

แบบจำลองต้านการแกว่งสำหรับปั้นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ
โดยเห็นเทคนิคริคคาตี

ANTI-SWAY MODEL FOR OVERHEAD CRANE
BASE ON RICCATI TECHNIQUE



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุม

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2551

KMITL-2008-EN-M-060-020

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

**แบบจำลองด้านการแกว่งสำหรับปั้นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ
โดยเน้นเทคนิคริกคาตี**

**ANTI-SWAY MODEL FOR OVERHEAD CRANE
BASE ON RICCATI TECHNIQUE**



กิติโชค พรหมณีวัฒน์

KITICHOKE PROMMANEEWAT

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน.....
วัน,เดือน,ปี.....

79837

18 เม.ย. 2551

b.....

i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุม
บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2551

KMITL - 2008 - EN - M - 060 - 020

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**ANTI-SWAY MODEL FOR OVERHEAD CRANE
BASE ON RICCATI TECHNIQUE**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN INSTRUMENTATION ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2008

KMITL – 2008 – EN – M – 060 – 020

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2008

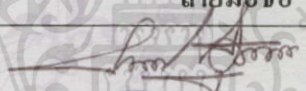




SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ แบบจำลองด้านการแกว่งสำหรับป็นจันแบบลอยเหนือศีรษะโดยเน้นเทคนิค
รีคคาติ
Anti-Sway Model for Overhead Crane Base on Riccati Technique
นักศึกษา นายกิติโชค พรหมณีวัฒน์
รหัสประจำตัว 48060803
ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา วิศวกรรมการวัดคุม
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.วิริยะ กองรัตน์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
รศ.สุพรรณ กลุพานิชย์	
รศ.ไสว พงศ์สวัสดิ์	
ดร.มงคล กลิ่นกระจาย	
รศ.วิทยา ทิพย์สุวรรณพร	
รศ.วิริยะ กองรัตน์	

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ 18 ธันวาคม 2550 เวลา 10.30-12.30 น.

สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 5 ห้องประชุม 3

บัณฑิตวิทยาลัยรับรองแล้ว

(รศ.ดร.รวีวรรณ ชินะตระกูล)

รักษาราชการแทน คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่...๑๑...เดือน...กุมภาพันธ์...พ.ศ.๒๕๕๑.....

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์

แบบจำลองด้านการแกว่งสำหรับปั่นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ
โดยเน้นเทคนิครีคาคติ

นักศึกษา

นายกิติโชค พรหมณีวัฒน์

รหัสนักศึกษา

48060803

ปริญญา

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา

วิศวกรรมการควบคุม

พ.ศ.

2551

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

รศ.วิริยะ กองรัตน์

บทคัดย่อ

การศึกษาแบบจำลองของระบบเคอร์เนลมีหลายรูปแบบทำให้ได้ค่าพารามิเตอร์ที่หลากหลาย แต่สิ่งหนึ่งที่คล้ายกันของการวิเคราะห์แบบจำลองคณิตศาสตร์โดยทั่วไปของระบบเคอร์เนลค่าความเร็วเชิงมุม (angular velocity ($\dot{\theta}$)) ซึ่งจะถูกอนุมานว่ามีค่าน้อยมากจึงละเลยพจน์นี้เพื่อให้ง่ายต่อการเขียนสมการของระบบให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงเส้น งานวิจัยวิเคราะห์โมเดลคณิตศาสตร์ของระบบเคอร์เนลครั้งนี้จึงได้นำเสนอการอนุมานค่าความเร็วเชิงมุม ให้มีค่าเท่ากับค่าความเร็วเชิงมุมธรรมชาติของเพนดูลัม (natural angular velocity (ω_n)) แทนการละเลยค่าความเร็วเชิงมุมไปและสมการของระบบยังคงอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงเส้น โดยมีวัตถุประสงค์ที่จะลดความผิดพลาดจากการออกแบบตัวควบคุมให้ได้สมการใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด การวิเคราะห์หาค่าอัตราขยายและการควบคุมระบบเพื่อเปรียบเทียบสมการทั้งสองรูปแบบได้อาศัยวิธีการออกแบบตัวควบคุมชนิดแอลคิว(LQ) ที่มีการเพิ่มค่าอย่างคงที่ ซึ่งอ้างอิงการใช้สมการรีคาคติหาค่าตัวควบคุมระบบเพื่อให้ง่ายต่อการเปรียบเทียบผลตอบสนองต่อระบบ และนำเสนอวิธีการเลือกค่าอัตราขยายที่เหมาะสมต่อระบบ

Thesis	Anti-Sway Model for Overhead Crane Base on Riccati Technique
Student	Mr.Kitichoke Prommaneeawat
Student ID.	48060803
Degree	Master of Engineering
Program	Instrumentation Engineering
Year	2008
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Viriya Kongratana

ABSTRACT

The models of overhead crane system had been studied in many regulation methods; hence bring about the variation parameter. However, there are have the similar conjecture of angular velocity ($\dot{\theta}$) in the mathematics models of pendulum system. The angular velocity can be deduced to be zero to perform the simply system as the linear equation form. In this thesis, the different direction of mathematical analysis of an overhead crane model was studied what the angular velocity ($\dot{\theta}$) was set as in the same value of natural angular velocity (ω_n) instead of neglected to return this values. These equations are still having the linear equation properties for the state space equation. The purpose of this study is to reduce the error of controller design to give the equation to be closed to the real system. The linear quadratic (LQ) is applied to control the system. The controller, which fix gain condition and charge mass load, is presented to improve the stabilities. The results show the over shoot value was diminished. And, the extended gain values have less than the previous values of calculations. Whereas, the period of time of the system descended to the steady state have the same value. Which give the advantage to obviate the problem of over feed extended gain to the system.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีเพราะได้รับความเมตตาจาก รองศาสตราจารย์ วิริยะ กองรัตน์ รองศาสตราจารย์ประภาส อุกคฤมาพันธุ์ รองศาสตราจารย์วิทยา ทิพย์สุวรรณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์อัจฉิน น่วมตำราญ ที่ได้ให้คำแนะนำแก่ผู้วิจัยตลอดมา อีกทั้งยังเอื้อเฟื้ออุปการณ์ และเครื่องมือต่างๆ ในการทำวิทยานิพนธ์นี้ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งและขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ขอขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมการวัดคุมทุกท่าน ที่ได้ให้คำแนะนำอันเป็น ประโยชน์ต่อการทำปริญญาฉบับนี้

ขอขอบคุณ เพื่อนๆภาควิชาวิศวกรรมการวัดคุมและน้องๆภาควิชาฟิสิกส์ จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัยที่ให้คำปรึกษา คำชี้แนะ อีกทั้งยังเอื้อเฟื้ออุปการณ์และเครื่องมือต่างๆ ในการทำ วิทยานิพนธ์ฉบับนี้

ขอขอบคุณมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตเฉลิมพระเกียรติ จังหวัดสกลนคร มอบทุนการศึกษา วิจัยและแหล่งความรู้อันมีค่าต่อการค้นคว้าในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

สุดท้ายซึ่งสำคัญที่สุด ขอกราบขอบพระคุณคุณแม่และคุณพ่อ ตลอดจนญาติพี่น้องอันเป็นที่รักยิ่ง ที่สนับสนุนและเป็นกำลังใจในการศึกษาตลอดมาด้วยนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอบแต่ผู้มีพระคุณทุกท่านที่ กล่าวมาทั้งหมด ขอขอบพระคุณ

กิติโชค พรหมณีวัฒน์

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญภาพ.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	2
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	3
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	3
1.6 ขั้นตอนของการศึกษา.....	4
บทที่ 2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบป้อนกลับแบบลอยเหนือศีรษะ.....	5
2.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	5
2.1.1 แบบจำลองระบบพลศาสตร์ของเพนดูลัมพื้นฐานลูกตุ้ม.....	7
2.1.2 แบบจำลองระบบพลศาสตร์ของป้อนกลับแบบลอยเหนือศีรษะ.....	13
2.2 สมการสเตรทสเปซ.....	21
บทที่ 3 การออกแบบตัวควบคุมด้วย LQ Controller.....	23
3.1 ลำดับขั้นตอนการออกแบบ.....	23
3.2 เกณฑ์ครรชนี่สมรรถนะ (Minimize the performance index).....	25
3.3 สมการพีชคณิตรีคาติ (Algebraic Riccati Equation).....	27
บทที่ 4 การหาอัตราขยายสัญญาณ โดยใช้เกณฑ์เสถียรภาพของเรทท์-เฮอรวิทซ์ (Routh-Hurwitz).....	32
4.1 การหาอัตราขยายที่เหมาะสม.....	32
4.2 วิเคราะห์เสถียรภาพด้วยวิธีของ Routh-Hurwitz.....	37

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และตี IV อ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 การจำลองผลทางคณิตศาสตร์และการวิเคราะห์.....	40
5.1 รูปแบบทางคณิตศาสตร์ป็นชั้นแบบลอยเหนือสี่ระยะ.....	40
5.1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเดิม	40
5.1.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเพิ่มเติม (งานวิจัย).....	40
5.2 การจำลองผลด้วยโปรแกรม MATLAB 7.0.....	42
5.2.1 การปรับค่าอัตราขยายตามการปรับค่ามวลไหลด	42
5.2.2 การปรับค่าอัตราขยายคงที่ที่ค่าคำนวณมวลไหลด 1 กิโลกรัม	42
5.2.3 การปรับค่าอัตราขยายมากกว่าค่าที่คำนวณได้	42
5.3 ผลการจำลอง.....	45
5.3.1 ผลการปรับค่าอัตราขยายตามการปรับค่ามวลไหลด	45
5.3.2 ผลการปรับค่าอัตราขยายคงที่ที่ค่าคำนวณมวลไหลด 1 กิโลกรัม	45
5.3.3 ผลการปรับค่าอัตราขยายมากกว่าค่าที่คำนวณได้	45
บทที่ 6 สรุปผลการจำลองระบบ.....	54
6.1 สรุปผลการจำลองระบบป็นชั้นแบบลอยเหนือสี่ระยะ.....	54
บรรณานุกรม.....	55
ภาคผนวก.....	56
ภาคผนวก ก. การใช้โปรแกรม Maple 9.5 และ Matlab 7.0.....	57
ภาคผนวก ข. ข้อมูลอ้างอิงและภาพประกอบ.....	66
ภาคผนวก ค. ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์และได้รับการตีพิมพ์.....	73
ประวัติผู้เขียน.....	79

สารบัญตาราง

ตารางที่

หน้า

3.1 ตัวอย่างผลการคำนวณหาค่า P จากสมการที่ 3.8 ด้วยโปรแกรมเมเปิล 9.5.....31



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และตี VI อ่างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญภาพ

ภาพที่	หน้า
2.1 แผนภูมิกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์.....	6
2.2 การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก ตัวอย่างการสั่นของสปริง.....	8
2.3 พื้นฐานของเพนดูลัม (simple pendulum).....	9
2.4 แบบจำลองพลศาสตร์ของเพนดูลัม.....	10
2.5 ปีนจันแบบลอยเหนือศีรษะ.....	13
2.6 ปีนจันยึดติดกับคานเหล็กรูปตัวไอ (I-BEAM).....	13
2.7 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ป็นจันแบบลอยเหนือศีรษะ.....	14
3.1 แผนภูมิแสดงลำดับขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม.....	24
5.1 แผนภูมิแสดงวิธีการจำลองผลแบบจำลองระบบ.....	42
5.2 บล็อกไดอะแกรมของการจำลองระบบปิด.....	44
5.3 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg.....	45
5.4 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 5$ kg.....	45
5.5 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 10$ kg.....	46
5.6 ผลตอบสนองต่อระบบเมื่อ $m = 20$ kg.....	46
5.7 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 40$ kg.....	47
5.8 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg.....	48
5.9 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 5$ kg.....	48
5.10 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 10$ kg.....	49
5.11 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 20$ kg.....	49
5.12 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 40$ kg.....	50
5.13 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg. และอัตราขยาย 1 เท่าจากที่คำนวณได้.....	51
5.14 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg. และอัตราขยาย 2 เท่าจากที่คำนวณได้.....	51
5.15 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg. และอัตราขยาย 3 เท่าจากที่คำนวณได้.....	52
5.16 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg. และอัตราขยาย 4 เท่าจากที่คำนวณได้.....	52
5.17 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg. และอัตราขยาย 5 เท่าจากที่คำนวณได้.....	53
ก.1 โปรแกรมเมเปิล 9.5.....	60
ก.2 ค่าตัวแปรจากสมการรีคิตี สมการที่ 5.1.....	60
ก.3 เขียน M-file สมการที่ 5.1.....	65
ก.4 ผลจากการรัน โปรแกรมสมการที่ 3.9.....	65

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และตัว VII ภาษาอังกฤษเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญญภาพ(ต่อ)

ภาพที่	หน้า
ข.1 เรลโหลด เครน (Raiload Crane).....	67
ข.2 เทเลสโคปิก เครน (Telescopic Crane).....	67
ข.3 รถบรรทุก-เมาท์ เครน (Truck-Mounted Crane).....	67
ข.4 เราท-เทอร์เรน เครน (Rough Terrain Crane).....	68
ข.5 กรอวเลอร์ เครน (Crawler Crane).....	68
ข.6 แกนทริ เครน (Gantry Crane).....	68
ข.7 ปั่นจันแบบลอยเหนือศีรษะ (Overhead Crane).....	69
ข.8 โฟลตติ้ง เครน (Floating Crane).....	69
ข.9 เอเรียล เครน (Aerial Crane).....	69
ข.10 โหลดเดอร์ เครน (Loader Crane).....	70
ข.11 สแตคเกอร์ เครน (Stacker Crane).....	70
ข.12 เทาวเวอร์ เครน (Tower Crane).....	71
ข.13 แฮมเมอร์ เครน (Hammer crane).....	71
ข.14 เวสเซล เครน(Vessel (Deck) crane).....	71
ข.15 จิบ เครน (Jib Crane).....	72

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การศึกษาระบบไดนามิกส์ของเพนคูลัมได้เริ่มในสมัยของกาลิเลโอ ต่อมาได้พัฒนา งานวิจัยอย่างจริงจังในช่วงของเซอร์ไอแซก นิวตัน และพัฒนาประยุกต์ใช้งานในวงการการศึกษา และวงการอุตสาหกรรมอย่างแพร่หลาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งการประยุกต์การขนถ่ายสินค้าท่าเรือและ ในโรงงานอุตสาหกรรมหนัก การประยุกต์ใช้งานปั้นจั่นมีชื่อเรียกต่างกันตามลักษณะการใช้งานที่ พบเห็นได้เด่นชัดสามารถแบ่งได้สองประเภทใหญ่ๆ ประเภทที่หนึ่งคือปั้นจั่นที่สามารถเคลื่อนที่ได้ (Mobile Crane) ใช้ในอุตสาหกรรมท่าเรือและโรงงาน มีขนาดใช้งาน 25 ถึง 360 ตัน ดังเช่น เรลโหลด เครน (Raiload Crane), เทเลสโคปิก เครน (Telescopic Crane), ทรัคส์-เมาท์ เครน (Truck-Mounted Crane), เราทึ่-เทอร์เรน เครน (Rough Terrain Crane), ครอว์เลอร์ เครน (Crawler Crane), แกนทรี เครน (Gantry Crane), ปั้นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ (Overhead Crane), โฟลตติ้ง เครน (Floating Crane), เอเรียล เครน (Aerial Crane), โหลดเดอร์ เครน (Loader Crane), สแตคเกอร์ เครน (Stacker Crane) และประเภทที่สองคือ ปั้นจั่นที่ไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ (Stationary Crane) ใช้งานที่ อยู่ประจำที่ใช้ในอุตสาหกรรมก่อสร้างเป็นสำคัญ ดังเช่น เทาวเวอร์ เครน (Tower Crane), แฮมเมอร์ เครน (Hammer crane), เวสเซล เครน (Vessel (Deck) crane), และจิบ เครน (Jib Crane)

การศึกษาวិเคราะห์พฤติกรรมของระบบปั้นจั่น โดยส่วนมากจะศึกษาระบบปั้นจั่นแบบ ลอยเหนือศีรษะเพราะลักษณะของปั้นจั่นเป็นพื้นฐานต่อการวิเคราะห์ปั้นจั่นในรูปแบบอื่นๆ โดย หลักการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์จะอาศัยกฎของฟิสิกส์ในหัวข้อของพลศาสตร์เพนคูลัม แต่การ วิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์คงไม่สามารถแก้ปัญหาทางพลศาสตร์ได้อย่างสมบูรณ์และยังคงพัฒนากัน เรื่อยมาจนกระทั่งปัจจุบันนี้ การวิเคราะห์ในปัจจุบันยังคงละเลยกับตัวแปรที่มีปัญหาซึ่งตัวแปร เหล่านี้ทำให้ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบที่ทำการคำนวณได้จึงได้ทำการลดทอนพารามิเตอร์ที่มีผลต่อ การวิเคราะห์ระบบให้น้อยลงหลายๆ เพื่อให้การวิเคราะห์เป็นไปได้โดยง่ายและสะดวกและจัดให้อยู่ใน รูปฟอร์มของคณิตศาสตร์ที่ต้องการที่สามารถทำการควบคุมได้ โดยตัวแปรที่สำคัญต่อระบบ จำแนกได้ดังนี้ มุมของเพนคูลัม มวลของรอรอก มวลของวัตถุแขวนและเส้นเชือก โดยค่าความยาว เส้นเชือกจะเป็นตัวแปรที่ทำให้ระบบนั้นสลับซับซ้อนยิ่งขึ้นและมีความยุ่งยากจึงมักนิยมให้มี ค่าคงที่

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

การศึกษาระบบพลศาสตร์เพนดูลัม มีผู้ทำการศึกษาค้นคว้ามานานแต่ยังไม่สามารถที่จะวิเคราะห์สมการที่สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบพลศาสตร์ได้สมบูรณ์ดังนั้นระบบพลศาสตร์เพนดูลัมจึงยังคงเป็นหัวข้อสำหรับวิจัยอย่างต่อเนื่อง ในการวิจัยพฤติกรรมระบบพลศาสตร์เพนดูลัมของระบบปั่นจั่นแบบลอยเหนือสึระ โดยมีจุดมุ่งหมายและนำเสนอในส่วนที่คาดว่าจะเป็นไปได้ เพื่อพัฒนางานวิจัยด้านนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้องทางวิศวกรรมด้านการออกแบบควบคุมระบบเครนได้ และสามารถใช้อ้างอิงงานวิจัยเพื่อให้เกิดการพัฒนาต่อไปในอนาคต

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

การวิเคราะห์พลศาสตร์เป็นหัวข้อที่มีผู้นำเสนอไว้หลายวิธี วิธีที่ได้รับความนิยมมากคือวิธีการของนิวตันแต่มีความสลับซับซ้อนมากและต้องเป็นผู้ที่ชำนาญถึงจะสามารถวิเคราะห์ด้วยวิธีนี้ได้อย่างถูกต้อง หากระบบที่มีอันดับสูงๆ ความผิดพลาดในการวิเคราะห์จะเพิ่มมากขึ้น ส่วนอีกวิธีหนึ่งที่ได้รับความนิยมในปัจจุบันนี้คือวิธีการพลศาสตร์ลากรางจ์ โดยสามารถวิเคราะห์ได้โดยง่าย ซึ่งกระบวนการคำนวณอนุพันธ์นั้น ไม่มีความสลับซับซ้อนมากนัก แม้ระบบจะมีอันดับสูงขึ้น สามารถวิเคราะห์ได้ตรงตามวิธีการของนิวตันซึ่งมีความซับซ้อนกว่ามาก

งานวิจัยนี้ใช้หลักการเบื้องต้นของการวิเคราะห์เพนดูลัมมาประยุกต์ร่วมกับการปรับปรุงตัวแปรค่าพารามิเตอร์ของระบบปั่นจั่นแบบลอยเหนือสึระเพื่อให้วิเคราะห์ได้ง่ายขึ้นดังจะนำเสนอในบทที่สองการศึกษานี้แสดงให้เห็นว่าค่าขยายป้อนกลับของความเร็วเชิงมุมเป็นที่มาของความไม่เสถียร ดังนั้นจึงให้มีค่าเท่ากับศูนย์ คอริกา (Corriga, 1998 : 15) และคณะได้ศึกษาและให้ค่าขยายป้อนกลับของความเร็วเชิงมุมมีค่าเข้าใกล้ศูนย์แต่ไม่ได้อธิบายเหตุผลนี้เท่าใดนัก แต่อ็เคอร์มัน (Ackermann, 1980 : 1058) ให้ค่าขยายป้อนกลับของความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์และให้เหตุผลว่าเพื่อที่จะหลีกเลี่ยงการวัดความเร็วเชิงมุมของเส้นเชือกซึ่งวัดออกมาได้ยาก จึงได้วิเคราะห์เหตุผลที่ให้ค่าของความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์และได้ออกแบบระเบียบวิธีการสำหรับเมตริกซ์น้ำหนักชนิดแอลคิว (LQ weighting matrices) ดังนั้นเหตุผลที่อ็เคอร์มันใช้วิเคราะห์ระบบ ได้มีผู้พัฒนาและวิจัยใช้ต่อเนื่องมาจนกระทั่งปัจจุบัน แต่ก็ยังไม่สามารถแก้ไขการวิเคราะห์ระบบสมการให้มีความสมบูรณ์ได้ จึงคาดว่าเมื่อเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ค่าขยายป้อนกลับของความเร็วเชิงมุมให้มีค่าที่ค่าหนึ่งแทนการตัดพารามิเตอร์ออกไปจากระบบ คาดว่าสมการที่ได้มานี้จะสามารถคำนวณค่าอัตราขยายระบบควบคุมได้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงของระบบพลศาสตร์เพนดูลัม

1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

การศึกษาระบบพลศาสตร์ของเพนดูลัมมีมานานอย่างต่อเนื่องและพัฒนาประยุกต์ใช้งานในวงการอุตสาหกรรมอย่างแพร่หลาย แต่ยังไม่สามารถที่จะวิเคราะห์สมการที่สามารถอธิบายพฤติกรรมของระบบพลศาสตร์เพนดูลัมได้อย่างสมบูรณ์ ดังนั้นการศึกษาพฤติกรรมทางคณิตศาสตร์ของระบบปั่นจั่น กรณีวิเคราะห์เวกเตอร์ในเชิงกลมีผู้นำเสนอไว้หลายวิธี วิธีหนึ่งที่ได้รับคามนิยมคือวิธีการพลศาสตร์ลากรางจ์ โดยสามารถวิเคราะห์ได้ง่ายด้วยกระบวนการคำนวณอนุพันธ์ ก็สามารถวิเคราะห์ได้เช่นเดียวกับวิธีการของนิวตันซึ่งมีความซับซ้อนมากกว่า การวิเคราะห์ระบบพลศาสตร์เพนดูลัมของปั่นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ โดยทั่วไปจะเลยกับตัวแปรที่มีปัญหา เพื่อให้การวิเคราะห์ระบบนั้นเป็นไปได้โดยง่าย เช่น ค่าของพจน์ $\theta\dot{\theta}$ มีผลต่อรูปแบบสมการทางคณิตศาสตร์อย่างมาก เนื่องจากไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้นได้ และเพื่อแก้ปัญหาที่ จึงลดทอนหรือคงค่า (Fix) ตัวแปรที่มีผลให้การวิเคราะห์ยุ่งยาก ดังเช่น จำแนกตัวแปรที่สำคัญต่อระบบกรณีนี้ มุมของเพนดูลัม, มวลของรตุรอก, มวลของวัตถุแขวนและเส้นเชือก โดยค่าความยาวเส้นเชือกจะเป็นตัวแปรที่ทำให้ระบบนั้นมีความยุ่งยากจึงมักนิยมให้มีค่าคงที่

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ศึกษาวิจัยระบบพลศาสตร์เพนดูลัมของปั่นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ โดยปรับปรุงพารามิเตอร์บางส่วนของกรวิเคราะห์เช่น การแทนค่า θ ให้อยู่ในรูปอื่น เพื่อลดปัญหาการจัดรูปสมการเชิงเส้น และเรียบเรียงวิธีการคำนวณหาค่าการควบคุม โดยหนึ่งในวิธีที่ได้รับความนิยมในทางวิศวกรรม เพื่อให้การหาค่าควบคุมสะดวกยิ่งขึ้น คือการออกแบบโดยใช้วิธีการแบบเรกูลาเตอร์กำลังสองเชิงเส้นตรงที่เหมาะสม (LQR) โดยจะต้องออกแบบระบบควบคุมให้ฟังก์ชันครรชนีสมรรถนะมีค่าน้อยที่สุด และเลือกค่าแฟคเตอร์น้ำหนักตามที่ผู้ออกแบบจะเป็นผู้เลือกจากการใช้สมการราคาติในการพิจารณา และใช้เกณฑ์เสถียรภาพของเราท์ – เฮอริวิตซ์ กำหนดขอบเขตค่าอัตราขยาย เพื่อให้ง่ายต่อการจำแนกในที่นี้ขอใช้คำว่า ระบบแบบเดิมแทนคำว่าระบบที่ละเลขค่า $\theta^2 \approx 0$ และ คำว่าระบบแบบเพิ่มเติมแทนคำว่าระบบที่อนุมาณค่า $\theta^2 \approx \omega_n^2$

1.5 ขอบเขตการวิจัย

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนองานวิจัยในส่วนของกรปรับปรุงพารามิเตอร์บางส่วนของกรวิเคราะห์ระบบพลศาสตร์เพนดูลัม ด้วยวิธีการของลากรางจ์ ดังเช่นการแทนค่าความเร็วเชิงมุม ($\dot{\theta}$) ให้อยู่ในรูปอื่นเพื่อจัดรูปสมการให้ดีขึ้น โดยไม่ใช้หลักการอนุมาณค่าในการวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ผลการจำลองระบบมีความแตกต่างที่เกิดขึ้น จากการหาค่าการควบคุมระบบ โดยยังคงมีเสถียรภาพหรือไม่และเรียบเรียงวิธีการคำนวณหาค่าการควบคุม (Gain value) และทดสอบผลการจำลองระบบปิดด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์เมเปิล 9.5 (Maple 9.5) และ โปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แมทแลป 7.0 (MATLAB 7.0) ที่ได้รับการยอมรับทางวิชาการในด้านการจำลองระบบเพื่อหาความเป็นไปได้ของระบบทำงานจริง และเปรียบเทียบผลการจำลองเพนคู่ลมที่ได้ทำการวิเคราะห์ใหม่ และการจำลองเพนคู่ลมด้วยหลักการวิเคราะห์ของอ็คเคอร์มาน

1.6 ขั้นตอนของการศึกษา

การศึกษาแบบจำลองด้านการแกว่งสำหรับป็นจันแบบลอยเหนือศีรษะนี้ เพื่อให้ง่ายต่อ งานวิจัย จึง ได้ลำดับขั้นตอนวิธีดำเนินการวิเคราะห์เป็น 6 ขั้นตอนคือ

1. ขั้นตอนที่หนึ่ง วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีการพลศาสตร์ ลากรางจ์ เนื่องจากระบบป็นจันแบบลอยเหนือศีรษะเป็นระบบแบบ โฮโลโนมิกส์ (Holonomic system) ซึ่งจะเหมาะสมมากสำหรับระบบที่มีการวิเคราะห์ยุ่งยาก สลับซับซ้อน สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

2. ขั้นตอนที่สอง จัดระเบียบสมการให้อยู่ในรูปของสมการสเตตสเปซ

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

3. ขั้นตอนที่สาม ใช้กฎของการควบคุมและกระบวนการวิเคราะห์เพื่อหาค่าอัตราขยายของระบบด้วยวิธี LQR โดยใช้โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ (Maple 6.5)
4. ขั้นตอนที่สี่ หาค่าพหุคูณนำหน้าด้วยวิธีกำหนดตำแหน่ง โพล (Pole Placement) และวิธีของเรท-เฮอร์วิทซ์ เพื่อกำหนดขอบเขตของค่าอัตราขยายและตรวจสอบความเป็นเสถียรภาพของระบบ
5. ขั้นตอนที่ห้า ประมวลผลการทดลอง โดยใช้โปรแกรมคำนวณทางคณิตศาสตร์ MATLAB 7.0
6. ขั้นตอนที่หก วิเคราะห์ผลการทดลองและสรุปผล

บทที่ 2

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบป้อนกลับแบบลดยเหนื่อสี่ระยะ

2.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

งานวิจัยศึกษาแบบจำลองระบบป้อนกลับนี้จะเชื่อมโยงองค์ความรู้ทางพลศาสตร์ดั่งนั้นควรมีพื้นฐานการวิเคราะห์และความเข้าใจระบบ เนื่องจากการทำความเข้าใจระบบพลศาสตร์การวิเคราะห์ระบบพลศาสตร์ใดๆ สามารถทำได้โดยอาศัยความรู้ตามหลักฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์พื้นฐาน เช่น ฟิสิกส์ เคมี กฎของนิวตัน สมการลากรางจ์ วิธีการแบบกราฟพันธะ รวมทั้งวิธีการทางคณิตศาสตร์และระบบวิศวกรรมสาขาอื่นๆ ที่เกี่ยวเนื่องกับระบบพลศาสตร์ที่กำลังพิจารณา เพื่อเป็นพื้นฐานสู่การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ วิเคราะห์ ออกแบบระบบ และประยุกต์ทฤษฎีความยืดหยุ่นในวิศวกรรมเครื่องกล มาสร้างแบบจำลองระบบป้อนกลับแบบลดยเหนื่อสี่ระยะ โดยอาศัยแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์หรือสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบ และสามารถวิเคราะห์โดยใช้หลักของพลังงาน เช่นในกรณีของการเคลื่อนที่แบบเสรี ถ้าไม่มีการสูญเสียพลังงานขณะที่มวลเคลื่อนที่ ผลรวมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์ย่อมเท่ากับค่าคงตัว ($T + U = \text{ค่าคงที่}$) ผลที่ได้รับจากการหาอนุพันธ์ต่อเวลา ก็คือสมการอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของระบบพลศาสตร์ หรือเรียกว่าแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ของระบบนั่นเอง ดังนั้นกระบวนการในการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์มีขั้นตอนในการนำไปใช้ดังภาพที่ 2.1 ซึ่งแสดงรายละเอียดของขั้นตอนการวิเคราะห์ระบบจนกระทั่งได้ผลการจำลองระบบมีดังนี้

ลำดับแรก สถานการณ์จริงหรืออุปกรณ์ที่ใช้งานจริงหรือลักษณะทางกายภาพจริงนั้นคือป้อนกลับแบบลดยเหนื่อสี่ระยะ

ลำดับที่สอง สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หรือวิเคราะห์สถานการณ์จริงให้ออกมาในรูปของคณิตศาสตร์โดยใช้หลักการวิเคราะห์กลศาสตร์ของนิวตันและสมการลากรางจ์

ลำดับที่สาม ทำให้ง่ายขึ้นหรือใช้ค่าประมาณนั้นคือพารามิเตอร์บางค่าไม่สามารถใช้โดยตรงได้เช่นงานวิจัยนี้ได้อนุมานค่าทางตรีโกณมิติให้เป็นค่าที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น

ลำดับที่สี่ สร้างรูปแบบตามจินตนาการคือระบบหรือสมการทางคณิตศาสตร์ที่ได้ทำการวิเคราะห์เรียบร้อยแล้วนั่นเอง

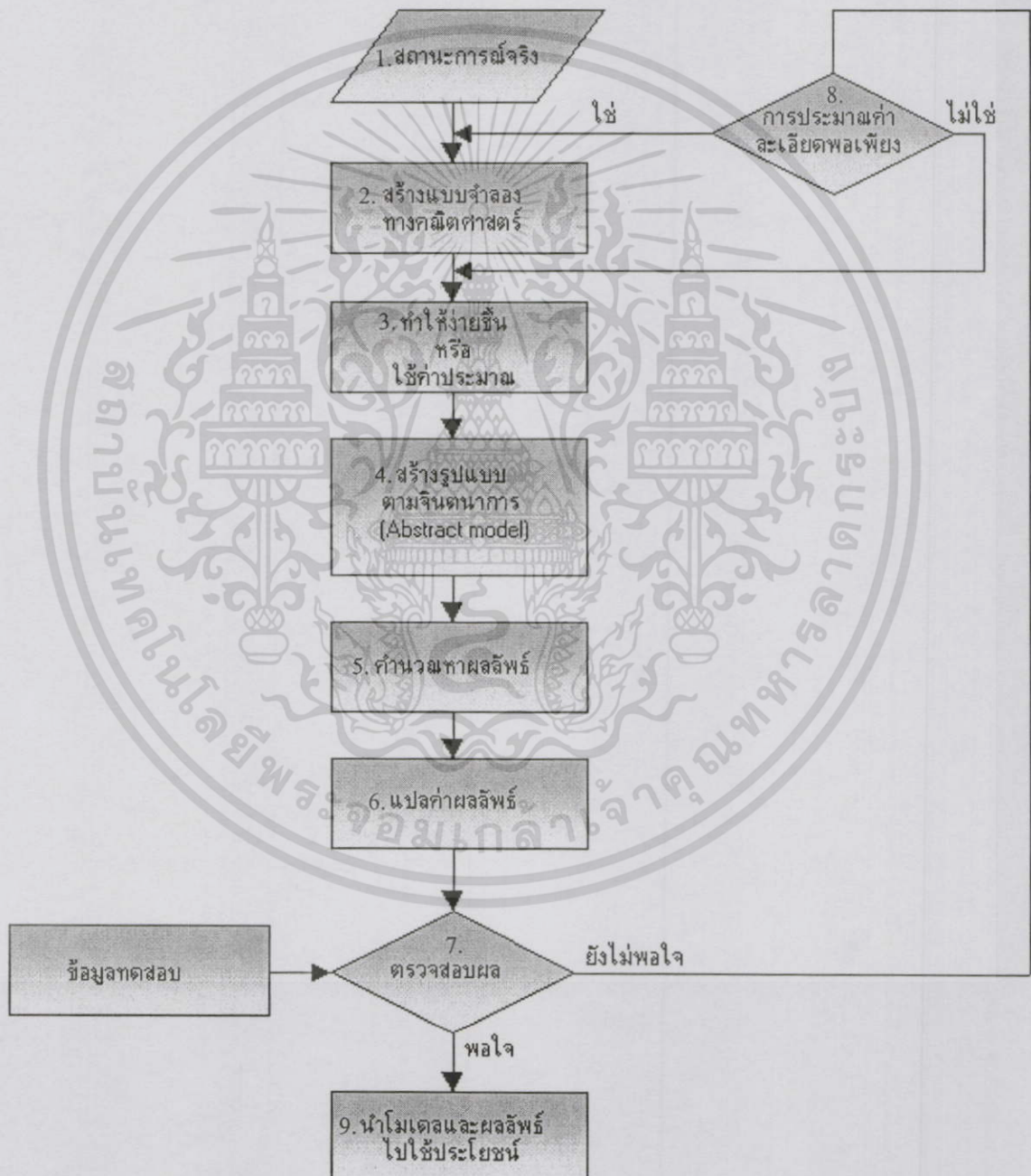
ลำดับที่ห้า คำนวณหาผลลัพธ์หรือหาตัวแปรที่ต้องการทราบค่าคุณลักษณะของระบบ

ลำดับที่หก แปลค่าผลลัพธ์หรือการจัดให้อยู่ในรูปแบบที่ต้องการ โดยงานวิจัยนี้จัดรูปแบบตัวแปรที่ต้องการทราบค่าให้อยู่ในรูปของสมการสเตทสเปซ

ลำดับที่เจ็ด ตรวจสอบผลคือการเปรียบเทียบกับผลของการวิเคราะห์วิธีอื่นๆเป็นที่น่าพอใจหรือไม่อย่างไร ถ้าผลที่ได้เป็นที่น่าพอใจ ลำดับต่อไปคือลำดับที่เก้า

ลำดับที่แปด หากไม่พอใจผลตามลำดับที่เจ็ดหรือคาดว่ากรวิเคราะห์ไม่สมบูรณ์พอสามารถวิเคราะห์ใหม่ด้วยการประมาณค่าละเอียดพอเพียงถ้ามีการแก้ไขเพิ่มเติมสามารถสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาใหม่ตามลำดับที่สอง และถ้าการประมาณค่าละเอียดพอเพียงไม่มีการแก้ไขเพิ่มเติม ลำดับที่สามเป็นขั้นตอนต่อไปที่จะทำการพิจารณาอีกครั้ง

ลำดับที่เก้า นำโมเดลและผลลัพธ์ไปใช้ประโยชน์



ภาพที่ 2.1 แผนภูมิกระบวนการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.1 แบบจำลองระบบพลศาสตร์ของเพนดูลัมพื้นฐานลูกตุ้ม

การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก คือการที่วัตถุเคลื่อนที่กลับไปมาซ้ำรอยเดิม มักจะใช้สัญลักษณ์ว่า SHM.(Simple Harmonic Motion) ตัวอย่างของการเคลื่อนที่แบบนี้ได้แก่ การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกผูกติดไว้กับสปริงในแนวราบ แล้ววัตถุเคลื่อนที่ไปตามแรงที่สปริงกระทำต่อวัตถุ การแกว่งของชิงช้า หรือลูกตุ้มนาฬิกา เป็นต้น

พลังงานของวัตถุที่เคลื่อนที่แบบ SHM. ในการยืดหรือหดสปริง จะต้องมีแรงภายนอกไปกระทำต่อสปริงทำให้เกิดงานขึ้น ทั้งนี้เพราะในการยืดหรือหดของสปริงนั้น พลังงานศักย์ของสปริงจะเพิ่มขึ้น จากนิยามของพลังงานศักย์ที่ว่า "พลังงานศักย์ของวัตถุ ณ จุดใด คืองานที่ใช้ในการเคลื่อนที่วัตถุจากจุดอ้างอิงไปยังจุดนั้น" ถ้า F เป็นแรงที่กระทำต่อสปริงแล้วทำให้สปริงยืด (หรือหดตัว) เป็นระยะทาง x จากตำแหน่งสมดุล จะได้ว่า งานที่กระทำต่อสปริง $= Fx$ ถ้าให้ตำแหน่งสมดุลเป็นตำแหน่งอ้างอิง จะได้ว่า พลังงานศักย์ของสปริงที่ตำแหน่ง x ใดๆ $= Fx$ แต่ในการยืดหรือหดของสปริงนี้ แรงที่กระทำต่อสปริงจะไม่คงที่ โดยจะขึ้นกับระยะทาง ดังนั้นแรง F จึงเป็นแรงเฉลี่ย โดยเฉลี่ยระหว่างแรงที่กระทำต่อสปริงที่ตำแหน่ง $x=0$ และที่ x ใดๆ นั่นคือ

$$F = \frac{0 + kx}{2} = \frac{1}{2}kx \quad (2.1)$$

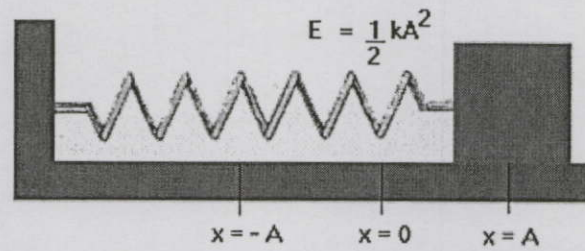
ดังนั้น พลังงานศักย์ของสปริงที่ตำแหน่ง x ใดๆ

$$F = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.2)$$

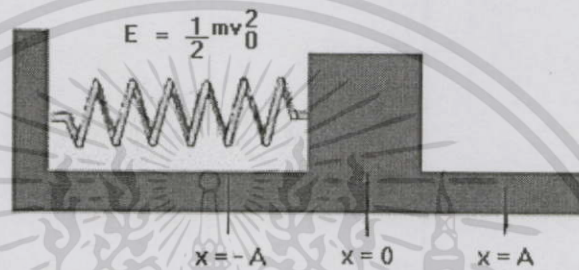
เนื่องจาก แรงที่สปริงกระทำต่อวัตถุเป็นแรงอนุรักษ์ ดังนั้นพลังงานทั้งหมด (Total energy) ของวัตถุที่เคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรงสปริงจึงคงที่ ถ้า E เป็นค่าพลังงานทั้งหมดนี้ จะได้ว่า ที่ตำแหน่ง x ใดๆ ซึ่งวัตถุมีความเร็วเป็น v ใดๆ (ดังแสดงในภาพที่ 2.2 (d)) จะได้ว่า

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.3)$$

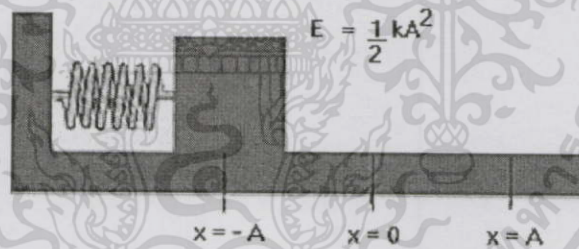
พิจารณาภาพที่ 2.2 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุมวล m ที่ผูกติดกับสปริงเคลื่อนที่บนพื้นราบที่ไม่มีแรงเสียดทาน



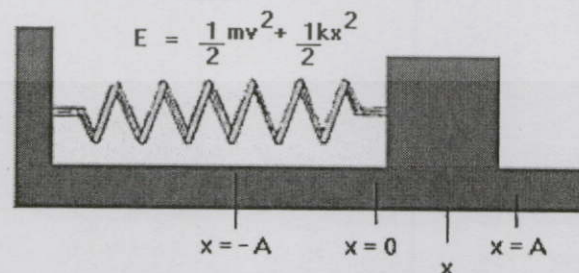
(a)



(b)



(c)



(d)

ภาพที่ 2.2 การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิก ตัวอย่างการสั้นของสปริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพที่ 2.2 (a) วัตถุอยู่ในตำแหน่ง $x = A$ ซึ่งเป็นค่าแอมพลิจูดของการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งนี้ วัตถุมีความเร็วเป็นศูนย์ จึงมีแต่พลังงานศักย์ซึ่งมีค่ามากที่สุด

$$E = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}k(A)^2 = \frac{1}{2}k(A)^2 \quad (2.4)$$

ในภาพที่ 2.2 (b) วัตถุอยู่ในตำแหน่งสมดุล ระยะขจัด x เป็นศูนย์ แต่มีอัตราเร็วมากที่สุด ที่ตำแหน่งนี้จึงมีพลังงานศักย์เป็นศูนย์ แต่มีพลังงานจลน์มากที่สุด ถ้า v_0 เป็นอัตราเร็วที่ตำแหน่งนี้ จะได้ว่า

$$E = \frac{1}{2}m(v_0)^2 + \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}m(v_0)^2 \quad (2.5)$$

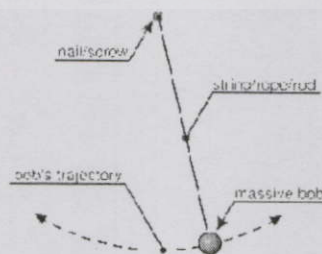
ในภาพที่ 2.2 (c) วัตถุอยู่ในตำแหน่ง $x = -A$ ซึ่งก็เป็นแอมพลิจูดเช่นเดียวกันและเหมือนกับในกรณีของภาพที่ 2.1 (a) ความเร็วของวัตถุเป็นศูนย์ วัตถุจึงมีพลังงานจลน์เป็นศูนย์ ในขณะที่มีพลังงานศักย์มากที่สุด

$$E = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}k(-A)^2 = \frac{1}{2}k(A)^2 \quad (2.6)$$

ภาพที่ 2.2 (d) เป็นตำแหน่งของวัตถุที่ x ใดๆ วัตถุมีความเร็วเป็น v ใดๆ ดังที่ได้ อธิบายไว้แล้ว จึงได้

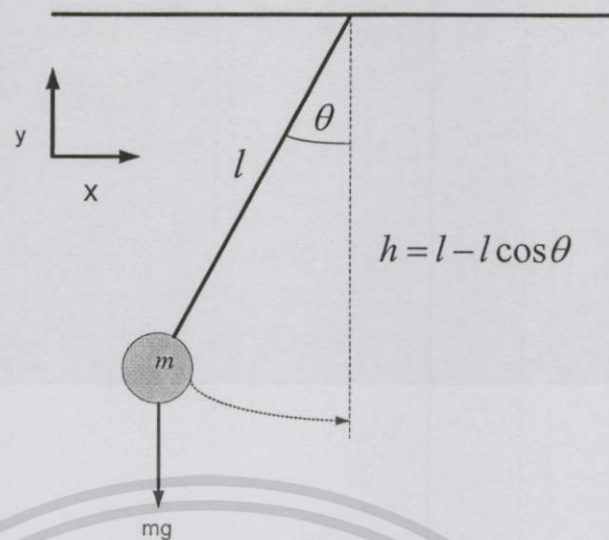
$$E = \frac{1}{2}m(v)^2 + \frac{1}{2}k(x)^2 \quad (2.7)$$

สมการที่ 2.7 ได้อธิบายถึง พลังงานทั้งหมดของสปริง ด้วยการวิเคราะห์หลักการของ นิวตัน ดังนั้น สมการของการแกว่งของลูกตุ้ม หรือ ระบบพลศาสตร์เพนดูลัมจะมีสมการที่คล้ายกัน แต่สมการที่ 2.7 ใช้ในหลักการของลากรางเจียนก็สามารถวิเคราะห์ระบบออกมาได้ดังนี้ดัง ภาพที่ 2.4



ภาพที่ 2.3 พื้นฐานของเพนดูลัม (simple pendulum)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 2.4 แบบจำลองพลศาสตร์ของเพนดูลัม (ลูกตุ้ม)

เมื่อ x = แกนในแนวนอน

y = แกนในแนวตั้ง

h = ระยะจัดของลูกตุ้มเมื่อเทียบกับแนวแกนตั้ง ณ จุดหมุนด้านบน

l = ความยาวของเส้นเชือกระหว่างลูกตุ้มกับจุดยึดเส้นเชือก

m = มวลของลูกตุ้ม

θ = มุมระหว่างเส้นเชือกกับแนวแกนตั้ง ณ จุดหมุนด้านบน

γ = ระยะจัดทางเวกเตอร์

จากภาพที่ 2.4 ระบบพลศาสตร์ของเพนดูลัมพื้นฐาน (ลูกตุ้ม) สามารถวิเคราะห์ทางเวกเตอร์ได้ว่า

$$\gamma = xi + yj \quad (2.8)$$

ทำการดิฟเฟอเรนเชียลสมการที่ 2.8 เพื่อหาระยะจัด

$$\dot{\gamma} = \dot{x}i + \dot{y}j \quad (2.9)$$

ยกกำลังสองสมการที่ 2.9 ทั้งหมดด้วยวิธีการทางเวกเตอร์

$$\dot{\gamma}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \quad (2.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กระจายค่าสมการที่ 2.10 จะได้

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta \\ \dot{x} &= \dot{\theta} l \cos \theta \\ y &= l \cos \theta \\ \dot{y} &= -\dot{\theta} \sin \theta\end{aligned}\quad (2.11)$$

สามารถวิเคราะห์สมการเบื้องต้นโดยใช้สมการลากรางจ์แก้ปัญหา โดยอาศัยกฎข้อที่สองของนิวตันคือหลักพลังงานเสมือน (Virtual Work) ซึ่งเราสามารถหาสมการลากรางจ์ได้ คือ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.12)$$

$$i = 1, \dots, n$$

เมื่อ L = สมการลากรางจ์ (Lagrangian)

T = พลังงานไคนetikส์หรือพลังงานจลน์รวมของระบบ (total kinetic energy of the system)

V = พลังงานศักย์รวมของระบบ (total potential energy)

q_i = ระบบพิกัด (generalized coordinate system)

Q_i = แรงในระบบพิกัดที่กำลังสนใจ (generalized force)

i = อันดับของระบบ (system order)

ดังนั้น

$$L = T - V \quad (2.13)$$

พลังงานไคนetikส์หรือพลังงานจลน์รวมของระบบ

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พลังงานศักย์รวมของระบบ

$$V = mgh = mgl(1 - \cos \theta) \quad (2.15)$$

จากสมการลากรางจ์ข้างต้นเราสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในการหาสมการพลศาสตร์ของระบบเพนดูลัมได้โดยนำสมการที่ 2.11 แทนค่าในสมการที่ 2.14 และ สมการที่ 2.15 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ T &= \frac{1}{2} m (l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta) \\ T &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 \\ V &= mgl(1 - \cos \theta) \\ L &= T - V \\ L &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (2.16)$$

สมการลากรางจ์เมื่อให้แรงภายนอกเท่ากับศูนย์จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_i = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} ml^2 (2 \dot{\theta}) = ml^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \theta = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.17)$$

จากสมการที่ 2.17 จะสามารถทราบได้ว่า ค่าความเร็วเชิงมุมธรรมชาติ การแกว่งของ ลูกตุ้ม

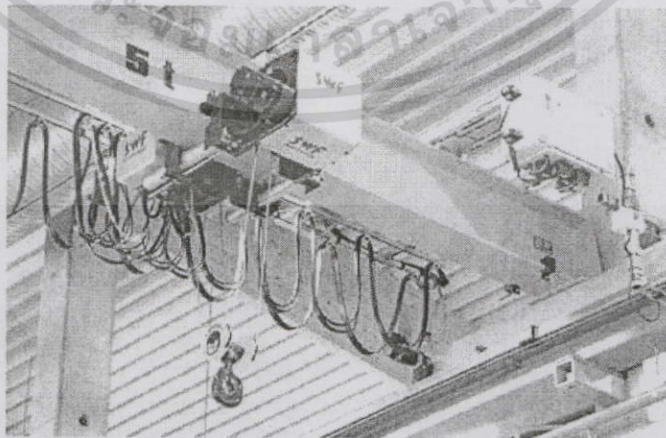
$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (2.18)$$

2.1.2 แบบจำลองระบบพลศาสตร์ของปั้นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ

เมื่อได้ระบบพลศาสตร์ของเพนดูลัมเรียบร้อยขั้นตอนการวิเคราะห์ลำดับต่อไป คือการเพิ่มรถอกเข้าไปพิจารณาร่วมด้วย โดยใช้หลักการเหมือนกับการวิเคราะห์เพนดูลัม จากภาพที่ 2.5 และ 2.6 นั้นเป็นระบบปั้นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะที่ใช้ในงานจริงในโรงงานอุตสาหกรรมเพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ จึงสามารถวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ได้ดังภาพที่ 2.7



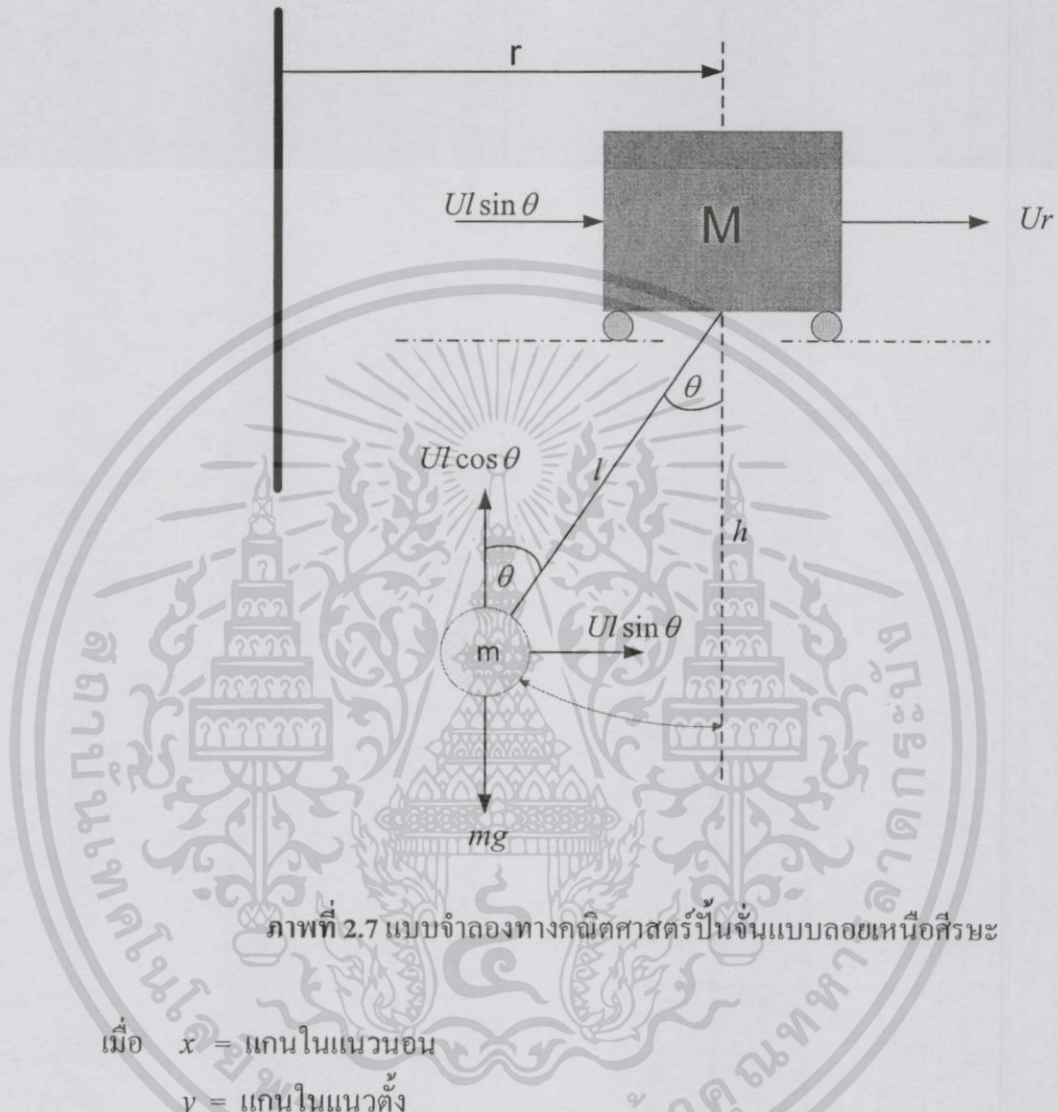
ภาพที่ 2.5 ปั้นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ



ภาพที่ 2.6 ปั้นจั่นยึดติดกับคานเหล็กรูปตัวไอ (I-BEAM)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาพจำลองแบบทางกลของระบบเครนแบบลอยเหนือศีรษะ (Overhead crane) สามารถแสดงให้เห็นได้ดังภาพที่ 2.7 เพื่อนำไปประกอบการพิจารณา แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ใช้วิธีการเดียวกันกับการวิเคราะห์ระบบพลศาสตร์เพนดูลัม โดยทฤษฎีวิเคราะห์ลากรางจ์เขียน



ภาพที่ 2.7 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ปั้นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ

เมื่อ x = แกนในแนวนอน

y = แกนในแนวตั้ง

h = ระยะขจัดของลูกตุ้มเมื่อเทียบกับแนวแกนตั้ง ณ จุดหมุนด้านบน

l = ความยาวของเส้นเชือกระหว่างลูกตุ้มกับจุดยึดเส้นเชือก

m = มวลของลูกตุ้ม

M = มวลของรถรอก

θ = มุมระหว่างเส้นเชือกกับแนวแกนตั้ง ณ จุดหมุนด้านบน

U_r = แรงที่ป้อนให้กับรถรอก

r = ระยะขจัดของรถรอก

U_l = แรงดึงในเส้นเชือกของลูกตุ้ม

g = แรงโน้มถ่วงของโลกมีค่าประมาณ 9.81 m/s^2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากภาพที่ 2.7 พิจารณาตัวแปรโดยกำหนดให้ค่า x_1 คือระยะขจัดของรอรอก ค่า x_2 คือระยะขจัดของลูกตุ้ม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x_1 &= r \\y_1 &= 0 \\x_2 &= r - l \sin \theta \\y_2 &= l \cos \theta = h\end{aligned}\quad (2.19)$$

พิจารณาสมการที่ 2.9 ด้วยวิธีแบบเวกเตอร์จะได้ว่า

$$\begin{aligned}x_1 &= ri + 0j \\x_2 &= (r - l \sin \theta)i + (l \cos \theta)j \\v_1 &= \dot{x}_1 = \dot{r}i \\v_1^2 &= \dot{x}_1^2 = \dot{r}i \cdot \dot{r}i = \dot{r}^2 \\v_2 &= \dot{x}_2 = (\dot{r} - l \dot{\theta} \sin \theta)i + l \dot{\theta}(-\sin \theta)j \\v_2^2 &= \dot{x}_2^2 = [(\dot{r} - l \dot{\theta} \cos \theta)i - (l \dot{\theta} \sin \theta)j] \cdot [(\dot{r} - l \dot{\theta} \cos \theta)i - (l \dot{\theta} \sin \theta)j] \\v_2^2 &= \dot{x}_2^2 = (\dot{r} - l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \\v_2^2 &= \dot{x}_2^2 = \dot{r}^2 + 2\dot{r}(-l \dot{\theta} \cos \theta) + (-l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \\v_2^2 &= \dot{x}_2^2 = \dot{r}^2 - 2r l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \\v_2^2 &= \dot{x}_2^2 = \dot{r}^2 - 2r l \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2\end{aligned}\quad (2.20)$$

แทนค่าลงในสมการพลังงานของลากรางจ์ตั้งสมการที่ 2.13 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}L &= T - V \\T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$T = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 - 2rl\dot{\theta} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2)$$

$$V = mgh$$

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$V = mgl - mgl \cos\theta \quad (2.21)$$

ดังนั้นจะได้พลังงานพลศาสตร์ดังนี้

$$L = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 - 2rl\dot{\theta} \cos\theta + l^2 \dot{\theta}^2) - mgl + mgl \cos\theta \quad (2.22)$$

จากสมการลากรางจ์ เมื่อดิฟเฟอเรนเชียลเทียบกับค่า θ และไม่มีแรงภายนอกกระทำ ดังนั้น

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_i = 0 \quad (2.23)$$

จากสมการลากรางจ์เมื่อดิฟเฟอเรนเชียลเทียบกับค่า r และมีค่าที่ป้อนให้กับระบบคือค่า U_r ดังนั้นแทนค่าในสมการที่ 2.23 จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = U_r \quad (2.24)$$

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการที่ 2.22 เทียบกับค่า θ จะได้ว่า

$$\frac{dL}{d\theta} = m\dot{r}\dot{\theta}l \sin\theta - mgl \sin\theta \quad (2.25)$$

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการที่ 2.22 เทียบกับค่า $\dot{\theta}$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} - mrl \cos\theta \quad (2.26)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการที่ 2.26 เทียบกับเวลาใดๆ (t) ได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} - ml \ddot{r} \cos \theta + ml \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta \quad (2.27)$$

จัดสมการที่ 2.25 และสมการที่ 2.27 ให้อยู่ในรูปของสมการที่ 2.23 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= ml^2 \ddot{\theta} - ml \ddot{r} \cos \theta + ml \dot{r} \dot{\theta} \sin \theta - m \dot{r} \dot{\theta} l \sin \theta + mgl \sin \theta \\ 0 &= ml^2 \ddot{\theta} - ml \ddot{r} \cos \theta + mgl \sin \theta \\ \ddot{\theta} - \frac{\ddot{r}}{l} \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

เนื่องจากค่ามุม (θ) ในสมการที่ 2.28 ที่พิจารณาให้มีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย จึงประมาณโดยสมมติว่าค่ามุม (θ) มีขนาดเล็กซึ่งมีขนาดไม่เกิน 5° ซึ่งสามารถประมาณได้ว่า $\cos \theta \cong 1$ และ $\sin \theta \cong \theta$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - \frac{\ddot{r}}{l} + \frac{g}{l} \theta &= 0 \\ \ddot{\theta} &= \frac{\ddot{r}}{l} - \frac{g}{l} \theta \end{aligned} \quad (2.29)$$

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการที่ 2.24 เทียบกับค่า r ดังนั้น

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad (2.30)$$

79837

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการที่ 2.22 เทียบกับค่า \dot{r} ได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{1}{2} 2M \dot{r} + \frac{1}{2} 2m \dot{r} - ml \dot{\theta} \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= M \dot{r} + m \dot{r} - ml \dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}\quad (2.31)$$

ดิฟเฟอเรนเชียล สมการที่ 2.31 เทียบกับเวลาใดๆ (t) จะได้ว่า

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = M \ddot{r} + m \ddot{r} - ml \ddot{\theta} \cos \theta + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2.32)$$

จัดสมการที่ 2.30 และสมการที่ 2.32 ให้อยู่ในรูปของสมการที่ 2.24 ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= M \ddot{r} + m \ddot{r} - ml \ddot{\theta} \cos \theta + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta - 0 \\ M \ddot{r} + m \ddot{r} - ml \ddot{\theta} \cos \theta + ml \dot{\theta}^2 \sin \theta &= Ur\end{aligned}\quad (2.33)$$

เนื่องจากมุมในสมการที่ 2.33 ที่พิจารณาให้มีการเปลี่ยนแปลงเล็กน้อย จึงประมาณโดยสมมุติว่าค่ามุม (θ) มีขนาดเล็กซึ่งมีขนาดไม่เกิน 5° ซึ่งสามารถประมาณได้ว่า $\cos \theta \cong 1$ และ $\sin \theta \cong \theta$ ดังนี้

$$(M + m) \ddot{r} - ml \ddot{\theta} + ml \dot{\theta}^2 \theta = Ur \quad (2.34)$$

จากสมการที่ 2.34 จะพบว่าสมการไม่อยู่ในรูปเชิงเส้นและควอดรติก (Quadratic) ดังนี้โดยทั่วไปเพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์สมการที่ 2.34 จึงใช้หลักการพิจารณาอนุমানแบบเดียวกันนี้ว่าค่า $\dot{\theta}^2 \theta$ มีค่าน้อยมากๆ โดยพิจารณาอนุমানให้มีค่าเป็นศูนย์แต่ตามหลักทฤษฎีของการวิเคราะห์พลศาสตร์เพนคูล์ม ดังสมการที่ 2.18 ค่าความเร็วเชิงมุมของเพนคูล์มมีค่า $\omega_n = \sqrt{g/l}$ หากลองอนุমানให้ค่า $\dot{\theta}^2 \approx \omega^2$ จะทำให้ได้สมการใหม่ ได้ว่า

$$\dot{\theta}^2 = \frac{g}{l}$$

$$(M+m)\ddot{r} - ml\ddot{\theta} + ml\left(\frac{g}{l}\right)\theta = Ur$$

$$(M+m)\ddot{r} - ml\ddot{\theta} + mg\theta = Ur$$

$$(M+m)\ddot{r} = ml\ddot{\theta} + Ur - mg\theta \quad (2.35)$$

แทนค่าสมการที่ 2.29 ลงในสมการที่ 2.35 จะได้ว่า

$$(M+m)\ddot{r} = ml\left(\frac{\ddot{r}}{l} - \frac{g}{l}\theta\right) + Ur - mg\theta$$

$$(M+m)\ddot{r} = ml\frac{\ddot{r}}{l} - ml\frac{g}{l}\theta + Ur - mg\theta$$

$$(M+m)\ddot{r} = m\ddot{r} - mg\theta + Ur - mg\theta$$

$$(M+m)\ddot{r} - m\ddot{r} = -2mg\theta + Ur$$

$$M\ddot{r} = -2mg\theta + Ur \quad (2.36)$$

ดังนั้นจัดรูปแบบสมการที่ 2.36 ใหม่จะได้ว่า

$$\ddot{r} = \frac{-2mg\theta}{M} + \frac{Ur}{M} \quad (2.37)$$

แทนค่าสมการที่ 2.37 ลงในสมการที่ 2.29 จะได้ว่า

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{r}}{l} - \frac{g}{l}\theta$$

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{-2mg\theta}{M} + \frac{Ur}{M} \right) - \frac{g}{l}\theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\ddot{\theta} = \frac{-2mg\theta}{Ml} + \frac{Ur}{Ml} - \frac{g}{l}\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2mg\theta}{Ml} - \frac{Mg}{Ml}\theta + \frac{Ur}{Ml} \quad (2.38)$$

จัดรูปแบบของสมการที่ 2.38 ให้กระชับจะได้ว่า

$$\ddot{\theta} = \frac{-(M+2m)g\theta}{Ml} + \frac{Ur}{Ml} \quad (2.39)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 สมการสเทตสเปซ

ในการบรรยายสมการเชิงอนุพันธ์ทั่วไบนั้นสามารถบรรยายหรือเขียนอยู่ในรูปแบบของกลุ่มของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งได้ ตัวแปรของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเรียกว่าตัวแปรสถานะหรือตัวแปรสเทต เป็นรูปแบบที่นิยมสำหรับเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ที่จำลองการทำงานของระบบเชิงเส้น ซึ่งถ้าแก้สมการของกลุ่มสมการเชิงอนุพันธ์นั้นแล้วผลลัพธ์ก็สามารถจะแสดงอยู่ในปริภูมิ (Space) ซึ่งมีตัวแปรเหล่านั้นเป็นแกนของปริภูมิ ความคิดในการบรรยายสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของปริภูมิสเทต (state-space description) ก่อให้เกิดวิธีการใหม่ๆ ในการออกแบบระบบควบคุม ซึ่งเป็นพื้นฐานของการออกแบบระบบควบคุมสมัยใหม่ (Modern control) ระบบสมการเชิงเส้นที่ตัวพารามิเตอร์ไม่ขึ้นกับเวลา (Linear time invariant system) โดยสามารถเขียนในรูปแบบของปริภูมิสเทตได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{2.40}$$

โดยที่

- x = เวกเตอร์ตัวแปรสถานะ (state vector) บอกสถานะของระบบ ณ เวลานั้นๆ
- \dot{x} = อนุพันธ์ของเวกเตอร์ตัวแปรสถานะ
- u = เวกเตอร์อินพุต (input vector) ที่ป้อนให้กับระบบ
- y = เวกเตอร์เอาต์พุต (output vector)
- A = เมทริกซ์ระบบ (system matrix: $n \times n$) สมบัติทางกายภาพต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับระบบ จะปรากฏอยู่ในเมทริกซ์นี้
- B = เมทริกซ์สัญญาณอินพุต (input matrix: $n \times r$) เป็นเมทริกซ์ที่บ่งบอกถึงลักษณะและจำนวนช่องของสัญญาณขาเข้า
- C = เมทริกซ์สัญญาณเอาต์พุต (output matrix: $m \times n$) เป็นเมทริกซ์ที่บ่งบอกถึงลักษณะและจำนวนช่องของสัญญาณขาออก
- D = เมทริกซ์สัญญาณป้อนไปข้างหน้า (feed forward matrix) เป็นเมทริกซ์ที่บ่งบอกถึงความสัมพันธ์โดยตรงระหว่างอินพุตและเอาต์พุต

ในทางปฏิบัติเมทริกซ์ D นี้ จะปรากฏอยู่ในหลายระบบวิศวกรรม แต่ในทางทฤษฎีนั้นเมทริกซ์นี้สร้างความซับซ้อนในการวิเคราะห์ ดังนั้นเมื่อทำการศึกษาทางทฤษฎี โดยมากจะนิยมให้ $D=0$ งานวิจัยครั้งนี้จึงให้ $D=0$ เช่นกัน เพราะระบบที่วิเคราะห์นี้เป็นเพียงระบบปิดแบบป้อนกลับโดยไม่มีการป้อนข้อมูลไปข้างหน้า

ข้อดีของการออกแบบโดยวิธีปริภูมิสถานะนี้เหมาะสมเมื่อระบบของเรามีความยุ่งยาก สลับซับซ้อน คือมีอันดับของสมการเชิงอนุพันธ์มีค่าสูง หรืออาจมีหลายอินพุตและหลายเอาต์พุต (MIMO) อันเนื่องจากระบบในงานวิจัยเป็นแบบ หนึ่งอินพุต สองเอาต์พุต ดังนั้นจึงเหมาะสมที่จะ ออกแบบระบบควบคุมด้วยวิธีปริภูมิสถานะ

ดังนั้นจากสมการที่ 2.37 และสมการที่ 2.39 เพื่อให้ง่ายต่อการวิเคราะห์จึงจัดสมการ ดังกล่าวให้อยู่ในรูปของสมการสแตตสเปซ (state-space) สมการที่ 2.40 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ความเร็วเชิงมุมของมุมเพนดูลัม} \\ \text{ความเร่งเชิงมุมของมุมเพนดูลัม} \\ \text{ความเร็วของรถรอก} \\ \text{ความเร่งของรถรอก} \end{array} \\
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(M+2m)g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Ml}{0} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}^T \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 D &= 0
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

โดย สามารถเขียนสมการที่ 2.41 ให้ง่ายขึ้นต่อการคำนวณ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B &= [0 \quad c \quad 0 \quad d]^T \\
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
 D &= 0
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การออกแบบตัวควบคุมด้วย LQ Controller

3.1 ลำดับขั้นตอนการออกแบบ

การออกแบบตัวควบคุมระบบนั้นมีความซับซ้อนหลายขั้นตอน เพื่อให้ง่ายต่อผู้ที่สนใจ และต้องการศึกษาพัฒนางานวิจัยด้านนี้ให้ก้าวหน้าต่อไป จึงลำดับกระบวนการวิเคราะห์ให้เห็นเด่นชัด โดยลำดับในขั้นตอนการศึกษาเพื่อหาค่าอัตราขยายของระบบสามารถแจกแจงได้ดังต่อไปนี้

ลำดับแรก เริ่มจากการศึกษาข้อมูลและแนวทางการวิเคราะห์ในงานวิจัยที่เกี่ยวข้องที่มีมาตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน

ลำดับที่สอง เมื่อรวบรวมข้อมูลได้พอเพียง จึงวิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยวิธีของลากรางจ์ ดังที่ได้นำเสนอไปแล้วในบทที่สองและประมาณค่าพารามิเตอร์เพื่อให้สามารถจัดให้อยู่ในรูปของสมการแตกต่างตามที่ต้องการ

ลำดับที่สาม วิเคราะห์ค่าครุณีสมรรถนะหรือ มาตรการการออกแบบตัวควบคุมที่ดีที่สุด ระบบที่วิเคราะห์นั้นเป็นแบบอินพุตเดียวสองเอาต์พุต ดังนั้นค่าครุณีสมรรถนะที่เลือกใช้คือ อินทิกรัลของค่าผิดพลาดสมบูรณ์คูณด้วยเวลา

ลำดับที่สี่ วิเคราะห์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยสมการรีคาคติ เพื่อที่จะหาค่าแฟลคเตอร์นำหนักของค่าครุณีสมรรถนะ ด้วยวิธีอินทิกรัลของค่าผิดพลาดสมบูรณ์คูณด้วยเวลา

ลำดับที่ห้า เพื่อให้การวิเคราะห์ทำได้สะดวกต่อการหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆของสมการรีคาคติ ดังนั้นวิเคราะห์สมการของระบบด้วยวิธีการวางโพล โดยใช้ค่าครุณีของสมการฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบปิดแบบอินทิกรัลของค่าผิดพลาดสมบูรณ์คูณด้วยเวลา (Integral Time multiplied Absolute Error: ITAE)

ลำดับที่หก เปรียบเทียบสมการคุณลักษณะของระบบ จากผลการวิเคราะห์ในลำดับที่สี่ และที่ห้า

ลำดับที่เจ็ด หาค่าอัตราขยายของระบบและค่าพารามิเตอร์จากการเปรียบเทียบสมการคุณลักษณะของระบบ

ลำดับที่แปด หาค่าแฟลคเตอร์นำหนัก หรือค่า Q และ R ของค่าครุณีสมรรถนะของระบบด้วยสมการรีคาคติ

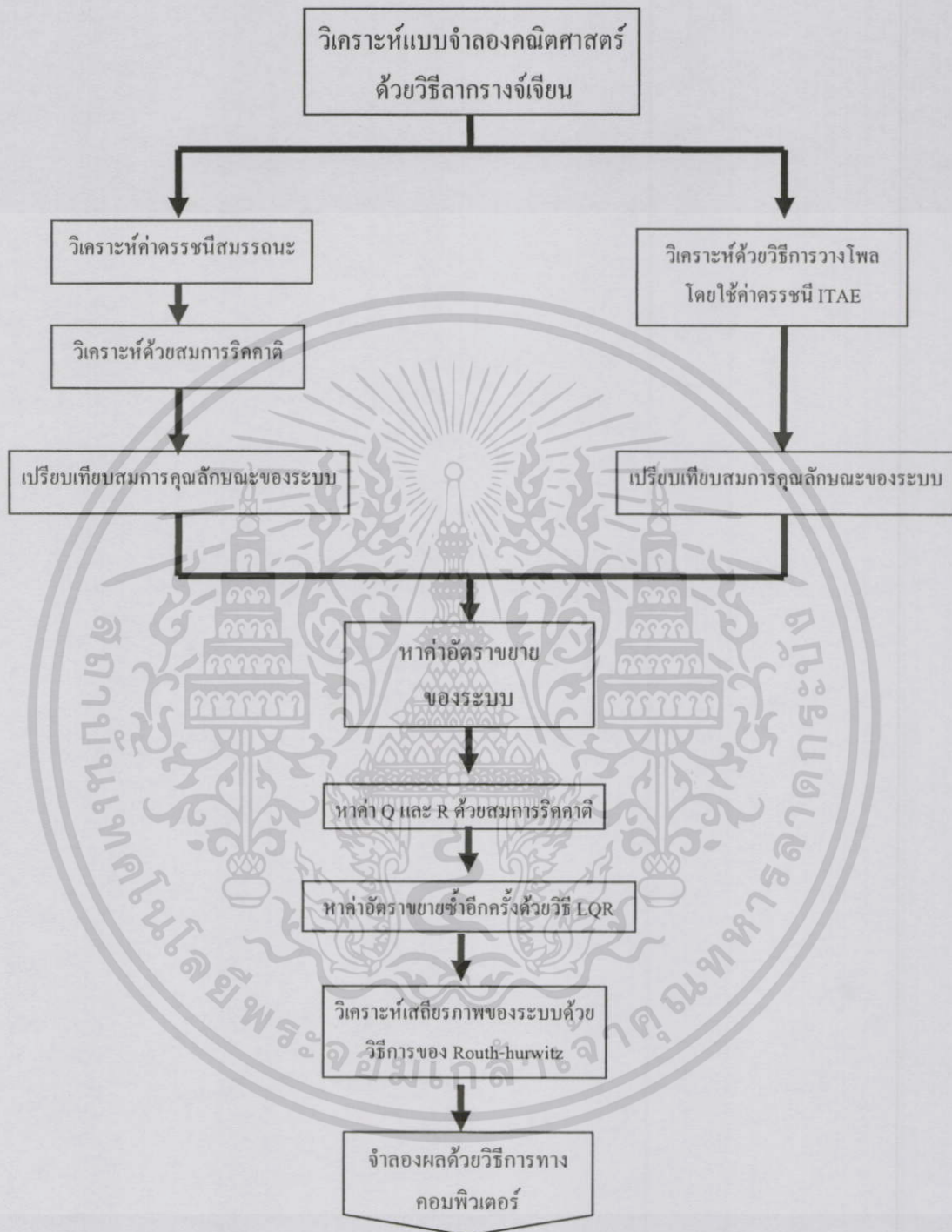
ลำดับที่เก้า หาค่าอัตราขยายซ้ำอีกครั้งด้วยวิธี LQR

ลำดับที่สิบ วิเคราะห์เสถียรภาพของระบบด้วยวิธีการของ เรท-เซอร์วิทซ์

ลำดับที่สิบเอ็ด จำลองผลด้วยวิธีการทางคอมพิวเตอร์หรือจำลองผลด้วยโปรแกรมแมทแลป (MATLAB) ที่ได้รับการยอมรับว่ามีความเชื่อถือได้ทางวิชาการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากลำดับขั้นตอนข้างต้นสามารถแสดงเป็นแผนภูมิได้ดังภาพที่ 3.1



ภาพที่ 3.1 แผนภูมิแสดงลำดับขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 เกณฑ์ดรรชนีสมรรถนะ (Minimize the performance index)

จุดมุ่งหมายของการออกแบบระบบควบคุมแบบต่างๆ คือการคำนวณหาค่าอัตราขยายของตัวควบคุมเหล่านั้น อาจจะต้องมาพิจารณาอะไรขึ้นมามากมายและตั้งเป้าหมายของการออกแบบระบบควบคุมเพื่อให้ระบบควบคุมทำงานได้ดีที่สุดตามมาตรการที่ได้ตั้งไว้ นั่น มาตรการดังกล่าวที่นิยมใช้ในการออกแบบตัวควบคุมที่ดีที่สุด (optimal control) เรียกว่า “ดรรชนีสมรรถนะ (performance index)” ซึ่งจะเป็นดรรชนีที่ชี้ว่าระบบที่ต้องการควบคุมทำงานเป็นอย่างไรบ้าง ใช้งานได้ตามเป้าหมายที่ตั้งไว้หรือไม่ เช่น ต้องการควบคุมการทำงานของระบบโดยให้มีการใช้พลังงานน้อยที่สุดระหว่างที่ทำการควบคุม ดังนั้นดรรชนีที่ใช้กำหนดในการออกแบบระบบควบคุมก็จะเกี่ยวข้องกับการใช้พลังงานในการทำงานของระบบนั้น หรือถ้าต้องการควบคุมการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง โดยให้ใช้เวลาที่สั้นที่สุดในการเคลื่อนที่ ดรรชนีสมรรถนะก็จะเป็ระยะเวลาที่ต้องการขับเคลื่อนระบบจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ค่าดรรชนีสมรรถนะนี้บางครั้งเรียกว่า ฟังก์ชันต้นทุนกำหนด การออกแบบหรือคำนวณหาค่าอัตราขยายของตัวควบคุม ด้วยวิธีนี้จะต้องออกแบบเพื่อให้ได้ค่าตั้งควบคุมของระบบนั้นเป็นสัญญาณคำสั่งที่ดีที่สุดภายใต้มาตรการหรือดัชนีสมรรถนะมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดก็ได้แล้วแต่กรณี

ระบบพลศาสตร์เพนคูล์มของป็นจันแบบลอยเหนือศีรษะที่นำเสนอเป็นแบบสัญญาณเข้าหนึ่งออกสองหรือสัญญาณหนึ่งอินพุตสองเอาต์พุต(Single Input Two Output : SITO) ดังนั้นจึงใช้กฎของการควบคุมแบบสัญญาณเข้าและออกหลายสัญญาณ(Multi Input Multi Output : MIMO) ในการวิเคราะห์ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

$$u = -Kx \quad (3.1)$$

เมื่อ K = ค่าอัตราขยายสัญญาณ(Gain)

u = สัญญาณอินพุตที่ป้อนให้แก่ระบบ

x = ตัวแปรสถานะ

ค่าดรรชนีสมรรถนะที่นิยมใช้มีอยู่หลายแบบ โดยงานวิจัยชิ้นนี้เลือกค่าอัตราขยายสัญญาณใช้เกณฑ์ดรรชนีสมรรถนะ(Performance Index Criteria) แบบอินทิกรัลของค่าผิดพลาดสัมบูรณ์คูณด้วยเวลา(Integral Time Multiplied Absolute Error: ITAE) ซึ่งเป็นที่นิยมใช้เนื่องจากว่ามีตัวเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องกับด้วย กล่าวคือเมื่อเวลาผ่านไปสัญญาณผิดพลาดนั้นมีราคาแพงมากขึ้นเรื่อยๆ ดังนั้นตัวควบคุมที่ออกแบบจะต้องพยายามลดค่าสัญญาณผิดพลาดนี้ลงเรื่อยๆ เพื่อให้ค่าดรรชนีที่กำหนดดังกล่าวมีค่าน้อยที่สุด การออกแบบระบบควบคุมโดยใช้ ITAE จะเหมาะสำหรับระบบที่มีการตอบสนองเนื่องจากสัญญาณอินพุตที่เป็นฟังก์ชันขั้นที่มีค่าโอเวอร์ชูต

(Over Shoot) ไม่มากนักหรือเป็นการตอบสนองที่มีการแกว่ง (Oscillating) ที่มีลักษณะการหน่วงที่ดี จึงเลือกค่าดัชนีสมรรถนะ ดังนี้

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (3.2)$$

โดยค่า J = ค่าครรชนีสมรรถนะ
 Q = ค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก (Weighting Factor)
 R = ค่าแฟกเตอร์น้ำหนัก (Weighting Factor)
 t = ตัวแปรทางเวลา
 x = ตัวแปรสถานะ
 u = สัญญาณอินพุตที่ป้อนให้แก่ระบบ

ค่า Q มีค่าเชิงบวกหรือกึ่งเชิงบวกเท่านั้น (positive definite or positive semi-definite) และเป็นเมตริกสมมาตร (real symmetric matrix), ค่า R เป็นเมตริกสมมาตรเชิงบวก ในการประยุกต์ใช้กับค่าสัญญาณเข้าเพียงสัญญาณเดียว ค่า R จึงให้เป็นค่าสเกลค่า r ทำให้สามารถแก้ไขโจทย์ปัญหาตามวิธีการแก้สมการพีชคณิตของริคคาดี (Algebraic Riccati Equation)

การออกแบบระบบควบคุมแบบสัดส่วน (K_p) เพื่อต้องการให้ระบบมีค่ามุมของเส้นเชือกวัตถุแขวน และ ความเร็วเชิงมุมของวัตถุแขวน มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นค่าอัตราขยาย K ที่ทำให้ค่าครรชนี J มีค่าน้อยที่สุด แต่ค่าอัตราขยาย K ที่ดีที่สุดนี้ขึ้นอยู่กับค่า Q และ R ดังสมการที่ 3.2 ซึ่งผู้ออกแบบเป็นผู้กำหนดในฟังก์ชันครรชนีสมรรถนะ วิธีที่จะใช้กำหนดค่า Q และ R โดยส่วนมากจะใช้วิธีสุ่มตัวเลข หรือให้มีค่าเป็น 1 ทั้งหมด งานวิจัยนี้จึงขอเสนอวิธีการที่จะใช้แก้ปัญหานี้โดยใช้สมการริคคาดีเข้าช่วยในการแก้ปัญหา

3.3 สมการพีชคณิตรีคาติ (Algebraic Riccati Equation)

ปัญหาดังสมการที่ 2.37 สมการที่ 2.38 และสมการที่ 3.2 อยู่ในรูปของอนุพันธ์เชิงเส้น ดังนั้นจึงใช้วิธีการคณิตศาสตร์ชั้นสูงช่วยแก้ปัญหา วิธีที่เป็นที่นิยมใช้แก้ปัญหานี้คือ วิธีการของสมการรีคาติ จะช่วยให้วิเคราะห์ปัญหาได้โดยง่าย พื้นฐานการพิสูจน์ระบบเชิงเส้นเทียบกับเวลาใด ของระบบสมการสเตทสเปซ จะได้ดังนี้

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(t_0) = x_0 \quad (3.3)$$

ค่าต้นทุนฟังก์ชันที่น้อยที่สุด

$$f(x_0, x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix}^T F(t) \begin{pmatrix} x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} dt + x(T)^T F_T x(T) \quad (3.4)$$

เมื่อ

$$F(t) = F(t)^T = \begin{pmatrix} F_x(t) & F_{xu}(t) \\ F_{ux}(t) & F_u(t) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

ทำการดิฟเฟอเรนเชียล สมการรีคาติเพื่อแก้ปัญหาลิเนียร์-ควอดราติก (Linear Quadratic) พบว่าจะได้สมการ

$$-\dot{P} = A^T P + PA + F_x - (PB + F_{xu}) F_u^{-1} (B^T P + F_{ux})$$

$$P(T) = F_T \quad (3.6)$$

และกฎของการควบคุมคือ

$$u_{opt} = -K_{opt}(t)x = F_u^{-1} (B^T P + F_{ux}) x \quad (3.7)$$

ดังนั้นหาก

$$F_x = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะสามารถเขียนสมการรีคาติได้ใหม่ว่า

$$A^T P + PA - PBr^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.8)$$

เมื่อ P = เมตริกสมมาตรเชิงบวก

Q = ค่าแฟคเตอร์น้ำหนัก (Weighting Factor)

r = ค่าแฟคเตอร์น้ำหนัก (Weighting Factor)

A = เมตริกซ์ระบบ (system matrix : $n \times n$) สมบัติทางกายภาพต่างที่เกี่ยวข้องกับระบบจะปรากฏอยู่ในเมตริกซ์นี้

B = เมตริกซ์สัญญาณอินพุต (input matrix : $n \times r$) เป็นเมตริกซ์ที่บอกถึงลักษณะและจำนวนช่องของสัญญาณขาเข้า

K = ค่าอัตราขยายสัญญาณ (Gain)

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \quad c \quad 0 \quad d]^T$$

$$P = \begin{bmatrix} p1 & p2 & p3 & p4 \\ p2 & p5 & p6 & p7 \\ p3 & p6 & p8 & p9 \\ p4 & p7 & p9 & p10 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; Q \geq 0$$

μ = แฟคเตอร์น้ำหนัก อยู่ในตำแหน่งตรงกับตัวแปรสถานะที่สนใจและต้องการควบคุม

แทนค่าเมทริกซ์ลงในสมการที่ 3.8 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_3 & p_6 & p_8 & p_9 \\ p_4 & p_7 & p_9 & p_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_3 & p_6 & p_8 & p_9 \\ p_4 & p_7 & p_9 & p_{10} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_3 & p_6 & p_8 & p_9 \\ p_4 & p_7 & p_9 & p_{10} \end{bmatrix} \cdot [0 \ c \ 0 \ d] \cdot r^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_3 & p_6 & p_8 & p_9 \\ p_4 & p_7 & p_9 & p_{10} \end{bmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

โดยเมทริกซ์ที่ได้ มีขนาด 4x4 ซึ่งผู้เขียนขอแสดงในรูปแบบขนาด 4x1 เพื่อความสะดวกในการเขียนสมการ จึงจัดให้มีการแบ่งช่วงของเมทริกซ์เป็นสี่ช่วงดังนี้

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = 0$$

จากสมการที่ 3.9 สามารถคำนวณใน โปรแกรม Matlab 7.0 โดยค่า mu ใน โปรแกรมก็คือ คือ μ นั่นเองดังนั้น

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{l} 2 * a * p_2 + 2 * b * p_4 - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * c * p_2 - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * d * p_4 + \mu \\ p_1 + a * p_5 + b * p_7 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * c * p_2 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * d * p_4 \\ a * p_6 + b * p_9 - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * c * p_2 - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * d * p_4 \\ p_3 + a * p_7 + b * p_{10} - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * c * p_2 - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * d * p_4 \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{l} p_1 + a * p_5 + b * p_7 - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * c * p_5 - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * d * p_7 \\ 2 * p_2 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * c * p_5 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * d * p_7 \\ p_3 - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * c * p_5 - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * d * p_7 \\ p_6 + p_4 - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * c * p_5 - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * d * p_7 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{pmatrix} a * p_6 + b * p_9 - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * c * p_6 - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * d * p_9 \\ p_3 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * c * p_6 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * d * p_9 \\ - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * c * p_6 - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * d * p_9 + 1 \\ p_8 - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * c * p_6 - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * d * p_9 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} p_3 + a * p_7 + b * p_{10} - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * c * p_7 - 1/r * (p_2 * c + p_4 * d) * d * p_{10} \\ p_6 + p_4 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * c * p_7 - 1/r * (p_5 * c + p_7 * d) * d * p_{10} \\ p_8 - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * c * p_7 - 1/r * (p_6 * c + p_9 * d) * d * p_{10} \\ 2 * p_9 - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * c * p_7 - 1/r * (p_7 * c + p_{10} * d) * d * p_{10} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.10)$$

*หมายเหตุ: โปรแกรมการคำนวณสามารถดูได้ที่ ภาคผนวก ก.

เพื่อหาค่าตัวแปรในการจำลองผลสมการที่ 3.10 จึงกำหนดค่าตัวแปรต่อไปนี้

$$M = 2 \text{ กิโลกรัม}$$

$$m = 1 \text{ กิโลกรัม}$$

$$l = 1 \text{ เมตร}$$

$$g = 9.81 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

โดยใช้โปรแกรมเมเปิล 9.5 ทำการคำนวณสมการที่ 3.10 เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ จึงกำหนดค่า $\mu = 1$ และ $r = 1$ เนื่องจากคำตอบของสมการมีทั้งหมด 20 ชุดคำตอบการ เพื่อความสะดวกจึงจัดแสดงเพียง 10 ชุดดังในตารางที่ 3.1 ค่า P ที่ได้โดยส่วนมากจะมีค่าเป็นจำนวนเชิงซ้อน แต่สมการที่ใช้ในการวิเคราะห์อยู่ในรูปสมการเชิงเส้น จึงควรเลือกใช้ค่าที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น และสามารถสุ่มเลือกใช้ค่าใดก็ได้ อันเนื่องมาจากค่าที่ได้ทั้งหมดมาจากสมการต้นแบบเดียวกัน แต่หากเลือกแล้วผลของการหาค่าอัตราขยายไม่อยู่ในขอบข่ายเสถียรภาพ ก็จะทำให้การสุ่มเลือกค่าใหม่

ตารางที่ 3.1 ตัวอย่างผลการคำนวณหาค่า P จากสมการที่ 3.8 ด้วยโปรแกรมเมเปิล 9.5

ชุดที่	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8	p9	p10
1	10.405	0.672	-1.159	-1.298	3.342	-1.967	-5.662	2.817	3.968	11.296
2	-8.9102	1.364	-1.651	-2.699	2.282	-1.932	-5.585	2.803	3.93	11.193
3	-979.028*I	-251.761	22.439*I	66.569	67.126*I	7.438	-22.247*I	-3.298*I	-5.438	15.651*I
4	519.485*I	-96.602	13.899*I	-38.162	-14.720*I	4.868	-13.079*I	-2.395*I	-2.868	8.288*I
5	-519.485*I	-96.602	13.899*I	-38.163	14.720*I	4.868	13.079*I	2.395*I	-2.868	-8.288*I
6	979.028*I	-251.761	-22.439*I	66.569	-67.126*I	7.438	22.247*I	3.298*I	-5.438	-15.651*I
7	8.9103	1.364	1.651	-2.699	-2.282	-1.931	5.585	-2.804	3.931	-11.194
8	-10.405	0.672	1.159	-1.298	-3.343	-1.968	5.662	-2.817	3.968	-11.296
9	-214.214+642.956*I	-140.183-72.791*I	-4.215+17.266*I	-13.795+47.897*I	24.725+30.087*I	-5.848-1.268*I	-16.294-4.446*I	2.810+0.451*I	3.848+1.268*I	10.672+3.543*I
10	-214.214-642.956*I	-140.183+72.791*I	-4.215-17.266*I	-13.795-47.897*I	24.725+30.087*I	-5.848+1.268*I	-16.294+4.446*I	2.810-.451*I	3.848-1.268*I	10.672-3.543*I

บทที่ 4

การหาอัตราขยายสัญญาณโดยใช้เกณฑ์เสถียรภาพของ เรทท์-เฮอรัวิทซ์ (Routh-Hurwitz)

4.1 การหาอัตราขยายที่เหมาะสม

การออกแบบระบบควบคุมแบบต่างๆนั้นมีจุดมุ่งหมายคือต้องการคำนวณหาค่าอัตราขยายของตัวควบคุมเหล่านั้น จากบทที่ 3 สามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีการวางตำแหน่งโพล (Pole Placement) โดยใช้ค่าครรชนีอินทิกรัลของค่าผิดพลาดคูณด้วยเวลา (ITAE) ซึ่งเหมาะสมสำหรับระบบที่มีการตอบสนองที่มีการแกว่ง ของสมการฟังก์ชันระบบปิดซึ่งสามารถนำมาออกแบบระบบควบคุม มีสัมประสิทธิ์ของสมการลักษณะเฉพาะดังนี้

$$s^2 + 2.1\omega_n s^3 + 3.4\omega_n^2 s^2 + 2.7\omega_n^3 s + \omega_n^4 = 0 \quad (4.1)$$

สมการที่ 4.1 สามารถเขียนได้ใหม่ว่า

$$s^2 + \alpha_c s^3 + \beta_c s^2 + \gamma_c s + \delta_c = 0 \quad (4.2)$$

เทียบสมการที่ 4.1 และสมการที่ 4.2 จะได้ว่า

$$\alpha = 2.1\omega_n$$

$$\beta = 3.4\omega_n^2$$

$$\gamma = 2.7\omega_n^3$$

$$\delta = \omega_n^4$$

$$\omega_n = \sqrt{g/l}$$

สมการลักษณะเฉพาะของระบบป้อนกลับแบบลดยเหนื่อสี่ระยะสามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$\det(sI - (A - BK))$$

$$s^4 + (ck_2 + dk_4)s^3 + (ck_1 + dk_3 - a)s^2 + (bck_4 - adk_4)s + (bck_3 - adk_3) = 0$$

(4.3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เขียนสมการที่ 4.3 ใหม่ได้ว่า

$$s^4 + \alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + \delta = 0 \quad (4.4)$$

ดังนั้น เปรียบเทียบสมการที่ 4.2 และสมการที่ 4.4 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \alpha &= 2.1\omega_n = (ck_2 + dk_4) \\ \beta &= 3.4\omega_n^2 = (ck_4 + dk_3 - a) \\ \gamma &= 2.7\omega_n^3 = (bck_4 - adk_4) \\ \delta &= \omega_n^4 = (bck_3 - adk_3) \end{aligned} \quad (4.5)$$

เมื่อ กำหนดค่า $l = 1$ เมตร

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.81}{1}} = 3.1321 \quad (4.6)$$

แทนค่า ω_n จากสมการที่ 4.6 ลงในสมการที่ 4.5 จะได้ว่า

$$\alpha = 6.577393$$

$$\beta = 33.354$$

$$\gamma = 82.9597$$

$$\delta = 96.2361$$

ในการวิเคราะห์นี้เราได้กำหนดค่าตัวแปรเพื่อทำการหาค่าอัตราขยายไว้ดังนี้

$$M = 2 \text{ กิโลกรัม}$$

$$m = 1 \text{ กิโลกรัม}$$

$$l = 1 \text{ เมตร}$$

$$g = 9.81 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าตัวแปรที่ได้กำหนดไว้ลงในสมการที่ 4.5 จะสามารถหาค่าตัวแปรได้ว่า

$$\gamma = 2.7\omega_n^3 = (bck_4 - adk_4)$$

$$k_4 = \frac{\gamma}{bc - ad} = 16.9133 \quad (4.7)$$

$$\delta = \omega_n^4 = (bck_3 - adk_3)$$

$$k_3 = \frac{\delta}{bc - ad} = 19.62 \quad (4.8)$$

$$\alpha = 2.1\omega_n = (ck_2 + dk_4)$$

$$k_2 = \frac{\alpha - dk_4}{c} = -3.7585 \quad (4.9)$$

$$\beta = 3.4\omega_n^2 = (ck_4 + dk_3 - a)$$

$$k_1 = \frac{\beta + a - dk_3}{c} = 7.848 \quad (4.10)$$

ว่า

เมื่อได้อัตราขยายจากสมการที่ 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 นำค่าที่ได้แทนค่าในสมการที่ 3.8 จะได้

$$K = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] = [7.848 \quad -3.7585 \quad 19.62 \quad 16.9133]$$

$$K = F^{-1}B^T P \quad (4.11)$$

ดังนั้นสมการที่ 3.8 สามารถเขียนให้ง่ายขึ้นโดยแทนสมการที่ 4.11 เข้าไปดังนี้

$$A^T P + PA - K^T r K + Q = 0 \quad (4.12)$$

แทนค่าเมทริกซ์ในสมการที่ 4.12 จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_3 & p_6 & p_8 & p_9 \\ p_4 & p_7 & p_9 & p_{10} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_2 & p_5 & p_6 & p_7 \\ p_3 & p_6 & p_8 & p_9 \\ p_4 & p_7 & p_9 & p_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix} \cdot r \cdot [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] + \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

โดยเมตริกซ์ที่ได้ มีขนาด 4x4 ซึ่งผู้เขียนขอแสดงในรูปขนาด 4x2 เพื่อความสะดวกในการเขียนสมการ จึงจัดให้มีการแบ่งช่วงของเมตริกซ์เป็นสองช่วงดังนี้

$$[x_1 \quad x_2] = 0$$

จากสมการที่ 3.9 สามารถคำนวณในโปรแกรม Matlab 7.0 โดยค่า mu ในโปรแกรมก็คือ μ นั้นเองดังนั้น

$$\begin{pmatrix} 2*a*p_2+2*b*p_4-R*k_1^2+\mu & p_1+a*p_5+b*p_7-R*k_1*k_2 \\ p_1+a*p_5+b*p_7-R*k_1*k_2 & 2*p_2-R*k_2^2 \\ a*p_6+b*p_9-R*k_1*k_3 & p_3-R*k_2*k_3 \\ p_3+a*p_7+b*p_{10}-R*k_1*k_4 & p_6+p_4-R*k_2*k_4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a*p_6+b*p_9-R*k_1*k_3 & p_3+a*p_7+b*p_{10}-R*k_1*k_4 \\ p_3-R*k_2*k_3 & p_6+p_4-R*k_2*k_4 \\ -R*k_3^2+1 & p_8-R*k_3*k_4 \\ p_8-R*k_3*k_4 & 2*p_9-R*k_4^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

สมการที่ 4.14 สามารถแทนค่าอัตราขยาย จากสมการที่ 4.7, 4.8, 4.9, 4.10 และแทนค่า P จากตารางที่ 3.1 จะหาค่า Q และ r ได้ดังนี้

$$r = 0.00259777$$

$$\mu = 1.685005 \quad (4.15)$$

โดยที่ ค่า μ เป็นส่วนหนึ่งของค่า Q ดังนี้

$$Q = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่า Q จะมีค่า

$$Q = \begin{bmatrix} 1.685 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 วิเคราะห์เสถียรภาพด้วยวิธีของ Routh-Hurwitz

สมการฟังก์ชันถ่ายโอน (Transfer function) ของระบบที่แทนด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential) จะอยู่ในรูปแบบของอัตราส่วนพหุนามหรือ $\frac{b(s)}{a(s)}$ จากสมการพหุนาม (polynomial equation) นี้ จะได้ว่าค่า s ที่ทำให้สมการ $a(s)$ มีค่าเท่ากับศูนย์หรือทำให้สมการฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function $G(s)$) มีค่านอนด์ ค่า s เหล่านี้จะเรียกว่าโพล (poles) ของระบบ $G(s)$ ในทางกลับกันค่า s ที่ทำให้สมการ $b(s)$ มีค่าเท่ากับศูนย์หรือทำให้สมการฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function $G(s)$) มีค่าเป็นศูนย์ ให้เรียกค่า s นั้นว่า ซีโร (zeros) ของระบบ $G(s)$ ค่าโพลและซีโรเหล่านี้สามารถใช้อธิบายลักษณะการตอบสนองของระบบได้ โดยพิจารณาจากตำแหน่งของโพลและซีโร ดังนั้นการตรวจสอบความมีเสถียรภาพของระบบพลศาสตร์ ทำได้โดยพิจารณาสมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) หรือสมการพหุนามของระบบที่จะทำการทดสอบโดยใช้หลักการที่ว่าถ้าค่ารากของสมการคุณลักษณะนี้อยู่ทางด้านขวามือของระนาบ s (s -plan) แสดงว่าระบบไม่มีเสถียรภาพ นั่นคือต้องการรากของสมการลักษณะเฉพาะ ซึ่งจะเห็นว่าการตรวจสอบเสถียรภาพหรือความสมดุลของระบบนั้นก็จำเป็นที่จะต้องถอดรากหรือหารากของสมการลักษณะเฉพาะก่อนแล้วตรวจสอบจากราก (roots) ของสมการนั้นซึ่งบางครั้งก่อนข้างจะไม่สะดวก ด้วยวิธีการของเกณฑ์เสถียรภาพของราท์ ทำให้สามารถตรวจสอบดูได้ว่าค่าจริงของรากสมการลักษณะเฉพาะนั้นอยู่ทางด้านขวามือของระนาบ s หรือไม่ โดยพิจารณาแถบลำดับของเราที่เขียนขึ้น โดยอาศัยสมการลักษณะเฉพาะของระบบพลศาสตร์ที่กำลังศึกษา โดยการตรวจดูที่แถวตั้งแถวแรกของลำดับเราท์ ถ้ามีค่าบวกทั้งหมดหรือไม่มีมีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายก็แสดงว่า ส่วนจริงของรากของสมการคุณลักษณะเฉพาะนั้นอยู่ทางด้านซ้ายมือของระนาบ s ทั้งหมด ซึ่งหมายความว่าระบบมีความสมดุลหรือมีเสถียรภาพ แต่ถ้าแถวตั้งแถวแรกของแถบลำดับเราท์มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายจากบวกเป็นลบ หรือจากลบเป็นบวก จำนวนครั้งที่มีการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายนี้จะหมายถึงจำนวนรากที่มีส่วนจริงที่อยู่ด้านขวาของระนาบ s ซึ่งหมายความว่าระบบไม่มีความสมดุลหรือขาดเสถียรภาพ จากสมการที่ 4.3 สามารถใช้วิธีการวิเคราะห์เสถียรภาพด้วยวิธีของ Routh-Hurwitz เพื่อหาขอบเขตของค่าอัตราขยายสัญญาณได้จากสมการคุณลักษณะของระบบดังนี้

$$s^4 + 6.577s^3 + 33.354s^2 + 82.96s + 96.236 = 0 \quad (4.17)$$

สมการคุณลักษณะของระบบสมการที่ 4.4 สามารถเขียนแถบของเราท์จะได้ว่า

$$\begin{array}{c}
 S^4 \\
 S^3 \\
 S^2 \\
 S^1 \\
 S^0
 \end{array}
 \begin{array}{ccc}
 1 & \beta & \delta \\
 \alpha & \gamma & 0 \\
 \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha} & \frac{\alpha\delta}{\alpha} & 0 \\
 \frac{\frac{(\alpha\beta - \gamma)\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha^2\delta}{\alpha}}{\alpha\beta - \gamma} & 0 & 0 \\
 \frac{\frac{(\alpha\beta - \gamma)\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha^2\delta}{\alpha}}{\alpha} & \delta & 0
 \end{array}$$

โดยมีเงื่อนไขตามกฎของเราที่ว่า

$$\begin{aligned}
 \text{i} &= \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha} > 0 \\
 \text{ii} &= \frac{\frac{(\alpha\beta - \gamma)\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha^2\delta}{\alpha}}{\alpha\beta - \gamma} > 0
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

ดังนั้นเพื่อพิสูจน์ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของป็นจันแบบลอยเหนือสี่ระยะนี้มีเสถียรภาพหรือไม่จึงแทนค่าสมการที่ 4.5 ลงในสมการที่ 4.11 เพื่อทดสอบเสถียรภาพจะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$i = \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha}$$

$$i = \frac{6.577393 * 33.354 - 82.9597}{6.577393} = 20.7411$$

$$ii = \frac{\frac{(\alpha\beta - \gamma)\gamma}{\alpha} - \frac{\alpha^2\delta}{\alpha}}{\alpha}$$

$$ii = \frac{\frac{(6.577393 * 33.354 - 82.9597) * 82.9597}{6.577393} - \frac{(6.577393)^2 * 96.2361}{6.577393}}{6.577393}$$

$$ii = 52.4415 \quad (4.19)$$

ดังนั้น ค่าที่ได้ตั้งสมการที่ 4.19 พบว่าค่าที่ได้มีค่าเป็นบวกทั้งหมด ไม่มีค่าเป็นลบ สามารถสรุปได้ว่าแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของป็นจันแบบลอยเหนือศีรษะนี้มีความเสถียรภาพตามทฤษฎีของเราท์-เซอร์วิทซ์ ไม่มีค่ารากของสมการคุณลักษณะอยู่ทางด้านขวาของระนาบ s

บทที่ 5

การจำลองผลทางคณิตศาสตร์และการวิเคราะห์

5.1 รูปแบบทางคณิตศาสตร์ป้อนจั้นแบบลอยเหนืออิสระ

การจำลองผลเพื่อเปรียบเทียบแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทั้งสองรูปแบบ ดังเสนอการวิเคราะห์ในบทที่ 2 ระบบเกณฑ์ที่ได้จะมีความแตกต่างกันที่เมตริกซ์ A โดยจะใช้ค่ากำกับความหมายของรูปแบบของระบบเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจดังนี้

5.1.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเดิม

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ได้จากการวิเคราะห์ของอัครเกอร์มานได้พิจารณาให้ค่าความเร็วเชิงมุมป้อนกลับมีค่าเป็นศูนย์ดังสมการที่ 5.1

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$x = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \theta \\ \dot{r} \\ r \end{bmatrix}$$

ความเร็วเชิงมุมของมุมเพนดูลัม
ความเร่งเชิงมุมของมุมเพนดูลัม
ความเร็วของรอรอก
ความเร่งของรอรอก

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(M+m)g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Ml}{0} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

(5.1)

5.1.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเพิ่มเติม (งานวิจัย)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ได้จากการวิเคราะห์เพิ่มเติมในส่วน of ค่าความเร็วเชิงมุมป้อนกลับให้ไม่มีค่าเป็นศูนย์ดังสมการที่ 5.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{ความเร็วเชิงมุมของมุมเพนดูลัม} \\ \text{ความเร่งเชิงมุมของมุมเพนดูลัม} \\ \text{ความเร็วของรอรอก} \\ \text{ความเร่งของรอรอก} \\ \text{ความเร็วของรอรอก} \\ \text{ความเร่งของรอรอก} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(M+2m)g & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Ml}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2mg}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

(5.2)

การจำลองผลหาค่าตัวแปรในการจำลองผลสมการที่ 5.1 และ 5.2 เพื่อทำการเปรียบเทียบคุณลักษณะของระบบมีความต่างกันมากเพียงใด ดังนั้นสามารถกำหนดค่าตัวแปรระบบให้มีค่าคงที่ดังต่อไปนี้

$$M = 2 \text{ กิโลกรัม}$$

$$l = 1 \text{ เมตร}$$

$$g = 9.81 \text{ เมตร/วินาที}^2$$

5.2 การจำลองผลด้วยโปรแกรม MATLAB 7.0

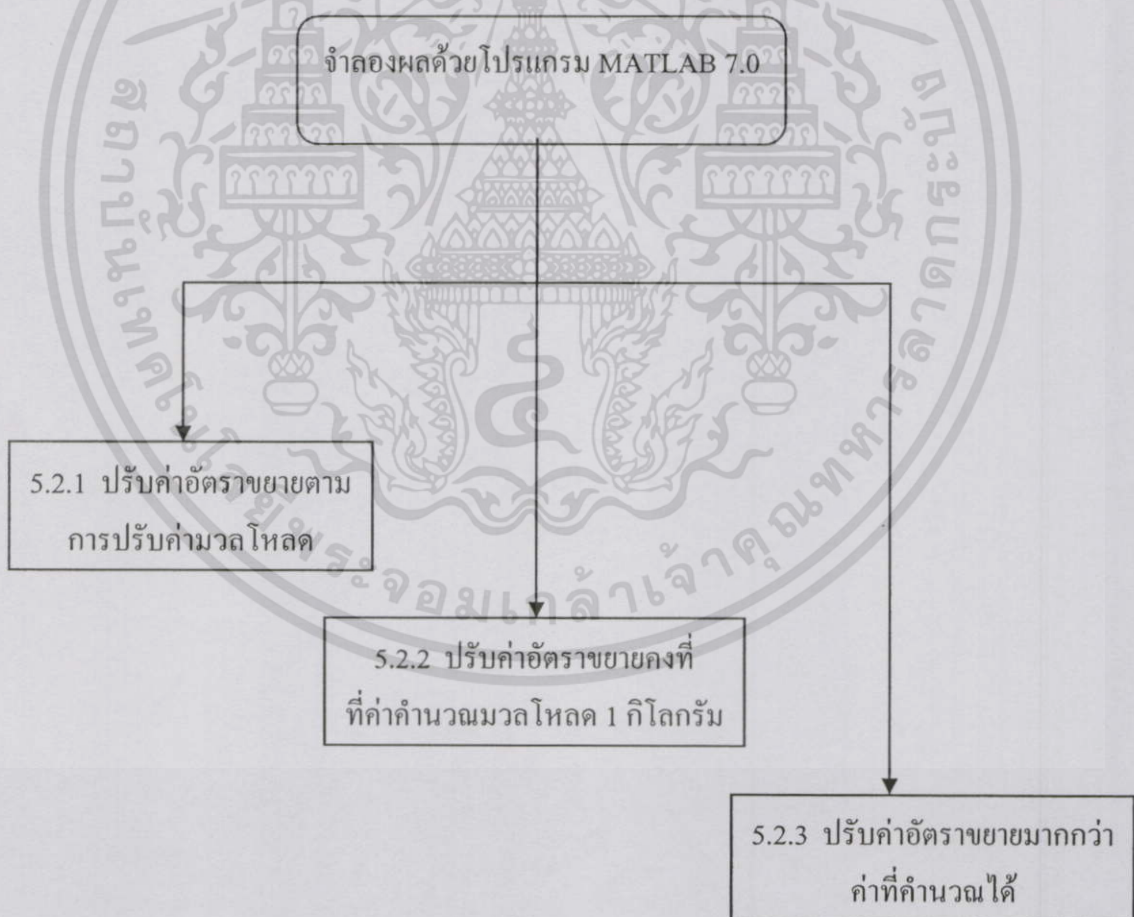
การจำลองผลแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบเคอร์เนลมี 3 วิธี เพื่อให้การเปรียบเทียบระบบมีความหลากหลายและสามารถทำการวิเคราะห์ระบบได้ชัดเจนขึ้นได้แก่

5.2.1 การปรับค่าอัตราขยายของระบบปิดตามค่าที่คำนวณได้จากการปรับค่ามวลโหลดหรือค่า m โดยจะปรับมวลโหลดเป็น 1, 5, 10, 20 และ 40 กิโลกรัม

5.2.2 การปรับค่าอัตราขยายระบบปิดมีค่าคงที่โดยใช้สมการรีกาคาคำนวณค่าอัตราขยายเมื่อคิดมวลโหลดที่ 1 กิโลกรัมและทำการปรับค่ามวลโหลดหรือค่า m โดยจะปรับมวลโหลดเป็น 1, 5, 10, 20 และ 40 กิโลกรัม

5.2.3 การปรับค่าอัตราขยายระบบปิดมีค่ามากกว่าค่าที่คำนวณได้โดยกรณีนี้ให้ค่ามวลโหลดคงที่ที่ 1 กิโลกรัมและใช้ค่าอัตราขยายที่คำนวณได้จากสมการรีกาคาโดยปรับค่ามวลโหลด เป็น 1, 2, 3, 4 และ 5 กิโลกรัม

สามารถแจกแจงวิธีการจำลองผลได้ดังภาพที่ 5.1



ภาพที่ 5.1 แผนภูมิแสดงวิธีการจำลองผลแบบจำลองระบบเคอร์เนล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

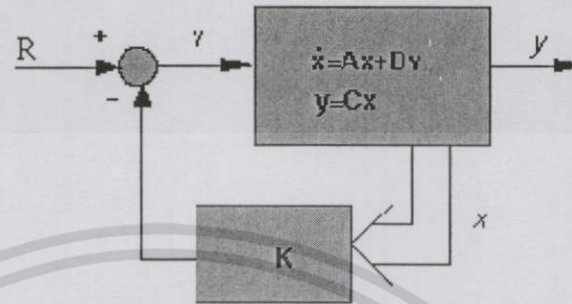
ผลการจำลองจะแสดงผลในรูปของกราฟเชิงเส้น และใช้ศัพท์ที่กระชับสั้น โดยมี ความหมายดังนี้

- pendulum หมายถึงตำแหน่งมุม θ ที่เกิดขึ้นของระบบเครนที่ได้ปรับปรุง พารามิเตอร์เพิ่มเติม
- pendulum1 หมายถึงตำแหน่งมุม θ ที่เกิดขึ้นของระบบเครนที่ยังไม่ได้ ปรับปรุงค่าพารามิเตอร์
- cart หมายถึงตำแหน่งรถรอกของระบบเครนที่ได้ปรับปรุงพารามิเตอร์เพิ่มเติม
- cart1 หมายถึงตำแหน่งรถรอกระบบเครนที่ยังไม่ได้ปรับปรุงค่าพารามิเตอร์
- Knew หมายถึงอัตราขยายของระบบเครนที่ได้ปรับปรุงพารามิเตอร์เพิ่มเติม
- Kold หมายถึงอัตราขยายของระบบเครนที่ยังไม่ได้ปรับปรุงค่าพารามิเตอร์
- เวลาประวิง (delay time) หรือเวลาหน่วง หมายถึงเวลาที่ผลตอบสนองขึ้นไปถึง ครึ่งหนึ่งของค่าปลาย
- ช่วงเวลาขึ้น (rise time) หมายถึงช่วงเวลาที่ผลตอบสนองเมื่อสัญญาณเอาต์พุต เพิ่มขึ้นจาก 10% - 90% หรือจาก 5% - 95% หรือ 0% - 100% เพราะฉะนั้นการ กำหนดช่วงเวลาขึ้นจำเป็นจะต้องบอกด้วยว่าวัดช่วงเวลาไหน ช่วงเวลา 0% - 100% เป็นช่วงเวลาที่สะดวกและนิยมมากที่สุด
- เวลาของค่ายอด (peak time) หมายถึงเวลาที่สัญญาณผลตอบสนองมีค่าสูงสุดค่า แรกของผลตอบสนองนั้นๆ
- โอเวอร์ชูตสูงสุด (maximum overshoot) หมายถึงค่าตอบสนองสูงสุดที่วัดจาก สถานะอยู่ตัวสุดท้าย (final steady state) การบอกค่าโอเวอร์ชูตสูงสุดส่วนมาก แล้วจะบอกเป็นเปอร์เซ็นต์
- เวลาเข้าที่ (setting time) หมายถึงเวลาที่ผลตอบสนองลดลงจนเริ่มเข้าไปอยู่ใน ช่วงที่กำหนด ช่วงที่กำหนดนี้จะวัดเทียบกับค่าสุดท้ายของผลตอบสนองใน สถานะอยู่ตัวสุดท้าย (final steady state) หรือเรียกว่าช่วงผ่อนผันที่ยอมรับให้ได้ (allowable tolerance) ซึ่งค่าที่นิยมกำหนดจะบอกเป็นเปอร์เซ็นต์ คือ 1%, 2% หรือ 5%

การพิจารณารูปแบบทางคณิตศาสตร์ สามารถเขียนออกมาในรูปแบบของ บล็อกไดอะแกรมใช้อธิบายการจำลองผลในระบบปิด ดังภาพที่ 5.2 เพื่อทำการเปรียบเทียบ ผลตอบสนองของระบบเครนแบบเดิมและแบบเพิ่มเติม โดยใช้อินพุต R เป็นอินพุตแบบ สเตปฟังก์ชัน (Step function) ซึ่งเปลี่ยนค่าจากค่าคงที่ค่าหนึ่งไปเป็นค่าคงที่อีกค่าหนึ่ง โดยภายใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กราฟเดียวกัน มีความสัมพันธ์ระหว่างแอมพลิจูดและเวลา แกนแนวตั้งแสดงถึงแอมพลิจูด (Amplitude) ของรตุรอกและมุมเพนดูลัม (Angle of pendulum) ส่วนแกนแนวนอนแสดงถึงเวลาในหน่วยวินาที (second)

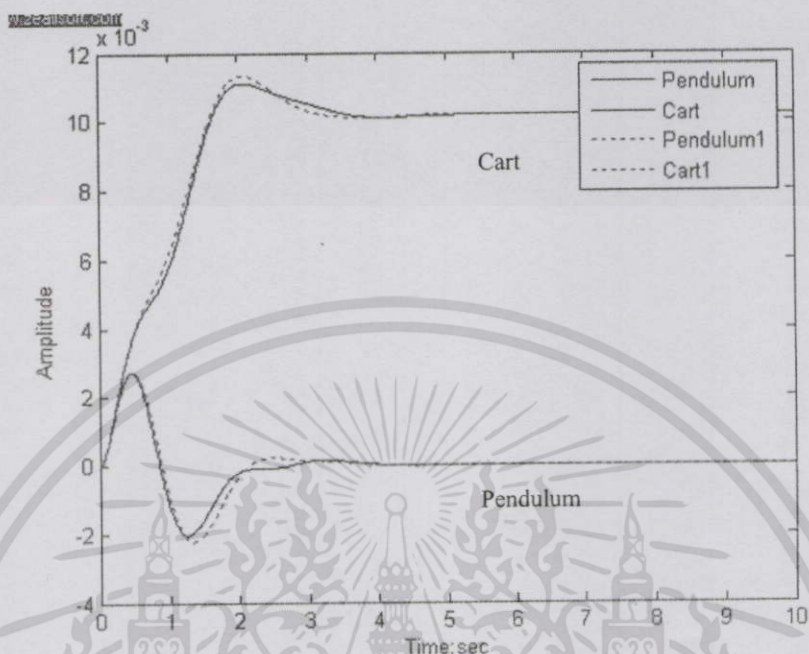


ภาพที่ 5.2 บล็อกไดอะแกรมของการจำลองระบบปิด

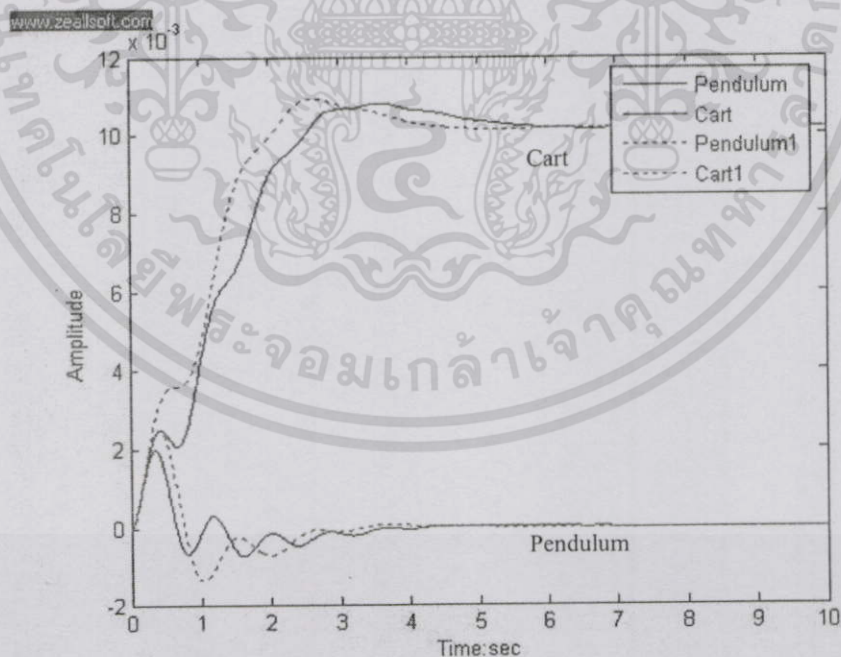


5.3 ผลการจำลอง

5.3.1 ผลการปรับค่าอัตราขยายตามการปรับค่ามวลโหลด

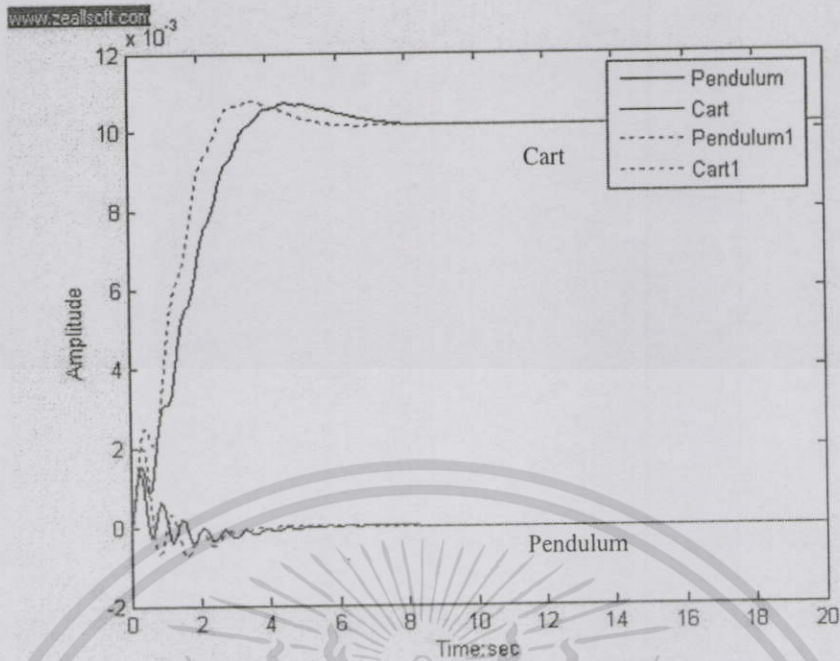


ภาพที่ 5.3 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1 \text{ kg}$, $K_{new} = [11.0199 \quad -3.1082 \quad 19.6200 \quad 14.1788]$
 $K_{old} = [17.0617 \quad -1.5239 \quad 19.6200 \quad 13.6370]$



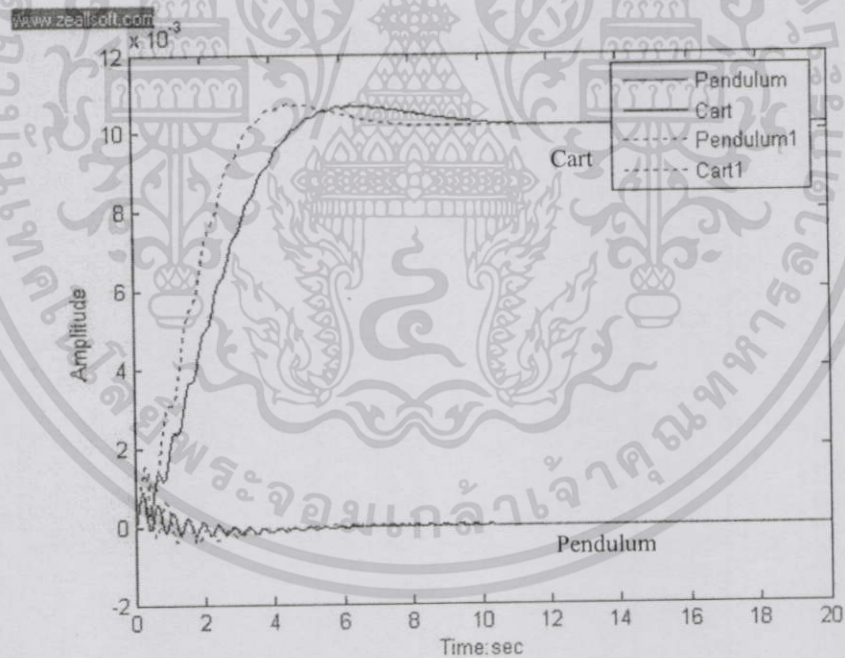
ภาพที่ 5.4 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 5 \text{ kg}$, $K_{new} = [-6.4964 \quad -13.8472 \quad 19.6200 \quad 21.0925]$
 $K_{old} = [0.7775 \quad -7.6343 \quad 19.6200 \quad 16.6670]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 5.5 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 10 \text{ kg.}$, $K_{new} = [-11.9603 \ -23.0207 \ 19.6200 \ 28.5559]$

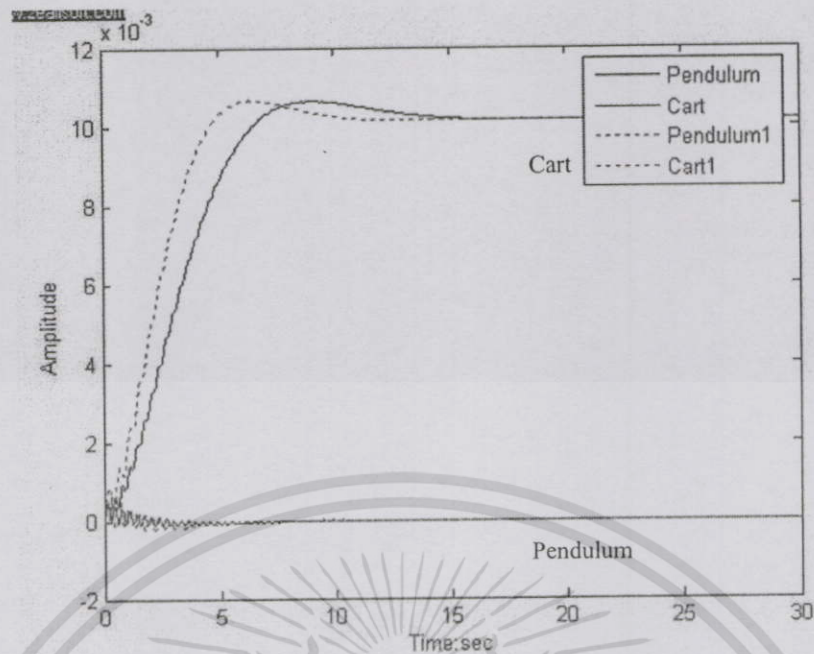
$$K_{old} = [-6.4964 \ -13.8472 \ 19.6200 \ 21.0925]$$



ภาพที่ 5.6 ผลตอบสนองต่อระบบเมื่อ $m = 20 \text{ kg.}$, $K_{new} = [-15.4467 \ -35.7425 \ 19.6200 \ 39.8283]$

$$K_{old} = [-11.9603 \ -23.0207 \ 19.6200 \ 28.55590925]$$

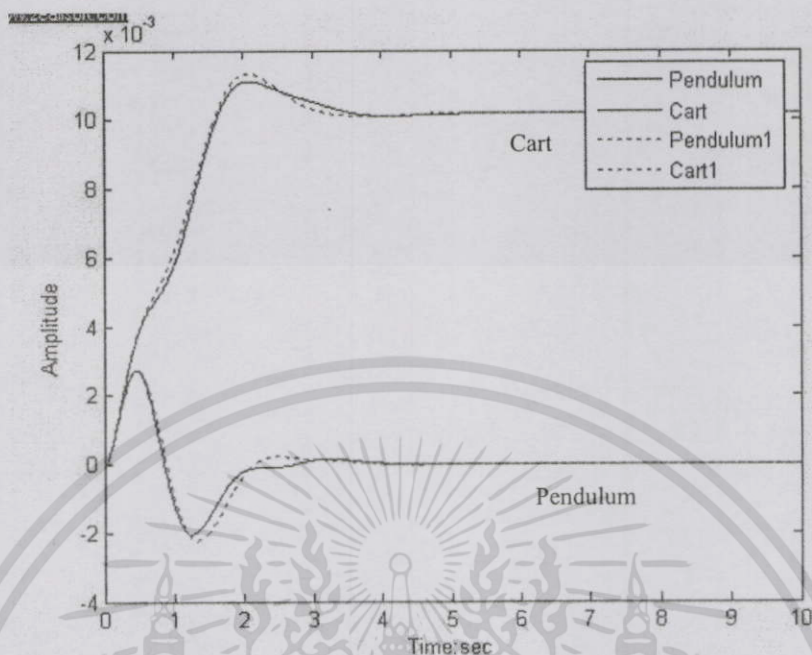
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



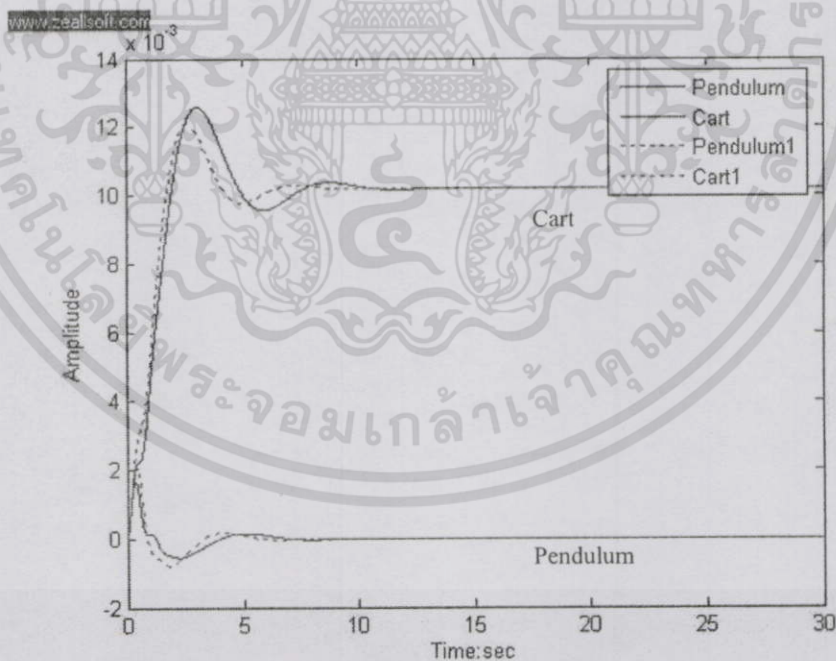
ภาพที่ 5.7 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 40 \text{ kg}$, $K_{new} = [-17.4373 \ -53.1517 \ 19.6200 \ 56.1064]$
 $K_{old} = [-15.4467 \ -35.7425 \ 19.6200 \ 39.8283]$

วิเคราะห์ผลการจำลองวิธี 5.3.1 ปรับค่าอัตราขยายตามการปรับค่ามวลโหลด การจำลองผลทั้งแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมและแบบเพิ่มเติมสามารถแสดงผลตอบสนองออกมาได้ดังภาพที่ 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 และ 5.7 ตามลำดับ การปรับเปลี่ยนเพิ่มมวลโหลดและจำนวนค่าอัตราขยายใหม่ทุกครั้งที่มีการเพิ่มมวลโหลด ส่งผลให้การแกว่งของมวลโหลดเพิ่มมากขึ้นและใช้เวลาในการแกว่งยาวนานขึ้นแต่การแกว่งของมวลโหลดในช่วงเวลาเริ่มต้นจากศูนย์จะมีขนาดของมุมเล็กกลงเมื่อเพิ่มมวลโหลดและในส่วนของพลังงานที่รตรอกจะสัมพันธ์ต่อการแกว่งของมวลโหลดคั้งนั้นส่งผลให้ใช้เวลานานขึ้นเช่นกันและขนาดของค่าพลังงานที่ป้อนให้กับรตรอกนั้นมีการแกว่งตัวในปริมาณน้อยๆ ในช่วงเวลาขึ้น (rise time) แต่ค่าโอเวอร์ชูตของพลังงานนั้นไม่สูงมากไปนัก เมื่อเปรียบเทียบผลตอบสนองของแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมและแบบเพิ่มเติม พบว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเพิ่มเติมจะมีขนาดของมุมในการแกว่งที่น้อยกว่าแต่ใช้เวลาที่จะทำให้มุมแกว่งของมวลโหลดเป็นศูนย์นานมากกว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมเล็กน้อย

5.3.2 ผลการปรับค่าอัตราขยายคงที่ ที่ค่าคำนวณมวลโหลด 1 กิโลกรัม

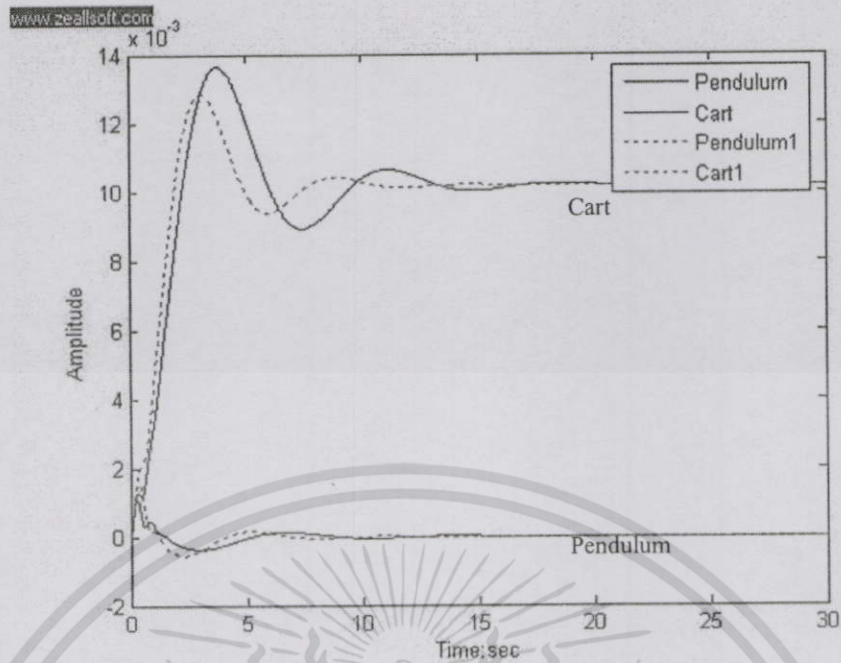


ภาพที่ 5.8 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1 \text{ kg}$, $K_{new} = [11.0199 \quad -3.1082 \quad 19.6200 \quad 14.1788]$
 $K_{old} = [17.0617 \quad -1.5239 \quad 19.6200 \quad 13.6370]$



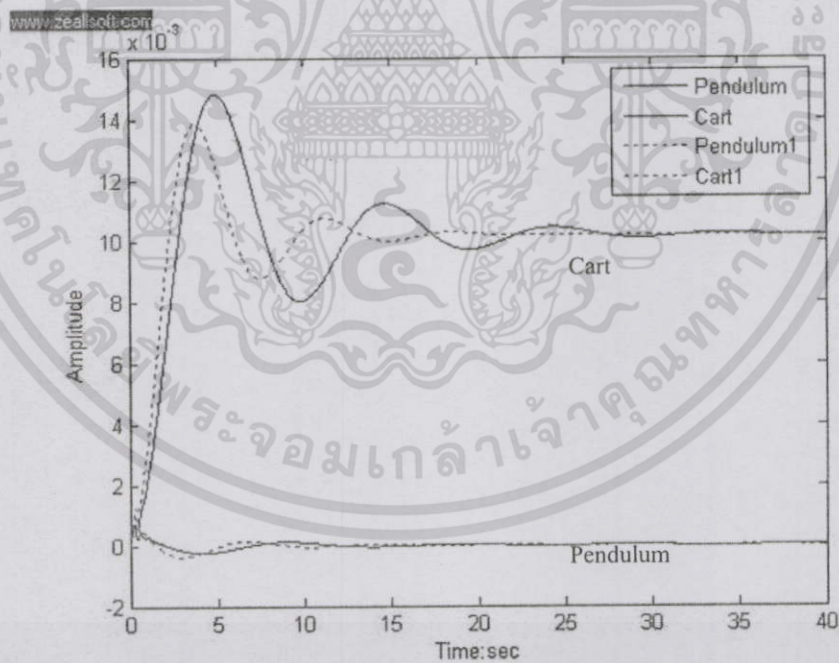
ภาพที่ 5.9 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 5 \text{ kg}$, $K_{new} = [11.0199 \quad -3.1082 \quad 19.6200 \quad 14.1788]$
 $K_{old} = [17.0617 \quad -1.5239 \quad 19.6200 \quad 13.6370]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 5.10 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 10 \text{ kg.}$, $K_{new} = [11.0199 \ -3.1082 \ 19.6200 \ 14.1788]$

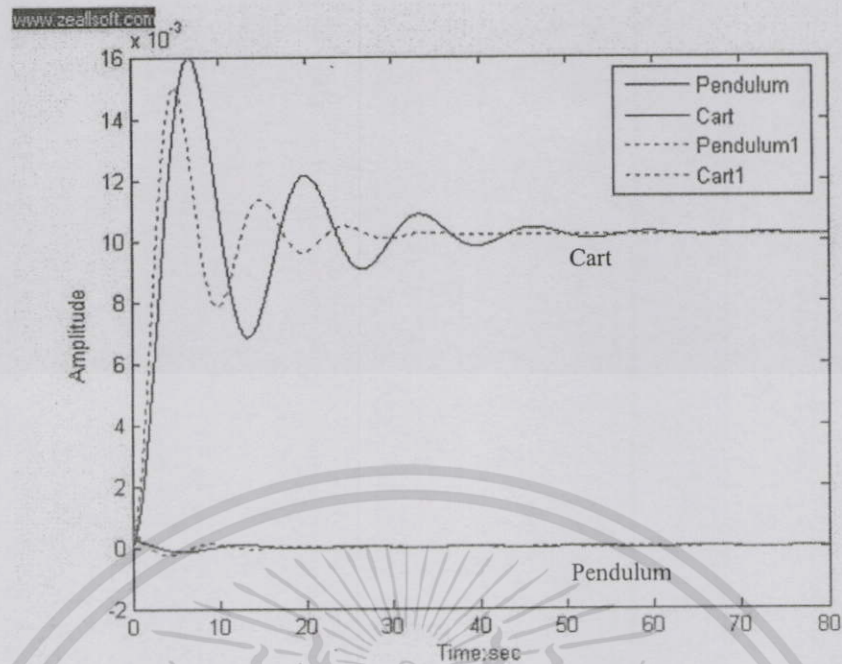
$$K_{old} = [17.0617 \ -1.5239 \ 19.6200 \ 13.6370]$$



ภาพที่ 5.11 ผลตอบสนองต่อระบบเมื่อ $m = 20 \text{ kg.}$, $K_{new} = [11.0199 \ -3.1082 \ 19.6200 \ 14.1788]$

$$K_{old} = [17.0617 \ -1.5239 \ 19.6200 \ 13.6370]$$

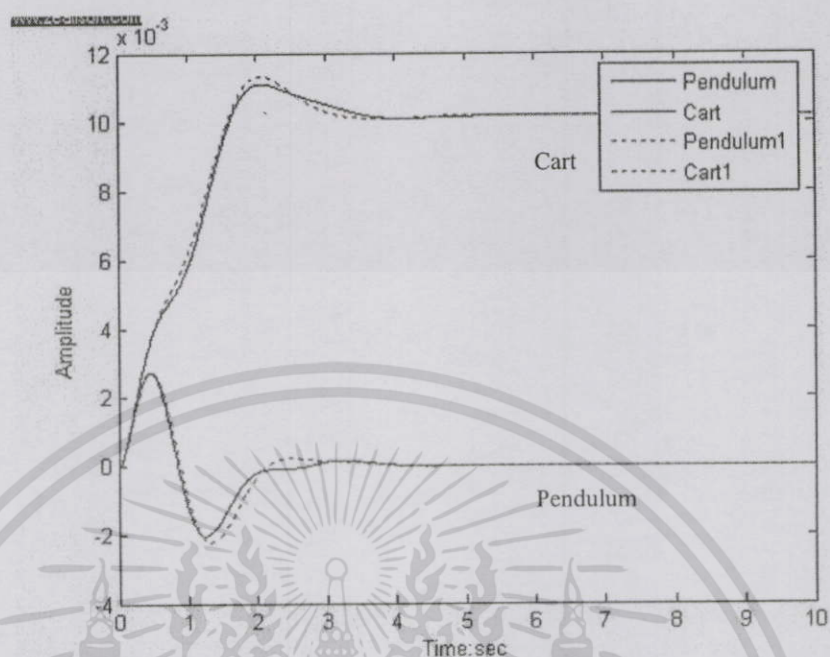
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 5.12 ผลตอบสนองของต่อระบบ เมื่อ $m = 40 \text{ kg.}$, $K_{new} = [11.0199 \ -3.1082 \ 19.6200 \ 14.1788]$
 $K_{old} = [17.0617 \ -1.5239 \ 19.6200 \ 13.6370]$

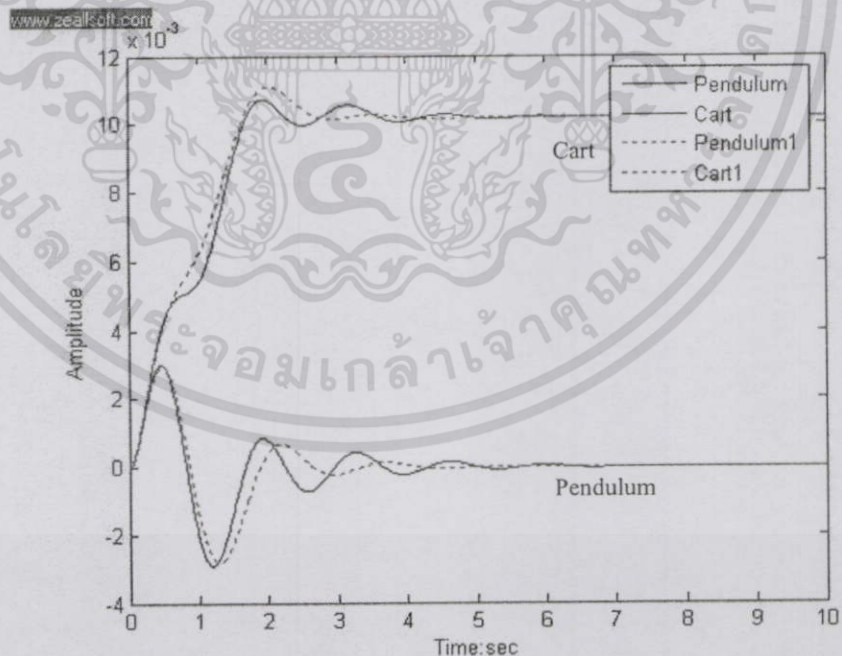
วิเคราะห์ผลการจำลองวิธี 5.3.2 ปรับค่าอัตราขยายคงที่ที่ค่าคำนวณมวลโหลต 1 กิโลกรัม การจำลองผลทั้งแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมและแบบเพิ่มเติมสามารถแสดงผลตอบสนองออกมาได้ดังภาพที่ 5.8, 5.9, 5.10, 5.11 และ 5.12 ตามลำดับ การแกว่งของโหลตเมื่อเพิ่มมวลมากขึ้นจะมีขนาดของมุมเล็กลงอย่างรวดเร็วแต่เมื่อเพิ่มมวลโหลตมากกว่า 20 กิโลกรัม จะพบว่าการกระเพื่อมของมุมโหลตเพียงเล็กน้อยและเพื่อให้มุมการแกว่งเป็นศูนย์ใช้เวลายาวนานมากขึ้นเป็นเท่าตัวของมวลโหลตที่น้อยกว่าและในส่วนของพลังงานที่รูดอกจะสัมพันธ์ต่อการแกว่งของมวลโหลตส่งผลให้พลังงานที่รูดอกมีค่าโอเวอร์ชูตสูงสุดเพิ่มสูงขึ้นเรื่อยๆตามขนาดของมวลโหลตที่มีค่าเพิ่มมากขึ้นและมีใช้พลังงานยาวนานมากขึ้นตามการแกว่งของมวลโหลตเมื่อเปรียบเทียบผลตอบสนองของแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมและแบบเพิ่มเติม พบว่าแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเพิ่มเติมมีขนาดของพลังงานที่รูดอกสูงกว่าแบบเดิมแต่ขนาดมุมจากการแกว่งของโหลตจะมีขนาดใกล้เคียงกันแม้เพิ่มขนาดของมวลโหลตให้มากขึ้น

5.3.3 ผลการปรับค่าอัตราขยายมากกว่าค่าที่คำนวณได้



ภาพที่ 5.13 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg., และอัตราขยาย 1 เท่าจากที่คำนวณได้

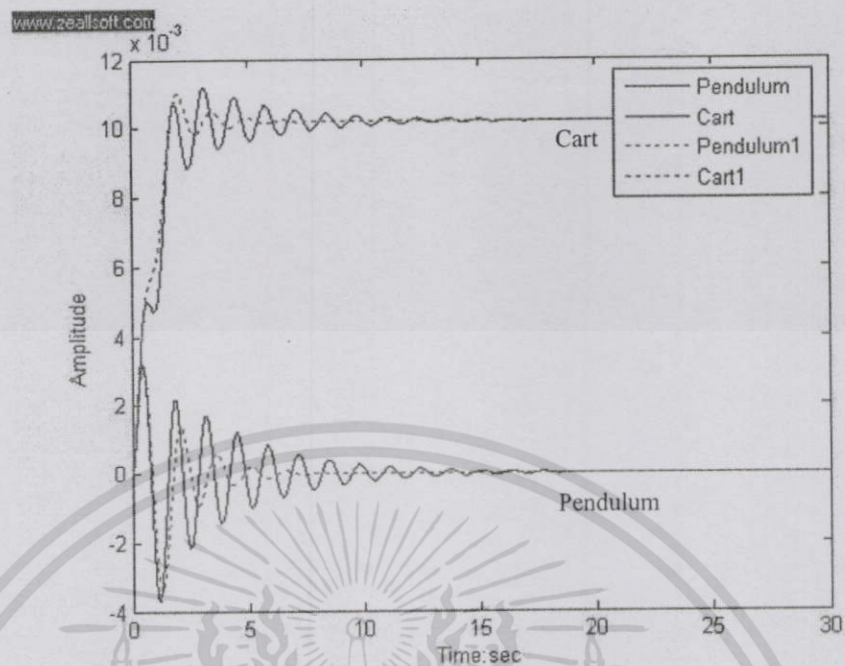
$$K_{new} = [11.0199 \quad -3.1082 \quad 19.6200 \quad 14.1788], K_{old} = [17.0617 \quad -1.5239 \quad 19.62 \quad 13.6370]$$



ภาพที่ 5.14 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1$ kg., และอัตราขยาย 2 เท่าจากที่คำนวณได้

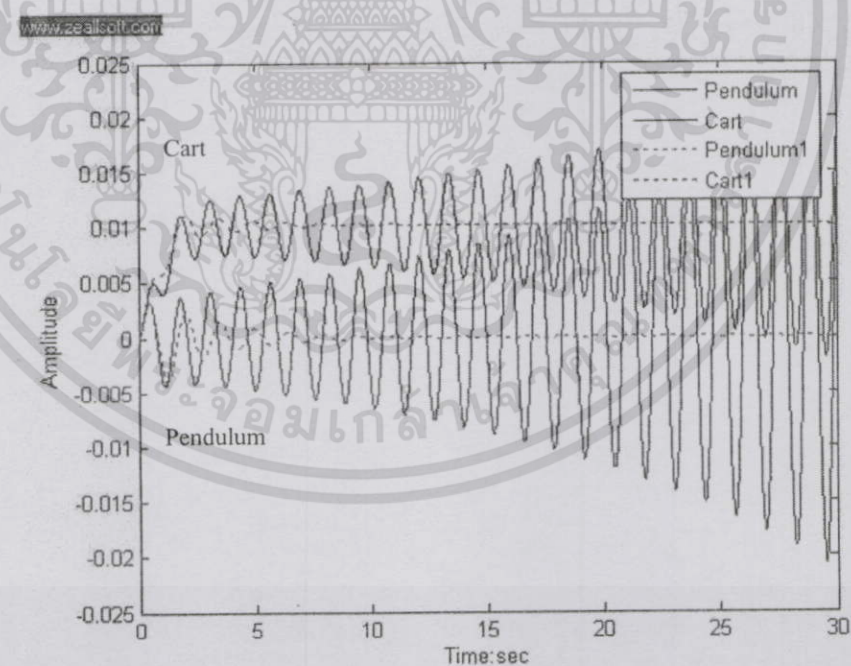
$$K_{new} = [3.3328 \quad -6.1907 \quad 19.6200 \quad 15.7725], K_{old} = [11.0199 \quad -3.1082 \quad 19.62 \quad 14.1788]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา. และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 5.15 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1 \text{ kg.}$, และอัตราขยาย 3 เท่าจากที่คำนวณได้

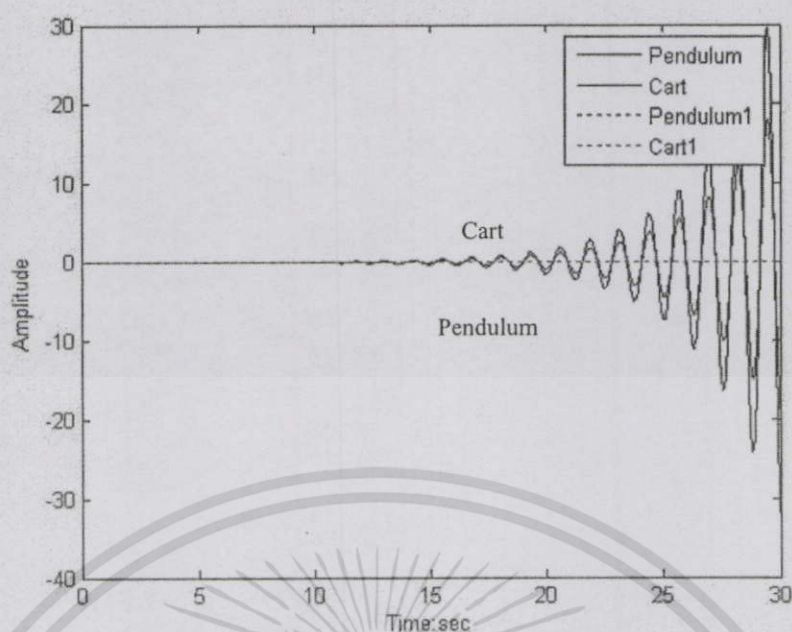
$$K_{new} = [-1.2618 \quad -9.0055 \quad 19.62 \quad 17.5748], K_{old} = [6.6279 \quad -4.677 \quad 19.62 \quad 14.9235]$$



ภาพที่ 5.16 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1 \text{ kg.}$, และอัตราขยาย 4 เท่าจากที่คำนวณได้

$$K_{new} = [-4.3156 \quad -11.5443 \quad 19.62 \quad 19.3685], K_{old} = [3.3328 \quad -6.1907 \quad 19.62 \quad 15.7725]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 5.17 ผลตอบสนองต่อระบบ เมื่อ $m = 1 \text{ kg}$, และอัตราขยาย 5 เท่าจากที่คำนวณได้

$$K_{new} = [-6.4964 \quad -13.8472 \quad 19.6200 \quad 21.0925], K_{old} = [0.7775 \quad -7.6343 \\ 19.6200 \quad 16.6670]$$

วิเคราะห์ผลการจำลองวิธี 5.3.3 ปรับค่าอัตราขยายมากกว่าค่าที่คำนวณได้ การจำลองผลทั้งแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมและแบบเพิ่มเติมสามารถแสดงผลตอบสนองออกมาได้ดังภาพที่ 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 และ 5.17 ตามลำดับ การแกว่งของมวล โหลดแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเพิ่มเติมจะมีขนาดของมุมเพิ่มขึ้นในช่วงเริ่มต้นและมีความถี่ในการแกว่งเพิ่มขึ้นด้วยตามการเพิ่มค่าอัตราขยายของระบบ แต่ยังสามารถรักษาเสถียรภาพของระบบไว้ได้เมื่อใช้ค่าอัตราขยายของระบบที่มีค่ามากกว่าค่าที่คำนวณได้สามเท่า และเมื่อใช้ค่าอัตราขยายที่มีขนาดมากกว่าค่าที่คำนวณได้ในระบบตั้งแต่สี่เท่าเป็นต้นไป การแกว่งของมวล โหลดจะไม่สามารถควบคุมไว้ได้หรือระบบไร้เสถียรภาพนั่นเอง ดังนั้นพลังงานที่รูดอกมีความสัมพันธ์กับการแกว่งของมวล โหลด จึงไม่สามารถรักษาเสถียรภาพหรือไร้เสถียรภาพได้เช่นกันเมื่อใช้ค่าอัตราขยายที่มีขนาดมากกว่าค่าที่คำนวณได้ในระบบตั้งแต่สี่เท่าเป็นต้นไป การแกว่งของมวล โหลดแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมจะมีความคล้ายคลึงกับแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเพิ่มเติมคือขนาดของมุมเพิ่มขึ้นในช่วงเริ่มต้นและมีความถี่ในการแกว่งเพิ่มขึ้นด้วยตามการเพิ่มค่าอัตราขยายของระบบ แต่ยังสามารถรักษาเสถียรภาพของระบบไว้ได้เมื่อใช้ค่าอัตราขยายของระบบที่มีค่ามากกว่าค่าที่คำนวณได้สี่เท่า และเมื่อใช้ค่าอัตราขยายที่มีขนาดมากกว่าค่าที่คำนวณได้ในระบบตั้งแต่ห้าเท่าเป็นต้นไป การแกว่งของมวล โหลดจะไม่สามารถควบคุมไว้ได้หรือระบบไร้เสถียรภาพนั่นเอง ดังนั้นพลังงานที่รูดอกมีความสัมพันธ์กับการแกว่งของมวล โหลดก็จะไม่สามารถรักษาเสถียรภาพหรือไร้เสถียรภาพได้เช่นกันเมื่อใช้ค่าอัตราขยายที่มีขนาดมากกว่าค่าที่คำนวณได้ในระบบตั้งแต่ห้าเท่าเป็นต้นไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปผลการจำลองระบบ

6.1 สรุปผลการจำลองระบบป็นจันแบบลดยเหนื่อศีรยะ

การปรับปรุงค่าพารามิเตอร์ทางคณิตศาสตร์ของระบบเลนหรือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเพิ่มเติมยังคงมีคุณลักษณะคล้ายคลึงกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบเดิม ดังนั้นจึงสามารถคาดการณ์ได้ว่างานวิจัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้มีส่วนที่ถูกต้องต่อการปรับปรุงพารามิเตอร์เพื่อให้แบบจำลองนั้นมีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น และรูปแบบวิธีการหาค่าอัตราขยายโดยใช้สมการรีคาติเข้าช่วยนั้นมีความซับซ้อนในขั้นตอนต่างๆ เช่นขั้นตอนการหาค่าเวกเตอร์น้ำหนักหากแต่สามารถปรับเปลี่ยนค่าอัตราขยายได้โดยง่ายในกรณีที่มีการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ของสมการ

โดยเป้าหมายหลักของงานวิจัยนี้คือการควบคุมการแกว่งของมวลโหลดให้มีค่าน้อยที่สุด ดังนั้นวิธีที่ดีที่สุดในการเลือกใช้อัตราขยายของระบบควบคุมคือ วิธีการที่สองหรือวิธีที่ 5.2.2 คือการกำหนดค่าอัตราขยายให้มีค่าที่จากค่าคำนวณอัตราขยายที่มวลโหลดมีขนาดเล็ก แต่ขนาดของชุดขับรอกและตัวขับเคลื่อนรอกจะต้องมีขนาดที่ใหญ่ขึ้นเพื่อรองรับการเกิดโอเวอร์ชูต ในส่วนของการเปรียบเทียบแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบเดิมและแบบเพิ่มเติมทำได้โดยการปรับเปลี่ยนพารามิเตอร์ของระบบนั้นว่าจะส่งผลมากน้อยเพียงใดต่อระบบ และผลตอบสนองจากการจำลองระบบที่ได้นั้นมีความแตกต่างกันพอสมควรอย่างชัดเจนเมื่อเพิ่มขนาดของมวลโหลดมากขึ้นซึ่งผลที่เปรียบเทียบเพื่อใช้ตรวจสอบในกรณีที่ต้องการเปรียบเทียบกับระบบเลนจริงว่าแบบจำลองใดมีความใกล้เคียงกับระบบจริงมากที่สุด

ซึ่งผลการทดลองที่ได้จากการจำลองทางคอมพิวเตอร์นั้น ไม่อาจได้ค่าที่ถูกต้องชัดเจนทั้งหมด เนื่องจากสมการหรือรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ทำการวิจัยนี้ เป็นเพียงการใช้กระบวนการประมาณทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์ระบบพลศาสตร์ที่จัดสมการให้อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น ในขณะที่สมการที่แท้จริงเป็นสมการชนิดไม่เชิงเส้น จากที่กล่าวมาจะสามารถทดสอบหาพฤติกรรมต่างๆ รวมทั้งสามารถทำการทดลองเปรียบเทียบกับแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ได้นำเสนอในบทข้างต้นไปแล้ว ได้ใกล้เคียงกับค่าที่เป็นจริงมากขึ้น ในการวิจัยพฤติกรรมระบบพลศาสตร์เพนคูลัมของระบบป็นจันแบบลดยเหนื่อศีรยะ ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ได้นำเสนอการปรับค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองคณิตศาสตร์คณิตศาสตร์เพื่อแทนการอนุমানค่าพารามิเตอร์ของระบบและเรียบเรียงการวิเคราะห์ค่าควบคุมระบบโดยใช้สมการรีคาติ โดยที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้องทางวิศวกรรมด้านการออกแบบควบคุมระบบเลนได้ อีกทั้งยังสามารถใช้อ้างอิงในงานวิจัยเพื่อพัฒนาต่อไปในอนาคตได้

บรรณานุกรม

- [1] Cveticanin, "Dynamic Behavior of The lifting Crane Mechanism", **Elsevier Science, Printed in Great Britain**, vol. 30, 1995 pp 141-151.
- [2] Kazunobu, Y., "Nonlinear Controller Design for Crane System with State Constrains", **AACC**, 1998, pp 1277 – 1283.
- [3] Zhonghua, W., Brian W. Surgenor, "A Problem With the LQ Control of Overhead Crane", vol. 128, **ASME**, 2006, pp 436 – 439.
- [4] Takao, F., "A new Approach to the LQ Design from the View point of the Inverse Regulator Problem, 1987, **IEEE Transaction on Automatic Control**, vol.AC-32, No.11, pp 995-1004
- [5] Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, **Modern Control System**, 9th ed., Prentice-Hall , Englewood Cliffs, NJ.
- [6] Ackermann, J., "Parameter Space Design of Robust Control System", **Automatica**, vol.AC-25, 1980, pp. 1058–1072.
- [7] Corriga, G., Giua, A., and Usai, G., "An Implicit Gain-Scheduling Controller for Cranes," **IEEE Trans. Control Syst. Technol.**, vol 6(1), 1998, pp. 15–20.
- [8] Ronald N., "The Pendulum: A Paradigm for the Linear Oscillator", **Science & Education**, vol. 13, 2004, pp 297-307.
- [9] วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ, การควบคุมระบบพลศาสตร์: **Control of Dynamic Systems**, พิมพ์ครั้งที่ 2, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2548.
- [10] ปิติเชต สุรักษา, วิศวกรรมระบบควบคุม: **Control System Engineering**, พิมพ์ครั้งที่ 1, แผนกตำราคณะวิศวกรรมศาสตร์ สจล., 2545



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเขียนโปรแกรมคำนวณค่า P ในสมการที่ 3.10 โดยใช้โปรแกรมเมเปิล 9.5

> M:=2;

M := 2

> m:=1;

m := 1

> l:=1;

l := 1

> g:=9.81;

g := 9.81

> a:=(-1*(M+(2*m))*g)/(M*l);

a := -19.62000000

> b:=((-2*m)*g)/(M);

b := -9.810000000

> c:=1/(M*l);

c := $\frac{1}{2}$

> d:=1/M;

d := $\frac{1}{2}$

> mu:=1;

m := 1

> r:=1;

r := 1

> eqns:={2*a*p2+2*b*p4-(c*p2+d*p4)*r*c*p2-(c*p2+d*p4)*r*d*p4+mu=0,

p1+a*p5+b*p7-(c*p5+d*p7)*r*c*p2-(c*p5+d*p7)*r*d*p4=0,

a*p6+b*p9-(c*p6+d*p9)*r*c*p2-(c*p6+d*p9)*r*d*p4=0,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& p^3 + a \cdot p^7 + b \cdot p^{10} - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot c \cdot p^2 - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot d \cdot p^4 = 0, \\
& 2 \cdot p^2 - (c \cdot p^5 + d \cdot p^7) \cdot r \cdot c \cdot p^5 - (c \cdot p^5 + d \cdot p^7) \cdot r \cdot d \cdot p^7 = 0, \\
& p^3 - (c \cdot p^6 + d \cdot p^9) \cdot r \cdot c \cdot p^5 - (c \cdot p^6 + d \cdot p^9) \cdot r \cdot d \cdot p^7 = 0, \\
& p^6 + p^4 - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot c \cdot p^5 - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot d \cdot p^7 = 0, \\
& -(c \cdot p^6 + d \cdot p^9) \cdot r \cdot c \cdot p^6 - (c \cdot p^6 + d \cdot p^9) \cdot r \cdot d \cdot p^9 + 1 = 0, \\
& p^8 - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot c \cdot p^6 - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot d \cdot p^9 = 0, \\
& 2 \cdot p^9 - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot c \cdot p^7 - (c \cdot p^7 + d \cdot p^{10}) \cdot r \cdot d \cdot p^{10} = 0;
\end{aligned}$$

www.zealsoft.com

$$eqns = \left\{ -39.24000000 p^2 - 19.62000000 p^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} p^4 \right) p^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} p^4 \right) p^4 + 1 = 0,
\right.$$

$$p^1 - 19.62000000 p^5 - 9.810000000 p^7 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^5 + \frac{1}{2} p^7 \right) p^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^5 + \frac{1}{2} p^7 \right) p^4 = 0,$$

$$p^3 - 19.62000000 p^7 -$$

$$-19.62000000 p^6 - 9.810000000 p^9 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^6 + \frac{1}{2} p^9 \right) p^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^6 + \frac{1}{2} p^9 \right) p^4 = 0,$$

$$2 p^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^5 + \frac{1}{2} p^7 \right) p^5 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^5 + \frac{1}{2} p^7 \right) p^7 = 0, p^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^6 + \frac{1}{2} p^9 \right) p^5 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^6 + \frac{1}{2} p^9 \right) p^7 = 0,$$

$$p^6 + p^4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^7 + \frac{1}{2} p^{10} \right) p^5 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^7 + \frac{1}{2} p^{10} \right) p^7 = 0, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^6 + \frac{1}{2} p^9 \right) p^6 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^6 + \frac{1}{2} p^9 \right) p^9 + 1 = 0,$$

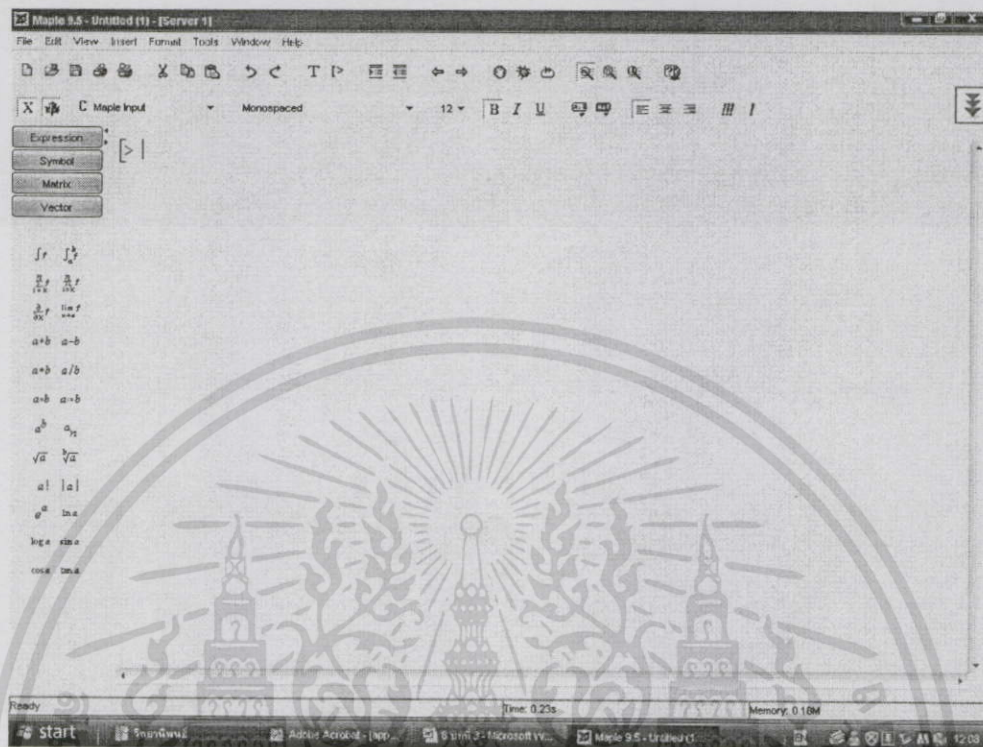
$$p^8 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^7 + \frac{1}{2} p^{10} \right) p^6 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^7 + \frac{1}{2} p^{10} \right) p^9 = 0, 2 p^9 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^7 + \frac{1}{2} p^{10} \right) p^7 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} p^7 + \frac{1}{2} p^{10} \right) p^{10} = 0 \}$$

>sols:=solve(eqns);

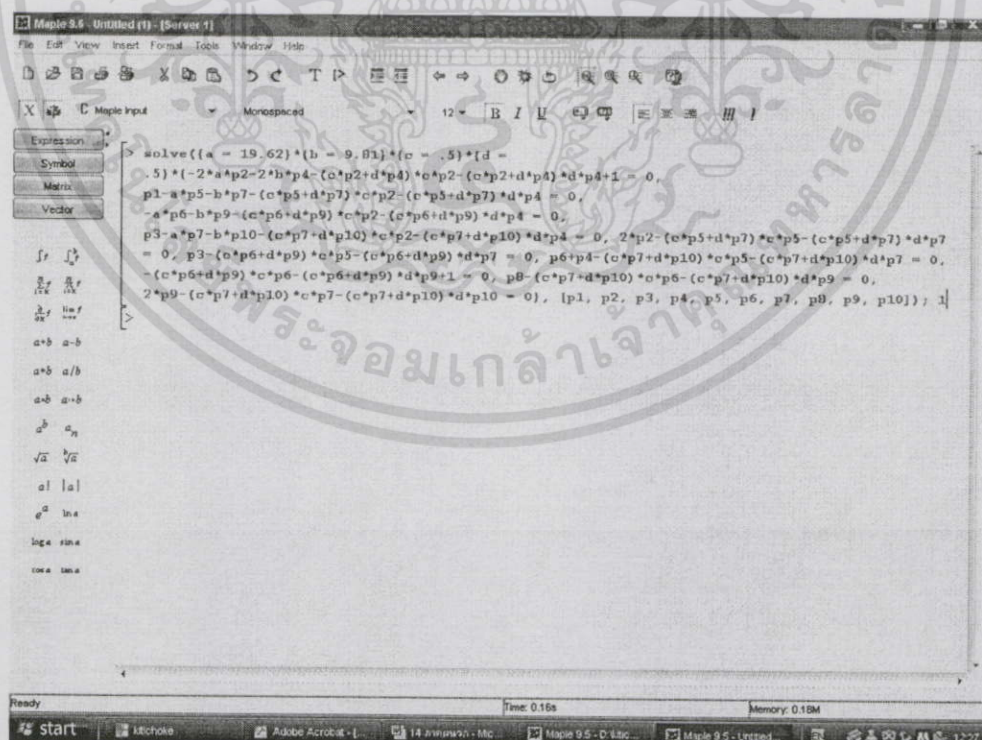
เนื่องจากคำตอบของสมการมีทั้งหมด 20 ชุดคำตอบการและโดยส่วนมากเป็นจำนวนเชิงซ้อน จึงจัดแสดงเพียง 10 ชุดให้ทราบอยู่ในตารางที่ 3.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม Maple 9.5



ภาพที่ ก.1 โปรแกรมเมเปิด 9.5



ภาพที่ ก.2 หาค่าตัวแปรจากสมการรีคาคติ สมการที่ 5.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีกรนำไปใช้

การเขียนคำสั่งโปรแกรม Matlab เพื่อใช้กระจายค่าดังในสมการที่ 3.9 มีดังนี้

```

clear variable;
clear all;
close all ;
clc;
% ประกาศตัวแปรในโปรแกรม;
syms M m g L k1 k2 k3 k4 a b c d lambda riccati p1 p2 p3 p4 p2 p5 p6 p7 p3 p6 p8 p9
p4 p7 p9 p10 mu R r real;
% กำหนดค่า;
I=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
A=[0 1 0 0;(a) 0 0 0;0 0 0 1;(b) 0 0 0];
B=[0; c; 0; d];
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=0;
K=[k1 k2 k3 k4];
Q=[mu 0 0 0;0 0 0 0;0 0 1 0;0 0 0 0];
P=[p1 p2 p3 p4;p2 p5 p6 p7;p3 p6 p8 p9;p4 p7 p9 p10];
R=r;
% แทนค่าทั้งหมดลงในสมการที่ 3.8;
riccati=(A'*P)+(P*A)-(P*B*inv(R)*B'*P)+Q

```

โปรแกรมจำลองผลตอบสนองของระบบป้อนจัน บทที่ 5

```

clear variable;

clear all;

close all ;

clc;

% ประกาศตัวแปร

syms M m g L k1 k2 k3 k4 a b c d s lambda real;

% กำหนดค่าพารามิเตอร์

I=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];

g=9.81; %n-m/sec^2

M=2; %kg

m=1; %kg กำหนดค่ามวลโหลตให้มีค่า 1 กิโลกรัม

L=1; %m

% เขียนสมการของระบบ

a=-((M+2*m)*g)/(M*L);

b=-(2*m*g)/M;

c=1/(M*L);

d=1/M;

% สมการสเตตัสของระบบแบบเพิ่มเติม

A=[0 1 0 0;a 0 0 0;0 0 0 1;b 0 0 0];

B=[0; c; 0; d];

C=[1 0 0 0;0 0 1 0];

D=0;

k=[k1 k2 k3 k4];

% ค่า mu ที่ได้จากการคำนวณ

mu=1.685;

Q=[mu 0 0 0;

0 0 0 0;

0 0 1 0;

0 0 0 0];

R = 0.002597777757;

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

% หาค่าอัตราขยายด้วยคำสั่ง LQR เพื่อหาค่าอัตราขยายซ้ำอีกครั้ง
K = lqr(A,B,Q,R)
Ac = [(A-B*K)];
Bc = [B];
Cc = [C];
Dc = [D];
%กำหนดช่วงเวลาของกราฟ
T=0:0.01:10;
% กำหนดขนาดของสเตปฟังก์ชัน
U=0.2*ones(size(T));
% จำลองผล
[Y,X]=lsim(Ac,Bc,Cc,Dc,U,T);
% สมการสถานะของระบบแบบเดิม
ao=-((M+m)*g)/(M*L);
bo=-(m*g)/M;
co=1/(M*L);
do=1/M;
Ao=[0 1 0 0;ao 0 0 0;0 0 0 1;bo 0 0 0];
Bo=[0; co; 0; do];
Co=[1 0 0 0;0 0 1 0];
Do=0;
% หาค่าอัตราขยายด้วยคำสั่ง LQR เพื่อหาค่าอัตราขยายซ้ำอีกครั้ง
Kr = lqr(Ao,Bo,Q,R)
Acc = [(Ao-Bo*Kr)];
Bcc = [B];
Ccc = [C];
Dcc = [D];
pp=eig(Acc);
%กำหนดช่วงเวลาของกราฟ
Tt=0:0.01:10;
% กำหนดขนาดของสเตปฟังก์ชัน
Ut=0.2*ones(size(Tt));

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

% จำลองผล
[Yo,Xo]=lsim(Acc,Bcc,Ccc,Dcc,Ut,Tt);
% พล็อตกราฟผลการตอบสนองของการจำลองระบบเดิมและแบบเพิ่มเติม
plot(T,Y,'k',Tt,Yo,'b:');
% กำหนดการบรรยายภายในกราฟว่ากราฟเส้นใดแสดงถึงอะไร
legend('Pendulum','Cart','Pendulum1','Cart1');
% กำหนดความหมายของกราฟ
xlabel('Time:sec');ylabel('Amplitude');

```



ตัวอย่างการใช้โปรแกรม MATLAB 7.0

The image shows two windows from the MATLAB 7.0 environment. The top window is the Editor, displaying a script for solving a Riccati equation. The script defines parameters for a system and uses the 'riccati' function to solve for the matrix P. The bottom window is the Command Window, showing the output of the 'riccati' function, which is a 4x4 matrix P.

```

1 clear variable;
2 clear all;
3 close all ;
4 clc;
5
6 syms mu k1 k2 k3 k4 R lambda riccati p1 p2 p3 p4 p5 p6 p7 p8 p9 p10 real;
7 I=[1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
8 g=9.81;      %n-m/sec^2
9 M=2;        %kg
10 m=1;       %kg
11 L=1;       %m
12 a=- (M+2*m)*g / (M*L);
13 b=- (2*m*g)/M;
14 c=1/(M*L);
15 d=1/M;
16 A=[0 1 0 0; (a) 0 0 0; 0 0 0 1; (b) 0 0 0];
17 B=[0; c; 0; d];
18 C=[1 0 0 0; 0 0 1 0];
19 D=0;
20 K=[k1 k2 k3 k4];
21 Q=[mu 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 0];
22 P=[p1 p2 p3 p4;p2 p5 p6 p7;p3 p6 p8 p9;p4 p7 p9 p10];
23 riccati=(A'*P)+(P*A)-(P*B*R*B'*P)+Q
24
25

```

ภาพที่ ก.3 เขียน M-file สมการที่ 5.1

```

MATLAB
File Edit Debug Desktop Window Help
Current Directory: C:\MATLAB\work
Shortcuts How to Add What's New

riccati =
[ -901/25*p2-981/50*p4-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p2-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p4+mu, p1-981/50*p5-981/100*p7-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p2-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p4+mu,
[ p1-981/50*p5-981/100*p7-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p2-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p4, 2*p2-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p2-1/2*R*(1/2*p2+1/2*p4)*p4,
[ -981/50*p6-981/100*p9-1/2*R*(1/2*p6+1/2*p9)*p2-1/2*R*(1/2*p6+1/2*p9)*p4, p3-1/2*R*(1/2*p6+1/2*p9)*p2-1/2*R*(1/2*p6+1/2*p9)*p4,
[ p3-981/50*p7-981/100*p10-1/2*R*(1/2*p7+1/2*p10)*p2-1/2*R*(1/2*p7+1/2*p10)*p4, p6+p4-1/2*R*(1/2*p7+1/2*p10)*p4,
>>

```

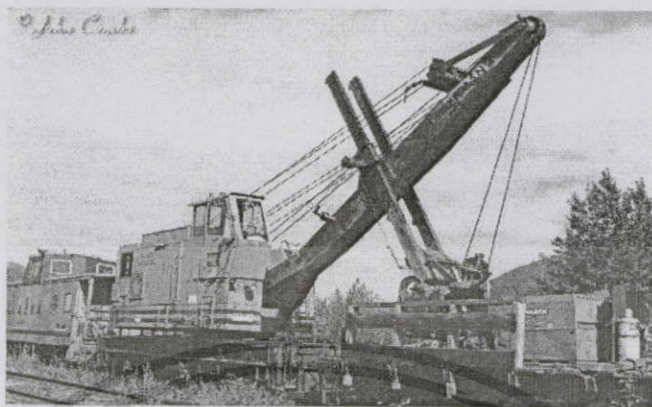
ภาพที่ ก.4 ผลจากการรัน โปรแกรมสมการที่ 3.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



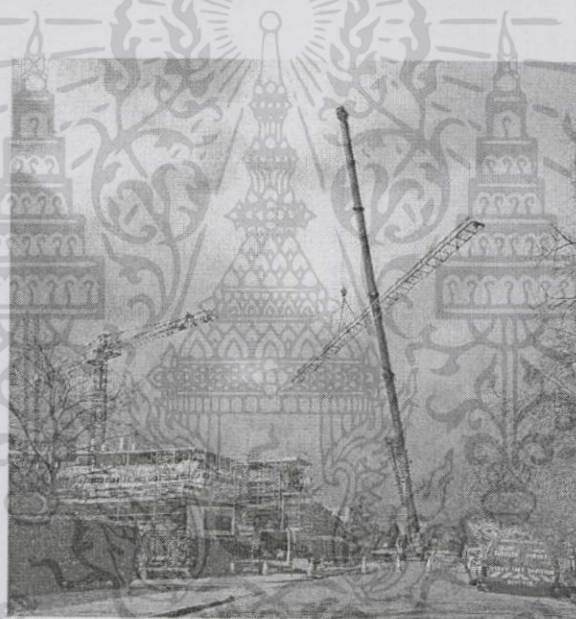
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข้อมูลอ้างอิงและภาพประกอบ



ภาพที่ ข.1 เรลโหลด เครน (Raiload Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ ข.2 เทเลสโคปิก เครน (Telescopic Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ ข.3 รถกึ่ง-เม้าท์ เครน (Truck-Mounted Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



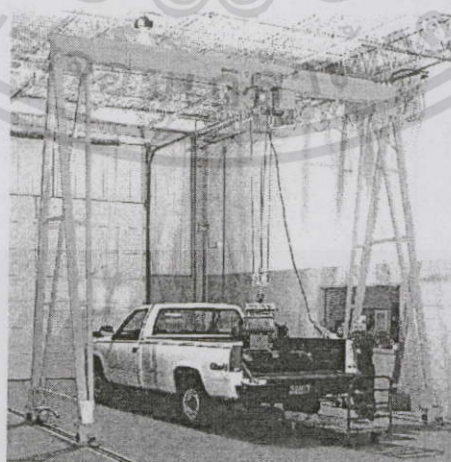
ภาพที่ ข.4 เรอท-เทอร์เรน เครน (Rough Terrain Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ ข.5 ครอว์เลอร์ เครน (Crawler Crane)

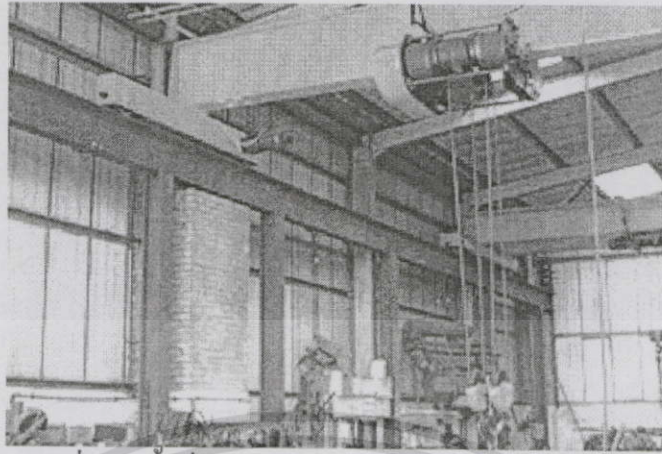
http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ ข.6 แกนทรี่ เครน (Gantry Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ ข.7 ปีนจันแบบลอยเหนือศีรษะ (Overhead Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ ข.8 โฟลท์ติง เครน (Floating Crane)

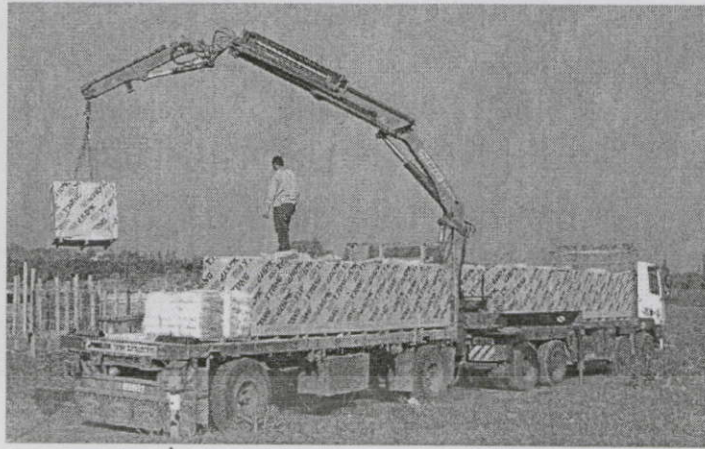
http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ ข.9 เอเรียล เครน (Aerial Crane)

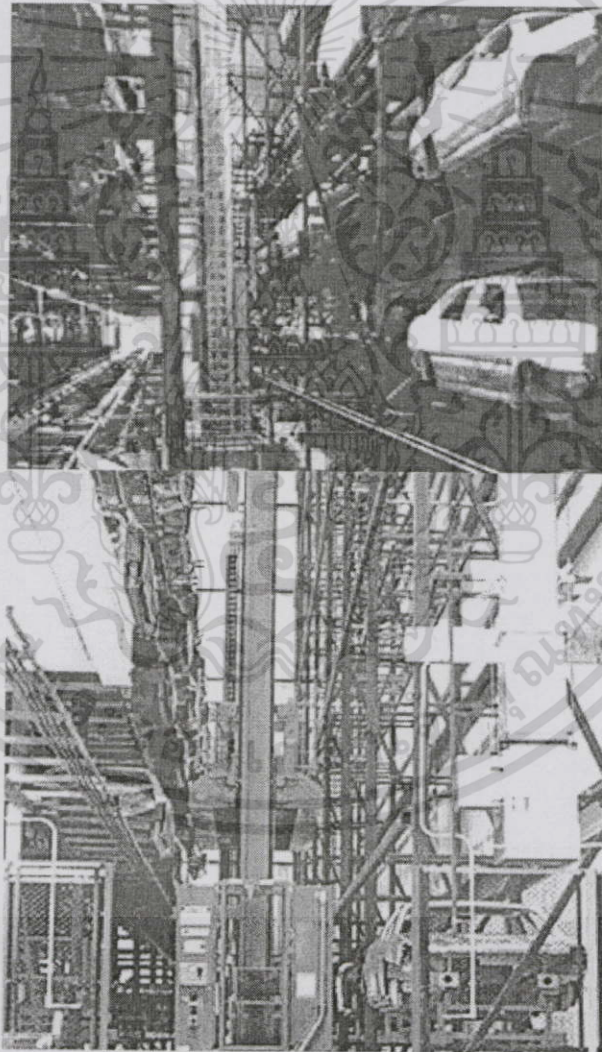
http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ ข.10 โหลดเดอร์ เครน (Loader Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ 1.11 สแตกเกอร์ เครน (Stacker Crane)

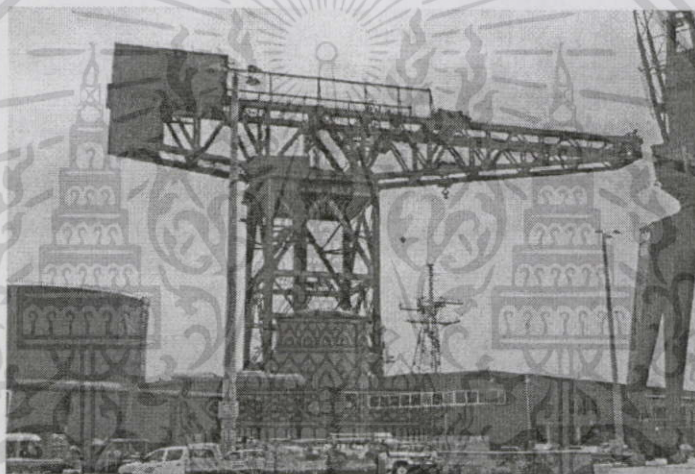
http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 1.12 เทาว์เวอร์ เครน (Tower Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ 1.13 แฮมเมอร์ เครน (Hammer crane)

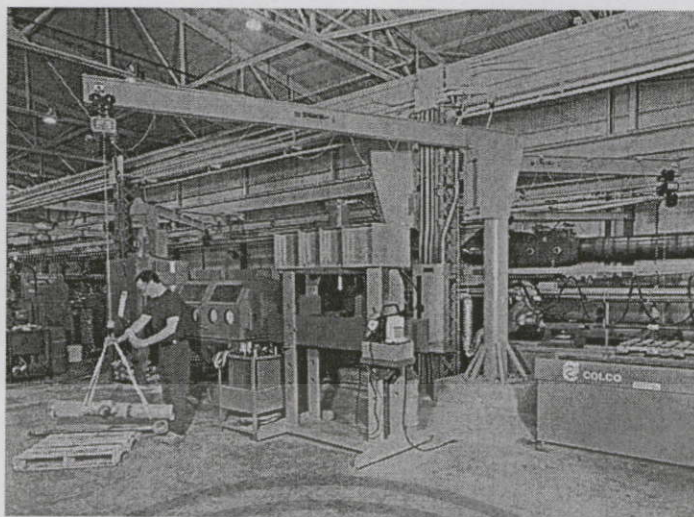
http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes



ภาพที่ 1.14 เวสเซล เครน (Vessel (Deck) crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาพที่ 1.15 จิบ เครน (Jib Crane)

http://en.wikipedia.org/wiki/Types_of_cranes

- ข้อมูลภาพที่ 2.1 http://www.ku.ac.th/schoolnet/cr_model_math.htm
- ข้อมูลภาพที่ 2.2 <http://www.web.ku.ac.th/schoolnet/snet3/harmonic.htm>
- ข้อมูลภาพที่ 2.3 <http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum>
- ข้อมูลภาพที่ 2.4 <http://www.overheadcranesparts.co.uk> และ [www/design/overhead_crane.jpg](http://www.design/overhead_crane.jpg)
- ข้อมูลภาพที่ 2.5 <http://www.granada-cranes.co.uk/overhead.php>



ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์และได้รับการตีพิมพ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Final Program & Digest Book



ICCAS 2007

International Conference on
Control, Automation and Systems

October 17(Wed.) - 20(Sat.), 2007
COEX, Seoul, Korea



Institute of Control, Robotics and Systems
in conjunction with KRC 2007

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Anti-sway Control for Overhead Crane

Kitichoke Prommaneevat^{1,2}, Prapas Roengruen² and Viriya Kongratana²

¹ Faculty of Science and Engineering, Kasetsart University Chalermphrakiat SakonNakhon Campus, Thailand
 (Tel : +66-4273-1248; E-mail: csncp@ku.ac.th)

² Department of Instrumentation Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand
 (Tel : +66-2-739-2470; E-mail: kviriya@kmitl.ac.th)

Abstract: The models of overhead crane system have been studied in many regulation methods; hence bring about the variation parameter. However, there are have the similar conjecture of angular velocity ($\dot{\theta}$) in the mathematics models of pendulum system. The angular velocity can be deduced to be zero to perform the simply system as the linear equation form. In this paper, the different direction of mathematical analysis of an overhead crane model was study what the angular velocity ($\dot{\theta}$) was set as in the same value of natural angular velocity (ω_n) instead of neglected to return this values. These equations are still having the linear equation properties for the state space equation. The purpose of this study is to reduce the error of controller design to give the equation to be close to the real system. A design recommendation for optimal asymptotic linear quadratic (LQ) controllers with fixed gain and when follow to changed mass load are present to improve the stabilities. The results show the over shoot value was diminished. And, the extended gain values have less than the previous values of calculations. Whereas, the period of time of the system descended to the steady state have the same value. Which give the advantage to obviate the problem of over feed extended gain to the system.

Keywords: Linear Quadratic (LQ) Controller, Algebraic Riccati equation, Lagrangian Dynamics, Pendulum

1. INTRODUCTION

The pendulum dynamic system has been studied over the years and widely applied to the industry. In general, the important variables in the analysis of the crane system are angle, mass of cart, mass of object hang with cart, mass of rope and length of rope. Length of rope is set as constant to make the calculation simply [1,2]. In addition, some variables in the analysis of the crane system are omitted due to such variables are difficult to calculate and their effect to the system is insignificant. As know, pendulum dynamic system has been studied for a long time. However, the equations that can explain the system exactly still required. Therefore, further studies of pendulum dynamic system has been performed continuously. The analysis of the resultant force was proposed in several methods. The frequently used method is the Lagrangian Dynamic, which exploits the differentiation. This method provides the similar solutions, compared to the Newton's method that is more sophisticate. There are many methods to calculate the valued of control system. Among those, Linear Quadratic Regulator (LQR) method is widely used that is designed to generate the least capacity index function. Weighing factors using Riccati equation has to be selected by the designer. The purpose of this study is to provided the equation with pendulum angle ($\dot{\theta}$) adjusted by using Lagrange method [3-5]. Fixed gain linear quadratic controller by Routh Hurwitz stability is also used to perform in this work.

Lagrangian Dynamic model is illustrated in Fig. 1. The equations are as to analyze as follow

$$ml^2 \ddot{\theta} - ml \ddot{r} \cos(\theta) + mgl \sin(\theta) = 0 \quad (1)$$

$$(M + m) \ddot{r} - ml \ddot{\theta} + ml \dot{\theta}^2 = 0 \quad (2)$$

When M is mass of cart, m is mass of load, l is the length of rope between cart and mass of load, r is scattered distance that cart can move pass at the zero time, g is the earth gravity.

Since the angular angle is of a small value, so we can assume, $\cos(\theta) \approx 1$ and $\sin(\theta) \approx \theta$. To analyze equation 2 by using the same expectation method that $\dot{\theta}^2 \cdot \theta$ very least can be deduced to be zero. However, in general of pendulum analysis theorem, angular velocity is ω which is equal to $\omega = \sqrt{g/l}$. If deduce $\dot{\theta}^2 \approx \omega^2$, the new equation can be written as :

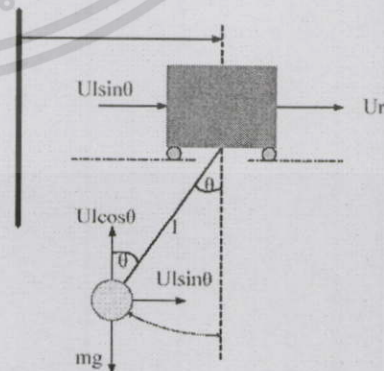


Figure 1. Overhead Crane Model

2. Mathematical Model of an Overhead Crane

2.1 Mathematical Model

Mathematical model of an overhead crane by

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\ddot{\theta} = \frac{-(M+2m)g\theta}{Ml} + \frac{Ur}{Ml} \tag{3}$$

$$\ddot{r} = \frac{-2mg\theta}{M} + \frac{Ur}{M} \tag{4}$$

2.2 State Space Equation

Simple for the to simplify for arrange equations in state space form

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Pendulum angular velocity} \\ \text{Pendulum angular acceleration} \\ \text{Cart velocity} \\ \text{Cart acceleration} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-(M+2m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-2mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{Ml} & 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

3. Design of a LQ controller

3.1 Minimize the performance index

Due to an overhead system crane is operated by Single Input Two Output (SITO) system. Thus, the control law type of Multi Input and Multi Output (MIMO) system was applied to use for this study.

$$U = -Kx \tag{6}$$

Where K is gain value, U is signal input to system by choosing gain value by Performance Index Criteria type Integral Time Multiplied Absolute Error (ITAE)

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \tag{7}$$

Where Q and R are weighting factors; Q is only a positive definite or positive semi-definite and is a real symmetric matrix; R is a positive definite symmetric matrix. In this application with a single input, R; Thus R was set by scalar (r) that can be solved by the algebraic Riccati equation.

3.2 Algebraic Riccati Equation

Algebraic Riccati Equation is given as

$$A^T P + PA - PBr^{-1}B^T P + Q = 0 \tag{8}$$

Where P is a positive symmetric matrix and K is gain matrix.

$$K = r^{-1}B^T P \quad ; \quad K = [k_1, k_2, k_3, k_4] \tag{9}$$

4. Fixed Gain LQ Controller By Routh Hurwitz Stability Theorem

4.1 Fixed gain LQ controller

Pole Placement Theorem applied with Performance index criteria type ITAE of the closed-loop system function was used to design controller system. Find the coefficient characteristic equation as below;

$$\det(sI - (A - BK))$$

$$s^4 + (ck_2 + dk_4)s^3 + (ck_1 + dk_3 - a)s^2 + (bck_4 - adk_4)s + (bck_3 - adk_3) = 0$$

The re-written form that the coefficient characteristic equation as follow;

$$s^2 + \alpha s^3 + \beta s^2 + \gamma s + \delta = 0 \tag{10}$$

4.2 Analyze Routh Hurwitz Stability

The method of fixed gain Controller By Routh Hurwitz Stability Theorem was applied to study stability analysis for find the limited of gain signal that have two criteria as show below ;

$$i = \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha} > 0$$

$$ii = \frac{(\alpha\beta - \gamma)\gamma - \alpha^2\delta}{\alpha \frac{\alpha\beta - \gamma}{\alpha}} > 0 \tag{11}$$

5. Mathematical Simulation

The Riccati equation was complied by mathematical program Maple 9.5. 8th Riccati algebraic equation can spread the variable generate metric as Table 1.

By comparing equation 10 and equation 12, the value Q and R can be solved from equation 7 in which variables are given as follows : M = 2 kg., m = 1 kg., l = 1 m., g = 9.81 m/s².

Table 1 Expaned Riccati Equation Result

$2 * a * p2 + 2 * b * p4 - R * k1^2 + mu$	$p1 + a * p5 + b * p7 - R * k1 * k2$	$a * p6 + b * p9 - R * k1 * k3$	$p3 + a * p7 + b * p10 - R * k1 * k4$
$p1 + a * p5 + b * p7 - R * k1 * k2$	$2 * p2 - R * k2^2$	$p3 - R * k2 * k3$	$p6 + p4 - R * k2 * k4$
$a * p6 + b * p9 - R * k1 * k3$	$p3 - R * k2 * k3$	$- R * k3^2 + 1$	$p8 - R * k3 * k4$
$p3 + a * p7 + b * p10 - R * k1 * k4$	$p6 + p4 - R * k2 * k4$	$p8 - R * k3 * k4$	$2 * p9 - R * k4^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

From equation 9, K(gain value) can be calculated as :

$$K = \begin{bmatrix} 7.848 & -3.7585 & 19.62 & 16.9133 \\ 15 & & & \end{bmatrix} \quad (12)$$

In matrix Q, μ is a variable which is in the position of the variable of interest; θ

$$Q = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

By the substitution of equation 12 to equation Table 1., μ and r can be calculated as show below.

$$Q = \begin{bmatrix} 1.685 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r = 0.0025978 \quad (13)$$

The variables derived from the previous section are replaced in MATLAB.

6. Results and Discussions

We made comparison of the Response between the old overhead crane system and the new overhead crane system one after we feed the step input. Gain value can be illustrated in 2 ways.

6.1 Adjust gain follow parameter that modified

In case that the mass of load is almost equal to mass of cart, the value position of cart and angle pendulum between old overhead crane are quite similar as show in Fig. 2. If the mass of load was increased repeatedly and gain was observed at every changed of mass of load, the values of pendulum of load would contract, the angle would oscillate more frequently. There were having the same value positions of cart. The values of position of the cart of new overhead crane system will have a long Response period, compared to old overhead crane system as shown in Fig. 3-6.

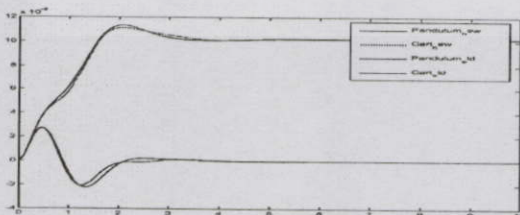


Fig. 2 Response of position cart and angle pendulum when m = 1 kg., $K_{new} = [11.0199 \quad -3.1082 \quad 19.6200 \quad 14.1788]$, $K_{old} = [17.0617 \quad -1.5239 \quad 19.6200 \quad 13.6370]$

19.6200 13.6370]

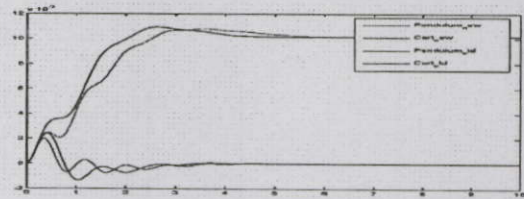


Fig. 3 Response of position cart and angle pendulum when m = 5 kg., $K_{new} = [-6.4964 \quad -13.8472 \quad 19.6200 \quad 21.0925]$, $K_{old} = [0.7775 \quad -7.6343 \quad 19.6200 \quad 16.6670]$

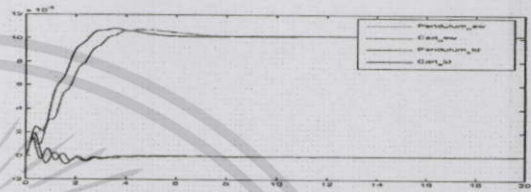


Fig. 4 Response of position cart and angle pendulum when m = 10 kg., $K_{new} = [-11.9603 \quad -23.0207 \quad 19.6200 \quad 28.5559]$, $K_{old} = [-6.4964 \quad -13.8472 \quad 19.6200 \quad 21.0925]$



Fig. 5 Response of position cart and angle pendulum when m = 20 kg., $K_{new} = [-15.4467 \quad -35.7425 \quad 19.6200 \quad 39.8283]$, $K_{old} = [-11.9603 \quad -23.0207 \quad 19.6200 \quad 28.55590925]$

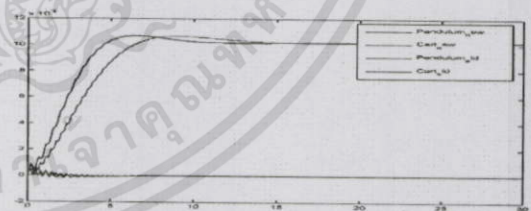


Fig. 6 Response of position cart and angle pendulum when m = 40 kg., $K_{new} = [-17.4373 \quad -53.1517 \quad 19.6200 \quad 56.1064]$, $K_{old} = [-15.4467 \quad -35.7425 \quad 19.6200 \quad 39.8283]$

6.2 By ignoring the system parameters which have been changed variable parameter by choosing m = 1kg.

$$K_{new} = [11.0199 \quad -3.1082 \quad 19.6200 \quad 14.1788],$$

$$K_{old} = [17.0617 \quad -1.5239 \quad 19.6200 \quad 13.6370]$$

The comparison of the old overhead crane system and the new overhead crane system gave the same results as

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

section 6.1, when the equality of the mass of load and the mass of cart was given as shown in Fig. 2. If the mass of load was increased and gain was fixed at $m = 1$ kg., the values of angle pendulum of load would contract. Then, the values of angle would less oscillate and give the same value when a comparison of old and new overhead crane system was considered.

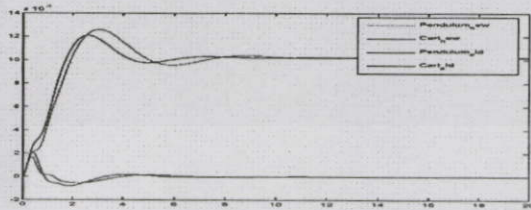


Fig. 7 Response of position cart and angle pendulum when $m = 5$ kg.

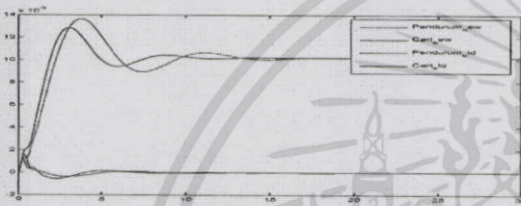


Fig. 8 Response of position cart and angle pendulum when $m = 10$ kg.

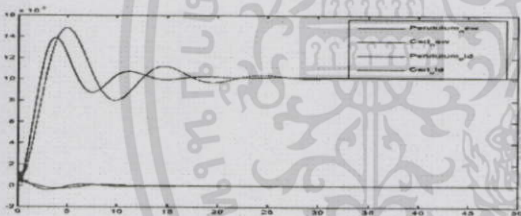


Fig. 9 Response of position cart and angle pendulum when $m = 20$ kg.

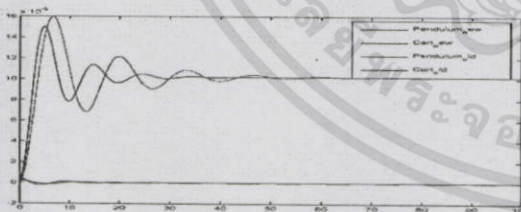


Fig. 10 Response of position cart and angle pendulum when $m = 40$ kg.

If the gain was chosen from the mass of load which have more than 3 times of real mass, the Response would be unstable for both of system as shown in Fig. 11

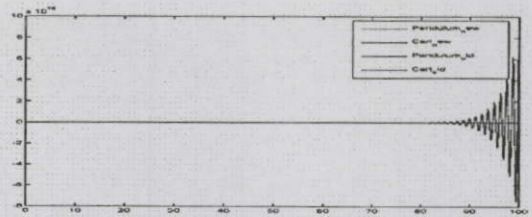


Fig. 11 Response of position cart and angle pendulum when use gain k at $m = 5$ kg., but mass load is $m = 1$ kg.

7. Conclusions and Recommendations

The results of the comparison between method 6.1 and 6.2 in terms of fix gain by ignoring the change of the mass of load will create more over shooting to cart which is not useful to the new and old overhead crane system, the consequence of this method has shown that the new overhead crane system has lower response than the old one because of the equation of mass of load of new method has double increased of the mass of load in the old method. As to the result, using the former system to analysis of gain will affect less stability due to over gaining of mass of load as shown in Fig. 11.

References

- [1].CVETICANIN, 1995, "Dynamic Behavior of The lifting Crane Mechanism", Vol 30, ElsevierScience, Printed in Great Britain, pp 141-151.
- [2].Kazunobu, Y., "Nonlinear Controller Design for Crane System with State Constrains", 1998, AACC, pp 1277 - 1283.
- [3].Zhonghua, W., Brian W. Surgenor, "A Problem With the LQ Control of Overhead Crane", 2006, Vol 128, ASME, pp 436 - 439.
- [4]. Takao, F., "A new Approach to the LQ Design from the View point of the Inverse Regulator Problem, 19 87, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol.AC -32, No.11, pp 995-1004
- [5].Richard C. Dorf and Robert H. Bishop, *Modern Control System*, 9th ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายกิติโชค พรหมณีวัฒน์
วัน เดือน ปีเกิด	11 เมษายน 2520 ที่สกลนคร
ที่อยู่	22/3 ถ.อำมาตย์ ตำบลในเมือง อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น 40000
ประวัติการศึกษา	2544 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2551 วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ความชำนาญเฉพาะด้าน	1) ระบบการควบคุม 2) การออกแบบระบบควบคุมมอเตอร์
ประสบการณ์การทำงานและผลงานวิจัย	วิศวกร มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ วิทยาเขตเฉลิมพระเกียรติ จังหวัด สกลนคร
ปัจจุบัน	-งานวิจัยแบบจำลองด้านการแกว่งสำหรับปั่นจั่นแบบลอยเหนือศีรษะ โดยเน้นเทคนิคการคิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้