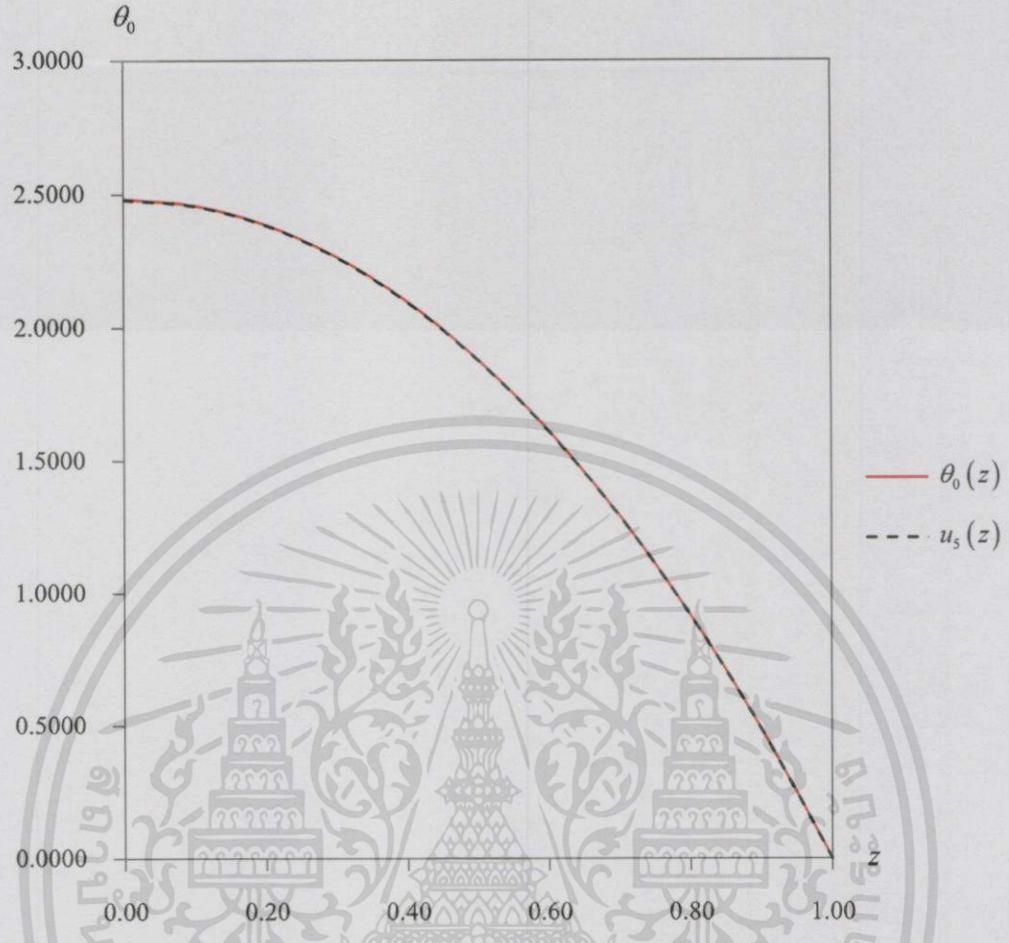
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.8 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$u_5(z)$	$\lvert \theta_0(z) - u_5(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.481134346	4.7253×10^{-4}
0.10	2.456853556	2.457299094	4.4554×10^{-4}
0.20	2.385309676	2.385697745	3.8807×10^{-4}
0.30	2.265672310	2.265996656	3.2435×10^{-4}
0.40	2.097343023	2.097608516	2.6549×10^{-4}
0.50	1.879479816	1.879692346	2.1253×10^{-4}
0.60	1.610992921	1.611153499	1.6058×10^{-4}
0.70	1.290539343	1.290643659	1.0432×10^{-4}
0.80	0.916516147	0.916560842	4.4695×10^{-5}
0.90	0.487052437	0.487049396	3.0413×10^{-6}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.7 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

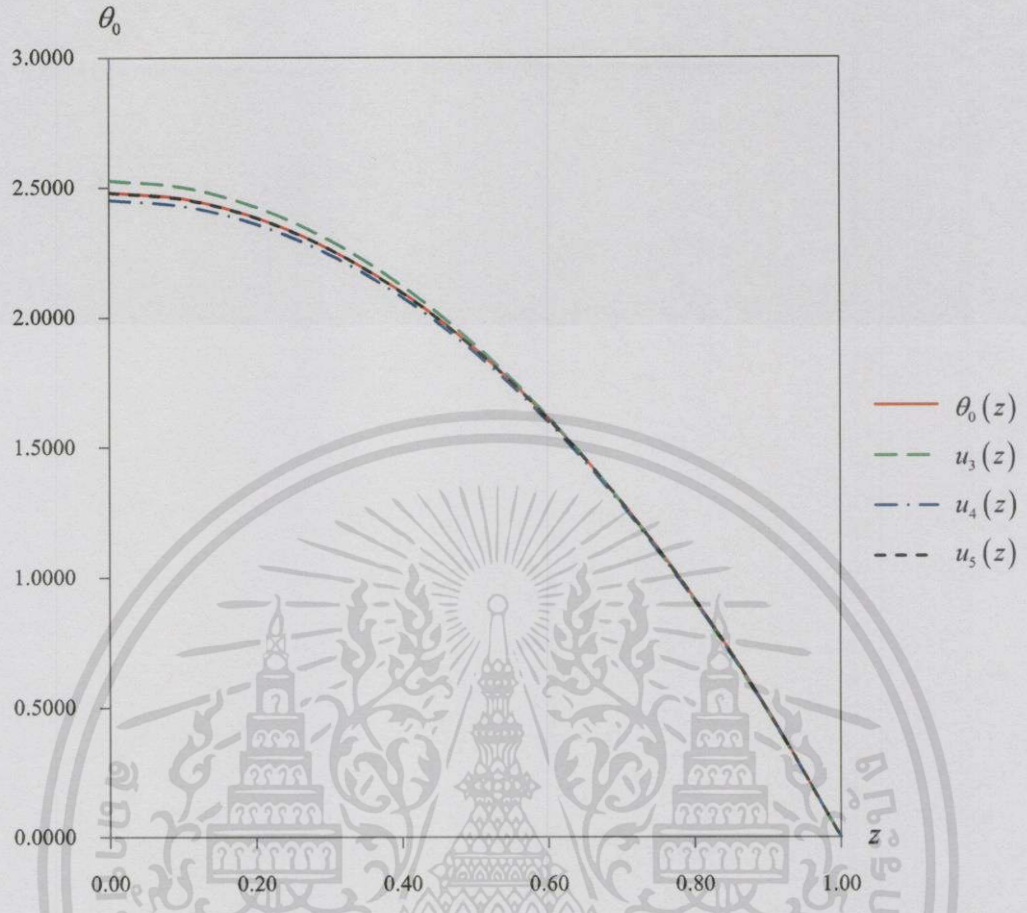
$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.9 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ $u_4(z)$ และ $u_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$u_3(z)$	$u_4(z)$	$u_5(z)$
0.00	2.480661819	2.526315789	2.451506397	2.481134346
0.10	2.456853556	2.501052632	2.428796533	2.457299094
0.20	2.385309676	2.425263158	2.359864631	2.385697745
0.30	2.265672310	2.298947368	2.243507222	2.265996656
0.40	2.097343023	2.122105263	2.078520842	2.097608516
0.50	1.879479816	1.894736842	1.863702022	1.879692346
0.60	1.610992921	1.616842105	1.597847297	1.611153499
0.70	1.290539343	1.288421053	1.279753199	1.290643659
0.80	0.916516147	0.909473684	0.908216261	0.916560842
0.90	0.487052437	0.480000000	0.482033017	0.487049396
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.8 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ $u_4(z)$ และ $u_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.10 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_3(z)$ $u_4(z)$ และ $u_5(z)$

z	$\lvert \theta_0(z)-u_3(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-u_4(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-u_5(z) \rvert$
0.00	4.5654×10^{-2}	2.9155×10^{-2}	4.7253×10^{-4}
0.10	4.4199×10^{-2}	2.8057×10^{-2}	4.4554×10^{-4}
0.20	3.9953×10^{-2}	2.5445×10^{-2}	3.8807×10^{-4}
0.30	3.3275×10^{-2}	2.2165×10^{-2}	3.2435×10^{-4}
0.40	2.4762×10^{-2}	1.8822×10^{-2}	2.6549×10^{-4}
0.50	1.5257×10^{-2}	1.5778×10^{-2}	2.1253×10^{-4}
0.60	5.8492×10^{-3}	1.3146×10^{-2}	1.6058×10^{-4}
0.70	2.1183×10^{-3}	1.0786×10^{-2}	1.0432×10^{-4}
0.80	7.0425×10^{-3}	8.2999×10^{-3}	4.4695×10^{-5}
0.90	7.0524×10^{-3}	5.0194×10^{-3}	3.0413×10^{-6}
1.00	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

จากตารางที่ 4.9 และ 4.10 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $u_5(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด ตามด้วย $u_4(z)$ และ $u_3(z)$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(4) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 6 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_6(z)$ เป็น

$$u_6(z)=\frac{2329620500}{939154899}-\frac{2234128000}{939154899}z^2-\frac{1073125}{313051633}z^3 -\frac{87507500}{939154899}z^4-\frac{4765625}{939154899}z^5 \tag{4.55}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 7 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_7(z)$ เป็น

$$u_7(z)=\frac{1804730556660}{727519387703}-\frac{2330265558}{979164721}z^2-\frac{52173450}{727519387703}z^3 -\frac{72262439820}{727519387703}z^4+\frac{148259160}{727519387703}z^5-\frac{1281239856}{727519387703}z^6 \tag{4.56}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 8 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_8(z)$ เป็น

$$u_8(z)=2.48066-2.37983z^2-0.0000151186z^3-0.0991111z^4 -0.0000921466z^5-0.00155091z^6-0.0000603893z^7 \tag{4.57}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 9 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_9(z)$ เป็น

$$u_9(z)=2.48066-2.37983z^2+2.15193\times10^{-7}z^3-0.0991606z^4 +2.01935\times10^{-6}z^5-0.0016556z^6+2.45576\times10^{-6}z^7-1.57185\times10^{-5}z^8 \tag{4.58}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 10 จุด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $u_{10}(z)$ เป็น

$$u_{10}(z)=2.48066-2.37983z^2-2.95888\times10^{-8}z^3-0.0991596z^4-4.40365\times10^{-7}z^5 -0.00165178z^6-1.13739\times10^{-6}z^7-0.0000138376z^8-4.19234\times10^{-7}z^9 \tag{4.59}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.11 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_6(z)$ $u_7(z)$ $u_8(z)$ $u_9(z)$ และ $u_{10}(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	$u_6(z)$	$u_7(z)$	$u_8(z)$	$u_9(z)$	$u_{10}(z)$
0.00	2.480661819	2.480549803	2.480663178	2.480661622	2.480661819	2.480661819
0.10	2.456853556	2.456748301	2.456854814	2.456853374	2.456853558	2.456853556
0.20	2.385309676	2.385216848	2.385310765	2.385309516	2.385309677	2.385309676
0.30	2.265672310	2.265591829	2.265673240	2.265672171	2.265672311	2.265672310
0.40	2.097343023	2.097273826	2.097343801	2.097342903	2.097343024	2.097343023
0.50	1.879479816	1.879421526	1.879480444	1.879479717	1.879479817	1.879479816
0.60	1.610992921	1.610945638	1.610993402	1.610992841	1.610992922	1.610992921
0.70	1.290539343	1.290502798	1.290539683	1.290539282	1.290539344	1.290539343
0.80	0.916516147	0.916489483	0.916516342	0.916516104	0.916516147	0.916516147
0.90	0.487052437	0.487035921	0.487052485	0.487052411	0.487052437	0.487052437
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 4.12 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $u_6(z)$ $u_7(z)$ $u_8(z)$ $u_9(z)$ และ $u_{10}(z)$

z	$\lvert \theta_0(z)-u_6(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-u_7(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-u_8(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-u_9(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-u_{10}(z) \rvert$
0.00	1.1202×10^{-4}	1.3594×10^{-6}	1.9732×10^{-7}	1.8942×10^{-9}	1.9863×10^{-10}
0.10	1.0526×10^{-4}	1.2577×10^{-6}	1.8239×10^{-7}	1.7313×10^{-9}	1.8167×10^{-10}
0.20	9.2828×10^{-5}	1.0892×10^{-6}	1.6010×10^{-7}	1.5049×10^{-9}	1.5959×10^{-10}
0.30	8.0481×10^{-5}	9.2948×10^{-7}	1.3930×10^{-7}	1.2923×10^{-9}	1.3867×10^{-10}
0.40	6.9197×10^{-5}	7.7847×10^{-7}	1.1919×10^{-7}	1.0845×10^{-9}	1.1834×10^{-10}
0.50	5.8290×10^{-5}	6.2814×10^{-7}	9.9534×10^{-8}	8.8268×10^{-10}	9.8647×10^{-11}
0.60	4.7283×10^{-5}	4.8098×10^{-7}	8.0550×10^{-8}	6.8524×10^{-10}	7.9429×10^{-11}
0.70	3.6545×10^{-5}	3.3966×10^{-7}	6.1823×10^{-8}	4.9074×10^{-10}	6.0634×10^{-11}
0.80	2.6664×10^{-5}	1.9527×10^{-7}	4.3399×10^{-8}	3.0043×10^{-10}	4.2051×10^{-11}
0.90	1.6516×10^{-5}	4.7991×10^{-8}	2.5902×10^{-8}	1.0432×10^{-10}	2.4064×10^{-11}
1.00	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

จากตารางที่ 4.11 และ 4.12 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $u_{10}(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด และ $u_6(z)$ มีความแม่นยำน้อยที่สุด นั่นคือ จะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก n มีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ โดยที่เมื่อจำนวนฟังก์ชันฐานหลักมากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย

4.3.2 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

โดยสมการ (3.99) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{49}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.60}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{32}{19} & -\frac{24}{19} & -\frac{8}{19} \end{bmatrix}^T$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $v_3(z)$ อยู่ในรูป

$$v_3(z) = \frac{32}{19} - \frac{24}{19}(2z-1) - \frac{8}{19}\left(6z^2 - 6z + 1\right) \tag{4.61}$$

$$v_3(z) = \frac{48}{19} - \frac{48}{19}z^2 \tag{4.62}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $v_3(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.13 และรูปที่ 4.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

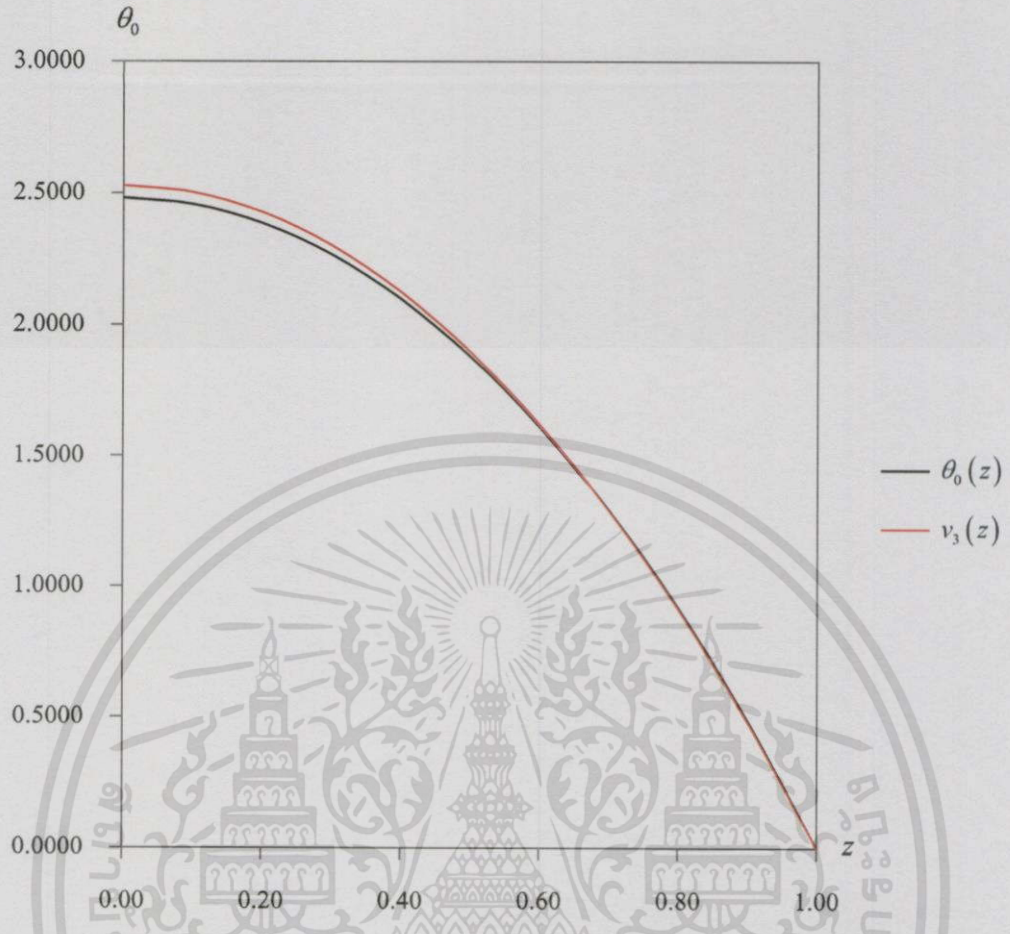
ตารางที่ 4.13 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	$v_3(z)$	$\lvert \theta_0(z) - v_3(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.526315789	4.5654×10^{-2}
0.10	2.456853556	2.501052632	4.4199×10^{-2}
0.20	2.385309676	2.425263158	3.9953×10^{-2}
0.30	2.265672310	2.298947368	3.3275×10^{-2}
0.40	2.097343023	2.122105263	2.4762×10^{-2}
0.50	1.879479816	1.894736842	1.5257×10^{-2}
0.60	1.610992921	1.616842105	5.8492×10^{-3}
0.70	1.290539343	1.288421053	2.1183×10^{-3}
0.80	0.916516147	0.909473684	7.0425×10^{-3}
0.90	0.487052437	0.480000000	7.0524×10^{-3}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง "ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

โดยสมการ (3.112) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 12 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 12 & -\frac{181}{3\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 12 & \frac{181}{3\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.63}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{3540}{2119} \quad -\frac{13032}{10595} \quad -\frac{912}{2119} \quad -\frac{108}{10595} \right]^{\mathrm{T}}$$

และได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_4(z)$ อยู่ในรูป

$$v_4(z) = \frac{3540}{2119} - \frac{13032}{10595}(2z-1) - \frac{912}{2119}\left(6z^2 - 6z + 1\right) - \frac{108}{10595}\left(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1\right) \tag{4.64}$$

$$v_4(z) = \frac{5256}{2119} - \frac{4824}{2119}z^2 - \frac{432}{2119}z^3 \tag{4.65}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $v_4(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.14 และรูปที่ 4.10

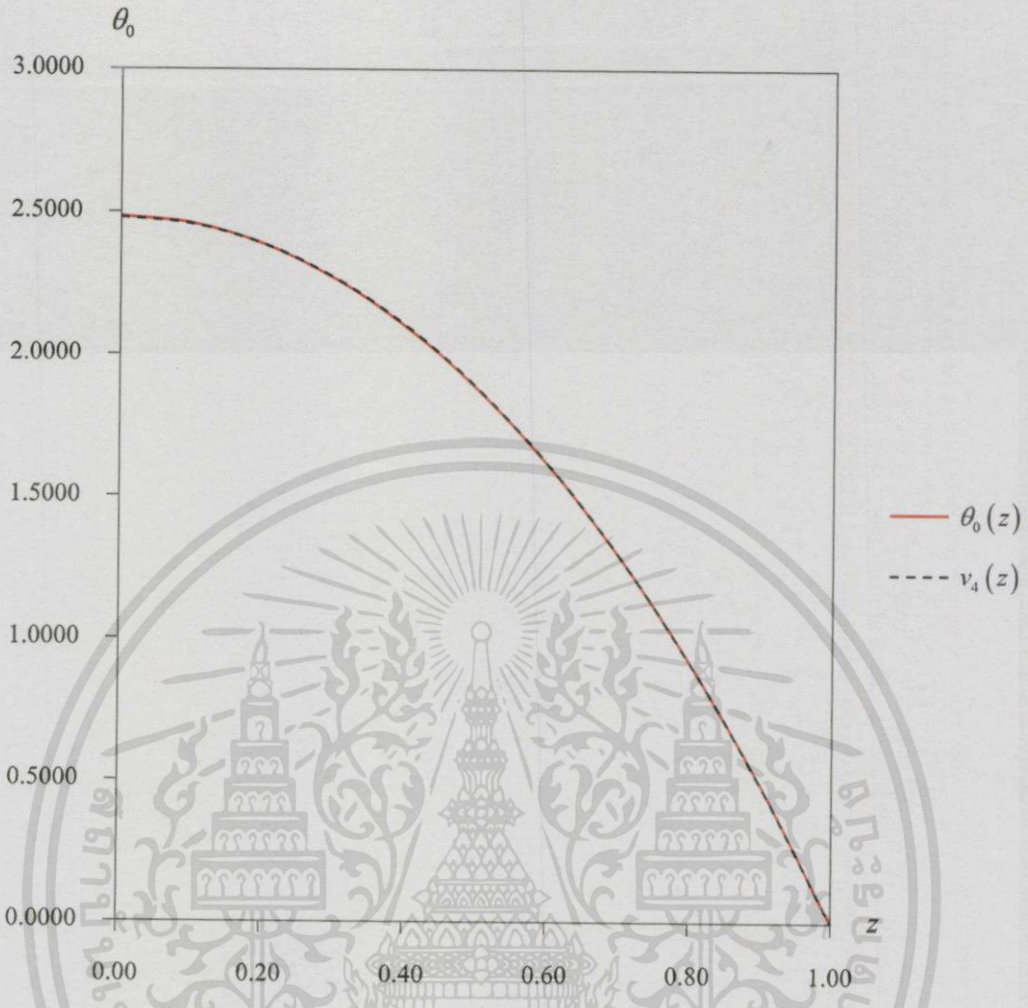
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.14 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$v_4(z)$	$\lvert \theta_0(z) - v_4(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.480415290	2.4653×10^{-4}
0.10	2.456853556	2.457445965	5.9241×10^{-4}
0.20	2.385309676	2.387722511	2.4128×10^{-3}
0.30	2.265672310	2.270021708	4.3494×10^{-3}
0.40	2.097343023	2.103120340	5.7773×10^{-3}
0.50	1.879479816	1.885795186	6.3154×10^{-3}
0.60	1.610992921	1.616823030	5.8301×10^{-3}
0.70	1.290539343	1.294980651	4.4413×10^{-3}
0.80	0.916516147	0.919044832	2.5287×10^{-3}
0.90	0.487052437	0.487792355	7.3992×10^{-4}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.10 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด

โดยสมการ (3.126) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 12 & -20 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} & \frac{59}{5} & -12\sqrt{15} & \frac{1923}{20} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{49}{4} & 0 & -\frac{483}{16} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} & \frac{59}{5} & 12\sqrt{15} & \frac{1923}{20} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{950556}{570109} \quad -\frac{701280}{570109} \quad -\frac{242568}{570109} \quad -\frac{5844}{570109} \quad -\frac{864}{570109} \right]^{\mathrm{T}}$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $v_5(z)$ อยู่ในรูป

$$v_5(z) = \frac{950556}{570109} - \frac{701280}{570109}(2z-1) - \frac{242568}{570109}\left(6z^2 - 6z + 1\right)$$
$$- \frac{5844}{570109}\left(20z^3 - 30z^2 + 12z - 1\right) - \frac{864}{570109}\left(70z^4 - 140z^3 + 90z^2 - 20z + 1\right) \tag{4.67}$$

$$v_5(z) = \frac{1414248}{570109} - \frac{1357848}{570109}z^2 + \frac{4080}{570109}z^3 - \frac{60480}{570109}z^4 \tag{4.68}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $v_5(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.15 และรูปที่ 4.11

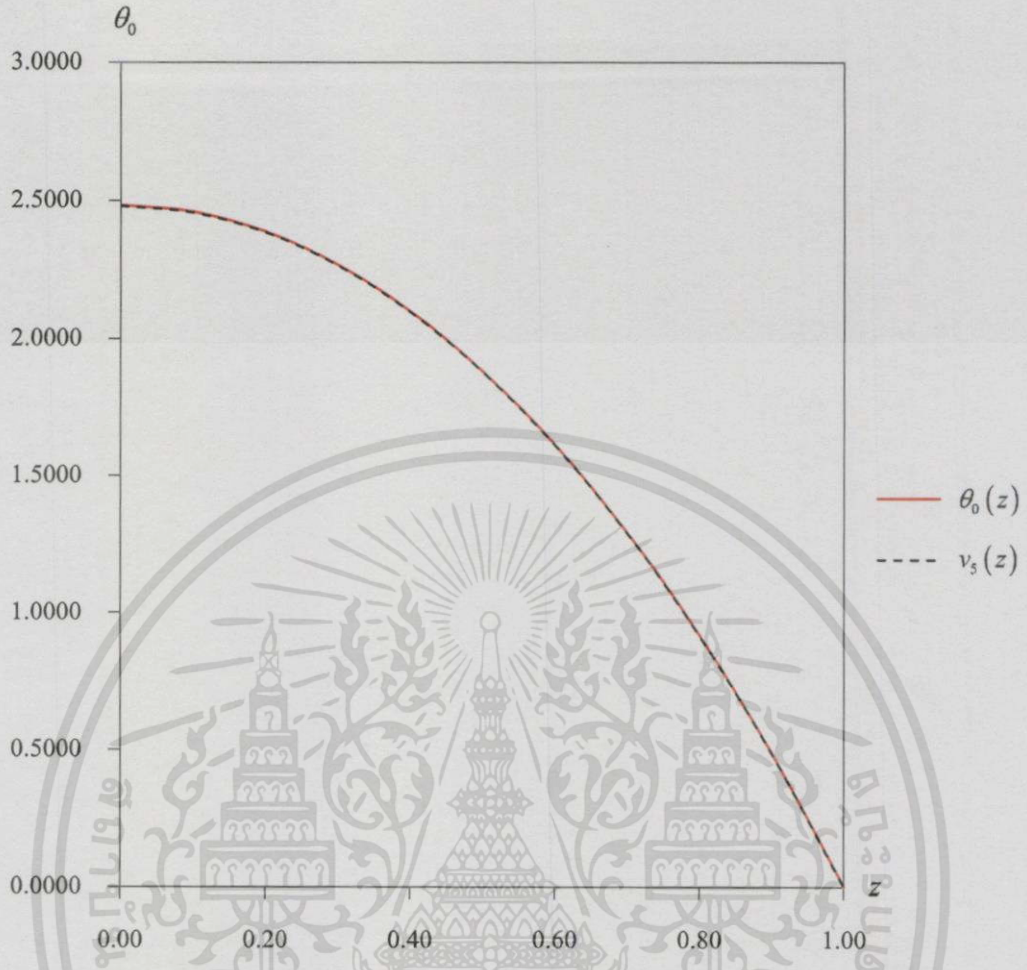
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.15 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$v_5(z)$	$\lvert \theta_0(z) - v_5(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.480662470	6.5077×10^{-7}
0.10	2.456853556	2.456841678	1.1878×10^{-5}
0.20	2.385309676	2.385280625	2.9051×10^{-5}
0.30	2.265672310	2.265640346	3.1964×10^{-5}
0.40	2.097343023	2.097327269	1.5754×10^{-5}
0.50	1.879479816	1.879493220	1.3403×10^{-5}
0.60	1.610992921	1.611035420	4.2498×10^{-5}
0.70	1.290539343	1.290596486	5.7143×10^{-5}
0.80	0.916516147	0.916564432	4.8285×10^{-5}
0.90	0.487052437	0.487072669	2.0231×10^{-5}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.11 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

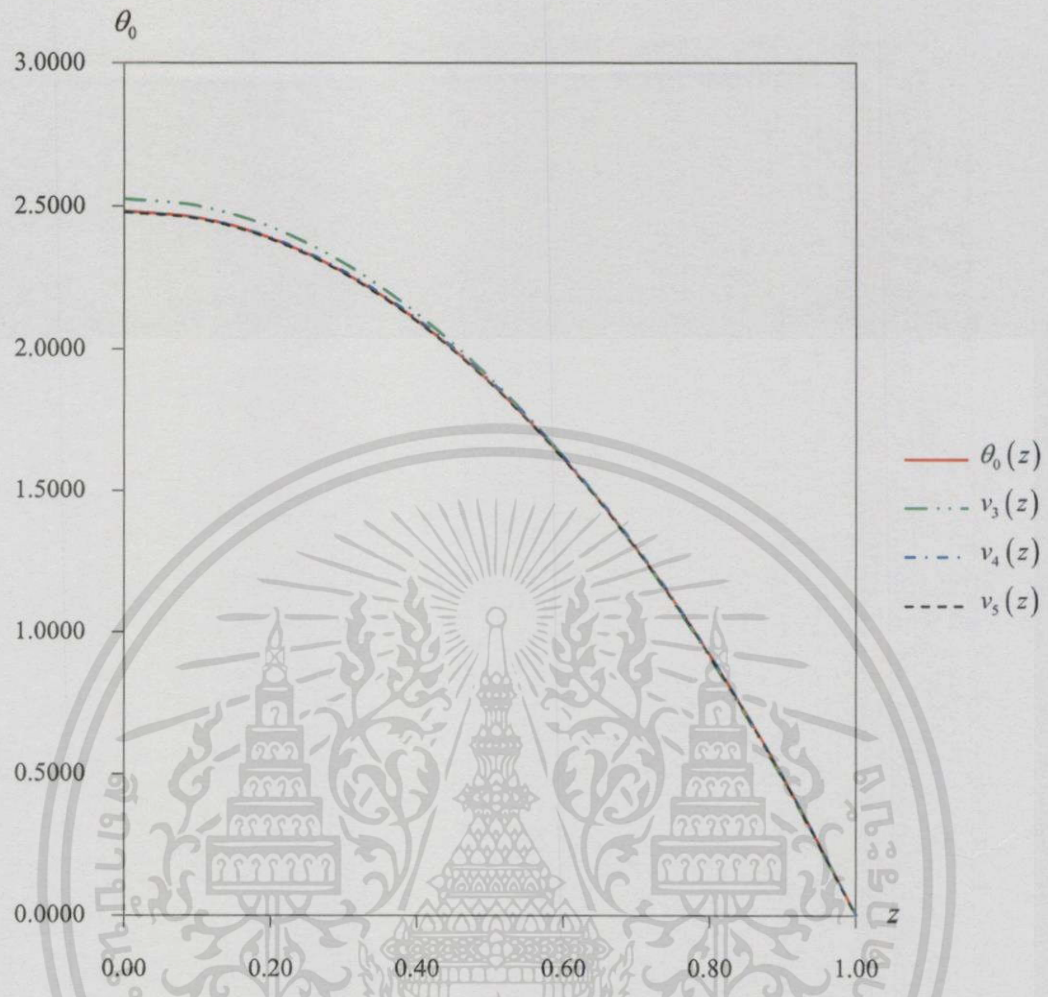
$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.16 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ $v_4(z)$ และ $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$v_3(z)$	$v_4(z)$	$v_5(z)$
0.00	2.480661819	2.526315789	2.480415290	2.480662470
0.10	2.456853556	2.501052632	2.457445965	2.456841678
0.20	2.385309676	2.425263158	2.387722511	2.385280625
0.30	2.265672310	2.298947368	2.270021708	2.265640346
0.40	2.097343023	2.122105263	2.103120340	2.097327269
0.50	1.879479816	1.894736842	1.885795186	1.879493220
0.60	1.610992921	1.616842105	1.616823030	1.611035420
0.70	1.290539343	1.288421053	1.294980651	1.290596486
0.80	0.916516147	0.909473684	0.919044832	0.916564432
0.90	0.487052437	0.480000000	0.487792355	0.487072669
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.12 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีคอลโลเคชัน $v_3(z)$ $v_4(z)$ และ $v_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.17 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_3(z)$ $v_4(z)$ และ $v_5(z)$

z	$\lvert \theta_0(z)-v_3(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-v_4(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-v_5(z) \rvert$
0.00	4.5654×10^{-2}	2.4653×10^{-4}	6.5077×10^{-7}
0.10	4.4199×10^{-2}	5.9241×10^{-4}	1.1878×10^{-5}
0.20	3.9953×10^{-2}	2.4128×10^{-3}	2.9051×10^{-5}
0.30	3.3275×10^{-2}	4.3494×10^{-3}	3.1964×10^{-5}
0.40	2.4762×10^{-2}	5.7773×10^{-3}	1.5754×10^{-5}
0.50	1.5257×10^{-2}	6.3154×10^{-3}	1.3403×10^{-5}
0.60	5.8492×10^{-3}	5.8301×10^{-3}	4.2498×10^{-5}
0.70	2.1183×10^{-3}	4.4413×10^{-3}	5.7143×10^{-5}
0.80	7.0425×10^{-3}	2.5287×10^{-3}	4.8285×10^{-5}
0.90	7.0524×10^{-3}	7.3992×10^{-4}	2.0231×10^{-5}
1.00	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง "ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ"

จากตารางที่ 4.16 และ 4.17 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $v_5(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด ตามด้วย $v_4(z)$ และ $v_3(z)$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(4) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด

เนื่องจากการประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง เชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ โดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง m จุด เมื่อ $m>5$ จะต้องเลือกจุดการจัดตำแหน่งจากรากของพหุนามเลอจองด์อันดับที่ $m-2$ ซึ่งการคำนวณหารากของพหุนามมีความซับซ้อนและมีรากเป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากซับซ้อน ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงประมาณค่ารากของพหุนามเลอจองด์ให้อยู่ในรูปจำนวนตรรกยะ

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 6 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1=0 \qquad z_2=\frac{7}{100} \qquad z_3=\frac{33}{100} \qquad z_4=\frac{67}{100} \qquad z_5=\frac{93}{100} \qquad z_6=1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_6(z)$ เป็น

$$v_6(z)=2.48066-2.37946z^2-0.00246998z^3-0.0936411z^4-0.00508907z^5 \tag{4.69}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 7 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1=0 \qquad z_2=\frac{7}{100} \qquad z_3=\frac{23}{100} \qquad z_4=\frac{1}{2} \qquad z_5=\frac{77}{100} \qquad z_6=\frac{19}{20}$$

$$z_7=1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_7(z)$ เป็น

$$v_7(z)=2.48066-2.37984z^2+0.0000470456z^3$$

$$-0.0993056z^4+0.000203811z^5-0.00176657z^6 \tag{4.70}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 8 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1=0 \qquad z_2=\frac{17}{500} \qquad z_3=\frac{17}{100} \qquad z_4=\frac{19}{50} \qquad z_5=\frac{31}{50} \qquad z_6=\frac{83}{100}$$

$$z_7=\frac{97}{100} \qquad z_8=1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_8(z)$ เป็น

$$v_8(z)=2.48066-2.37983z^2-6.62408\times10^{-6}z^3-0.0991268z^4$$

$$-7.87197\times10^{-5}z^5-0.00155501z^6-6.05914\times10^{-5}z^7 \tag{4.71}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 9 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = \frac{1}{40} \qquad z_3 = \frac{13}{100} \qquad z_4 = \frac{3}{10} \qquad z_5 = \frac{1}{2} \qquad z_6 = \frac{7}{10}$$

$$z_7 = \frac{87}{100} \qquad z_8 = \frac{97}{100} \qquad z_9 = 1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_9(z)$ เป็น

$$v_9(z) = 2.48066 - 2.37983z^2 + 7.11118\times10^{-8}z^3 - 0.0991602z^4$$
$$+1.52122\times10^{-6}z^5 - 0.00165529z^6 + 2.41655\times10^{-6}z^7 - 1.5741253\times10^{-5}z^8 \tag{4.72}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 10 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = \frac{1}{50} \qquad z_3 = \frac{1}{10} \qquad z_4 = \frac{6}{25} \qquad z_5 = \frac{41}{100} \qquad z_6 = \frac{3}{5}$$

$$z_7 = \frac{19}{25} \qquad z_8 = \frac{9}{10} \qquad z_9 = \frac{49}{50} \qquad z_{10} = 1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $v_{10}(z)$ เป็น

$$v_{10}(z) = 2.48066 - 2.37983z^2 - 7.35191\times10^{-9}z^3 - 0.0991597z^4 - 2.82215\times10^{-7}z^5$$
$$-0.00165196z^6 - 1.03487\times10^{-6}z^7 - 1.38592\times10^{-5}z^8 - 4.20931\times10^{-7}z^9 \tag{4.73}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.18 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_6(z)$ $v_7(z)$ $v_8(z)$ $v_9(z)$ และ $v_{10}(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	$v_6(z)$	$v_7(z)$	$v_8(z)$	$v_9(z)$	$v_{10}(z)$
0.00	2.480661819	2.480661222	2.480662081	2.480661820	2.480661819	2.480661819
0.10	2.456853556	2.456854726	2.456853791	2.456853558	2.456853556	2.456853556
0.20	2.385309676	2.385311563	2.385309891	2.385309676	2.385309676	2.385309676
0.30	2.265672310	2.265672173	2.265672517	2.265672329	2.265672310	2.265672310
0.40	2.097343023	2.097340042	2.097343202	2.097343024	2.097343023	2.097343023
0.50	1.879479816	1.879475596	1.879479943	1.879479819	1.879479816	1.879479816
0.60	1.610992921	1.610990098	1.610992996	1.610992923	1.610992921	1.610992921
0.70	1.290539343	1.290539535	1.290539394	1.290539343	1.290539343	1.290539343
0.80	0.916516147	0.916518516	0.916518516	0.916516147	0.916516147	0.916516147
0.90	0.487052437	0.487054161	0.487052477	0.487052438	0.487052437	0.487052437
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 4.19 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $v_6(z)$ $v_7(z)$ $v_8(z)$ $v_9(z)$ และ $v_{10}(z)$

z	$\lvert\theta_0(z)-v_6(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_7(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_8(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_9(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_{10}(z)\rvert$
0.00	5.9733×10^{-7}	2.6209×10^{-7}	9.4134×10^{-10}	3.0815×10^{-12}	3.3769×10^{-12}
0.10	1.1697×10^{-6}	2.3459×10^{-7}	1.6821×10^{-9}	4.2228×10^{-12}	3.4412×10^{-12}
0.20	1.8874×10^{-6}	2.1552×10^{-7}	7.4964×10^{-11}	6.1466×10^{-12}	3.5123×10^{-12}
0.30	1.3692×10^{-7}	2.0708×10^{-7}	3.6989×10^{-10}	2.8217×10^{-12}	2.5637×10^{-12}
0.40	2.9808×10^{-6}	1.7892×10^{-7}	1.5255×10^{-9}	1.2262×10^{-11}	2.8151×10^{-12}
0.50	2.9808×10^{-6}	1.2626×10^{-7}	2.7543×10^{-9}	2.2504×10^{-12}	2.2504×10^{-12}
0.60	2.8231×10^{-6}	7.4479×10^{-8}	1.3616×10^{-9}	7.6295×10^{-12}	2.4358×10^{-12}
0.70	1.9174×10^{-7}	5.1145×10^{-8}	6.9930×10^{-10}	2.9263×10^{-12}	1.5459×10^{-12}
0.80	2.3685×10^{-6}	5.2736×10^{-8}	3.6334×10^{-10}	1.2714×10^{-11}	1.2714×10^{-11}
0.90	1.72412×10^{-6}	3.9711×10^{-8}	1.1631×10^{-9}	4.9000×10^{-13}	8.3844×10^{-13}
1.00	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

จากตารางที่ 4.18 และ 4.19 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $v_{10}(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด และ $v_6(z)$ มีความแม่นยำน้อยที่สุด นั่นคือจะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก n มีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ โดยที่เมื่อจำนวนฟังก์ชันฐานหลักมากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย

4.3.3 การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

โดยสมการ (3.140) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{33}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.74}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{30}{19} & -\frac{24}{19} & -\frac{16}{19} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $q_3(z)$ อยู่ในรูป

$$q_3(z) = \frac{30}{19} - \frac{24}{19}(2z-1) - \frac{16}{19}\left(8z^2 - 8z + 1\right) \tag{4.75}$$

$$q_3(z) = \frac{48}{19} - \frac{48}{19}z^2 \tag{4.76}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u_3(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.20 และรูปที่ 4.13

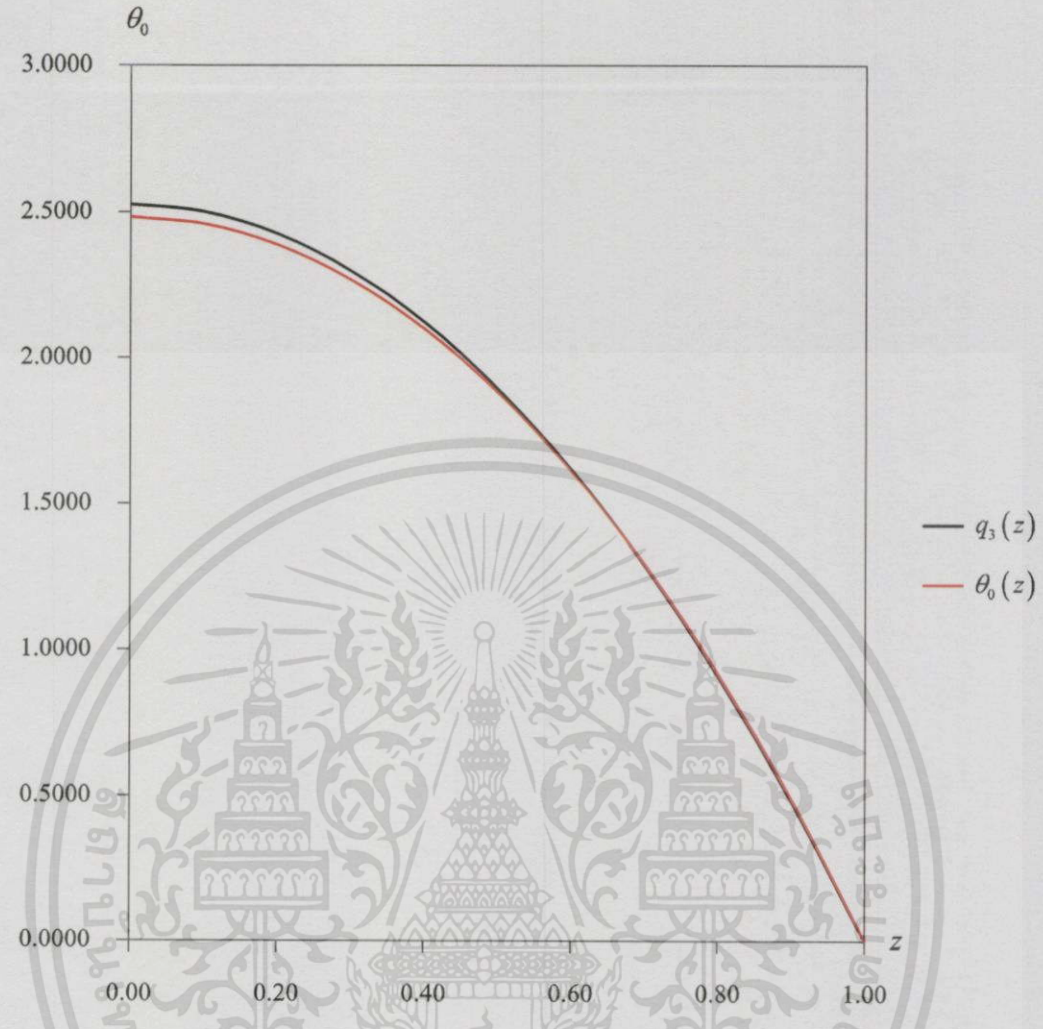
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.20 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$q_3(z)$	$\lvert \theta_0(z) - q_3(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.526315789	4.5654×10^{-2}
0.10	2.456853556	2.501052632	4.4199×10^{-2}
0.20	2.385309676	2.425263158	3.9953×10^{-2}
0.30	2.265672310	2.298947368	3.3275×10^{-2}
0.40	2.097343023	2.122105263	2.4762×10^{-2}
0.50	1.879479816	1.894736842	1.5257×10^{-2}
0.60	1.610992921	1.616842105	5.8492×10^{-3}
0.70	1.290539343	1.288421053	2.1183×10^{-3}
0.80	0.916516147	0.909473684	7.0425×10^{-3}
0.90	0.487052437	0.480000000	7.0524×10^{-3}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง "ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.13 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

โดยสมการ (3.153) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 18 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 16 & -48\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 16 & -48\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{5868}{3721} \quad -\frac{4632}{3721} \quad -\frac{1212}{3721} \quad -\frac{24}{3721} \right]^{\mathrm{T}}$$

และผลเฉลยโดยประมาณ $q_4(z)$ อยู่ในรูป

$$q_4(z) = \frac{5868}{3721} - \frac{4632}{3721}(2z-1) - \frac{1212}{3721}\left(8z^2 - 8z + 1\right) - \frac{24}{3721}\left(32z^3 - 48z^2 + 18z - 1\right) \tag{4.78}$$

$$q_4(z) = \frac{9312}{3721} - \frac{8544}{3721}z^2 - \frac{768}{3821}z^3 \tag{4.79}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u_3(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.21 และรูปที่ 4.14

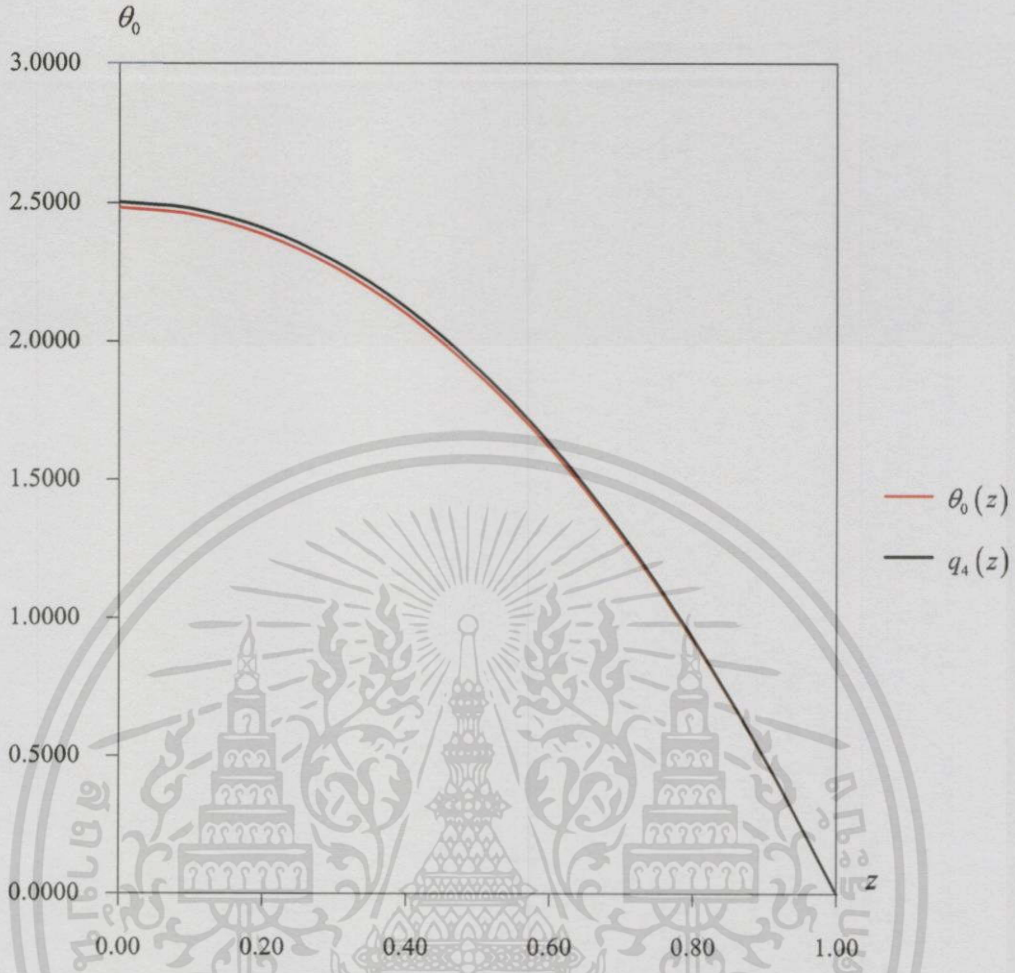
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.21 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$q_4(z)$	$\lvert \theta_0(z) - q_4(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.502553077	2.1891×10^{-2}
0.10	2.456853556	2.479385112	2.2532×10^{-2}
0.20	2.385309676	2.409055630	2.3746×10^{-2}
0.30	2.265672310	2.290326256	2.4654×10^{-2}
0.40	2.097343023	2.121958613	2.4616×10^{-2}
0.50	1.879479816	1.902714324	2.3235×10^{-2}
0.60	1.610992921	1.631355012	2.0362×10^{-2}
0.70	1.290539343	1.306642300	1.6103×10^{-2}
0.80	0.916516147	0.927337812	1.0822×10^{-2}
0.90	0.487052437	0.492203171	5.1507×10^{-3}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.14 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_4(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด

โดยสมการ (3.167) แทนค่า $\phi^2 = \frac{1}{2}$ และ $B = 12$ จะได้ระบบสมการการจัดตำแหน่งเป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -8 & 18 & -32 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{63}{4} & -48\sqrt{3} & \frac{897}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{33}{2} & 0 & -\frac{129}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{63}{4} & 48\sqrt{3} & \frac{897}{4} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.80}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการเป็น

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}} = \left[\frac{2267364}{1452835} \quad -\frac{1792512}{1452835} \quad -\frac{92862}{290567} \quad -\frac{9336}{1452835} \quad -\frac{1206}{1452835} \right]^{\mathrm{T}}$$

และได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_5(z)$ อยู่ในรูป

$$q_5(z) = \frac{2267364}{1452835} - \frac{1792512}{1452835}(2z-1) - \frac{92862}{290567}\left(8z^2-8z+1\right)$$
$$-\frac{9336}{1452835}\left(32z^3-48z^2+18z-1\right) - \frac{1206}{1452835}\left(128z^4-256z^3+160z^2-32z+1\right) \tag{4.81}$$

$$q_5(z) = \frac{3603696}{1452835} - \frac{3459312}{1452835}z^2 + \frac{9984}{1452835}z^3 - \frac{154368}{1452835}z^4 \tag{4.82}$$

สำหรับผลลัพธ์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณ $u_3(z)$ แสดงไว้ในตารางที่ 4.22 และรูปที่ 4.15

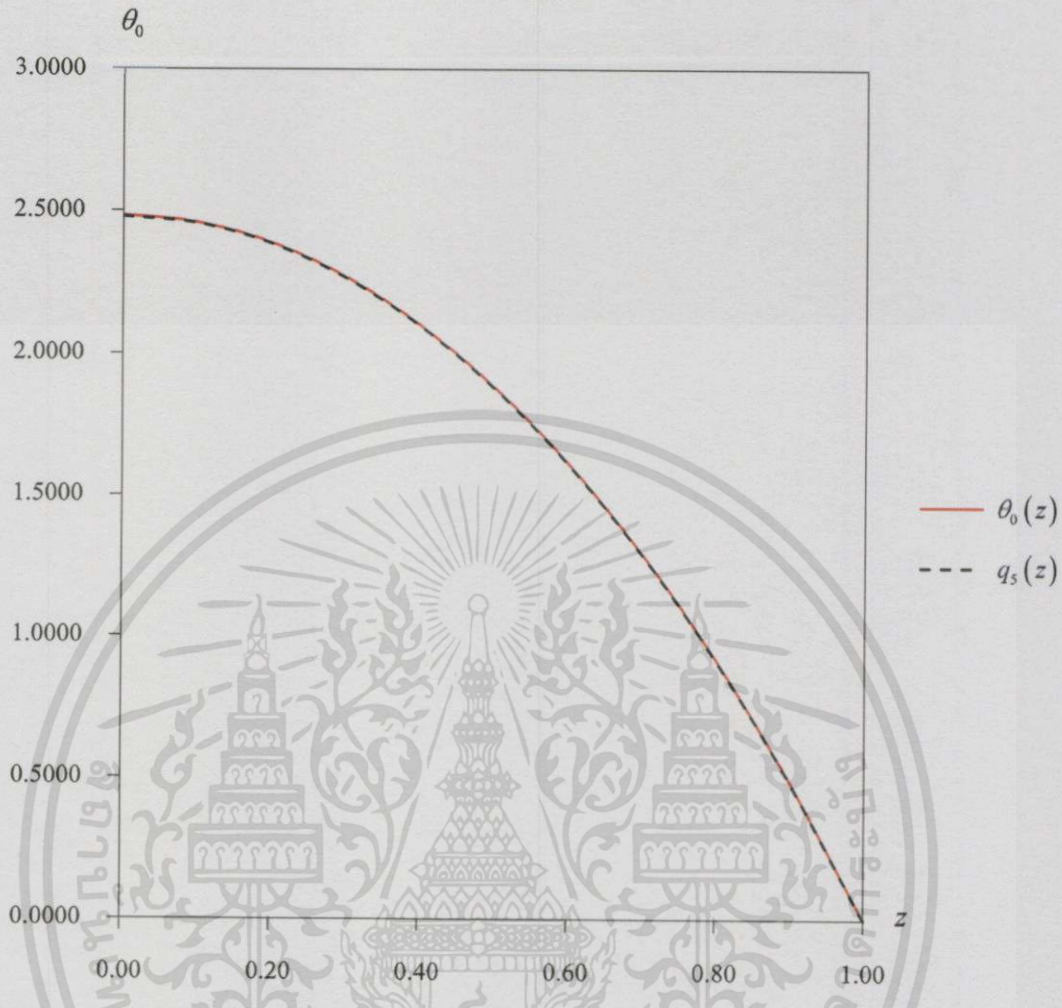
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.22 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$q_5(z)$	$\lvert \theta_0(z) - q_5(z) \rvert$
0.00	2.480661819	2.480457863	2.0396×10^{-4}
0.10	2.456853556	2.457299094	4.4554×10^{-4}
0.20	2.385309676	2.385697745	3.8807×10^{-4}
0.30	2.265672310	2.265996656	3.2435×10^{-4}
0.40	2.097343023	2.097608516	2.6549×10^{-4}
0.50	1.879479816	1.879692346	2.1253×10^{-4}
0.60	1.610992921	1.611153499	1.6058×10^{-4}
0.70	1.290539343	1.290643659	1.0432×10^{-4}
0.80	0.916516147	0.916560842	4.4695×10^{-5}
0.90	0.487052437	0.487049396	3.0413×10^{-6}
1.00	0.000000000	0.000000000	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง "ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ"

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

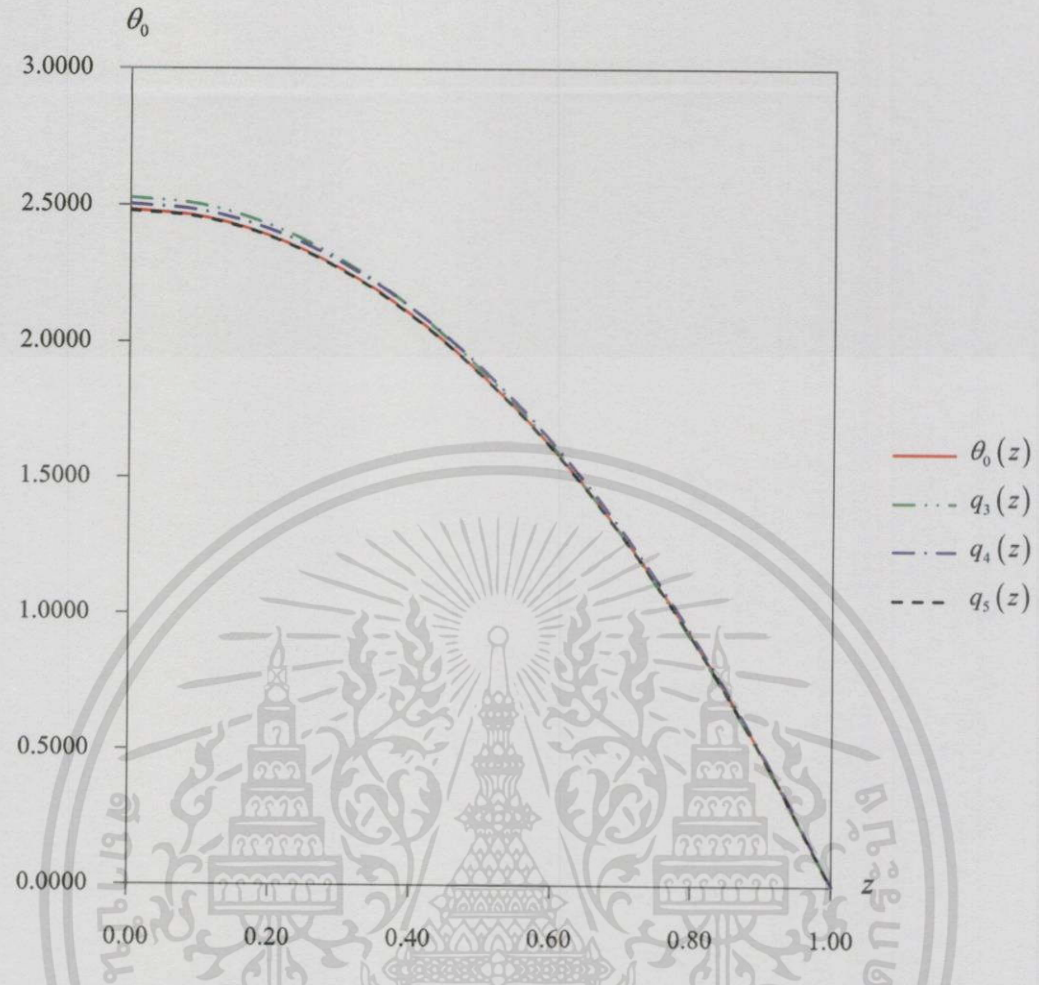
$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.23 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ $q_4(z)$ และ $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

z	$\theta_0(z)$	$q_3(z)$	$q_4(z)$	$q_5(z)$
0.00	2.480661819	2.526315789	2.502553077	2.480457863
0.10	2.456853556	2.501052632	2.479385112	2.457299094
0.20	2.385309676	2.425263158	2.409055630	2.385697745
0.30	2.265672310	2.298947368	2.290326256	2.265996656
0.40	2.097343023	2.122105263	2.121958613	2.097608516
0.50	1.879479816	1.894736842	1.902714324	1.879692346
0.60	1.610992921	1.616842105	1.631355012	1.611153499
0.70	1.290539343	1.288421053	1.306642300	1.290643659
0.80	0.916516147	0.909473684	0.927337812	0.916560842
0.90	0.487052437	0.480000000	0.492203171	0.487049396
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.16 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ $q_4(z)$ และ $q_5(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\dfrac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.24 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_3(z)$ $q_4(z)$ และ $q_5(z)$

z	$\lvert \theta_0(z)-q_3(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-q_4(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-q_5(z) \rvert$
0.00	4.5654×10^{-2}	2.1891×10^{-2}	2.0396×10^{-4}
0.10	4.4199×10^{-2}	2.2532×10^{-2}	4.4554×10^{-4}
0.20	3.9953×10^{-2}	2.3746×10^{-2}	3.8807×10^{-4}
0.30	3.3275×10^{-2}	2.4654×10^{-2}	3.2435×10^{-4}
0.40	2.4762×10^{-2}	2.4616×10^{-2}	2.6549×10^{-4}
0.50	1.5257×10^{-2}	2.3235×10^{-2}	2.1253×10^{-4}
0.60	5.8492×10^{-3}	2.0362×10^{-2}	1.6058×10^{-4}
0.70	2.1183×10^{-3}	1.6103×10^{-2}	1.0432×10^{-4}
0.80	7.0425×10^{-3}	1.0822×10^{-2}	4.4695×10^{-5}
0.90	7.0524×10^{-3}	5.1507×10^{-3}	3.0413×10^{-6}
1.00	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

จากตารางที่ 4.23 และ 4.24 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $q_5(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด ตามด้วย $q_4(z)$ และ $q_3(z)$ ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(4) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่งมากกว่า 5 จุด

เนื่องจากการประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง [0,1] โดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง m จุด เมื่อ $m>5$ จะต้องเลือกจุดการจัดตำแหน่งจากรากของพหุนามเชบีเชฟอันดับที่ $m-2$ ซึ่งการคำนวณหารากของพหุนามมีความซับซ้อนและมีรากเป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากซับซ้อน ดังนั้นคณะผู้จัดทำจึงประมาณค่ารากของพหุนามเชบีเชฟให้อยู่ในรูปจำนวนตรรกยะ

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 6 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1=0 \qquad z_2=\frac{19}{500} \qquad z_3=\frac{31}{100} \qquad z_4=\frac{69}{100} \qquad z_5=\frac{24}{25} \qquad z_6=1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_6(z)$ เป็น

$$q_6(z)=2.48068-2.37963z^2-0.00216217z^3-0.0937965z^4-0.00508819z^5 \tag{4.83}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 7 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1=0 \qquad z_2=\frac{49}{2000} \qquad z_3=\frac{103}{500} \qquad z_4=\frac{1}{2} \qquad z_5=\frac{79}{100} \qquad z_6=\frac{122}{125}$$

$$z_7=1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_7(z)$ เป็น

$$q_7(z)=2.48066-2.37984z^2+0.0000338372z^3$$
$$-0.099289293z^4+0.000196209z^5-0.00176589z^6 \tag{4.84}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 8 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1=0 \qquad z_2=\frac{17}{1000} \qquad z_3=\frac{73}{500} \qquad z_4=\frac{37}{100} \qquad z_5=\frac{63}{100} \qquad z_6=\frac{17}{20}$$

$$z_7=\frac{49}{50} \qquad z_8=1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_8(z)$ เป็น

$$q_8(z)=2.48066-2.37983z^2-5.03249\times10^{-6}z^3-0.0991304z^4$$
$$-0.0000750288z^5-0.00155663z^6-0.0000603817z^7 \tag{4.85}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 9 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = \frac{1}{80} \qquad z_3 = \frac{109}{1000} \qquad z_4 = \frac{283}{1000} \qquad z_5 = \frac{1}{2} \qquad z_6 = \frac{717}{1000}$$

$$z_7 = \frac{89}{100} \qquad z_8 = \frac{987}{1000} \qquad z_9 = 1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_9(z)$ เป็น

$$q_9(z) = 2.48066 - 2.37983z^2 + 5.22064\times10^{-8}z^3 - 0.0991602z^4$$
$$+1.4361\times10^{-6}z^5 - 0.00165525z^6 + 2.41814\times10^{-6}z^7 - 0.0000157483z^8 \tag{4.86}$$

เมื่อเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 10 จุด

เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ

$$z_1 = 0 \qquad z_2 = \frac{6}{625} \qquad z_3 = \frac{21}{250} \qquad z_4 = \frac{11}{50} \qquad z_5 = \frac{2}{5} \qquad z_6 = \frac{3}{5}$$

$$z_7 = \frac{39}{50} \qquad z_8 = \frac{23}{25} \qquad z_9 = \frac{99}{100} \qquad z_{10} = 1$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณ $q_{10}(z)$ เป็น

$$q_{10}(z) = 2.48066 - 2.37983z^2 - 5.02245\times10^{-9}z^3 - 0.0991597z^4 - 2.54012\times10^{-7}z^5$$
$$-0.001652z^6 - 1.00964z^7 - 0.0000138669z^8 - 4.20339\times10^{-7}z^9 \tag{4.87}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.25 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_6(z)$ $q_7(z)$ $q_8(z)$ $q_9(z)$ และ $q_{10}(z)$ กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	$q_6(z)$	$q_7(z)$	$q_8(z)$	$q_9(z)$	$q_{10}(z)$
0.00	2.480661819	2.480675215	2.480661747	2.480661825	2.480661819	2.480661819
0.10	2.456853556	2.456867338	2.456853486	2.456853561	2.456853556	2.456853556
0.20	2.385309676	2.385321079	2.385309640	2.385309678	2.385309676	2.385309676
0.30	2.265672310	2.265678166	2.265672311	2.265672312	2.265672310	2.265672310
0.40	2.097343023	2.097343001	2.097343025	2.097343028	2.097343023	2.097343023
0.50	1.879479816	1.879476562	1.879479782	1.879479823	1.879479816	1.879479816
0.60	1.610992921	1.610990287	1.610992851	1.610992925	1.610992921	1.610992921
0.70	1.290539343	1.290539977	1.290539276	1.290539344	1.290539343	1.290539343
0.80	0.916516147	0.916519685	0.916516122	0.916516146	0.916516147	0.916516147
0.90	0.487052437	0.487055612	0.487052447	0.487052438	0.487052437	0.487052437
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 4.26 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง $q_6(z)$ $q_7(z)$ $q_8(z)$ $q_9(z)$ และ $q_{10}(z)$

z	$\lvert \theta_0(z)-q_6(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-q_7(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-q_8(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-q_9(z) \rvert$	$\lvert \theta_0(z)-q_{10}(z) \rvert$
0.00	1.3396×10^{-5}	7.2271×10^{-8}	5.9526×10^{-9}	2.9670×10^{-11}	1.0751×10^{-12}
0.10	1.3782×10^{-5}	7.0208×10^{-8}	5.3041×10^{-9}	2.2669×10^{-11}	5.4756×10^{-13}
0.20	1.1404×10^{-5}	3.5911×10^{-8}	2.5028×10^{-9}	1.2013×10^{-11}	5.7687×10^{-13}
0.30	5.8557×10^{-6}	1.3958×10^{-9}	2.3131×10^{-9}	2.6952×10^{-11}	1.2488×10^{-12}
0.40	2.1289×10^{-8}	1.9440×10^{-9}	5.0078×10^{-9}	3.4644×10^{-11}	6.7502×10^{-14}
0.50	3.2548×10^{-6}	3.4302×10^{-8}	6.3774×10^{-9}	1.2704×10^{-11}	1.1076×10^{-12}
0.60	2.6344×10^{-6}	7.0490×10^{-8}	3.9769×10^{-9}	8.9884×10^{-12}	1.7697×10^{-13}
0.70	6.3344×10^{-7}	6.7783×10^{-8}	3.9769×10^{-9}	6.7679×10^{-13}	7.4984×10^{-13}
0.80	3.5376×10^{-6}	2.5056×10^{-8}	6.5777×10^{-10}	1.8102×10^{-11}	2.2371×10^{-13}
0.90	3.1744×10^{-6}	1.0218×10^{-8}	6.5777×10^{-10}	6.1497×10^{-12}	4.9649×10^{-13}
1.00	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

จากตารางที่ 4.25 และ 4.26 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $u_{10}(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด และ $u_6(z)$ มีความแม่นยำน้อยที่สุด นั่นคือจะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก n มีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ โดยที่เมื่อจำนวนฟังก์ชันฐานหลักมากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

คณะผู้ทำวิจัยได้ศึกษาเรื่อง การคำนวณเชิงตัวเลขของตัวแบบปฏิกิริยาคายความร้อนที่มีแหล่งกำเนิดความร้อนคงที่ในวัสดุพรุน โดยวิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลยของรูปแบบอุณหภูมิของสภาพการนำความร้อนของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุน คือ

1. วิธีผลต่างจำกัด
2. วิธีการจัดตำแหน่ง

สำหรับผลเฉลยของรูปแบบอุณหภูมิของสภาพการนำความร้อนของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุนโดยวิธีผลต่างจำกัด จะได้ผลเฉลยโดยประมาณเป็นค่าไม่ต่อเนื่อง โดยความแม่นยำของการประมาณค่านั้นขึ้นอยู่กับจำนวนการแบ่งช่วงขอบเขตออกเป็นช่วงย่อย เมื่อจำนวนช่วงย่อยมากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณก็ยิ่งมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย แต่เมื่อเราแบ่งช่วงขอบเขตออกเป็นช่วงย่อยจำนวนมากๆ ก็จะได้ระบบสมการขนาดใหญ่ตามมา ทำให้เกิดความยุ่งยากในการแก้ระบบสมการ โดยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w และค่าคลาดเคลื่อนเมื่อจำนวนแบ่งช่วงย่อย N คือ $10, 50, 100, 500$ และ 1000 แสดงไว้ในตารางที่ 5.1 และ 5.2

สำหรับผลเฉลยของรูปแบบอุณหภูมิของสภาพการนำความร้อนของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุนโดยวิธีการจัดตำแหน่ง เราจะได้ผลเฉลยโดยประมาณเป็นค่าต่อเนื่อง โดยความแม่นยำของการประมาณค่านั้นขึ้นอยู่กับจำนวนฟังก์ชันฐานหลักที่ได้จากการแบ่งช่วงขอบเขตออกเป็นช่วงย่อย และตำแหน่งของจุดการจัดตำแหน่ง โดยคณะผู้วิจัยได้เลือกใช้ฟังก์ชันฐานหลักเป็น

1. พหุนามเลอจองด์
2. พหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$
3. พหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$

โดยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง และค่าคลาดเคลื่อน แสดงไว้ในตารางที่ 5.3 ถึง 5.8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.1 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ 10,50,100,500 และ 1000 กับผลเฉลยแม่นตรง

$$\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z} + e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}} + e^{-\sqrt{0.5}}} + 12$$

z	$\theta_0(z)$	w				
		$N=10$	$N=50$	$N=100$	$N=500$	$N=1000$
0.00	2.480661819	2.479808503	2.480627667	2.480653281	2.480661478	2.480661734
0.10	2.456853556	2.456008025	2.456819715	2.456845096	2.456853218	2.456853471
0.20	2.385309676	2.384487586	2.385276773	2.385301450	2.385309347	2.385309594
0.30	2.265672310	2.264889585	2.265640983	2.265664478	2.265671997	2.265672232
0.40	2.097343023	2.096616033	2.097313926	2.097335748	2.097342732	2.097342950
0.50	1.879479816	1.878825560	1.879453631	1.879473270	1.879479555	1.879479751
0.60	1.610992921	1.610429215	1.610970360	1.610987281	1.610992696	1.610992865
0.70	1.290539343	1.290085016	1.290521160	1.290534797	1.290539162	1.290539298
0.80	0.916516147	0.916191243	0.916503143	0.916512896	0.916516017	0.916516115
0.90	0.487052437	0.486878425	0.487045473	0.487050696	0.487052367	0.487052420
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 5.2 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด w เมื่อ N คือ 10,50,100,500 และ 1000

z	$\lvert \theta_0(z) - w \rvert$				
	$N=10$	$N=50$	$N=100$	$N=500$	$N=1000$
0.00	8.5332×10^{-4}	3.4152×10^{-5}	8.5382×10^{-6}	3.4153×10^{-7}	8.5382×10^{-8}
0.10	$8.4553\times10^{4-}$	3.3841×10^{-5}	8.4603×10^{-6}	3.3841×10^{-7}	8.4603×10^{-8}
0.20	8.2209×10^{-4}	3.2902×10^{-5}	8.2257×10^{-6}	3.2903×10^{-7}	8.2258×10^{-8}
0.30	7.8272×10^{-4}	3.1327×10^{-5}	7.8319×10^{-6}	3.1328×10^{-7}	7.8319×10^{-8}
0.40	7.2699×10^{-4}	2.9096×10^{-5}	7.2742×10^{-6}	2.9097×10^{-7}	7.2742×10^{-8}
0.50	6.5426×10^{-4}	2.6185×10^{-5}	6.5464×10^{-6}	2.6186×10^{-7}	6.5465×10^{-8}
0.60	5.6371×10^{-4}	2.2561×10^{-5}	5.6404×10^{-6}	2.2562×10^{-7}	5.6404×10^{-8}
0.70	4.5433×10^{-4}	1.8184×10^{-5}	4.5460×10^{-6}	1.8184×10^{-7}	4.5460×10^{-8}
0.80	3.2490×10^{-4}	1.3004×10^{-5}	3.2510×10^{-6}	1.3004×10^{-7}	3.2510×10^{-8}
0.90	1.7401×10^{-4}	6.9645×10^{-6}	1.7412×10^{-6}	6.9647×10^{-8}	1.7412×10^{-8}
1.00	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

ตารางที่ 5.3 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ $u_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,...,10$ เมื่อ i คือจำนวนฟังก์ชันฐานหลัก กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$

z	$\theta_0(z)$	$u_3(z)$	$u_4(z)$	$u_5(z)$	$u_6(z)$	$u_7(z)$	$u_8(z)$	$u_9(z)$	$u_{10}(z)$
0.00	2.480661819	2.526315789	2.451506397	2.481134346	2.480549803	2.480663178	2.480661622	2.480661819	2.480661819
0.10	2.456853556	2.501052632	2.428796533	2.457299094	2.456748301	2.456854814	2.456853374	2.456853558	2.456853556
0.20	2.385309676	2.425263158	2.359864631	2.385697745	2.385216848	2.385310765	2.385309516	2.385309677	2.385309676
0.30	2.265672310	2.298947368	2.243507222	2.265996656	2.265591829	2.265673240	2.265672171	2.265672311	2.265672310
0.40	2.097343023	2.122105263	2.078520842	2.097608516	2.097273826	2.097343801	2.097342903	2.097343024	2.097343023
0.50	1.879479816	1.894736842	1.863702022	1.879692346	1.879421526	1.879480444	1.879479717	1.879479817	1.879479816
0.60	1.610992921	1.616842105	1.597847297	1.611153499	1.610945638	1.610993402	1.610992841	1.610992922	1.610992921
0.70	1.290539343	1.288421053	1.279753199	1.290643659	1.290502798	1.290539683	1.290539282	1.290539344	1.290539343
0.80	0.916516147	0.909473684	0.908216261	0.916560842	0.916489483	0.916516342	0.916516104	0.916516147	0.916516147
0.90	0.487052437	0.480000000	0.482033017	0.487049396	0.487035921	0.487052485	0.487052411	0.487052437	0.487052437
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 5.4 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ $u_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,...,10$ เมื่อ i คือจำนวนฟังก์ชันฐานหลัก

z	$\lvert\theta_0(z)-u_3(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-u_4(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-u_5(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-u_6(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-u_7(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-u_8(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-u_9(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-u_{10}(z)\rvert$
0.00	4.5654×10^{-2}	2.9155×10^{-2}	4.7253×10^{-4}	1.1202×10^{-4}	1.3594×10^{-6}	1.9732×10^{-7}	1.8942×10^{-9}	1.9863×10^{-10}
0.10	4.4199×10^{-2}	2.8057×10^{-2}	4.4554×10^{-4}	1.0526×10^{-4}	1.2577×10^{-6}	1.8239×10^{-7}	1.7313×10^{-9}	1.8167×10^{-10}
0.20	3.9953×10^{-2}	2.5445×10^{-2}	3.8807×10^{-4}	9.2828×10^{-5}	1.0892×10^{-6}	1.6010×10^{-7}	1.5049×10^{-9}	1.5959×10^{-10}
0.30	3.3275×10^{-2}	2.2165×10^{-2}	3.2435×10^{-4}	8.0481×10^{-5}	9.2948×10^{-7}	1.3930×10^{-7}	1.2923×10^{-9}	1.3867×10^{-10}
0.40	2.4762×10^{-2}	1.8822×10^{-2}	2.6549×10^{-4}	6.9197×10^{-5}	7.7847×10^{-7}	1.1919×10^{-7}	1.0845×10^{-9}	1.1834×10^{-10}
0.50	1.5257×10^{-2}	1.5778×10^{-2}	2.1253×10^{-4}	5.8290×10^{-5}	6.2814×10^{-7}	9.9534×10^{-8}	8.8268×10^{-10}	9.8647×10^{-11}
0.60	5.8492×10^{-3}	1.3146×10^{-2}	1.6058×10^{-4}	4.7283×105	4.8098×10^{-7}	8.0550×10^{-8}	6.8524×10^{-10}	7.9429×10^{-11}
0.70	2.1183×10^{-3}	1.0786×10^{-2}	1.0432×10^{-4}	3.6545×10^{-5}	3.3966×10^{-7}	6.1823×10^{-8}	4.9074×10^{-10}	6.0634×10^{-11}
0.80	7.0425×10^{-3}	8.2999×10^{-3}	4.4695×10^{-5}	2.6664×10^{-5}	1.9527×10^{-7}	4.3399×10^{-8}	3.0043×10^{-10}	4.2051×10^{-11}
0.90	7.0524×10^{-3}	5.0194×10^{-3}	3.0413×10^{-6}	1.6516×10^{-5}	4.7991×10^{-8}	2.5902×10^{-8}	1.0432×10^{-10}	2.4064×10^{-11}
1.00	–	–	–	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

ตารางที่ 5.5 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ $v_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,...,10$ เมื่อ i คือ จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$

z	$\theta_0(z)$	$v_3(z)$	$v_4(z)$	$v_5(z)$	$v_6(z)$	$v_7(z)$	$v_8(z)$	$v_9(z)$	$v_{10}(z)$
0.00	2.480661819	2.526315789	2.480415290	2.480662470	2.480661222	2.480662081	2.480661820	2.480661819	2.480661819
0.10	2.456853556	2.501052632	2.457445965	2.456841678	2.456854726	2.456853791	2.456853558	2.456853556	2.456853556
0.20	2.385309676	2.425263158	2.387722511	2.385280625	2.385311563	2.385309891	2.385309676	2.385309676	2.385309676
0.30	2.265672310	2.298947368	2.270021708	2.265640346	2.265672173	2.265672517	2.265672329	2.265672310	2.265672310
0.40	2.097343023	2.122105263	2.103120340	2.097327269	2.097340042	2.097343202	2.097343024	2.097343023	2.097343023
0.50	1.879479816	1.894736842	1.885795186	1.879493220	1.879475596	1.879479943	1.879479819	1.879479816	1.879479816
0.60	1.610992921	1.616842105	1.616823030	1.611035420	1.610990098	1.610992996	1.610992923	1.610992921	1.610992921
0.70	1.290539343	1.288421053	1.294980651	1.290596486	1.290539535	1.290539394	1.290539343	1.290539343	1.290539343
0.80	0.916516147	0.909473684	0.919044832	0.916564432	0.916518516	0.916518516	0.916516147	0.916516147	0.916516147
0.90	0.487052437	0.480000000	0.487792355	0.487072669	0.487054161	0.487052477	0.487052438	0.487052437	0.487052437
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 5.6 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการวางตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ $v_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,...,10$ เมื่อ i คือจำนวนฟังก์ชันฐานหลัก

z	$\lvert\theta_0(z)-v_3(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_4(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_5(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_6(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_7(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_8(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_9(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-v_{10}(z)\rvert$
0.00	4.5654×10^{-2}	2.4653×10^{-4}	6.5077×10^{-7}	5.9733×10^{-7}	2.6209×10^{-7}	9.4134×10^{-10}	3.0815×10^{-12}	3.3769×10^{-12}
0.10	4.4199×10^{-2}	5.9241×10^{-4}	1.1878×10^{-5}	1.1697×10^{-6}	2.3459×10^{-7}	1.6821×10^{-9}	4.2228×10^{-12}	3.4412×10^{-12}
0.20	3.9953×10^{-2}	2.4128×10^{-3}	2.9051×10^{-5}	1.8874×10^{-6}	2.1552×10^{-7}	7.4964×10^{-11}	6.1466×10^{-12}	3.5123×10^{-12}
0.30	3.3275×10^{-2}	4.3494×10^{-3}	3.1964×10^{-5}	1.3692×10^{-7}	2.0708×10^{-7}	3.6989×10^{-10}	2.8217×10^{-12}	2.5637×10^{-12}
0.40	2.4762×10^{-2}	5.7773×10^{-3}	1.5754×10^{-5}	2.9808×10^{-6}	1.7892×10^{-7}	1.5255×10^{-9}	1.2262×10^{-11}	2.8151×10^{-12}
0.50	1.5257×10^{-2}	6.3154×10^{-3}	1.3403×10^{-5}	2.9808×10^{-6}	1.2626×10^{-7}	2.7543×10^{-9}	2.2504×10^{-12}	2.2504×10^{-12}
0.60	5.8492×10^{-3}	5.8301×10^{-3}	4.2498×10^{-5}	2.8231×10^{-6}	7.4479×10^{-8}	1.3616×10^{-9}	7.6295×10^{-12}	2.4358×10^{-12}
0.70	2.1183×10^{-3}	4.4413×10^{-3}	5.7143×10^{-5}	1.9174×10^{-7}	5.1145×10^{-8}	6.9930×10^{-10}	2.9263×10^{-12}	1.5459×10^{-12}
0.80	7.0425×10^{-3}	2.5287×10^{-3}	4.8285×10^{-5}	2.3685×10^{-6}	5.2736×10^{-8}	3.6334×10^{-10}	1.2714×10^{-11}	1.2714×10^{-11}
0.90	7.0524×10^{-3}	7.3992×10^{-4}	2.0231×10^{-5}	1.72412×10^{-6}	3.9711×10^{-8}	1.1631×10^{-9}	4.9000×10^{-13}	8.3844×10^{-13}
1.00	–	–	–	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

ตารางที่ 5.7 เปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ $q_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,...,10$ เมื่อ i คือจำนวนฟังก์ชันฐานหลัก กับผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0 = -\frac{12\left(e^{\sqrt{0.5}z}+e^{-\sqrt{0.5}z}\right)}{e^{\sqrt{0.5}}+e^{-\sqrt{0.5}}}+12$

z	$\theta_0(z)$	$q_3(z)$	$q_4(z)$	$q_5(z)$	$q_6(z)$	$q_7(z)$	$q_8(z)$	$q_9(z)$	$q_{10}(z)$
0.00	2.480661819	2.526315789	2.502553077	2.480457863	2.480675215	2.480661747	2.480661825	2.480661819	2.480661819
0.10	2.456853556	2.501052632	2.479385112	2.457299094	2.456867338	2.456853486	2.456853561	2.456853556	2.456853556
0.20	2.385309676	2.425263158	2.409055630	2.385697745	2.385321079	2.385309640	2.385309678	2.385309676	2.385309676
0.30	2.265672310	2.298947368	2.290326256	2.265996656	2.265678166	2.265672311	2.265672312	2.265672310	2.265672310
0.40	2.097343023	2.122105263	2.121958613	2.097608516	2.097343001	2.097343025	2.097343028	2.097343023	2.097343023
0.50	1.879479816	1.894736842	1.902714324	1.879692346	1.879476562	1.879479782	1.879479823	1.879479816	1.879479816
0.60	1.610992921	1.616842105	1.631355012	1.611153499	1.610990287	1.610992851	1.610992925	1.610992921	1.610992921
0.70	1.290539343	1.288421053	1.306642300	1.290643659	1.290539977	1.290539276	1.290539344	1.290539343	1.290539343
0.80	0.916516147	0.909473684	0.927337812	0.916560842	0.916519685	0.916516122	0.916516146	0.916516147	0.916516147
0.90	0.487052437	0.480000000	0.492203171	0.487049396	0.487055612	0.487052447	0.487052438	0.487052437	0.487052437
1.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000

ตารางที่ 5.8 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณค่าด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธี การจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ $v_i(z)$ สำหรับ $i=3,4,...,10$ เมื่อ i คือ จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก

z	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$	$\lvert\theta_0(z)-q(z)\rvert$
0.00	4.5654×10^{-2}	2.1891×10^{-2}	2.0396×10^{-4}	1.3396×10^{-5}	7.2271×10^{-8}	5.9526×10^{-9}	2.9670×10^{-11}	1.0751×10^{-12}
0.10	4.4199×10^{-2}	2.2532×10^{-2}	4.4554×10^{-4}	1.3782×10^{-5}	7.0208×10^{-8}	5.3041×10^{-9}	2.2669×10^{-11}	5.4756×10^{-13}
0.20	3.9953×10^{-2}	2.3746×10^{-2}	3.8807×10^{-4}	1.1404×10^{-5}	3.5911×10^{-8}	2.5028×10^{-9}	1.2013×10^{-11}	5.7687×10^{-13}
0.30	3.3275×10^{-2}	2.4654×10^{-2}	3.2435×10^{-4}	5.8557×10^{-6}	1.3958×10^{-9}	2.3131×10^{-9}	2.6952×10^{-11}	1.2488×10^{-12}
0.40	2.4762×10^{-2}	2.4616×10^{-2}	2.6549×10^{-4}	2.1289×10^{-8}	1.9440×10^{-9}	5.0078×10^{-9}	3.4644×10^{-11}	6.7502×10^{-14}
0.50	1.5257×10^{-2}	2.3235×10^{-2}	2.1253×10^{-4}	3.2548×10^{-6}	3.4302×10^{-8}	6.3774×10^{-9}	1.2704×10^{-11}	1.1076×10^{-12}
0.60	5.8492×10^{-3}	2.0362×10^{-2}	1.6058×10^{-4}	2.6344×10^{-6}	7.0490×10^{-8}	3.9769×10^{-9}	8.9884×10^{-12}	1.7697×10^{-13}
0.70	2.1183×10^{-3}	1.6103×10^{-2}	1.0432×10^{-4}	6.3344×10^{-7}	6.7783×10^{-8}	3.9769×10^{-9}	6.7679×10^{-13}	7.4984×10^{-13}
0.80	7.0425×10^{-3}	1.0822×10^{-2}	4.4695×10^{-5}	3.5376×10^{-6}	2.5056×10^{-8}	6.5777×10^{-10}	1.8102×10^{-11}	2.2371×10^{-13}
0.90	7.0524×10^{-3}	5.1507×10^{-3}	3.0413×10^{-6}	3.1744×10^{-6}	1.0218×10^{-8}	6.5777×10^{-10}	6.1497×10^{-12}	4.9649×10^{-13}
1.00	–	–	–	–	–	–	–	–

หมายเหตุ สัญลักษณ์ – แสดงถึง “ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนโดยเงื่อนไขขอบ”

สำหรับผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด จากตารางที่ 5.1 และ 5.2 จะเห็นว่าได้ว่าผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัดเมื่อจำนวนช่วงย่อย N เป็น 1000 มีความแม่นยำที่สุด แล้วตามด้วยผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัดเมื่อจำนวนช่วงย่อย N เป็น 500, 100, 50 และ 10 ตามลำดับ นั่นคือ จะได้ว่าเมื่อเราแบ่งจำนวนช่วงย่อย N มากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้น

สำหรับผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ จากตารางที่ 5.3 และ 5.4 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $u_{10}(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด และ $u_3(z)$ มีความแม่นยำน้อยที่สุด นั่นคือจะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก n มีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ โดยที่เมื่อจำนวนฟังก์ชันฐานหลักมากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย

สำหรับผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ จากตารางที่ 5.5 และ 5.6 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $v_{10}(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด และ $v_3(z)$ มีความแม่นยำน้อยที่สุด นั่นคือจะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก n มีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ โดยที่เมื่อจำนวนฟังก์ชันฐานหลักมากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย

สำหรับผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ จากตารางที่ 5.7 และ 5.8 จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยโดยประมาณ $q_{10}(z)$ มีความแม่นยำมากที่สุด และ $q_3(z)$ มีความแม่นยำน้อยที่สุด นั่นคือจะได้ว่า จำนวนฟังก์ชันฐานหลัก n มีผลต่อความแม่นยำของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ โดยที่เมื่อจำนวนฟังก์ชันฐานหลักมากขึ้น ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้ก็จะมีความแม่นยำมากขึ้นด้วย

สำหรับผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่ง โดยตารางที่ 5.3 ถึง 5.8 จะเห็นได้ว่าการประมาณค่าโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์บนช่วง $[0,1]$ และพหุนามเชบีเชฟบนช่วง $[0,1]$ จะให้ผลเฉลยโดยประมาณที่มีความแม่นยำกว่าผลเฉลยโดยประมาณจากการประมาณค่าโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ เมื่อเลือกจำนวนจุดการจัดตำแหน่งเท่ากัน

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. สามารถนำวิธีการแก้ปัญหาจากปัญหาพิเศษนี้ไปใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญรูปแบบอื่นๆ ต่อไป
2. สามารถนำวิธีการหาผลเฉลยของรูปแบบอุณหภูมิของสภาพการนำความร้อนของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุนนี้ไปใช้ในการแก้ปัญหาในรูปแบบเดียวกันโดยมีสมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการไม่เชิงเส้นต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หนังสืออ้างอิง

[1] กนกกาญจน์ ว่องวัชรพร. หัวเผาวัสดุพรุนสมรรถนะสูง. *วารสารมหาวิทยาลัยนราธิวาสราชนครินทร์. 5*(1) (2556), 109-123.

[2] กาญจนา คำนึงกิจ. *การวิเคราะห์เชิงตัวเลข.* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2554.

[3] คมสันต์ เนียมเปรม. การแก้ปัญหาสมการเชิงปริพันธ์โดยวิธีคอลโลเคชัน. *วารสารวิทยาศาสตร์ประยุกต์. 11*(1) (2556), 83-89.

[4] โทมัส, จอร์จ. *แคลคูลัส.* แปลโดย เกียตร์ฟ้า ตั้งใจจิต และคณะ. กรุงเทพฯ : เพียร์สัน เอ็ดดูเคชัน อินโดไชน่า, 2548.

[5] ปราโมทย์ เดชะอำไพ และนิพนธ์ วรรณโสภาคย์. *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม.* พิมพ์ครั้งที่ 8. กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555.

[6] พัชรินทร์ เหมโชติ. *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.* กรุงเทพฯ : มีนเซอร์วิส ซัพพลาย, 2555.

[7] *สัญกรณ์โอใหญ่.* 2556. ที่มา : http://th.wikipedia.org. ค้นเมื่อ 14 ธันวาคม 2556.

[8] วรรณพงษ์ เตรียมโพธิ์. *การหาค่าอนุพันธ์เชิงตัวเลขและการประยุกต์.* 2553. ที่มา : http://wisdom.sc.mahidol.ac.th. ค้นเมื่อ 3 กรกฎาคม 2556.

[9] Albert Ludwig University of Freiburg. *Little o's and big O's.*electures. ที่มา : informatik.uni-freiburg.de. ค้นเมื่อ 15 กุมภาพันธ์ 2557.

[10] Bahder, T.B. *Mathematica for scientists and engineers.* USA : Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[11] Bradie, B. *A friendly introduction to numerical analysis.* New Jersey : Pearson Education, 2006.

[12] Constantinides, A. *Applied numerical methods with personal computers.* Singapore : McGraw-Hill, 1987.

[13] Constantinides, A. and Mostoufi, N. *Numerical methods for chemical engineers with MATLAB applications.* New Jersey : Prentice Hall PTR, 1999.

[14] Faires, J.D. and Burden, R. *Numerical method.* 2nd ed. USA : Brooks/Cole Publishing Company, 1998.

[15] Fasshauer, Greg. *Boundary value problems : collocation.* 2014. Available at : http://www.osti.gov. Accessed January 20, 2014.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[16] Kajotoni, M. M. *A comparative study of collocation methods for the numerical solution of differential equations*. 2008. Available at : http:// researchspace. ukzn.ac.za. Accessed December 20, 2013.

[17] LeVeque R.J. *Finite difference methods for ordinary differential equations*. Philadephia : Society for industrial and applied mathematics, 2007.

[18] Massachusetts Institute of Technology. *Big oh notation*. 2003. Available at : http:// web.mit.edu. Accessed December 8, 2013,

[19] *Order of accuracy*. 2013. Available at : http://en.wikipedia.org. Accessed November 15, 2013.

[20] Pochai, N. and Jaisaardsuetrong, J. A numerical treatment of an exothermic reactions model with constant heat source in a porous medium using finite difference method. *Advanced Studies in Biology,4*(6) (2012), 287-296.

[21] Subramanian , S. and Balakotaiah, V. Convective instabilities induced by exothermic reactions occurring in a porous medium. *Phys. Fluids*, *6*(9) (1994), 2907-2922.

[22] Villadsen, J.V. and Stewart W.E. Solution of boundary value problems by orthogonal collocation, *Science Direct Chem. Eng. Sci. 22* (1967), 1483-1501.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก

การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์
และพหุนามเชบีเชฟ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับรูปแบบอุณหภูมิของสภาพการนำความร้อนของปฏิกิริยาคายความร้อนในวัสดุพรุนมีรูปแบบเป็น

$$\frac{d^2\theta_0}{dz^2}+B\phi^2\left(1-\frac{\theta_0}{B}\right)=0 \tag{1}$$

มีเงื่อนไขขอบเป็น

$$\frac{d\theta_0}{dz}=0 \quad \text{ที่ } z=0$$
$$\theta_0=0 \quad \text{ที่ } z=0$$

1. การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์

เริ่มจากการสมมติผลเฉลยโดยประมาณของ $\theta_0(z)$ ให้อยู่ในรูป

$$u_n(z)=\sum_{j=1}^{n}c_jP_{j-1}(z) \tag{2}$$

เมื่อ $P_{j-1}(z)$ คือ พหุนามเลอจองด์อันดับที่ $j-1$

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

$$u_3(z)=c_1(1)+c_2(z)+c_3\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right) \tag{3}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 และ z_3 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3=1$

เลือก $z_2=\frac{1}{2}$ จะได้ระบบสมการเมทริกซ์เป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 3+\frac{1}{8}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการ (3) เป็น

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{8\phi^2B}{3\left(8+3\phi^2\right)} \\ 0 \\ -\frac{8\phi^2B}{3\left(8+3\phi^2\right)} \end{bmatrix}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$u_3(z)=\frac{8\phi^2B}{3\left(8+3\phi^2\right)}-\frac{8\phi^2B}{3\left(8+3\phi^2\right)}\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_3(z)=\frac{4\phi^2 B}{8+3\phi^2}-\frac{4\phi^2 B}{8+3\phi^2}z^2 \tag{6}$$

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

$$u_4(z)=c_1(1)+c_2(z)+c_3\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right)+c_4\left(\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z\right) \tag{7}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 และ z_4 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3<z_4=1$

เลือก $z_2=\frac{1}{3}$ และ $z_3=\frac{2}{3}$ จะได้ระบบสมการเมทริกซ์เป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\phi^2 & -\frac{1}{3}\phi^2 & 3+\frac{1}{3}\phi^2 & 5+\frac{11}{27}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{2}{3}\phi^2 & 3-\frac{1}{6}\phi^2 & 10+\frac{7}{27}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการ (7) เป็น

$$c_1=\frac{3\left(108\phi^2+13\phi^4\right)B}{2\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}$$

$$c_2=-\frac{243\phi^4 B}{10\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}$$

$$c_3=\frac{3\left(-54\phi^2+7\phi^4\right)B}{486+234\phi^2+11\phi^4}$$

$$c_4=-\frac{81\phi^4 B}{5\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$u_4(z)=\frac{3\left(108\phi^2+13\phi^4\right)B}{2\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}-\frac{243\phi^4 B}{10\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}z$$

$$+\frac{3\left(-54\phi^2+7\phi^4\right)B}{486+234\phi^2+11\phi^4}\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{1}{2}\right)-\frac{81\phi^4 B}{5\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}\left(\frac{5}{2}z^3-\frac{3}{2}z\right) \tag{9}$$

$$u_4(z)=\left(\frac{243\phi^2 B+9\phi^4 B}{486+234\phi^2+11\phi^4}\right)+\left(\frac{-486\phi^2 B+63\phi^4 B}{2\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}\right)z^2$$

$$-\left(\frac{81\phi^4 B}{2\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}\right)z^3 \tag{10}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดตำแหน่ง 5 จุด

$$u_5(z) = c_1(1) + c_2(z) + c_3\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right) + c_4\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right) + c_5\left(\frac{35}{8}z^4 - \frac{30}{8}z^2 + \frac{3}{8}\right) \quad (11)$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 z_4 และ z_5 โดยที่ $0 = z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < z_5 = 1$

เลือก $z_2 = \frac{1}{4}$ $z_3 = \frac{1}{2}$ และ $z_4 = \frac{3}{4}$ จะได้ระบบสมการเมทริกซ์เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (12)$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{4}\phi^2 & 3+\frac{13}{32}\phi^2 & \frac{15}{4}+\frac{43}{128}\phi^2 & -\frac{135}{32}-\frac{323}{32}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 3+\frac{1}{8}\phi^2 & \frac{15}{2}+\frac{7}{16}\phi^2 & \frac{45}{8}+\frac{37}{128}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{3}{4}\phi^2 & 3+\frac{11}{32}\phi^2 & \frac{45}{4}+\frac{9}{128}\phi^2 & \frac{705}{32}+\frac{717}{2048}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการ (12) เป็น

$$c_1 = -\frac{8\left(-92160\phi^2 B - 7776\phi^4 B + 319\phi^6 B\right)}{15\left(147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6\right)}$$

$$c_2 = \frac{576\phi^6 B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}$$

$$c_3 = -\frac{8\left(129024\phi^2 B + 7200\phi^4 B + 1651\phi^6 B\right)}{21\left(147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6\right)}$$

$$c_4 = \frac{384\phi^6 B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}$$

$$c_5 = -\frac{512\left(96\phi^4 + 11\phi^6\right)B}{35\left(147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6\right)}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณอยู่ในรูป

$$u_5(z) = -\frac{8\left(-92160\phi^2 B - 7776\phi^4 B + 319\phi^6 B\right)}{15\left(147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6\right)}$$
$$+\left(\frac{576\phi^6 B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}\right)z$$
$$-\left(\frac{8\left(129024\phi^2 B + 7200\phi^4 B + 1651\phi^6 B\right)}{21\left(147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6\right)}\right)\left(\frac{3}{2}z^2 - \frac{1}{2}\right)$$
$$+\left(\frac{384\phi^6 B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}\right)\left(\frac{5}{2}z^3 - \frac{3}{2}z\right)$$
$$-\left(\frac{512\left(96\phi^4 + 11\phi^6\right)B}{35\left(147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6\right)}\right)\left(\frac{35}{8}z^4 - \frac{30}{8}z^2 + \frac{3}{8}\right) \tag{15}$$

$$u_5(z) = \frac{\left(73728\phi^2 + 4992\phi^4 + 84\phi^6\right)B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}$$
$$+\frac{\left(-73728\phi^2 + 1152\phi^4 - 340\phi^6\right)B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}z^2$$
$$+\frac{960\phi^6 B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}z^3$$
$$-\frac{\left(6144\phi^4 - 704\phi^6\right)B}{147456 + 71424\phi^2 + 4808\phi^4 + 75\phi^6}z^4 \tag{16}$$

2. การประมาณค่าผลเฉลยโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเชบีเชฟ

เริ่มจากการสมมติผลเฉลยโดยประมาณของ $\theta_0(z)$ ให้อยู่ในรูป

$$p_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_{j-1}(z) \tag{17}$$

เมื่อ $T_{j-1}(z)$ คือ พหุนามเชบีเชฟอันดับที่ $j-1$

(1) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 3 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$p_n(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j T_{j-1}(z)$$

เลือก $n = 3$ จะได้

$$p_3(z) = \sum_{j=1}^{3} c_j T_{j-1}(z) \tag{18}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$p_3(z) = c_1 T_0(z) + c_2 T_1(z) + c_3 T_2(z)$$
$$p_3(z) = c_1(1) + c_2(z) + c_3\left(2z^2 - 1\right) \tag{19}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 และ z_3 โดยที่ $0 = z_1 < z_2 < z_3 = 1$

ให้ $p_3(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0 = 0$ ที่ $z = 1$

$$p_3(1) = c_1 + c_2(1) + c_3\left(2(1)^2 - 1\right)$$
$$p_3(1) = c_1 + c_2 + c_3$$

จะได้

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \tag{20}$$

และ $p_3(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\frac{d\theta_0}{dz} = 0$ ที่ $z = 0$

$$p_3'(z) = c_2(1) + c_3(4z)$$
$$p_3'(0) = c_2 + c_3(4(0))$$

จะได้

$$c_2 = 0 \tag{21}$$

ต้องการอีก 1 สมการ

พิจารณา

$$p_3(z) = c_1 + c_2(z) + c_3\left(2z^2 - 1\right)$$
$$p_3'(z) = c_2 + c_3(4z)$$
$$p_3''(z) = 4c_3$$

แทน $p_3(z)$ $p_3'(z)$ และ $p_4''(z)$ ในสมการ (1)

$$p_3''(z) - \phi^2 p_3(z) = L(z) \tag{22}$$
$$4c_3 - \phi^2\left[c_1 + c_2 z + c_3\left(2z^2 - 1\right)\right] = L(z)$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z + c_3\left(4 + \phi^2 - 2z^2\right) = L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $p_3(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \tag{23}$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 และ c_3 ของ $p_3(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_2)\,dz = R(z_2) = 0 \tag{24}$$

จะได้

$$L(z_2) + B\phi^2 = 0$$
$$L(z_2) = -B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z + c_3\left(4 + \phi^2 - 2z^2\right) = -B\phi^2 \tag{25}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือก $z_2 = \frac{1}{2}$ จะได้

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{1}{2}\right) + c_3\left(4 + \phi^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = -B\phi^2$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{2}\phi^2 c_2 + \left(4 + \frac{1}{2}\phi^2\right)c_3 = -B\phi^2 \tag{26}$$

จากสมการ (20) (21) และ (26) จะได้ระบบสมการ

$$c_2 = 0$$

$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{2}\phi^2 c_2 + \left(4 + \frac{1}{2}\phi^2\right)c_3 = -B\phi^2$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0$$

เขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{27}$$

เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 4 + \frac{1}{2}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการ (27) เป็น

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\phi^2 B}{8 + 3\phi^2} \\ 0 \\ -\frac{2\phi^2 B}{8 + 3\phi^2} \end{bmatrix}$$

และได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบเป็น

$$p_3(z) = \frac{2\phi^2 B}{8 + 3\phi^2} - \frac{2\phi^2 B}{8 + 3\phi^2}\left(2z^2 - 1\right) \tag{30}$$

$$p_3(z) = \frac{4\phi^2 B}{8 + 3\phi^2} - \frac{4\phi^2 B}{8 + 3\phi^2} z^2 \tag{31}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 4 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$p_n(z)=\sum_{j=1}^{n}c_jT_{j-1}(z)$$

เลือก $n=4$ จะได้

$$p_4(z)=\sum_{j=1}^{4}c_jT_{j-1}(z) \tag{32}$$

$$p_4(z)=c_1T_0(z)+c_2T_1(z)+c_3T_2(z)+c_4T_3(z)$$

$$p_4(z)=c_1(1)+c_2(z)+c_3\left(2z^2-1\right)+c_4\left(4z^3-3z\right) \tag{33}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 และ z_4 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3<z_4=1$

ให้ $p_4(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$p_4(1)=c_1(1)+c_2(1)+c_3\left(2(1)^2-1\right)+c_4\left(4(1)^3-3(1)\right)$$

$$p_4(1)=c_1+c_2+c_3+c_4$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3+c_4=0 \tag{34}$$

และ $p_4(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\dfrac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$

$$p_4'(z)=c_2+c_3(4z)+c_4\left(12z^2-3\right)$$

$$p_4'(0)=c_2+c_3(4(0))+c_4\left(12(0)^2-3\right)$$

$$p_4'(0)=c_2-3c_4$$

จะได้

$$c_2-3c_4=0 \tag{35}$$

ต้องการอีก 2 สมการ

พิจารณา

$$p_4(z)=c_1+c_2z+c_3\left(2z^2-1\right)+c_4\left(4z^3-3z\right)$$

$$p_4'(z)=c_2+c_3(4z)+c_4\left(12z^2-3\right)$$

$$p_4''(z)=4c_3+c_4(24z)$$

แทน $p_4(z)$ $p_4'(z)$ และ $p_4''(z)$ ในสมการ (1)

$$p_4''(z)-\phi^2p_4(z)=L(z) \tag{36}$$

$$\left[4c_3+c_4(24z)\right]-\phi^2\left[c_1+c_2z+c_3\left(2z^2-1\right)+c_4\left(4z^3-3z\right)\right]=L(z)$$

$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2z+c_3\left(-2\phi^2z^2+4+\phi^2\right)+c_4\left(-4\phi^2z^3+\left(24+3\phi^2\right)z\right)=L(z)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $p_4(z)$

จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z)=L(z)+B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 c_4 ของ $p_4(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z-z_i)dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$
$$L(z_i) = -B\phi^2 \tag{37}$$

สำหรับ $i = 2,3$

เลือก $z_2 = \frac{1}{3}$ และ $z_3 = \frac{2}{3}$

พิจารณา $L(z_2) = -B\phi^2$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z_2 + c_3\left(-2\phi^2 z_2^{\,2} + 4 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2 z_2^{\,3} + \left(24 + 3\phi^2\right)z_2\right) = -B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{1}{3}\right) + c_3\left(-2\phi^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(24 + 3\phi^2\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right) = -B\phi^2$$
$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{3}\phi^2 c_2 + \left(4 + \frac{7}{9}\phi^2\right)c_3 + \left(8 + \frac{23}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2 \tag{38}$$

พิจารณา $L(z_3) = -B\phi^2$

$$L(z_3) = -B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z_3 + c_3\left(-2\phi^2 z_3^{\,2} + 4 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2 z_3^{\,3} + \left(24 + 3\phi^2\right)z_3\right) = -B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{2}{3}\right) + c_3\left(-2\phi^2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(24 + 3\phi^2\right)\left(\frac{2}{3}\right)\right) = -B\phi^2$$
$$-\phi^2 c_1 - \frac{2}{3}\phi^2 c_2 + \left(4 + \frac{1}{9}\phi^2\right)c_3 + \left(16 + \frac{22}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2 \tag{39}$$

จากสมการ (33) (34) (37) และ (38) จะได้ระบบสมการ

$$c_2 + 3c_4 = 0$$
$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{3}\phi^2 c_2 + \left(4 + \frac{7}{9}\phi^2\right)c_3 + \left(8 + \frac{23}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2$$
$$-\phi^2 c_1 - \frac{2}{3}\phi^2 c_2 + \left(4 + \frac{1}{9}\phi^2\right)c_3 + \left(16 + \frac{22}{27}\phi^2\right)c_4 = -B\phi^2$$
$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

หรือเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{40}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\phi^2 & -\frac{1}{3}\phi^2 & 4+\frac{7}{9}\phi^2 & 8+\frac{23}{27}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{2}{3}\phi^2 & 4-\frac{1}{9}\phi^2 & 16+\frac{22}{27}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{42}$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการ (40) เป็น

$$c_1=\frac{9\left(54\phi^2+11\phi^4\right)B}{4\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}$$

$$c_2=-\frac{243\phi^4 B}{8\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}$$

$$c_3=\frac{9\left(-54\phi^2+7\phi^4\right)B}{4\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}$$

$$c_4=-\frac{81\phi^4 B}{8\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}$$

จะได้ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเป็น

$$p_4(z)=\frac{9(54\phi^2+11\phi^4)B}{4(486+234\phi^2+11\phi^4)}-\frac{243\phi^4 B}{8(486+234\phi^2+11\phi^4)}z$$
$$+\frac{9(-54\phi^2+7\phi^4)B}{4(486+234\phi^2+11\phi^4)}(2z^2-1)-\frac{81\phi^4 B}{8(486+234\phi^2+11\phi^4)}(4z^3-3z) \tag{43}$$

$$p_4(z)=\left(\frac{243\phi^2 B+9\phi^4 B}{486+234\phi^2+11\phi^4}\right)+\left(\frac{-486\phi^2 B+63\phi^4 B}{2\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}\right)z^2-\left(\frac{81\phi^4 B}{2\left(486+234\phi^2+11\phi^4\right)}\right)z^3 \tag{44}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(3) การประมาณค่าผลเฉลยโดยเลือกจุดการจัดตำแหน่ง 5 จุด

จากผลเฉลยโดยประมาณ

$$p_n(z)=\sum_{j=1}^{n}c_jT_{j-1}(z)$$

เลือก $n=5$ จะได้

$$p_5(z)=\sum_{j=1}^{5}c_jT_{j-1}(z) \tag{45}$$

$$p_5(z)=c_1T_0(z)+c_2T_1(z)+c_3T_2(z)+c_4T_3(z)+c_5T_4(z)$$

$$p_5(z)=c_1(1)+c_2(z)+c_3\left(2z^2-1\right)+c_4\left(4z^3-3z\right)+c_5\left(8z^4-8z^2+1\right) \tag{46}$$

กำหนดจุดการจัดตำแหน่ง คือ z_1 z_2 z_3 z_4 และ z_5 โดยที่ $0=z_1<z_2<z_3<z_4<z_5=1$

ให้ $p_5(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$

$$q_5(1)=c_1(1)+c_2(1)+c_3\left(2(1)^2-1\right)+c_4\left(4(1)^3-3(1)\right)+c_5\left(8(1)^4-8(1)^2+1\right)$$

$$q_5(1)=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5$$

จะได้

$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=0 \tag{47}$$

และ $q_5(z)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ $\dfrac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$

$$p_5'(z)=c_2+c_3(4z)+c_4\left(12z^2-3\right)+c_5\left(32z^3-16z\right)$$

$$p_5'(0)=c_2+c_3(4(0))+c_4\left(12(0)^2-3\right)+c_5\left(32(0)^3-16(0)\right)$$

$$p_5'(0)=c_2-3c_4$$

จะได้

$$c_2-3c_4=0 \tag{48}$$

ต้องการอีก 3 สมการ

พิจารณา

$$p_5(z)=c_1+c_2z+c_3\left(2z^2-1\right)+c_4\left(4z^3-3z\right)+c_5\left(8z^4-8z^2+1\right)$$

$$q_5'(z)=c_2+c_3(4z)+c_4\left(12z^2-3\right)+c_5\left(32z^3-16z\right)$$

$$p_5''(z)=c_3(4)+c_4(24z)+c_5\left(96z^2-16\right)$$

แทน $p_5(z)$ $p_5'(z)$ และ $p_5''(z)$ ในสมการ (1)

$$p_5''(z)-\phi^2p_5(z)=L(z)$$

$$\left[c_3(4)+c_4(24z)+c_5\left(96z^2-16\right)\right]$$

$$-\phi^2\left[c_1+c_2z+c_3\left(2z^2-1\right)+c_4\left(4z^3-3z\right)+c_5\left(8z^4-8z^2+1\right)\right]=L(z)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z + c_3\left(4 - \frac{3\phi^2}{2}z^2 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2 z^3 + \left(24 + 3\phi^2\right)z\right)$$
$$+c_5\left(-8\phi^2 z^4 + \left(96 + 8\phi^2\right)z^2 - \left(\phi^2 + 16\right)\right) = L(z) \quad (49)$$

เมื่อ $L(z)$ คือ ผลลัพธ์ที่เกิดจากการแทนผลเฉลยแม่นตรง $\theta_0(z)$ ด้วย $p_5(z)$
จะได้เศษเหลือจากการประมาณค่าอยู่ในรูป

$$R(z) = L(z) + B\phi^2 \quad (50)$$

เราจะคำนวณค่าสัมประสิทธิ์ c_1 c_2 c_3 c_4 และ c_5 ของ $p_5(z)$ โดยทำให้พจน์ของเศษเหลือ $R(z)$ มีค่าน้อยที่สุด นั่นคือ กำหนดให้

$$\int_0^1 R(z)\delta(z - z_i)\,dz = R(z_i) = 0 \qquad i = 2,3,4$$

จะได้

$$L(z_i) + B\phi^2 = 0$$
$$L(z_i) = -B\phi^2 \quad (51)$$

สำหรับ $i = 2,3,4$

เลือก $z_2 = \frac{1}{4}$ $z_3 = \frac{1}{2}$ และ $z_4 = \frac{3}{4}$

พิจารณา $L(z_2) = -B\phi^2$

$$L(z_2) = -B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z_2 + c_3\left(4 - \frac{3\phi^2}{2}{z_2}^2 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2 {z_2}^3 + \left(24 + 3\phi^2\right)z_2\right)$$
$$+c_5\left(-8\phi^2 {z_2}^4 + \left(96 + 8\phi^2\right){z_2}^2 - \left(\phi^2 + 16\right)\right) = -B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2\left(\frac{1}{4}\right) + c_3\left(4 - \frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(24 + 3\phi^2\right)\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$
$$+c_5\left(-8\phi^2\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(96 + 8\phi^2\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\phi^2 + 16\right)\right) = -B\phi^2$$
$$-\phi^2 c_1 - \frac{1}{4}\phi^2 c_2 + \left(4 + \frac{7}{8}\phi^2\right)c_3 + \left(6 + \frac{11}{16}\phi^2\right)c_4 - \left(10 + \frac{17}{32}\phi^2\right)c_5 = -B\phi^2 \quad (52)$$

พิจารณา $L(z_3) = -B\phi^2$

$$L(z_3) = -B\phi^2$$

$$-c_1\phi^2 - c_2\phi^2 z_3 + c_3\left(4 - \frac{3\phi^2}{2}{z_3}^2 + \phi^2\right) + c_4\left(-4\phi^2 {z_3}^3 + \left(24 + 3\phi^2\right)z_3\right)$$
$$+c_5\left(-8\phi^2 {z_3}^4 + \left(96 + 8\phi^2\right){z_3}^2 - \left(\phi^2 + 16\right)\right) = -B\phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)+c_3\left(4-\frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\phi^2\right)+c_4\left(-4\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(24+3\phi^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$
$$+c_5\left(-8\phi^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(96+8\phi^2\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\phi^2+16\right)\right)=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1-\frac{1}{2}\phi^2c_2+\left(4+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_3+\left(12+4\phi^2\right)c_4+\left(8+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2 \qquad (53)$$

พิจารณา $L(z_4)=-B\phi^2$

$$L(z_4)=-B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2z_4+c_3\left(4-\frac{3\phi^2}{2}{z_4}^2+\phi^2\right)+c_4\left(-4\phi^2{z_4}^3+\left(24+3\phi^2\right)z_4\right)$$
$$+c_5\left(-8\phi^2{z_4}^4+\left(96+8\phi^2\right){z_4}^2-\left(\phi^2+16\right)\right)=-B\phi^2$$
$$-c_1\phi^2-c_2\phi^2\left(\frac{3}{4}\right)+c_3\left(4-\frac{3\phi^2}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\phi^2\right)+c_4\left(-4\phi^2\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(24+3\phi^2\right)\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$
$$+c_5\left(-8\phi^2\left(\frac{3}{4}\right)^4+\left(96+8\phi^2\right)\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\phi^2+16\right)\right)=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1-\frac{3}{4}\phi^2c_2+\left(4+\frac{1}{8}\phi^2\right)c_3+\left(18+\frac{9}{16}\phi^2\right)c_4+\left(38+\frac{31}{32}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2 \qquad (54)$$

จากสมการ (47) (48) (52) (53) และ (54) จะได้ระบบสมการ

$$c_2-3c_4=0$$
$$-\phi^2c_1-\frac{1}{4}\phi^2c_2+\left(4+\frac{7}{8}\phi^2\right)c_3+\left(6+\frac{11}{16}\phi^2\right)c_4-\left(10+\frac{17}{32}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1-\frac{1}{2}\phi^2c_2+\left(4+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_3+\left(12+4\phi^2\right)c_4+\left(8+\frac{1}{2}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2$$
$$-\phi^2c_1-\frac{3}{4}\phi^2c_2+\left(4+\frac{1}{8}\phi^2\right)c_3+\left(18+\frac{9}{16}\phi^2\right)c_4+\left(38+\frac{31}{32}\phi^2\right)c_5=-B\phi^2$$
$$c_1+c_2+c_3+c_4+c_5=0$$

หรือเขียนในรูประบบสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$A\mathbf{c}=\mathbf{b} \qquad (55)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{4}\phi^2 & 4+\frac{7}{8}\phi^2 & 6+\frac{11}{16}\phi^2 & -10-\frac{17}{32}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{1}{2}\phi^2 & 4+\frac{1}{2}\phi^2 & 12+\phi^2 & 8+\frac{1}{2}\phi^2 \\ -\phi^2 & -\frac{3}{4}\phi^2 & 4+\frac{1}{8}\phi^2 & 18+\frac{9}{16}\phi^2 & 38+\frac{31}{32}\phi^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ -B\phi^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

จะได้ผลเฉลยของระบบสมการ (55) เป็น

$$c_1=-\frac{2\left(-18432\phi^2B-1632\phi^4B+175\phi^6B\right)}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}$$

$$c_2=\frac{720\phi^6B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}$$

$$c_3=-\frac{6\left(6144\phi^2B+416\phi^4B+87\phi^6B\right)}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}$$

$$c_4=\frac{240\phi^6B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}$$

$$c_5=-\frac{8\left(96\phi^4+11\phi^6\right)B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}$$

จะได้ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาค่าขอบเป็น

$$\begin{aligned} p_5(z)=&-\frac{2\left(-18432\phi^2B-1632\phi^4B+175\phi^6B\right)}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6} \\ &+\frac{720\phi^6B}{147456+71424\phi^4+4808a^2+75\phi^6}z \\ &-\frac{6\left(6144\phi^2B+416\phi^4B+87\phi^6B\right)}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}\left(2z^2-1\right) \\ &+\frac{240\phi^6B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}\left(4z^3-3z\right) \\ &-\frac{8\left(96\phi^4+11\phi^6\right)B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}\left(8z^4-8z^2+1\right) \end{aligned} \quad (58)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$q_5(z)=\frac{\left(73728\phi^2+4992\phi^4+84\phi^6\right)B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}$$
$$+\frac{\left(-73728\phi^2+1152\phi^4-340\phi^6\right)B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}z^2$$
$$+\frac{960\phi^6 B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75a^3}z^3$$
$$-\frac{\left(6144\phi^4-704\phi^6\right)B}{147456+71424\phi^2+4808\phi^4+75\phi^6}z^4 \quad (59)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข

การใช้โปรแกรม Mathematica สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ $\frac{d^2\theta_0}{dz^2}+6\left(1-\frac{\theta_0}{12}\right) = 0$ โดยมีเงื่อนไขขอบเป็น $\frac{d\theta_0}{dz}=0$ ที่ $z=0$ และ $\theta_0=0$ ที่ $z=1$ โดยวิธีผลต่างจำกัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยแม่นตรง *)

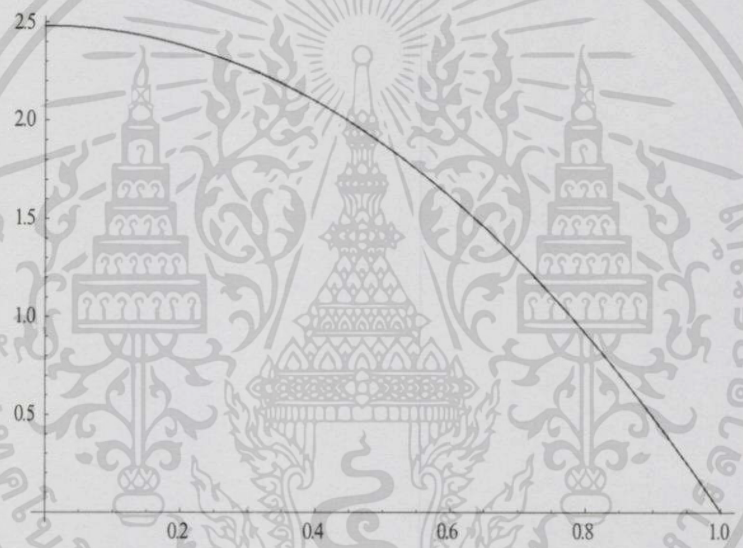
In[1] :=
```
eq = y''[z] + (6 (1 - y[z] / 12)) == 0;
bc1 = y'[0] == 0;
bc2 = y[1] == 0;
```

In[2] :=
```
DSolve[{eq, bc1, bc2}, y[z], z]
```

Out[2] =
$$\left\{ \left\{ y[z] \to -\frac{12\, e^{-\frac{z}{\sqrt{2}}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - e^{\frac{z}{\sqrt{2}}} - e^{\sqrt{2}+\frac{z}{\sqrt{2}}} + e^{\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}z} \right)}{1+e^{\sqrt{2}}} \right\} \right\}$$

In[3] :=
```
Plot[ - (12 e^(-z/Sqrt[2]) (e^(1/Sqrt[2]) - e^(z/Sqrt[2]) - e^(Sqrt[2] + z/Sqrt[2]) + e^(1/Sqrt[2] + Sqrt[2] z)))/(1 + e^Sqrt[2]), {z, 0, 1} ]
```

Out[3] =



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ N = 4 (h = 0.25) *)

(* กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ *)

In[1] := $eq = u''[z] + 6(1 - (u[z]/12)) == 0$

Out[1] = $6\left(1 - \frac{u[z]}{12}\right) + u''[z] == 0$

(* กำหนดสมการผลต่างจำกัด *)

In[2] := $fdRudes = \{u''[z] \to (w[i+1] - 2w[i] + w[i-1])/h^2,$
$u'[z] \to (w[i+1] - w[i-1])/(2h),$
$u[z] \to w[i], z \to z[i]\}$

Out[2] = $\{u''[z] \to \frac{w[-1+i] - 2w[i] + w[1+i]}{h^2},$
$u'[z] \to \frac{-w[-1+i] + w[1+i]}{2h}, u[z] \to w[i], z \to z[i]\}$

(* แทนผลเฉลยแม่นตรง u [i] ด้วยผลเฉลยโดยประมาณ w [i] *)

In[3] := $fdeq = eq /. fdRudes$

Out[3] = $6\left(1 - \frac{w[i]}{12}\right) + \frac{w[-1+i] - 2w[i] + w[1+i]}{h^2} == 0$

(* กำหนดเงื่อนไขขอบ โดย w ' [0] = 0 โดยวิธีผลต่างกลาง จะได้ w [-1] = w [1] *)

(* และ w [np - 1] = 0 *)

In[4] := $bc1 = \{w[-1] \to w[1]\};$
$bc2 = \{w[np-1] \to 0\};$
$bc = \{w[-1] \to w[1], w[np-1] \to 0\};$

Out[4] = $\{w[-1] \to w[1], w[-1+np] \to 0\}$

(* กำหนดจำนวนจุดตัด โดยมีจุดตัดจำนวน N + 1 จุด *)

In[5] := $zmin = 0;$
$zmax = 1;$
$np = 11;$
$h = (zmax - zmin)/(np - 1)$

Out[5] = $\frac{1}{4}$

(* หา grid *)

In[6] := $grid = Table[z[i] \to i\,h, \{i, -1, np - 1\}]$

Out[6] = $\{z[-1] \to -\frac{1}{4}, z[0] \to 0, z[1] \to \frac{1}{4}, z[2] \to \frac{1}{2},$
$z[3] \to \frac{3}{4}, z[4] \to 1\}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* หาระบบสมการผลต่างจำกัด *)

In[7] := linearEqs = Table [fdeq / . i → j, { j, 0, np - 2 }]

Out[7] = $\{ 6 (1 - \frac{w[0]}{12}) + 16 (w[-1] - 2 w[0] + w[1]) == 0,$

$6 (1 - \frac{w[1]}{12}) + 16 (w[0] - 2 w[1] + w[2]) == 0,$

$6 (1 - \frac{w[2]}{12}) + 16 (w[1] - 2 w[2] + w[3]) == 0,$

$6 (1 - \frac{w[3]}{12}) + 16 (w[2] - 2 w[3] + w[4]) == 0 \}$

(* แทนเงื่อนไขขอบในระบบสมการผลต่างจำกัด *)

In[8] := eqs = linearEqs / . grid / . bc

Out[8] = $\{ 6 (1 - \frac{w[0]}{12}) + 16 (-2 w[0] + 2 w[1]) == 0,$

$6 (1 - \frac{w[1]}{12}) + 16 (w[0] - 2 w[1] + w[2]) == 0,$

$6 (1 - \frac{w[2]}{12}) + 16 (w[1] - 2 w[2] + w[3]) == 0,$

$16 (w[2] - 2 w[3]) + 6 (1 - \frac{w[3]}{12}) == 0 \}$

(* หาผลเฉลย *)

In[9] := soln = Solve [eqs, Table [w [i], { i, 0, np - 2 }]] ;

Out[9] = $\{ \{ w[0] \to \frac{6540300}{2642177}, w[1] \to \frac{6147084}{2642177}, w[2] \to \frac{4955148}{2642177},$

$w[3] \to \frac{2927244}{2642177} \} \}$

In[10] := wgrid = { soln, bc2 } / / Flatten

Out[10] = $\{ w[0] \to \frac{6540300}{2642177}, w[1] \to \frac{6147084}{2642177}, w[2] \to \frac{4955148}{2642177},$

$w[3] \to \frac{2927244}{2642177}, w[4] \to 0 \}$

In[11] := wgrid / / N

Out[11] = $\{ w[0.] \to 2.47535, w[1.] \to 2.32652, w[2.] \to 1.8754,$

$w[3.] \to 1.10789, w[4.] \to 0. \}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ N = 10 (h = 0.25) *)

```
In[1] :=   eq = u''[z] + 6 (1 - (u[z] / 12)) == 0;

In[2] :=   fdRudes = {u''[z] → (w[i+1] - 2 w[i] + w[i-1]) / h^2,
           u'[z] → (w[i+1] - w[i-1]) / (2 h),
           u[z] → w[i], z → z[i]};

In[3] :=   fdeq = eq /. fdRudes;

In[4] :=   bc1 = {w[-1] → w[1]};
           bc2 = {w[np - 1] → 0};
           bc = {w[-1] → w[1], w[np - 1] → 0};

In[5] :=   zmin = 0;
           zmax = 1;
           np = 11;
           h = (zmax - zmin) / (np - 1);

In[6] :=   grid = Table[z[i] → i h, {i, -1, np - 1}];

In[7] :=   linearEqs = Table[fdeq /. i → j, {j, 0, np - 2}];

In[8] :=   eqs = linearEqs /. grid /. bc;;

In[9] :=   soln = Solve[eqs, Table[w[i], {i, 0, np - 2}]];

In[10] :=  wgrid = {soln, bc2} // Flatten
```

$$\text{Out[10]} = \{ w[0] \to \frac{640152814139116881648012}{258146067844926406804001},$$

$$w[1] \to \frac{634008814139116881648012}{258146067844926406804001},$$

$$w[2] \to \frac{7618050446641958412}{3194837537220163201},$$

$$w[3] \to \frac{584672340539116881648012}{258146067844926406804001},$$

$$w[4] \to \frac{541233184571116881648012}{258146067844926406804001},$$

$$w[5] \to \frac{485011430455276881648012}{258146067844926406804001},$$

$$w[6] \to \frac{5145059707441958412}{3194837537220163201},$$

$$w[7] \to \frac{333030374163167985648012}{258146067844926406804001},$$

$$w[8] \to \frac{236511166705438545168012}{258146067844926406804001},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$w[9] \to \frac{1256857510105407130056 12}{258146067844926406804001}, w[10] \to 0\}$$

In[11] := wgrid / / N

Out[11] = { { w [0.] → 2.47981, w [1.] → 2.45601, w [2.] → 2.38449,
w [3.] → 2.26489, w [4.] → 2.09662, w [5.] → 1.87883,
w [6.] → 1.61043, w [7.] → 1.29009, w [8.] → 0.916191,
w [9.] → 0.486878, w[10] → 0 } }

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ N = 20 ( h = 0.05 ) *)
In[1] :=    eq = u''[z] + 6 (1 - (u[z] / 12)) == 0;
In[2] :=    fdRudes = {u''[z] → (w[i+1] - 2 w[i] + w[i-1]) / h^2,
            u'[z] → (w[i+1] - w[i-1]) / (2 h),
            u[z] → w[i], z → z[i]};
In[3] :=    fdeq = eq /. fdRudes;
In[4] :=    bc1 = {w[-1] → w[1]};
            bc2 = {w[np - 1] → 0};
            bc = {w[-1] → w[1], w[np - 1] → 0};
In[5] :=    zmin = 0;
            zmax = 1;
            np = 21;
            h = (zmax - zmin) / (np - 1);
In[6] :=    grid = Table[z[i] → i h, {i, -1, np - 1}];
In[7] :=    linearEqs = Table[fdeq /. i → j, {j, 0, np - 2}];
In[8] :=    eqs = linearEqs /. grid /. bc;;
In[9] :=    soln = Solve[eqs, Table[w[i], {i, 0, np - 2}]];
In[10] :=   wgrid = {soln, bc2} // Flatten // N
Out[10] =   {w[0.] → 2.48045, w[1.] → 2.4745, w[2.] → 2.45664,
            w[3.] → 2.42686, w[4.] → 2.3851, w[5.] → 2.33133,
            w[6.] → 2.26548, w[7.] → 2.18745, w[8.] → 2.09716,
            w[9.] → 1.99449, w[10.] → 1.87932, w[11.] → 1.75149,
            w[12.] → 1.61085, w[13.] → 1.45723, w[14.] → 1.29043,
            w[15.] → 1.11024, w[16.] → 0.916435, w[17.] → 0.708779,
            w[18.] → 0.487009, w[19.] → 0.250848, w[20] → 0}
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ N = 50 *)
In[1] :=    eq = u''[z] + 6 (1 - (u[z] / 12)) == 0;
In[2] :=    fdRudes = {u''[z] → (w[i+1] - 2 w[i] + w[i-1]) / h^2,
            u'[z] → (w[i+1] - w[i-1]) / (2 h),
            u[z] → w[i], z → z[i]};
In[3] :=    fdeq = eq /. fdRudes;
In[4] :=    bc1 = {w[-1] → w[1]};
            bc2 = {w[np - 1] → 0};
            bc = {w[-1] → w[1], w[np - 1] → 0};
In[5] :=    zmin = 0;
            zmax = 1;
            np = 51;
            h = (zmax - zmin) / (np - 1);
In[6] :=    grid = Table[z[i] → i h, {i, -1, np - 1}];
In[7] :=    linearEqs = Table[fdeq /. i → j, {j, 0, np - 2}];
In[8] :=    eqs = linearEqs /. grid /. bc;;
In[9] :=    soln = Solve[eqs, Table[w[i], {i, 0, np - 2}]];
In[10] :=   wgrid = {soln, bc2} // Flatten // N
Out[10] =   {w[0.] → 2.48063, w[1.] → 2.47968, w[2.] → 2.47682,
            w[3.] → 2.47206, w[4.] → 2.46539, w[5.] → 2.45682,
            w[6.] → 2.44634, w[7.] → 2.43395, w[8.] → 2.41964,
            w[9.] → 2.40342, w[10.] → 2.38528, w[11.] → 2.36521,
            w[12.] → 2.34322, w[13.] → 2.3193, w[14.] → 2.29344,
            w[15.] → 2.26564, w[16.] → 2.23589, w[17.] → 2.20419,
            w[18.] → 2.17054, w[19.] → 2.13491, w[20.] → 2.09731,
            w[21.] → 2.05774, w[22.] → 2.01617, w[23.] → 1.97261,
            w[24.] → 1.92704, w[25.] → 1.87945, w[26.] → 1.82985,
            w[27.] → 1.7782, w[28.] → 1.72452, w[29.] → 1.66878,
            w[30.] → 1.61097, w[31.] → 1.55109, w[32.] → 1.48911,
            w[33.] → 1.42503, w[34.] → 1.35884, w[35.] → 1.29052,
            w[39.] → 0.995678, w[40.] → 0.916503, w[41.] → 0.835111,
            w[42.] → 0.751487, w[43.] → 0.665612, w[44.] → 0.577471,
            w[45.] → 0.487045, w[46.] → 0.394317, w[47.] → 0.299268,
            w[48.] → 0.201878, w[49.] → 0.102129, w[50.] → 0.}
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ N = 100 *)
In[1] :=    eq = u''[z] + 6 (1 - (u[z] / 12)) == 0;
In[2] :=    fdRudes = {u''[z] → (w[i+1] - 2 w[i] + w[i-1]) / h^2,
            u'[z] → (w[i+1] - w[i-1]) / (2 h),
            u[z] → w[i], z → z[i]};
In[3] :=    fdeq = eq /. fdRudes;
In[4] :=    bc1 = {w[-1] → w[1]};
            bc2 = {w[np - 1] → 0};
            bc = {w[-1] → w[1], w[np - 1] → 0};
In[5] :=    zmin = 0;
            zmax = 1;
            np = 101;
            h = (zmax - zmin) / (np - 1);
In[6] :=    grid = Table[z[i] → i h, {i, -1, np - 1}];
In[7] :=    linearEqs = Table[fdeq /. i → j, {j, 0, np - 2}];
In[8] :=    eqs = linearEqs /. grid /. bc;
In[9] :=    soln = Solve[eqs, Table[w[i], {i, 0, np - 2}]];
In[10] :=   wgrid = {soln, bc2} // Flatten // N
Out[10] =   {w[0.] → 2.48065, w[1.] → 2.4802, w[2.] → 2.4797,
            w[3.] → 2.47851, w[4.] → 2.47685, w[5.] → 2.4747,
            w[6.] → 2.47208, w[7.] → 2.46899, w[8.] → 2.4652,
            w[9.] → 2.46137, w[10.] → 2.45685, w[11.] → 2.45184
            w[12.] → 2.44636, w[13.] → 2.44041, w[14.] → 2.43397,
            w[15.] → 2.42706, w[16.] → 2.41966, w[17.] → 2.41179,
            w[18.] → 2.40344, w[19.] → 2.39461, w[20.] → 2.3853,
            w[21.] → 2.37551, w[22.] → 2.36524, w[23.] → 2.35448,
            w[24.] → 2.34325, w[25.] → 2.33153, w[26.] → 2.31932,
            w[27.] → 2.30664, w[28.] → 2.29346, w[29.] → 2.27981,
            w[30.] → 2.26566, w[31.] → 2.25103, w[32.] → 2.23592,
            w[33.] → 2.22031, w[34.] → 2.20422, w[35.] → 2.18763,
            w[36.] → 2.170561, w[37.] → 2.15299, w[38.] → 2.13493,
            w[39.] → 2.11638, w[40.] → 2.09734, w[41.] → 2.07779,
            w[42.] → 2.05776, w[43.] → 2.03722, w[44.] → 2.01619,
            w[45.] → 1.99466, w[46.] → 1.97263, w[47.] → 1.95009,
            w[48.] → 1.92706, w[49.] → 1.90352, w[50.] → 1.87947,
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [51.] → 1.85492, w [52.] → 1.82987, w [53.] → 1.8043,
w [54.] → 1.77822, w [55.] → 1.75164, w [56.] → 1.72454,
w [57.] → 1.69692, w [58.] → 1.6688, w [59.] → 1.64015,
w [60.] → 1.61099, w [61.] → 1.5813, w [62.] → 1.5511,
w [63.] → 1.52038, w [64.] → 1.48913, w [65.] → 1.45735,
w [66.] → 1.42505, w [67.] → 1.39222, w [68.] → 1.35886,
w [69.] → 1.32496, w [70.] → 1.29053, w [71.] → 1.25557,
w [72.] → 1.22007, w [73.] → 1.18403, w [74.] → 1.14745,
w [75.] → 1.11033, w [76.] → 1.07266, w [77.] → 1.03445,
w [78.] → 0.995689, w [79.] → 0.956377, w [80.] → 0.916513,
w [81.] → 0.876095, w [82.] → 0.83512, w [83.] → 0.793588,
w [84.] → 0.751495, w [85.] → 0.708839, w [86.] → 0.66562,
w [87.] → 0.621833, w [88.] → 0.577477, w [89.] → 0.532551,
w [90.] → 0.487051, w [91.] → 0.440975, w [92.] → 0.394321,
w [93.] → 0.347087, w [94.] → 0.299271, w [95.] → 0.250869,
w [96.] → 0.20188, w [97.] → 0.152301, w [98.] → 0.10213,
w [99.] → 0.05137, w [100.] → 0. }

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ N = 500 *)
In[1] :=    eq = u''[z] + 6 (1 - (u[z] / 12)) == 0;
In[2] :=    fdRudes = {u''[z] → (w[i+1] - 2 w[i] + w[i-1]) / h^2,
            u'[z] → (w[i+1] - w[i-1]) / (2 h),
            u[z] → w[i], z → z[i]};
In[3] :=    fdeq = eq /. fdRudes;
In[4] :=    bc1 = {w[-1] → w[1]};
            bc2 = {w[np - 1] → 0};
            bc = {w[-1] → w[1], w[np - 1] → 0};
In[5] :=    zmin = 0;
            zmax = 1;
            np = 501;
            h = (zmax - zmin) / (np - 1);
In[6] :=    grid = Table[z[i] → i h, {i, -1, np - 1}];
In[7] :=    linearEqs = Table[fdeq /. i → j, {j, 0, np - 2}];
In[8] :=    eqs = linearEqs /. grid /. bc;;
In[9] :=    soln = Solve[eqs, Table[w[i], {i, 0, np - 2}]];
In[10] :=   wgrid = {soln, bc2} // Flatten // N
Out[10] =   {w[0.] → 2.48066, w[1.] → 2.48065, w[2.] → 2.48062,
            w[3.] → 2.48058, w[4.] → 2.48051, w[5.] → 2.48042,
            w[6.] → 2.48032, w[7.] → 2.4802, w[8.] → 2.48005,
            w[9.] → 2.47989, w[10.] → 2.47971, w[11.] → 2.47951,
            w[12.] → 2.47929, w[13.] → 2.47905, w[14.] → 2.4788,
            w[15.] → 2.47852, w[16.] → 2.47822, w[17.] → 2.47791,
            w[18.] → 2.47758, [19.] → 2.47722, w[20.] → 2.47685,
            w[21.] → 2.47646, w[22.] → 2.47605, w[23.] → 2.47563,
            w[24.] → 2.47518, w[25.] → 2.47471, w[26.] → 2.47423,
            w[27.] → 2.47372, w[28.] → 2.4732, w[29.] → 2.47265,
            w[30.] → 2.47209, w[31.] → 2.47151, w[32.] → 2.47091,
            w[33.] → 2.47029, w[34.] → 2.46966, w[35.] → 2.469,
            w[36.] → 2.46832, w[37.] → 2.46763, w[38.] → 2.46691,
            w[39.] → 2.46618, w[40.] → 2.46543, w[41.] → 2.46465,
            w[42.] → 2.46386, w[43.] → 2.46305, w[44.] → 2.46223,
            w[45.] → 2.46138, w[46.] → 2.46051, w[47.] → 2.45963,
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [48.] → 2.45872, w [49.] → 2.4578, w [50.] → 2.45685,
w [51.] → 2.45589, w [52.] → 2.45491, w [53.] → 2.45391,
w [54.] → 2.45289, w [55.] → 2.45185, w [56.] → 2.45079,
w [57.] → 2.44972, w [58.] → 2.44862, w [59.] → 2.44751,
w [60.] → 2.44637, w [61.] → 2.44522, w [62.] → 2.44405,
w [63.] → 2.44285, w [64.] → 2.44164, w [65.] → 2.44041,
w [66.] → 2.43917, w [67.] → 2.4379, w [68.] → 2.43661,
w [69.] → 2.4353, w [70.] → 2.43398, w [71.] → 2.43263,
w [72.] → 2.43127, w [73.] → 2.42989, w [74.] → 2.42849,
w [75.] → 2.42706, w [76.] → 2.42562, w [77.] → 2.42417,
w [78.] → 2.42269, w [79.] → 2.42119, w [80.] → 2.41967,
w [81.] → 2.41814, w [82.] → 2.41658, w [83.] → 2.41501,
w [84.] → 2.41341, w [85.] → 2.4118, w [86.] → 2.41017,
w [87.] → 2.40852, w [88.] → 2.40685, w [89.] → 2.40516,
w [90.] → 2.40345, w [91.] → 2.40172, w [92.] → 2.39998,
w [93.] → 2.39821, w [94.] → 2.39642, w [95.] → 2.39462,
w [96.] → 2.3928, w [97.] → 2.39095, w [98.] → 2.38909,
w [99.] → 2.38721, w [100.] → 2.38531, w [101.] → 2.38339,
w [102.] → 2.38145, w [103.] → 2.37949, w [104.] → 2.37751,
w [105.] → 2.37552, w [106.] → 2.3735, w [107.] → 2.37147,
w [108.] → 2.36941, w [109.] → 2.36734, w [110.] → 2.36525,
w [111.] → 2.36313, w [112.] → 2.361, w [113.] → 2.35885,
w [114.] → 2.35668, w [115.] → 2.35449, w [116.] → 2.35228,
w [117.] → 2.35005, w [118.] → 2.34781, w [119.] → 2.34554,
w [120.] → 2.34325, w [121.] → 2.34095, w [122.] → 2.33862,
w [123.] → 2.33628, w [124.] → 2.33392, w [125.] → 2.33153,
w [126.] → 2.32913, w [127.] → 2.32671, w [128.] → 2.32427,
w [129.] → 2.32181, w [130.] → 2.31933, w [131.] → 2.31683,
w [132.] → 2.31431, w [133.] → 2.31178, w [134.] → 2.30922,
w [135.] → 2.30664, w [136.] → 2.30405, w [137.] → 2.30143,
w [138.] → 2.2988, w [139.] → 2.29615, w [140.] → 2.29347,
w [141.] → 2.29078, w [142.] → 2.28807, w [143.] → 2.28534,
w [144.] → 2.28259, w [145.] → 2.27982, w [146.] → 2.27703,
w [147.] → 2.27422, w [148.] → 2.27139, w [149.] → 2.26854,
w [150.] → 2.26567, w [151.] → 2.26278, w [152.] → 2.25988,
w [153.] → 2.25695, w [154.] → 2.25401, w [155.] → 2.25104,
w [156.] → 2.24806, w [157.] → 2.24505, w [158.] → 2.24203,
w [159.] → 2.23899, w [160.] → 2.23592, w [161.] → 2.23284,
w [162.] → 2.22974, w [163.] → 2.22662, w [164.] → 2.22348,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [165.] → 2.22032, w [166.] → 2.21714, w [167.] → 2.21395,
w [168.] → 2.21072, w [169.] → 2.20748, w [170.] → 2.20422,
w [171.] → 2.20095, w [172.] → 2.19765, w [173.] → 2.19433,
w [174.] → 2.191, w [175.] → 2.18764, w [176.] → 2.18427,
w [177.] → 2.18087, w [178.] → 2.17745, w [179.] → 2.17402,
w [180.] → 2.17057, w [181.] → 2.16709, w [182.] → 2.1636,
w [183.] → 2.16009, w [184.] → 2.15655, w [185.] → 2.153,
w [186.] → 2.14943, w [187.] → 2.14584, w [188.] → 2.14222,
w [189.] → 2.13859, w [190.] → 2.13494, w [191.] → 2.13127,
w [192.] → 2.12758, w [193.] → 2.12387, w [194.] → 2.12014,
w [195.] → 2.11639, w [196.] → 2.11262, w [197.] → 2.10883,
w [198.] → 2.10502, w [199.] → 2.10119, w [200.] → 2.09734,
w [201.] → 2.09347, w [202.] → 2.08959, w [203.] → 2.08568,
w [204.] → 2.08175, w [205.] → 2.0778, w [206.] → 2.07383,
w [207.] → 2.06985, w [208.] → 2.06584, w [209.] → 2.06181,
w [210.] → 2.05776, w [211.] → 2.0537, w [212.] → 2.04961,
w [213.] → 2.0455, w [214.] → 2.04138, w [215.] → 2.03723,
w [216.] → 2.03306, w [217.] → 2.02888, w [218.] → 2.02467,
w [219.] → 2.02044, w [220.] → 2.0162, w [221.] → 2.01193,
w [222.] → 2.00764, w [223.] → 2.00334, w [224.] → 1.99901,
w [225.] → 1.99467, w [226.] → 1.9903, w [227.] → 1.98591,
w [228.] → 1.98151, w [229.] → 1.97708, w [230.] → 1.97263,
w [231.] → 1.96817, w [232.] → 1.96368, w [233.] → 1.95917,
w [234.] → 1.95465, w [235.] → 1.9501, w [236.] → 1.94553,
w [237.] → 1.94095, w [238.] → 1.93634, w [239.] → 1.93171,
w [240.] → 1.92706, w [241.] → 1.9224, w [242.] → 1.91771,
w [243.] → 1.913, w [244.] → 1.90827, w [245.] → 1.90352,
w [246.] → 1.89876, w [247.] → 1.89397, w [248.] → 1.88916,
w [249.] → 1.88433, w [250.] → 1.87948, w [251.] → 1.87461,
w [252.] → 1.86972, w [253.] → 1.86481, w [254.] → 1.85988,
w [255.] → 1.85493, w [256.] → 1.84996, w [257.] → 1.84497,
w [258.] → 1.83996, w [259.] → 1.83492, w [260.] → 1.82987,
w [273.] → 1.76234, w [274.] → 1.757, w [275.] → 1.75164,
w [276.] → 1.74626, w [277.] → 1.74086, w [278.] → 1.73544,
w [279.] → 1.73, w [280.] → 1.72454, w [281.] → 1.71906,
w [282.] → 1.71356, w [283.] → 1.70804, w [284.] → 1.70249,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [261.] → 1.8248, w [262.] → 1.81971, w [263.] → 1.81459,
w [264.] → 1.80946, w [265.] → 1.80431, w [266.] → 1.79913,
w [267.] → 1.79394, w [268.] → 1.78872, w [269.] → 1.78349,
w [270.] → 1.77823, w [271.] → 1.77295, w [272.] → 1.76766,
w [285.] → 1.69693, w [286.] → 1.69134, w [287.] → 1.68574,
w [288.] → 1.68011, w [289.] → 1.67447, w [290.] → 1.6688,
w [291.] → 1.66311, w [292.] → 1.6574, w [293.] → 1.65168,
w [294.] → 1.64593, w [295.] → 1.64016, w [296.] → 1.63436,
w [309.] → 1.55719, w [310.] → 1.55111, w [311.] → 1.545,
w [312.] → 1.53888, w [313.] → 1.53273, w [314.] → 1.52657,
w [315.] → 1.52038, w [316.] → 1.51417, w [317.] → 1.50794,
w [318.] → 1.50169, w [319.] → 1.49542, w [320.] → 1.48913,
w [321.] → 1.48282, w [322.] → 1.47648, w [323.] → 1.47013,
w [324.] → 1.46375, w [325.] → 1.45736, w [326.] → 1.45094,
w [327.] → 1.4445, w [328.] → 1.43804, w [329.] → 1.43156,
w [330.] → 1.42505, w [331.] → 1.41853, w [332.] → 1.41198,
w [333.] → 1.40542, w [334.] → 1.39883, w [335.] → 1.39222,
w [336.] → 1.38559, w [337.] → 1.37894, w [338.] → 1.37227,
w [339.] → 1.36558, w [340.] → 1.35886, w [341.] → 1.35212,
w [342.] → 1.34537, w [343.] → 1.33859, w [344.] → 1.33179,
w [297.] → 1.62855, w [298.] → 1.62272, w [299.] → 1.61687,
w [300.] → 1.61099, w [301.] → 1.6051, w [302.] → 1.59918,
w [303.] → 1.59325, w [304.] → 1.58729, w [305.] → 1.58131,
w [306.] → 1.57531, w [307.] → 1.56929, w [308.] → 1.56325,
w [345.] → 1.324966, w [346.] → 1.318123, w [347.] → 1.311259,
w [348.] → 1.304374, w [349.] → 1.297467, w [350.] → 1.290539,
w [351.] → 1.283589, w [352.] → 1.276618, w [353.] → 1.269625,
w [354.] → 1.262611, w [355.] → 1.255576, w [356.] → 1.248519,
w [357.] → 1.24144, w [358.] → 1.23434, w [359.] → 1.22722,
w [360.] → 1.22008, w [361.] → 1.21291, w [362.] → 1.20573,
w [363.] → 1.19852, w [364.] → 1.19129, w [365.] → 1.18404,
w [366.] → 1.17676, w [367.] → 1.16947, w [368.] → 1.16215,
w [369.] → 1.15482, w [370.] → 1.14746, w [371.] → 1.14008,
w [372.] → 1.13267, w [373.] → 1.12525, w [374.] → 1.1178,
w [375.] → 1.11033, w [376.] → 1.10284, w [377.] → 1.09533,
w [378.] → 1.0878, w [379.] → 1.08024, w [380.] → 1.07267,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [381.] → 1.06507, w [382.] → 1.05745, w [383.] → 1.0498,
w [384.] → 1.04214, w [385.] → 1.03445, w [386.] → 1.02675,
w [387.] → 1.01902, w [388.] → 1.01126, w [389.] → 1.00349,
w [390.] → 0.995692, w [391.] → 0.987874, w [392.] → 0.980033,
w [393.] → 0.972171, w [394.] → 0.964287, w [395.] → 0.956380,
w [396.] → 0.948452, w [397.] → 0.940501, w [398.] → 0.932528,
w [399.] → 0.924533, w [400.] → 0.916516, w [401.] → 0.908477,
w [402.] → 0.900415, w [403.] → 0.892332, w [404.] → 0.884226,
w [405.] → 0.876098, w [406.] → 0.867947, w [407.] → 0.859775,
w [408.] → 0.85158, w [409.] → 0.843363, w [410.] → 0.835123,
w [411.] → 0.826861, w [412.] → 0.818577, w [413.] → 0.810271,
w [414.] → 0.801942, w [415.] → 0.79359, w [416.] → 0.785217,
w [417.] → 0.776821, w [418.] → 0.768402, w [419.] → 0.759961,
w [420.] → 0.751497, w [421.] → 0.743011, w [422.] → 0.734503,
w [423.] → 0.725972, w [424.] → 0.717418, w [425.] → 0.708842,
w [426.] → 0.700243, w [427.] → 0.691622, w [428.] → 0.682978,
w [429.] → 0.674311, w [430.] → 0.665622, w [431.] → 0.65691,
w [432.] → 0.648175, w [433.] → 0.639418, w [434.] → 0.630638,
w [435.] → 0.621835, w [436.] → 0.61301, w [437.] → 0.604161,
w [438.] → 0.59529, w [439.] → 0.586396, w [440.] → 0.577479,
w [441.] → 0.56854, w [442.] → 0.559577, w [443.] → 0.550592,
w [444.] → 0.541584, w [445.] → 0.532553, w [446.] → 0.523498,
w [447.] → 0.514421, w [448.] → 0.505321, w [449.] → 0.496198,
w [450.] → 0.487052, w [451.] → 0.477883, w [452.] → 0.468691,
w [453.] → 0.459476, w [454.] → 0.450238, w [455.] → 0.440977,
w [456.] → 0.431692, w [457.] → 0.422384, w [458.] → 0.413054,
w [459.] → 0.4037, w [460.] → 0.394323, w [461.] → 0.384922,
w [462.] → 0.375499, w [463.] → 0.366052, w [464.] → 0.356582,
w [465.] → 0.347089, w [466.] → 0.337572, w [467.] → 0.328032,
w [468.] → 0.318469, w [469.] → 0.308882, w [470.] → 0.299272,
w [471.] → 0.289638, w [472.] → 0.279982, w [473.] → 0.270301,
w [474.] → 0.260597, w [475.] → 0.25087, w [476.] → 0.241119,
w [477.] → 0.231345, w [478.] → 0.221547, w [479.] → 0.211726,
w [480.] → 0.201881, w [481.] → 0.192012, w [482.] → 0.18212,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [483.] → 0.172204, w [484.] → 0.162265,
w [485.] → 0.152302, w [486.] → 0.142315,
w [487.] → 0.132304, w [488.] → 0.12227,
w [489.] → 0.112212, w [490.] → 0.10213,
w [491.] → 0.0920247,w [492.] → 0.0818952,
w [493.] → 0.071742, w [494.] → 0.0615648,
w [495.] → 0.0513639, w [496.] → 0.041139,
w [497.] → 0.0308901, w [498.] → 0.0206174,
w [499.] → 0.0103207, w [500.] → 0. }

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีผลต่างจำกัด เมื่อ N = 1000 *)
In[1] :=    eq = u''[z] + 6 (1 - (u[z] / 12)) == 0;
In[2] :=    fdRudes = {u''[z] → (w[i+1] - 2 w[i] + w[i-1]) / h^2,
            u'[z] → (w[i+1] - w[i-1]) / (2 h),
            u[z] → w[i], z → z[i]};
In[3] :=    fdeq = eq /. fdRudes;
In[4] :=    bc1 = {w[-1] → w[1]};
            bc2 = {w[np - 1] → 0};
            bc = {w[-1] → w[1], w[np - 1] → 0};
In[5] :=    zmin = 0;
            zmax = 1;
            np = 1001;
            h = (zmax - zmin) / (np - 1);
In[6] :=    grid = Table[z[i] → i h, {i, -1, np - 1}];
In[7] :=    linearEqs = Table[fdeq /. i → j, {j, 0, np - 2}];
In[8] :=    eqs = linearEqs /. grid /. bc;;
In[9] :=    soln = Solve[eqs, Table[w[i], {i, 0, np - 2}]];
In[10] :=   wgrid = {soln, bc2} // Flatten // N
Out[10] =   {w[0.] → 2.48066, w[1.] → 2.48066, w[2.] → 2.48065,
            w[3.] → 2.48064, w[4.] → 2.48062, w[5.] → 2.4806,
            w[6.] → 2.48058, w[7.] → 2.48055, w[8.] → 2.48051,
            w[9.] → 2.48047, w[10.] → 2.48042, w[11.] → 2.48037,
            w[12.] → 2.48032, w[13.] → 2.48026, w[14.] → 2.4802,
            w[15.] → 2.48013, w[16.] → 2.48005, w[17.] → 2.47997,
            w[18.] → 2.47989, w[19.] → 2.4798, w[20.] → 2.47971,
            w[21.] → 2.47961, w[22.] → 2.47951, w[23.] → 2.4794,
            w[24.] → 2.47929, w[25.] → 2.47917, w[26.] → 2.47905,
            w[27.] → 2.47893, w[28.] → 2.4788, w[29.] → 2.47866,
            w[30.] → 2.47852, w[31.] → 2.47837, w[32.] → 2.47822,
            w[33.] → 2.47807, w[34.] → 2.47791, w[35.] → 2.47775,
            w[36.] → 2.47758, w[37.] → 2.4774, w[38.] → 2.47723,
            w[39.] → 2.47704, w[40.] → 2.47685, w[41.] → 2.47666,
            w[42.] → 2.47646, w[43.] → 2.47626, w[44.] → 2.47605,
            w[45.] → 2.47584, w[46.] → 2.47563, w[47.] → 2.4754,
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [48.] → 2.47518, w [49.] → 2.47495, w [50.] → 2.47471,
w [51.] → 2.47447, w [52.] → 2.47423, w [53.] → 2.47398,
w [54.] → 2.47372, w [55.] → 2.47346, w [56.] → 2.4732,
w [57.] → 2.47293, w [58.] → 2.47265, w [59.] → 2.47238,
w [60.] → 2.47209, w [61.] → 2.4718, w [62.] → 2.47151,
w [63.] → 2.47121, w [64.] → 2.47091, w [65.] → 2.47061,
w [66.] → 2.47029, w [67.] → 2.46998, w [68.] → 2.46966,
w [69.] → 2.46933, w [70.] → 2.469, w [71.] → 2.46866,
w [72.] → 2.46832, w [73.] → 2.46798, w [74.] → 2.46763,
w [75.] → 2.46727, w [76.] → 2.46691, w [77.] → 2.46655,
w [78.] → 2.46618, w [79.] → 2.46581, w [80.] → 2.46543,
w [81.] → 2.46504, w [82.] → 2.46466, w [83.] → 2.46426,
w [84.] → 2.46386, w [85.] → 2.46346, w [86.] → 2.46306,
w [87.] → 2.46264, w [88.] → 2.46223, w [89.] → 2.4618,
w [90.] → 2.46138, w [91.] → 2.46095, w [92.] → 2.46051,
w [93.] → 2.46007, w [94.] → 2.45963, w [95.] → 2.45918,
w [96.] → 2.45872, w [97.] → 2.45826, w [98.] → 2.4578,
w [99.] → 2.45733, w [100.] → 2.45685, w [101.] → 2.45637,
w [102.] → 2.45589, w [103.] → 2.4554, w [104.] → 2.45491,
w [105.] → 2.45441, w [106.] → 2.45391, w [107.] → 2.4534,
w [108.] → 2.45289, w [109.] → 2.45237, w [110.] → 2.45185,
w [111.] → 2.45132, w [112.] → 2.45079, w [113.] → 2.45026,
w [114.] → 2.44972, w [115.] → 2.44917, w [116.] → 2.44862,
w [117.] → 2.44807, w [118.] → 2.44751, w [119.] → 2.44694,
w [120.] → 2.44637, w [121.] → 2.4458, w [122.] → 2.44522,
w [123.] → 2.44463, w [124.] → 2.44405, w [125.] → 2.44345,
w [126.] → 2.44285, w [127.] → 2.44225, w [128.] → 2.44164,
w [129.] → 2.44103, w [130.] → 2.44041, w [131.] → 2.43979,
w [132.] → 2.43917, w [133.] → 2.43853, w [134.] → 2.4379,
w [135.] → 2.43726, w [136.] → 2.43661, w [137.] → 2.43596,
w [138.] → 2.4353, w [139.] → 2.43464, w [140.] → 2.43398,
w [141.] → 2.43331, w [142.] → 2.43263, w [143.] → 2.43196,
w [144.] → 2.43127, w [145.] → 2.43058, w [146.] → 2.42989,
w [147.] → 2.42919, w [148.] → 2.42849, w [149.] → 2.42778,
w [150.] → 2.42707, w [151.] → 2.42635, w [152.] → 2.42563,
w [153.] → 2.4249, w [154.] → 2.42417, w [155.] → 2.42343,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [156.] → 2.42269, w [157.] → 2.42194, w [158.] → 2.42119,
w [159.] → 2.42043, w [160.] → 2.41967, w [161.] → 2.41891,
w [162.] → 2.41814, w [163.] → 2.41736, w [164.] → 2.41658,
w [165.] → 2.4158, w [166.] → 2.41501, w [167.] → 2.41421,
w [168.] → 2.41341, w [169.] → 2.41261, w [170.] → 2.4118,
w [171.] → 2.41099, w [172.] → 2.41017, w [173.] → 2.40935,
w [174.] → 2.40852, w [175.] → 2.40769, w [176.] → 2.40685,
w [177.] → 2.40601, w [178.] → 2.40516, w [179.] → 2.40431,
w [168.] → 2.41341, w [169.] → 2.41261, w [170.] → 2.4118,
w [171.] → 2.41099, w [172.] → 2.41017, w [173.] → 2.40935,
w [174.] → 2.40852, w [175.] → 2.40769, w [176.] → 2.40685,
w [177.] → 2.40601, w [178.] → 2.40516, w [179.] → 2.40431,
w [168.] → 2.41341, w [169.] → 2.41261, w [170.] → 2.4118,
w [171.] → 2.41099, w [172.] → 2.41017, w [173.] → 2.40935,
w [174.] → 2.40852, w [175.] → 2.40769, w [176.] → 2.40685,
w [177.] → 2.40601, w [178.] → 2.40516, w [179.] → 2.40431,
w [204.] → 2.38145, w [205.] → 2.38047, w [206.] → 2.37949,
w [207.] → 2.37851, w [208.] → 2.37751, w [209.] → 2.37652,
w [210.] → 2.37552, w [211.] → 2.37451, w [212.] → 2.3735,
w [213.] → 2.37249, w [214.] → 2.37147, w [215.] → 2.37044,
w [216.] → 2.36941, w [217.] → 2.36838, w [218.] → 2.36734,
w [219.] → 2.36629, w [220.] → 2.36525, w [221.] → 2.36419,
w [222.] → 2.36313, w [223.] → 2.36207, w [224.] → 2.361,
w [225.] → 2.3593, w [226.] → 2.35885, w [227.] → 2.35777,
w [228.] → 2.35668, w [229.] → 2.3559, w [230.] → 2.35449,
w [231.] → 2.35339, w [232.] → 2.35228, w [233.] → 2.35117,
w [234.] → 2.35005, w [235.] → 2.34893, w [236.] → 2.34781,
w [237.] → 2.34668, w [238.] → 2.34554, w [239.] → 2.3444,
w [240.] → 2.34325, w [241.] → 2.3421, w [242.] → 2.34095,
w [243.] → 2.33979, w [244.] → 2.33862, w [245.] → 2.33745,
w [246.] → 2.33628, w [247.] → 2.3351, w [248.] → 2.3392,
w [249.] → 2.33273, w [250.] → 2.33153, w [251.] → 2.33034,
w [252.] → 2.32913, w [253.] → 2.32792, w [254.] → 2.32671,
w [255.] → 2.32549, w [256.] → 2.32427, w [257.] → 2.32304,
w [258.] → 2.32181, w [259.] → 2.32057, w [260.] → 2.31933,
w [261.] → 2.31808, w [262.] → 2.31683, w [263.] → 2.31558,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [264.] → 2.31431, w [265.] → 2.31305, w [266.] → 2.31178,
w [267.] → 2.3105, w [268.] → 2.30922, w [269.] → 2.30793,
w [270.] → 2.30664, w [271.] → 2.30535, w [272.] → 2.30405,
w [273.] → 2.30274, w [274.] → 2.30143, w [275.] → 2.30012,
w [276.] → 2.2988, w [277.] → 2.29747, w [278.] → 2.29615,
w [279.] → 2.29481, w [280.] → 2.29347, w [281.] → 2.29213,
w [288.] → 2.28259, w [289.] → 2.2812, w [290.] → 2.27982,
w [291.] → 2.27842, w [292.] → 2.27703, w [293.] → 2.27562,
w [294.] → 2.27422, w [295.] → 2.2728, w [296.] → 2.27139,
w [297.] → 2.26997, w [298.] → 2.26854, w [299.] → 2.26711,
w [300.] → 2.26567, w [301.] → 2.26423, w [302.] → 2.26279,
w [303.] → 2.26133, w [304.] → 2.25988, w [305.] → 2.25842,
w [318.] → 2.23899, w [319.] → 2.23746, w [320.] → 2.23593,
w [321.] → 2.23439, w [322.] → 2.23284, w [323.] → 2.23129,
w [324.] → 2.22974, w [325.] → 2.22818, w [326.] → 2.22662,
w [327.] → 2.22505, w [328.] → 2.22348, w [329.] → 2.2219,
w [330.] → 2.22032, w [331.] → 2.21873, w [332.] → 2.21714,
w [333.] → 2.21554, w [334.] → 2.21394, w [335.] → 2.21233,
w [336.] → 2.21072, w [337.] → 2.2091, w [338.] → 2.20748,
w [339.] → 2.20586, w [340.] → 2.20423, w [341.] → 2.20259,
w [342.] → 2.20095, w [343.] → 2.1993, w [344.] → 2.19765,
w [345.] → 2.19599, w [346.] → 2.19433, w [347.] → 2.19267,
w [348.] → 2.191, w [349.] → 2.18932, w [350.] → 2.18764,
w [351.] → 2.18596, w [352.] → 2.18427, w [353.] → 2.18257,
w [354.] → 2.18087, w [355.] → 2.17916, w [356.] → 2.17745,
w [357.] → 2.17574, w [358.] → 2.17402, w [359.] → 2.1723,
w [360.] → 2.17057, w [361.] → 2.16883, w [362.] → 2.16709,
w [363.] → 2.16535, w [364.] → 2.1636, w [365.] → 2.16184,
w [366.] → 2.16009, w [367.] → 2.15832, w [368.] → 2.15655,
w [369.] → 2.15478, w [370.] → 2.153, w [371.] → 2.15122,
w [372.] → 2.14943, w [373.] → 2.14763, w [374.] → 2.14584,
w [375.] → 2.14403, w [376.] → 2.14222, w [377.] → 2.14041,
w [378.] → 2.13859, w [379.] → 2.13677, w [380.] → 2.13494,
w [381.] → 2.13311, w [382.] → 2.13127, w [383.] → 2.12943,
w [384.] → 2.12758, w [385.] → 2.12573, w [386.] → 2.12387,
w [387.] → 2.12201, w [388.] → 2.12014, w [389.] → 2.11827,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [390.] → 2.11639, w [391.] → 2.11451, w [392.] → 2.11262,
w [393.] → 2.11073, w [394.] → 2.10883, w [395.] → 2.10693,
w [396.] → 2.10502, w [397.] → 2.10311, w [398.] → 2.10119,
w [399.] → 2.09927, w [400.] → 2.09734, w [401.] → 2.09541,
w [402.] → 2.09347, w [403.] → 2.09153, w [404.] → 2.08959,
w [405.] → 2.08763, w [406.] → 2.08568, w [407.] → 2.08372,
w [408.] → 2.08175, w [409.] → 2.07978, w [410.] → 2.0778,
w [411.] → 2.07582, w [412.] → 2.07383, w [413.] → 2.07184,
w [414.] → 2.06985, w [415.] → 2.06785, w [416.] → 2.06584,
w [417.] → 2.06383, w [418.] → 2.06181, w [419.] → 2.05979,
w [420.] → 2.05776, w [421.] → 2.05573, w [422.] → 2.0537,
w [423.] → 2.05166, w [424.] → 2.04961, w [425.] → 2.04756,
w [426.] → 2.0455, w [427.] → 2.04344, w [428.] → 2.04138,
w [429.] → 2.03931, w [430.] → 2.03723, w [431.] → 2.03515,
w [432.] → 2.03306, w [433.] → 2.03097, w [434.] → 2.0288,
w [435.] → 2.02678, w [436.] → 2.02467, w [437.] → 2.02256,
w [438.] → 2.02044, w [439.] → 2.01832, w [440.] → 2.0162,
w [441.] → 2.01407, w [442.] → 2.01193, w [443.] → 2.00979,
w [444.] → 2.00764, w [445.] → 2.00549, w [446.] → 2.00334,
w [447.] → 2.00118, w [448.] → 1.99901, w [449.] → 1.99684,
w [450.] → 1.99467, w [451.] → 1.99248, w [452.] → 1.9903,
w [453.] → 1.98811, w [454.] → 1.98591, w [455.] → 1.98371,
w [456.] → 1.98151, w [457.] → 1.979293, w [458.] → 1.97708,
w [459.] → 1.97486, w [460.] → 1.97263, w [461.] → 1.9704,
w [462.] → 1.96817, w [463.] → 1.96593, w [464.] → 1.96368,
w [465.] → 1.96143, w [466.] → 1.95917, w [467.] → 1.95691,
w [468.] → 1.95465, w [469.] → 1.95238, w [470.] → 1.9501,
w [471.] → 1.94782, w [472.] → 1.94553, w [473.] → 1.94324,
w [474.] → 1.94095, w [475.] → 1.93864, w [476.] → 1.93634,
w [477.] → 1.93403, w [478.] → 1.93171, w [479.] → 1.92939,
w [480.] → 1.92706, w [481.] → 1.92473, w [482.] → 1.9224,
w [483.] → 1.92005, w [484.] → 1.91771, w [485.] → 1.91536,
w [486.] → 1.913, w [487.] → 1.91064, w [488.] → 1.90827,
w [489.] → 1.9059, w [490.] → 1.90352, w [491.] → 1.90114,
w [492.] → 1.89876, w [493.] → 1.89636, w [494.] → 1.89397,
w [495.] → 1.89157, w [496.] → 1.88916, w [497.] → 1.88675,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [498.] → 1.88433, w [499.] → 1.88191, w [500.] → 1.87948,
w [501.] → 1.87705, w [502.] → 1.87461, w [503.] → 1.87217,
w [504.] → 1.86972, w [505.] → 1.86727, w [506.] → 1.86481,
w [507.] → 1.86235, w [508.] → 1.85988, w [509.] → 1.85741,
w [510.] → 1.85493, w [511.] → 1.85245, w [512.] → 1.84996,
w [513.] → 1.84747, w [514.] → 1.84497, w [515.] → 1.84246,
w [516.] → 1.83996, w [517.] → 1.83744, w [518.] → 1.83492,
w [519.] → 1.8324, w [520.] → 1.82987, w [521.] → 1.82734,
w [522.] → 1.8248, w [523.] → 1.82226, w [524.] → 1.81971,
w [525.] → 1.81715, w [526.] → 1.81459, w [527.] → 1.81203,
w [528.] → 1.80946, w [529.] → 1.80688, w [530.] → 1.80431,
w [531.] → 1.80172, w [532.] → 1.79913, w [533.] → 1.79654,
w [534.] → 1.79394, w [535.] → 1.79133, w [536.] → 1.78872,
w [537.] → 1.78611, w [538.] → 1.78349, w [539.] → 1.78086,
w [540.] → 1.77823, w [541.] → 1.77559, w [542.] → 1.77295,
w [543.] → 1.77031, w [544.] → 1.76766, w [545.] → 1.7645,
w [546.] → 1.76234, w [547.] → 1.75967, w [548.] → 1.757,
w [549.] → 1.75432, w [550.] → 1.75164, w [551.] → 1.74896,
w [552.] → 1.74626, w [553.] → 1.74357, w [554.] → 1.74086,
w [555.] → 1.73816, w [556.] → 1.73544, w [557.] → 1.73273,
w [558.] → 1.73, w [559.] → 1.72728, w [560.] → 1.72454,
w [561.] → 1.7218, w [562.] → 1.71906, w [563.] → 1.71631,
w [564.] → 1.71356, w [565.] → 1.7108, w [566.] → 1.70804,
w [567.] → 1.70527, w [568.] → 1.70249, w [569.] → 1.69971,
w [570.] → 1.69693, w [571.] → 1.69414, w [572.] → 1.69134,
w [573.] → 1.68854, w [574.] → 1.68574, w [575.] → 1.68293,
w [576.] → 1.68011, w [577.] → 1.67729, w [578.] → 1.67447,
w [579.] → 1.67164, w [580.] → 1.6688, w [581.] → 1.66596,
w [582.] → 1.66311, w [583.] → 1.66026, w [584.] → 1.6574,
w [585.] → 1.65454, w [586.] → 1.65168, w [587.] → 1.6488,
w [588.] → 1.64593, w [589.] → 1.64304, w [590.] → 1.64016,
w [591.] → 1.63726, w [592.] → 1.63436, w [593.] → 1.63146,
w [594.] → 1.62855, w [595.] → 1.62564, w [596.] → 1.62272,
w [597.] → 1.6198, w [598.] → 1.61687, w [599.] → 1.61393,
w [600.] → 1.61099, w [601.] → 1.60805, w [602.] → 1.6051,
w [603.] → 1.60214, w [604.] → 1.59918, w [605.] → 1.59622,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [606.] → 1.59325, w [607.] → 1.59027, w [608.] → 1.58729,
w [609.] → 1.5843, w [610.] → 1.58131, w [611.] → 1.57831,
w [612.] → 1.57531, w [613.] → 1.5723, w [614.] → 1.56929,
w [615.] → 1.56627, w [616.] → 1.56325, w [617.] → 1.56022,
w [618.] → 1.55719, w [619.] → 1.55415, w [620.] → 1.55111,
w [621.] → 1.54806, w [622.] → 1.545, w [623.] → 1.54194,
w [624.] → 1.53888, w [625.] → 1.53581, w [626.] → 1.53273,
w [627.] → 1.52965, w [628.] → 1.52657, w [629.] → 1.52348,
w [630.] → 1.52038, w [631.] → 1.51728, w [632.] → 1.51417,
w [633.] → 1.51106, w [634.] → 1.50794, w [635.] → 1.50482,
w [636.] → 1.50169, w [637.] → 1.49856, w [638.] → 1.49542,
w [639.] → 1.49228, w [640.] → 1.48913, w [641.] → 1.48598,
w [642.] → 1.48282, w [643.] → 1.47965, w [644.] → 1.47648,
w [645.] → 1.47331, w [646.] → 1.47013, w [647.] → 1.46694,
w [648.] → 1.46375, w [649.] → 1.46056, w [650.] → 1.45736,
w [651.] → 1.45414, w [652.] → 1.45094, w [653.] → 1.44772,
w [654.] → 1.4445, w [655.] → 1.44127, w [656.] → 1.43804,
w [657.] → 1.4348, w [658.] → 1.43156, w [659.] → 1.42831,
w [660.] → 1.42505, w [661.] → 1.42179, w [662.] → 1.41853,
w [663.] → 1.41526, w [664.] → 1.41198, w [665.] → 1.4087,
w [666.] → 1.40542, w [667.] → 1.40213, w [668.] → 1.39883,
w [669.] → 1.39553, w [670.] → 1.39222, w [671.] → 1.38891,
w [672.] → 1.38559, w [673.] → 1.38227, w [674.] → 1.37894,
w [675.] → 1.37561, w [676.] → 1.37227, w [677.] → 1.36892,
w [678.] → 1.36558, w [679.] → 1.36222, w [680.] → 1.35886,
w [681.] → 1.3555, w [682.] → 1.35212, w [683.] → 1.34875,
w [684.] → 1.34537, w [685.] → 1.34198, w [686.] → 1.33859,
w [687.] → 1.33519, w [688.] → 1.33179, w [689.] → 1.32838,
w [690.] → 1.32497, w [691.] → 1.32155, w [692.] → 1.31812,
w [693.] → 1.31469, w [694.] → 1.31126, w [695.] → 1.30782,
w [696.] → 1.30437, w [697.] → 1.30092, w [698.] → 1.29747,
w [699.] → 1.29401, w [700.] → 1.29054, w [701.] → 1.28707,
w [702.] → 1.28359, w [703.] → 1.28011, w [704.] → 1.27662,
w [705.] → 1.27312, w [706.] → 1.26963, w [707.] → 1.26612,
w [708.] → 1.26261, w [709.] → 1.2591, w [710.] → 1.25558,
w [711.] → 1.25205, w [712.] → 1.24852, w [713.] → 1.24498,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [714.] → 1.24144, w [715.] → 1.23789, w [716.] → 1.23434,
w [717.] → 1.23078, w [718.] → 1.22722, w [719.] → 1.22365,
w [720.] → 1.22008, w [721.] → 1.2165, w [722.] → 1.21291,
w [723.] → 1.20932, w [724.] → 1.20573, w [725.] → 1.20212,
w [726.] → 1.19852, w [727.] → 1.19491, w [728.] → 1.19129,
w [729.] → 1.18767, w [730.] → 1.18404, w [731.] → 1.1804,
w [732.] → 1.17676, w [733.] → 1.17312, w [734.] → 1.16947,
w [735.] → 1.16581, w [736.] → 1.16215, w [737.] → 1.15849,
w [738.] → 1.15482, w [739.] → 1.15114, w [740.] → 1.14746,
w [741.] → 1.14377, w [742.] → 1.14008, w [743.] → 1.13638,
w [744.] → 1.13267, w [745.] → 1.12896, w [746.] → 1.12525,
w [747.] → 1.12153, w [748.] → 1.1178, w [749.] → 1.11407,
w [750.] → 1.11033, w [751.] → 1.10659, w [752.] → 1.10284,
w [753.] → 1.09909, w [754.] → 1.09533, w [755.] → 1.09157,
w [756.] → 1.0878, w [757.] → 1.08402, w [758.] → 1.08024,
w [759.] → 1.07646, w [760.] → 1.07267, w [761.] → 1.06887,
w [762.] → 1.06507, w [763.] → 1.06126, w [764.] → 1.05745,
w [765.] → 1.05363, w [766.] → 1.0498, w [767.] → 1.04598,
w [768.] → 1.04214, w [769.] → 1.0383, w [770.] → 1.03445,
w [771.] → 1.0306, w [772.] → 1.02674, w [773.] → 1.02288,
w [774.] → 1.01902, w [775.] → 1.01514, w [776.] → 1.01126,
w [777.] → 1.00738, w [778.] → 1.00349, w [779.] → 0.999593,
w [780.] → 0.995692, w [781.] → 0.991786, w [782.] → 0.987874,
w [783.] → 0.983956, w [784.] → 0.980034, w [785.] → 0.976105,
w [786.] → 0.972171, w [787.] → 0.968232, w [788.] → 0.964287,
w [789.] → 0.960336, w [790.] → 0.95638, w [791.] → 0.952419,
w [792.] → 0.948452, w [793.] → 0.944479, w [794.] → 0.940501,
w [795.] → 0.936517, w [796.] → 0.932528, w [797.] → 0.928533,
w [798.] → 0.924533, w [799.] → 0.920527, w [800.] → 0.916516,
w [801.] → 0.912499, w [802.] → 0.908477, w [803.] → 0.904449,
w [804.] → 0.900415, w [805.] → 0.896376, w [806.] → 0.892332,
w [807.] → 0.888282, w [808.] → 0.884226, w [809.] → 0.880165,
w [810.] → 0.876098, w [811.] → 0.872025, w [812.] → 0.867947,
w [813.] → 0.863864, w [814.] → 0.859775, w [815.] → 0.85568,
w [816.] → 0.85158, w [817.] → 0.847474, w [818.] → 0.843363,
w [819.] → 0.839246, w [820.] → 0.835123, w [821.] → 0.830995,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [822.] → 0.826861, w [823.] → 0.822722, w [824.] → 0.818577,
w [825.] → 0.814427, w [826.] → 0.810271, w [827.] → 0.806109,
w [828.] → 0.801942, w [829.] → 0.797769, w [830.] → 0.793591,
w [831.] → 0.789406, w [832.] → 0.785217, w [833.] → 0.781022,
w [834.] → 0.776821, w [835.] → 0.772614, w [836.] → 0.768402,
w [837.] → 0.764184, w [838.] → 0.759961, w [839.] → 0.755732,
w [840.] → 0.751497, w [841.] → 0.747257, w [842.] → 0.743011,
w [843.] → 0.73876, w [844.] → 0.734503, w [845.] → 0.73024,
w [846.] → 0.725972, w [847.] → 0.721698, w [848.] → 0.717418,
w [849.] → 0.713133, w [850.] → 0.708842, w [851.] → 0.704545,
w [852.] → 0.700243, w [853.] → 0.695935, w [854.] → 0.691622,
w [855.] → 0.687303, w [856.] → 0.682978, w [857.] → 0.678647,
w [858.] → 0.674311, w [859.] → 0.669969, w [860.] → 0.665622,
w [861.] → 0.661269, w [862.] → 0.65691, w [863.] → 0.652545,
w [864.] → 0.648175, w [865.] → 0.643799, w [866.] → 0.639418,
w [867.] → 0.635031, w [868.] → 0.630638, w [869.] → 0.626239,
w [870.] → 0.621835, w [871.] → 0.617425, w [872.] → 0.61301,
w [873.] → 0.608588, w [874.] → 0.604161, w [875.] → 0.599729,
w [876.] → 0.59529, w [877.] → 0.590846, w [878.] → 0.586396,
w [879.] → 0.581941, w [880.] → 0.577479, w [881.] → 0.573012,
w [882.] → 0.56854, w [883.] → 0.564061, w [884.] → 0.559577,
w [885.] → 0.555088, w [886.] → 0.550592, w [887.] → 0.546091,
w [888.] → 0.541584, w [889.] → 0.537071, w [890.] → 0.532553,
w [891.] → 0.528028, w [892.] → 0.523499, w [893.] → 0.518963,
w [894.] → 0.514421,w [895.] → 0.509874,w [896.] → 0.505321,
w [897.] → 0.500763,w [898.] → 0.496198,w [899.] → 0.491628,
w [900.] → 0.487052,w [901.] → 0.482471,w [902.] → 0.477883,
w [903.] → 0.47329,w [904.] → 0.468691,w [905.] → 0.464087,
w [906.] → 0.459476, w [907.] → 0.45486, w [908.] → 0.450238,
w [909.] → 0.44561, w [910.] → 0.440977, w [911.] → 0.436337,
w [912.] → 0.431692, w [913.] → 0.427041, w [914.] → 0.422385,
w [915.] → 0.417722, w [916.] → 0.413054, w [917.] → 0.40838,
w [918.] → 0.4037, w [919.] → 0.399014, w [920.] → 0.394323,
w [921.] → 0.389626, w [922.] → 0.384922, w [923.] → 0.380214,
w [924.] → 0.375499, w [925.] → 0.370778, w [926.] → 0.366052,
w [927.] → 0.36132, w [928.] → 0.356582, w [929.] → 0.351838,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w [930.] → 0.347089, w [931.] → 0.342333, w [932.] → 0.337572,
w [933.] → 0.332805, w [934.] → 0.328032, w [935.] → 0.323253,
w [936.] → 0.318469, w [937.] → 0.313678, w [938.] → 0.308882,
w [939.] → 0.30408, w [940.] → 0.299272, w [941.] → 0.294458,
w [942.] → 0.289638, w [943.] → 0.284813, w [944.] → 0.279982,
w [945.] → 0.275144, w [946.] → 0.270301, w [947.] → 0.265452,
w [948.] → 0.260597, w [949.] → 0.255737, w [950.] → 0.25087,
w [951.] → 0.245998, w [952.] → 0.241119, w [953.] → 0.236235,
w [966.] → 0.172204, w [967.] → 0.167238, w [968.] → 0.162265,
w [969.] → 0.157286, w [970.] → 0.152302, w [971.] → 0.147311,
w [972.] → 0.142315, w [973.] → 0.137313, w [974.] → 0.132304,
w [975.] → 0.12729, w [976.] → 0.12227, w [977.] → 0.117244,
w [978.] → 0.112212,w [979.] → 0.107174,w [980.] → 0.10213,
w [981.] → 0.0970805,w [982.] → 0.0920247,
w [983.] → 0.0869629,w [984.] → 0.0818952,
w [985.] → 0.0768216,w [986.] → 0.071742,
w [987.] → 0.0666564,w [988.] → 0.0615649,
w [989.] → 0.0564673, w [990.] → 0.0513639,
w [991.] → 0.0462544, w [992.] → 0.041139,
w [993.] → 0.0360175, w [994.] → 0.0308901,
w [995.] → 0.0257568, w [996.] → 0.0206174,
w [997.] → 0.015472, w [998.] → 0.0103207,
w [999.] → 0.00516334, w [1000.] → 0. }

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ค

การใช้โปรแกรม Mathematica สำหรับการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ $\frac{d^2\theta_0}{dz^2}+6\left(1-\frac{\theta_0}{12}\right)=0$ โดยมีเงื่อนไขขอบเป็น $\frac{d\theta_0}{dz}=0$ เมื่อ $z=0$ และ $\theta_0=0$ เมื่อ $z=1$ โดยวิธีการจัดตำแหน่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)

(* เมื่อ n = 3 *)

(* กำหนดผลเฉลยโดยประมาณ u3 [z] *)

In[1] := u3 [z_] := c1 + c2 z + c3 ((3 / 2) z ^ 2 - 1 / 2)

(* ให้ u3 [z] สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบ *)

In[2] := Eq1 = u3 ' [0] == 0 ;

In[3] := Eq2 = u3 [1] == 0 ;

(* แทน u3 [z] ในสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาค่าขอบ *)

In[4] := L [z_] := u3 '' [z] - u3 [z] / 2 ;

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 2 *)

In[5] := Eq3 = L [1 / 2] == -6 ;

(* หาผลเฉลยของระบบสมการเพื่อหาค่าตัวไม่ทราบค่า c1 c2 และ c3 *)

In[6] := Solve [Eq1 && Eq2 && Eq3 , { c1, c2, c3 }]

Out[6] := $\left\{ \left\{ c1 \to \frac{32}{19}, c2 \to 0, c3 \to -\frac{32}{19} \right\} \right\}$

(* แทนค่า c1 c2 และ c3 เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ u3 [z] *)

In[7] := u3 [c1_ , c2_ , c3_] = u3 [z] ;

In[8] := $u3\left[\frac{32}{19}, 0, -\frac{32}{19} \right]$

Out[8] := $\frac{32}{19} - \frac{32}{19}\left(-\frac{1}{2} + \frac{3 z^2}{2} \right)$

In[9] := u3 [z_] = Expand [%]

Out[9] := $\frac{48}{19} - \frac{48 z^2}{19}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)

(* เมื่อ n = 4 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ u4 [z] *)

```
In[1] := u4[z_] := c1 + c2 z + c3 ((3/2) z^2 - 1/2)
         + c4 ((5/2) z^3 - (3/2) z)
In[2] := Eq1 = u4'[0] == 0;
In[3] := Eq2 = u4[1] == 0;
In[4] := L[z_] := u4''[z] - u4[z]/2;
```

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 3 และ 2 / 3 *)

```
In[5] := Eq3 = L[1/3] == -6;
In[6] := Eq4 = L[2/3] == -6;
In[7] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4, {c1, c2, c3, c4}]
```

$$\text{Out[7]} = \left\{ \left\{ c1 \to \frac{4122}{2423}, c2 \to -\frac{1458}{12115}, c3 \to -\frac{3636}{2423}, c4 \to -\frac{972}{12115} \right\} \right\}$$

```
In[8] := u4[c1_, c2_, c3_, c4_] = u4[z];
In[9] := u4[4122/2423, -1458/12115, -3636/2423, -972/12115]
```

$$\text{Out[9]} = \frac{4122}{2423} - \frac{1458z}{12115} - \frac{3636\left(-\frac{1}{2} + \frac{3z^2}{2}\right)}{2423} - \frac{972\left(-\frac{3z}{2} + \frac{5z^3}{2}\right)}{12115}$$

```
In[10] := u4[z_] = Expand[%]
```

$$\text{Out[10]} = \frac{5940}{2423} - \frac{5454z^2}{2423} - \frac{486z^3}{2423}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)

(* เมื่อ n = 5 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ u5 [z] *)

In[1] := $u5[z_] := c1 + c2\,z + c3\,((3/2)\,z\,\hat{}\,2 - 1/2) + c4\,((5/2)\,z\,\hat{}\,3 - (3/2)\,z) + c5\,((35/8)\,z\,\hat{}\,4 - (15/4)\,z\,\hat{}\,2 + 3/8)$

In[2] := $Eq1 = u5'[0] == 0;$

In[3] := $Eq2 = u5[1] == 0;$

In[4] := $L[z_] := u5''[z] - u5[z]/2;$

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 4 , 1 / 2 และ 3 / 4 *)

In[5] := $Eq3 = L[1/4] == -6;$

In[6] := $Eq4 = L[1/2] == -6;$

In[7] := $Eq5 = L[3/4] == -6;$

In[8] := $Solve[Eq1 \&\& Eq2 \&\& Eq3 \&\& Eq4 \&\& Eq5, \{c1, c2, c3, c4, c5\}]$

Out[8] := $\left\{\left\{c1 \to \frac{12283936}{7375175}, c2 \to \frac{6912}{1475035}, c3 \to -\frac{2432672}{1475035},\right.\right.$

In[9] := $u5[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_] = u5[z];$

In[10] := $u5\left[\frac{12283936}{7375175}, \frac{6912}{1475035}, -\frac{2432672}{1475035}, \frac{4608}{1475035}, -\frac{178176}{7375175}\right]$

Out[10] := $\frac{12283936}{7375175} + \frac{6912\,z}{1475035} - \frac{2432672\left(-\frac{1}{2} + \frac{3\,z^2}{2}\right)}{1475035} + \frac{4608\left(-\frac{3\,z}{2} + \frac{5\,z^3}{2}\right)}{1475035} - \frac{178176\left(\frac{3}{8} - \frac{15\,z^2}{4} + \frac{35\,z^4}{8}\right)}{7375175}$

In[11] := $u5[z_] = Expand[\%]$

Out[11] := $\frac{731952}{295007} - \frac{3515376\,z^2}{1475035} + \frac{2304\,z^3}{295007} - \frac{155904\,z^4}{1475035}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)

(* เมื่อ n = 6 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ u6 [z] *)

```
In[1] := u6[z_] := c1 + c2 z + c3 ((3/2) z^2 - 1/2) + c4 ((5/2) z^3
         - (3/2) z) + c5 ((35/8) z^4 - (15/4) z^2 + 3/8) +
         c6 ((63/8) z^5 - (70/8) z^3 + (15/8) z)

In[2] := Eq1 = u6'[0] == 0;

In[3] := Eq2 = u6[1] == 0;

In[4] := L[z_] := u6''[z] - u6[z]/2;
```

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 5 , 2 / 5, 3 / 5 และ 4 / 5 *)

```
In[5] := Eq3 = L[1/5] == -6;

In[6] := Eq4 = L[2/5] == -6;

In[7] := Eq5 = L[3/5] == -6;

In[8] := Eq6 = L[4/5] == -6;

In[9] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6, {c1, c2, c3,
         c4, c5, c6}]
```

$$\text{Out[9]} := \left\{\left\{ c1 \to \frac{4702229000}{2817464697}, c2 \to -\frac{9272750}{2191361431}, c3 \to -\frac{32327882000}{19722252879}, c4 \to -\frac{30652250}{8452394091}, c5 \to -\frac{140012000}{6574084293}, c6 \to -\frac{38125000}{59166758637} \right\}\right\}$$

```
In[10] := u6[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_] = u6[z];

In[11] := u6[4702229000/2817464697, -9272750/2191361431,
          -32327882000/19722252879, -30652250/8452394091,
          140012000/6574084293, -38125000/59166758637]
```

$$\text{Out[11]} := \frac{4702229000}{2817464697} - \frac{9272750\, z}{2191361431} - \frac{32327882000\left(-\frac{1}{2} + \frac{3 z^2}{2}\right)}{19722252879} - \frac{30652250\left(-\frac{3 z}{2} + \frac{5 z^3}{2}\right)}{8452394091} - \frac{140012000\left(\frac{3}{8} - \frac{15 z^2}{4} + \frac{35 z^4}{8}\right)}{6574084293} - \frac{38125000\left(\frac{15 z}{8} - \frac{35 z^3}{4} + \frac{63 z^5}{8}\right)}{59166758637}$$

```
In[12] := u6[z_] = Expand[%]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Out[12]} := \frac{2329620500}{939154899} - \frac{2234128000\,z^2}{939154899} - \frac{1073125\,z^3}{313051633} - \frac{87507500\,z^4}{939154899} - \frac{4765625\,z^5}{939154899}$$

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)

(* เมื่อ n = 7 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ u7 [z] *)

```
In[1] := u7[z_] := c1 + c2 z + c3 ((3/2) z^2 - 1/2) + c4 ((5/2) z^3
        - (3/2) z) + c5 ((35/8) z^4 - (15/4) z^2 + 3/8) +
        c6 ((63/8) z^5 - (70/8) z^3 + (15/8) z) +
        c7 ((231/16) z^6 - (315/16) z^4 + (105/16) z^2 - 5/16)
In[2] := Eq1 = u7'[0] == 0;
In[3] := Eq2 = u7[1] == 0;
In[4] := L[z_] := u7''[z] - u7[z]/2;
```

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 6 , 2 / 6 , 3 / 6 , 4 / 6 และ 5 / 6 *)

```
In[5] := Eq3 = L[1/6] == -6;
In[6] := Eq4 = L[2/6] == -6;
In[7] := Eq5 = L[3/6] == -6;
In[8] := Eq6 = L[4/6] == -6;
In[9] := Eq7 = L[5/6] == -6;
In[10] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7,
          {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7}]
```

$$\text{Out[10]} := \left\{\left\{ c1 \to \frac{8490761518630}{5092635713921}, c2 \to \frac{94843710}{727519387703}, c3 \to -\frac{8373128003572}{5092635713921}, c4 \to \frac{86762340}{727519387703}, c5 \to -\frac{1302568697376}{56018992853131}, c6 \to -\frac{38125000}{59166758637}, c7 \to -\frac{6833279232}{56018992853131} \right\}\right\}$$

```
In[11] := u7[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_, c7_] = u7[z];
```

$$\text{In[12]} := u7\left[\frac{8490761518630}{5092635713921}, \frac{94843710}{727519387703}, -\frac{8373128003572}{5092635713921}, \frac{86762340}{727519387703}, -\frac{1302568697376}{56018992853131}, \frac{18826560}{727519387703}, -\frac{6833279232}{56018992853131}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Out[12]} := \frac{8490761518630}{5092635713921} + \frac{94843710z}{727519387703} - \frac{8373128003572\left(-\frac{1}{2}+\frac{3z^2}{2}\right)}{5092635713921} + \frac{86762340\left(-\frac{3z}{2}+\frac{5z^3}{2}\right)}{727519387703} - \frac{1302568697376\left(\frac{3}{8}-\frac{15z^2}{4}+\frac{35z^4}{8}\right)}{56018992853131} + \frac{18826560\left(\frac{15z}{8}-\frac{35z^3}{4}+\frac{63z^5}{8}\right)}{727519387703} - \frac{6833279232\left(-\frac{5}{16}+\frac{105z^2}{16}-\frac{315z^4}{16}+\frac{231z^6}{16}\right)}{56018992853131}$$

$$\text{In[13]} := \quad u7[z_] = \text{Expand}[\%]$$

$$\text{Out[13]} := \frac{1804730556660}{727519387703} - \frac{2330265558z^2}{979164721} + \frac{52173450z^3}{727519387703} - \frac{72262439820z^4}{727519387703} + \frac{148259160z^5}{727519387703} - \frac{1281239856z^6}{727519387703}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)
(* เมื่อ  n = 8 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ  u8 [ z ] *)
In[1] :=  u8[z_] := c1 + c2 z + c3 ((3/2) z^2 - 1/2) + c4 ((5/2) z^3
          - (3/2) z) + c5 ((35/8) z^4 - (15/4) z^2 + 3/8) +
          c6 ((63/8) z^5 - (70/8) z^3 + (15/8) z) +
          c7 ((231/16) z^6 - (315/16) z^4 + (105/16) z^2 - 5/16)
          c8 ((429/16) z^7 - (693/16) z^5 + (315/16) z^3 - (35/16) z)
In[2] :=  Eq1 = u8'[0] == 0;
In[3] :=  Eq2 = u8[1] == 0;
In[4] :=  L[z_] := u8''[z] - u8[z]/2;
(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7 และ 6/7 *)
In[5] :=  Eq3 = L[1/7] == -6;
In[6] :=  Eq4 = L[2/7] == -6;
In[7] :=  Eq5 = L[3/7] == -6;
In[8] :=  Eq6 = L[4/7] == -6;
In[9] :=  Eq7 = L[5/7] == -6;
In[10] :=  Eq8 = L[6/7] == -6;
In[11] :=  Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7 &&
           Eq8, {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8}]
Out[11] :=  {{c1 → 35010737704868191/20997952826824328, c2 → -7211989869819/104989764134121640,
            c3 → -34519124272722537/20997952826824328, c4 → -83869289417081/1154887405475338040,
            c5 → -668026402532286/28872185136883451, c6 → -821946990473/34121673343589533,
            c7 → -3101515325419/28872185136883451, c8 → -845367713043/375338406779484863}}
In[12] :=  u8[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_, c7_, c8_] = u8[z];
In[13] :=  u8[35010737704868191/20997952826824328, -7211989869819/104989764134121640,
           -34519124272722537/20997952826824328, -83869289417081/1154887405475338040, -668026402532286/28872185136883451,
           -821946990473/34121673343589533, -3101515325419/28872185136883451, -845367713043/375338406779484863]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Out[13]} := \frac{35010737704868191}{20997952826824328} - \frac{7211989869819\,z}{104989764134121640} -$$

$$\frac{34519124272722537\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,z^2}{2}\right)}{20997952826824328} - \frac{83869289417081\left(-\frac{3\,z}{2}+\frac{5\,z^3}{2}\right)}{1154887405475338040}$$

$$- \frac{668026402532286\left(\frac{3}{8}-\frac{15\,z^2}{4}+\frac{35\,z^4}{8}\right)}{28872185136883451} -$$

$$\frac{821946990473\left(\frac{15\,z}{8}-\frac{35\,z^3}{4}+\frac{63\,z^5}{8}\right)}{34121673343589533} -$$

$$\frac{3101515325419\left(-\frac{5}{16}+\frac{105\,z^2}{16}-\frac{315\,z^4}{16}+\frac{231\,z^6}{16}\right)}{28872185136883451} -$$

$$\frac{845367713043\left(-\frac{35\,z}{16}+\frac{315\,z^3}{16}-\frac{693\,z^5}{16}+\frac{429\,z^7}{16}\right)}{375338406779484863}$$

$$\text{In[13]} := \text{u8}[\,z_\,] = \text{Expand}[\,\%\,]$$

$$\text{Out[13]} := \frac{6511101964025463}{2624744103353041} - \frac{24985799453569899\,z^2}{104989764134121640} -$$

$$\frac{317458834623\,z^3}{20997952826824328} - \frac{4162260986341185\,z^4}{41995905653648656} - \frac{3869781144453\,z^5}{41995905653648656}$$

$$\frac{65131821833799\,z^6}{41995905653648656} - \frac{2536103139129\,z^7}{41995905653648656}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)
(* เมื่อ  n = 9 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ  u9 [ z ] *)
In[1] :=  u9 [ z_ ] := c1 + c2 z + c3 ( ( 3 / 2 ) z ^ 2 - 1 / 2 ) + c4 ( ( 5 / 2 ) z ^ 3
          - ( 3 / 2 ) z ) + c5 ( ( 35 / 8 ) z ^ 4 - ( 15 / 4 ) z ^ 2 + 3 / 8 ) +
          c6 ( ( 63 / 8 ) z ^ 5 - ( 70 / 8 ) z ^ 3 + ( 15 / 8 ) z ) +
          c7 ( ( 231 / 16 ) z ^ 6 - ( 315 / 16 ) z ^ 4 + ( 105 / 16 ) z ^ 2 - 5 / 16 )
          c8 ( ( 429 / 16 ) z ^ 7 - ( 693 / 16 ) z ^ 5 + ( 315 / 16 ) z ^ 3 - ( 35 / 16 ) z )
          c9 ( ( 6435 / 128 ) z ^ 8 - ( 3003 / 32 ) z ^ 6 + ( 3465 / 64 ) z ^ 4 -
          ( 315 / 32 ) z ^ 2 - 35 / 128 )
In[2] :=  Eq1 = u9 ' [ 0 ] == 0 ;
In[3] :=  Eq2 = u9 [ 1 ] == 0 ;
In[4] :=  L [ z_ ] := u9 '' [ z ] - u9 [ z ] / 2 ;
(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 8 , 2 / 8 , 3 / 8 , 4 / 8 , 5 / 8, 6 / 8  และ 7 / 8 *)
In[5] :=  Eq3 = L [ 1 / 8 ] == -6 ;
In[6] :=  Eq4 = L [ 2 / 8 ] == -6 ;
In[7] :=  Eq5 = L [ 3 / 8 ] == -6 ;
In[8] :=  Eq6 = L [ 4 / 8 ] == -6 ;
In[9] :=  Eq7 = L [ 5 / 8 ] == -6 ;
In[10] :=  Eq8 = L [ 6 / 8 ] == -6 ;
In[11] :=  Eq9 = L [ 7 / 8 ] == -6 ;
In[12] :=  Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7 &&
           Eq8 && Eq9, { c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9 } ]
```

$$\text{Out[12]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{13369937493943734625955 2}{80188524311771827349541}, \right.\right.$$

$$c2 \to \frac{564852659246848}{311532728483962033215},$$

$$c3 \to -\frac{10140852517411448505056}{6168348023982448257657},$$

$$c4 \to \frac{20822354702137856}{10280580039970747096095},$$

$$c5 \to -\frac{6260264321197582336}{269995031352767095453},$$

$$c6 \to \frac{1847184485515264}{2429955282174903859077},$$

$$c7 \to -\frac{65443762812747776}{560758911271131659787},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c8 \to \frac{816054070673408}{8909836034641314149949},$$

$$c9 \to -\frac{25071727306342400}{8018852431177182734954 1}\ \}\ \}$$

In[13] := u9[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_, c7_, c8_, c9_] = u9[z];

In[14] := u9[$\frac{13369937493943734625955 2}{8018852431177182734954 1}$,

$\frac{564852659246848}{311532728483962033215}$, $-\frac{10140852517411448505056}{6168348023982448257657}$,

$\frac{20822354702137856}{10280580039970747096095}$, $-\frac{6260264321197582336}{269995031352767095453}$,

$\frac{1847184485515264}{2429955282174903859077}$, $-\frac{65443762812747776}{560758911271131659787}$,

$\frac{816054070673408}{8909836034641314149949}$, $-\frac{25071727306342400}{8018852431177182734954 1}$]

Out[14] := $\frac{13369937493943734625955 2}{8018852431177182734954 1} + \frac{564852659246848\, z}{311532728483962033215} -$

$\frac{10140852517411448505056\left(-\frac{1}{2}+\frac{3\,z^2}{2}\right)}{6168348023982448257657} +$

$\frac{20822354702137856\left(-\frac{3\,z}{2}+\frac{5\,z^3}{2}\right)}{10280580039970747096095} -$

$\frac{6260264321197582336\left(\frac{3}{8}-\frac{15\,z^2}{4}+\frac{35\,z^4}{8}\right)}{269995031352767095453} +$

$\frac{1847184485515264\left(\frac{15\,z}{8}-\frac{35\,z^3}{4}+\frac{63\,z^5}{8}\right)}{2429955282174903859077} -$

$\frac{65443762812747776\left(-\frac{5}{16}+\frac{105\,z^2}{16}-\frac{315\,z^4}{16}+\frac{231\,z^6}{16}\right)}{560758911271131659787} +$

$\frac{816054070673408\left(-\frac{35\,z}{16}+\frac{315\,z^3}{16}-\frac{693\,z^5}{16}+\frac{429\,z^7}{16}\right)}{8909836034641314149949} -$

$\frac{25071727306342400\left(-\frac{35}{128}-\frac{315\,z^2}{32}+\frac{3465\,z^4}{64}-\frac{3003\,z^6}{32}+\frac{6435\,z^8}{128}\right)}{8018852431177182734954 1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
In[15] :=   u9 [ z_ ] = Expand [ % ]
```

$$\text{Out[15]} := \frac{154561469104537304432}{62306545696792406643} - \frac{148279271781770283376\, z^2}{62306545696792406643} + \frac{4469302550272\, z^3}{20768848565597468881} - \frac{2059451879784651520\, z^4}{20768848565597468881} + \frac{41939650543616\, z^5}{20768848565597468881} - \frac{103154556062695424\, z^6}{62306545696792406643} + \frac{51003379417088\, z^7}{20768848565597468881} - \frac{979364347904000\, z^8}{62306545696792406643}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนามเลอจองด์ *)

(* เมื่อ n = 10 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ u10 [z] *)

```
In[1] := u10[z_] := c1 + c2 z + c3 ((3/2) z^2 - 1/2) + c4 ((5/2) z^3
        - (3/2) z) + c5 ((35/8) z^4 - (15/4) z^2 + 3/8) +
        c6 ((63/8) z^5 - (70/8) z^3 + (15/8) z) +
        c7 ((231/16) z^6 - (315/16) z^4 + (105/16) z^2 - 5/16)
        c8 ((429/16) z^7 - (693/16) z^5 + (315/16) z^3 - (35/16) z)
        c9 ((6435/128) z^8 - (3003/32) z^6 + (3465/64) z^4 -
        (315/32) z^2 - 35/128) + c10 ((12155/128) z^9 -
        (6435/32) z^7 + (9009/64) z^5 - (1155/32) z^3 - (315/128) z)

In[2] := Eq1 = u10'[0] == 0;

In[3] := Eq2 = u10[1] == 0;

In[4] := L[z_] := u10''[z] - u10[z]/2;

(*เลือกจุดการจัดตำแหน่งคือ z = 1/9, 2/9, 3/9, 4/9, 5/9, 6/9, 7/9 และ 8/9 *)

In[5] := Eq3 = L[1/9] == -6;

In[6] := Eq4 = L[2/9] == -6;

In[7] := Eq5 = L[3/9] == -6;

In[8] := Eq6 = L[4/9] == -6;

In[9] := Eq7 = L[5/9] == -6;

In[10] := Eq8 = L[6/9] == -6;

In[11] := Eq9 = L[7/9] == -6;

In[12] := Eq10 = L[8/9] == -6;

In[13] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7 &&
          Eq8 && Eq9 && Eq10, {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c10}]
```

$$\text{Out[13]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{9108078085940178106804 2687}{546272494795445846448923 50}, \right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{3686073960944490855984}{5107647826337418664297434725},$$

$$c3 \to -\frac{6908292910853069213783 16}{4202096113811121895760 95},$$

$$c4 \to -\frac{256661902930613723208}{3004498721374952155469079 25},$$

$$c5 \to -\frac{6965793458178634114677306}{3004498721374952155469079 25},$$

$$\left. c6 \to -\frac{10718589451098019896}{2731362473977229232244617 5}, \right.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c7 \to -\frac{268552188523536609 8232}{231115286259611704266852 25},$$

$$c8 \to -\frac{77157355509424956816}{102152956526748373285948 6945},$$

$$c9 \to -\frac{75179370741716246 4}{273136247397722923224461 75}$$

$$c10 \to -\frac{22549246626843906048}{510764782633741866429743 4725} \} \}$$

In[14] :=
```
u10[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_, c7_, c8_, c9_, c10_] =
 u10[z];
```

In[15] :=
```
u10[ 910807808594017810680426 87/546272494795445846448923 50,
 -368607396094449085598 4/510764782633741866429743 4725, -690829291085306921378316/42020961138111218957609 5,
 -256661902930613723208/300449872137495215546907925, -696579345817863411467730 6/300449872137495215546907925,
 -107185894510980198 96/273136247397722923224461 75, -268552188523536609 8232/231115286259611704266852 25,
 -771573555094249568 16/102152956526748373285948 6945, -751799370741716246 4/273136247397722923224461 75,
 -225492466268439060 48/510764782633741866429743 4725 ]
```

Out[15] :=
$$\frac{910807808594017810680426 87}{546272494795445846448923 50} - \frac{368607396094449085598 4\, z}{510764782633741866429743 4725} - \frac{690829291085306921378316 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3 z^2}{2}\right)}{42020961138111218957609 5} - \frac{256661902930613723208 \left(-\frac{3 z}{2} + \frac{5 z^3}{2}\right)}{300449872137495215546907925} - \frac{696579345817863411467730 6 \left(\frac{3}{8} - \frac{15 z^2}{4} + \frac{35 z^4}{8}\right)}{300449872137495215546907925} - \frac{107185894510980198 96 \left(\frac{15 z}{8} - \frac{35 z^3}{4} + \frac{63 z^5}{8}\right)}{273136247397722923224461 75} -$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{268552188523536609823 2}{231115286259611704266852 25}\left(-\frac{5}{16}+\frac{105\,z^2}{16}-\frac{315\,z^4}{16}+\frac{231\,z^6}{16}\right)-$$

$$\frac{771573555094249568 16}{102152956526748373285948 6945}\left(-\frac{35\,z}{16}+\frac{315\,z^3}{16}-\frac{693\,z^5}{16}+\frac{429\,z^7}{16}\right)-$$

$$\frac{751799370741716246 4}{273136247397722923224461 75}\left(-\frac{35}{128}-\frac{315\,z^2}{32}+\frac{3465\,z^4}{64}-\frac{3003\,z^6}{32}+\frac{6435\,z^8}{128}\right)-$$

$$\frac{225492466268439060 48}{510764782633741866429743 4725}\left(-\frac{315\,z}{128}-\frac{1155\,z^3}{32}+\frac{9009\,z^5}{64}-\frac{6435\,z^7}{32}+\frac{12155\,z^9}{128}\right)$$

In[16] := u10 [z_] = Expand [%]

Out[16] =

$$\frac{160368913671493114414 08}{6464763252017110608863}-\frac{200005869580111833889185\,z^2}{8404192227622243791521 9}-$$

$$\frac{12433500428903343\,z^3}{4202096113811121895760 95}-\frac{166671317145106683616077\,z^4}{1680838445524448758304380}-$$

$$\frac{185045806879490214\,z^5}{4202096113811121895760 95}-\frac{106783906378338472689\,z^6}{6464763252017110608863 0}-$$

$$\frac{477942855542195931\,z^7}{4202096113811121895760 95}-\frac{232587930323218463 73\,z^8}{1680838445524448758304380}-$$

$$\frac{176165989272218016\,z^9}{4202096113811121895760 95}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เลอจองด์บนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 3 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v3 [z] *)

In[1] := v3 [z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (6 z ^ 2 - 6 z + 1)

In[2] := Eq1 = v3 ' [0] == 0 ;

In[3] := Eq2 = v3 [1] == 0 ;

In[4] := L [z_] := v3 '' [z] - v3 [z] / 2 ;

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 2 *)

In[5] := Eq3 = L [1 / 2] == -6 ;

In[6] := Solve [Eq1 && Eq2 && Eq3, { c1, c2, c3 }]

Out[6] := $\left\{ \left\{ c1 \to \frac{32}{19}, c2 \to -\frac{24}{19}, c3 \to -\frac{8}{19} \right\} \right\}$

In[7] := v3 [c1_ , c2_ , c3_] = v3 [z] ;

In[8] := $v3\left[\frac{32}{19}, -\frac{24}{19}, -\frac{8}{19} \right]$

Out[8] := $\frac{32}{19} - \frac{24}{19} (-1 + 2z) - \frac{8}{19} (1 - 6 z + 6 z^2)$

In[9] := v3 [z_] = Expand [%]

Out[9] := $\frac{48}{19} - \frac{48 z^2}{19}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(*เลอจองด์บนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 4 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v4 [z] *)

In[1] := v4[z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (6 z^2 - 6 z + 1) + c4 (20 z^3 - 30 z^2 + 12 z - 1)

In[2] := Eq1 = v4'[0] == 0;

In[3] := Eq2 = v4[1] == 0;

In[4] := L[z_] := v4''[z] - v4[z] / 2;

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = (3 – Sqrt [3]) / 6 และ (3 + Sqrt [3]) / 6 *)

In[5] := Eq3 = L[(3 - Sqrt[3]) / 6] == -6;

In[6] := Eq4 = L[(3 + Sqrt[3]) / 6] == -6;

In[7] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4, {c1, c2, c3, c4}]

Out[7] := $\left\{\left\{c1 \to \frac{3540}{2119}, c2 \to -\frac{13032}{10595}, c3 \to -\frac{912}{2119}, c4 \to -\frac{108}{10595}\right\}\right\}$

In[8] := v4[c1_, c2_, c3_, c4_] = v4[z];

In[9] := $v4\left[\frac{3540}{2119}, -\frac{13032}{10595}, -\frac{912}{2119}, -\frac{108}{10595}\right]$

Out[9] := $\frac{3540}{2119} - \frac{13032(-1 + 2z)}{10595} - \frac{912(1 - 6z + 6z^2)}{2119} - \frac{108(-1 + 12z - 30z^2 + 20z^3)}{10595}$

In[10] := v4[z_] = Expand[%]

Out[10] := $\frac{5256}{2119} - \frac{4824 z^2}{2119} - \frac{432 z^3}{2119}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(*เลอจองด์บนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 5 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v5 [z] *)

```
In[1] :=  v5 [ z_ ] := c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 6 z ^ 2 - 6 z + 1 ) + c4 ( 20 z ^ 3
          - 30 z ^ 2 + 12 z - 1 ) + c5 ( 70 z ^ 4 - 140 z ^ 3 + 90 z ^ 2 - 20 z + 1 )

In[2] :=  Eq1 = v5 ' [ 0 ] == 0 ;

In[3] :=  Eq2 = v5 [ 1 ] == 0 ;

In[4] :=  L [ z_ ] := v5 '' [ z ] - v5 [ z ] / 2 ;
```

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = (5 – Sqrt [15]) / 10 , 1 / 2 , (5 + Sqrt [15]) / 6 *)

```
In[5] :=  Eq3 = L [ ( 5 - Sqrt [ 15 ] ) / 10 ] == -6 ;

In[6] :=  Eq4 = L [ 1 / 2 ] == -6 ;

In[7] :=  Eq5 = L [ ( 5 + Sqrt [ 15 ] ) / 10 ] == -6 ;

In[8] :=  [ Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 , { c1, c2, c3, c4,
          c5 } ] ]
```

$$\text{Out[8]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{950556}{570109}, c2 \to -\frac{701280}{570109}, c3 \to -\frac{242568}{570109}, c4 \to -\frac{5844}{570109}, c5 \to -\frac{864}{570109} \right\} \right\}$$

```
In[9] :=  v5 [ c1_ , c2_ , c3_ , c4_ , c5_ ] = v5 [ z ] ;
```

$$\text{In[10]} := v5\left[\frac{950556}{570109}, -\frac{701280}{570109}, -\frac{242568}{570109}, -\frac{5844}{570109}, -\frac{864}{570109}\right]$$

$$\text{Out[10]} := \frac{950556}{570109} - \frac{701280\,(-1 + 2z)}{570109} - \frac{242568\,(1 - 6z + 6z^2)}{570109} - \frac{5844\,(-1 + 12z - 30z^2 + 20z^3)}{570109} - \frac{864\,(1 - 20z + 90z^2 - 140z^3 + 70z^4)}{570109}$$

```
In[11] :=  v5 [ z_ ] = Expand [ % ]
```

$$\text{Out[11]} := \frac{1414248}{570109} - \frac{1357848\,z^2}{570109} + \frac{4080\,z^3}{570109} - \frac{60480\,z^4}{570109}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เลอจองด์บนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 6 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v6 [z] *)

```
In[1] :=  v6 [ z_ ] := c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 6 z ^ 2 - 6 z + 1 ) + c4 ( 20 z ^ 3
          - 30 z ^ 2 + 12 z - 1 ) + c5 ( 70 z ^ 4 - 140 z ^ 3 + 90 z ^ 2 - 20 z + 1 )
          + c6 ( 256 z ^ 5 - 630 z ^ 4 + 560 z ^ 3 - 210 z ^ 2 + 30 z - 1 )

In[2] :=  Eq1 = v6 '[ 0 ] == 0 ;

In[3] :=  Eq2 = v6 [ 1 ] == 0 ;

In[4] :=  L [ z_ ] := v6 ''[ z ] - v6 [ z ] / 2 ;
```

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 7 / 100 , 33 / 100 , 67 / 100 และ 93 / 100 *)

```
In[5] :=  Eq3 = L [ 7 / 100 ] == -6 ;

In[6] :=  Eq4 = L [ 33 / 100 ] == -6 ;

In[7] :=  Eq5 = L [ 67 / 100 ] == -6 ;

In[8] :=  Eq6 = L [ 93 / 100 ] == -6 ;

In[9] :=  Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6,
          { c1, c2,  c3, c4, c5, c6 } ]
```

$$\text{Out[9]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{318271976946551520000}{190889086954153676107}, \right.\right.$$
$$c2 \to -\frac{1643710035245805480000}{1336223608679075732749}, c3 \to -\frac{568514426259455160000}{1336223608679075732749},$$
$$c4 \to -\frac{58380106626400000000}{572667260862461028321}, c5 \to -\frac{2030367574440000000}{1336223608679075732749},$$
$$\left.\left. c6 \to -\frac{80954000000000000}{4008670826037227198247} \right\} \right\}$$

```
In[10] :=  v6 [ c1_ , c2_ , c3_ , c4_ , c5_, c5_, c6_ ] = v6 [ z ] ;
```

$$\text{In[11]} := v6 \left[\frac{318271976946551520000}{190889086954153676107}, -\frac{1643710035245805480000}{1336223608679075732749}, \right.$$
$$-\frac{568514426259455160000}{1336223608679075732749}, -\frac{583801066264000000}{572667260862461028321},$$
$$\left. -\frac{2030367574440000000}{1336223608679075732749}, -\frac{80954000000000000}{4008670826037227198247} \right]$$

$$\text{Out[11]} := \frac{318271976946551520000}{190889086954153676107} - \frac{1643710035245805480000\,(-1+2z)}{1336223608679075732749} -$$
$$\frac{568514426259455160000\,(1-6z+6z^2)}{1336223608679075732749} -$$
$$\frac{583801066264000000\,(-1+12z-30z^2+20z^3)}{572667260862461028321} -$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{2030367574440000000\,(1-20z+90z^2-140z^3+70z^4)}{1336223608679075732749}-$$

$$\frac{80954000000000000\,(-1+30z-210z^2+560z^3-630z^4+252z^5)}{4008670826037227198247}$$

In[12] := v6[z_] = Expand[%]

Out[12] :=
$$\frac{473531155654847280000}{190889086954153676107}-\frac{4542131589816472800000\,z^2}{190889086954153676107}-$$

$$\frac{471492928800000000\,z^3}{190889086954153676107}-\frac{17875055744400000000\,z^4}{190889086954153676107}-$$

$$\frac{971448000000000000\,z^5}{190889086954153676107}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)
(* เลอจองด์บนช่วง [0, 1] เมื่อ n = 7 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v7[z] *)
In[1] := v7[z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (6 z^2 - 6 z + 1) + c4 (20 z^3
        - 30 z^2 + 12 z - 1) + c5 (70 z^4 - 140 z^3 + 90 z^2 - 20 z + 1)
        + c6 (256 z^5 - 630 z^4 + 560 z^3 - 210 z^2 + 30 z - 1) +
        c7 (+924 z^6 - 2772 z^5 + 3150 z^4 - 1680 z^3 + 420 z^2 - 42 z + 1)
In[2] := Eq1 = v7'[0] == 0;
In[3] := Eq2 = v7[1] == 0;
In[4] := L[z_] := v7''[z] - v7[z] / 2;
(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 7 / 100, 23 / 100, 1 / 2, 77 / 100 และ 19 / 20 *)
In[5] := Eq3 = L[7 / 100] == -6;
In[6] := Eq4 = L[23 / 100] == -6;
In[7] := Eq5 = L[1 / 2] == -6;
In[8] := Eq6 = L[77 / 100] == -6;
In[9] := Eq7 = L[19 / 20] == -6;
In[10] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7,
          {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7}]
```

$$\text{Out[10]} = \left\{\left\{ c1 \to \frac{64365494184238318709376}{38604300924125829751397},\right.\right.$$
$$c2 \to -\frac{4317071547424545921528}{350948190219325725 0127},$$
$$c3 \to -\frac{2346405290266173845832}{551490013201797567 8771},$$
$$c4 \to -\frac{168662171322459610976}{165447003960539270 36313},$$
$$c5 \to -\frac{91882387824932774400}{606639014521977324 66481},$$
$$c6 \to -\frac{2341942553099200000}{115812902772377489254191},$$
$$\left. c7 \to -\frac{811869677040000000}{424647310165384127265367} \right\}\}$$

```
In[11] := v7[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c5_, c6_, c7_] = v7[z];
```

$$\text{In[12]} := v7\left[\frac{64365494184238318709376}{38604300924125829751397}, -\frac{4317071547424545921528}{350948190219325725 0127},\right.$$
$$\left. -\frac{2346405290266173845832}{551490013201797567 8771}, -\frac{168662171322459610976}{165447003960539270 36313},\right.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\frac{91882387824932774400}{60663901452197732466481},-\frac{2341942553099200000}{11581290277237748925 4191},$$
$$-\frac{811869677040000000}{42464731016538412726 5367}\Big]$$

Out[12] :=
$$\frac{64365494184238318709376}{38604300924125829751397}-\frac{43170715474245459215 28(-1+2z)}{350948190219325725 0127}-\frac{23464052902661738458 32(1-6z+6z^2)}{551490013201797567 8771}-\frac{16866217132245961097 6(-1+12z-30z^2+20z^3)}{165447003960539270 36313}-\frac{91882387824932774400(1-20z+90z^2-140z^3+70z^4)}{60663901452197732466481}-\frac{2341942553099200000(-1+30z-210z^2+560z^3-630z^4+252z^5)}{11581290277237748925 4191}-\frac{(811869677040000000(1-42z+420z^2-1680z^3+3150z^4-2772z^5+924z^6))}{42464731016538412726 5367}$$

In[13] := v7[z_] = Expand[%]

Out[13] :=
$$\frac{13680603638744793513072}{551490013201797567 8771}-\frac{13124583974192941301232z^2}{551490013201797567 8771}+\frac{259452008247116160z^3}{551490013201797567 8771}-\frac{547660678171868928000z^4}{551490013201797567 8771}+\frac{112399773624960000 0z^5}{551490013201797567 8771}-\frac{974243612448000000 0z^6}{551490013201797567 8771}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
( * ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม * )
( * เลอจองด์บนช่วง [ 0 , 1 ] เมื่อ n = 8 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v8 [ z ] * )
In[1] := v8 [ z_ ] := c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 6 z ^ 2 - 6 z + 1 ) + c4 ( 20 z ^ 3
        - 30 z ^ 2 + 12 z - 1 ) + c5 ( 70 z ^ 4 - 140 z ^ 3 + 90 z ^ 2 - 20 z + 1 )
        + c6 ( 256 z ^ 5 - 630 z ^ 4 + 560 z ^ 3 - 210 z ^ 2 + 30 z - 1 ) +
        c7 ( + 924 z ^ 6 - 2772 z ^ 5 + 3150 z ^ 4 - 1680 z ^ 3 + 420 z ^ 2 -
        42 z + 1 ) + c8 ( +3432 z ^ 7 - 12012 z ^ 6 + 16632 z ^ 5 -
        11550 z ^ 4 + 4200 z ^ 3 - 756 z ^ 2 + 56 z - 1 )
In[2] := Eq1 = v8 ' [ 0 ] == 0 ;
In[3] := Eq2 = v8 [ 1 ] == 0 ;
In[4] := L [ z_ ] := v8 '' [ z ] - v8 [ z ] / 2 ;
( * เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 17 / 500 , 17 / 100 , 19 / 50 , 31 / 50 , 83 / 100 * )
( * และ 97 / 100 * )
In[5] := Eq3 = L [ 17 / 500 ] == - 6 ;
In[6] := Eq4 = L [ 17 / 100 ] == - 6 ;
In[7] := Eq5 = L [ 19 / 50 ] == - 6 ;
In[8] := Eq6 = L [ 31 / 50 ] == - 6 ;
In[9] := Eq7 = L [ 83 / 100 ] == - 6 ;
In[10] := Eq8 = L [ 97 / 100 ] == - 6 ;
In[11] := Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7 &&
        Eq8, { c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8 } ]
```

$$\text{Out[11]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{5286970020139982502206861390130000}{3170950525609775014839451611087587}, \right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{3900638082628311232402011939035000}{3170950525609775014839451611087587},$$

$$c3 \to -\frac{1349133265085014931731671942845000}{3170950525609775014839451611087587},$$

$$c4 \to -\frac{1523931059131797837346547417500000}{1494876676358893935567170045227005 3},$$

$$\left.\left. c5 \to -\frac{5283013860903141942439986000000 0}{3488045578170752516323396772196345 7} \right\} \right\},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c6 \to -\frac{249607855322693266547500000000}{123667070498781225578738612832415893},$$

$$c7 \to -\frac{667063224726805347500000000000}{348804557817075251632339677219634 57},$$

$$c8 \to -\frac{114364390726456250000000000}{647779893088854038745773686265035 63} \}\}$$

In[12] := v8[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c5_, c6_, c7_, c8_] = v8[z];

In[13] := v8[
$$\frac{528697002013998250220686139013 0000}{317095052560977501483945161108 7587},$$
$$-\frac{390063808262831123240201193903 5000}{317095052560977501483945161108 7587},$$
$$-\frac{134913326508501493173167194284 5000}{317095052560977501483945161108 7587},$$
$$-\frac{152393105913179783734654741750000}{149487667635889393556717004522700 53},$$
$$-\frac{528301386090314194243998600000000}{348804557817075251632339677219634 57},$$
$$-\frac{249607855322693266547500000000}{123667070498781225578738612832415893},$$
$$-\frac{667063224726805347500000000000}{348804557817075251632339677219634 57},$$
$$-\frac{114364390726456250000000000}{647779893088854038745773686265035 63}]$$

Out[13] =
$$\frac{528697002013998250220686139013 0000}{317095052560977501483945161108 7587} -$$
$$\frac{390063808262831123240201193903 5000\,(-1+2z)}{317095052560977501483945161108 7587} -$$
$$\frac{134913326508501493173167194284 5000\,(1-6z+6z^2)}{317095052560977501483945161108 7587} -$$
$$\frac{152393105913179783734654741750000\,(-1+12z-30z^2+20z^3)}{149487667635889393556717004522700 53}$$
$$-(528301386090314194243998600000000\,(1-20z+90z^2-140z^3+70z^4))/$$
$$348804557817075251632339677219634 57 -$$
$$(249607855322693266547500000000\,(-1+30z-210z^2+560z^3-630z^4+252z^5))/$$
$$123667070498781225578738612832415893 -$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(667063224726805347500000000000 \left(1 - 42\,z + 420\,z^2 - 1680\,z^3 + 3150\,z^4 - 2772\,z^5 + 924\,z^6 \right) \right) / 34880455781707525163233967721963457 - \left(1143643907264562500000000000 \left(-1 + 56\,z - 756\,z^2 + 4200\,z^3 - 11550\,z^4 + 16632\,z^5 - 12012\,z^6 + 3432\,z^7 \right) \right) / 64777989308885403874577368626503563$$

In[14] := v8 [z_] = Expand [%]

Out[14] =

$$\frac{1123722271705795822734232053510000}{45299293222996785926277880158394 1} - \frac{1078048013092582240216139658510000\,z^2}{45299293222996785926277880158394 1} - \frac{300066225916328166979500000 0\,z^3}{45299293222996785926277880158394 1} - \frac{449037412303879173215226000000 00\,z^4}{45299293222996785926277880158394 1} - \frac{356594853302092479000000000000\,z^5}{45299293222996785926277880158394 1} - \frac{704409781461943167000000000000\,z^6}{45299293222996785926277880158394 1} - \frac{274474537743495000000000000\,z^7}{45299293222996785926277880158394 1}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
( * ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม * )
( * เลอจองด์บนช่วง [ 0 , 1 ] เมื่อ n = 9 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v9 [ z ] * )
In[1] := v9 [ z_ ] := c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 6 z ^ 2 - 6 z + 1 ) + c4 ( 20 z ^ 3
        - 30 z ^ 2 + 12 z - 1 ) + c5 ( 70 z ^ 4 - 140 z ^ 3 + 90 z ^ 2 - 20 z + 1 )
        + c6 ( 256 z ^ 5 - 630 z ^ 4 + 560 z ^ 3 - 210 z ^ 2 + 30 z - 1 ) +
        c7 ( + 924 z ^ 6 - 2772 z ^ 5 + 3150 z ^ 4 - 1680 z ^ 3 + 420 z ^ 2 -
        42 z + 1 ) + c8 ( +3432 z ^ 7 - 12012 z ^ 6 + 16632 z ^ 5 -
        11550 z ^ 4 + 4200 z ^ 3 - 756 z ^ 2 + 56 z - 1 ) + c9 ( 1 - 72 z +
        1260 z ^ 2 - 9240 z ^ 3 + 34650 z ^ 4 - 72072 z ^ 5 + 84084 z ^ 6 -
        51480 z ^ 7 + 12870 z ^ 8 )
In[2] := Eq1 = v9 ' [ 0 ] == 0 ;
In[3] := Eq2 = v9 [ 1 ] == 0 ;
In[4] := L [ z_ ] := v9 '' [ z ] - v9 [ z ] / 2 ;
(* เลือกจุดการจัดตำแหน่งคือ z = 1 / 40 , 13 / 100 , 3 / 100 , 1 / 2 , 7 / 10 , 87 / 100 *)
(* และ97 / 100 *)
In[5] := Eq3 = L [ 1 / 40 ] == - 6 ;
In[6] := Eq4 = L [ 13 / 100 ] == - 6 ;
In[7] := Eq5 = L [ 3 / 10 ] == - 6 ;
In[8] := Eq6 = L [ 1 / 2 ] == - 6 ;
In[9] := Eq7 = L [ 7 / 10 ] == - 6 ;
In[10] := Eq8 = L [ 87 / 100 ] == - 6 ;
In[11] := Eq9 = L [ 97 / 100 ] == - 6 ;
In[12] := Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7 &&
        Eq8 && Eq9, { c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9 } ]
```

$$\text{Out[12]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{2428909641308187610590557632033 6}{1456780022967049623210401932493 7}, \right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{5973363074150999136470753401840}{4855933409890165410701339774979},$$

$$c3 \to -\frac{6817922289151337234857114320478 4}{1602458025263754585531442125743 07},$$

$$c4 \to -\frac{2593021197735250601872054894 4}{2543584167085324738938797024989},$$

$$c5 \to -\frac{3505803515258986996224636350 40}{2314661592047645512434305292739 99},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c6 \to -\frac{4247146825060240894395440000}{21042378109524050113039139024909},$$

$$c7 \to \frac{30598793404515552115120000}{16024580252637545855314421257430 7}-$$

$$c8 \to -\frac{17501148129789931600000000}{99199782516327664818613083974571},$$

$$c9 \to -\frac{3639927523393856000000000}{29759934754898299445583925192 3713} \} \}$$

In[13] := v9 [c1_ , c2_ , c3_ , c4_ , c5_, c5_, c6_ , c7_ , c8_, c9_] = v9 [z] ;

In[14] := v9 [$\frac{2428909641308187610590557632033 6}{14567800229670496232104019324937}$,

$-\frac{5973363074150999136470753401840}{48559334098901654107013397749 79}$,

$-\frac{6817922289151337234857114320478 4}{16024580252637545855314421257430 7}$,

$-\frac{2593021197735250601872054894 4}{25435841670853247389387970249 89}$,

$-\frac{3505803515258986996224636350 40}{23146615920476455124343052927399 9}$,

$-\frac{4247146825060240894395440000}{21042378109524050113039139024909}$,

$-\frac{3059879340451555211512000 00}{16024580252637545855314421257430 7}$,

$-\frac{1750114812978993160000000 0}{99199782516327664818613083974571}$,

$-\frac{3639927523393856000000000}{29759934754898299445583925192 3713}$]

Out[14] := $\frac{2428909641308187610590557632033 6}{14567800229670496232104019324937}-$

$\frac{5973363074150999136470753401840\,(-1+2z)}{48559334098901654107013397749 79}-$

$\frac{6817922289151337234857114320478 4\,(1-6z+6z^2)}{16024580252637545855314421257430 7}-$

$\frac{2593021197735250601872054894 4\,(-1+12z-30z^2+20z^3)}{25435841670853247389387970249 89}-$

$\frac{3505803515258986996224636350 40\,(1-20z+90z^2-140z^3+70z^4)}{23146615920476455124343052927399 9}-$

$\frac{4247146825060240894395440000\,(-1+30z-210z^2+560z^3-630z^4+252z^5)}{21042378109524050113039139024909}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\left(305987934045155521151200000\left(1-42z+420z^2-1680z^3+3150z^4-2772z^5+924z^6\right)\right)/160245802526375458553144212574307-\left(175011481297899316000000\left(-1+56z-756z^2+4200z^3-11550z^4+16632z^5-12012z^6+3432z^7\right)\right)/991997825163276648186130839745 71-\left(36399275233938560000000\left(1-72z+1260z^2-9240z^3+34650z^4-72072z^5+84084z^6-51480z^7+12870z^8\right)\right)/297599347548982994455839251923713$$

In[15] := v9 [z_] = Expand [%]

Out[15] =

$$\frac{573615647891266400470417629888}{231234924280484067176254274999}-\frac{550300861744295815763614396608\,z^2}{231234924280484067176254274999}+\frac{164435261514335632675 20\,z^3}{231234924280484067176254274999}-\frac{22929311655761620610641732800\,z^4}{231234924280484067176254274999}+\frac{351758314836926476832000\,z^5}{231234924280484067176254274999}-\frac{38276155711630207892160000 0\,z^6}{231234924280484067176254274999}+\frac{558791589743478720000000\,z^7}{231234924280484067176254274999}-\frac{36399275233938560000000 00\,z^8}{231234924280484067176254274999}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
( * ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม * )
( * เลอจองด์บนช่วง [ 0 , 1 ] เมื่อ n = 10 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ v10 [ z ] * )
In[1] := v10 [ z_ ] : = c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 6 z ^ 2 - 6 z + 1 ) + c4 ( 20 z ^ 3
        - 30 z ^ 2 + 12 z - 1 ) + c5 ( 70 z ^ 4 - 140 z ^ 3 + 90 z ^ 2 - 20 z + 1 )
        + c6 ( 256 z ^ 5 - 630 z ^ 4 + 560 z ^ 3 - 210 z ^ 2 + 30 z - 1 ) +
        c7 ( + 924 z ^ 6 - 2772 z ^ 5 + 3150 z ^ 4 - 1680 z ^ 3 + 420 z ^ 2 -
        42 z + 1 ) + c8 ( +3432 z ^ 7 - 12012 z ^ 6 + 16632 z ^ 5 -
        11550 z ^ 4 + 4200 z ^ 3 - 756 z ^ 2 + 56 z - 1 ) + c9 ( 1 - 72 z +
        1260 z ^ 2 - 9240 z ^ 3 + 34650 z ^ 4 - 72072 z ^ 5 + 84084 z ^ 6 -
        51480 z ^ 7 + 12870 z ^ 8 ) + c10 ( - 1 + 90 z - 1980 z ^ 2 +
        18480 z ^ 3 - 90090 z ^ 4 + 252252 z^ 5 - 420420 z ^ 6 +
        411840 z ^ 7 - 218790 z ^ 8 + 48620 z ^ 9 )
In[2] := Eq1 = v10 ' [ 0 ] == 0 ;
In[3] := Eq2 = v10 [ 1 ] == 0 ;
In[4] := L [ z_ ] : = v10 '' [ z ] - v10 [ z ] / 2 ;
( * เลือกจุดการจัดตำแหน่งคือ z = 1 / 50 , 1 / 10 , 6 / 25 , 41 / 100 , 3 / 5 , 19 / 26 , * )
( * 9 / 10 และ 49 / 50 * )
In[5] := Eq3 = L [ 1 / 50 ] == - 6 ;
In[6] := Eq4 = L [ 1 / 10 ] == - 6 ;
In[7] := Eq5 = L [ 6 / 25 ] == - 6 ;
In[8] := Eq6 = L [ 41 / 100 ] == - 6 ;
In[9] := Eq7 = L [ 3 / 5 ] == - 6 ;
In[10] := Eq8 = L [ 19 / 25 ] == - 6 ;
In[11] := Eq9 = L [ 9 / 10 ] == - 6 ;
In[12] := Eq10 = L [ 49 / 50 ] == - 6 ;
In[13] := Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7 &&
        Eq8 && Eq9 && Eq10, { c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c10 } ]
```

$$\text{Out[13]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{2384770426974398181536873585534067 5}{1430306775639195571125535864485775 2}, \right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{2257952809817069128267745472042415 75}{1835560362070300982944437692756744 84},$$

$$\left.\left. c3 \to -\frac{2342908402278125169690806243857535 75}{5506681086210902948833313078270234 52}, \right.\right.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c4 \to -\frac{52127295878787487438118337582076 25}{51133467229101241667737907155366463 4},$$

$$c5 \to -\frac{72283984799792721393278630263908 75}{47724569413827825556555380011675365 84},$$

$$c6 \to -\frac{13135398902116736696700156109375}{65078958291583398486211881834102771 6},$$

$$c7 \to -\frac{75106798873491778581716796875}{39333436330077878205952236273358818},$$

$$c8 \to -\frac{25532113414119451779443359375}{14487815714912018472525740360687164 63},$$

$$c9 \to -\frac{31294593341233991474609375 0}{25566733614550620833868953577683231 7},$$

$$c10 \to -\frac{12542912827779829101562500}{14487815714912018472525740360687164 63}\Big\}\Big\}$$

```
In[14] := v10[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c5_, c6_, c7_, c8_, c9_, c10_] =
          v10[z];
```

```
In[15] := v10[
```

$$\frac{23847704269743981815368735855340675}{14303067756391955711255358644857752},$$

$$-\frac{22579528098170691282677454720424157 5}{18355603620703009829444376927567448 4},$$

$$-\frac{23429084022781251696908062438575357 5}{55066810862109029488331307827023452},$$

$$-\frac{52127295878787487438118337582076 25}{51133467229101241667737907155366463 4},$$

$$-\frac{72283984799792721393278630263908 75}{47724569413827825556555380011675365 84},$$

$$-\frac{13135398902116736696700156109375}{65078958291583398486211881834102771 6},$$

$$-\frac{75106798873491778581716796875}{39333436330077878205952236273358818},$$

$$-\frac{25532113414119451779443359375}{14487815714912018472525740360687164 63},$$

$$-\frac{31294593341233991474609375 0}{25566733614550620833868953577683231 7},$$

$$-\frac{12542912827779829101562500}{14487815714912018472525740360687164 63}\Big]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Out[15]} := \frac{2384770426974398181536873585534067 5}{1430306775639195571125535864485775 2} - \frac{5973363074150999136470753401840\,(-1+2z)}{4855933409890165410701339774979} - \frac{2257952809817069128267745472042415 75\,(-1+2z)}{1835560362070300982944437692756744 84} - \frac{2342908402278125169690806243857535 75\,(1-6z+6z^2)}{5506681086210902948833313078270234 52} - (5212729587878748743811833758207625\,(-1+12z-30z^2+20z^3))/5113346722910124166773790715536646 34 - (7228398479979272139327863026390875\,(1-20z+90z^2-140z^3+70z^4))/4772456941382782555655538001167536584 - (1313539890211673669670015610937 5\,(-1+30z-210z^2+560z^3-630z^4+252z^5))/6507895829158339848621188183410277 16 - (7510679887349177858171679687 5\,(1-42z+420z^2-1680z^3+3150z^4-2772z^5+924z^6))/3933343633007787820595223627335881 8 - (2553211341411945177944335937 5\,(-1+56z-756z^2+4200z^3-11550z^4+16632z^5-12012z^6+3432z^7))/1448781571491201847252574036068716463 - (3129459334123399147460937 50\,(1-72z+1260z^2-9240z^3+34650z^4-72072z^5+84084z^6-51480z^7+12870z^8))/2556673361455062083386895357768323 17 - (1254291282777982910156250 0\,(-1+90z-1980z^2+18480z^3-90090z^4+252252z^5-420420z^6+411840z^7-218790z^8+48620z^9))/144878157149120184725257403606871646 3$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In[16] := v10 [z_] = Expand [%]

Out[16] :=

$$\frac{211196869514424864629080274456400}{851373080737616411384247538384 39} - \frac{810450827265947143901684044063725\, z^2}{340549232295046564553699015353756} - \frac{8762911377212613723091875\, z^3}{119192231303266297593794655373 8146} - \frac{2363813379049172718106834663368 75\, z^4}{238384462606532595187589310747 6292} - \frac{16818917459178512667454687 5\, z^5}{595961156516331487968973276869073} - \frac{1406435318615231365659726562 50\, z^6}{851373080737616411384247538384 39} - \frac{6167415718646661433593750 00\, z^7}{595961156516331487968973276869073} - \frac{8259515847870012823242187500\, z^8}{595961156516331487968973276869073} - \frac{2508582565555965820312500 00\, z^9}{595961156516331487968973276869073}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เชบีเชฟบนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 3 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ q3 [z] *)

In[1] := q3 [z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (8 z ^ 2 - 8 z + 1)

In[2] := Eq1 = q3 ' [0] == 0 ;

In[3] := Eq2 = q3 [1] == 0 ;

In[4] := L [z_] := q3 '' [z] - q3 [z] / 2 ;

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 2 *)

In[5] := Eq3 = L [1 / 2] == -6 ;

In[6] := Solve [Eq1 && Eq2 && Eq3, { c1, c2, c3 }]

Out[6] := $\left\{ \left\{ c1 \to \frac{30}{19}, c2 \to -\frac{24}{19}, c3 \to -\frac{6}{19} \right\} \right\}$

In[7] := q3 [c1_ , c2_ , c3_] = q3 [z] ;

In[8] := $q3\left[\frac{30}{19}, -\frac{24}{19}, -\frac{6}{19} \right]$

Out[8] := $\frac{30}{19} - \frac{24}{19} (-1 + 2 z) - \frac{6}{19} (1 - 8 z + 8 z^2)$

In[9] := q3 [z_] = Expand [%]

Out[9] := $\frac{48}{19} - \frac{48 z^2}{19}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เซบีเชฟบนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 4 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ q4 [z] *)

```
In[1] := q4[z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (8 z^2 - 8 z + 1) + c4 (32 z^3
         - 48 z^2 + 18 z - 1)

In[2] := Eq1 = q4'[0] == 0;

In[3] := Eq2 = q4[1] == 0;

In[4] := L[z_] := q4''[z] - q4[z] / 2;
```

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่งคือ z = (2 – Sqrt [2]) / 4 และ (2 + Sqrt [2]) / 4 *)

```
In[5] := Eq3 = L[(2 - Sqrt[2]) / 4] == -6;

In[6] := Eq4 = L[(2 + Sqrt[2]) / 4] == -6;

In[7] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4, {c1, c2, c3, c4}]
```

$$\text{Out[7]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{5868}{3721}, c2 \to -\frac{4632}{3721}, c3 \to -\frac{1212}{3721}, c4 \to -\frac{24}{3721} \right\} \right\}$$

```
In[8] := q4[c1_, c2_, c3_, c4_] = q4[z];

In[9] := q4[5868/3721, -4632/3721, -1212/3721, -24/3721]
```

$$\text{Out[9]} := \frac{5868}{3721} - \frac{4632\,(-1 + 2z)}{3721} - \frac{1212\,(1 - 8z + 8z^2)}{3721} - \frac{24\,(-1 + 18z - 48z^2 + 32z^3)}{3721}$$

```
In[10] := q4[z_] = Expand[%]
```

$$\text{Out[10]} := \frac{9312}{3721} - \frac{8544\,z^2}{3721} - \frac{768\,z^3}{3721}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เซบีเชฟบนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 5 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ q5 [z] *)

```
In[1] := q5[z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (8 z^2 - 8 z + 1) + c4 (32 z^3
         - 48 z^2 + 18 z - 1) + c5 (128 z^4 - 256 z^3 + 160 z^2 - 32 z + 1)

In[2] := Eq1 = q5'[0] == 0;

In[3] := Eq2 = q5[1] == 0;

In[4] := L[z_] := q5''[z] - q5[z] / 2;

In[5] := Eq3 = L[(2 - Sqrt[3]) / 4] == -6;

In[6] := Eq4 = L[1 / 2] == -6;

In[7] := Eq5 = L[(2 + Sqrt[3]) / 4] == -6;

In[8] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5, {c1, c2, c3, c4,
         c5}]
```

$$\text{Out[8]} := \left\{\left\{c1 \to \frac{2267364}{1452835}, c2 \to -\frac{1792512}{1452835}, c3 \to -\frac{92862}{290567}, c4 \to -\frac{9336}{1452835}, c5 \to -\frac{1206}{1452835}\right\}\right\}$$

```
In[9] := q5[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_] = q5[z];
```

$$\text{In[10]} := q5\left[\frac{2267364}{1452835}, -\frac{1792512}{1452835}, -\frac{92862}{290567}, -\frac{9336}{1452835}, -\frac{1206}{1452835}\right]$$

$$\text{Out[10]} := \frac{2267364}{1452835} - \frac{1792512\,(-1 + 2z)}{1452835} - \frac{92862\,(1 - 8z + 8z^2)}{290567} - \frac{9336\,(-1 + 18z - 48z^2 + 32z^3)}{1452835} - \frac{1206\,(1 - 32z + 160z^2 - 256z^3 + 128z^4)}{1452835}$$

```
In[11] := q5[z_] = Expand[%]
```

$$\text{Out[11]} := \frac{3603696}{1452835} - \frac{3459312\,z^2}{1452835} + \frac{9984\,z^3}{1452835} - \frac{154368\,z^4}{1452835}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เชบีเชฟบนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 6 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ q6 [z] *)

```
In[1] := q6[z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (8 z^2 - 8 z + 1) + c4 (32 z^3
         - 48 z^2 + 18 z - 1) + c5 (128 z^4 - 256 z^3 + 160 z^2 - 32 z + 1)
         + c6 (512 z^5 - 1280 z^4 + 1120 z^3 - 400 z^2 + 50 z - 1)

In[2] := Eq1 = q6'[0] == 0;

In[3] := Eq2 = q6[1] == 0;

In[4] := L[z_] := q6''[z] - q6[z] / 2;
```

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 19 / 500 , 31 / 100 , 69 / 100 และ 24 / 25 *)

```
In[5] := Eq3 = L[19 / 500] == -6;

In[6] := Eq4 = L[31 / 100] == -6;

In[7] := Eq5 = L[69 / 100] == -6;

In[8] := Eq6 = L[24 / 25] == -6;

In[9] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6, {c1, c2,
         c3, c4, c5, c6}]
```

$$\text{Out[9]} := \left\{\left\{ c1 \to \frac{464438187341046543750}{297575772436363987277},\ c2 \to -\frac{734387616820911391875}{595151544872727974554},\ c3 \to -\frac{190192267961625133125}{595151544872727974554},\ c4 \to -\frac{1897655946298593750}{297575772436363987277},\ c5 \to -\frac{495263467848046875}{595151544872727974554},\ c6 \to -\frac{495263467848046875}{595151544872727974554} \right\}\right\}$$

```
In[10] := q6[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_] = q6[z];
```

$$\text{In[11]} := q6\left[\frac{464438187341046543750}{297575772436363987277}, -\frac{734387616820911391875}{595151544872727974554}, -\frac{190192267961625133125}{595151544872727974554}, -\frac{1897655946298593750}{297575772436363987277}, -\frac{495263467848046875}{595151544872727974554}, -\frac{5914539111328125}{595151544872727974554}\right]$$

$$\text{Out[11]} := \frac{464438187341046543750}{297575772436363987277} - \frac{734387616820911391875\,(-1+2z)}{595151544872727974554} -$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{19019226796162513 3125\,(1-8z+8z^2)}{595151544872727974554} -$$

$$\frac{1897655946298593750\,(-1+18z-48z^2+32z^3)}{297575772436363987277} -$$

$$\frac{495263467848046875\,(1-32z+160z^2-256z^3+128z^4)}{595151544872727974554} -$$

$$\frac{5914539111328125\,(-1+50z-400z^2+1120z^3-1280z^4+512z^5)}{595151544872727974554}$$

In[12] := q6 [z_] = Expand [%]

Out[12] :=

$$\frac{738188843252619907500}{297575772436363987277} - \frac{708119756029746157500\,z^2}{297575772436363987277} -$$

$$\frac{643408299348750000\,z^3}{297575772436363987277} - \frac{279115569110250000 00\,z^4}{297575772436363987277} -$$

$$\frac{1514122012500000000\,z^5}{297575772436363987277}$$

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เชบีเชฟบนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 7 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ q7 [z] *)

```
In[1] := q7[z_] := c1 + c2 (2 z - 1) + c3 (8 z^2 - 8 z + 1) + c4 (32 z^3
         - 48 z^2 + 18 z - 1) + c5 (128 z^4 - 256 z^3 + 160 z^2 - 32 z + 1)
         + c6 (512 z^5 - 1280 z^4 + 1120 z^3 - 400 z^2 + 50 z - 1) +
         + c7 (2048 z^6 - 6144 z^5 + 6912 z^4 - 3584 z^3 + 840 z^2 -
         72 z + 1)

In[2] := Eq1 = q7'[0] == 0;

In[3] := Eq2 = q7[1] == 0;

In[4] := L[z_] := q7''[z] - q7[z] / 2;

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 49 / 2000 , 103 / 500 , 1 / 2 , 79 / 100 , 122 / 125 *)

In[5] := Eq3 = L[49 / 2000] == -6;

In[6] := Eq4 = L[103 / 500] == -6;

In[7] := Eq5 = L[1 / 2] == -6;

In[8] := Eq6 = L[79 / 100] == -6;

In[9] := Eq7 = L[122 / 125] == -6;

In[10] := Solve[Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7,
          {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7}]
```

$$\text{Out[10]} := \left\{\left\{ c1 \to \frac{22372857641846418917512457 45}{14334829756627345465900692 66},\right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{11792250836277826754781113 49}{95565531710848969772671284 4},$$

$$c3 \to -\frac{76350550621166495782192114}{23891382927712242443167821 1},$$

$$c4 \to -\frac{91412828412503773129182 25}{14334829756627345465900692 66},$$

$$c5 \to -\frac{39601108309255441695312 5}{47782765855424484886335642 2},$$

$$c6 \to -\frac{95219366052697238281 25}{95565531710848969772671284 4},$$

$$\left.\left. c7 \to -\frac{618010266479345703125}{71674148783136727329503463 3} \right\}\right\}$$

```
In[11] := q7[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_, c7_] = q7[z];
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
In[12] :=  q7[ 223728576418464189175124574 5/14334829756627345465900692 66,
             -1179225083627782675478111349/955655317108489697726712844,
             -763505506211664957821921 14/23891382927712242443167821 1,
             -914128284125037731291822 5/14334829756627345465900692 66,
             -396011083092554416953125/477827658554244848863356422,
             -952193660526972382812 5/955655317108489697726712844,
             -618010266479345703125/716741487831367273295034633 ]

Out[12] :=  223728576418464189175124574 5/14334829756627345465900692 66 -
            1179225083627782675478111349 ( - 1 + 2 z )/
              955655317108489697726712844 -
            763505506211664957821921 14 ( 1 - 8 z + 8 z^2 )/
              23891382927712242443167821 1 -
            ( 914128284125037731291822 5 ( - 1 + 18 z - 48 z^2 + 32 z^3 ) ) /
             14334829756627345465900692 66 -
            ( 396011083092554416953125
              ( 1 - 32 z + 160 z^2 - 256 z^3 + 128 z^4 ) ) /
             477827658554244848863356422 -
            ( 952193660526972382812 5
              ( - 1 + 50 z - 400 z^2 + 1120 z^3 - 1280 z^4 + 512 z^5 ) ) /
             955655317108489697726712844 -
            ( 618010266479345703125
              ( 1 - 72 z + 840 z^2 - 3584 z^3 + 6912 z^4 - 6144 z^5 + 2048 z^6 ) ) /
            716741487831367273295034633

In[13] :=  q7 [ z_ ] = Expand [ % ]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Out[13]} := \frac{1777993191187832295115827436}{71674148783136727329503463 3} - \frac{5685758781008205455245036 12\, z^2}{23891382927712242443167821 1} + \frac{8084164723422029227800\, z^3}{23891382927712242443167821 1} - \frac{2372158525820558356000000 0\, z^4}{23891382927712242443167821 1} + \frac{4687714027517535000000 0\, z^5}{23891382927712242443167821 1} - \frac{1265685025749700000000000\, z^6}{71674148783136727329503463 3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)
(* เซบีเชฟบนช่วง [ 0 , 1 ] เมื่อ  n = 8 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ  q8 [ z ] *)
In[1] :=    q8 [ z_ ] := c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 8 z^2 - 8 z + 1 )+ c4 ( 32 z^3
            - 48 z^2 + 18 z - 1 ) + c5 ( 128 z^4 - 256 z^3 + 160 z^2 - 32 z + 1 )
            + c6 ( 512 z^5 - 1280 z^4 + 1120 z^3 - 400 z^2 + 50 z  - 1 ) +
            + c7 ( 2048 z^6 - 6144 z^5 + 6912 z^4 - 3584 z^3 + 840 z^2 -
            72 z  + 1 ) + c8 ( - 1 + 98 z - 1568 z^2 + 9408 z^3 - 26880 z^4 +
             39424 z^5 - 28672 z^6 + 8192 z^7 )

In[2] :=    Eq1 = q8 ' [ 0 ]  == 0 ;

In[3] :=    Eq2 = q8 [ 1 ]  == 0 ;

In[4] :=    L [ z_ ] := q8 '' [ z ] - q8 [ z ] / 2 ;

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 17 / 1000 , 73 / 500 , 37 / 100 , 63 / 100 , 17 / 20 *)
(* และ49 / 50 *)

In[5] :=    Eq3 = L [ 17 / 1000 ]  == - 6 ;

In[6] :=    Eq4 = L [ 73 / 500 ]  == - 6 ;

In[7] :=    Eq5 = L [ 37 / 100 ]  == - 6 ;

In[8] :=    Eq6 = L [ 63 / 100 ]  == - 6 ;

In[9] :=    Eq7 = L [ 17 / 20 ]  == - 6 ;

In[10] :=   Eq8 = L [ 49 / 50 ]  == - 6 ;

In[11] :=   Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7
            && Eq8, { c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8 } ]
```

$$\text{Out[11]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{1130224644897695527948143801102075 0}{724162186149925371255726241559854 9}, \right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{8935755626990750061924082131371100}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$c3 \to -\frac{2314231109120569741324006632975900}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$c4 \to -\frac{4617980243633190745835864845500 0}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$c5 \to -\frac{6001636964064104730102497437500}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$c6 \to -\frac{7196863478576479898448750000 0}{724162186149925371255726241559854 9},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c7 \to -\frac{625145379185848347685546875 0}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$c8 \to -\frac{533766618407624267578125 00}{724162186149925371255726241559854 9} \} \}$$

In[12] := q8[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_, c7_, c8_] = q8[z];

In[13] := q8[

$$\frac{113022464489769552794814380110207 50}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$-\frac{893575562699075006192408213137110 0}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$-\frac{231423110912056974132400663297590 0}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$-\frac{461798024363319074583586484550 00}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$-\frac{600163696406410473010249743750 0}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$-\frac{719686347857647989844875000 00}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$-\frac{625145379185848347685546875 0}{724162186149925371255726241559854 9},$$

$$-\frac{533766618407624267578125 00}{724162186149925371255726241559854 9}]$$

Out[13] :=

$$\frac{113022464489769552794814380110207 50}{724162186149925371255726241559854 9} -$$

$$\frac{893575562699075006192408213137110 0\,(-1+2z)}{724162186149925371255726241559854 9} -$$

$$\frac{231423110912056974132400663297590 0\,(1-8z+8z^2)}{724162186149925371255726241559854 9} -$$

$$(461798024363319074583586484550 00$$

$$(-1+18z-48z^2+32z^3))/$$

$$724162186149925371255726241559854 9 -$$

$$(600163696406410473010249743750 0$$

$$(1-32z+160z^2-256z^3+128z^4))/$$

$$724162186149925371255726241559854 9 -$$

$$(719686347857647989844875000 00$$

$$(-1+50z-400z^2+1120z^3-1280z^4+512z^5))/$$

$$724162186149925371255726241559854 9 -$$

$$(625145379185848347685546875 0$$

$$(1-72z+840z^2-3584z^3+6912z^4-6144z^5+2048z^6))/$$

$$724162186149925371255726241559854 9 -$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(5337666184076242675781250 0 (- 1 + 98 z - 1568 z^2 + 9408 z^3 - 26880 z^4 + 39424 z^5 - 28672 z^6 + 8192 z^7)) / 724162186149925371255726241559854 9$$

In[14] := q8 [z_] = Expand [%]

Out[14] :=

$$\frac{1796401490287705914988770405027720 0}{724162186149925371255726241559854 9} - \frac{1723386034293597202044884487171720 0 z^2}{724162186149925371255726241559854 9} - \frac{3644336684389075375090656000 0 z^3}{724162186149925371255726241559854 9} - \frac{7178649628134726065137506720000000 z^4}{724162186149925371255726241559854 9} - \frac{5433304295432725107576000000000 z^5}{724162186149925371255726241559854 9} - \frac{1127256171742783386060000000000000 z^6}{724162186149925371255726241559854 9} - \frac{4372616137995258000000000000000 z^7}{724162186149925371255726241559854 9}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)

(* เชบีเชฟบนช่วง [0 , 1] เมื่อ n = 9 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ q9 [z] *)

```
In[1] :=  q9 [ z_ ] := c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 8 z ^ 2 - 8 z + 1 )+ c4 ( 32 z ^ 3
          - 48 z ^ 2 + 18 z - 1 ) + c5 ( 128 z ^ 4 - 256 z ^ 3 + 160 z ^ 2 - 32 z + 1 )
          + c6 ( 512 z ^ 5 - 1280 z ^ 4 + 1120 z ^ 3 - 400 z ^ 2 + 50 z  - 1 ) +
          + c7 ( 2048 z ^ 6 - 6144 z ^ 5 + 6912 z ^ 4 - 3584 z ^ 3 + 840 z ^ 2 -
          72 z  + 1 ) + c8 ( - 1 + 98 z - 1568 z ^ 2 + 9408 z ^ 3 - 26880 z ^ 4 +
           39424 z ^ 5 - 28672 z ^ 6 + 8192 z ^ 7 ) + c9 ( 1 - 128 z + 2688 z ^ 2 -
          21504 z^3 ^ 3 + 84480 z^4 ^ 4 - 180224 z^5 ^ 5 + 212992 z^6 ^ 6 -
          131072 z^7 ^ 7 + 32768 z^8 ^ 8 )

In[2] :=  Eq1 = q9 ' [ 0 ]  == 0 ;

In[3] :=  Eq2 = q9 [ 1 ]  == 0 ;

In[4] :=  L [ z_ ] := q9 '' [ z ] - q9 [ z ] / 2 ;

(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 1 / 80 , 109 / 1000 , 3283/ 1000 , 1 / 2 , *)

(* 717 / 1000 , 87 / 1000 และ 987 / 1000 *)

In[5] :=  Eq3 = L [ 1 / 80 ]  == - 6 ;

In[6] :=  Eq4 = L [ 109 / 1000 ]  == - 6 ;

In[7] :=  Eq5 = L [ 283 / 1000 ]  == - 6 ;

In[8] :=  Eq6 = L [ 1 / 2 ]  == - 6 ;

In[9] :=  Eq7 = L [ 717 / 1000 ]  == - 6 ;

In[10] :=  Eq8 = L [ 89 / 100 ]  == - 6 ;

In[11] :=  Eq9 = L [ 987 / 1000 ]  == - 6 ;

In[12] :=  Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7
           && Eq8 && Eq9, { c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9 } ]
```

$$\text{Out[12]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{432743683489754696886812652526091429386257 0}{277269314447366715497112215019439135758405 7}, \right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{342134797754928555186914672591564235655402 2}{277269314447366715497112215019439135758405 7},$$

$$c3 \to -\frac{886079506737947095269480219015489520600458}{277269314447366715497112215019439135758405 7},$$

$$c4 \to -\frac{176814561004823718517948185271797146970 90}{277269314447366715497112215019439135758405 7},$$

$$\left. c5 \to -\frac{229792774834083929608290408415631876100 0}{277269314447366715497112215019439135758405 7}, \right.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$c6 \to -\frac{2755551617318309229179626891463325000}{27726931444736671549711221501943913575840 57},$$

$$c7 \to -\frac{2389410285186826849167313117687500000}{27726931444736671549711221501943913575840 57},$$

$$c8 \to -\frac{2050247475630210619106219531250000 0}{27726931444736671549711221501943913575840 57},$$

$$c9 \to -\frac{1332557984360374703074218750000000 0}{27726931444736671549711221501943913575840 57} \} \}$$

In[13] := q9 [c1_ , c2_ , c3_ , c4_ , c5_ , c6_, c7_ , c8_, c9_] = q9 [z] ;

In[14] := q9 [$\frac{4327436834897546968868126525260914293862570}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{3421347977549285551869146725915642356554022}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{8860795067379470952694802190154895206004 58}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{1768145610048237185179481852717971469709 0}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{2297927748340839296082904084156318761000}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{2755551617318309229179626891463325000 0}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{2389410285186826849167313117687500000}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{2050247475630210619106219531250000 0}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$,

$-\frac{1332557984360374703074218750000000 0}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$]

Out[14] := $\frac{4327436834897546968868126525260914293862570}{27726931444736671549711221501943913575840 57}$ -

(3421347977549285551869146725915642356554022 (- 1 + 2 z)) /

27726931444736671549711221501943913575840 57 -

(8860795067379470952694802190154895206004 58

(1 - 8 z + 8 z^2)) /

27726931444736671549711221501943913575840 57 -

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\left(176814561004823718517948185271797146970900\left(-1+18z-48z^2+32z^3\right)\right)/277269314447366715497112215019439135758405 7}{\left(229792774834083929608290408415631876100 0\left(1-32z+160z^2-256z^3+128z^4\right)\right)/277269314447366715497112215019439135758405 7}-$$

$$\frac{\left(275555161731830922917962689146332500000\left(-1+50z-400z^2+1120z^3-1280z^4+512z^5\right)\right)/277269314447366715497112215019439135758405 7}{\left(238941028518682684916731311768750000 0\left(1-72z+840z^2-3584z^3+6912z^4-6144z^5+2048z^6\right)\right)/277269314447366715497112215019439135758405 7}-$$

$$\frac{\left(205024747563021061910621953125000000\left(-1+98z-1568z^2+9408z^3-26880z^4+39424z^5-28672z^6+8192z^7\right)\right)/277269314447366715497112215019439135758405 7}{\left(133255798436037470307421875000000 0\left(1-128z+2688z^2-21504z^3+84480z^4-180224z^5+212992z^6-131072z^7+32768z^8\right)\right)/277269314447366715497112215019439135758405 7}$$

In[15] := q9[z_] = Expand[%]

$$\text{Out[15]} = \frac{68781140193368317262306790635478640340022 24}{277269314447366715497112215019439135758405 7}-\frac{659855093302068497726423142971505506110334 4z^2}{277269314447366715497112215019439135758405 7}+\frac{144752351879882962476570169492509120z^3}{277269314447366715497112215019439135758405 7}-\frac{274940762954233782787056925020734241408000z^4}{277269314447366715497112215019439135758405 7}+\frac{398187689903084389469412277977600000 0z^5}{277269314447366715497112215019439135758405 7}-\frac{458948949805481232714170600102400000000 0z^6}{277269314447366715497112215019439135758405 7}+\frac{670476692245617916416249600000000000 0z^7}{277269314447366715497112215019439135758405 7}-\frac{436652600315207582703360000000000000 00z^8}{277269314447366715497112215019439135758405 7}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
(* ผลเฉลยโดยประมาณโดยวิธีการจัดตำแหน่งเชิงตั้งฉากที่มีฟังก์ชันฐานหลักเป็นพหุนาม *)
(* เชบีเชฟบนช่วง [ 0 , 1 ] เมื่อ  n = 10 โดยกำหนดผลเฉลยโดยประมาณ คือ  q10 [ z ] *)
In[1] :=  q10 [ z_ ] := c1 + c2 ( 2 z - 1 ) + c3 ( 8 z ^ 2 - 8 z + 1 )+ c4 ( 32 z ^ 3
          - 48 z ^ 2 + 18 z - 1 ) + c5 ( 128 z ^ 4 - 256 z ^ 3 + 160 z ^ 2 - 32 z + 1 )
          + c6 ( 512 z ^ 5 - 1280 z ^ 4 + 1120 z ^ 3 - 400 z ^ 2 + 50 z  - 1 ) +
          + c7 ( 2048 z ^ 6 - 6144 z ^ 5 + 6912 z ^ 4 - 3584 z ^ 3 + 840 z ^ 2 -
          72 z  + 1 ) + c8 ( - 1 + 98 z - 1568 z ^ 2 + 9408 z ^ 3 - 26880 z ^ 4 +
           39424 z ^ 5 - 28672 z ^ 6 + 8192 z ^ 7 ) + c9 ( 1 - 128 z + 2688 z ^ 2 -
          21504 z^3 ^ 3 + 84480 z^4 ^ 4 - 180224 z^5 ^ 5 + 212992 z^6 ^ 6 -
          131072 z^7 ^ 7 + 32768 z^8 ^ 8 ) + c10 ( - 1 + 162 z - 4320 z ^ 2 +
          44352 z ^ 3 - 228096 z ^ 4 + 658944 z ^ 5 - 1118208 z ^ 6 +
          1105920 z ^ 7 - 589824 z ^ 8 + 131072 z ^ 9 )
In[2] :=  Eq1 = q10 ' [ 0 ] == 0 ;
In[3] :=  Eq2 = q10 [ 1 ] == 0 ;
In[4] :=  L [ z_ ] := q10 '' [ z ] - q10 [ z ] / 2 ;
(* เลือกจุดการจัดตำแหน่ง คือ z = 6 / 625 , 21 / 250 , 11/ 50 , 2 / 5 , 3 / 5 , 39 / 50 , *)
(* 23 / 25 และ 99 / 100 *)
In[5] :=  Eq3 = L [ 6 / 625 ] == - 6 ;
In[6] :=  Eq4 = L [ 21 / 250 ] == - 6 ;
In[7] :=  Eq5 = L [ 11 / 50 ] == - 6 ;
In[8] :=  Eq6 = L [ 2 / 5 ] == - 6 ;
In[9] :=  Eq7 = L [ 3 / 5 ] == - 6 ;
In[10] :=  Eq8 = L [ 39 / 50 ] == - 6 ;
In[11] :=  Eq9 = L [ 23 / 25 ] == - 6 ;
In[12] :=  Eq10 = L [ 99 / 100 ] == - 6 ;
In[13] :=  Solve [ Eq1 && Eq2 && Eq3 && Eq4 && Eq5 && Eq6 && Eq7
           && Eq8 && Eq9 && Eq10, { c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8, c9, c10 } ]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Out[13]} := \left\{ \left\{ c1 \to \frac{1162000575180991164736676230913654785012 5}{7445217923614787136146271649876019500544}, \right.\right.$$

$$c2 \to -\frac{3674792695533510394014035447604274007002 5}{2978087169445914854458508659950407800217 6},$$

$$c3 \to -\frac{1487059395312432053548532242830280917 75}{4653261202259241960091419781172512187 84},$$

$$c4 \to -\frac{1899125319844426991907729414202963631 25}{2978087169445914854458508659950407800217 6},$$

$$c5 \to -\frac{1542595229689831393892123561159671875}{1861304480903696784036567912469004875136},$$

$$c6 \to -\frac{2959678100226239586953204773746093 75}{2978087169445914854458508659950407800217 6},$$

$$c7 \to -\frac{4010014089153953866434455566406 25}{4653261202259241960091419781172512187 84},$$

$$c8 \to -\frac{5498197029551398589501147460937 5}{7445217923614787136146271649876019500544},$$

$$c9 \to -\frac{3580479492227607834136962890625}{7445217923614787136146271649876019500544},$$

$$\left.\left. c10 \to -\frac{9550514489322607040405273437 5}{2978087169445914854458508659950407800217 6} \right\} \right\}$$

```
In[14] := q10[c1_, c2_, c3_, c4_, c5_, c6_, c7_, c8_, c9_, c10_] =
          q10[z];
```

$$\text{In[15]} := q10\left[\frac{1162000575180991164736676230913654785012 5}{7445217923614787136146271649876019500544},\right.$$

$$-\frac{3674792695533510394014035447604274007002 5}{2978087169445914854458508659950407800217 6},$$

$$-\frac{1487059395312432053548532242830280917 75}{4653261202259241960091419781172512187 84},$$

$$-\frac{1899125319844426991907729414202963631 25}{2978087169445914854458508659950407800217 6},$$

$$-\frac{1542595229689831393892123561159671875}{1861304480903696784036567912469004875136},$$

$$-\frac{2959678100226239586953204773746093 75}{2978087169445914854458508659950407800217 6},$$

$$-\frac{4010014089153953866434455566406 25}{4653261202259241960091419781172512187 84},$$

$$-\frac{5498197029551398589501147460937 5}{7445217923614787136146271649876019500544},$$

$$-\frac{3580479492227607834136962890625}{7445217923614787136146271649876019500544},$$

$$\left.-\frac{9550514489322607040405273437 5}{2978087169445914854458508659950407800217 6}\right]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
Out[15] := 116200057518099116473667623091365478501 25
           ------------------------------------------ -
           744521792361478713614627164987601950054 4

           367479269553351039401403544760427400700 25 ( - 1 + 2 z )
           ------------------------------------------------------- -
           297808716944591485445850865995040780021 76

           148705939531243205354853224283028091775 ( 1 - 8 z + 8 z^2 )
           ------------------------------------------------------------ -
           465326120225924196009141978117251218784
           ( 189912531984442699190772941420296363125
             ( - 1 + 18 z - 48 z^2 + 32 z^3 ) ) /
           297808716944591485445850865995040780021 76 -
           ( 154259522968983139389212356115967187 5
             ( 1 - 32 z + 160 z^2 - 256 z^3 + 128 z^4 ) ) /
           186130448090369678403656791246900487513 6 -
           ( 295967810022623958695320477374609375
             ( - 1 + 50 z - 400 z^2 + 1120 z^3 - 1280 z^4 + 512 z^5 ) ) /
           297808716944591485445850865995040780021 76 -
           ( 401001408915395386643445556640625
             ( 1 - 72 z + 840 z^2 - 3584 z^3 + 6912 z^4 - 6144 z^5 + 2048 z^6 ) ) /
           465326120225924196009141978117251218784 -
           ( 549819702955139858950114746093 75 ( - 1 + 98 z - 1568 z^2 +
             9408 z^3 - 26880 z^4 + 39424 z^5 - 28672 z^6 + 8192 z^7 ) ) /
           744521792361478713614627164987601950054 4 -
           ( 358047949222760783413696289062 5
             ( 1 - 128 z + 2688 z^2 - 21504 z^3 + 84480 z^4 -
               180224 z^5 + 212992 z^6 - 131072 z^7 + 32768 z^8 ) ) /
           744521792361478713614627164987601950054 4 -
           ( 955051448932260704040527343 75
             ( - 1 + 162 z - 4320 z^2 + 44352 z^3 - 228096 z^4 + 658944 z^5 -
               1118208 z^6 + 1105920 z^7 - 589824 z^8 + 131072 z^9 ) ) /
           297808716944591485445850865995040780021 76

In[16] := q10 [ z_ ] = Expand [ % ]
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{Out[16]} := \frac{360723981202665581935927660042874631 00}{145414412570601311252856868161641005 87} - \frac{692124484788076787599440277213169055 75\, z^2}{290828825141202622505713736323282011 74} - \frac{730336531850678918422648462 50\, z^3}{145414412570601311252856868161641005 87} - \frac{288385048308321482240417149624317187 5\, z^4}{290828825141202622505713736323282011 74} - \frac{369370575992988274074904335937 5\, z^5}{145414412570601311252856868161641005 87} - \frac{240224334936915049596202368164062 50\, z^6}{145414412570601311252856868161641005 87} - \frac{146815529602982467993095703125 00\, z^7}{145414412570601311252856868161641005 87} - \frac{201645205773317793108398437500000\, z^8}{145414412570601311252856868161641005 87} - \frac{611232927316646850585937500000 0\, z^9}{145414412570601311252856868161641005 87}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้