รูปแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอล

MATHEMATICAL MODELLING OF FRACTAL IMAGE

สุนิสา ขามทอง

SUNISA KHAMTONG

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2545

ISBN 974-324-173-6

รูปแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอล

MATHEMATICAL MODELLING OF FRACTAL IMAGE

สุณิศา ขามทอง

SUNISA KHAMTONG

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2545

ISBN 974-324-173-6

MATHEMATICAL MODELLING OF FRACTAL IMAGE

SUNISA KHAMTONG

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2002

ISBN 974-324-173-6

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ รูปแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอล

MATHEMATICAL MODELLING OF FRACTAL IMAGE

ชื่อนักศึกษา นางสาวสุณิศา ขามทอง

รหัสประจำตัว 41065311

หลักสูตร วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
รศ.ภัคคินี	ชิตสกุล	
ผศ.กฤษฎา	ไตรสุรัตน์	
ดร.จันทร์บูรณ์	สถิตวิริยวงศ์	
ผศ.ไพรบูลย์	พันธรักษ์พงษ์	

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ 29 ตุลาคม 2545 เวลา 13.00 น. เป็นต้นไป

สถานที่สอบ ณ อาคารจุฬาภรณวลัยลักษณ์ 1 ชั้น 2 ห้อง 218

บัณฑิตวิทยาลัยรับรองแล้ว

(รศ.ดร.บุญวัฒน์ อัตชู)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่......26......**เดือน**.....ธันวาคม.....**พ.ศ.**....2545....

หัวข้อวิทยานิพนธ์ รูปแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอล
นักศึกษา นางสาวสุณิศา ขามทอง
รหัสนักศึกษา 41065311
ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ. 2545
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์นี้ ได้นำเสนอหลักการกำหนดฟังก์ชันและการสร้างภาพแฟรคตอล 2 มิติของฟังก์ชันไซน์ในรูปแบบ

$$f(z) = c\sin(z^n + \mu),\ 0 < \mu \le \tfrac{\pi}{2},\ n \ge 2,\ (n \in N),\ (c, z \in \mathbb{C})$$

โดยศึกษาการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ เป็น 2 เซต คือ ภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อกำหนดจุดเริ่มต้นที่ $z_0 = 0$, $\forall c \in \mathbb{C}$ และภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,z}$ เมื่อกำหนดจุดเริ่มต้นที่ $z_0 = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ และภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ เกิดจากกำหนดสีของแต่ละจุดบนภาพตามจำนวนรอบสูงสุดของการทำซ้ำ

จากการศึกษาพบว่า เมื่อเลือกค่า μ ที่เข้าใกล้ศูนย์มาก ๆ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีขนาดใหญ่ และเมื่อเลือกค่า $\mu = \frac{\pi}{2}$ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีขนาดเล็กประมาณ 2 และค่า n จะแสดงจำนวนแกนในการเกิดภาพ ซึ่งเมื่อเลือกค่า $\mu \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ จำนวนแกนภาพจะเกิดเป็น 2 เท่า หรือ $2n$

Thesis Title	Mathematical Modelling of Fractal Image
Student	Ms. Sunisa Khamthong
Student ID.	41065311
Degree	Master of Science
Programme	Applied Mathematics
Year	2002
Thesis Advisor	Assist. Prof. Praiboon Pantaragphong

ABSTRACT

This thesis presents the principle of mathematical modelling to be 2D-fractal image. The function is the sine of a complex number in the following form

$$f(z) = c\sin(z^n + \mu),\ 0 < \mu \le \tfrac{\pi}{2},\ n \ge 2,\ (n \in N),\ (c, z \in \mathbb{C}).$$

In this thesis, we study the creation of fractal image of the sine function $f(z)$ in two set, the $P_{f,0}$ set and $P_{f,z}$ set, where the initial point is $z_0 = 0, \forall c \in \mathbb{C}$ and $z_0 = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$ respectively. The fractal image of $f(z)$ is defined by assigned a color at each point depends on number of maximum of iteration. We found that if the size of image set on complex plane depends on the value of μ . The value of approach to zero, the size of image set is large, and if the value of μ is $\frac{\pi}{2}$ then size of image set on complex plane is about 2 (small ize). The number of image axis is equal to n, which if value of $\mu \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ then the number of image axis is 2n .

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาในเรื่องการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอล จาก ผศ.ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์และขอกราบขอบพระคุณอย่างสูง

ขอขอบคุณ รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข ที่ช่วยแนะนำแนวทางแก้ปัญหาในการทำวิทยานิพนธ์

ขอขอบคุณ เพื่อนนักศึกษาทุกคนที่ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ

ขอขอบคุณ มหาวิทยาลัยมหาสารคามที่ให้ทุนการศึกษาผู้วิจัย

ขอขอบคุณ บุพการีที่ให้กำลังใจผู้วิจัยด้วยดีเสมอมา

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอบมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

สุณิศา ขามทอง

สารบัญ

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

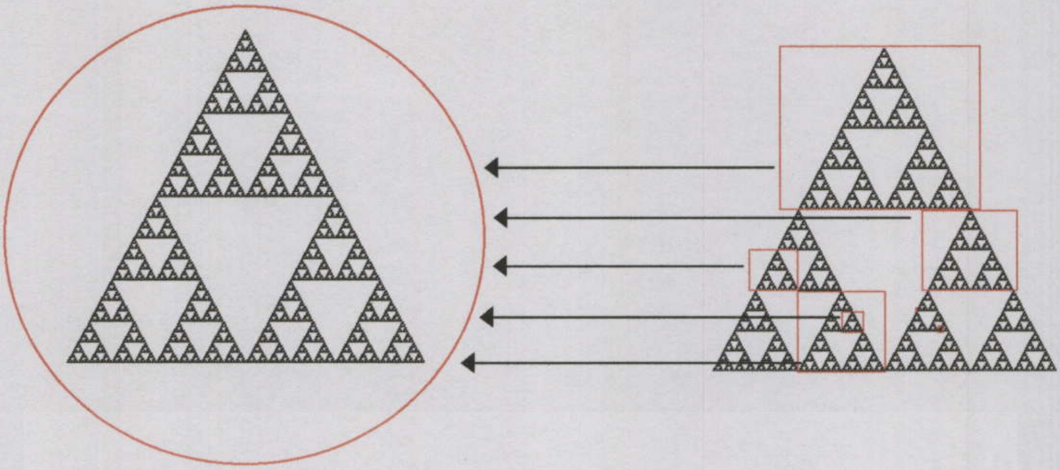
การสร้างภาพของฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้กระบวนการทำซ้ำ เรียกว่า การสร้างภาพแฟรคตอล (Fractal) และภาพของฟังก์ชันที่สร้างจากกระบวนการทำซ้ำจะมีความคล้ายกันในตัว (Self-Similarity) โดยที่แต่ละมาตราส่วนเป็นอิสระซึ่งกันและกัน

ภาพแฟรคตอลของรูปแบบฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์ที่มีชื่อเสียงและรู้จักกันโดยทั่วไป เช่น สามเหลี่ยมเซอร์ปินสกี้ (Sierpinski Triangle) [1] เซตแมนเดลบรอท (Mandelbrot Set) [1] และเซตจูเลีย (Julia Set) [1] เป็นต้น ซึ่งภาพแต่ละรูปแบบจะมีความซับซ้อนต่างกัน ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขบังคับที่กำหนด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1.1 การสร้างรูปสามเหลี่ยมเซอร์ปินสกี้โดยใช้กระบวนการทำซ้ำของสามเหลี่ยมใด ๆ เริ่มต้นด้วยแบ่งแต่ละด้านของสามเหลี่ยมทั้งหมดออกเป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน แล้วลากเส้นตรงเชื่อมการแบ่งของแต่ละด้านนั้น ๆ จะได้สามเหลี่ยมเล็ก ๆ คล้ายกับสามเหลี่ยมเริ่มต้น ซึ่งจะนำสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาทำซ้ำในลักษณะเดียวกันกับสามเหลี่ยมแรกแบบอนันต์ โดยที่สามเหลี่ยมที่หัวกลับด้านกับสามเหลี่ยมเริ่มต้นจะไม่นำมาคิดในการทำซ้ำครั้งต่อไป ดังรูปที่ 1.1

รูปที่ 1.1 แสดงขั้นตอนการสร้างสามเหลี่ยมเซอร์ปินสกี้

จากการสังเกตรูปที่ 1.1 จะเห็นว่าในการทำซ้ำแต่ละครั้งของรูปสามเหลี่ยมเซอร์ปินสกี้มีความคล้ายกันในตัว กับการทำซ้ำครั้งก่อนแต่มีขนาดลดลงเสมอ และเมื่อปรับขยายภาพ ณ ตำแหน่งเล็ก ๆ ของสามเหลี่ยมเซอร์ปินสกี้ จะพบว่ามีความคล้ายกันในตัวอย่างเห็นได้ชัดเจน ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 แสดงความคล้ายกันในตัวของสามเหลี่ยมเชอร์ปินสกี้

ตัวอย่างที่ 1.2 การสร้างภาพแฟรคตอลของเซตแมนเดลบรอทจากฟังก์ชันพหุนามเชิงซ้อนในรูป

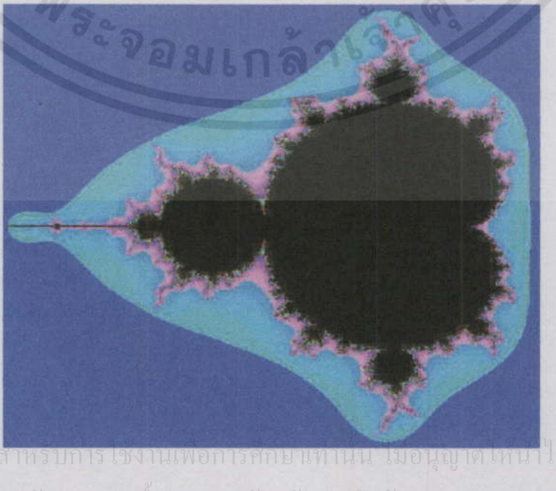
$$f(z) = z^2 + c, \quad (c, z \in \mathbb{C}) \tag{1.1}$$

เมื่อ

$$z_0 = 0$$

$$z_{k+1} = z_k^2 + c$$

โดยใช้กระบวนการทำซ้ำ (1.1) สำหรับทุก ๆ $c \in \mathbb{C}$ ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จะได้ดังรูปที่ 1. 3



รูปที่ 1.3 แสดงภาพของเซตแมนเดลบรอท (พื้นที่สีดำ)

ตัวอย่างที่ 1.3 การสร้างภาพแฟรคตอลของเซตจูเลียจากฟังก์ชันพหุนามเชิงซ้อนในรูป

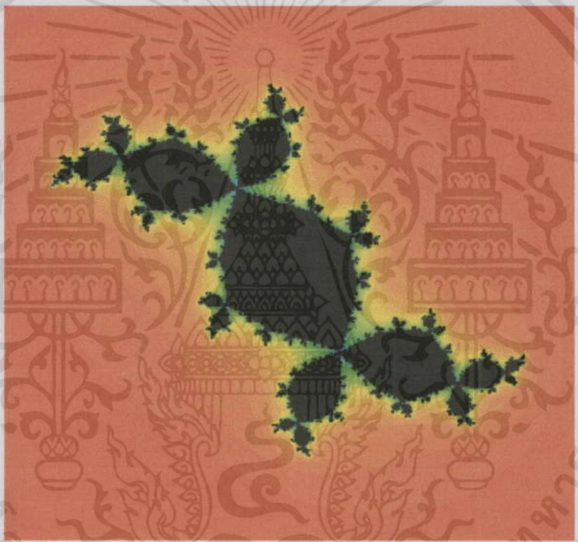
$$f(z) = z^2 + c, \quad (c, z \in \mathbb{C}) \tag{1.2}$$

เมื่อ

$$z_0 = z$$

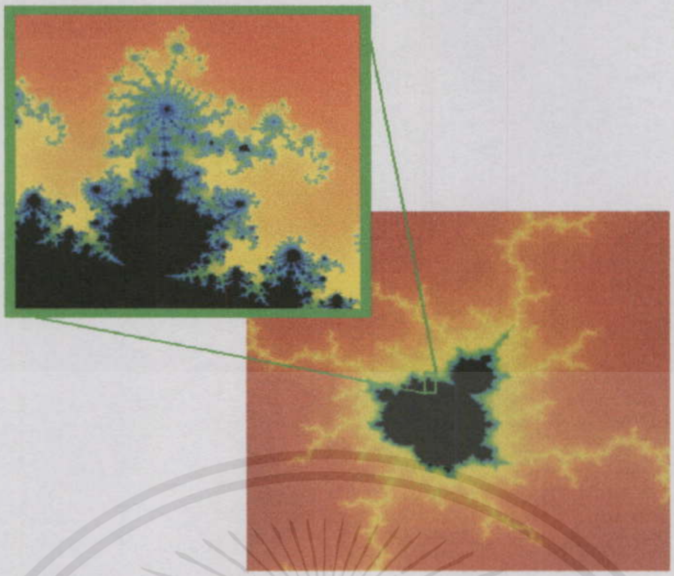
$$z_{k+1} = z_k^2 + c$$

โดยใช้กระบวนการทำซ้ำ (1.2) สำหรับทุก ๆ $z \in \mathbb{C}$ ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ เช่น เมื่อ $c = -0.12 + 0.75\,i$ แล้วจะได้ เซตจูเลียที่มีลักษณะคล้ายกระต่าย ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 แสดงภาพของเซตจูเลีย (พื้นที่สีดำ) เมื่อ $c = -0.12 + 0.75\,i$

ภาพของเซตแมนเดลบรอทและเซตจูเลีย เป็นภาพแฟรคตอลรูปแบบซับซ้อนซึ่งไม่สามารถเห็นรายละเอียดภายในภาพได้อย่างชัดเจน แต่เมื่อปรับขยายภาพแฟรคตอลบริเวณที่มีลักษณะเป็นส่วนเว้า หรือ ส่วนนูนของภาพจะพบว่า ภาพที่ได้จากการปรับขยาย ณ ตำแหน่งนั้น ๆ มีความคล้ายกันในตัว เช่น พิจารณาการปรับขยายภาพบริเวณส่วนนูนของเซตแมนเดลบรอท ดังรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5 แสดงการปรับขยายภาพส่วนนูนของเซตแมนเดลบรอท

จากรูปที่ 1.5 จะเห็นได้ว่า ภาพของเซตแมนเดลบรอทที่ได้จากการปรับขยายมีความคล้ายกันในตัว

ในปัจจุบันนี้ มีผู้วิจัยจำนวนมากให้ความสนใจและศึกษาการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์รูปแบบต่าง ๆ กัน และรูปแบบของฟังก์ชันที่เคยมีผู้วิจัยได้นำมาศึกษาและประยุกต์ใช้ในการสร้างภาพแฟรคตอล เช่น ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นต้น

ฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์รูปแบบแรกที่นำมาสร้างภาพแฟรคตอล คือ ฟังก์ชันหนุนามที่อยู่ในรูป $f(z) = z^2 + c$ และได้มีผู้วิจัยจำนวนมากนิยมนำมาประยุกต์ใช้สำหรับสร้างภาพแฟรคอลกันอย่างแพร่หลาย ซึ่งภาพแฟรคตอลจะมีรูปแบบแตกต่างกันตามฟังก์ชันที่ใช้ในการสร้างภาพภายใต้เงื่อนไขบังคับที่กำหนด และรูปแบบฟังก์ชันที่มีผู้วิจัยได้นำศึกษาและวิจัย [5] และ [8] เช่น $f(z) = z^3 + c$, $f(z) = z^3 + z^2 + c$, $f(z) = z^n + c$, $f(z) = z^n + 1/z^n + c$, $f(z) = ce^z$, $f(z) = e^{zn} + c$, $f(z) = \sin(z)$, $f(z) = \sin(z^2 + c) - c$, $f(z) = \cosh(z^2 + c) - c$, $f(z) = z^4 + \sin(z)$ เป็นต้น และจากการสังเกตพบว่า ฟังก์ชันสร้างภาพดังกล่าวข้างต้นมีตัวพารามิเตอร์ที่ใช้ในกระบวนการสร้างภาพแฟรคตอลแบบเรขภาพไม่เกิน 2 ตัว ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาและวิจัยฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบฟังก์ชันไซน์ที่ใช้ตัวพารามิเตอร์เป็นเงื่อนไขบังคับในการสร้างภาพแฟรคตอลแตกต่างกัน และรูปแบบของภาพแฟรคตอลที่สร้างจากฟังก์ชันจะมีลักษณะต่าง ๆ กันตามเงื่อนไขที่กำหนด

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำวิทยานิพนธ์

เพื่อศึกษาและนำเสนอการสร้างภาพแฟรคตอล 2 มิติของฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์ในรูป

$$f(z) = c\sin(z^n + \mu),\ 0 < \mu \le \tfrac{\pi}{2},\ n \ge 2,\ (n \in N),\ (c, z \in \mathbb{C}) \qquad (1.3)$$

เมื่อ

$$z_0 = c, (c = a + bi, (a, b \in R))$$

$$z_{k+1} = f(z_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

โดยที่ (1.3) เป็นฟังก์ชันในการทำซ้ำซึ่งกำหนดจุดเริ่มต้นที่ $z_0 = 0$ และ $z_0 = z$

1.3 ขอบเขตของการทำวิทยานิพนธ์

1.3.1 เป็นการศึกษาหลักการสร้างภาพแฟรคตอลบนระนาบของจำนวนเชิงซ้อน

1.3.2 เป็นการศึกษาและสร้างภาพแฟรคตอลจากฟังก์ชันไซน์ที่กำหนดตาม (1.3) โดยกำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = 0$, $z_0 = z$ และพิจารณาเมื่อ c, n และ μ ต่าง ๆ กัน

1.3.3 การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (1.3) จะใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์สร้างภาพ

1.4 ขั้นตอนของการทำวิทยานิพนธ์

1.4.1 ค้นคว้าเอกสารและศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับแฟรคตอล

1.4.2 ศึกษาคุณสมบัติ และลักษณะเฉพาะของภาพของฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์ ที่อยู่ในรูป (1.3) โดยใช้กระบวนการทำซ้ำด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และเปรียบเทียบลักษณะของภาพ เมื่อกำหนดเงื่อนไขบังคับต่าง ๆ กัน

1.4.3 พิจารณาความสัมพันธ์และเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์สร้างภาพแฟรคตอลเชิงกราฟฟิก 2 มิติ ที่มีความเป็นไปได้และเหมาะสม ตามเงื่อนไขที่กำหนด

1.4.4 สรุปและเขียนวิทยานิพนธ์

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการทำวิทยานิพนธ์

1.5.1 เพื่อเสนอแนวคิดวิธีการสร้างภาพทางด้านแฟรคตอลของฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์

1.5.2 เพื่อศึกษาขั้นตอนวิธีการสร้างภาพแฟรคตอลทางด้านเรขภาพ

1.5.3 เพื่อแนะนำภาพแฟรคตอลของฟังก์ชันเชิงซ้อนในรูปแบบของฟังก์ชันไซน์

บทที่ 2

ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้กล่าวถึง นิยามพื้นฐานและทฤษฎีบทที่นำมาประยุกต์ใช้ในการสร้างภาพ รวมทั้งตัวอย่างการสร้างและวิเคราะห์ภาพแฟรคตอล

2.1 นิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

นิยาม 2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ สำหรับทุก ๆ จุด z ที่ทำให้ $f'(z) = 0$ จะเรียกว่า จุดวิกฤติของฟังก์ชัน f (critical point of f)

จากนิยาม 2.1 ถ้า $f(z) = z^2 + c$, $(c, z \in \mathbb{C})$ แล้ว $f'(z) = 2z$ ดังนั้น จุดวิกฤติของฟังก์ชัน คือจุดที่ $2z = 0$ นั่นคือ จุด $z = 0$

นิยาม 2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ แล้วสำหรับทุก ๆ จุด z ซึ่ง $z = f(z)$ เรียกว่า จุดตรึงของฟังก์ชัน f (fixed point of f) และถ้า $f(\infty) = \infty$ แล้ว ∞ เป็นจุดตรึงของฟังก์ชัน f

นิยาม 2.3 ให้ z_0 เป็นจุดใด ๆ และการทำซ้ำของฟังก์ชัน f รอบจุด z_0 เรียกว่า วนรอบของจุด z_0 (Orbit of z_0)

จากนิยาม 2.3 วนรอบของจุด z_0 เมื่อกำหนดให้ $z_0 = 0$ เรียกว่า วนรอบวิกฤติ (Critical Orbit)

เช่น ให้ $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + c$ จะได้ วนรอบของจุด 0 หรือ วนรอบวิกฤติ ที่อยู่ในรูป

$$z_0 = 0 \ , \ z_1 = c \ , \ z_2 = c^2 + c \ , \ \ldots \ , \ z_{n+1} = z_n^2 + c \ , \ldots \quad (2.1)$$

จาก (2.1) เรียกว่า วนรอบวิกฤติ

นิยาม 2.4 ระบบไดนามิก (Dynamical System) คือ การส่งฟังก์ชัน $f: X \to X$ บนปริภูมิเชิงระยะทาง (X, d) ซึ่งเขียนแทนด้วย $\{X, f\}$ แล้ววนรอบของจุด $x \in X$ คือ ลำดับ $\left\{f^{\circ n}(x)\right\}_{n=0}^{\infty}$

นิยาม 2.5 ให้ $\{X, f\}$ เป็นระบบไดนามิก จุดคาบของฟังก์ชัน f (Periodic Point of x) คือ จุด $x \in X$ ซึ่ง $f^{\circ n}(x) = x, \quad \exists n \in \{1,2,3,\dots\}$

ถ้า x เป็นจุดคาบของฟังก์ชัน f แล้ว จำนวนเต็มบวก n, $n \in \{1,2,3,\dots\}$ ซึ่ง $f^{\circ n}(x) = x$ เรียกว่า คาบของ x (Periodic of x)

จำนวนเต็มที่น้อยที่สุด เรียกว่า คาบเล็กที่สุดของจุดคาบ x

วนรอบของจุดคาบของฟังก์ชัน f เรียกว่า วงรอบของฟังก์ชัน f (Cycle of f)

คาบเล็กที่สุดของวงรอบ คือ จำนวนของจุดต่าง ๆ ในวงรอบ

คาบของวงรอบของฟังก์ชัน f คือ คาบของจุดในวงรอบ

นิยาม 2.6 จุด z_0 เป็นจุดดึงดูดของฟังก์ชัน f ถ้า $|f'(z_0)| < 1$

การพิจารณาว่าจุด $z_0 = 0.25 + 0.25i$ เป็นจุดดึงดูดของฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + c$ หรือไม่ แสดงได้ดังนี้

$$f'(z) = 2z$$

$$|f'(z)| = |2(0.25 + 0.25i)|$$

$$= |0.50 + 0.50i|$$

$$= 0.71$$

จะได้ว่า $$|f'(z)| < 1$$

ดังนั้น จุดเริ่มต้น $z_0 = 0.25 + 0.25i$ เป็นจุดดึงดูดของฟังก์ชัน f

การพิจารณาว่าจุด $z_0 = 0.75 + 0.50i$ เป็นจุดดึงดูดของฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + c$ หรือไม่ แสดงได้ดังนี้

$$f'(z) = 2z$$

$$|f'(z)| = |2(0.75 + 0.50i)|$$

$$= |1.50 + 1.00i|$$

$$= 1.80$$

จะได้ว่า $$|f'(z)| > 1$$

ดังนั้น จุดเริ่มต้น $z_0 = 0.75 + 0.50i$ ไม่เป็นจุดดึงดูดของฟังก์ชัน f

นิยาม 2.7 วงรอบที่ n ของฟังก์ชัน f คือ เซต $\{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ ของจำนวนเชิงซ้อน n จำนวน ซึ่ง $z_k = f(z_{k-1})$ และ $f(z_{n-1}) = z_0$ สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, n-1$

นิยาม 2.8 วงรอบที่ n ของฟังก์ชัน f เรียกว่า วงรอบดึงดูด ถ้า $|g'_n(z_0)| < 1$ เมื่อ g_n เป็นฟังก์ชันประกอบของ f จำนวน n ตัว
เช่น ถ้า $n = 2$ แล้ว $g_2(z) = f(f(z))$

การพิจารณาเซต $\{-1+i, -i\}$ เป็นวงรอบที่ 2 ของฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + i$ ว่าเป็นวงรอบดึงดูด หรือไม่ แสดงได้ดังนี้

$$g_1(z) = f(z) = z^2 + i$$

$$g_2(z) = f(f(z)) = (-1+i) + 2iz^2 + z^4$$

$$g'_2(z) = 4iz + 4z^3$$

$$g'_2(-1+i) = 4 + 4i$$

$$|g'_2(-1+i)| = 4\sqrt{2} > 1$$

ดังนั้น วงรอบที่ 2 $\{-1+i, -i\}$ ไม่เป็นวงรอบดึงดูด

นิยาม 2.9 จุดคาบ z เมื่อ $g_n(z) = z$, $(g_n(z) = f^{\circ n}(z))$ โดยที่ $\lambda = g'_n(z) = \prod_{k=1}^{n} g'(z_k)$

เป็น จุดดึงดูดสุดขีด (Superattracting Point) ถ้า $\lambda = 0$

จุดดึงดูด (Attractive Point) ถ้า $|\lambda| < 1$

จุดกลาง (Neutral Point) ถ้า $|\lambda| = 1$

จุดผลักออก (Repulsive Point) ถ้า $|\lambda| > 1$

นิยาม 2.10 บริเวณดึงดูด (Basin of Attraction) ของจุดตรึง z คือ

$$A(z) = \{ z \in \mathbb{C} : f^{\circ n}(z) \to z \text{ เมื่อ } n \to \infty \}$$

บริเวณคาบดึงดูดของวงรอบที่ n $Z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ คือ

$$A(Z) = \{ z \in \mathbb{C} : f_i^{\circ n}(z) \to z_k \ \exists k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ เมื่อ } i \to \infty \}$$

นิยาม 2.11 เซตเอสเคปของ c (Escape Set of c) เขียนแทนด้วย E_c คือ เซตของจุดที่วนรอบลู่ไปสู่อนันต์

นิยาม 2.12 เซตพรีสเนอร์ของ c (Prisoner Set of c) เขียนแทนด้วย P_c คือ เซตของจุดที่วนรอบมีขอบเขต

นิยาม 2.13 ให้ $f:\hat{C} \to \hat{C}$ แทนฟังก์ชันพหุนามดีกรีมากกว่าหนึ่ง และ F_f แทนเซตของทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ที่วนรอบไม่ลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ

$$F_f = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left\{ \left| f^{\circ n}(z) \right| \right\}_{n=0}^{\infty} \text{ มีขอบเขต } \right\} \tag{2.2}$$

จาก (2.2) จะเรียก เซต F_f ว่า เซตจูเลียบริบูรณ์ (Filled Julia Set) ของฟังก์ชัน f และเซตขอบ (Boundary Set) ของ F_f จะเรียกว่า เซตจูเลียของฟังก์ชัน f จะเขียนแทนด้วย J

นิยาม 2.14 กำหนดให้ $f:\hat{C} \to \hat{C}$ แทนฟังก์ชันตรรกยะที่มีดีกรีมากกว่าหนึ่ง แล้วเซตจูเลียของ f คือ ส่วนปิดคลุมของจุดผลักคาบ (Closure of Repulsive Periodic Point) ของ f

นิยาม 2.15 เซตแมนเดลบรอทของกลุ่มระบบไดนามิก $\left\{ \hat{C} : z^2 - c \right\}$ คือ

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : J(c) \text{ เป็นเซตต่อเนื่อง } \right\}$$

เมื่อ J(c) แทนเซตจูเลีย

ทฤษฎีบท 2.1 เซตจูเลียของสมาชิกกลุ่มระบบไดนามิก $\left\{ \hat{C} : f(z) = z^2 - c \right\}$ เมื่อ $c \in \mathbb{C}$ เป็นเซตที่ต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ วนรอบของจุดกำเนิดไม่ลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \left| f_c^{\circ n}(0) \right| < \infty \text{ เมื่อ } n \to \infty \right\}$$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [2]

ทฤษฎีบท 2.2 (Mandelbrot –Douady-Hubbard)

เซตแมนเดลบรอทของกลุ่มระบบไดนามิก $\left\{ \hat{C} : z^2 - c \right\}$ เป็นเซตต่อเนื่อง

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [2]

ทฤษฎีบท 2.3 (Escape Criterion)
สำหรับ $f(z) = z^2 + c$ ถ้า $|z| > 2$ และ $|z| \geq |c|$ แล้ว $f(z) \to \infty$ เมื่อ $n \to \infty$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [3]

บทแทรก 2.1 ให้ c เป็นค่าคงที่กำหนด และ เซต $R(c) = \max(|c|, 2)$
วนรอบของจุดในการทำซ้ำจะลู่ไปสู่อนันต์ ถ้า $|z| > R(c)$ แล้วจุดเริ่มต้น z_0 ของวนรอบจะอยู่ในเซตเอสเคป E_c

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [3]

ทฤษฎีบท 2.4 (Mandelbrot Set)
ให้ $f(z) = z^2 + c, \quad (c \in \mathbb{C})$ เป็นฟังก์ชันในการทำซ้ำโดยที่ $|c| < 2$ ถ้าค่าของฟังก์ชันที่เกิดจากวนรอบเริ่มต้นที่ z_0 มี $|z| > 2$ แล้ว วนรอบของจุด z_0 จะลู่ไปสู่อนันต์

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [4]

ให้
$$\{ \hat{C} : f(z) = z^n + c, \quad c \in \mathbb{C}, \quad n \in N, \quad n \geq 3 \} \tag{2.3}$$

นิยาม 2.16 เซตแมนเดลบรอทของกลุ่มระบบไดนามิกของ (2.3) คือ

$$M = \{ c \in \mathbb{C} : J(c) \text{ เป็นเซตต่อเนื่อง } \}$$

เมื่อ J(c) แทนเซตจูเลีย

ทฤษฎีบท 2.5 (Mandelbrot Set)
เซตแมนเดลบรอทของกลุ่มระบบไดนามิก $\{ \hat{C} : z^2 + c \}$ สมนัยกับ $M \subset \{ c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2 \}$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [5]

ทฤษฎีบท 2.6 เซตจูเลียของสมาชิกกลุ่มระบบไดนามิก $\left\{\hat{C} : f(z) = z^n + c\right\},\ c \in \mathbb{C},\ n \in N,$ $n \geq 3$ เป็นเซตต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ วนรอบของจุดกำเนิดไม่ลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \left| f_c^{\circ k}(0) \right| < \infty \text{ เมื่อ } k \to \infty \right\}$$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [5]

ทฤษฎีบท 2.7 เซตแมนเดลบรอทของกลุ่มระบบไดนามิก (2.3) สมนัยกับ

$$M \subset \left\{ c \in \mathbb{C} : |c| \leq \sqrt[n-1]{2} \right\}$$

เมื่อ

$$c_k = e^{\frac{i(\pi + 2k\pi)}{n-1}} \sqrt[n-1]{2},\ k = 0, \ldots, n-2 \in M \text{ ถ้า } n = 2m, (m \in N)$$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [5]

2.2 การสร้างภาพแฟรคตอล

2.2.1 การให้สีของภาพแฟรคตอล

การให้สีของภาพแฟรคตอลจะใช้วิธีเอสเคปไทม (Escape Times) ซึ่งเป็นวิธีการกำหนดสีของภาพตามจำนวนครั้งมากที่สุดของการทำซ้ำ สำหรับแต่ละจุด (x, y) บนระนาบในขอบเขตที่กำหนด เมื่อพิจารณาแล้วอาจจะมีผลทำให้ค่าของฟังก์ชันลู่ไปสู่อนันต์ ด้วยจำนวนครั้งของการทำซ้ำไม่เท่ากัน และค่าของฟังก์ชันที่ไม่ลู่ไปสู่อนันต์ เมื่อทำซ้ำแบบอนันต์ครั้ง ดังนั้น การให้สีมี 2 กรณี คือ

1. กรณีที่จุด (x, y) ส่งผลให้ค่าของฟังก์ชันไม่ลู่ไปสู่อนันต์ จะกำหนดจำนวนครั้งของการทำซ้ำสูงสุดเอาไว้ หากไม่กำหนดไว้จะใช้เวลาในการคำนวณโดยเปล่าประโยชน์ เช่น กำหนดไว้ 30 ครั้ง ถ้ามีการทำซ้ำครบ 30 ครั้ง แล้วค่าของฟังก์ชันยังไม่ลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ สีของจุด (x, y) จะแสดงสีตามครั้งที่ 30 เป็นต้น
2. กรณีที่จุด (x, y) ส่งผลให้ค่าของฟังก์ชันลู่ไปสู่อนันต์ จำนวนครั้งของการทำซ้ำที่เริ่มจะลู่ไปสู่อนันต์จะเป็นค่าของสีภาพ จำนวนครั้งของการทำซ้ำที่ต่างกันจะให้สีต่างกัน โดยปกติการเริ่มลู่ไปสู่อนันต์จะทราบจากทฤษฎีบทที่ใช้เป็นเงื่อนไขบังคับ เช่น ขนาดของฟังก์ชันมีค่ามากกว่า 2 เป็นต้น

การกำหนดสีในคอมพิวเตอร์ทุกวันนี้ สามารถกำหนดได้ละเอียดมาก แต่เมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับการให้สีภาพจะใช้เพียง 16 สีก็มีค่าความแตกต่างกันเพียงพอที่จะเห็นความสวยงามของภาพ โดยที่ค่าสีต่าง ๆ พิจารณาดังภาคผนวก ค และการให้สีของภาพแฟรคตอลจะกำหนดตามจำนวนการวนซ้ำ เช่น การวนซ้ำ 1 รอบกำหนดให้เป็นสีเขียวอ่อน เป็นต้น

2.2.2 ขั้นตอนวิธีการสร้างภาพพื้นฐาน

การสร้างภาพแฟรคตอลด้วยคอมพิวเตอร์ คือ การสร้างภาพบนระนาบ หรือ พื้นผิว โดยการแบ่งพื้นที่ระนาบออกเป็นจุด หรือ ที่เรียกว่า พิกเซล (Pixel) ซึ่งแต่ละจุดจะประกอบด้วยพิกัด (x, y) ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงการแบ่งจุดพิกเซลขนาด 50×50

$(1,1)$	$(1,2)$	…	$(1,y)$	…	$(1,50)$
$(2,1)$	$(2,2)$	…	$(2,y)$	…	$(2,50)$
$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$
$(x,1)$	$(x,2)$	…	(x,y)	…	$(x,50)$
$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$	…	$\vdots$
$(50,1)$	$(50,2)$	…	$(50,y)$	…	$(50,50)$

หลังจากนั้น นำแต่ละจุดพิกเซล (x, y) เหล่านั้น มาพิจารณาการให้สีตามรูปแบบของฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งแต่ละจุดจะแสดงมาทางจอภาพคอมพิวเตอร์ในพื้นที่ติดกันต่อเนื่องเกิดเป็นภาพสี

การสร้างภาพแฟรคตอลบนระนาบของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ เมื่อ x แทนส่วนจริง และ y แทน ส่วนจินตภาพมีขั้นตอนเบื้องต้นดังนี้

1. กำหนดขอบเขตของระนาบ หรือ ช่วงบนแกน x และ ช่วงบนแกน y และจำนวนรอบการวนซ้ำสูงสุด
2. วนลูบพิจารณาแต่ละค่า x และ y จากขอบเขต

   2.1 สำหรับแต่ละค่า x, y นำไปแทนค่าในฟังก์ชันที่กำหนดเป็นค่าเริ่มต้น

   2.2 วนลูบคำนวณค่าฟังก์ชันซ้ำ ถ้าค่าฟังก์ชันน้อยกว่าค่าที่กำหนด (ไม่ลู่ไปสู่อนันต์)

   2.3 นำค่าจำนวนการวนซ้ำ จากข้อ 2.2 มาให้ค่าสีของภาพ (วาดกราฟ)
3. แสดงค่าของสีต่าง ๆ บนจอภาพ

จากขั้นตอนดังกล่าวข้างต้น จะได้ จำนวนการคำนวณสูงสุด เท่ากับจำนวนพิกเซล $\times$ จำนวนรอบสูงสุด เช่น กำหนดจุดพิกเซลขนาด 50×50 และ จำนวนรอบสูงสุดเป็น 30 นั่นคือ จำนวนการคำนวณสูงสุดเท่ากับ 75,000 ครั้ง

พิจารณาขั้นตอนการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^2 + \frac{\pi}{2})$, $(z, c \in \mathbb{C})$ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB (Version 5.3) ดังนี้

```
% Function  image (m, box)
% Computes the image, with  m × m  points
% Allows optional input of a box to work in, default is [ - 2, 2 ] × [ - 2, 2 ].
m = 200 ;  box = [ - 2  2  - 2  2 ] ; w = [ m, box ] ;  a = 2 ;
dx = box ( 2 ) – box ( 1 ) ) / m ;  dy = ( box ( 4 ) – box ( 3 ) ) / m; N = 30 ;
Plot ( [ box ( 1 ), box ( 2 ) ] ,[ box ( 3 ) , box ( 4 ) ] , ' w. ' )
 hold  on
 ix = 0 ;
 for  x = box ( 1 ) : dx : box ( 2 )
      ix = ix + 1 ;
      iy = 0 ;
      for  y = box ( 3 ) : dy : box ( 4 )
           iy = iy + 1 ;
           c = x + ( i * y ) ;
           z = 0 ;
           k = 0 ;
           while ( k < N ) & ( abs ( z ) < a )
                  z =  c * ( sin ( z ^ 2 + pi / 2 ) ) ;
                  k = k + 1 ;
           end
           if ( k= =N )
               plot ( x, y, ' .k' )
           end
      end
 end
hold  off
```

2.2.3 ตัวอย่างการสร้างภาพแฟรคตอล

2.2.3.1 การสร้างภาพของเซตจูเลีย (J)

เซตจูเลีย เป็นภาพแฟรคตอลที่สร้างจากทุก ๆ จุด z บนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ด้วยกระบวนการทำซ้ำของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(z) = z^2 + c \tag{2.4}$$

เมื่อ

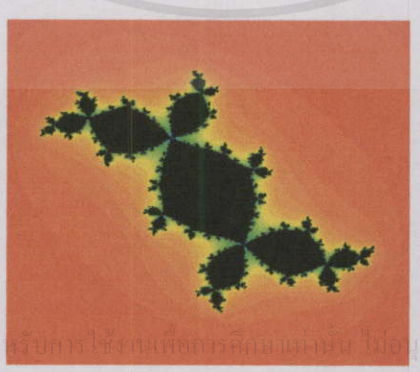
$$z_0 = c$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

จาก (2.4) การสร้างภาพของเซตจูเลีย พิจารณาดังนี้

1. กำหนดขอบเขตระนาบ ($\mathbb{C}$) และจำนวนรอบสูงสุดของการทำซ้ำฟังก์ชัน
2. กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = z,\ (z \in \mathbb{C})$ และเลือก c เป็นค่าคงที่กำหนด
3. คำนวณค่าของฟังก์ชัน $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ในการทำซ้ำแต่ละครั้ง
4. ถ้า $|z_n| > \max(|c|, 2)$ หยุดการทำซ้ำ แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบ n ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันลู่ไปสู่อนันต์
5. ถ้า $|z_n| \le \max(|c|, 2)$ ทำซ้ำต่อไปจนครบจำนวนรอบสูงสุด แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบของการทำซ้ำที่กำหนด

การสร้างภาพของ (2.4) สำหรับทุก ๆ จุด z บนระนาบเชิงซ้อนที่มีพิกัดอยู่ในช่วง $-2 \le x \le 2$ และ $-1.5 \le y \le 1.5$ เมื่อ $c = -0.12 + 0.75\,i$ จะมีภาพของเซตจูเลีย ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงภาพของเซตจูเลีย เมื่อ $c = -0.12 + 0.75\,i$

จากรูปที่ 2.1 จะเห็นได้ว่า บริเวณภาพของเซตจูเลียแบ่งสีต่าง ๆ กัน ซึ่งในการพิจารณาบริเวณสีของภาพจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $|z| \le \max(|c|, 2)$ แล้วค่าของ z จะไม่ลู่ไปสู่อนันต์ สรุปว่า $z \in J$ และการกำหนดสีของทุก ๆ จุด z เริ่มต้นที่อยู่ภายในเซตจูเลียจะให้สีเดียวกันทั้งหมด

กรณีที่ 2 ถ้า $|z| > \max(|c|, 2)$ แล้วค่าของ z จะลู่ไปสู่อนันต์ สรุปว่า $z \notin J$ หรือ $z \in E_c$ และการกำหนดสีของจุดขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งมากที่สุดของการทำซ้ำที่ลู่ไปสู่อนันต์

พิจารณาลำดับการทำซ้ำของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.25 - 0.25i$ และ $z_0 = -0.25 + 0.25i$ เมื่อ $c = -0.12 + 0.75i$ ของฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + c$ ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงลำดับการทำซ้ำของจุดเริ่มต้น z_0 ที่อยู่ภายในเซตจูเลีย

	ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 0.25 - 0.25i$			ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = -0.25 + 0.25i$		
z	x	y	$\|z\|$	x	y	$\|z\|$
z_0	0.2500	-0.2500	0.3536	-0.2 500	0.2500	0.3536
z_1	-0.1200	0.6250	0.6364	-0.1200	0.6250	0.6364
z_2	-0.4962	0.6000	0.7786	-0.4962	0.6000	0.7786
z_3	-0.2338	0.1545	0.2802	-0.2338	0.1545	0.2802
z_4	-0.0892	0.6778	0.6836	-0.0892	0.6778	0.6836
z_5	-0.5714	0.6290	0.8498	-0.5714	0.6290	0.8498
...	...	...	...	...	...	...
z_{100}	-0.1201	0.7500	0.7595	-0.1201	0.7500	0.7595
z_{150}	0.0016	- 0.0113	0.0114	0.0016	- 0.0113	0.0114
z_{200}	-0.6680	0.5698	0.8780	-0.6680	0.5698	0.8780
z_{250}	-0.1201	0.7500	0.7595	-0.1201	0.7500	0.7595
z_{300}	0.0016	- 0.0113	0.0114	0.0016	- 0.0113	0.0114
z_{350}	-0.6680	0.5698	0.8780	-0.6680	0.5698	0.8780
z_{400}	-0.1201	0.7500	0.7595	-0.1201	0.7500	0.7595
z_{450}	0.0016	- 0.0113	0.0114	0.0016	- 0.0113	0.0114
z_{500}	-0.6680	0.5698	0.8780	-0.6680	0.5698	0.8780
z_{550}	-0.1201	0.7500	0.7595	-0.1201	0.7500	0.7595
z_{600}	0.0016	- 0.0113	0.0114	0.0016	- 0.0113	0.0114
z_{650}	-0.6680	0.5698	0.8780	-0.6680	0.5698	0.8780
z_{700}	-0.1201	0.7500	0.7595	-0.1201	0.7500	0.7595
...	...	...	...	...	...	...

จากตารางที่ 2.2 จะเห็นได้ว่า การทำซ้ำแต่ละครั้งของ 2 ของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.25 - 0.25i$ และ $z_0 = -0.25 + 0.25i$ ค่าของฟังก์ชัน $|z| < \max(|c|, 2)$ เมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้น นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.25 - 0.25i$, $z_0 = -0.25 + 0.25$ จะลู่ไปสู่บริเวณเซตดึงดูด $\{0.0016 - 0.113i, -0.6680 + 0.5698i, -0.1201 + 0.7500i\}$ ซึ่งจะไม่ลู่ไปสู่อนันต์ เมื่อจำนวนการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ เนื่องจากจุดเริ่มต้น z_0 เป็นจุดดึงดูดของฟังก์ชัน จึงสรุปได้ว่า จุดเริ่มต้น $z_0 \in J$ และบริเวณสีของ 2 จุดเริ่มต้นบนภาพของเซตจูเลีย คือบริเวณพื้นที่สีดำ

พิจารณาลำดับการทำซ้ำของ 2 จุดเริ่มต้น $z_0 = 0.75 + 0.50i$ และ $z_0 = 1.00 + 0.00i$ เมื่อ $c = -0.12 + 0.75i$ ของฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + c$ ดังตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 แสดงลำดับการทำซ้ำของจุดเริ่มต้น z_0 ที่อยู่ภายนอกเซตจูเลีย

	ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 1.00 + 0.00i$			ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 0.75 + 0.50i$		
z	x	y	$\lvert z \rvert$	x	y	$\lvert z \rvert$
z_0	1.0000	0.0000	1.0000	0.7500	0.5000	0.9014
z_1	0.8800	0.7500	1.1562	0.1925	1.5000	1.5123
z_2	0.0919	2.0700	2.0720	-2.3329	1.3275	2.6842
z_3	-4.3965	1.1305	4.5395	3.5604	- 5.4440	6.5048
z_4	17.9309	- 9.1901	20.1488	-17.0805	-38.0151	41.6760
z_5	2.3694e+002	-3.2882e+002	405.2945	-1.1535e+003	1.2994e+003	1.7375e+003
z_6	-5.1985e+004	-1.5582e+005	1.6426e+005	-3.5779e+005	-2.9977e+006	3.0190e+006
z_7	-2.1578e+010	1.6200e+010	2.6982e+010	-8.8584e+012	2.1451e+012	9.1144e+012
z_8	2.0313e+020	-6.9913e+020	7.2805e+020	7.3870e+025	-3.8005e+025	8.3073e+025
z_9	-4.4752e+041	-2.8404e+041	5.3005e+041	4.0124e+051	-5.6148e+051	6.9011e+051
z_{10}	1.1960e+083	2.5423e+083	2.8095e+083	-1.5427e+103	-4.5057e+103	4.7625e+103
z_{11}	-5.0327e+166	6.0811e+166	7.8935e+166	-1.7922e+207	1.3902e+207	2.2681e+207

จากตารางที่ 2.3 จะเห็นได้ว่า ในการทำซ้ำครั้งที่ 2 ของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.75 + 0.50i$ และ $z_0 = 1.00 + 0.00i$ ค่าของฟังก์ชัน $|z| > \max(|c|, 2)$ นั่นคือ ลำดับวนรอบของ 2 จุดเริ่มต้นจะลู่ไปสู่อนันต์ เมื่อจำนวนการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ สรุปได้ว่า 2 จุดเริ่มต้น $z_0 \notin J$ หรือ $z_0 \in E_c$ และบริเวณสีของจุดเริ่มต้นบนภาพของเซตจูเลีย คือ บริเวณพื้นที่สีส้ม เป็นต้น

จากทฤษฎีบท 2.6 สามารถแสดงเซตจูเลียของ $f(z) = z^2 + i$ เป็นเซตต่อเนื่อง ดังนี้
พิจารณา $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้นของวนรอบการทำซ้ำของ $f(z) = z^2 + i$ จะได้

$$f(0) = i$$

$$f(f(0)) = f^{\circ 2}(0) = f(i) = -1 + i$$

$$f(f(f(0))) = f^{\circ 3}(0) = f(-1 + i) = -i$$

$$f(f(f(f(0)))) = f^{\circ 4}(0) = f(-i) = -1 + i$$

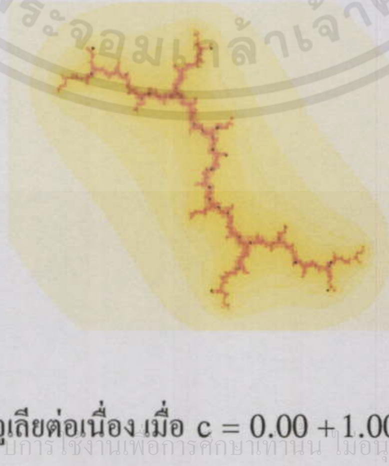
$$f(f(f(f(f(0))))) = f^{\circ 5}(0) = f(-1 + i) = -i$$

$$f(f(f(f(f(f(0)))))) = f^{\circ 6}(0) = f(-i) = -1 + i$$

$$f(f(f(f(f(f(f(0))))))) = f^{\circ 7}(0) = f(-1 + i) = -i$$

$$\vdots$$

ดังนั้น วนรอบของจุด 0 คือ ลำดับ $\{0, i, -1+i, -i, -1+i, -i, -1+i, -i, \ldots\}$ ซึ่งเป็นลำดับมีขอบเขต นั่นคือ เซตจูเลียของ $f(z) = z^2 + i$ เป็นเซตต่อเนื่อง ดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 แสดงภาพของเซตจูเลียต่อเนื่อง เมื่อ $c = 0.00 + 1.00i$

2.2.3.2 การสร้างภาพของเซตแมนเดลบรอท (M)

เซตแมนเดลบรอท เป็นภาพแฟรคตอลที่สร้างจากทุก ๆ จุด c บนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ด้วยกระบวนการทำซ้ำของฟังก์ชัน (2.4)

จาก (2.4) การสร้างภาพของเซตแมนเดลบรอท พิจารณาดังนี้

1. กำหนดขอบเขตระนาบ ($\mathbb{C}$) และจำนวนรอบสูงสุดของการทำซ้ำฟังก์ชัน
2. กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = 0$, $\forall c \in \mathbb{C}$
3. คำนวณค่าของฟังก์ชัน $z_{n+1} = z_n^2 + c$ ในการทำแต่ละครั้ง
4. ถ้า $|z_n| > 2$ หยุดการทำซ้ำ แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบ n ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันลู่ไปสู่อนันต์
5. ถ้า $|z_n| \le 2$ ทำซ้ำต่อไปจนครบจำนวนรอบสูงสุด แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบของการทำซ้ำที่กำหนด

การสร้างภาพของ (2.4) สำหรับทุก ๆ จุด c บนระนาบเชิงซ้อนที่มีพิกัดอยู่ในช่วง $-2 \le x \le 1$ และ $-1.5 \le y \le 1.5$ เมื่อ $z_0 = 0$ จะมีภาพของเซตแมนเดลบรอท ดังรูปที่ 2.3

รูปที่ 2.3 แสดงภาพของเซตแมนเดลบรอท

จากรูปที่ 2.3 จะเห็นได้ว่า บริเวณภาพของเซตแมนเดลบรอทแบ่งสีต่าง ๆ กัน ซึ่งในการพิจารณาบริเวณสีของภาพจะแบ่งออกเป็น 2 กรณี ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้า $|c| \le 2$ และ $|z| < 2$ แล้วค่าของ z จะไม่ลู่ไปสู่อนันต์ สรุปว่า $c \in M$ และการกำหนดสีของทุก ๆ จุด c ที่อยู่ภายในเซตแมนเดลบรอทจะให้มีสีเดียวกันทั้งหมด

กรณีที่ 2 ถ้า $|c| \le 2$ และ $|z| > 2$ แล้วค่าของ z จะลู่ไปสู่อนันต์ สรุปว่า $c \notin M$ และการกำหนดสีของจุดขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งมากที่สุดของการทำซ้ำที่ลู่ไปสู่อนันต์ หรือ $|z| > 2$

พิจารณาลำดับวนรอบของจุด $c = 0.20 + 0.50\,i$ และ $c = 0.00 - 0.50\,i$ ในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + c$ เมื่อ $z_0 = 0$ ดังตารางที่ 2.4

ตารางที่ 2.4 แสดงลำดับวนรอบของจุด c เริ่มต้นของ $f(z) = z^2 + c$ ที่อยู่ในเซต M

ลำดับที่	$c = 0.20 + 0.50i$		$c = 0.00 - 0.50i$	
	z	$\lvert z \rvert$	z	$\lvert z \rvert$
0	0.20+0.50i	0.54	0.00-0.50i	0.50
1	-0.01+0.70i	0.70	-0.25-0.50i	0.56
2	-0.29+0.49i	0.57	-0.19-0.25i	0.31
3	0.05+0.22i	0.54	-0.03-0.41i	0.41
4	-0.15+0.52i	0.22	-0.17-0.48i	0.51
5	-0.05+0.66i	0.66	-0.21-0.34i	0.40
6	-0.23+0.44i	0.48	-0.08-0.36i	0.37
7	0.06+0.30i	0.30	-0.13-0.40i	0.46
…	…	…	…	…

และจากตารางที่ 2.4 สามารถเขียนลำดับวนรอบของจุด $c = 0.20 + 0.50i$ ดังรูปที่ 2.4

รูปที่ 2.4 แสดงลำดับวนรอบของจุด c เริ่มต้นภายในเซตแมนเดลบรอท

จากรูปที่ 2.4 จะเห็นได้ว่า จุดเริ่มต้น $c = 0.20 + 0.50i$ ที่อยู่ภายในเซตแมนเดลบร็อทมีลำดับวนรอบของจุด c อยู่ภายในเซตแมนเดลบรอท และค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำจะเข้าใกล้ศูนย์เมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ

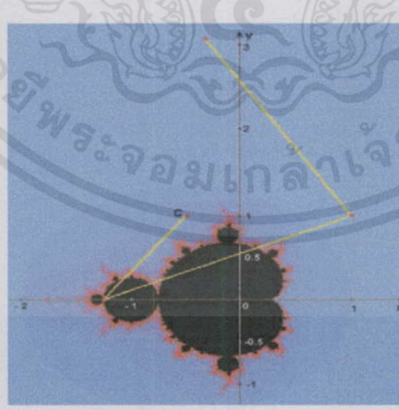
ดังนั้น จากตารางที่ 2.4 และรูปที่ 2.4 จะเห็นได้ว่า ในการทำซ้ำแต่ละครั้งค่าของฟังก์ชันไม่ลู่ไปสู่อนันต์ หรือ $|z| < 2$ เมื่อจำนวนการทำซ้ำเพิ่มขึ้น นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุด c มีขอบเขต จะสรุปได้ว่า $c \in M$ และสีของจุด c บนภาพของเซตแมนเดลบรอท คือ บริเวณพื้นที่สีดำ

พิจารณาลำดับวนรอบของจุด $c = -0.50 + 1.00i$ และ $c = -1.00 + 1.00i$ ในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + c$ เมื่อ $z_0 = 0$ ดังตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5 แสดงลำดับวนรอบของจุด c เริ่มต้นของ $f(z) = z^2 + c$ ที่อยู่นอกเซต M

ลำดับที่	$c = -0.50 + 1.00i$		$c = -1.00 + 1.00i$	
	z	$\lvert z \rvert$	z	$\lvert z \rvert$
0	-0.50+1.00i	1.12	-1.00+1.00i	1.41
1	-1.25+0.00i	1.25	-1.00-1.00i	1.41
2	1.06+1.00i	1.46	-1.00+3.00i	3.16
3	-0.37+3.13i	3.15	-9.00-5.00i	10.30
4	-10.13-1.32i	10.22	55.00+91.00i	106.33
…	…	…	…	…

และจากตารางที่ 2.5 สามารถเขียนลำดับวนรอบของจุด $c = -0.50 + 1.00i$ ดังรูปที่ 2.5

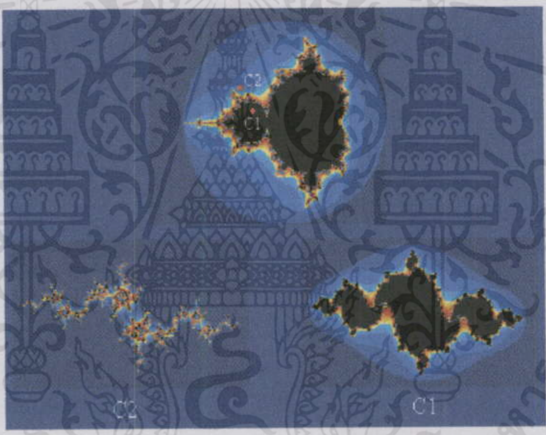


รูปที่ 2.5 แสดงลำดับวนรอบของจุด c เริ่มต้นภายนอกเซตแมนเดลบรอท

จากรูปที่ 2.5 จะเห็นได้ว่า จุดเริ่มต้น $c = -0.50 + 1.00i$ ที่อยู่ภายนอกเซตแมนเดลบรอทมีลำดับวนรอบของจุด c อยู่ภายนอกเซตแมนเดลบรอท และค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำจะค่อย ๆ ห่างออกจากศูนย์ เมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ

ดังนั้น จากตารางที่ 2.5 และรูปที่ 2.5 จะเห็นได้ว่า การทำซ้ำครั้งที่ 3 ของจุด $c = -0.50 + 1.00i$ ค่า $|z| > 2$ และการทำซ้ำครั้งที่ 2 ของจุด $c = -1.00 + 1.00i$ ค่า $|z| > 2$ ซึ่งค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำจะลู่ไปสู่อนันต์ เมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มขึ้น นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุด c เริ่มต้นไม่มีขอบเขต จะสรุปได้ว่า $c \notin M$ และถ้ากำหนดสีของการทำซ้ำครั้งที่ 2 และ 3 เป็นสีฟ้า แล้วบริเวณสีของจุด c เริ่มต้นบนภาพของเซตแมนเดลบรอท คือ บริเวณพื้นสีฟ้า ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ในเซตเอสเคป $c \in E_c$

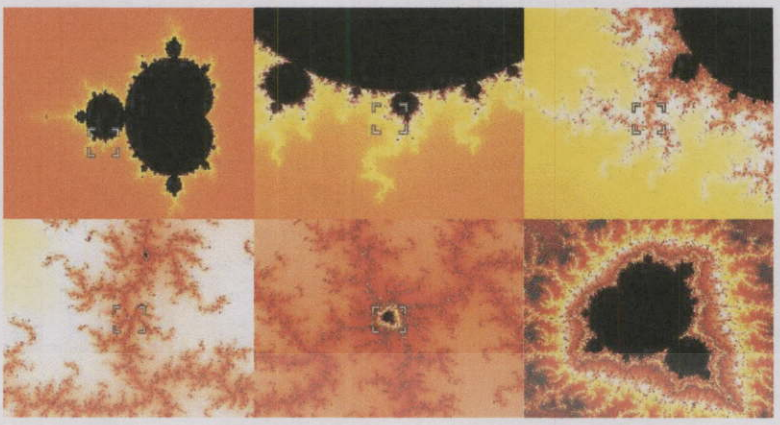
ข้อสังเกต เซตจูเลีย (J(c)) เป็นเซตที่มีความสัมพันธ์กับเซตแมนเดลบรอท (M) โดยที่ ถ้าเลือกจุด c เริ่มต้นการทำซ้ำของเซตจูเลียที่อยู่ภายในเซตแมนเดลบรอท ($c \in M$) แล้วเซตจูเลียเป็นเซตต่อเนื่อง และถ้าเลือกจุด c เริ่มต้นการทำซ้ำของเซตจูเลียที่อยู่ภายนอกเซตแมนเดลบรอท ($c \notin M$) แล้วของเซตจูเลียเป็นเซตไม่ต่อเนื่อง ดังรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 แสดงภาพของเซตจูเลียต่อเนื่อง C1 และไม่ต่อเนื่อง C2 ที่สัมพันธ์กับเซตแมนเดลบรอท

2.2.3.3 การปรับขยายภาพ

การปรับขยายภาพบริเวณส่วนเว้า หรือ ส่วนนูนบนภาพของเซตแมนเดลบรอท และเซตจูเลีย จะเห็นได้ว่า ภาพของทั้งสองเซตที่ได้จากการปรับขยายภาพจะมีความคล้ายกันในตัว เช่น การปรับขยายภาพบริเวณรอบจุด $-1.018170 - 0.2820181i$ บนภาพเซตแมนเดลบรอท ซึ่งจะปรับขยาย 10 เท่าในแต่ละภาพ โดยที่ภาพแรกมีความกว้างเท่ากับ 3.2 (ขอบซ้าย : –2.3 ; ขอบขวา :+0.9) จนกระทั่ง ภาพสุดท้ายมีความกว้าง 0.0000032 เท่านั้น ดังรูปที่ 2.7

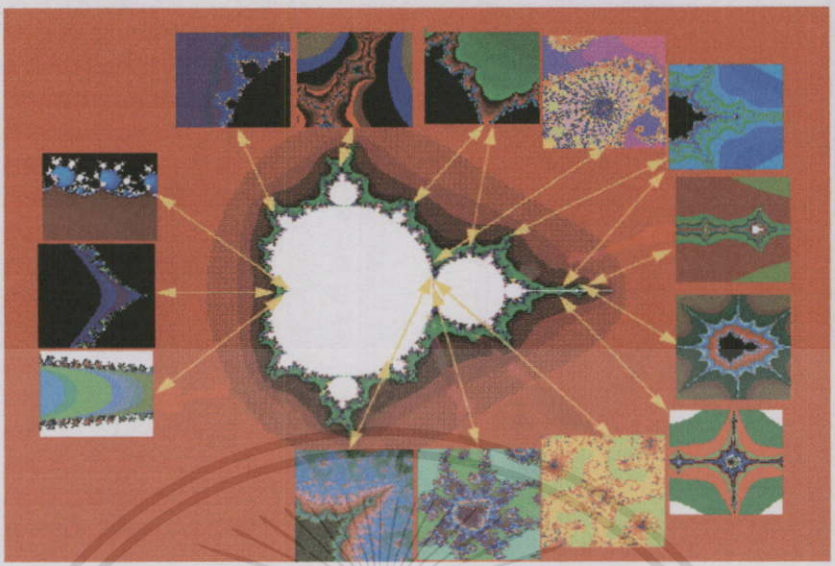


รูปที่ 2.7 แสดงการปรับขยายภาพของเซตแมนเดลบรอทบริเวณรอบจุด –1.018170-0.2820181 i

และการปรับขยายภาพส่วนต่าง ๆ ของเซตแมนเดลบรอท จะพบว่ามีภาพแฟรคตอลรูปแบบต่างกันจำนวนมาก ซึ่งเป็นกราฟพื้นฐานของฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์ ดังรูปที่ 2.8

รูปที่ 2.8 แสดงภาพแฟรคตอลรูปแบบต่าง ๆ บนเซตแมนเดลบรอท

จากรูปที่ 2.8 จะเห็นได้ว่า การปรับขยายภาพแฟรคตอลของเซตแมนเดลบรอทบนส่วนต่าง ๆ จะเกิดภาพแตกต่างกัน และสามารถแสดงตำแหน่งการปรับขยายภาพต่าง ๆ บนเซตแมนเดลบรอทได้ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 แสดงตำแหน่งการปรับขยายภาพต่าง ๆ บนเซตแมนเดลบรอท

ข้อสังเกต การสร้างภาพแฟรคตอลของเซตจูเลีย J(c) สำหรับแต่ละค่า c ที่มีความสัมพันธ์ภาพของเซตแมนเดลบรอทจะให้ภาพแฟรคตอลมีลักษณะแตกต่างกันตามค่า c เริ่มต้นที่เลือก เช่น การสร้างภาพแฟรคตอลของเซตจูเลียสำหรับแต่ละค่า c บนบริเวณรอบ ๆ ขอบภาพของเซตแมนเดลบรอทจะมีลักษณะภาพต่างกัน ดังรูปที่ 2.10

รูปที่ 2.10 แสดงภาพของเซตจูเลียสำหรับแต่ละค่า c บนเซตแมนเดลบรอท

บทที่ 3

การสร้างภาพแฟรคตอลจากฟังก์ชันไซน์

บทนี้เป็นการกล่าวถึง หลักการกำหนดฟังก์ชัน หรือ คุณสมบัติของฟังก์ชันสำหรับสร้างภาพแฟรคตอล และได้นำเสนอการสร้างภาพของฟังก์ชันตรีโกณในรูปของฟังก์ชันไซน์ รวมทั้งตัวอย่างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชันที่นำเสนอ

3.1 หลักการกำหนดฟังก์ชัน

ฟังก์ชันซ้ำทั่วไปถึงแม้ว่าจะสร้างภาพได้ แต่ภาพที่ปรากฏออกมานั้นไม่สวยงาม และต้องลองถูกลองผิดหลายครั้ง ซึ่งอาจจะพบภาพสวยหรือไม่สวยบ้าง หัวข้อนี้จึงได้นำเสนอหลักการกำหนดฟังก์ชันขั้นต้นที่จะให้ได้ภาพแฟรคตอลสวยงาม ตามความเหมาะสมและเป็นไปได้ ต่อไปนี้

3.1.1 เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน

ฟังก์ชันในการสร้างภาพต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อน เนื่องจากการสร้างภาพในรูปแบบ 2 มิติ หรือ บนระนาบจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ของส่วนจริง และส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $z = x + iy$ มาวาดกราฟ หรือ สร้างภาพโดยที่แกน x แทน ค่าของสัมประสิทธิ์ของส่วนจริง และแกน y แทน ค่าสัมประสิทธิ์ของส่วนจินตภาพ และฟังก์ชันของจำนวนเชิงซ้อนสามารถที่จะเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์ไปมาตามแนวแกน x และแนวแกน y ได้ทั้งทางบวกและทางลบ

3.1.2 เป็นฟังก์ชันที่มีจุดวิกฤติ

ฟังก์ชันในการสร้างภาพต้องเป็นฟังก์ชันที่มีจุดวิกฤติ เนื่องจากจุดวิกฤติของฟังก์ชัน เป็นจุดเปลี่ยนกลับทิศทาง หรือ เปลี่ยนค่าของฟังก์ชันซึ่งฟังก์ชันหนึ่งอาจจะมีจุดวิกฤติหลายจุด และจะใช้จุดวิกฤติของฟังก์ชันเป็นจุดเริ่มต้นในการทำซ้ำ การหาค่าจุดวิกฤติ คือ จุดที่ทำให้อนุพันธ์อันดับ 1 มีค่าเป็นศูนย์ หรือ $f'(z) = 0$

3.1.3 ค่าของฟังก์ชันในการซ้ำต้องไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด

การทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ z_0 เป็นจุดเริ่มต้นจะเขียนในรูป $z_{k+1} = f(z_k)$ นั่นคือ

$$z_0,\ f(z_0),\ f(f(z_0)),\ldots$$

ดังนั้น ถ้าให้ $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้น และค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำเป็นศูนย์ทั้งหมดจะได้การทำซ้ำของฟังก์ชันอยู่ในรูป $0, 0, 0, \ldots$ ซึ่งหมายถึง ค่าของฟังก์ชันที่จะนำมาสร้างภาพทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพเป็นศูนย์และให้ภาพเป็นสีเดียวกันทั้งหมดบนบริเวณระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ซึ่งไม่เกิดภาพที่สวยงาม

พิจารณาตัวอย่างฟังก์ชันต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.1 พิจารณาฟังก์ชันไซน์ในรูป

$$f(z) = c\sin(z^2), \quad |c| \leq 4, \quad (c, z \in \mathbb{C}) \tag{3.1}$$

จาก (3.1) จะเห็นได้ว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน และสามารถอนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f'(z) = 2cz\cos(z^2) \tag{3.2}$$

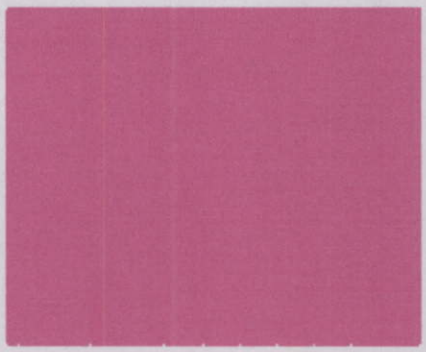
จาก (3.2) จะเห็นได้ว่า จุดที่ทำให้อนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชันมีค่าเป็นศูนย์ คือ $z = 0$ ดังนั้น ให้จุด $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำ จะได้

$$\begin{aligned} z_0 &= 0 \\ z_1 &= f(z_0) = c\sin(0^2) = 0 \\ z_2 &= f(z_1) = c\sin(0^2) = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0, \ldots \tag{3.3}$$

จาก (3.3) จะเห็นได้ว่า ค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำเป็นศูนย์ทั้งหมด จึงสรุปว่า ฟังก์ชัน (3.1) ไม่สามารถสร้างภาพแฟรคตอลได้ เนื่องจากขาดคุณสมบัติข้อ 3 ซึ่งการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.1) จะไม่เกิดภาพใด ๆ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 แสดงการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.1)

ตัวอย่างที่ 3.2 พิจารณาฟังก์ชันไซน์ในรูป

$$f(z) = c\sin(z^2 + 0.1), \quad |c| \le 5, \quad (c, z \in \mathbb{C}) \tag{3.4}$$

จาก (3.4) จะเห็นได้ว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน และสามารถหาอนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f'(z) = 2cz\cos(z^2 + 0.1) \tag{3.5}$$

จาก (3.5) จะเห็นได้ว่า จุด $z = 0$ เป็นจุดที่ทำให้อนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชันมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นให้จุด $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำจะได้

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = f(z_0) = c\sin(0^2 + 0.1) = c\sin(0.1)$$

$$z_2 = f(z_1) = c\sin((c\sin(0.1))^2 + 0.1)$$

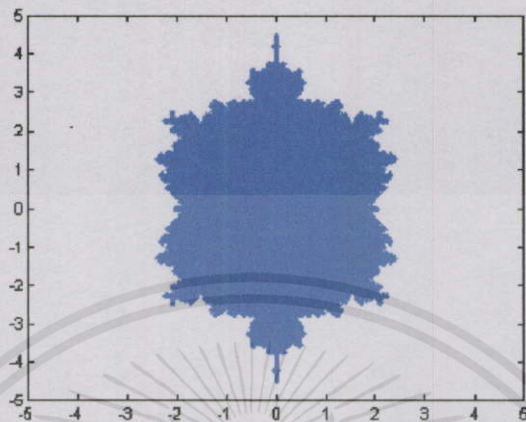
$$\vdots$$

นั่นคือ

$$0, c\sin(0.1), c\sin((c\sin(0.1))^2 + 0.1), \ldots \tag{3.6}$$

จาก (3.6) จะเห็นได้ว่า ค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำแต่ละครั้งไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ดังนั้น ฟังก์ชัน

(3.4) จะสามารถสร้างภาพแฟรคตอลสวยงามได้ เนื่องจากมีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อ ซึ่งภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (3.4) สำหรับทุก ๆ ค่าของ $c \in \mathbb{C}$ ที่มีพิกัดอยู่ในช่วง $-5 \le x \le 5$ และ $-5 \le y \le 5$ จะมีภาพ ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.4)

ตัวอย่างที่ 3.3 พิจารณาฟังก์ชันไซน์ในรูป

$$f(z) = c\sin(z^2 + 0.01), \quad |c| \le 15, \quad (c, z \in \mathbb{C}) \tag{3.7}$$

จาก (3.7) จะเห็นได้ว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน และสามารถหาอนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชันได้ดังนี้

$$f'(z) = 2cz\cos(z^2 + 0.01) \tag{3.8}$$

จาก (3.8) จะเห็นได้ว่า จุด $z = 0$ เป็นจุดที่ทำให้อนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชันมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นจุด $z = 0$ เป็นจุดวิกฤติของฟังก์ชัน และให้ $z = 0$ เป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำจะได้

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = f(z_0) = c\sin(0^2 + 0.01) = c\sin(0.01)$$

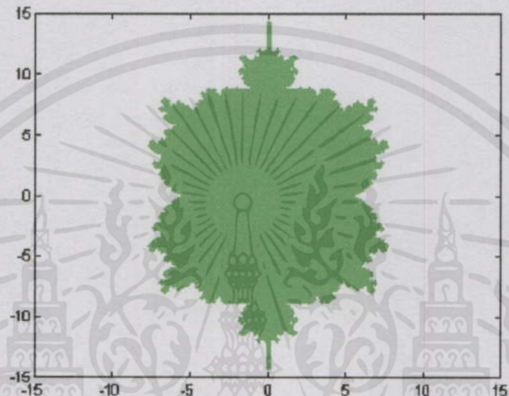
$$z_2 = f(z_1) = c\sin((c\sin(0.01))^2 + 0.01)$$

$$\vdots$$

นั่นคือ

$$0, c\sin(0.01), c\sin((c\sin(0.01))^2 + 0.01), \ldots \qquad (3.9)$$

จาก (3.9) จะเห็นได้ว่า ค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำแต่ละครั้งไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด แต่มีค่าใกล้ศูนย์มาก ๆ ดังนั้น ฟังก์ชัน (3.7) จะสามารถสร้างภาพแฟรคตอลสวยงามได้ เนื่องจากมีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อ ซึ่งภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (3.7) สำหรับทุก ๆ ค่าของ $c \in \mathbb{C}$ ที่มีพิกัดอยู่ในช่วง $-15 \le x \le 15$ และ $-15 \le y \le 15$ จะมีภาพ ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.7)

ข้อสังเกต การสร้างภาพของฟังก์ชัน สำหรับทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน ที่ค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำเป็นศูนย์ทั้งหมดจะไม่สามารถสร้างภาพแฟรคตอลได้

3.2 ที่มาของการศึกษาและวิจัยการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชันไซน์

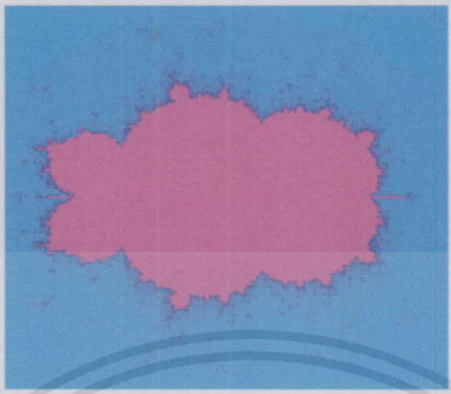
รูปแบบของภาพแฟรคตอลที่สร้างจากฟังก์ชันตรีโกณมิติมีลักษณะแตกต่างกันมากมาย และภาพแฟรคตอลที่สร้างจากฟังก์ชันต่าง ๆ กันอาจจะมีรูปแบบภาพที่เหมือน หรือ ต่างกันภายใต้หลักการกำหนดฟังก์ชัน หรือ คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถนำมาสร้างภาพแฟรคตอลได้

ฟังก์ชันไซน์ เป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติรูปแบบหนึ่งที่ผู้วิจัยจำนวนมากให้ความสนใจนำมาศึกษาและวิจัยการสร้างภาพแฟรคตอลแบบเรขภาพ [8] เช่น พิจารณาฟังก์ชันไซน์ที่อยู่ในรูป

$$f(z) = \sin(z^2 + c) - c, \ (c, z \in \mathbb{C}) \qquad (3.10)$$

และโดยหลักการกำหนด จะได้เห็นฟังก์ชัน (3.10) มีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อ นั่นคือ ฟังก์ชัน (3.10) สามารถจะที่นำมาสร้างภาพแฟรคตอลได้ เช่น การสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.10) สำหรับทุก ๆ จุด

$c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-2.5 \le x \le 2.5$ และ $-2.5 \le y \le 2.5$ และ $r = 2.5\sqrt{2}$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แสดงภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (3.10)

และจากการสังเกตกระบวนการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (3.10) จะพบว่าในการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (3.10) เกิดจากการนำฟังก์ชันพหุนามมาประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันไซน์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอลโดยมี c เป็นพารามิเตอร์เพียงตัวเดียว และถ้าเพิ่มเงื่อนไขในการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (3.10) ในรูปแบบ

$$f(z) = \sin(z^{10} + c) - c \;, (c, z \in \mathbb{C}) \tag{3.11}$$

ซึ่งภาพแฟรคตอลที่สร้างจากฟังก์ชัน (3.11) สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ เมื่อกำหนดระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วงช่วง $-2.5 \le x \le 2.5$ และ $-2.5 \le y \le 2.5$ และ $r = 2.5\sqrt{2}$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.5

รูปที่ 3.5 แสดงภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน (3.11)

จากรูปที่ 3.4 และ 3.5 จะเห็นได้ว่า ขนาดเซตของภาพแฟรคตอลที่ปรากฏบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ของฟังก์ชัน (3.10) และ (3.11) มีขนาดเท่ากัน นั่นคือ เซตของภาพแฟรคตอลที่สร้างจากฟังก์ชัน (3.10) และ (3.11) สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ จะสมนัยกับ $|c| \le 2.5$ เป็นต้น

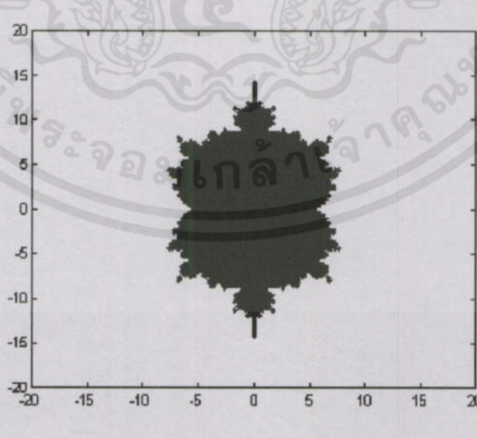
ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะศึกษาการนำฟังก์ชันพหุนามมาประยุกต์ใช้สร้างภาพแฟรคตอล ในรูปผลคูณของ c กับฟังก์ชันไซน์ของฟังก์ชันพหุนามที่อยู่ในรูปแบบ $f(z) = c\sin(z^n + \mu)$ โดยที่ค่า c , n และ μ เป็นตัวพารามิเตอร์ในการสร้างภาพ ที่มีความเป็นไปได้และเหมาะสม ภายใต้หลักการกำหนดฟังก์ชันที่สามารถสร้างภาพแฟรคตอลได้

3.3 การกำหนดขนาดมาตราส่วนบนแกนภาพ

การกำหนดขนาดมาตราบนแกนภาพมีผลต่อภาพที่ปรากฏ หากกำหนดขนาดมาตราส่วนบนแกนภาพที่ไม่เหมาะสมอาจจะมองไม่เห็นภาพทั้งหมด เนื่องจากภาพอาจปรากฏอยู่นอกขอบเขตแกนที่กำหนด (ภาพมีขนาดใหญ่มาก) หรือ ภาพอาจจะปรากฏอยู่ในพื้นที่เล็ก ๆ คล้ายเป็นจุด เช่น พิจารณาภาพของฟังก์ชันในรูป

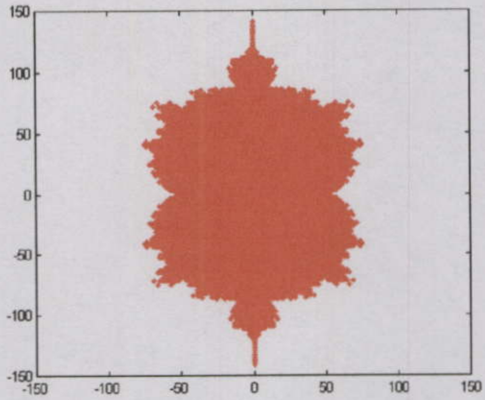
$$f(z) = c\sin(z^2 + \mu), \ (c, z \in \mathbb{C}) \tag{3.12}$$

จาก (3.10) ถ้าเลือก $\mu = 0.01$ ภาพจะปรากฏบนบริเวณขอบเขตอยู่ในช่วงพิกัด $-20 \le x \le 20$ และ $-20 \le y \le 20$ ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.4 แสดงการใช้ขนาดมาตราส่วนในการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.12) เมื่อ $\mu = 0.01$

และจาก (3.12) ถ้าเลือก $\mu = 0.0001$ ภาพจะปรากฏบนบริเวณขอบเขตอยู่ในช่วงพิกัด $-150 \le x \le 150$ และ $-150 \le y \le 150$ ดังรูปที่ 3.7



รูปที่ 3.7 แสดงการใช้ขนาดมาตราส่วนในการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.12) เมื่อ $\mu = 0.0001$

3.4 รูปแบบฟังก์ชันไซน์ในการสร้างภาพแฟรคตอล

ฟังก์ชันสร้างภาพที่นำเสนอในงานวิจัยนี้ เป็นฟังก์ชันตรีโกณที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์ โดยคุณสมบัติของฟังก์ชันไซน์ จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันคาบ และคาบของฟังก์ชันไซน์ คือ 2π ที่อยู่ในรูป

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta) \tag{3.13}$$

จาก (3.13) จะเห็นได้ว่า การแบ่งกราฟของฟังก์ชันไซน์จะประกอบด้วยคาบซ้ำที่อยู่ในช่วง

$$-\pi \le \theta < \pi \Leftrightarrow \theta \in [-\pi, \pi) \tag{3.14}$$

และ

$$0 \le \theta < 2\pi \Leftrightarrow \theta \in [0, 2\pi) \tag{3.15}$$

และ ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันคี่ ที่อยู่ในรูป

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \tag{3.16}$$

ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันไซคลิกที่มีค่าอยู่ระหว่าง $[-1,1]$ ที่อยู่ในรูป

$$-1 \le \sin(\theta) \le 1 \tag{3.17}$$

จาก (3.16) และ (3.17) จะได้ว่า

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}) = 1 \text{ และ } \sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1 \tag{3.18}$$

และจาก (3.18) จะได้

$$\arcsin(1) = \tfrac{\pi}{2} \text{ และ } \arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2} \tag{3.19}$$

จาก (3.17) , (3.18) และ (3.19) จะได้

$$-\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2} \text{ หรือ มีค่าประมาณ } -1.57 \le \theta \le 1.57 \tag{3.20}$$

จาก (3.1) , (3.4) , (3.7), (3.12) , (3.15) และ (3.20) จะนิยามฟังก์ชันสร้างภาพในรูป

$$f(z) = c\sin(z^2 + \mu), 0 < |\mu| \le \tfrac{\pi}{2}, \ (c, z \in \mathbb{C}) \tag{3.21}$$

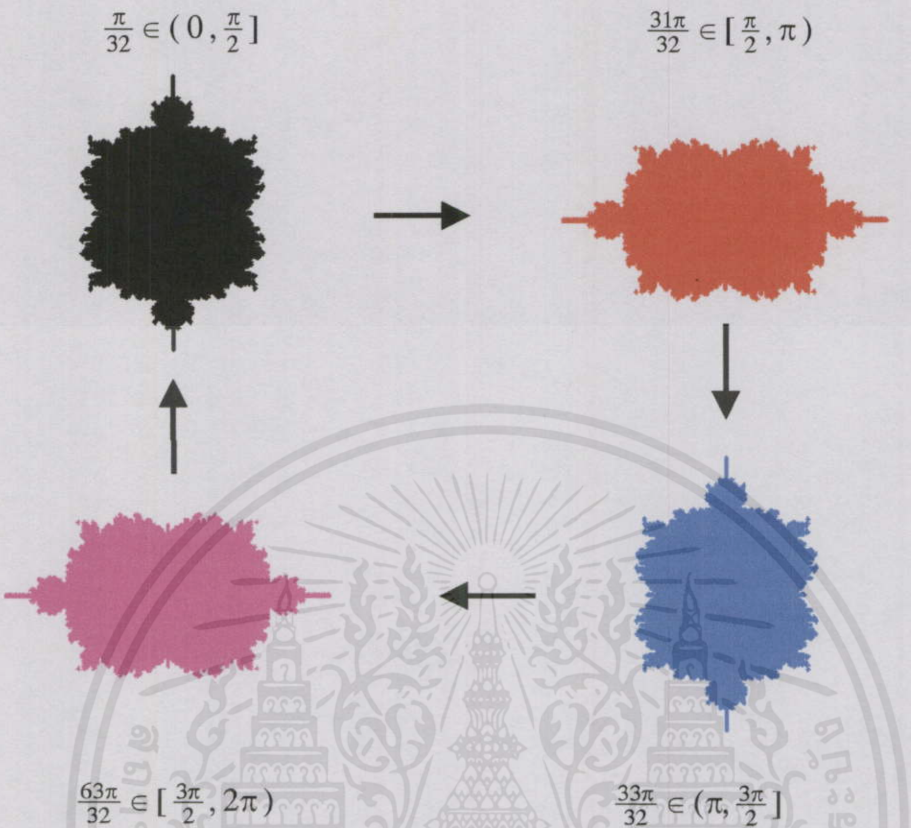
ข้อสังเกต ค่ามุมของฟังก์ชันไซน์ในการสร้างภาพแฟรคตอลจะแบ่งเป็น 4 ช่วง คือ

1. $\mu \in (0, \frac{\pi}{2}]$
2. $\mu \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$
3. $\mu \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$
4. $\mu \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$

จากการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.21) จะเห็นได้ว่า

1. ค่ามุมของฟังก์ชันที่อยู่ในช่วง $\mu \in (0, \frac{\pi}{2}]$ และ $\mu \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ ณ ตำแหน่งของมุมที่ตรงกันจะให้ภาพแฟรตตอลเหมือนกัน
2. ค่ามุมของฟังก์ชันที่อยู่ในช่วง $\mu \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ และ $\mu \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ณ ตำแหน่งของมุมที่ตรงกันจะให้ภาพแฟรคตอลเหมือนกัน
3. ค่ามุมของฟังก์ชันที่อยู่ในช่วง $\mu \in (0, \frac{\pi}{2}]$ และ $\mu \in (\pi, \frac{3\pi}{2}]$ ณ ตำแหน่งของมุมที่ตรงกันจะให้ภาพแฟรคตอลเหมือน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม
4. ค่ามุมของฟังก์ชันที่อยู่ในช่วง $\mu \in (0, \frac{\pi}{2}]$ และ $\mu \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ณ ตำแหน่งของมุมที่ตรงกันจะให้ภาพแฟรคตอลเหมือน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม

พิจารณาการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.21) เมื่อ μ ที่อยู่ในช่วงต่าง ๆ กัน ดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 แสดงการสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.21) เมื่อ μ อยู่ในช่วงต่างกัน

จากรูปที่ 3.8 จะเห็นได้ว่า การสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.21) เมื่อ μ ในแต่ละช่วงที่ตำแหน่งตรงกันจะมีภาพแฟรคตอลรูปแบบเดียวกัน ดังนั้น การสร้างภาพของฟังก์ชัน (3.21) จึงใช้ $\mu \in (0, \frac{\pi}{2}]$ และกำหนดฟังก์ชันไซน์สำหรับสร้างภาพแฟรคตอลในรูปทั่วไป ดังนี้

$$f(z) = c\sin(z^n + \mu),\ \ 0 < \mu \le \tfrac{\pi}{2},\ \ n \ge 2,\ \ (n \in N),\ \ (c, z \in \mathbb{C}) \qquad (3.22)$$

เมื่อ

$$z_0 = c, (c = a + bi, (a, b \in R))$$

$$z_{k+1} = f(z_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

หมายเหตุ ต่อไปนี้เมื่อกล่าวถึงฟังก์ชัน $f(z)$ จะหมายถึง ฟังก์ชันการสร้างภาพแฟรคตอลในรูปแบบ (3.22)

3.5 แนวคิดในการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z)

การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) ประกอบด้วยทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อนในช่วงพิกัดที่กำหนด โดยแบ่งจุดทั้งหมดในการสร้างภาพออกเป็น 2 ประเภท คือ

1. จุดภายในเซต หมายถึง จุดที่กำหนดให้เป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำของฟังก์ชัน และค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำมีขอบเขต หรือ ไม่ลู่ไปสู่อนันต์
2. จุดภายนอกเซต หมายถึง จุดที่กำหนดให้เป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำของฟังก์ชัน และค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำไม่มีขอบเขต หรือ ลู่ไปสู่อนันต์

ซึ่งในการสร้างภาพจะเริ่มต้นด้วยการกำหนดจุดเริ่มต้น z_0 สำหรับการทำซ้ำฟังก์ชันที่กำหนด โดยที่จุดเริ่มต้น z_0 หาได้ ดังต่อไปนี้

จาก (3.22) เราสามารถหาอนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชัน ได้ดังนี้

$$f'(z) = cnz^{(n-1)}(\cos(z^n + \mu)) \tag{3.23}$$

จาก (3.23) จะเห็นได้ว่า จุดที่ทำให้อนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชันมีค่าเป็นศูนย์ คือ $z = 0$ ซึ่งเป็นจุดวิกฤติ และจาก (3.22) ถ้ากำหนด z_0 เป็นจุดเริ่มต้นของการทำซ้ำ แล้วจะเขียนลำดับวนรอบของจุด z_0 ในรูป

$$z_0\,,\ f(z_0)\ ,\ f(f(z_0)),\ f(f(f(z_0))),\ldots \tag{3.24}$$

จาก (3.24) เมื่อกำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = 0$ จะเขียนลำดับวนรอบของจุด 0 ในรูป

$$0,\ f(0)\ ,\ f(f(0)),\ f(f(f(0))),\ldots,f^{\circ m}(0),\ldots \tag{3.25}$$

และจาก (3.24) ถ้ากำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = z$ แล้วจะเขียนลำดับวนรอบของจุด z ในรูป

$$z,\ f(z)\ ,\ f(f(z)),\ f(f(f(z))),\ldots,f^{\circ m}(z),\ldots \tag{3.26}$$

จาก (3.25) ถ้าลำดับวนรอบจุด 0 มีขอบเขต แล้วจะนิยามเซตของทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ที่ลำดับวนรอบจุดกำเนิดมีขอบเขต ดังนิยาม 3.1

นิยาม 3.1 สำหรับ f(z) เป็นฟังก์ชันสร้างภาพแฟรคตอล ให้ $P_{f,0}$ แทนเซตของทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ที่ลำดับวนรอบจุด 0 มีขอบเขต เขียนแทนด้วย

$$P_{f,0} = \left\{ c \in \mathbb{C} : \left| f^{\circ m}(0) \right| < \infty \text{ เมื่อ } m \to \infty \right\} \tag{3.27}$$

จาก (3.26) ถ้าลำดับวนรอบของจุด z มีขอบเขต แล้วจะนิยามเซตของทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ที่ลำดับวนรอบ z มีขอบเขต ดังนิยาม 3.2

นิยาม 3.2 สำหรับ f(z) เป็นฟังก์ชันสร้างภาพแฟรคตอล ให้ $P_{f,z}$ แทนเซตของทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ที่ลำดับวนรอบจุด z มีขอบเขต เขียนแทนด้วย

$$P_{f,z} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| f^{\circ m}(z) \right| < \infty \text{ เมื่อ } m \to \infty \right\} \tag{3.28}$$

นิยาม 3.3 สำหรับ f(z) เป็นฟังก์ชันสร้างภาพแฟรคตอล และเซตเอสเคป คือ เซตของจุดที่อยู่ภายนอกขอบเขต หรือ ภายนอกบริเวณพื้นที่กำหนด เขียนแทนด้วย

$$E_c = \left\{ z_0 : | z_k | \to \infty \text{ เมื่อ } k \to \infty \right\} \tag{3.29}$$

เมื่อ

$$z_{k+1} = f(z_k) \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

นิยาม 3.4 สำหรับ f(z) เป็นฟังก์ชันสร้างภาพแฟรคตอล และเซตพรีสเนอร์ คือ เซตของจุดที่อยู่ภายในขอบเขต หรือ ภายในบริเวณพื้นที่กำหนด เขียนแทนด้วย

$$P_c = \left\{ z_0 : | z_k | < \infty \text{ เมื่อ } k \to \infty \right\} \tag{3.30}$$

เมื่อ

$$z_{k+1} = f(z_k) \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

หรือ เซตเติมเต็ม (Complement Set) ของเซตเอสเคป E_c เขียนแทนด้วย

$$P_c = \left\{ z_0 : z_0 \notin E_c \right\} \tag{3.31}$$

เมื่อ

$$z_{k+1} = f(z_k) \ , \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

นิยาม 3.5 เซตขอบ คือ เซตของจุดที่อยู่ระหว่างเซตเอสเคปและเซตพรีสเนอร์

การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) เป็นการส่งค่าฟังก์ชันของการทำซ้ำสำหรับทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อนไปยังระนาบเชิงซ้อนแบบ 1-1 ที่มีความเป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม โดยพิจารณาค่าของฟังก์ชันในรูปแบบลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น z_0 ดังคุณสมบัติต่อไปนี้

1. เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต ถ้าสมาชิกใด ๆ ของลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น z_0 ออกจากวงกลมที่หมุนรอบจุดกำเนิด ($|z_k| > r$) หรือ ค่าของฟังก์ชันลู่ไปสู่อนันต์
2. เป็นลำดับที่มีขอบเขต ถ้าสมาชิกทั้งหมดของลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น z_0 อยู่ภายในวงกลมที่หมุนรอบจุดกำเนิด ($|z_k| \le r$) หรือ ค่าของฟังก์ชันไม่ลู่ไปสู่อนันต์

โดยที่ $r = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$

พิจารณาการทดลองสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) ดังแสดงในหัวข้อ 3.6

3.6 การทดลองสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z)

การทดลองสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) เมื่อกำหนดค่า c , n และ μ ต่างกัน จะแบ่งลักษณะการสร้างภาพของฟังก์ชัน f(z) ออกเป็น 2 เซต คือ ภาพของเซต $P_{f,0}$ และภาพของเซต $P_{f,z}$ ซึ่งมีขั้นตอนการสร้างภาพดังนี้

3.6.1 ขั้นตอนการสร้างภาพของเซต $P_{f,0}$

1. กำหนดขอบเขตระนาบ ($\mathbb{C}$) , ขนาดของ r และจำนวนรอบสูงสุดของการทำซ้ำฟังก์ชัน f(z)
2. กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = 0 \ , \forall c \in \mathbb{C}$
3. คำนวณค่าของฟังก์ชันในการทำแต่ละครั้ง นั่นคือ $z_{k+1} = f(z_k)$
4. ถ้า $|z_k| > r$ หยุดการทำซ้ำ แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบ k ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันลู่ไปสู่อนันต์
5. ถ้า $|z_k| \le r$ ทำซ้ำต่อไปจนครบจำนวนรอบสูงสุด แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบของการทำซ้ำที่กำหนด

โดยที่ $r = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$

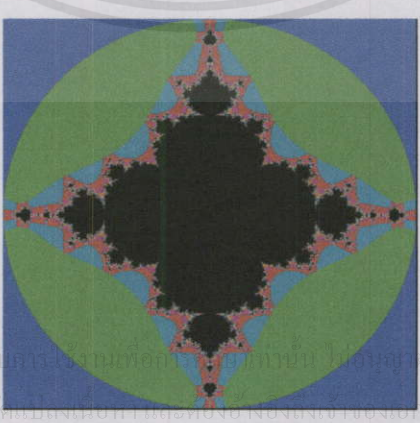
3.6.2 การทดลองสร้างภาพของเซต $P_{f,0}$

การทดลองที่ 3.1 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$ และ $r = 3\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 0.30$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.9

รูปที่ 3.9 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 0.30$, $n = 2$

จากรูปที่ 3.9 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 3\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 3\sqrt{2}$

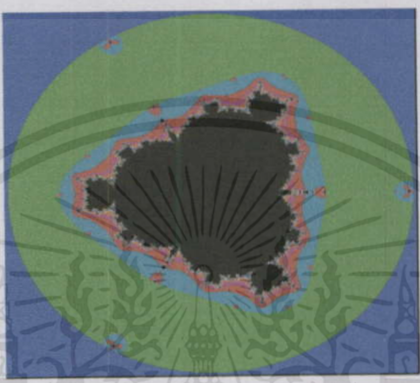
การทดลองที่ 3.2 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$ และ $r = 2\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $n = 2$

จากรูปที่ 3.10 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 2\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 2\sqrt{2}$

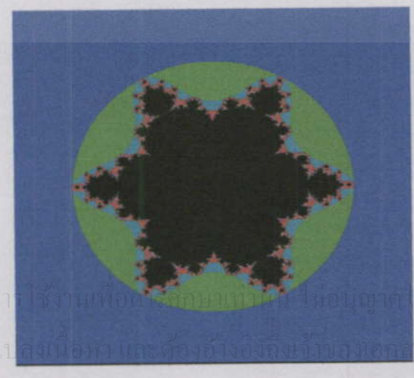
การทดลองที่ 3.3 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-3 \le x \le 3, -3 \le y \le 3$ และ $r = 3\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 0.50, n = 3$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 0.50,\ n = 3$

จากรูปที่ 3.11 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 3\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 3\sqrt{2}$

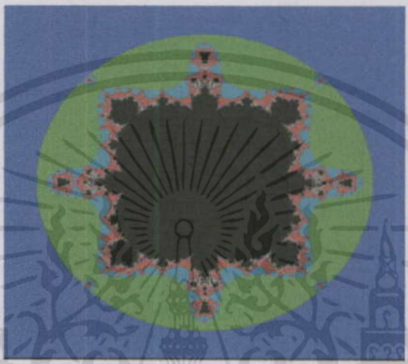
การทดลองที่ 3.4 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-2 \le x \le 2,\ -2 \le y \le 2$ และ $r = 2\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $n = 3$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 1.57,\ n = 3$

จากรูปที่ 3.12 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 2\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 2\sqrt{2}$

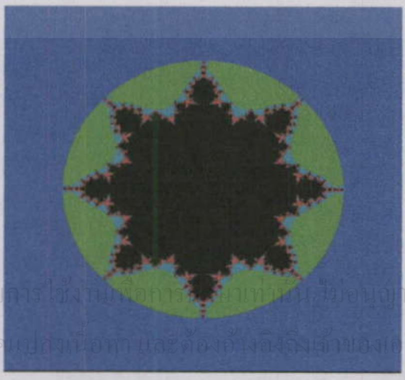
การทดลองที่ 3.5 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-2.5 \le x \le 2.5$, $-2.5 \le y \le 2.5$ และ $r = 2.5\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 1.00$, $n = 4$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 1.00$, $n = 4$

จากรูปที่ 3.13 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 2.5\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 2.5\sqrt{2}$

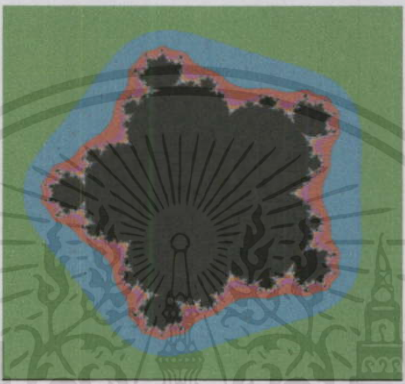
การทดลองที่ 3.6 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$ และ $r = 2\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $n = 4$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $n = 4$

จากรูปที่ 3.14 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 2\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 2\sqrt{2}$

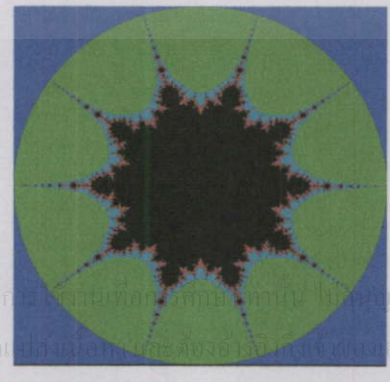
การทดลองที่ 3.7 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ที่กำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-8 \le x \le 8$, $-8 \le y \le 8$ และ $r = 8\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 0.10$, $n = 5$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.15



รูปที่ 3.15 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 0.10$, $n = 5$

จากรูปที่ 3.15 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 8\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 8\sqrt{2}$

การทดลองที่ 3.8 การสร้างของภาพของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-2 \le x \le 2$, $-2 \le y \le 2$ และ $r = 2\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $n = 5$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $n = 5$

จากรูปที่ 3.16 ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำทั้งหมดซึ่งลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 มีขอบเขต หรือ $|z_k| \le 2\sqrt{2}$ และบริเวณพื้นที่สีอื่น ๆ คือ ภาพของเซตเอสเคปที่ลำดับวนรอบของแต่ละจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต หรือ $|z_k| > 2\sqrt{2}$

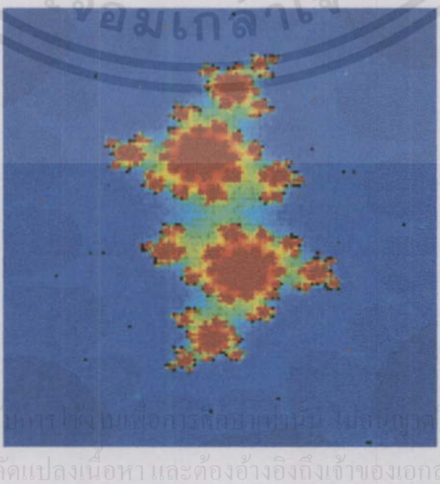
3.6.3 ขั้นตอนการสร้างภาพของเซต $P_{f,z}$

1. กำหนดขอบเขตระนาบ ($\mathbb{C}$) , ขนาดของ $R(c)$ และจำนวนรอบสูงสุดของการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$
2. กำหนดจุดเริ่มต้น $z_0 = z$, $(z \in \mathbb{C})$ และเลือก c เป็นค่าคงที่กำหนด
3. คำนวณค่าของฟังก์ชันในการทำแต่ละครั้ง นั่นคือ $z_{k+1} = f(z_k)$
4. ถ้า $|z_k| > R(c)$ หยุดการทำซ้ำ แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบ k ที่ทำให้ค่าของฟังก์ชันลู่ไปสู่อนันต์
5. ถ้า $|z_k| \le R(c)$ ทำซ้ำต่อไปจนครบจำนวนรอบสูงสุด แล้วแสดงสีของทุกจุดบนภาพตามจำนวนรอบของการทำซ้ำที่กำหนด

โดยที่ $R(c) = \max(|c|, r)$, $r = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$

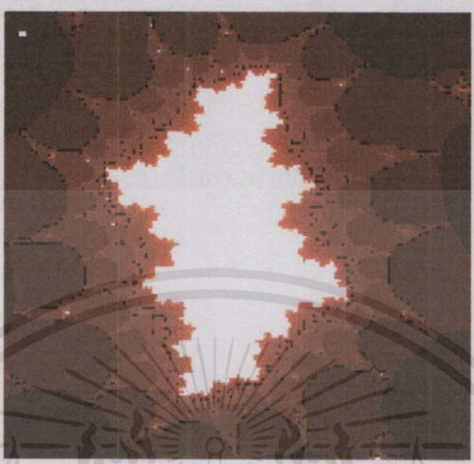
3.6.4 การทดลองสร้างภาพของเซต $P_{f,z}$

การทดลองที่ 3.9 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 2.75$ เมื่อ $c = -1.50 + 2.30i$, $\mu = 0.10$ และ $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.17



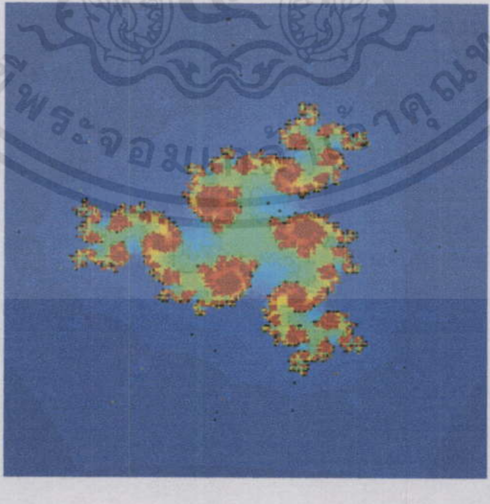
รูปที่ 3.17 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = -1.50 + 2.30i$, $\mu = 0.10$, $n = 2$

การทดลองที่ 3.10 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 2.59$ เมื่อ $c = -1.20 + 2.30i$, $\mu = 0.10$ และ $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.18



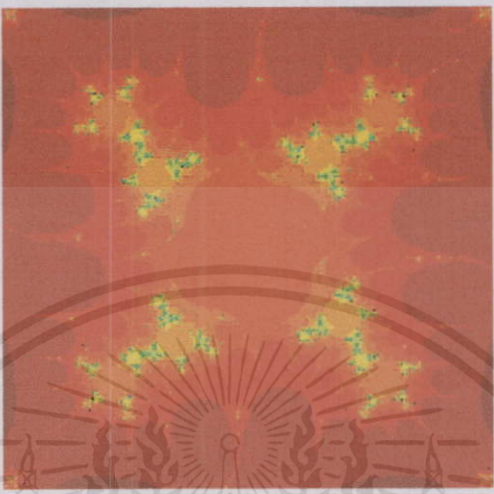
รูปที่ 3.18 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = -1.20 + 2.30i$, $\mu = 0.10$, $n = 2$

การทดลองที่ 3.11 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 4.14$ เมื่อ $c = 2.50 - 3.30i$, $\mu = 1.57$ และ $n = 3$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.19



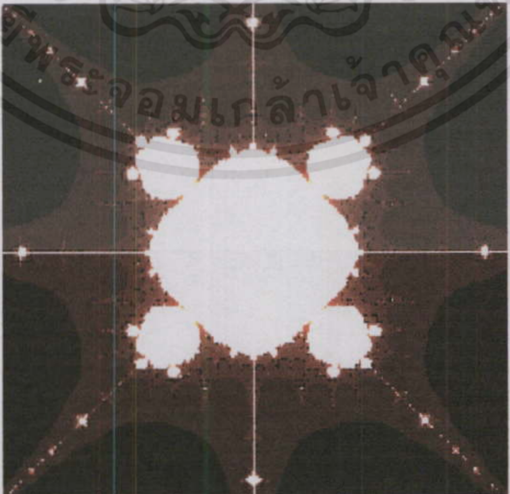
รูปที่ 3.19 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 2.50 - 3.30i$, $\mu = 1.57$, $n = 3$

การทดลองที่ 3.12 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 2.34$ เมื่อ $c = 1.80 - 1.50i$, $\mu = 0.40$ และ $n = 4$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.20



รูปที่ 3.20 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 1.80 - 1.50i$, $\mu = 0.40$, $n = 4$

การทดลองที่ 3.13 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 2.12$ เมื่อ $c = 1.50 + 1.50i$, $\mu = 0.30$ และ $n = 4$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.21



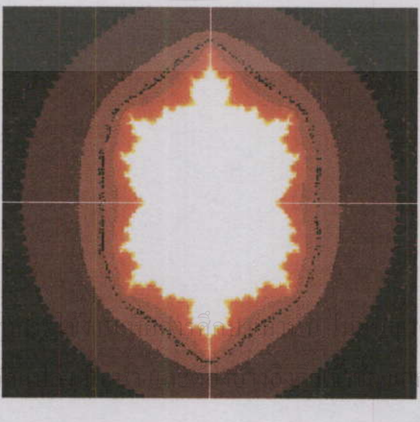
รูปที่ 3.21 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 1.50 + 1.50i$, $\mu = 0.30$, $n = 4$

การทดลองที่ 3.14 แสดงการสร้างของภาพของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 5.42$ เมื่อ $c = 3.30 - 4.30i$, $\mu = 0.10$ และ $n = 5$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.22

รูปที่ 3.22 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 3.30 - 4.30i$, $\mu = 0.10$, $n = 5$

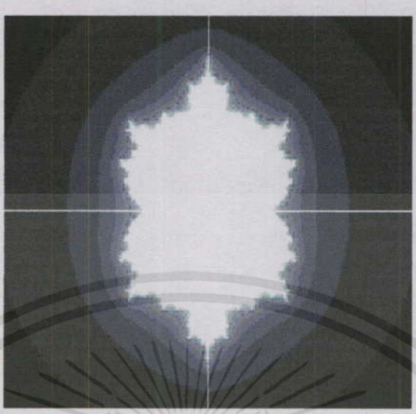
ข้อสังเกต การสร้างภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ n มีค่าเท่ากัน และ $\mu \in (0, \frac{\pi}{32}]$ ภาพของเซตที่ปรากฏบนระนาบจะมีลักษณะรูปแบบเดียวกัน แต่ขนาดของระนาบในการสร้างภาพแตกต่างกันโดยที่ค่า μ ที่เข้าใกล้ศูนย์มาก ๆ ขนาดของระนาบในการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) จะใหญ่ขึ้นด้วย ดังต่อไปนี้

การทดลองที่ 3.15 แสดงการสร้างภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ บนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วงพิกัด $-(\sqrt{2})^{50} \le x \le (\sqrt{2})^{50}$, $-(\sqrt{2})^{50} \le y \le (\sqrt{2})^{50}$ และ $r = (\sqrt{2})^{50}\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = \frac{\pi}{2^{50}}$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.23



รูปที่ 3.23 แสดงภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = \frac{\pi}{2^{50}}$, $n = 2$

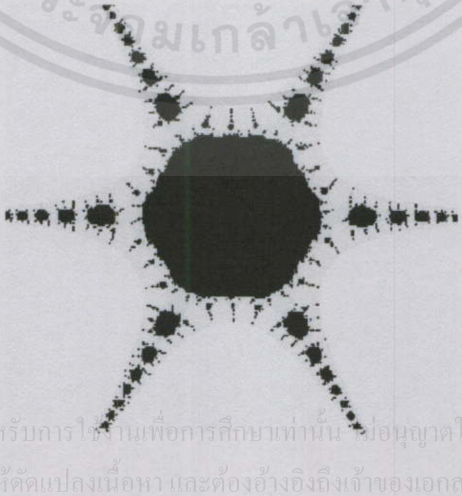
การทดลองที่ 3.16 แสดงการสร้างภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,0}$ สำหรับทุก ๆ จุด $c \in \mathbb{C}$ บนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วงพิกัด $-(\sqrt{2})^{500} \le x \le (\sqrt{2})^{500}$, $-(\sqrt{2})^{500} \le y \le (\sqrt{2})^{500}$ และ $r = (\sqrt{2})^{500}\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = \frac{\pi}{2^{500}}$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.24



รูปที่ 3.24 แสดงภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = \frac{\pi}{2^{500}}$, $n = 2$

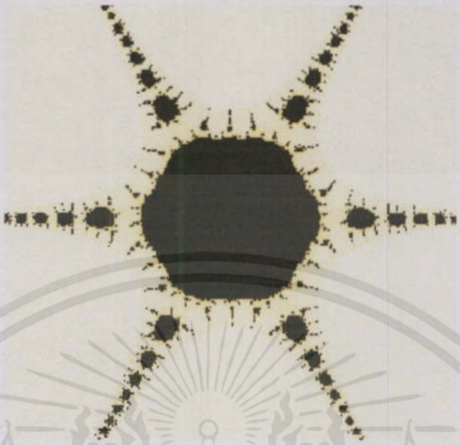
และในการสร้างภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ n, c มีค่าเท่ากัน และ $\mu \in (0, \frac{\pi}{32}]$ ภาพของเซตที่ปรากฏบนระนาบจะมีลักษณะรูปแบบคล้ายกันแสดงได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

การทดลองที่ 3.17 แสดงการสร้างภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ บนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วงพิกัด $-2.5 \le x \le 2.5$, $-2.5 \le y \le 2.5$ และ $R(c) = 2.5\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = \frac{\pi}{2^{10}}$, $n = 3$ และ $c = 1.00 + 0.50i$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.25



รูปที่ 3.25 แสดงภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 1.00 + 0.50i$, $\mu = \frac{\pi}{2^{10}}$ และ $n = 3$

การทดลองที่ 3.21 แสดงการสร้างภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,z}$ สำหรับทุก ๆ จุด $z \in \mathbb{C}$ บนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วงพิกัด $-2.5 \le x \le 2.5$, $-2.5 \le y \le 2.5$ และ $R(c) = 2.5\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = \frac{\pi}{2^{1000}}$, $n = 3$ และ $c = 1.00 + 0.50i$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.26



รูปที่ 3.26 แสดงภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 1.00 + 0.50i$, $\mu = \frac{\pi}{2^{1000}}$ และ $n = 3$

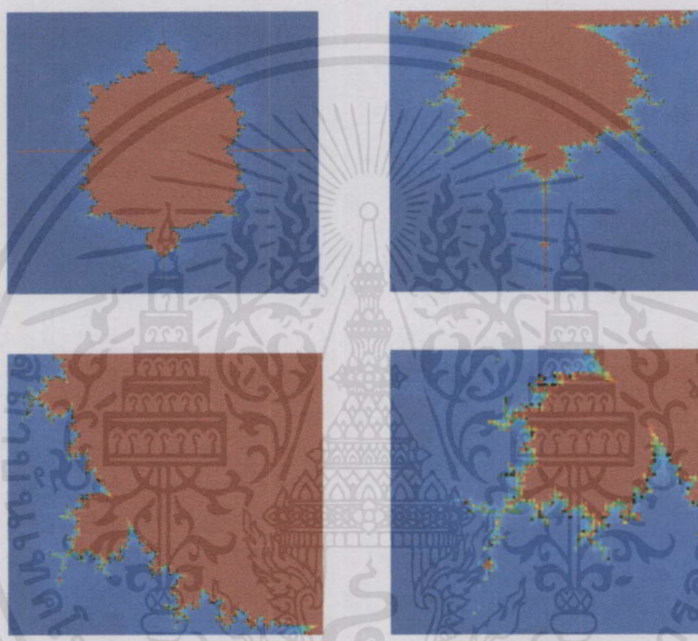
จากการทดลองทางด้านเรขภาพ (Computer Graphics) พบว่า การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^n + \mu)$, $\mu \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $n \ge 2$, $(n \in N)$ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ เมื่อ $\mu = \frac{\pi}{2}$ (ค่ามากที่สุด) จะมีขนาดประมาณ $\sqrt{2}$ แต่ไม่เกิน 2 ซึ่งเป็นภาพที่เล็กที่สุด และเมื่อ μ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ จะมีขนาดใหญ่มาก และยิ่งเข้าใกล้ศูนย์มาก ๆ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบก็ยิ่งใหญ่ขึ้นเรื่อย ๆ และถ้าอัตราการเพิ่มขึ้นของค่ามุมของฟังก์ชันอยู่ในรูปของ $\mu = \frac{\pi}{2^i}$, $(i \in N)$
หรือ ถ้าค่า μ มีค่าลดลงที่ละครึ่งจนเข้าใกล้ศูนย์ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบจะใหญ่ขึ้นในรูป $(\sqrt{2})^i$ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. ถ้าเลือกค่า μ ที่ใกล้ศูนย์มาก ๆ แล้วขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีขนาดใหญ่
2. ถ้าเลือกค่า $\mu = \frac{\pi}{2}$ (ค่ามากที่สุด) แล้วขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีขนาดเล็ก
3. ในการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อเลือกค่า $\mu \in (0, \pi/32]$ และ n มีค่าเท่ากัน ภาพแฟรคตอลที่ได้จะมีรูปแบบเดียวกัน
4. ค่า n เป็นตัวกำหนดจำนวนแกนภาพ และเมื่อค่า $\mu \in [\pi/3, \pi/2]$ จำนวนแกนภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะเกิดเป็น 2 เท่า หรือ 2n

3.7 ความคล้ายกันในตัวของภาพแฟรคตอล f(z)

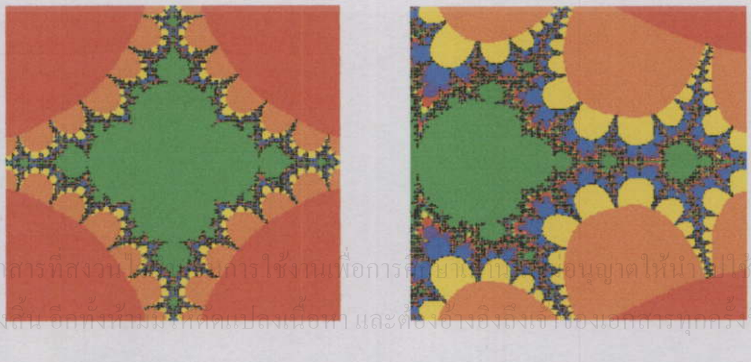
ภาพของฟังก์ชันที่สร้างจากกระบวนการทำซ้ำ จะมีความคล้ายกันในตัว โดยที่ลักษณะของภาพไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การปรับมาตราส่วน และภาพที่มีความซับซ้อนไม่สามารถมองเห็นรายละเอียดภายในได้ชัดเจน จะแสดงความคล้ายกันในตัวของภาพด้วยการปรับขยายบริเวณ ส่วนต่าง ๆ บนภาพ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.4 แสดงความคล้ายกันในตัวของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 0.10,\ n = 2$



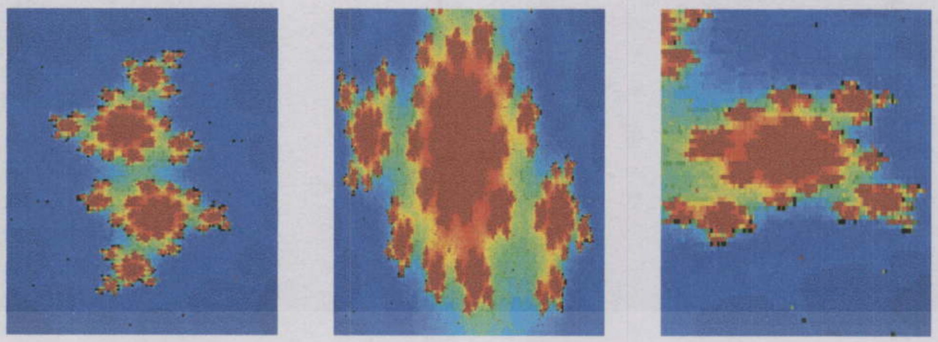
รูปที่ 3.27 แสดงการปรับขยายภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 0.10,\ n = 2$

ตัวอย่างที่ 3.5 แสดงความคล้ายกันในตัวของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 1.57,\ n = 2$



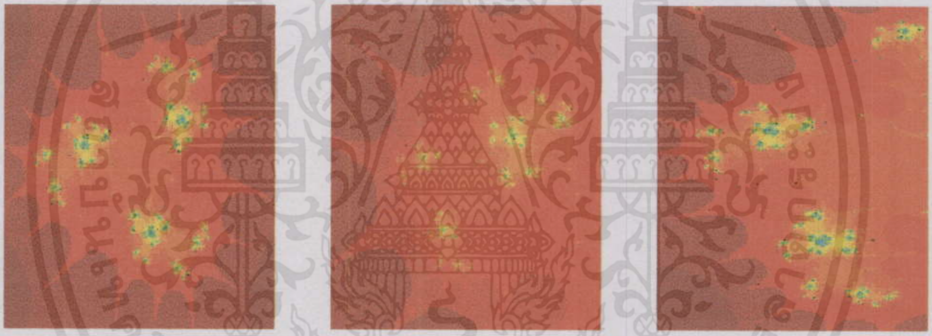
รูปที่ 3.28 แสดงการปรับขยายภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 1.57,\ n = 2$

ตัวอย่างที่ 3.6 แสดงความคล้ายกันในตัวของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = -1.50 + 2.30i$,



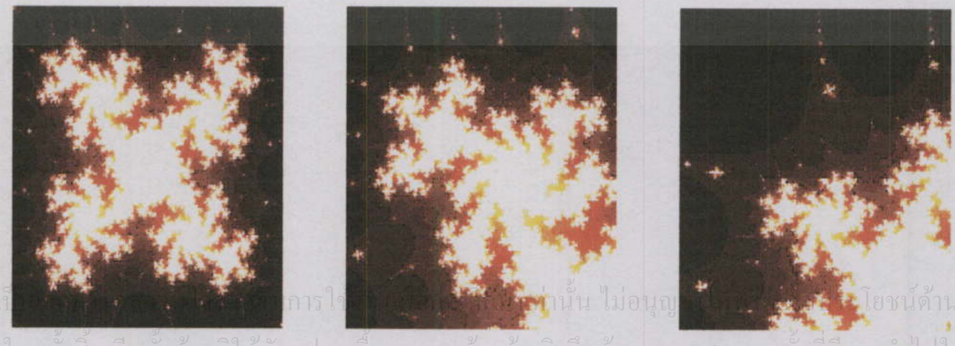
รูปที่ 3.29 แสดงการปรับขยายภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = -1.50 + 2.30i$, $\mu = 0.10$, $n = 2$

ตัวอย่างที่ 3.7 แสดงความคล้ายกันในตัวของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = -2.00 + 1.70i$



รูปที่ 3.30 แสดงการปรับขยายภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = -2.00 + 1.70i$, $\mu = 0.20$, $n = 3$

ตัวอย่างที่ 3.8 แสดงความคล้ายกันในตัวของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 0.80 - 1.5i$,



รูปที่ 3.31 แสดงการปรับขยายภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 0.80 - 1.5i$, $\mu = 0.20$, $n = 4$

3.8 ภาพเซตต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน f(z)

ภาพเซตของฟังก์ชัน เป็นเซตต่อเนื่อง หรือ ไม่ต่อเนื่อง พิจารณาดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม 3.6 เซตต่อเนื่อง คือ เซตที่ไม่สามารถแบ่งแยกเป็น 2 ส่วนได้ หรือ เซตที่ไม่มีเซตย่อย

นิยาม 3.7 เซตไม่ต่อเนื่อง คือ เซตที่สามารถแบ่งแยกเป็นส่วนต่าง ๆ ได้

นิยาม 3.8 เซตที่ประกอบด้วยจุดเดี่ยว ๆ ต่อเนื่องกัน จะเรียกว่า ทุก ๆ ส่วนไม่ต่อเนื่อง (Totally Disconnected)

นิยาม 3.9 เซตจำกัดของจุดใด ๆ และไม่จำกัดของจุด คือ ทุก ๆ ส่วนไม่ต่อเนื่อง

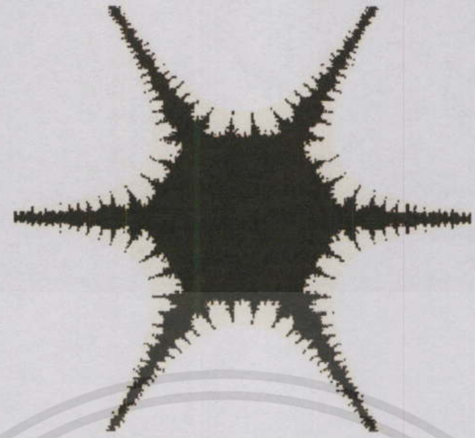
นิยาม 3.10 เซตย่อย S บนระนาบเชิงซ้อน จะเรียกว่า ทุก ๆ ส่วนไม่ต่อเนื่อง ถ้าทุก ๆ จุด $z \in S$ มีจำนวนจริงไม่เป็นลบ ε_z ซึ่ง $|z - w| > \varepsilon_z$ สำหรับทุก ๆ จุด $w \in S$

ตัวอย่างที่ 3.9 ภาพไม่ต่อเนื่องของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 1.50 + 1.50i$, $\mu = 0.20$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.32

รูปที่ 3.32 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ ไม่ต่อเนื่อง เมื่อ $c = 1.50 + 1.50i$, $\mu = 0.20$, $n = 2$

จากรูปที่ 3.32 จะเห็นได้ว่า ภาพของเซต $P_{f,z}$ เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง (บริเวณพื้นที่สีน้ำเงิน) เนื่องจากสามารถแบ่งภาพของเซตออกเป็นส่วนต่าง ๆ ได้

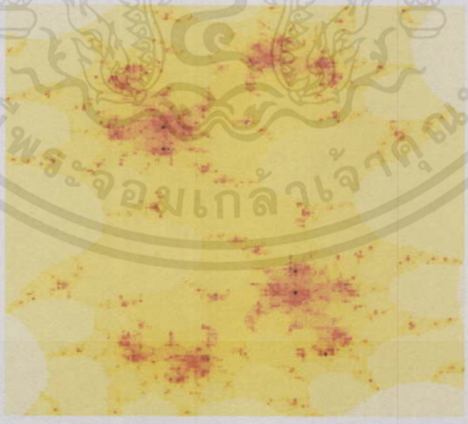
ตัวอย่างที่ 3.10 ภาพต่อเนื่องของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 0.50 + 0.85i$, $\mu = 0.20$, $n = 3$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.33



รูปที่ 3.33 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ ต่อเนื่อง เมื่อ $c = 0.50 + 0.85i$, $\mu = 0.20$, $n = 3$

จากรูปที่ 3.33 จะเห็นได้ว่า ภาพของเซต $P_{f,z}$ เป็นเซตต่อเนื่อง (บริเวณพื้นที่สีดำ) เนื่องจากภาพของเซตไม่สามารถแบ่งเป็น 2 ส่วนได้

ตัวอย่างที่ 3.11 ภาพไม่ต่อเนื่องของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 2.00 + 0.75i$, $\mu = 0.20$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 3.34



รูปที่ 3.34 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ ไม่ต่อเนื่อง เมื่อ $c = 2.00 + 0.75i$, $\mu = 0.20$, $n = 2$

จากรูปที่ 3.34 จะเห็นได้ว่า ภาพของเซต $P_{f,z}$ เป็นเซตไม่ต่อเนื่อง (บริเวณพื้นที่สีแดง) เนื่องจากสามารถแบ่งภาพของเซตออกเป็นส่วนต่าง ๆ ได้

จากการทดลองสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) พบว่า ในการสร้างภาพของเซต $P_{f,0}$ กับภาพของเซต $P_{f,z}$ มีขั้นตอนการสร้างภาพคล้ายกันภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดต่างกัน และสามารถวิเคราะห์ทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อนที่นำมาสร้างภาพแฟรคตอลได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดในบทต่อไป

บทที่ 4

การวิเคราะห์ภาพเชิงตัวเลข

ในบทนี้ ได้แสดงการวิเคราะห์ลักษณะภาพของเซต $P_{f,0}$ และเซต $P_{f,z}$ โดยพิจารณาจุดบนระนาบเชิงซ้อนที่อยู่ภายในและภายนอกเซต ด้วยการเปรียบเทียบลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้นที่ต่างกันของการทำซ้ำฟังก์ชัน f(z) ว่าเป็นลำดับมีขอบเขต หรือ ไม่มีขอบเขตภายในวงกลมที่หมุนรอบจุดกำเนิด และกำหนดสีของจุดบนภาพแฟรคตอลต่างกัน ตามเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด ดังนี้

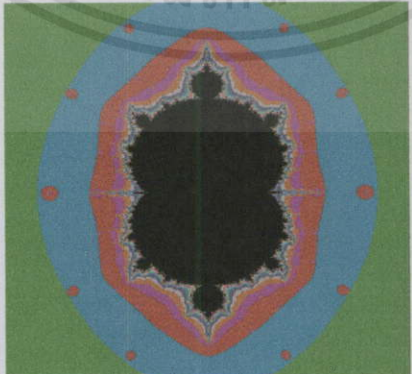
4.1 การวิเคราะห์ภาพของเซต $P_{f,0}$ พิจารณาดังนี้

4.1.1 ถ้า $|z| \le r$ แล้วค่าของ z จะไม่ลู่ไปสู่อนันต์ สรุปได้ว่า $c \in P_{f,0}$ ซึ่งภาพจะแสดงทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อนที่อยู่ภายในเซต $P_{f,0}$ ด้วยการกำหนดสีเดียวกันทั้งหมด

4.1.2 ถ้า $|z| > r$ แล้วค่าของ z จะลู่ไปสู่อนันต์ สรุปได้ว่า $c \notin P_{f,0}$ ซึ่งการแสดงสีของจุดบนภาพที่อยู่นอกเซตจะขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งมากที่สุดของการทำซ้ำที่ค่าของ z ลู่ไปสู่อนันต์ หรือ $|z| > r$

โดยที่ $r = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$

ตัวอย่างที่ 4.1 การสร้างภาพของฟังก์ชัน f(z) สำหรับทุกจุดบนระนาบเชิงซ้อน ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$ และ $r = 3\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 0.20$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 0.20$, $n = 2$

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นได้ว่า ภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) แบ่งบริเวณสีของจุดบนภาพต่าง ๆ กันตามเงื่อนไขที่กำหนด พิจารณาดังนี้

พิจารณาจุดเริ่มต้น $c_1 = 0.75 + 0.50i$, $c_2 = -1.00 + 0.75i$, $c_3 = 0.50 - 1.30i$ ในการทำซ้ำฟังก์ชัน f(z) เมื่อ $z_0 = 0$ ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 แสดงลำดับวนรอบจุด c_1, c_2, c_3 ของฟังก์ชัน f(z) เมื่อ $\mu = 0.20$, $n = 2$

ลำดับที่	$c_1 = 0.7500 + 0.5000i$		$c_2 = -1.0000 + 0.7500i$		$c_3 = 0.5000 - 1.3000i$	
	z	|z|	z	|z|	z	|z|
1	0.1490 + 0.0993i	0.1791	-0.1987 + 0.1490i	0.2483	0.0993 - 0.2583i	0.2767
2	0.1437 + 0.1271i	0.1918	-0.1726 + 0.2198i	0.2794	0.0054 - 0.2111i	0.2112
3	0.1345 + 0.1284i	0.1860	-0.1250 + 0.2104i	0.2447	0.0745 - 0.2024i	0.2157
4	0.1333 + 0.1256i	0.1832	-0.1319 + 0.1799i	0.2230	0.0433 - 0.2280i	0.2320
5	0.1342 + 0.1250i	0.1834	-0.1492 + 0.1848i	0.2375	0.0493 - 0.2039i	0.2098
6	0.1344 + 0.1252i	0.1837	-0.1466 + 0.1947i	0.2437	0.0543 - 0.2182i	0.2248
7	0.1344 + 0.1253i	0.1837	-0.1408 + 0.1933i	0.2391	0.0470 - 0.2129i	0.2180
8	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1415 + 0.1898i	0.2368	0.0525 - 0.2130i	0.2194
9	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1436 + 0.1903i	0.2384	0.0497 - 0.2148i	0.2205
10	0.1344 + 0.1252i	0.1837	-0.1433 + 0.1915i	0.2392	0.0504 - 0.2130i	0.2189
11	0.1344 + 0.1253i	0.1837	-0.1426 + 0.1913i	0.2386	0.0507 - 0.2142i	0.2201
12	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1427 + 0.1909i	0.2384	0.0502 - 0.2137i	0.2195
13	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1430 + 0.1910i	0.2385	0.0506 - 0.2137i	0.2196
14	0.1344 + 0.1252i	0.1837	-0.1429 + 0.1911i	0.2386	0.0504 - 0.2138i	0.2197
15	0.1344 + 0.1253i	0.1837	-0.1428 + 0.1911i	0.2386	0.0504 - 0.2137i	0.2196
16	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1429 + 0.1910i	0.2385	0.0505 - 0.2138i	0.2197
17	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1429 + 0.1910i	0.2386	0.0504 - 0.2138i	0.2196
18	0.1344 + 0.1252i	0.1837	-0.1429 + 0.1911i	0.2386	0.0504 - 0.2138i	0.2196
19	0.1344 + 0.1253i	0.1837	-0.1429 + 0.1911i	0.2386	0.0504 - 0.2138i	0.2196
20	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1429 + 0.1911i	0.2386	0.0504 - 0.2138i	0.2196
21	0.1343 + 0.1253i	0.1837	-0.1429 + 0.1911i	0.2386	0.0504 - 0.2138i	0.2196
...	...	...	...	...	...	...

หมายเหตุ การคำนวณค่าของลำดับวนรอบจุด z_0 ใด ๆ ของฟังก์ชัน f(z) แสดงได้ดังภาคผนวก จ

จากตารางที่ 4.1 จะเห็นได้ว่า ในการทำซ้ำฟังก์ชัน f(z) แต่ละครั้ง $|z| < 3\sqrt{2}$ และเมื่อจำนวน

ครั้งของการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้น ค่าของฟังก์ชันจะเสถียรซึ่งไม่ลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น c_1, c_2, c_3 เป็นลำดับที่มีขอบเขต สรุปได้ว่า $c_1, c_2, c_3 \in P_{f,0}$ และบริเวณสีของจุด c_1, c_2, c_3 บนภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำ เป็นต้น

พิจารณาจุดเริ่มต้น $c_4 = 1.50 + 0.50i$, $c_5 = 1.70 + 1.35i$, $c_6 = 2.00 - 0.75i$ ในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ $z_0 = 0$ ดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 แสดงลำดับวนรอบจุด c_4, c_5, c_6 ของฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ $\mu = 0.20$, $n = 2$

ลำดับที่	$c_4 = 1.5000 + 0.5000i$		$c_5 = 1.7000 + 1.3500i$		$c_6 = 2.0000 - 0.7500i$	
	z	$\lvert z\rvert$	z	$\lvert z\rvert$	z	$\lvert z\rvert$
1	0.2980 + 0.0993i	0.3141	0.3377 + 0.2682i	0.4313	0.3973 + 0.1490i	0.4244
2	0.3853 + 0.2233i	0.4453	0.1756 + 0.6297i	0.6537	0.5794 + 0.4729i	0.7479
3	0.3651 + 0.3972i	0.5395	-0.5840 + 0.1457i	0.6019	0.2975 + 1.3618i	1.3939
4	0.1283 + 0.5254i	0.5408	1.0571 + 0.4280i	1.1404	-2.6966 - 1.0012i	2.8765
5	-0.1576 + 0.1724i	0.2336	1.6256 + 2.5020i	2.9838	-40.630 +232.89i	236.4108
6	0.3179 + 0.0171i	0.3184	3005.6 –2162.7i	3702.9		
7	0.4392 + 0.1637i	0.4687				
8	0.4752 + 0.3829i	0.6103				
9	0.2622 + 0.6835i	0.7321				
10	-0.4943 + 0.4335i	0.6575				
11	0.6296 – 0.5024i	0.8055				
12	0.9286 – 0.7508i	1.1941				
13	2.3663 – 1.9807i	3.0859				
14	7538.8 +5463.3i	9310.3				

จากตารางที่ 4.2 จะเห็นได้ว่า ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้นในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$ ค่าของฟังก์ชันจะลู่ไปสู่อนันต์ เมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มขึ้น และการกำหนดสีของจุดเริ่มต้นบนภาพของเซต $P_{f,0}$ ขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งมากที่สุดของการทำซ้ำซึ่ง $|z| > 3\sqrt{2}$ ดังนี้

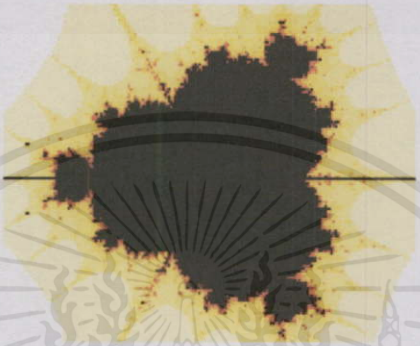
ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น $c_4 = 1.50 + 0.50i$ ในการทำซ้ำครั้งที่ 14 ค่าของฟังก์ชันจะลู่ไปสู่อนันต์ และสีของจุดบนภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีเหลืองของรูปที่ 4.1

ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น $c_5 = 1.70 + 1.35i$ ในการทำซ้ำครั้งที่ 6 ค่าของฟังก์ชันจะลู่ไปสู่อนันต์ และสีของจุดบนภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีน้ำตาลของรูปที่ 4.1

ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น $c_6 = 2.00 - 0.75i$ ในการทำซ้ำครั้งที่ 5 ค่าของฟังก์ชันจะลู่ไปสู่อนันต์ และสีของจุดบนภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่ม่วงแดงของรูปที่ 4.1

นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น c_4, c_5, c_6 เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต สรุปได้ว่า c_4, c_5, c_6 เป็นจุดเริ่มต้นที่อยู่ภายนอกเซต $P_{f,0}$ หรือ $c_4, c_5, c_6 \in E_c$

ตัวอย่างที่ 4.2 การสร้างภาพของฟังก์ชัน f(z) สำหรับทุกจุดบนระนาบเชิงซ้อนซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-3 \le x \le 3$, $-3 \le y \le 3$ และ $r = 3\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 0.40$, $n = 3$ จะมีภาพดังรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงภาพของเซต $P_{f,0}$ เมื่อ $\mu = 0.40$, $n = 3$

จากรูปที่ 4.2 ภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน f(z) แบ่งบริเวณสีของจุดบนภาพต่าง ๆ กัน ตามเงื่อนไขที่กำหนด พิจารณาดังนี้

พิจารณาจุดเริ่มต้น $c_1 = 1.30 - 1.30i$, $c_2 = 1.50 - 1.75i$, $c_3 = 2.00 + 0.50i$ ในการทำซ้ำฟังก์ชัน f(z) เมื่อ $z_0 = 0$ ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 แสดงลำดับวนรอบจุด c_1, c_2, c_3 ของฟังก์ชัน f(z) เมื่อ $\mu = 0.40$, $n = 3$

ลำดับที่	$c_1 = 1.3000 - 1.3000i$		$c_2 = 1.5000 - 1.7500i$		$c_3 = 2.0000 + 0.5000i$	
	z	|z|	z	|z|	z	|z|
1	0.5062 – 0.5062i	0.7159	0.5841 – 0.6815i	0.8976	0.7788 + 0.1947i	0.8028
2	-0.1495 – 0.5260i	0.5468	-1.0103 – 0.1722i	1.0249	1.3725 + 0.8758i	1.6281
3	0.7753 – 0.5262i	0.9370	-1.7000 + 0.3253i	1.7308	-30.1326 +67.9016i	74.2872
4	-0.7478 – 1.5155i	1.6899	-0.5014 –18.6816i	18.6883		
5	-1.1718 + 2.3229i	2.6017				
6	-17.0228 + 5.3970i	17.8579				

จากตารางที่ 4.3 จะเห็นได้ว่า ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้นในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$ ค่าของฟังก์ชัน $|z| > 3\sqrt{2}$ หรือ $|z_k| \to \infty$ เมื่อ $k \to \infty$ นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น c_1, c_2, c_3 เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต สรุปได้ว่า $c_1, c_2, c_3 \notin P_{f,0}$ และบริเวณสีของจุด c_1, c_2, c_3 บนภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีเหลืองของรูปที่ 4.2 เป็นต้น

พิจารณาจุดเริ่มต้น $c_4 = -0.50 - 0.75i$, $c_5 = 0.75 - 1.00i$, $c_6 = 1.00 + 0.50i$ ในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ $z_0 = 0$ ดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 แสดงลำดับวนรอบจุด c_4, c_5, c_6 ของฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ $\mu = 0.40$, $n = 3$

ลำดับที่	$c_4 = -0.5000 - 0.7500i$		$c_5 = 0.7500 - 1.0000i$		$c_6 = 1.0000 + 0.5000i$	
	z	$\|z\|$	z	$\|z\|$	z	$\|z\|$
1	-0.1947 – 0.2921i	0.3510	0.2921 – 0.3894i	0.4868	0.3894 + 0.1947i	0.4354
2	-0.2197 – 0.3174i	0.3860	0.1772 – 0.3173i	0.3634	0.3671 + 0.2765i	0.4596
3	-0.2295 – 0.3239i	0.3970	0.2605 – 0.3434i	0.4310	0.3163 + 0.2641i	0.4120
4	-0.2336 – 0.3254i	0.4006	0.2121 – 0.3409i	0.4015	0.3296 + 0.2359i	0.4053
5	-0.2353 – 0.3256i	0.4017	0.2410 – 0.3339i	0.4118	0.3428 + 0.2454i	0.4216
6	-0.2360 – 0.3255i	0.4020	0.2257 – 0.3422i	0.4099	0.3370 + 0.2519i	0.4207
7	-0.2362 – 0.3254i	0.4021	0.2331 – 0.3348i	0.4080	0.3338 + 0.2482i	0.4160
8	-0.2363 – 0.3253i	0.4021	0.2300 – 0.3402i	0.4107	0.3361 + 0.2468i	0.4170
9	-0.2363 – 0.3253i	0.4020	0.2309 – 0.3366i	0.4082	0.3367 + 0.2481i	0.4182
10	-0.2363 – 0.3253i	0.4020	0.2310 – 0.3388i	0.4100	0.3359 + 0.2483i	0.4177
11	-0.2363 – 0.3253i	0.4020	0.2306 – 0.3376i	0.4088	0.3358 + 0.2479i	0.4174
12	-0.2363 – 0.3252i	0.4020	0.2310 – 0.3382i	0.4096	0.3361 + 0.2479i	0.4176
13	-0.2363 – 0.3252i	0.4020	0.2306 – 0.3379i	0.4091	0.3361 + 0.2480i	0.4177
14	-0.2363 – 0.3253i	0.4020	0.2309 – 0.3380i	0.4094	0.3360 + 0.2480i	0.4176
15	-0.2363 – 0.3253i	0.4020	0.2307 – 0.3380i	0.4092	0.3360 + 0.2480i	0.4176
16	-0.2363 – 0.3253i	0.4020	0.2308 – 0.3380i	0.4093	0.3360 + 0.2480i	0.4176
17	-0.2363 – 0.3252i	0.4020	0.2308 – 0.3380i	0.4093	0.3360 + 0.2480i	0.4176
18	-0.2363 – 0.3252i	0.4020	0.2308 – 0.3380i	0.4093	0.3360 + 0.2480i	0.4176
19	-0.2363 – 0.3253i	0.4020	0.2308 – 0.3380i	0.4093	0.3360 + 0.2480i	0.4176
20	-0.2363 – 0.3252i	0.4020	0.2308 – 0.3380i	0.4093	0.3360 + 0.2480i	0.4176
21	-0.2363 – 0.3252i	0.4020	0.2308 – 0.3380i	0.4093	0.3360 + 0.2480i	0.4176
…	…	…	…	…	…	…

จากตารางที่ 4.4 จะเห็นได้ว่า ในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$ แต่ละครั้ง $|z| < 3\sqrt{2}$ และเมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้น ค่าของฟังก์ชันจะเสถียรซึ่งจะไม่ลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น c_4, c_5, c_6 เป็นลำดับที่มีขอบเขต สรุปได้ว่า $c_4, c_5, c_6 \in P_{f,0}$ และบริเวณสีของจุด c_4, c_5, c_6 บนภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำของรูปที่ 4.2 เป็นต้น

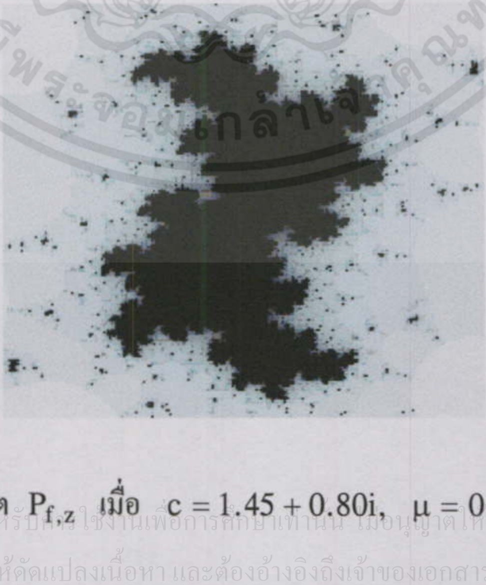
4.2 การวิเคราะห์ภาพของเซต $P_{f,z}$ พิจารณาดังนี้

4.2.1 ถ้า $|z| \le R(c)$ แล้วค่าของ z จะไม่ลู่ไปสู่อนันต์ สรุปได้ว่า $z \in P_{f,z}$ ซึ่งภาพจะแสดงทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อนที่อยู่ภายในเซต $P_{f,z}$ ด้วยการกำหนดสีเดียวกันทั้งหมด

4.2.2 ถ้า $|z| > R(c)$ แล้วค่าของ z จะลู่ไปสู่อนันต์ สรุปได้ว่า $z \notin P_{f,z}$ ซึ่งการแสดงสีของจุดบนภาพที่อยู่นอกเซต $P_{f,z}$ จะขึ้นอยู่กับจำนวนครั้งมากที่สุดของการทำซ้ำที่ค่าของ z ลู่ไปสู่อนันต์ หรือ $|z| > R(c)$

โดยที่ $R(c) = \max(|c|, r)$, $r = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}$

ตัวอย่างที่ 4.3 การสร้างภาพของฟังก์ชัน $f(z)$ สำหรับทุกจุดบนระนาบเชิงซ้อน ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 1.66$ เมื่อ $\mu = 0.20$, $c = 1.45 + 0.80i$, $n = 2$ จะมีภาพดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 1.45 + 0.80i$, $\mu = 0.20$, $n = 2$

จากรูปที่ 4.3 ภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ แบ่งบริเวณสีของภาพต่างกัน ซึ่งสามารถวิเคราะห์จุดบนภาพของเซต $P_{f,z}$ ดังนี้

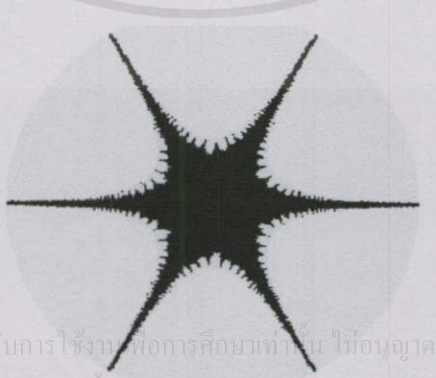
พิจารณาลำดับการทำซ้ำของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.50 - 0.50i$ และ $z_0 = -0.45 + 0.45i$ ของฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ $c = 1.45 + 0.80i$, $\mu = 0.20$, $n = 2$ ดังตารางที่ 4.5

ตารางที่ 4.5 แสดงลำดับการทำซ้ำของจุด z_0 เมื่อ $c = 1.45 + 0.80i$, $\mu = 0.20$, $n = 2$ ของฟังก์ชัน $f(z)$

	ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 0.50 - 0.50i$			ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = -0.45 + 0.45i$		
z	x	y	$\lvert z\rvert$	x	y	$\lvert z\rvert$
z_0	0.5000	-0.5000	0.7071	-0.4500	0.4500	0.6364
z_1	0.7334	- 0.5613	0.9235	0.6383	- 0.4193	0.7637
z_2	1.4791	- 0.7700	1.6676	1.1034	- 0.3552	1.1592
z_3	6.1097	5.4004	8.1543	2.0357	0.6709	2.1434
z_4	3.7734e+028	-2.2878e+026	3.7735e+028	-3.1733	-12.3078	12.7103
z_5				2.3446e+033	-6.5363e+033	6.9441e+033

จากตารางที่ 4.5 จะเห็นได้ว่า การทำซ้ำครั้งที่ 5 ของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.50 - 0.50i$ และการทำซ้ำครั้งที่ 4 ของจุดเริ่มต้น $z_0 = -0.45 + 0.45i$ ค่าของฟังก์ชัน $|z| > R(c)$ และ $|z_k| \to \infty$ เมื่อ $k \to \infty$ นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น z_0 เป็นลำดับไม่มีขอบเขต สรุปได้ว่า จุดเริ่มต้น $z_0 = 0.50 - 0.50i$ และ $z_0 = -0.45 + 0.45i$ อยู่ภายนอกเซต $P_{f,z}$ หรือ $z_0 \in E_c$ ซึ่งบริเวณสีของจุดเริ่มต้น z_0 บนภาพของเซต $P_{f,z}$ คือ บริเวณพื้นที่สีเทาอ่อนของรูปที่ 4.3 เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 4.4 การสร้างภาพของฟังก์ชัน $f(z)$ สำหรับทุกจุดบนระนาบเชิงซ้อน ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-4 \le x \le 4$, $-4 \le y \le 4$ และ $R(c) = 4\sqrt{2}$ เมื่อ $\mu = 1.57$, $c = 0.50 - 0.50i$, $n = 3$ จะมีภาพดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 0.50 - 0.50i$, $\mu = 1.57$, $n = 3$

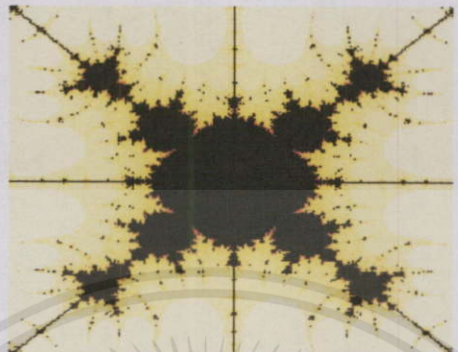
จากรูปที่ 4.4 พิจารณาลำดับการทำซ้ำของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.75 + 0.75i$, $z_0 = 1.00 + 0.50i$ ของฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ $c = 0.50 - 0.50i$, $\mu = 1.57$, $n = 3$ ดังตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.6 แสดงลำดับการทำซ้ำของจุด z_0 เมื่อ $c = 0.50 - 0.50i$, $\mu = 1.57$, $n = 3$ ของฟังก์ชัน $f(z)$

	ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 0.75 + 0.75i$			ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 1.00 + 0.50i$		
z	x	y	$\lvert z \rvert$	x	y	$\lvert z \rvert$
z_0	0.7500	0.7500	1.0607	1.0000	0.5000	1.1180
z_1	0.8118	- 0.1039	0.8184	0.7903	- 1.2483	1.4774
z_2	0.4959	- 0.3958	0.6345	-0.5264	0.5503	0.7615
z_3	0.4973	- 0.5230	0.7216	0.4447	- 0.5409	0.7002
z_4	0.4595	- 0.5291	0.7008	0.4593	- 0.5080	0.6848
z_5	0.4609	- 0.5145	0.6907	0.4677	- 0.5167	0.6969
z_6	0.4655	- 0.5166	0.6954	0.4641	- 0.5186	0.6959
z_7	0.4644	- 0.5179	0.6956	0.4638	- 0.5172	0.6947
z_8	0.4641	- 0.5174	0.6950	0.4643	- 0.5173	0.6951
z_9	0.4642	- 0.5173	0.6951	0.4643	- 0.5174	0.6952
z_{10}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{11}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{12}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{13}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{14}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{15}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{16}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{17}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
z_{18}	0.4642	- 0.5174	0.6951	0.4642	- 0.5174	0.6951
...	...	...	...	...	...	...

จากตารางที่ 4.6 จะเห็นได้ว่า ในการทำซ้ำฟังก์ชัน $f(z)$ ของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.75 + 0.75i$ และ $z_0 = 1.00 + 0.50i$ ค่าของฟังก์ชัน $\lvert z \rvert < R(c)$ และเมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มขึ้น ค่าของฟังก์ชันจะไม่ลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.75 + 0.75i$ และ $z_0 = 1.00 + 0.50i$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต สรุปได้ว่า จุดเริ่มต้น $z_0 \in P_{f,z}$ และบริเวณสีของจุดเริ่มต้น z_0 บนภาพของเซต $P_{f,z}$ คือ บริเวณพื้นที่สีดำของรูปที่ 4.4 เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 4.5 การสร้างภาพของฟังก์ชัน $f(z)$ สำหรับทุกจุดบนระนาบเชิงซ้อน ซึ่งกำหนดพิกัดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ในช่วง $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ และ $R(c) = 1.90$ เมื่อ $\mu = 0.50$, $c = 1.35 + 1.35i$, $n = 4$ จะมีภาพดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 แสดงภาพของเซต $P_{f,z}$ เมื่อ $c = 1.35 + 1.35i$, $\mu = 0.50$, $n = 4$

จากรูปที่ 4.5 ภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ แบ่งบริเวณสีของจุดบนภาพต่างกันซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนด พิจารณาดังนี้

พิจารณาลำดับการทำซ้ำจุดเริ่มต้น $z_0 = 0.30 + 0.45i$ และ $z_0 = 0.55 + 0.40i$ ของฟังก์ชัน $f(z)$ เมื่อ $c = 1.35 + 1.35i$, $\mu = 0.50$, $n = 4$ ดังตารางที่ 4.7

ตารางที่ 4.7 แสดงลำดับการทำซ้ำของจุด z_0 เมื่อ $c = 1.35 + 1.35i$, $\mu = 0.50$, $n = 4$ ของฟังก์ชัน $f(z)$

	ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 0.30 + 0.45i$			ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 0.55 + 0.40i$		
z	x	y	$\lvert z \rvert$	x	y	$\lvert z \rvert$
z_0	0.3000	0.4500	0.5701	0.5500	0.4000	0.9500
z_1	0.6500	0.5015	0.8210	0.2759	0.5974	0.6580
z_2	-0.1581	0.4457	0.4730	0.8462	0.3980I	0.9351
z_3	0.6025	0.7179	0.9372	-0.4305	1.6536	1.7087
z_4	0.0392	- 0.6627	0.6638	-1.1707e+003	-6.8190e+002	1.3548e+003
z_5	0.8116	0.9064	1.2166			
z_6	-1.5496	- 1.4597	2.1288			
z_7	-10.6971	- 2.8727	11.0762			

จากตารางที่ 4.7 จะเห็นได้ว่า ลำดับการทำซ้ำของจุด $z_0 = 0.30 + 0.45i$, $z_0 = 0.55 + 0.40i$ ของฟังก์ชัน $f(z)$ ค่าของฟังก์ชัน $\lvert z \rvert > R(c)$ และเมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มขึ้น ค่าของ

ฟังก์ชันจะลู่ไปสู่อนันต์ นั่นคือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น z_0 เป็นลำดับไม่มีขอบเขต สรุปได้ว่า $z_0 \notin P_{f,z}$ หรือ $z_0 \in E_c$ และบริเวณสีของจุดเริ่มต้น z_0 บนภาพของเซต $P_{f,z}$ คือ บริเวณพื้นที่สีเหลืองของรูปที่ 4.5 เป็นต้น

ดังนั้น การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ สำหรับทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน เมื่อจุดเริ่มต้น z_0 ของการทำซ้ำฟังก์ชันอยู่ภายนอกบริเวณขอบเขตที่กำหนด ค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำจะไม่มีขอบเขต หรือ ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น z_0 ลู่ไปสู่อนันต์

ข้อสังเกต จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเปรียบเทียบลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้นที่ต่างกัน พบว่า ถ้าสมาชิกใด ๆ ของลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น มีค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำมากกว่า 4 ($|z_k| > 4$) และค่าของฟังก์ชันจะลู่ไปลู่อนันต์ เมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ($|z_k| \to \infty$ เมื่อ $k \to \infty$) แล้ว ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต นั่นคือ ถ้า $|z_k| > 4$ แล้ว $f(z) \to \infty$ เมื่อ $k \to \infty$ พิจารณาดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.6 พิจารณาลำดับการทำซ้ำของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^2 + \frac{\pi}{2})$, $(c, z \in \mathbb{C})$ เมื่อกำหนด $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $c_1 = 0.50 - 0.50i$, $c_2 = 0.60 - 0.75i$ ดังตารางที่ 4.8

ตารางที่ 4.8 แสดงลำดับการทำซ้ำของจุด c เริ่มต้นของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^2 + \frac{\pi}{2})$

ลำดับที่	$c_1 = 0.5000 - 0.5000i$		$c_2 = 0.6000 - 0.7500i$	
	z	$\lvert z \rvert$	z	$\lvert z \rvert$
1	0.5000 - 0.5000i	0.7071	0.6000 - 0.7500i	0.9605
2	0.5638 - 0.5638i	0.7974	0.6874 - 1.1767i	1.3628
3	0.6045 - 0.6045i	0.8549	-0.4742 - 2.3521i	2.3994
4	0.6396 - 0.6396i	0.9045	-1.2735 - 4.2632i	4.4493
5	0.6769 - 0.6769i	0.9573	-24929.0000+1279.0000i	24961.0000
6	0.7250 - 0.7250i	1.0253	Inf	Inf
7	0.8027 - 0.8027i	1.1352		
8	0.9759 - 0.9759i	1.3802		
9	1.7170 - 1.7170i	2.4281		
10	90.8857 –90.8857i	128.5318		
11	Inf	Inf		

หมายเหตุ Inf หมายถึง ค่าจำนวนเต็มบวกมากที่สุด ซึ่งคอมพิวเตอร์ไม่สามารถคำนวณได้ หรือ Inf แทน ค่าของฟังก์ชันซึ่งไม่นิยามในทางคณิตศาสตร์ในรูป $1.0/0.0$, $0.0/0.0$ และ $\infty - \infty$

จากตารางที่ 4.8 จะเห็นได้ว่า ลำดับวนรอบของจุด $c_1 = 0.50 - 0.50i$ ในการทำซ้ำครั้งที่ 10 ค่าของฟังก์ชันมีค่ามากกว่า 4 และลำดับวนรอบของจุด $c_2 = 0.60 - 0.75i$ ในการทำซ้ำครั้งที่ 4 ค่าของฟังก์ชันมีค่ามากกว่า 4 และเมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของฟังก์ชันจะลู่ไปสู่อนันต์ ดังนั้นลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้นซึ่งค่าของฟังก์ชันมากกว่า 4 เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

ตัวอย่างที่ 4.7 พิจารณาลำดับการทำซ้ำของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^3 + \frac{\pi}{2})$, $(c, z \in \mathbb{C})$ เมื่อกำหนด $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้น และ $c_1 = 0.75 + 0.50i$, $c_2 = 0.85 + 0.85i$ ดังตารางที่ 4.9

ตารางที่ 4.9 แสดงลำดับการทำซ้ำของจุด c เริ่มต้นของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^3 + \frac{\pi}{2})$

ลำดับที่	$c_1 = 0.7500 + 0.5000i$		$c_2 = 0.8500 + 0.8500i$	
	z	$\lvert z \rvert$	z	$\lvert z \rvert$
1	0.7500 + 0.5000i	0.9014	0.8500 + 0.8500i	1.2021
2	0.8880 + 0.7108i	1.1374	-0.7206 + 1.7793i	1.9197
3	0.6793 + 1.5889i	1.7280	5.9504 + 8.6970i	10.5378
4	-1.1981 + 2.4047i	2.6866	-1.9801e+115 +1.1183e+114i	1.9833e+115
5	10.9151 +11.2889i	15.7028	Inf	Inf
6	Inf	Inf		

จากตารางที่ 4.9 จะเห็นได้ว่า ลำดับวนรอบของจุด $c_1 = 0.75 + 0.50i$ ในการทำซ้ำครั้งที่ 5 ค่าของฟังก์ชันมีค่ามากกว่า 4 และลำดับวนรอบของจุด $c_2 = 0.85 + 0.85i$ ในการทำซ้ำครั้งที่ 3 ค่าของฟังก์ชันมีค่ามากกว่า 4 และเมื่อจำนวนครั้งของการทำซ้ำเพิ่มมากขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของฟังก์ชันจะลู่ไปสู่อนันต์ ดังนั้น ลำดับวนรอบของจุดเริ่มต้น ซึ่งค่าของฟังก์ชันมากกว่า 4 เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

ข้อสังเกต จากการทดลองสร้างภาพแฟรคตอลทางด้านเรขภาพ และการวิเคราะห์ภาพเชิงตัวเลขของฟังก์ชัน $f(z)$ พบว่า ภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,0}$ เป็นภาพเซตของทุก ๆ จุด c บนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ซึ่งค่าของฟังก์ชัน $|z_k| \le r$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ หรือ ระยะทางระหว่างจุดเริ่มต้นกับจุดกำเนิดไม่เกิน r โดยที่กำหนดขนาดของระนาบในการสร้างภาพน้อยกว่า หรือ เท่ากับ r นั่นคือ $|c| \le r$ ในทำนองเดียวกัน ภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,z}$ เป็นภาพเซตของทุก ๆ จุด z บน

ระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ ซึ่งค่าของฟังก์ชัน $|z_k| \le R(c)$, $k = 0,1,2,\ldots$ โดยที่กำหนดขนาดของระนาบในการสร้างภาพน้อยกว่า หรือ เท่ากับ $R(c)$ นั่นคือ $|c| \le R(c)$ และในการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ ค่า r และ $R(c)$ จะมีผลต่อการกำหนดสีของแต่ละจุดบนภาพตามจำนวนรอบสูงสุดของการทำซ้ำฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่กำหนด

บทที่ 5

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้ เป็นการกล่าวสรุปผลการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชันไซน์จากบทที่ 3 , 4 และข้อเสนอแนะที่เกี่ยวกับงานวิจัย

5.1 สรุปผลงานวิจัย

การกำหนดฟังก์ชันสำหรับสร้างภาพแฟรคตอลมีหลักการพิจารณาดังต่อไปนี้

1. เป็นฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน
2. เป็นฟังก์ชันที่มีจุดวิกฤติ
3. ค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำต้องไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด

ฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติครบทั้ง 3 ข้อจะสามารถสร้างภาพแฟรคตอลที่มีความสวยงามภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดได้ และจากการศึกษาพบว่า ภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นภาพที่สร้างจากทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อนด้วยการกำหนดสีของจุดบนภาพต่างกันโดยใช้หลักเอสเคปไทม ซึ่งแบ่งลักษณะการสร้างภาพแฟรคตอลได้ 2 รูปแบบ คือ ภาพของเซต $P_{f,0}$ และเซต $P_{f,z}$ ตามเงื่อนไขที่กำหนด ดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 เปรียบเทียบความแตกต่างระหว่างเซต $P_{f,0}$ และเซต $P_{f,z}$ ในการสร้างภาพแฟรคตอล

เซต $P_{f,0}$	เซต $P_{f,z}$
$f(z) = c\sin(z^n + \mu), 0 < \mu \le \frac{\pi}{2}, (n \in N)$	$f_c(z) = c\sin(z^n + \mu), 0 < \mu \le \frac{\pi}{2}, (n \in N)$
$c, (c \in \mathbb{C})$ เป็นค่าคงที่ใด ๆ	$c, (c \in \mathbb{C})$ เป็นค่าคงที่กำหนด
เมื่อ $z_0 = 0$ เป็นจุดเริ่มต้นคงที่	เมื่อ $z_0 = z$ เป็นจุดเริ่มต้นใด ๆ
ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ บริเวณทุกจุด $c \in \mathbb{C}$ ซึ่งลำดับการทำซ้ำวนรอบแต่ละจุด 0 มีขอบเขต นั่นคือ $0 \to f(0) \to f(f(0)) \to \cdots$ มีขอบเขต	ภาพของเซต $P_{f,z}$ คือ บริเวณทุกจุด $z \in \mathbb{C}$ ซึ่งลำดับการทำซ้ำวนรอบแต่ละจุด z มีขอบเขต นั่นคือ $z \to f_c(z) \to f_c(f_c(z)) \to \cdots$ มีขอบเขต

จากตารางที่ 5.1 จะเห็นได้ว่า การสร้างภาพแฟรคตอลของเซต $P_{f,0}$ และเซต $P_{f,z}$ จะกำหนดเงื่อนไขของจุดเริ่มต้น z_0 ในการทำซ้ำฟังก์ชันต่างกัน ซึ่งสามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างเซต $P_{f,0}$ และเซต $P_{f,z}$ ได้ดังนี้

1. รูปแบบภาพของเซต $P_{f,z}$ จะมีลักษณะภาพเฉพาะสำหรับแต่ละ c ที่กำหนด
2. ภาพของเซต $P_{f,z}$ เป็นเซตต่อเนื่อง เมื่อ c เป็นค่าคงที่กำหนดอยู่ภายในเซต $P_{f,0}$ และเป็นภาพเซตไม่ต่อเนื่อง เมื่อ c เป็นค่าคงที่กำหนดอยู่ภายนอกเซต $P_{f,0}$
3. ภาพของเซต $P_{f,0}$ คือ ภาพของเซต $P_{f,z}$ ต่อเนื่องทั้งหมด เมื่อ n, μ เท่ากัน

การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ สำหรับทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อนสามารถนำมาอธิบายและวิเคราะห์พฤติกรรมของจำนวนเชิงซ้อนและฟังก์ชันได้ โดยเปรียบเทียบลำดับการทำซ้ำของฟังก์ชันรอบจุดต่าง ๆ กัน

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการทดลองสร้างภาพแฟรคตอลของ $f(z)$ สำหรับทุกจุดบนระนาบ $\mathbb{C}$ เมื่อเลือกค่า μ เข้าใกล้ศูนย์มาก ๆ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีขนาดใหญ่ และเมื่อเลือกค่า $\mu = \frac{\pi}{2}$ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีขนาดเล็กประมาณ $\sqrt{2}$ แต่ไม่เกิน 2 และเมื่อค่า μ มีค่าลดลงทีละครึ่งจนใกล้ศูนย์ในรูป $\mu = \frac{\pi}{2^i}$, $(i \in N)$ ขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีขนาดใหญ่ขึ้นในรูป $(\sqrt{2})^i$ นั่นคือ ขนาดของระนาบ $\mathbb{C}$ จะมีผลต่อการสร้างภาพแฟรคตอลฟังก์ชัน $f(z)$ ซึ่งถ้ากำหนดขนาดของระนาบ $\mathbb{C}$ ไม่เหมาะสม เช่น กำหนดขนาดเล็ก หรือ ขนาดใหญ่เกินไป แล้วขนาดเซตของภาพที่ปรากฏบนระนาบ $\mathbb{C}$ อาจจะมีขนาดใหญ่ หรือมีขนาดเล็กกว่าระนาบที่กำหนดจนบางครั้งคล้ายกับไม่เกิดภาพแฟรคตอลใด ๆ เลย ดังนั้น การกำหนดขนาดของระนาบ $\mathbb{C}$ ที่ใช้ในการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ ที่มีความเป็นไปได้และเหมาะสมภายใต้เงื่อนที่กำหนด พิจารณาดังกรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^n + \frac{\pi}{2})$, $n \geq 2$ ที่สร้างจากทุก ๆ จุดบนระนาบ $\mathbb{C}$ และเมื่อกำหนดให้ z_0 ใด ๆ โดยที่ $|z_0| > 2$ แล้วค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำ $z_{k+1} = f(z_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ จะลู่ไปสู่อนันต์ หรือ ลำดับวนรอบจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต นั่นคือ $|z_k| \to \infty$ เมื่อ $k \to \infty$

กรณีที่ 2 การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z) = c\sin(z^n + \mu)$, $\mu \in (\frac{\pi}{2^i}, 0)$, $(i \in N)$ ที่สร้างจากทุก ๆ จุดบนระนาบ $\mathbb{C}$ เมื่อ $n = 2$ และกำหนดให้ z_0 ใด ๆ โดยที่ $|z_0| > (\sqrt{2})^i$ แล้วค่าของฟังก์ชันในการทำซ้ำ $z_{k+1} = f(z_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ จะลู่ไปสู่อนันต์ หรือ ลำดับวนรอบจุดเริ่มต้น z_0 ไม่มีขอบเขต นั่นคือ $|z_k| \to \infty$ เมื่อ $k \to \infty$ ในทำนองเดียวกัน

การสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ สำหรับทุก ๆ จุดบนระนาบเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ เมื่อเลือก $\mu = \frac{\pi}{2^i} \to 0$ และ n มีค่ามาก ๆ ขนาดภาพของเซตที่ปรากฏบนระนาบจะมีขนาดใหญ่ขึ้นในรูป $(\sqrt{2})^{i+1}$ และ $(\sqrt{2})^{i+2}$ เป็นต้น

ฟังก์ชันเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการสร้างภาพแฟรคตอลมีรูปแบบแตกต่างกันมากมาย ซึ่งแต่ละฟังก์ชันอาจจะใช้เงื่อนไขในการสร้างภาพเหมือน หรือ ต่างกัน ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมและความเป็นไปได้ของฟังก์ชันนั้น ๆ

ผู้ที่สนใจในทางด้านนี้ สามารถนำหลักการกำหนดฟังก์ชันไปประยุกต์ใช้ในการสร้างภาพแฟรคตอลรูปแบบอื่น ๆ ได้ หรือ อาจจะศึกษาการสร้างภาพแฟรคตอลของฟังก์ชัน $f(z)$ ในกรณีที่ค่า μ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $\mu = x + iy$, $(\mu \in \mathbb{C})$ ต่อไป

เอกสารอ้างอิง

[1] Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jurgens, Dietmar Saupe. **Chaos and Fractal : New Frontier of Science.** New York. Springer-Verlag, Inc. 1992.

[2] Barnsley, M. F. **Fractals Everywhere**. USA : Academic Press, Inc. 1988.

[3] Aaron Klebanoff. " **Pi in The Mandelbrot Set**." Dept. of Mathematics of Rose- Hulman Institute of Technology. 2001.

[4] Dale Winter. " **The Mandelbrot Set.** " Dept. of Mathematics of Michigan of University. 2000.

[5] Anna V.Tomova. " **The Mandelbrot Set for Julia Sets of Arbitrary Order.** " Complexity International. 2000.

[6] Amy M. Smith. **Basins of Roots and Periodicity in Newton's Method for Cubic Polynomials.** Thesis of Dept. of Mathematics of Davidson College. 2000.

[7] Frank Glaser, Andy J. Robles." **A Hyperpolar Image of The Mandelbrot Set.** " 1998.

[8] Michael Levin. " **Discontinuous and Alternate Q-system Fractals.**" Dept. of Biological and Biomedical Sciences of Harvard Medical School. 2000.

[9] Rainer Bruck. " **Geometric Properties of Julia Sets of The Composition of Polynomials of The form** $z^2 + c_n$." Pacific Journal of Mathematics , Vol. 198, No. 2, 2001. pp. 347-372.

[10] Lauwerier, H. A. **Fractals : Endlessly Repeated Geometrical Figures.** New Jersey, Princeton Press. 1991.

[11] V. I. Ivanov, M. K. Trubetskov. **Conformal Mapping.** CRC Press, Inc. 1994.

[12] Louis I. Gordon, Sim Lasher. **Complex Variables.** Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1963.

[13] Vasile I. Istratescu. **Fixed Point Theory.** Kluwer Boston, Inc. 1979.

[14] Walter Rudin. **Functional Analysis.** McGraw-Hill, Inc. 1991.

ภาคผนวก ก

ประวัติและความเป็นมาของแฟรคตอล

ก.1 ที่มาของแฟรคตอล

" แฟรคตอล " มาจาก " แฟรคตัส " ซึ่งเป็นคำคุณศัพท์ในภาษาลาติน แปลว่า การแตก และคำจำกัดดังกล่าว นิยามโดย บีนอต แมนเดลบรอท (Benoit Mandelbrot) บิดาของแฟรคตอลเชิงเรขาคณิต (Fractal Geometry) เมื่อปี ค.ศ. 1975

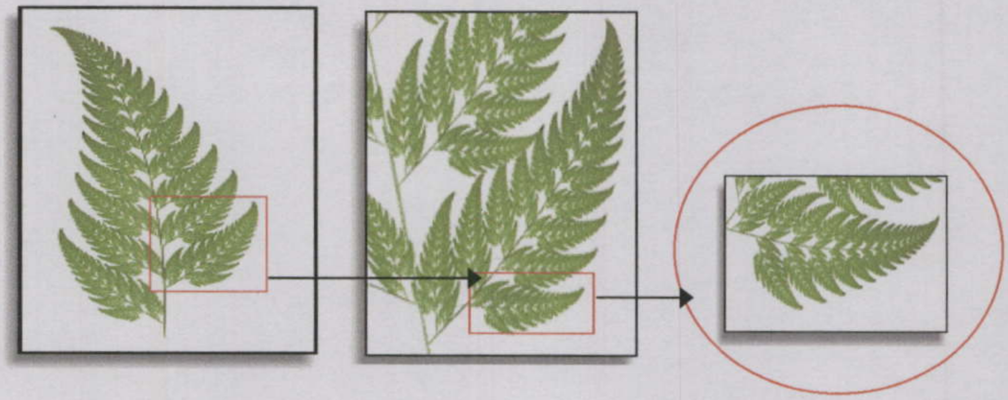
ก.2 ความหมายของแฟรคตอล

โดยทั่วไป แฟรคตอลเป็นรูปเชิงเรขาคณิตไม่ปกติที่เกิดจากกระบวนการทำซ้ำ หรือ กฎการเวียนบังเกิด (Recursive Law) โดยที่แต่ละมาตราส่วนของการทำซ้ำแต่ละครั้งขนาดจะลดลงเสมอ ซึ่งมีรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์จำนวนมากที่เป็นแฟรคตอล เช่น คอช สโนแฟรค (Koch Snowflake) [1] สามเหลี่ยมเชอร์ปินสกี้ เซตแมนเดลบรอท และเซตจูเลีย เป็นต้น อีกนัยหนึ่ง แฟรคตอล หมายถึงเซตซึ่งมีมิติเฮาซ์ดอร์ฟบิซิโควิทช์โดยแท้ (Hausdorff Besicovich Dimension Strictly) [2] เกินมิติเชิงทอพอโลยี (Topological Dimension) และมิติเฮาซ์ดอร์ฟบิซิโควิทช์นี้เป็นมิติแฟรคตอล (Fractal Dimension) ที่เรียกตามชื่อนักคณิตศาสตร์ผู้ค้นพบ คือ เฮาซ์ดอร์ฟบิซิโควิทช์

ก.3 คุณสมบัติของแฟรคตอล

1. ความคล้ายกันในตัว
2. รูปแบบไม่เปลี่ยนแปลงภายใต้การปรับมาตราส่วน
3. การสร้างรูปใช้กระบวนการทำซ้ำ
4. โครงสร้างมีลักษณะลดขนาดลง
5. มิติไม่เป็นจำนวนเต็ม

ความคล้ายกันในตัวของแฟรคตอลเป็นคุณสมบัติที่มีความสำคัญมากอย่างหนึ่ง ซึ่งจากการสังเกตรูปแฟรคตอลจำนวนมาก พบว่าในการการทำซ้ำแต่ละครั้งของรูปแฟรคตอลจะมีความคล้ายกันในตัวกับการทำซ้ำครั้งก่อน แต่ขนาดมาตราส่วนจะลดลงเสมอซึ่งเมื่อปรับขยายภาพบริเวณส่วนเล็ก ๆ จะเห็นรูปแฟรคตอลที่มีความคล้ายกันในตัวกับรูปเริ่มต้นเสมอ และความคล้ายกันในตัวของแฟรคตอล ยังสามารถนำมาอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นทางธรรมชาติได้ เช่น แฟรคตอลเฟิร์น (Fractal Fern) [2] ดังรูปที่ ก.1

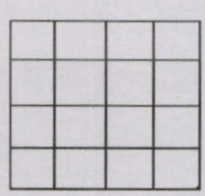


รูปที่ ก.1 แสดงความคล้ายกันในตัวของแฟรคตอลเฟิร์น

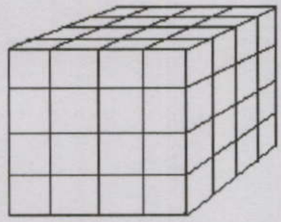
ในทำนองเดียวกัน มิติแฟรคตอลเป็นคุณสมบัติที่น่าสนใจมากในเชิงคณิตศาสตร์โดยทั่วไป มิติของรูปเชิงเรขาคณิตหรือสิ่งของที่เราพบเห็นตามปกติจะมีมิติเป็นจำนวนเต็ม เช่น จุดมีมิติเป็นศูนย์ เส้นตรงมีมิติเป็นหนึ่ง พื้นผิวหรือระนาบมีมิติเป็นสองและรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ หรือ กล่องมีมิติเป็นสาม เป็นต้น แต่สำหรับมิติแฟรคตอลจะมีค่าอยู่ระหว่างหนึ่งและสองซึ่งไม่เป็นจำนวนเต็ม นี่คือ ลักษณะเฉพาะของมิติแฟรคตอล โดยที่แนวคิดและหลักการหามิติแฟรคตอลจะพิจารณาจากลักษณะความคล้ายกันในตัวของรูปเชิงเรขาคณิตใด ๆ ดังขั้นตอนและความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. แบ่งเส้นตรงเส้นหนึ่งออกเป็น 4 ส่วนเล็ก ๆ โดยที่แต่ละส่วนมีความคล้ายกันในตัวกับเส้นตรงเดิม แต่มีขนาดมาตราส่วนเป็น 1/4 ของเส้นตรงเดิม

2. แบ่งรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเป็นรูปเล็ก ๆ ซึ่งมีขนาดเป็น 1/4 ของรูปเดิม และมีความคล้ายกันในตัว จะพบว่ามีสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็ก ๆ 16 รูปอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเดิม



3. แบ่งรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ออกเป็นรูปเล็ก ๆ ซึ่งมีขนาดเป็น 1/4 ของรูปเดิมและมีความคล้ายกันในตัวกับ จะพบว่ามีรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์เล็ก ๆ 64 รูปอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์เดิม



จากการสังเกตขั้นตอนและความสัมพันธ์ข้างต้น จะได้รูปแบบที่มีความคล้ายกันในตัว แต่มีขนาดเป็น 1/4 ของรูปเดิม ดังต่อไปนี้

$4 = 4^1$, $16 = 4^2$, $64 = 4^3$ ตามลำดับ นั่นคือ

$$N = S^D \qquad (ก.1)$$

เมื่อ N แทน จำนวนรูปทั้งหมดที่มีความคล้ายกันในตัว

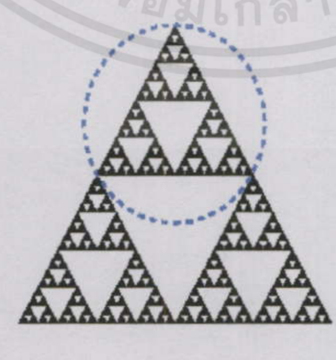
S แทน ขนาดมาตราส่วนของรูปที่มีความคล้ายกันในตัว

D แทน มิติ

จาก (ก.1) จะได้ มิติแฟรคตอล ที่อยู่ในรูป

$$D = \log N/\log S \qquad (ก.2)$$

เช่น การหามิติของสามเหลี่ยมเซอร์ปินสกี้รูปที่ ก.2 ซึ่งเป็นรูปแฟรคตอลที่มีความคล้ายกันในตัว



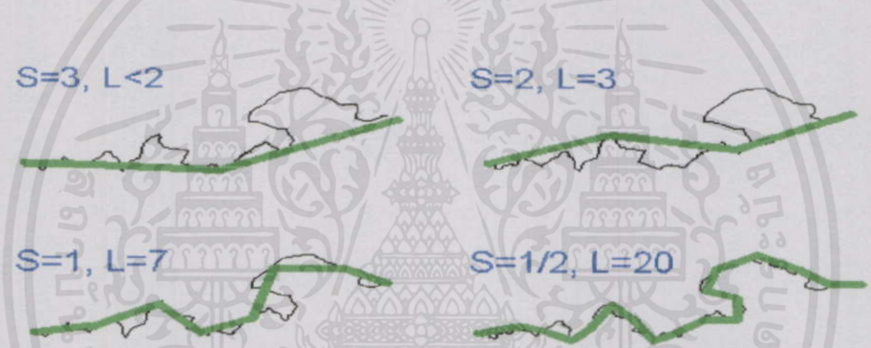
รูปที่ ก.2 แสดงสามเหลี่ยมเซอร์ปินสกี้ที่มีขนาดเป็น 1/2 ของรูปเดิม (รูปสามเหลี่ยมในวงกลม)

จาก (ก.2) เราจะสามารถหามิติของสามเหลี่ยมเชอร์ปินสกี้รูปที่ ก.2 ได้ดังนี้

$$D = \log N / \log S$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.58$$

จะเห็นได้ว่า มิติของสามเหลี่ยมเชอร์ปินสกี้ คือ 1.58 ซึ่งไม่ใช่จำนวนเต็ม และในทำนองเดียวกัน ถ้าเราหามิติของสามเหลี่ยมเชอร์ปินสกี้รูปใด ๆ จะพบว่ามีมิติเท่ากันเสมอ โดยทั่วไปมิติแฟรคตอลจะนำมาใช้ในด้านการวัดความยาว หรือ ระยะทาง พื้นผิวและปริมาตรของรูปแฟรคตอลที่ซับซ้อน เช่น การหาความยาวของแนวชายฝั่งของเกาะเกรสบริทเทิน (Great-Britain) [1] ดังรูปที่ ก.3



รูปที่ ก.3 แสดงการวัดความยาว Lของแนวชายฝั่งเกาะเกรสบริทเทินด้วยขนาดมาตราส่วน S ต่างกัน

จากรูปที่ ก.3จะเห็นได้ว่า ความยาว L ที่ได้จากการวัดขึ้นอยู่กับขนาดมาตราส่วน S ที่ใช้วัดความยาว ในทำนองเดียวกัน จะสามารถหามิติความยาวโค้งของแนวชายฝั่งเกาะเกรสบริทเทิน จากความสัมพันธ์ของความยาว L และขนาดมาตราส่วน S ที่ในรูป

$$D = \frac{\log(L_1/L_2)}{\log(S_1/S_2)} \qquad \text{(ก.3)}$$

เมื่อ L_1 , L_2 แทน ความยาวที่ได้จากการวัดของเส้นโค้งแนวชายฝั่ง(ความยาวที่ต่างกัน)

S_1 , S_2 แทน ขนาดมาตราส่วนที่แตกต่างกัน

D แทน มิติ

จาก (ก.3) จะหามิติความยาวของแนวชายฝั่งเกาะเกรสบริทเทิน ได้ดังนี้

$$D = \frac{\log(20/7)}{\log(2)} \approx 1.51$$

แฟรคตอล เป็นคณิตศาสตร์ประยุกต์สาขาใหม่ที่นักคณิตศาสตร์จำนวนมากให้ความสนใจนำมาศึกษาและประยุกต์ใช้กับวิทยาศาสตร์แขนงต่าง ๆ เช่น ดาราศาสตร์ฟิสิกส์ (Astrophysics) และวิทยาศาสตร์ชีวภาพ (Biological Sciences) และเรขภาพ เป็นต้น

นอกจากนี้ แฟรคตอลยังสามารถนำไปอธิบายความซับซ้อนของปรากฏการณ์ต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติ เช่น การเจริญเติบโตของต้นไม้ การเกิดก้อนเมฆ ระบบประสาทในร่างกาย การเกิดฝุ่นละอองในอากาศ ณ ช่วงเวลาหนึ่ง เป็นต้น และนำมาผสมผสานกับด้านงานศิลปะซึ่งเกี่ยวกับ แสง สี เสียงได้เป็นอย่างดี ดังนั้น จากคุณสมบัติของแฟรคตอลดังกล่าวข้างต้นทำให้มีผู้วิจัยจำนวนมากสนใจที่จะศึกษา และนำมาประยุกต์ใช้ในการวิจัยต่อไป

ภาคผนวก ข

นิยาม ข.1 ระบบของจำนวนเชิงซ้อน คือ เซตของคู่อันดับ [x, y] ของจำนวนจริงที่ประกอบด้วย ส่วนจริง และส่วนจินตภาพซึ่งเขียนอยู่ในรูปของ $z = x + iy$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ส่วน i เป็นหน่วยจินตภาพ ที่มีค่าเท่ากับ $\sqrt{-1}$ โดยที่ การบวก การลบ การคูณ การหาร สังยุค (Conjugate) และค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของจำนวนเชิงซ้อนจะนิยามดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + y_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1. การบวกของจำนวนเชิงซ้อน จะนิยามโดย

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{ข.1}$$

2. การลบของจำนวนเชิงซ้อน จะนิยามโดย

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{ข.2}$$

3. การคูณของจำนวนเชิงซ้อนจะนิยามโดย

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \tag{ข.3}$$

$$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{ข.4}$$

4. สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ จะนิยามได้เท่ากับ $z = x - iy$

5. การหารของจำนวนเชิงซ้อนจะนิยามโดย

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \tag{ข.5}$$

$$= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{ข.6}$$

6. **ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนนิยามโดย $|z|$**

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{ข.7}$$

นิยาม ข.2 ให้ $z = x + iy$ แล้วจะนิยาม $e^z = e^{x+iy}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูป

$$e^z = e^x e^{iy} \quad (ข.8)$$

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad (ข.9)$$

นิยาม ข.3 กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ แล้ว

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (ข.10)$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (ข.11)$$

นิยาม ข.4 จุด z_0 ซึ่ง $f(z_0) = 0$ จะเรียกว่า ค่าศูนย์ของฟังก์ชัน $f(z)$

ทฤษฎีบท ข.5 สมมติ z เป็นจุดคาบดึงดูด หรือ จุดคาบดึงดูดสุดขีดของการทำซ้ำฟังก์ชัน f แล้วจะมีย่านใกล้เคียง (Neighborhood) U ของ z ซึ่ง $U \subseteq A(z)$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [6]

ทฤษฎีบท ข.6 บริเวณของจุดตรึงดึงดูด z ใด ๆ ของฟังก์ชันต่อเนื่อง f $A(z)$ เป็นบริเวณเปิด

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [6]

ทฤษฎีบท ข.7 ค่าศูนย์ของฟังก์ชัน $\sin z$ เป็น $z = n\pi$ และค่าศูนย์ของฟังก์ชัน $\cos z$ เป็น $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [13]

นิยาม ข.8 ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic Function)

$$\sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \qquad (ข.12)$$

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad (ข.13)$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \qquad (ข.14)$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \qquad (ข.15)$$

$$|\sin(x + iy)|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y \qquad (ข.16)$$

$$|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y \qquad (ข.17)$$

$$|\sin(x + iy)| = |\sin x + \sin(iy)| \qquad (ข.18)$$

นิยาม ข.9 กำหนดให้ x_0 เป็นจุดศูนย์กลาง และ r เป็นรัศมี แล้วเซตขอบ คือ เซตของทุก ๆ จุด x ซึ่ง $|x - x_0| = r$ ถ้า x_0 เป็นจุดกำเนิด แล้วเซตขอบของ $\mathbb{R}^1$ คือ คู่อันดับของทุก ๆ จุด $x = r$ และ $x = -r$ เซตขอบของ $\mathbb{R}^2$ คือ จุดบนเส้นรอบวงกลม และเซตขอบของ $\mathbb{R}^3$ คือ จุดบนพื้นผิวทรงกลม

นิยาม ข.10 ย่านใกล้เคียงของ z_0 ในระนาบเชิงซ้อน คือ เซตของทุก ๆ z ซึ่ง $|z - z_0| < \varepsilon$ เมื่อ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

นิยาม ข.11 เซต S เป็นเซตเปิดที่สัมพันธ์กับจำนวนเชิงซ้อน ถ้าทุก ๆ จุด z ของ S มีย่านใกล้เคียงอยู่ใน S ทั้งหมด นั่นคือ ถ้ากำหนดให้ x_0 เป็นจุดศูนย์กลาง และ r เป็นรัศมี แล้วเซตเปิด $D_r(x_0)$ คือ เซตของทุก ๆ จุด x ซึ่ง $|x - x_0| < r$ เซตเปิดของปริภูมิหนึ่งมิติ คือ ช่วงเปิด ส่วนเซตเปิดของปริภูมิสองมิติ คือ วงกลม และเซตเปิดของปริภูมิสามมิติ คือ บอล

นิยาม ข.12 บอลเปิด n มิติของรัศมี r คือ กลุ่มของจุดที่ระยะทางน้อยกว่า r จากจุดที่กำหนดในยูคลีเดียน n มิติ และบอลเปิดที่มีจุดศูนย์กลาง x_0 และรัศมี r นิยามดังนี้

$$B_r(x) = \{ y : | y - x | < r \} \tag{ข.19}$$

นิยาม ข.13 จุด z_0 เรียกว่า จุดสะสม (Accumulation Point) ของเซต S ถ้าทุก ๆ ย่านใกล้เคียงของจุด z_0 บรรจุจุดจำนวนมากไม่จำกัดของ S

นิยาม ข.14 เซต S เป็นเซตปิดที่สัมพันธ์กับจำนวนเชิงซ้อน ถ้าทุก ๆ จุดสะสมของ S คือ เซต S อยู่ภายใน S เช่น เซตของทุก ๆ จุด ซึ่ง $|z| = M$ หรือ $|z| \le M$ หรือ $|z \ge M|$ เป็นเซตปิด

นิยาม ข.15 การยูเนียนของเซต S ซึ่งเซตของจุดสะสมของ S เรียกว่า ส่วนปิด (Closure) ของ S

นิยาม ข.16 เซตกระชับ (Compact Set) คือ เซตที่มีขอบเขตและเป็นเซตปิด

นิยาม ข.17 กำหนดให้ ฟังก์ชัน f(z) นิยามในโดเมน D แล้วเซตของทุก ๆ จุด z ใน D ซึ่ง $|f(z)| = M$ เมื่อ $M > 0$ เป็นโค้งระดับ (Level Curve) ของฟังก์ชัน f(z)

นิยาม ข.18 กำหนด S ไม่เป็นเซตว่าง และ $d : S \times S \to R$ แล้วฟังก์ชัน d เรียกว่า เมทริกซ์ (Metric) บน S หรือ เป็นระยะทาง ก็ต่อเมื่อ มีคุณสมบัติดังนี้

1. $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$ สำหรับทุก ๆ $x, y \in S$
3. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, x)$ สำหรับทุก ๆ $x, y, z \in S$

ซึ่งจำนวน $d(x, y)$ เรียกว่า ระยะทางระหว่าง x และ y ส่วนคู่อันดับ (X, d) เรียกว่า ปริภูมิเชิงระยะทาง (Metric Space)

นิยาม ข.19 ให้ $\{X, f\}$ เป็นระบบไดนามิก และ $x_f \in X$ เป็นจุดตรึงของฟังก์ชัน f จุด x_f เรียกว่า จุดตรึงดึงดูดของฟังก์ชัน f ถ้ามีจำนวน $\varepsilon > 0$ โดยที่ f ส่งบอล $B(x_f, \varepsilon)$ ไปยังตัวมันเอง และถ้า f เป็น การส่งแบบย่อส่วนบน $B(x_f, \varepsilon)$ เมื่อ $B(x_f, \varepsilon) = \{ y \in X : d(x_f, y) \le \varepsilon \}$ จุด x_f เรียกว่า จุดตรึงผลักออกของฟังก์ชัน f (Repulsive Fixed Point of f) ถ้ามีจำนวนเต็ม $\varepsilon > 0$ และ $c > 1$ ซึ่ง $d(f(x_f), f(y)) \ge c d(x_f, y) \ \forall y \in B(x_f, \varepsilon)$

นิยาม ข.20 เซตย่อย S ในระนาบเชิงซ้อนจะเรียกว่า ทุก ๆ ส่วนไม่ต่อเนื่อง (Totally Disconnected) ถ้าทุก ๆ จุด $z \in S$ มีจำนวนจริงไม่เป็นลบ ε_z ซึ่ง $|z - w| > \varepsilon_z$ สำหรับทุก ๆ จุด $w \in S$

นิยาม ข.21 ปริภูมิ X จะเรียกว่ามีจุดตรึงของฟังก์ชัน ถ้าฟังก์ชัน $f : X \to X$ ต่อเนื่องใด ๆ มี $x \in X$ ซึ่ง $f(x_0) = x_0$

นิยาม ข.22 การส่ง $f : X \to X$ เรียกว่า การย่อเฉพาะส่วน (Locally Contractive) ถ้าสำหรับทุก ๆ $x \in X$ มี ε_x และ λ_x ซึ่ง

$$\{y, d(x,y) \le \varepsilon_x\},\ \varepsilon_x > 0, \lambda_x \in [0,1] \quad (ข.20)$$

และมีความสัมพันธ์กับสำหรับทุก ๆ จุด p, q ใน

$$d(f(p), f(g)) \le \lambda_x d(p,q) \quad (ข.21)$$

นิยาม ข.23 การส่ง $f : X \to X$ เรียกว่า รูปแบบการย่อเฉพาะส่วน(ε, λ) ((ε, λ) – Uniformly Locally Contractive) ถ้า f เป็นการย่อเฉพาะส่วน ซึ่ง ε_x และ λ_x ไม่ขึ้นอยู่กับ x

ทฤษฎีบท ข.24 ให้ $f : \{x, \|x\| \le 1\} \to \{x, \|x\| \le 1\} = \overline{S}_n(0,1)$ = บอลหนึ่งหน่วยในปริภูมิ n มิติซึ่ง f ต่อเนื่อง แล้ว f มีจุดตรึงภายใน $\overline{S}_n(0,1)$

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [14]

ทฤษฎีบท ข.25 ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิเชิงระยะทางกระชับ (Compact Metric space) และ $f : X \to X$ เป็นการส่งย่อเฉพาะส่วน แล้ว f จะมีจุดตรึงค่าเดียว

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [14]

ทฤษฎีบท ข.26 ถ้า (X, d) เป็นปริภูมิต่อเนื่องเชิงระยะทางกระชับ (Compact and Connected Metric Space) และ $f : X \to X$ เป็นการส่งย่อเฉพาะส่วน แล้ว f จะมีจุดตรึงค่าเดียว

พิสูจน์ เอกสารอ้างอิง [14]

นิยาม ข.27 $\inf S$ หรือ $\inf_{x \in s} x$ (Infimum of S) คือ ขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต S

นิยาม ข.28 $\sup_S$ หรือ $\sup_{x \in S}$ (Supremum of S) คือ ขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต S

นิยาม ข.29 ให้ $f_c(w) = w^2 + c$ เมื่อ $w, c \in \mathbb{C}_2$ และ $f_c^{\circ n}(w) = (f_c^{\circ (n-1)} \circ f_c)(w)$ แล้ว เซตแมนเดลบรอทของจำนวนทวิเชิงซ้อน (Bicomplex Number) ทั่ว ๆ ไป นิยามโดย

$$M_2 = \{ c \in \mathbb{C}_2 : f_c^{\circ n}(0) \text{ มีขอบเขต } \forall n \in N \}$$

นิยาม ข.30 ให้ U เป็นเซตย่อยไม่ว่างใด ๆ ของปริภูมิ n มิติ $\mathbb{R}^n$ ไดมิเตอร์ (Diameter) ของ U นิยามในรูป

$$|U| = \sup\{ |x - y| : x, y \in U \} \tag{ข.22}$$

ถ้า $\{U_i\}$ เป็นกลุ่มเซตนับได้ของไดมิเตอร์มากที่สุด δ ซึ่งปกคลุม F นั่นคือ $\{U_i\}$ คือ ส่วนปกคลุม δ ของ F (δ-Cover of F)

สมมติว่า F เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^n$ และให้ s เป็นจำนวนที่ไม่เป็นลบ สำหรับ $\delta > 0$ ใด ๆ จะนิยาม

$$H_\delta^s(F) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \right\} \tag{ข.23}$$

$$H^S(F) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(F) \tag{ข.24}$$

จาก (ข.23) จะเรียกว่าเป็นการวัดมิติเฮาซ์ดอร์ฟ s และนิยาม

$$\dim_H F = \inf\{ s : H^s(F) = 0 \} = \sup\{ s : H^s(F) = \infty \} \tag{ข.25}$$

ซึ่ง (ข.24) คือ มิติเฮาซ์ดอร์ฟของ F

ภาคผนวก ค

ตารางที่ ค.1 แสดงความหมายสีและค่าสีในภาษาปาสคาล

ค่าสี	สี	ค่าสี	สี
0	ดำ	8	เทาเข้ม
1	น้ำเงิน	9	น้ำเงินอ่อน
2	เขียว	10	เขียวอ่อน
3	น้ำเงิน+เขียว	11	น้ำเงิน+เขียวอ่อน
4	แดง	12	แดงอ่อน
5	ม่วงแดง	13	ม่วงแดงอ่อน
6	น้ำตาล	14	เหลือง
7	เทาอ่อน	15	ขาว

ตารางที่ ค.2 แสดงค่า RGB ของสีต่าง ๆ ที่ใช้ในโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

สี	แดง	เขียว	น้ำเงิน
แดง	1	0	0
เขียว	0	1	0
น้ำเงิน	0	0	1
เหลือง	1	1	0
ม่วงแดง	1	0	1
น้ำเงิน+เขียว	0	1	1
ดำ	0	0	0
ขาว	1	1	1
เขียวเข้ม	0	0.5	0
ม่วง	0.67	0	1
ส้ม	1	0.5	0
แดงเข้ม	0.5	0	0
เทาอ่อน	0.5	0.5	0.5

ตารางที่ ค.3 แสดงรายละเอียดเกี่ยวกับ Colormap ลักษณะต่าง ๆ ในโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

Colormap	Description.
Autumn	Shades of red and yellow.
Bone	Gray scale with a tinge of blue.
Colorcube	Shades of cyan and magenta.
Cool	Shades of cyan and magenta.
Copper	Linear copper tone.
Flag	Alternating red, white, blue and black.
Gray	Liner gray scale.
Jet	Begins and ends with red.
Pink	Pastel shades of pink
Prism	Prism, alternating red, orange, yellow, green and blue.
Spring	Shades of magenta and yellow.
Summer	Shades of green and yellow.
White	All white colormap.
Winter	Shade of blue and green.

ภาคผนวก ง

ตัวอย่างภาษาปาสคาลในการสร้างภาพของฟังก์ชัน f(z)

```
PROGRAM P_{f,0} Set ;
Uses crt , Graph ;
CONST   MinX = - 4 ;
        MaxX = 4 ;
        MinY = - 4 ;
        MaxY = 4 ;
VAR
        dx , dy : Real ;
        x , y : Integer ;
        color : Integer ;
        screen_x , screen_y : Integer;                    {screen-resolution}
        grDriver : integer ;                              {used in initgraph}
        grMode  : integer ;                               {used in initgraph}
        ErrCode : integer ;                               {used in initgraph}

FUNCTION Calc_Pixel ( CA , CBi : Real ) : Integer ;
CONST   Max_Iteration = 84 ;                     {higher value->better quality}
VAR
        Old_A : Real ;          {just a variable to keep 'a' from begin destroyed}
        Iteration : Integer ;                             {the iteration-counter}
        A , B : Real ;          {function z divided in real and imaginary parts}
        Axy , Bxy : real ;
        Length_Z  : Real ;          {length of z , sqrt(length_z )>4=>Z->infinity}
```

```
BEGIN
        A := 0 ;                                                    {initialize Z(0)=0}
        B := 0 ;
        Iteration := 0 ;                                          {initialize iteration}
REPEAT
        Old_A := A ;                       {saves the 'a' (Will be destroyed in next line)}
        Axy := A * A – B * B + pi / 32 ;
        Bxy := 2 * A * B ;
        A := CA * sin ( Axy ) * ( exp ( Bxy ) + exp ( - Bxy ) ) / 2
            - CBi * cos ( Axy ) * ( exp ( Bxy ) – exp ( - Bxy ) ) / 2 ;
        B := CA * cos ( Axy ) * ( exp ( Bxy ) – exp ( - Bxy ) ) / 2
            + CBi * sin ( Axy ) * ( exp ( Bxy ) + exp ( - Bxy ) ) / 2 ;
         Iteration := Iteration + 1 ;
         Length_Z := A * A + B * B ;

UNTIL ( Length_Z > 4 ) OR ( Iteration > Max_iteration ) ;
        Calc_Pixel := Iteration ;
END ;

{***************************MAIN********************************}

BEGIN
        grDriver := Detect ;
        InitGraph ( grDriver , grMode , 'M :\ BIN \ ' ) ;
        ErrCode := GraphResult ;
    if  ErrCode <> grOk  then
```

```
begin
    Writeln ( ' Could  not  initialize  screen ' ) ;
      Writeln ( ' Do  you  have  correct  path  to  EGA  VGA .  BEI ? ? ' ) ;
        Readln  ;
          Halt ;
 end ;
     screen_x := getMaxX ; screen_y := getMaxY ;
     dx := ( MaxX – MinX ) / screen_X ;
     dy := ( MaxY – MinY ) / screen_Y ;

      FOR   y := 0  TO   screen_y - 1  DO
            FOR   x := 0   TO   screen_x - 1  DO
            BEGIN
                 Color := Calc_Pixel ( MinX + x * dx , MinY + y * dy ) ;
                  PutPixel ( x , y , color ) ;
            END ;
    REPEAT UNTIL KEYPRESSED ;
END.
```

```
PROGRAM Pf,z Set ;
Uses crt , Graph ;
CONST
        Const_real = 1.45 ;
        Const_imag = 0.80 ;
        MinX = - 1 ;
        MaxX = 1 ;
        MinY = - 1 ;
        MaxY = 1 ;
VAR
        dx , dy : Real ;
        x , y : Integer ;
        color : Integer ;
        screen_x , screen_y : Integer ;                 {screen-resolution}
        grDriver : integer ;                            {used in initgraph}
        grMode  : integer ;                             {used in initgraph}
        ErrCode : integer                               {used in initgraph}

FUNCTION Calc_Pixel ( CA , CBi : Real ) : Integer ;
CONST Max_Iteration = 64 ;                   {higher value->better quality}
VAR
        Old_A : Real              {just a variable to keep 'a' from begin destroyed}
        Iteration : Integer ;                               {the iteration-counter}
        A , B : Real ;            {function z divided in real and imaginary parts}
        Axy , Bxy : Real ;
        Length_Z : Real ;         {length of z , sqrt ( length_z ) > 4 =>Z->infinity}
```

```
BEGIN
        A := CA ;                                           {initialize Z(0)=0}
        B := CBi ;
        Iteration := 0 ;                                    {initialize iteration}
REPEAT
        Old_A := A ;                    {saves the 'a' (Will be destroyed in next line)}
        Axy := A * A – 2 * A * B + pi / 16;
        Bxy := 2 * A * B ;
        A :=  Const_real * sin( Axy ) * ( exp ( Bxy ) + exp ( - Bxy ) ) / 2
             - Const_imag * cos( Axy ) * ( exp ( Bxy ) – exp ( - Bxy ) ) / 2 ;
        B :=  Const_real * cos ( Axy ) * ( exp ( Bxy ) – exp ( - Bxy ) ) / 2
             + Const_imag * sin ( Axy ) * ( exp ( Bxy ) + exp ( - Bxy ) ) / 2 ;
       Iteration := Iteration + 1 ;
       Length_Z := A * A + B * B ;

UNTIL ( Length_Z > 4 ) OR ( Iteration > Max _ Iteration ) ;
Calc_Pixel := Iteration ;
END ;

{**************************MAIN******************************}

BEGIN
        grDriver := Detect;
        initGraph (grDriver , grMode , ' M : \ BIN \ ' ) ;
        ErrCode := GraphResult ;
      if ErrCode <> grOk  then
```

```
begin
        Writeln ( ' Could  not  initialize  screen ' ) ;
            Writeln ( ' Do  you  have  correct  path  to  EGA VGA .BEI?? ' ) ;
                Readln ;
                  Halt ;
end;
        screen_x := getMaxX ; screen_y := getMaxY ;
        dx := ( MaxX – MinX ) / screen_X ;
        dy := ( MaxY – MinY ) / screen_Y;

        FOR y := 0  TO  screen_y - 1  DO
            FOR  x:= 0  TO  screen_x - 1  DO
            BEGIN
                    color := Calc_Pixel ( MinX + x * dx , MinY + y * dy ) ;
                    PutPixel ( x , y , color ) ;
            END ;
  REPEAT UNTIL KEYPRESSED ;
END.
```

ตัวอย่างคำสั่งโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ในการสร้างภาพของฟังก์ชัน f(z)

```
% Function  Pf,0 ( m , box )
% Computes the  Pf,0  set, colored version, with  m × m  points
%  Allows optional input of a box to work in, default [ – 4, 4 ] × [ – 4, 4 ]
m = 400 ; box = [ - 4  4  - 4  4 ] ;  a = 4 ;
dx = ( box ( 2 ) – box ( 1 ) ) / m ;  dy = ( box ( 4 ) – box ( 3 ) ) / m ; N = 30 ;
ix = 0 ;
for  x = box ( 1 ) : dx : box ( 2 )
     ix = ix + 1 ;
     iy = 0 ;
     for  y = box ( 3 ) : dy : box ( 4 )
          iy = iy + 1 ;
           c = x + ( i * y ) ;
           z = 0 ;
           k = 0 ;
          while ( k <N ) & ( abs ( z ) < a )
                   z = c * sin ( z ^ 2 + ( pi / 32 ) ) ;
                   k = k + 1 ;
          end
          it ( iy , ix ) = k ;
     end
end
it = 64 - 63 * it / N ;
colormap  hot
pcolor ( [ box ( 1 ) : dx : box ( 2 ) ] , [ box ( 3 ) : dy : box ( 4 ) ] , it ) , shading ( 'flat' )
axis  off
```

```
% Function  P_f,z  ( c, m, box )
% Computes the P_f,z set for the point c using m × m points.
% In the rang [ – 4, 4 ] × [ – 4, 4 ]
c =  1.45 + 0.8i ; m = 400 ;  box = [-1  1  -1  1 ] ;
a = max ( abs ( c ) , 4 ) ; N = 30 ;
dx = ( box ( 2 ) – box ( 1 ) ) / m ;
dy = ( box ( 4 ) – box ( 3 ) ) / m ;
ix = 0 ;
for  x = box ( 1 ) : dx : box ( 2 )
    ix = ix + 1 ;
    iy = 0 ;
    for  y = box ( 3 ) : dy : box ( 4 )
        iy = iy + 1 ;
        z = x + ( i * y ) ;
        k = 0 ;
        while ( k < N ) & ( abs ( z ) < a )
            z = c * ( sin ( z ^ 2 + pi / 16 ) ) ;
            k = k + 1 ;
        end
        it ( iy , ix ) = k ;
    end
end
it = 64 – 63 * it / N ;
colormap  hot
pcolor ( [ box ( 1 ) : dx : box ( 2 ) ] , [ box ( 3 ) : dy : box ( 4 ) ] , it ) , shading  ( 'flat' )
axis  off
```

ภาคผนวก จ

ตัวอย่างโปรแกรมการวิเคราะห์ภาพเชิงตัวเลขของฟังก์ชัน f(z)

```
% Program compute at each point on image of P_{f,0} set of f(z) = c sin(z^n + π/2)
c = 1+1i ;                 % for all value c = x + i y which abs ( c ) < 2
z = 0 ;                    % where initial point is z ( 0 ) = 0
for k = 1 : 50
    z = c * sin (z ^ 2 + pi /2 )  % when n = > 2
    abs ( z )              % if abs( z ) > 2 then orbit of z( 0 ) = c escape to infinity
end
```

```
% Program compute at each point on image P_{f,0} set of f(z) = c sin(z^2 + π/2^i)
c = 2 + 1 i ;              % for all value c = x + i y which abs ( c ) < Sqrt (2 ) ^ i
z = 0 ;                    % where initial point is z ( 0 ) = 0
for k = 1 : 50
    z = c * sin ( z ^ 2 + pi / 64 ) % when μ = π/2^i , (i ∈ N)
    abs ( z )      % if abs ( z ) > Sqrt ( 2 )^ i then orbit of z( 0 ) = c escape to infinity
end
```

```
% Program compute at each point on image of P_{f,z} set of f(z) = c sin(z^n + π/2)
c = 0.5 + 1 i ;            % for each value c = x + i y
z = 0.1 + 0.1 i ;          % where initial point is z ( 0 ) = z
for k = 1 : 50
    z = c * sin ( z ^ 2 + pi / 2 )   % when n = > 2
    abs ( z )      % if abs ( z ) > R ( c ) then orbit of z ( 0 ) = z escape to infinity
end
```

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นางสาวสุณิศา ขามทอง
วัน เดือน ปี เกิด	3 สิงหาคม 2519
วุฒิการศึกษาระดับปริญญาตรี	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
สถานศึกษาที่สำเร็จ	มหาวิทยาลัยรามคำแหง
ปีการศึกษาที่สำเร็จ	2540