

การประยุกต์อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับ
การไหลของความร้อนและของไหล

APPLICATION OF QUADRILATERAL FINITE ELEMENT
FOR HEAT AND FLUID FLOWS



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล

บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2544

ISBN 974-648-364-6

การประยุกต์อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับ
การไหลของความร้อนและของไหล

APPLICATION OF QUADRILATERAL FINITE ELEMENT
FOR HEAT AND FLUID FLOWS



เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 40635
วัน, เดือน, ปี 18 ต.ค. 2544

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล
บัณฑิตวิทยาลัย

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2544

ISBN 974-648-384-6

.b.....
.i.....

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไปว่ากรณีใดทั้งสิ้น อีกหนึ่งห้าปีให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**APPLICATION OF QUADRILATERAL FINITE ELEMENT
FOR HEAT AND FLUID FLOWS**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN MECHANICAL ENGINEERING
SCHOOL OF GRADUATE STUDIES
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2001

ISBN 974-648-384-6



COPYRIGHT 2001

SCHOOL OF GRADUATE STUDIES

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไปว่ากรณีโดยทั้งสิ้น สิ่งนี้ห่วยเทให้ดัดแปลงแก้ไข และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บัณฑิตวิทยาลัย
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การประยุกต์อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับการไหลของความร้อนและของไหล
 APPLICATION OF QUADRILATERAL FINITE ELEMENT FOR HEAT AND FLUID FLOWS

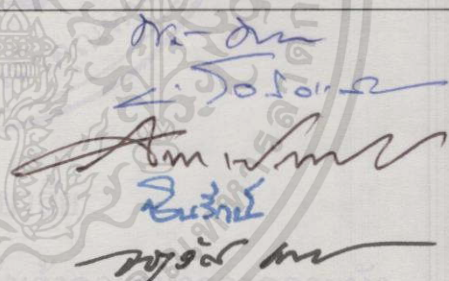
ชื่อนักศึกษา นายภาสกร เวสสะโกศล

รหัสประจำตัว 42062015

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.จารุวัตร เจริญสุข

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.พงษ์เจต พรหมวงส์	
ผศ.มีง โลกกิจแสงทอง	
ดร.จินดา เจริญพรพาณิชย์	
ดร.ชินรักษ์ เชียรพงษ์	
ผศ.ดร.จารุวัตร เจริญสุข	

วัน/เดือนปี ที่สอบ 27 กรกฎาคม 2544 เวลา 13.30-15.30 น.

สถานที่สอบ ณ อาคาร 12 ชั้น 4 (ห้อง E12-404)

บัณฑิตวิทยาลัยรับรองแล้ว

 (รศ.ดร.บุญวัฒน์ อิศนุ)
 คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่... 17 ...เดือน... สิงหาคม ... พ.ศ. 2544

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การประยุกต์อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับการไหลของความร้อนและของไหล
นักศึกษา	นายภาสกร เวสสะโกศล
รหัสประจำตัว	42062015
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมเครื่องกล
พ.ศ.	2544
อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.จารุวัตร เจริญสุข

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้นำเสนอการประยุกต์อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับแก้สมการบังคับการไหลของความร้อนและของไหลที่ไหลแบบราบเรียบภายในขอบเขตสองมิติที่สภาวะอยู่ตัว โดยทำการประมาณค่าความเร็วและอุณหภูมิด้วยอิลิเมนต์สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อ ในขณะที่เดียวกันทำการประมาณค่าความดันด้วยอิลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อภายในสนามการไหล ปัญหาที่นำมาวิเคราะห์ในงานวิจัยนี้ คือ การพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดรูปร่างต่างๆจำนวนสามรูปร่าง ในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะเน้นไปที่โครงสร้างของโปรแกรมที่ไม่สลับซับซ้อน ง่ายต่อการทำความเข้าใจ และสามารถนำไปปฏิบัติงานจริงได้บนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล เทคนิคในการสร้างโครงประสานอย่างง่ายได้ถูกนำมาใช้ในการสร้างโครงประสานที่เหมาะสมสำหรับโดเมนการไหล สมการไฟไนท์อิลิเมนต์ได้ถูกประดิษฐ์ด้วยวิธีการหาปริภูมิเชิงตัวเลขให้แก่สมการควบคุมการไหล สมการดังกล่าวเป็นสมการไม่เป็นเชิงเส้นสามารถแก้หาผลลัพธ์ได้ด้วยระเบียบวิธีกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน เมื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมกับสามเหลี่ยมซึ่งมีความหนาแน่นของโครงประสานเท่าๆกันและใช้เงื่อนไขการลู่เข้าสู่ค่าตอบเดียวกันพบว่า อิลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้ผลลัพธ์ที่ซ้ากว่าอิลิเมนต์สามเหลี่ยมเล็กน้อย เพราะอิลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะต้องใช้เวลาในการคำนวณปริภูมิเชิงตัวเลขสำหรับแต่ละรอบของการกระทำซ้ำ ในขณะที่เมทริกซ์ต่างๆของอิลิเมนต์สามเหลี่ยมได้ทำการหาปริภูมิแบบแมนตรงไว้ล่วงหน้าก่อนจะนำมาพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์

Thesis Title	Application of Quadrilateral Finite Element for Heat and Fluid Flows
Student	Mr. Passakorn Vessakosol
Student ID.	42062015
Degree	Master of Engineering
Programme	Mechanical Engineering
Year	2001
Thesis Advisor	Assistant Professor Dr. Jarruwat Chareonsuk

ABSTRACT

This thesis presents an application of the quadrilateral finite element for solving the steady two-dimensional laminar thermal flow problems. The eight-node element type is used for interpolating the velocities and temperature whereas the four-node element type is used for interpolating the pressure within the flow field. Natural convection in three different enclosures is analyzed numerically in this work. In the development of the problem, the accent has been placed on simplicity, ease of understanding and practicability. A simple mesh generation scheme is presented for constructing an appropriate mesh of the domain under consideration. The finite element equations are derived from the numerical integration of the governing equations. The solving of non-linear equation is performed using the Newton-Raphson iterative method. After determining the same mesh density and convergence criteria to quadrilateral element and triangular element, the convergence rate of solution from quadrilateral element is less than that from triangular element because the quadrilateral element needs time to perform the numerical integration for each iteration while the triangular element matrices can be obtained by exact integration before developing to the computer program.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้เป็นอย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาทางด้านการคำนวณเชิงตัวเลขจาก ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. จารุวัตร เจริญสุข ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความอนุเคราะห์จากท่านเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์ ที่ได้ให้คำแนะนำและถ่ายทอดความรู้และประสบการณ์เกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลขและระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ให้แก่ผู้วิจัยขณะศึกษาในระดับปริญญาโท และอาจารย์มิ่ง โลกิจแสงทอง ผู้ซึ่งถ่ายทอดความรู้เกี่ยวกับกลศาสตร์ของไหลเบื้องต้นและกลศาสตร์ของไหลประยุกต์ให้แก่ผู้วิจัยขณะศึกษาในระดับปริญญาตรี

ขอขอบพระคุณ คุณวรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษมสำหรับคำแนะนำเกี่ยวกับการแก้ระบบสมการด้วยวิธีนิวตัน-ราฟสันและการใช้อิลิเมนต์สามเหลี่ยมในการหาคำตอบสำหรับการพาความร้อนแบบอิสระ นอกจากนี้ขอขอบพระคุณ คุณปัญญา คุณนิวัติ คุณรวี และเพื่อนๆ น้องๆ ปริญญาโททุกท่านที่ได้แลกเปลี่ยนความรู้ อภิปรายปัญหาและเสนอแนะข้อคิดเห็นที่มีส่วนช่วยให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จตามวัตถุประสงค์ที่ตั้งใจไว้

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดามารดา ที่ให้กำลังใจและสนับสนุนการศึกษาของผู้วิจัยเสมอมา คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้วิจัยขอมอบให้แก่ผู้มีพระคุณครูอาจารย์ทุกท่าน

ภาสกร เวสสะโกศล

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์.....	2
1.3 วิธีดำเนินงาน.....	2
1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์.....	3
1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์.....	3
1.6 ประวัติความเป็นมาของวิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์.....	3
1.7 วิธีไฟไนท์อิลลิเมนต์กับการวิเคราะห์การไหลและการถ่ายเทความร้อน.....	4
1.8 โครงประสาน.....	5
บทที่ 2 สมการพื้นฐานของการไหล.....	8
2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล.....	8
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม.....	9
2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน.....	10
2.4 ความเค้นที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหล.....	12
2.5 เงื่อนไขขอบเขตของการไหล.....	13
2.6 การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว.....	14
2.6.1 สมการทั่วไปสำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืด.....	15
2.6.2 สมมุติฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์.....	16
2.6.3 ผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ.....	16
2.6.4 สรุปสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว.....	17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 สมการไฟไนต์อิลิเมนต์.....	18
3.1 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์.....	18
3.2 การแบ่งย่อย (Discretization)	18
3.3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์อิลิเมนต์.....	20
3.4 การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน.....	26
3.5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์.....	28
3.6 การประดิษฐ์ไฟไนต์อิลิเมนต์เมทริกซ์.....	30
บทที่ 4 การสร้างโครงประสาณ.....	37
4.1 การแปลงรูปจากพิกัดฉากไปสู่พิกัดฉาก.....	39
4.2 การแปลงรูปจากพิกัดฉากไปสู่พิกัดเชิงขั้ว.....	41
4.3 การสร้างโครงประสาณด้วยไอโซพารามเมตริกซ์อิลิเมนต์.....	42
4.4 การตรวจสอบความสมบูรณ์ของ โครงประสาณ.....	47
4.4.1 ข้อมูลพิกัด x และ y ของทุกจุดต่อ.....	47
4.4.2 ข้อมูลจุดต่อภายในทุกอิลิเมนต์.....	47
4.4.3 รหัสคำสั่งสำหรับโปรแกรมรับข้อมูลเข้า และแสดงภาพของ โครงประสาณ ...	47
บทที่ 5 โปรแกรมคอมพิวเตอร์และผลการจำลองการไหล.....	49
5.1 ขั้นตอนการคำนวณ.....	49
5.2 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า.....	50
5.3 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์.....	53
5.3.1 พารามิเตอร์ไว้มิติสำหรับการพาความร้อน.....	53
5.3.2 การพาความร้อนแบบอิสระ.....	55
5.4 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	58
5.4.1 ผลการจำลอง.....	61
5.4.2 การวิเคราะห์ผล.....	65
5.5 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างรูปวงแหวน.....	67
5.5.1 ผลการจำลอง.....	69

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

5.5.2 การวิเคราะห์ผล.....	74
5.6 การพาความร้อนแบบอิสระจากทรงกระบอกไปสู่กล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	81
5.6.1 ผลการจำลอง.....	84
5.6.2 การวิเคราะห์ผล.....	87
บทที่ 6 บทสรุปและวิจารณ์.....	88
6.1 บทสรุป.....	88
6.2 ปัญหาที่พบและการวิจารณ์.....	89
6.3 ข้อเสนอแนะ.....	92
เอกสารอ้างอิง.....	93
ภาคผนวก ก บทความที่ได้รับการตีพิมพ์.....	95
ภาคผนวก ข รหัสคำสั่งสำหรับการสร้าง โครงประสาน.....	103
ประวัติผู้เขียน.....	110

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 พิกัด ξ และ η ของจุดเกาส์บนมาสเตอร์อิลิเมนต์.....	33
3.2 ค่าถ่วงน้ำหนักของจุดเกาส์ และตำแหน่งจุดเกาส์ภายในพิกัด $-1 \leq \xi \leq 1$	34
4.1 จุดกริดทั้ง 8 ของอิลิเมนต์หนึ่งบนพิกัด $\xi - \eta$ โดย $i, j \geq 0$	39
5.1 การเปรียบเทียบค่าสเกลที่นัมเบอร์เฉลี่ยบนผนังด้านเย็นของช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส.....	66
5.2a การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านใน(ร้อน).....	76
5.2b การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านนอก (เย็น)	77

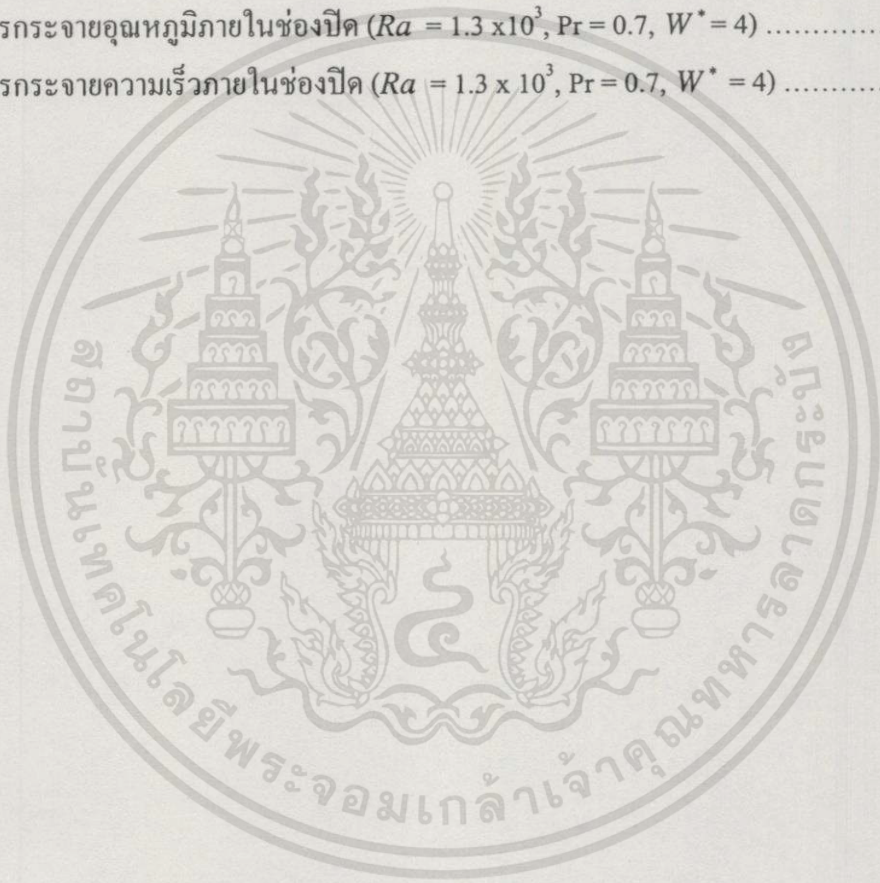


สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.12 การกระจายอุณหภูมิของของไหลภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^5$	63
5.13 การเปรียบเทียบอุณหภูมิไร้มิติตามแนวกึ่งกลางของช่องปิด เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ (Ra) แตกต่างกัน	65
5.14 การเปรียบเทียบความเร็วไร้มิติที่กึ่งกลางความสูงของช่องปิดเมื่อ $Ra = 10^5$	65
5.15 ช่องปิดรูปวงแหวนระหว่างทรงกระบอกสองอันซ้อนกันแบบร่วมศูนย์.....	67
5.16 โครงประธานภายในช่องปิดรูปวงแหวน.....	67
5.17 การกระจายความเร็วภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^2$	68
5.18 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^2$	68
5.19 การกระจายความเร็วภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^3$	69
5.20 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^3$	69
5.21 การกระจายความเร็วภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 3 \times 10^3$	70
5.22 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 3 \times 10^3$	70
5.23 การกระจายความเร็วภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 6 \times 10^3$	71
5.24 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 6 \times 10^3$	71
5.25 การกระจายความเร็วภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^4$	72
5.26 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^4$	72
5.27 เส้น streamline (ψ) และเส้น isotherm(ϕ), $Ra = 10^3$, $Pr = 0.7$, $L/D_i = 0.8$, $\Delta\psi=0.5$, $\Delta\phi=0.1$ ([20]).....	74
5.28 เส้น streamline (ψ) และเส้น isotherm(ϕ), $Ra = 10^4$, $Pr = 0.7$, $L/D_i = 0.8$, $\Delta\psi=3.0$, $\Delta\phi=0.1$ ([20]).....	74
5.29 รูปร่างของอุณหภูมิไร้มิติในแนวรัศมีที่มุมต่าง ๆ (a) $Ra = 1000$ (b) $Ra = 3000$ (c) $Ra = 6000$ (d) $Ra = 10000$	75
5.30 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่มุมองศาต่าง ๆ บนผนังทรงกระบอกด้านใน (a) $Ra = 100$ (b) $Ra = 1000$ (c) $Ra = 3000$ (d) $Ra = 6000$	77
5.31 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่มุมองศาต่าง ๆ บนผนังทรงกระบอกด้านนอก (a) $Ra = 100$ (b) $Ra = 1000$ (c) $Ra = 3000$ (d) $Ra = 6000$	78
5.32 ช่องปิดซึ่งอยู่ระหว่างทรงกระบอกและกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก.....	81
5.33 โครงประธานของอิลิเมนต์ภายในช่องปิด (a) $W^* = 2$ (b) $W^* = 3$ (c) $W^* = 4$	81

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
5.34	การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3, Pr = 0.7, W^* = 2$).....	83
5.35	การกระจายความเร็วภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3, Pr = 0.7, W^* = 2$)	83
5.36	การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3, Pr = 0.7, W^* = 3$)	84
5.37	การกระจายความเร็วภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3, Pr = 0.7, W^* = 3$)	84
5.38	การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3, Pr = 0.7, W^* = 4$)	85
5.39	การกระจายความเร็วภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3, Pr = 0.7, W^* = 4$)	85



บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์

การคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล (Computational Fluid Dynamics, CFD) กำลังเข้ามามีบทบาทสำคัญต่อการออกแบบและการศึกษาพฤติกรรมการไหลในปัจจุบัน ขั้นตอนของการหาคำตอบสำหรับการไหลด้วย CFD คือ สร้างแบบจำลองที่มีรูปร่างเหมือนกับชิ้นงานที่กำลังสนใจอยู่ แล้วทำการกำหนดเงื่อนไขต่างๆ ที่จำเป็นให้กับแบบจำลอง เลือกเครื่องมือสำหรับแก้ปัญหาเมทริกซ์ของสมการสำหรับการไหลนั้น สุดท้ายทำการแก้สมการเพื่อหาผลลัพธ์ต่างๆ ได้แก่ ความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิ โดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ในการทำงานทุกขั้นตอน การสร้างแบบจำลองและนำแบบจำลองนั้นมาคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์สามารถกระยะเวลาภายในวัฏจักรการออกแบบผลิตภัณฑ์ลงได้อย่างมาก เนื่องจากวิศวกรสามารถทดลองแนวความคิดใหม่ๆ ได้มากมายโดยไม่ต้องสร้างต้นแบบจริงขึ้นมา วัฏจักรการออกแบบที่ใช้เวลาน้อยลงจะช่วยให้การแนะนำสินค้าใหม่สู่ตลาดเร็วขึ้นและประหยัดค่าใช้จ่ายในการสร้างเป็นสินค้าจริง นอกจากนี้การใช้โปรแกรมจำลองการไหลมีส่วนช่วยทำให้คุณภาพของสินค้าดีขึ้นได้เช่นกันเนื่องจาก วิศวกรออกแบบสามารถทดสอบงานออกแบบเชิงแนวความคิดภายใต้เงื่อนไขการทำงานซึ่งอาจไม่สามารถเกิดขึ้นจริงก็ได้ และหาคำตอบที่ตำแหน่งต่างๆซึ่งอาจไม่สามารถตรวจสอบได้ในแบบจำลองกายภาพ

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างสูงในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง และการวิเคราะห์โครงสร้างทางวิศวกรรมโยธาและอากาศยาน แต่พบเห็นการประยุกต์วิธีนี้ไม่บ่อยนักสำหรับปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลและการถ่ายเทความร้อน สาเหตุเนื่องมาจากการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในช่วงแรกของการพัฒนานั้นยึดติดอยู่กับวิธีการโดยตรงและหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดซึ่งเป็นหลักการที่ใช้ได้ดีกับกลศาสตร์ของแข็ง ปัจจุบันหลักการของการถ่วงน้ำหนักเศษดกค้ำได้ถูกมาใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ทำให้สามารถแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหลได้ใกล้เคียงกับเงื่อนไขการไหลที่เป็นจริงมากขึ้นและสะดวกต่อการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต

บทนี้กล่าวถึงวัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์ในหัวข้อ 1.1 วิธีการดำเนินงานในหัวข้อ 1.2 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ในหัวข้อ 1.3 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับในหัวข้อ 1.4 ประวัติความเป็นมาของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในหัวข้อ 1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กับกลศาสตร์ของไหลและการถ่ายเทความร้อนในหัวข้อ 1.7 และเทคนิคในการสร้างโครงประสาณสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในหัวข้อ 1.8

1.2 วัตถุประสงค์ของวิทยานิพนธ์

วัตถุประสงค์สำหรับงานวิจัยนี้คือเพื่อประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับหาผลลัพธ์เชิงตัวเลขของปัญหาการไหลแบบบีบอัดได้ (Viscous Incompressible Flow) ที่สถานะอยู่ตัว (Steady State) บนพื้นฐานหลักการทางไฟไนต์อีลิเมนต์โดยใช้อีลิเมนต์สี่เหลี่ยม (Quadrilateral Element) โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถทำการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้ และสามารถใช้เป็นแนวทางสำหรับการวิเคราะห์ด้านพลศาสตร์การไหลและการถ่ายเทความร้อนที่ซับซ้อนมากขึ้น

1.3 วิธีดำเนินงาน

1.3.1 ศึกษาระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการไหลแบบราบเรียบในสองมิติอย่างละเอียด เพื่อทำความเข้าใจถึงสมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการพลังงาน รวมทั้งเงื่อนไขขอบเขตต่างๆที่เกี่ยวข้อง

1.3.2 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์อีลิเมนต์ สำหรับปัญหาการไหลแบบบีบอัดได้ชนิดหนึ่งที่มีสถานะอยู่ตัว โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักคกต่างของกาลอ์เคิน

1.3.3 ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นมาในหัวข้อ 1.3.2 ด้วยภาษาฟอร์แทรน 90 โดยที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้สามารถทำการคำนวณบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลได้

1.3.4 ทดสอบโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น โดยนำไปแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีทราบผลลัพธ์แล้ว คือ ปัญหาการพาความร้อนภายในช่องปิดรูปร่างสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพื่อให้เกิดความมั่นใจก่อนนำไปโปรแกรมนี้ไปวิเคราะห์การไหลอื่นที่ซับซ้อนมากขึ้น

1.3.5 นำโปรแกรมไปแก้ปัญหามีรูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อนกว่าปัญหาในหัวข้อ 1.3.4 จากเอกสารอ้างอิงซึ่งเป็นบทความที่ได้รับการตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ ได้แก่ ปัญหาการพาความร้อนภายในช่องปิดรูปร่างวงแหวนซึ่งเกิดจากทรงกระบอกกลมขนาดแตกต่างกันแต่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน และปัญหาการพาความร้อนภายในช่องปิดซึ่งอยู่ระหว่างทรงกระบอกกลมและทรงกระบอกสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1.3.6 สรุปผลความสามารถในการทำนายการไหลซึ่งประกอบด้วยค่าความคลาดเคลื่อนของผลลัพธ์เมื่อเทียบกับผลลัพธ์ที่ได้จากเอกสารอ้างอิง

1.4 ขอบเขตของวิทยานิพนธ์

สมการควบคุมสำหรับการไหลแบบราบเรียบชนิดหนืดไม่อัดตัวสำหรับของไหลนิวตอเนียน (Newtonian Fluid) เป็นสมการซึ่งยากต่อการหาคำตอบหากไม่ได้ตั้งสมมุติฐานให้การไหล สมมุติฐานต่างๆที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ได้แก่

- ก. เป็นการไหลที่สภาวะอยู่ตัว
- ข. พลังงานภายในแปรผันแบบเชิงเส้นกับอุณหภูมิในช่วงที่ทำการวิเคราะห์การไหล
- ค. มีผลของแรงวัตถุ (Body Force) เฉพาะในแนวแกน y
- ง. ไม่มีการผลิตความร้อนภายในปริมาตรของไหล
- จ. ละทิ้งผลของการกระจายพลังงานความหนืด
- ฉ. คุณสมบัติต่างๆของของไหลมีค่าคงที่

นอกจากนี้ การคำนวณทั้งหมดที่อยู่ในวิทยานิพนธ์นี้จะถูกจำกัดไว้เฉพาะการพาความร้อนภายในช่องปิดเท่านั้น ได้แก่ ช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ช่องปิดรูปวงแหวน และช่องปิดระหว่างรูปวงกลมและสี่เหลี่ยม

1.5 ประโยชน์ที่ได้รับจากวิทยานิพนธ์

1.5.1 ช่วยส่งเสริมให้เกิดความรู้ความเข้าใจที่มากขึ้นในสาขาวิชา กลศาสตร์ของไหล และการถ่ายเทความร้อน นอกจากนี้ ยังช่วยให้ได้รับความชำนาญในการแก้ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น และการแก้เมตริกซ์เชิงเส้น ไม่สมมาตรด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์

1.5.2 ใช้เวลาและค่าใช้จ่ายน้อยเมื่อเทียบกับการทดลอง ทำให้การออกแบบอุปกรณ์ที่เกี่ยวข้องกับการไหลสามารถกระทำได้อย่างรวดเร็วและประหยัดค่าใช้จ่ายได้มาก

1.5.3 กระบวนการในการประดิษฐ์สมการไฟไนท์อิลิเมนต์ในงานวิจัยนี้ สามารถใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาโปรแกรมในระดับสูงขึ้นไปในอนาคตได้

1.6 ประวัติความเป็นมาของวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์ [23]

ในปี ค.ศ. 1943 Courant เป็นบุคคลแรกที่พัฒนาวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์ขึ้นมาใช้ เขาได้ประมาณค่าภายในช่วงด้วยฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Interpolation) บนพื้นที่ย่อยรูปสามเหลี่ยม เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับการบิดตัวของโครงสร้าง

ในระหว่างปี ค.ศ. 1951 – 1953 นับได้ว่าแนวความคิดเกี่ยวกับวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์ได้เริ่มถูกปูทางขึ้นจากการค้นคว้าและวิจัยที่แตกต่างกันของนักวิชาการถึง 3 กลุ่มด้วยกัน โดยกลุ่มแรก คือนักคณิตศาสตร์ประยุกต์เน้นความสนใจเกี่ยวกับปัญหาของค่าขอบเขต (Boundary Value Problem) ในงานกลศาสตร์ของสสารต่อเนื่อง (Continuum Mechanics) โดยพยายามที่จะหาขอบเขตค่าเจาะจง

(Eigenvalue) โดยประมาณค่าทั้งบนและล่าง กลุ่มที่สอง คือ นักฟิสิกส์ ได้ให้ความสนใจกับการแก้ปัญหาของค่าขอบเขตที่มีความต่อเนื่องเช่นกัน โดยการประมาณค่าต่อเนื่องเป็นช่วงๆ (Piecewise Continuous Approximation) และกลุ่มสุดท้าย คือวิศวกรต้องการแก้ปัญหาโครงสร้างที่ซับซ้อน เช่น การคำนวณหาค่าความแข็งแรงของปีกเครื่องบินที่เสริมด้วยคานและเสา

ต่อมาในปี ค.ศ. 1956 Turner Clough Martin และ Topp ได้เสนอการหาผลลัพธ์ของปัญหาความเค้นบนระนาบด้วยอิลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมโดยคำนวณคุณสมบัติต่างๆ ได้จากทฤษฎีอิลาสติก (Elastic Theory) ผลงานของเขาเหล่านี้ ต่อมาเรียกว่าวิธีโคเรคตีฟเพนสซึ่งเป็นวิธีการหนึ่งในหลายวิธีของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ในระหว่างปี ค.ศ. 1954 - 1960 คอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น และในปี ค.ศ. 1960 คำว่า “ไฟไนต์อิลิเมนต์” ได้ถูกนำมาใช้เป็นครั้งแรกในงานวิจัยของ Clough เกี่ยวกับการวิเคราะห์ความเค้นระนาบ

ขบวนการต่าง ๆ ในวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เป็นที่ยอมรับกันอย่างแพร่หลายมากขึ้นเมื่อ Melosh ได้แสดงให้เห็นว่า วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เป็นวิธีที่มีเค้าโครงมาจากวิธีการของ Rayleigh-Ritz ซึ่งอยู่บนหลักการของงานสมมุติ (Principle of Virtual Work) หรือหลักการของพลังงานศักย์น้อยที่สุด (Principle of Minimum Potential) ในปี ค.ศ. 1953 วิธีการนี้สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาที่มีรูปแบบเดียวกับสมการลาปลาซ (Laplace Equation) หรือสมการพัวซอง (Poisson Equation) ซึ่งต่อมาในปี ค.ศ. 1965 Zienkiewicz ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์สามารถนำมาประยุกต์ได้กับปัญหาการไหล และปัญหาทางแม่เหล็กไฟฟ้า ในระหว่างปี ค.ศ. 1972 - 1976 เป็นช่วงเวลาที่นักวิจัยจำนวนมากทำการพัฒนาทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ได้แก่ Babuska Ciarlet Aubin Strang และ Reddy เป็นต้น หลักการของพลังงานศักย์น้อยที่สุดเหมาะที่จะใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับกลศาสตร์ของแข็งได้เป็นอย่างดี แต่ไม่สามารถใช้ได้กับทุกปัญหา ดังนั้นในเวลาต่อมา นักวิจัยทั้งหลายได้มุ่งที่จะสร้างสมการไฟไนต์อิลิเมนต์ตามหลักการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างซึ่งเป็นหลักการที่สามารถใช้ได้กว้างขวางกว่า

1.7 วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์กับการวิเคราะห์การไหลและการถ่ายเทความร้อน

วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ประสบความสำเร็จอย่างสูงเมื่อนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลอัดตัวได้ และการไหลไม่อัดตัวที่สภาวะคงตัว แต่ในงานวิจัยนี้จะสนใจเฉพาะการไหลไม่อัดตัวชนิดหนืดเท่านั้น แนวทางหลัก ๆ ของการประยุกต์วิธีไฟไนต์อิลิเมนต์กับปัญหาการไหลแบบไม่อัดตัว ได้แก่ แนวทางสตรีมฟังก์ชัน-วอร์ทิซิตี (Stream Function - Vorticity Approach) และแนวทางตัวแปรปฐมฐาน (Primary Variables Approach) ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้นว่าในงานวิจัยนี้จะดำเนินตามแนวทางตัวแปรปฐมฐานเนื่องจาก ความสะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตต่างๆ ตัวแปรต่างๆ ภายในสมการมีความหมายทางกายภาพ และสามารถพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อการวิเคราะห์ปัญหาการไหลสามมิติได้ในอนาคต

เอกสารนี้เป็นเอกสารทสวงวนเวสสำหรับบริการเชิงงานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แนวทางตัวแปรปฐมฐานสามารถแบ่งออกได้เป็นสองแนวทางได้แก่ แนวทางที่หนึ่ง ทำการแทนสมการการไหลต่อเนื่องลงไปในสมการโมเมนตัมเพื่อกำจัดพจน์ของความหนืดออกไป ซึ่งเริ่มต้นมาจากผลงานวิจัยของ Zienkiewicz (1971) Yamada et.al. (1975) Hood (1975) และ Smith (1975) อีกแนวทางหนึ่งคือ การไม่กำจัดพจน์ใด ๆ ของความหนืดออกจากสมการโมเมนตัม ซึ่งเริ่มต้นมาจากผลงานวิจัยของ Hutton (1971) Taylor and Hood (1973) Tuann and Olson (1976) และ Zienkiewicz (1977) แนวทางที่สองนี้สามารถประยุกต์เข้ากับวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้างของกาลเลอร์กินได้เป็นอย่างดี [17, 22, 25] และถูกนำมาใช้เป็นแนวทางของงานวิจัยในครั้งนี้อย่างดี

Yamada et.al. (1976) และ Kawahara (1976) ได้แนะนำให้ใช้ฟังก์ชันรูปร่างลำดับที่สองสำหรับการประมาณค่าภายในช่วงของความเร็ว และใช้ฟังก์ชันรูปร่างลำดับที่หนึ่งสำหรับการประมาณค่าภายในช่วงของความดัน สำหรับการไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) ของของไหลไม่อัดตัวชนิดหนืด โดยทั้งสองบทความใช้อิทธิมาตรูปร่างสามเหลี่ยมสำหรับโดเมนการไหล

วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม [22] ได้ประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการไหลชนิดหนืดแบบไม่อัดตัวที่สถานะอยู่ตัว สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาการพาความร้อนได้ทั้งแบบบังคับและแบบอิสระ ในงานวิจัยของเขาได้ใช้โครงประสาทรูปสามเหลี่ยม (Triangular Mesh) ซึ่งถูกสร้างจากโปรแกรมสำเร็จรูปชื่อว่า NASTRAN โครงประสาทรูปดังกล่าวไม่สามารถควบคุมความหนาแน่นและการหันทิศทางของสามเหลี่ยมได้ทำให้ยากต่อการคำนวณปริมาณของตัวแปรตามหรือความลาดชันของตัวแปรที่ตำแหน่งขอบของโดเมนการไหล เช่น ฟลักซ์ความร้อนผ่านผนังของช่องปิด ความเค้นเฉือนที่ผนังของช่องทางการไหล เป็นต้น

1.8 โครงประสาทรูปสามเหลี่ยม

ในอดีตการวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์ให้ประสบความสำเร็จนั้นต้องใช้นักวิชาการที่มีความรู้ความสามารถสูง ใช้ระยะเวลาและใช้ค่าใช้จ่ายมาก มีผู้วิจัยหลายท่านพยายามหาวิธีการที่จะทำให้การเตรียมข้อมูลให้แก่โปรแกรมไฟไนต์อิเลเมนต์เป็นไปอย่างอัตโนมัติมากที่สุดเท่าที่จะทำได้เพื่อทำให้เกิดผลผลิตที่มีคุณภาพมากขึ้น ค่าตอบที่แม่นยำมากขึ้นและใช้นักวิชาการที่ไม่จำเป็นต้องมีความรู้ทางคณิตศาสตร์มากเหมือนกับในอดีต แม้ว่าขั้นตอนในการจำลองแบบด้วยวิธีไฟไนต์อิเลเมนต์จะมีมากมาย แต่ผู้วิเคราะห์จะใช้เวลาส่วนใหญ่ในขั้นตอนของการแบ่งย่อย (Discretization) รูปร่างจริงของปัญหาให้กลายเป็นรูปปะติดปะต่อกันของสี่เหลี่ยมหรือสามเหลี่ยม ความแม่นยำและค่าใช้จ่ายของการวิเคราะห์ขึ้นอยู่กับขนาด รูปร่าง และจำนวนอิเลเมนต์ที่บรรจุอยู่ในโครงประสาทรูปสามเหลี่ยม การสร้างโครงประสาทรูปสามเหลี่ยมที่ถูกต้องจะสร้างโครงประสาทรูปสามเหลี่ยมที่มั่นคงแน่นอนโดยไม่ต้องรับข้อมูลจำนวนมากจากผู้ใช้โปรแกรม การสร้างโครงประสาทรูปสามเหลี่ยมอัตโนมัติจึงเป็นขั้นตอนที่มีความสำคัญมากในขบวนการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยวิเคราะห์ในงาน

วิศวกรรม (Computer Aided Engineering, CAE) และขบวนการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการผลิต (Computer Aided Manufacturing, CAM)

การสร้างโครงประสานแบบอัตโนมัติในยุคเริ่มต้น คือวิธีมัดบล็อก (Multiblock) มีพื้นฐานมาจากการสร้างโครงประสานแบบใช้การแปลงรูป (Mapped Meshing) โดเมนจะถูกแบ่งย่อยออกเป็นบล็อก (Block) หลายบล็อก ภายในบล็อกแต่ละบล็อกจะถูกสร้างโครงประสานด้วยการแปลงรูปปริภูมิแบบพารามตริก (Parametric Space Mapping) การแปลงรูปแบบทรานส์ฟินิท (Transfinite Mapping) หรือเทคนิคทางพีชคณิตแบบอื่น แม้ว่าโครงประสานของแต่ละบล็อกจะเป็นโครงประสานแบบมีโครงสร้าง (Structured mesh) โครงประสานรวมของทุกบล็อกมักจะเป็นโครงประสานแบบไม่มีโครงสร้าง (Unstructured mesh) เนื่องจากการแบ่งบล็อกที่ไม่เป็นโครงสร้าง เทคนิคนี้ไม่ได้เป็นเทคนิคการสร้างโครงประสานแบบอัตโนมัติอย่างสมบูรณ์เนื่องจากผู้วิเคราะห์ต้องแบ่งรูปร่างของโดเมนออกมาเป็นบล็อกด้วยตนเอง ซึ่งผู้วิเคราะห์นั้นจะต้องสามารถแปลงรูปร่างของแต่ละบล็อกไปสู่ปริภูมิพารามตริก (Parametric Space) ได้เป็นอย่างดี และด้วยเหตุนี้วิธีการนี้จึงเหมาะสมสำหรับผู้วิเคราะห์ที่มีความเชี่ยวชาญ ในความเป็นจริง เทคนิคการสร้างโครงประสานแบบกึ่งอัตโนมัตินี้ยังคงถูกนำมาใช้ในโปรแกรมคอมพิวเตอร์สร้างโครงประสานในปัจจุบัน คุณภาพของอิเลเมนต์ที่ได้ขึ้นอยู่กับคุณภาพของการแบ่งบล็อก บางขั้นตอนวิธี (Algorithm) ที่เกิดขึ้นมาเมื่อไม่นานมานี้ได้พยายามที่จะเรียบเรียงขั้นตอน (Procedure) ของการแบ่งรูปร่างเรขาคณิตนี้ให้มีความเป็นอัตโนมัติโดยใช้เทคนิคของแกนเฉลี่ย (Medial-Axes) พื้นผิวเฉลี่ย (Medial-Surface) ร่วมกับกฎฮิวริสติก (Heuristic Rules) อย่างไรก็ตาม การแบ่งโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนให้เป็นขอบเขตที่สามารถแปลงรูปได้ (Mappable Region) เป็นงานที่ยากมาก ข้อเสียสำคัญของขั้นตอนสร้างโครงประสานด้วยการแปลงรูปคือ ไม่สามารถควบคุมขนาดของโครงประสานได้อย่างแม่นยำ และต้องกำหนดให้การแบ่งบล็อกตรงบริเวณรอยต่อของบล็อกที่อยู่ติดกันให้มีขนาดเท่ากันเพื่อให้เกิดความลจรอยกันของโครงประสานของบล็อกต่างๆ ที่บริเวณรอยต่อ (Interface) ของบล็อก หากไม่บริเวณรอยต่อมีขนาดอิเลเมนต์ไม่เท่ากันจะต้องสร้างบล็อกเพิ่มเติมขึ้นมาอีกหนึ่งบล็อกเพื่อทำให้ขนาดอิเลเมนต์ของบล็อกหนึ่งและอีกบล็อกหนึ่งเป็นไปตามที่ตั้งใจไว้

แนวทางอื่นในการสร้างสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าได้แก่ วิธีที่หนึ่ง สร้างสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าจากสามเหลี่ยมด้วยการรวมอิเลเมนต์สองรูปที่อยู่ติดกันเข้าด้วยกัน ในระหว่างการสร้างโครงประสานด้วยเทคนิคแอดวานซิงฟรอนท์ (Advancing Front) เป็นการนำเอาเทคนิคแอดวานซิงฟรอนท์มาตรฐานมาใช้และทำการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อยเกี่ยวกับตำแหน่งจินตนาการ (Ideal Position) ของออฟเซตโนด (Offset Node) เพื่อปรับคุณภาพของสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า การใช้วิธีนี้จะต้องกำหนดให้จำนวนของอิเลเมนต์สามเหลี่ยมมีจำนวนที่เป็นเลขคู่เท่านั้น วิธีที่สอง การสร้างสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าด้วยการแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าสามรูป เป็นวิธีที่ทำให้ได้โครงประสานที่

ไม่เป็นโครงสร้างและค่อนข้างมีคุณภาพต่ำปัจจุบัน ได้มีผู้คิดค้นเทคนิคในการสร้างโครงประสานเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าขึ้นมาอีกมากมาย อาทิ วิธีเพฟวิง (Paving) วิธีควอดทรี(Quadtree) เป็นต้น แม้ว่าวิธีเหล่านี้จะมีข้อดีซึ่งทำให้การสร้างโครงประสาณเป็นไปในลักษณะอัตโนมัติมากขึ้นแต่ก็ต้องประสบปัญหาในเรื่องของคุณภาพของโครงประสาณ ความยืดหยุ่นในการควบคุมขนาดของโครงประสาณและระยะเวลาในคำนวณหาตำแหน่งจุดกริด

ในวิทยานิพนธ์นี้ใช้วิธีมัลติบล็อกในการสร้างโครงประสาณ เนื่องจากรูปร่างของปัญหาที่ใช้ในการทดสอบไม่ได้ซับซ้อนมากนัก และต้องการควบคุมขนาดของโครงประสาณและการหันทิศทางของสี่เหลี่ยมให้สอดคล้องกับขอบเขตของปัญหา



บทที่ 2

สมการพื้นฐานของการไหล

พฤติกรรมต่างๆของการไหลแบบราบเรียบในสองมิติซึ่งได้แก่ ความเร็วในแนวแกน x ความเร็วในแนวแกน y ความดันและอุณหภูมิ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ 3 สมการคือ สมการอนุรักษ์มวล สมการอนุรักษ์โมเมนตัม และสมการอนุรักษ์พลังงาน สมการทั้งหมดข้างต้นถูกนำมาเขียนในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยภายในบทนี้ โดยจะกล่าวถึงสมการทั่วไปของการไหล สมมติฐานของการไหล สรุปสมการที่ใช้ในวิชานี้ และเงื่อนไขขอบเขตสำหรับโดเมนของการไหล (Flow Domain)

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

กฎการอนุรักษ์มวล กล่าวไว้ว่า มวลของสสารไม่มีการสูญหาย เมื่อนำมาประยุกต์กับปัญหาการไหล จะกล่าวได้ว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลของไหลภายในปริมาตรควบคุมของไหลมีค่าเท่ากับอัตราการไหลสุทธิของมวลของไหลที่ไหลเข้าสู่ปริมาตรควบคุมของไหลดังรูปที่ 2.1 สมการสำหรับการอนุรักษ์มวล สามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{โดยที่ } \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad (2.2)$$

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} \quad (2.3)$$

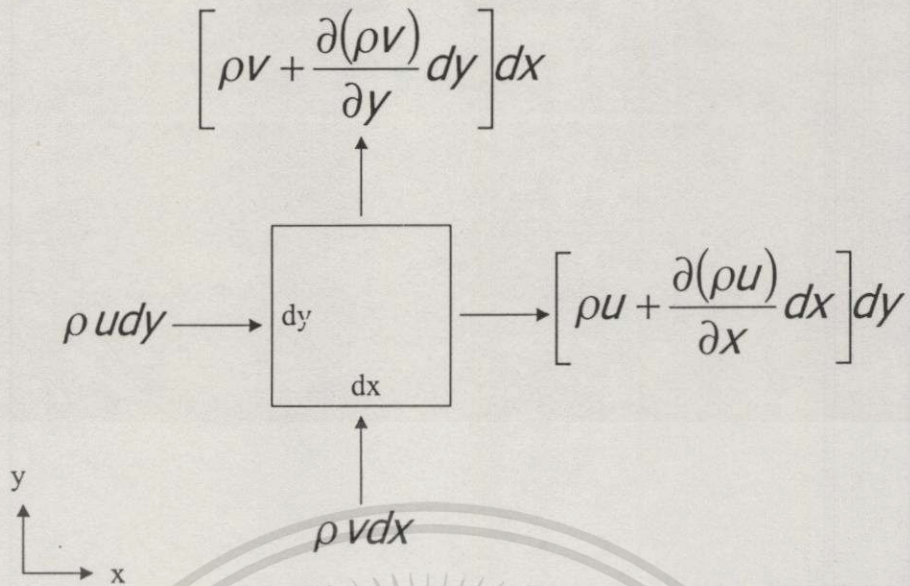
\vec{i} คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x

\vec{j} คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน y

ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล

u คือ ความเร็วในแนวแกน x

v คือ ความเร็วในแนวแกน y



รูปที่ 2.1 การไหลของมวลเข้าและออกจากปริมาตรควบคุม

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

สมการโมเมนตัมได้มาจากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน ซึ่งกล่าวไว้ว่า มวลคูณกับความเร่งในทิศทางที่กำหนดจะมีค่าเท่ากับแรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อวัตถุในทิศทางเดียวกัน แรงภายนอกที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหลประกอบด้วย แรงวัตถุ (Body Force) และแรงที่ผิว (Surface Force) แรงวัตถุเป็นแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหลโดยไม่มีการสัมผัส ได้แก่ แรงเนื่องจากความโน้มถ่วง แรงทางไฟฟ้า และแรงแม่เหล็ก เป็นต้น ในขณะที่แรงที่ผิวเป็นแรงที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหลโดยการสัมผัสบนผิว ได้แก่ แรงเนื่องจากความเค้นในแนวตั้งฉาก (Normal Stress) และความเค้นเฉือน (Shear Stress) รูปที่ 2.2 แสดงแรงทั้งหมดที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหลซึ่งมีความเล็ก 1 หน่วย

สมการอนุรักษ์โมเมนตัมในแนวแกน x

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.4)$$

โดยที่ f_x คือ แรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในทิศทาง x

σ_x คือ ความเค้นตั้งฉากในทิศทาง x

τ_{yx} คือ ความเค้นเฉือนในทิศทาง x บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน y

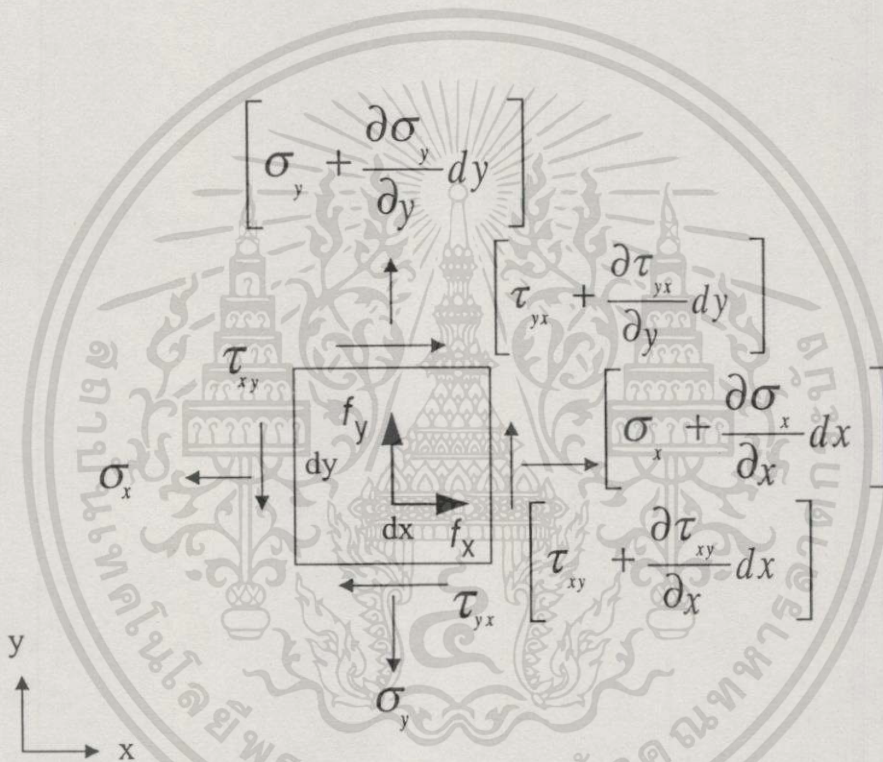
สมการอนุพันธ์โมเมนตัมในแนวแกน y

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \quad (2.5)$$

โดยที่ f_y คือ แรงวัตถุต่อหนึ่งหน่วยมวลในทิศทาง y

σ_y คือ ความเค้นตั้งฉากในทิศทาง y

τ_{xy} คือ ความเค้นเฉือนในทิศทาง y บนระนาบที่ตั้งฉากกับแกน x



รูปที่ 2.2 ความสมดุลของความเค้นทั้งหมดซึ่งกระทำต่อชิ้นส่วนของไหลสองมิติ

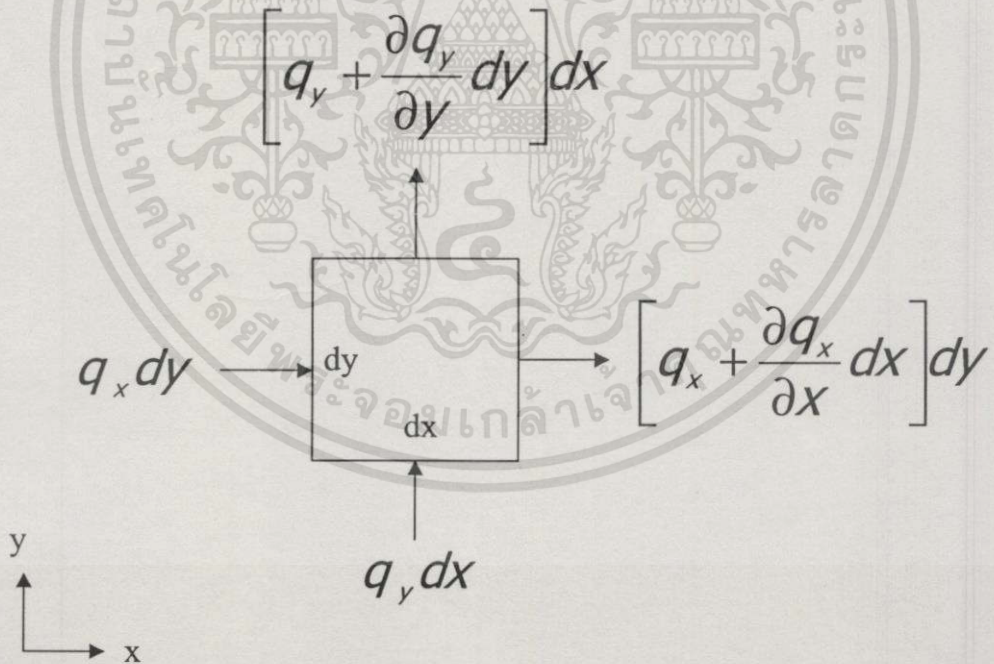
2.3 สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

การกระจายของอุณหภูมิในสนามการไหลควบคุมด้วยสมการพลังงาน ซึ่งได้มาจากการเขียนสมดุลพลังงานซึ่งเป็นไปตามกฎข้อที่หนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์สำหรับชิ้นส่วนของไหลภายในสนามการไหล ถ้าไม่คิดการแผ่รังสี และไม่มีแหล่งกำเนิดความร้อนภายในของไหล กฎของการอนุรักษ์พลังงานสำหรับของไหลสามารถกล่าวได้ว่า อัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงานในปริมาตรควบคุม เท่ากับ ผลรวมของอัตราของพลังงานขาเข้าสุทธิด้วยการนำความร้อน อัตราของพลังงานขาเข้า เอกสารนี้เป็นเอกสารทบทวนวิชาสำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

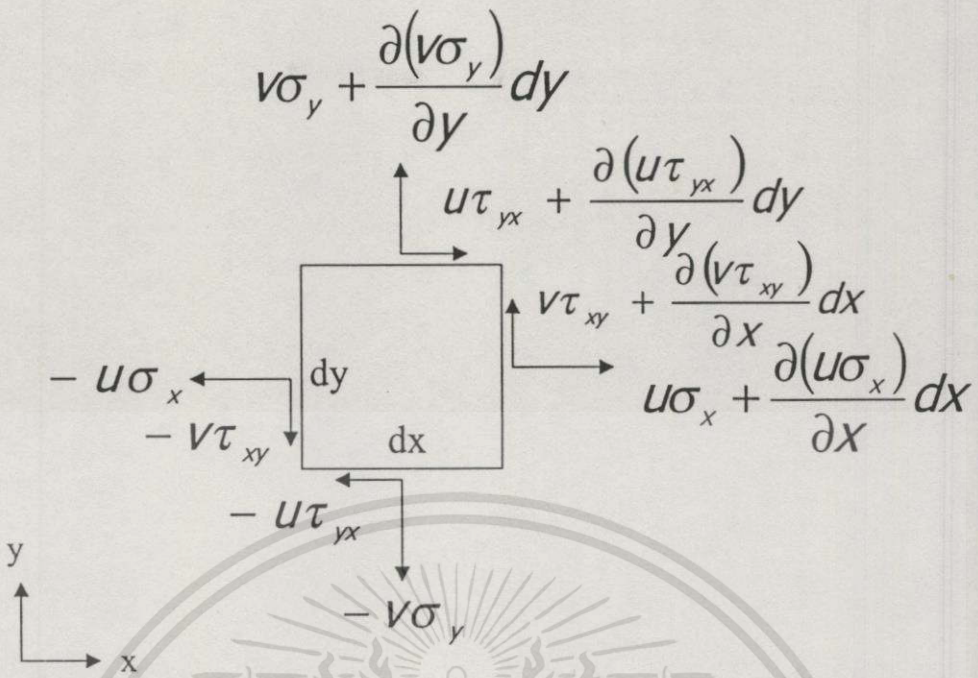
สุทธิเนื่องจากงานที่กระทำโดยแรงวัตถุ และอัตราของพลังงานขาเข้าสุทธิเนื่องจากงานที่กระทำโดยแรงที่ผิว รูปที่ 2.3 แสดงอัตราการถ่ายเทความร้อนเข้าและออกจากปริมาตรควบคุมด้วยการนำความร้อน อัตราการทำงานของของไหลที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุมดังแสดงในรูปที่ 2.4 เป็นอัตราการทำงานอันเนื่องมาจากความเค้นที่ผิวของปริมาตรควบคุม รายละเอียดของการสร้างสมการพลังงานสามารถหาอ่านได้ใน [24] สรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงานสำหรับการไหลใด ๆ ในสองมิติสามารถเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sigma_y) + \rho (u f_x + v f_y) \quad (2.6)$$

โดยที่ e คือ พลังงานภายในจำเพาะของของไหล (Fluid specific internal energy)
 k คือ ค่าสภาพการนำความร้อนของของไหล (Fluid thermal conductivity)
 T คือ อุณหภูมิของของไหล (Fluid temperature)



รูปที่ 2.3 การถ่ายเทความร้อน โดยการนำผ่านปริมาตรควบคุมของของไหล



รูปที่ 2.4 อีกรากการทำงานเนื่องจากแรงที่กระทำบนผิวของปริมาตรควบคุม

2.4 ความเค้นที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหล

สำหรับการไหลในสองมิติ ความเค้นที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหลสามารถเขียนอยู่ในรูปแบบเทนเซอร์ (Tensor) ได้ดังนี้ [11]

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}, \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.7)$$

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.8)$$

โดย p คือ ความดันรวม (Total Pressure) ของของไหล

δ_{ij} คือ Kronecker Delta ซึ่ง $\delta_{ij} = 1$ เมื่อ $i = j$ และ $\delta_{ij} = 0$ เมื่อ $i \neq j$

μ คือ ความหนืดพลศาสตร์ของของไหล (Fluid Dynamic Viscosity)

λ คือ Second Viscosity Coefficient [10]

จากสมมุติฐานของสโตคส์ (Stoke's Hypothesis) ได้กำหนดไว้ว่า [11]

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (2.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อแทนค่า λ จากสมการ (2.9) ลงในสมการ (2.8) จะได้

$$\sigma'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} \mu \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \quad , (i, j, k = 1, 2) \quad (2.10)$$

ถ้ากำหนดให้ $x_1 = x$, $x_2 = y$, $u_1 = u$, $u_2 = v$, $\sigma'_{11} = \sigma'_x$, $\sigma'_{12} = \tau'_{xy}$, $\sigma'_{21} = \tau'_{yx}$, $\sigma'_{22} = \sigma'_y$ เราสามารถเขียนสมการ (2.10) ออกมาเป็นชุดของสมการได้ดังนี้

$$\sigma'_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.11a)$$

$$\sigma'_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.11b)$$

$$\tau'_{xy} = \tau'_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.11c)$$

ดังนั้นความเค้นที่กระทำบนชิ้นส่วนของไหลจึงมีค่าดังต่อไปนี้

$$\sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.12a)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.12b)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.12c)$$

2.5 เงื่อนไขขอบเขตของการไหล

สมการเชิงอนุพันธ์ในหัวข้อ 2.1 ถึง 2.3 มีความสัมพันธ์กันและก่อให้เกิดระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เชิงเส้นขึ้น ซึ่งสามารถอธิบายการไหลได้ทุกรูปแบบ แต่สิ่งที่ทำให้คำตอบของระบบสมการเหล่านี้มีค่าแตกต่างกัน คือ เงื่อนไขขอบเขตที่ใช้บังคับการไหลภายในโดเมนการไหล โดยทั่วไปแล้วเงื่อนไขขอบเขตสามารถแบ่งออกเป็นประเภทต่างๆ ได้ดังนี้

1. เงื่อนไขขอบเขตที่ช่องทางไหลเข้า โดยปกติแล้วจะกำหนดเงื่อนไขของความเร็ว และ อุณหภูมิของของไหลดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u = u_i(x, y) \quad (2.13a)$$

$$v = v_i(x, y) \quad (2.13b)$$

$$T = T_i(x, y) \quad (2.13c)$$

2. เงื่อนไขขอบเขตที่ช่องทางไหลออก โดยปกติแล้วจะกำหนดเงื่อนไขของแรงที่กระทำบนขอบเขตดังนี้

$$P_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m \quad (2.14a)$$

$$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad (2.14b)$$

โดยที่ P_x คือ แรงที่กระทำบนขอบเขตในแนวแกน x

P_y คือ แรงที่กระทำบนขอบเขตในแนวแกน y

l, m คือ ทิศทางโคซายน์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งตั้งฉากกับขอบเขต

3. เงื่อนไขขอบเขตที่ผนัง ซึ่งจะต้องกำหนดความเร็วของของไหลที่ผนัง และอุณหภูมิของของไหลที่ผนังหรือฟลักซ์ความร้อน (Heat Flux) ที่ถ่ายเทเข้าสู่โดเมนของการไหลผ่านผนังดังนี้

$$u = u_w(x, y) \quad (2.15a)$$

$$v = v_w(x, y) \quad (2.15b)$$

$$T = T_w(x, y) \quad \text{หรือ} \quad q_s = q_w(x, y) \quad (2.15c)$$

โดยที่ q_s คือ ฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทผ่านผนังเข้าสู่โดเมนการไหล

2.6 การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สถานะอยู่ตัว

การไหลแบบไม่อัดตัว (Incompressible Flow) จัดเป็นการไหลแขนงหนึ่งที่มีความสำคัญมากในการศึกษาด้านกลศาสตร์ของไหล เป็นการไหลที่สามารถพบได้มากมายในงานวิศวกรรมและปรากฏการณ์ทางธรรมชาติ การไหลของก๊าซที่มีความเร็วต่ำและการไหลของของเหลวจัดได้ว่าเป็นเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การไหลแบบไม่อัดตัว เกณฑ์สำคัญสำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวคือ ตัวเลขมัค (Mach number) ซึ่งจะต้องมีค่าน้อยกว่า 0.3 คุณสมบัติของการไหลแบบไม่อัดตัวคือ ความหนาแน่นของของไหลมีค่าคงที่ การไหลแบบไม่อัดตัวสามารถจำแนกชนิดออกได้เป็น 2 ชนิดคือ การไหลชนิดไม่หนืด (Inviscid flow) และการไหลชนิดหนืด (Viscous Flow)

การไหลชนิดไม่หนืดจะสมมุติให้ค่าความหนืดพลศาสตร์ของของไหลมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งแม้ว่า ในทางปฏิบัติจะไม่มีของไหลชนิดใดที่มีคุณสมบัติดังที่กล่าว แต่การวิเคราะห์ปัญหาการไหลหลาย ปัญหาสามารถกระทำได้สะดวกขึ้น ในขณะที่เดียวกันผลลัพธ์ที่ได้ก็ยังมีที่น่าเชื่อถืออยู่ ยกตัวอย่างเช่น การไหลในบริเวณที่ห่างจากชั้นขอบเขต (Boundary Layer) ซึ่งถือว่าไม่มีความเค้นเฉือนมาต้านทานการไหล ในขณะที่การไหลชนิดหนืดเป็นการไหลที่เกิดขึ้นตามธรรมชาติ แม้ว่าการแก้ ปัญหาการไหลชนิดหนืดจะให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากกว่า แต่ในการหาผลลัพธ์ก็ จะต้องพบกับความยากลำบาก รูปแบบการไหลชนิดหนืดแบ่งออกได้เป็น 2 รูปแบบได้แก่ การไหลแบบราบเรียบ (Laminar Flow) และการไหลแบบปั่นป่วน (Turbulent Flow) การไหลแบบปั่นป่วน เป็นการไหลที่มีความซับซ้อนมากกว่าขอบเขตของวิทยานิพนธ์นี้ ดังนั้นจึงทำการวิเคราะห์การไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่มีรูปแบบการไหลแบบราบเรียบเท่านั้น

2.6.1 สมการทั่วไปสำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืด

สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืด สมการ (2.1) (2.4) (2.5) และ (2.6) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.16}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \rho f_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{2.17a}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \tag{2.17b}$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi \quad (2.18)$$

โดยที่ Φ คือ ฟังก์ชันการกระจายความหนืด (Viscous dissipation function) ซึ่งในกรณีนี้มีค่าดังสมการ

$$\Phi = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2.19)$$

2.6.2 สมมุติฐานที่ใช้ในวิทยานิพนธ์

สมการทั่วไปสำหรับการไหลแบบหนืดดังที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อ 2.6.1 แล้วนั้น แม้ว่าจะมีรูปแบบที่ง่ายต่อการหาคำตอบมากขึ้น แต่ความซับซ้อนของระบบสมการสามารถลดลงได้หากเพิ่มสมมุติฐานดังต่อไปนี้เข้าไป

1. การไหลเกิดขึ้นที่สภาวะอยู่ตัว (Steady State)
2. พลังงานภายในแปรผันแบบเชิงเส้นกับอุณหภูมิในช่วงที่ทำให้การวิเคราะห์การไหล
3. แรงโน้มถ่วงมีผลต่อการคำนวณเฉพาะในทิศทาง y เท่านั้น
4. ของไหลไม่สามารถผลิตความร้อนขึ้นได้เอง
5. ละทิ้งผลของการกระจายพลังงานความหนืด (Viscous Energy Dissipation)
6. ความหนืดพลศาสตร์ ความจุความร้อนจำเพาะ และสภาพการนำความร้อนของ

ของไหลเป็นค่าคงที่

2.6.3 ผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ

ของไหลเมื่อได้รับความร้อนจนกระทั่งมีอุณหภูมิสูงขึ้นจะเกิดการขยายปริมาตร นอกจากนี้ความดันภายในของไหลก็เพิ่มขึ้นด้วยเช่นกัน ซึ่งเป็นผลให้เกิดการไหลของของไหลภายในโดเมนการไหลขึ้น การขยายตัวดังกล่าวทำให้เกิดแรงอีกชนิดหนึ่งขึ้นเรียกว่า แรงลอยตัว (Buoyant Force) เป็นแรงที่พยายามผลักดันของไหลให้ลอยสูงขึ้นในทิศทาง y ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมในทิศทาง y จะต้องเพิ่มแรงลอยตัวเข้าไปด้วย สมการ (2.17b) จึงกลายเป็น

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ β คือ สัมประสิทธิ์ของการขยายตัวทางความร้อน (Coefficient of Thermal Expansion) ของของไหล ซึ่งเป็นฟังก์ชันของความดัน และอุณหภูมิ แต่ในวิชานิพนธ์นี้จะสมมติให้ β เป็นค่าคงที่

T_0 คือ อุณหภูมิเฉลี่ยของของไหล ในที่นี้มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยของอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุดของของไหลภายในโดเมนการไหล [14]

2.6.4 สรุปสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว

ด้วยสมมติฐานของของไหล และผลของแรงลอยตัวอันเนื่องมาจากความแตกต่างของอุณหภูมิ ทำให้สามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวดังต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.21)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (2.22a)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.22b)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ของการอนุรักษ์พลังงาน

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (2.23)$$

$$\text{โดยที่ } \sigma_x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.24)$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.25)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

สมการไฟไนต์เอลิเมนต์

ในบทนี้จะอธิบายถึงขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ฟังก์ชันการประมาณค่าภายในช่วงสำหรับเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยม หลักการถ่วงน้ำหนักเศษค่างของกาเลอร์คิน การประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการพาความร้อนด้วยวิธีกาเลอร์คิน การหาผลลัพธ์ด้วยระเบียบการทำซ้ำของวิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Iteration Method) [15] การแก้สมการเชิงเส้นด้วยวิธีการกำจัดแบบเกาส์ และสุดท้ายจะนำเสนอเงื่อนไขของการลู่อับหาคำตอบ

3.1 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [1]

ขั้นตอนทั่วไปของการแก้ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนดังนี้

1. สร้างโดเมน (Domain) ของปัญหา และแบ่งย่อย (Discretize) โดเมนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยจำนวนมากหรืออาจกล่าวได้ว่า โดเมนของการไหลได้ถูกแทนที่ด้วยเอลิเมนต์ (Element) จำนวนมากซึ่งเชื่อมติดกันด้วยจุดต่อ (Node)
2. สมมุติฟังก์ชันรูปร่าง (Shape Function) เพื่อนำมาใช้แทนคุณสมบัติทางกายภาพต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ ดังนั้นฟังก์ชันโดยประมาณซึ่งมีความต่อเนื่องตลอดทั้งเอลิเมนต์จะถูกใช้แทนตัวแปรไม่ทราบค่าของเอลิเมนต์
3. ประดิษฐ์เมทริกซ์ของเอลิเมนต์ (Element Matrix)
4. นำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน เพื่อให้ได้เมทริกซ์รวมของระบบ (Global Matrix)
5. ระบุเงื่อนไขขอบเขตต่าง ๆ ให้กับระบบสมการ และทำการแก้ระบบสมการเพื่อหาคำตอบที่จุดต่อต่าง ๆ ภายในโดเมน
6. คำนวณค่าอื่น ๆ ที่ต้องการทราบ เช่น เมื่อทราบอุณหภูมิที่จุดต่างๆ ก็สามารถคำนวณหาอัตราการถ่ายเทความร้อนได้หรือเมื่อทราบความเร็วของของไหลก็สามารถคำนวณอัตราการไหลได้

3.2 การแบ่งย่อย (Discretization)

หลังจากกำหนดรูปร่างของโดเมนการไหลเป็นที่เรียบร้อยแล้ว จะทำการแบ่งโดเมนออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (Quadrilateral Element) โดยกำหนดให้ใช้เอลิเมนต์ที่มีฟังก์ชันประมาณค่าอันดับสอง (เอลิเมนต์ 8 จุดต่อ) สำหรับหาความเร็วในแนวแกน x ความเร็วในแนวแกน y และ อุณหภูมิ และใช้เอลิเมนต์ที่มีฟังก์ชันเชิงเส้น (เอลิเมนต์ 4 จุดต่อ) สำหรับหาความดันภายในเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดเมนการไหล ค่าสมมุติของความเร็ว อุณหภูมิ และความดันภายในอิเลิเมนต์ จะอยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$u(x,y) = [N] \{u\} = N_{\alpha} u_{\alpha} \quad , (\alpha = 1,2,\dots,8) \quad (3.1)$$

(1x8)(8x1)

$$v(x,y) = [N] \{v\} = N_{\alpha} v_{\alpha} \quad , (\alpha = 1,2,\dots,8) \quad (3.2)$$

(1x8)(8x1)

$$T(x,y) = [N] \{T\} = N_{\alpha} T_{\alpha} \quad , (\alpha = 1,2,\dots,8) \quad (3.3)$$

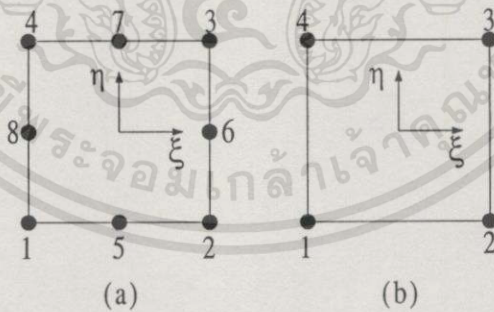
(1x8)(8x1)

$$p(x,y) = [H] \{p\} = H_{\lambda} p_{\lambda} \quad , (\lambda = 1,2,3,4) \quad (3.4)$$

(1x4)(4x1)

โดยที่

[N] คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณค่าอันดับสองภายในอิเลิเมนต์
[H] คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณค่าอันดับหนึ่งภายในอิเลิเมนต์



รูปที่ 3.1 หมายเลขกำกับจุดต่อภายในอิเลิเมนต์ (a) สี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ (b) สี่เหลี่ยม 4 จุดต่อ

เพื่อความสะดวกในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์และการประหยัดหน่วยความจำของคอมพิวเตอร์ จึงได้จัดเรียงหมายเลขจุดต่อดังรูปที่ 3.1 เพื่อให้จุดต่อบริเวณมุมทั้งสี่ของอิเลิเมนต์ 8 จุดต่อตรงกันกับหมายเลขจุดต่อของอิเลิเมนต์ 4 จุดต่อ ฟังก์ชันการประมาณค่าภายในอิเลิเมนต์ทั้งสองแบบมีความสัมพันธ์กับพิกัดธรรมชาติ (ξ, η) ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อิลิเมนต์สี่เหลี่ยม 8 จุดต่อ

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \quad (3.5a)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \quad (3.5b)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \quad (3.5c)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \quad (3.5d)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \quad (3.5e)$$

$$N_6 = \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (3.5f)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \quad (3.5g)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (3.5h)$$

อิลิเมนต์สี่เหลี่ยม 4 จุดต่อ

$$H_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (3.6a)$$

$$H_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \quad (3.6b)$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \quad (3.6c)$$

$$H_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (3.6d)$$

โดยที่ ξ และ η คือ พิกัดธรรมชาติบน master element มีค่าอยู่ระหว่าง -1 ถึง 1

3.3 การประดิษฐ์สมการไฟไนต์อิลิเมนต์

สมการเชิงอนุพันธ์ของการไหลในรูปแบบอนุกรม ซึ่งได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 คือ สมการ (2.22a) (2.22b) (2.23) และ (2.21) ถูกนำมาแสดงอีกครั้ง

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (3.7a)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g [1 - \beta(T - T_0)] \quad (3.7b)$$

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (3.7c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

สมการไฟไนต์อิลิเมนต์สามารถหาได้ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษคก้าง โดยการนำเอาค่าฟังก์ชันน้ำหนักมาคูณกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา ผลลัพธ์ของปัญหาเกิดขึ้นเมื่อค่าปริพันธ์ (Integral) ของผลคูณนี้บนอิลิเมนต์ที่มีค่าเท่ากับศูนย์ วิธีของกาลเลอร์กินจะกำหนดให้ฟังก์ชันน้ำหนักนี้มีค่าเท่ากับฟังก์ชันรูปร่างของอิลิเมนต์ผลที่ได้คือ

$$\int_A N_\alpha \left[\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right] dA = 0 \quad (3.9a)$$

$$\int_A N_\alpha \left[\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho g [1 - \beta(T - T_0)] \right] dA = 0 \quad (3.9b)$$

$$\int_A N_\alpha \left[\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dA = 0 \quad (3.9c)$$

$$\int_A H_\lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA = 0 \quad (3.9d)$$

สมการ (3.9a-d) นี้ประกอบด้วยสมการทั้งหมด 28 สมการ ประกอบด้วยสมการ (3.9a) จำนวน 8 สมการ สมการ (3.9b) จำนวน 8 สมการ สมการ (3.9c) จำนวน 8 สมการ และสมการ (3.9d) จำนวน 4 สมการ ต่อจากนั้นทำการประยุกต์ทฤษฎีบทของเกาส์กับสมการที่ (3.9a-c) เพื่อก่อให้เกิดค่าปริพันธ์บนขอบเขตของอิลิเมนต์ดังนี้

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dA &= \int_A \frac{\partial}{\partial x} (N_\alpha \sigma_x) dA - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \sigma_x dA \\ &= \int_{S_0} N_\alpha \sigma_x l dS_0 - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \sigma_x dA \end{aligned} \quad (3.10a)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
 \int_A N_\alpha \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dA &= \int_A \frac{\partial}{\partial y} (N_\alpha \tau_{yx}) dA - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \tau_{yx} dA \\
 &= \int_{S_0} N_\alpha \tau_{yx} m dS_0 - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \tau_{yx} dA
 \end{aligned} \tag{3.10b}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A N_\alpha \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dA &= \int_A \frac{\partial}{\partial x} (N_\alpha \tau_{xy}) dA - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \tau_{xy} dA \\
 &= \int_{S_0} N_\alpha \tau_{xy} l dS_0 - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \tau_{xy} dA
 \end{aligned} \tag{3.11a}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A N_\alpha \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dA &= \int_A \frac{\partial}{\partial y} (N_\alpha \sigma_y) dA - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \sigma_y dA \\
 &= \int_{S_0} N_\alpha \sigma_y m dS_0 - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \sigma_y dA
 \end{aligned} \tag{3.11b}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A N_\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA &= \int_A \frac{\partial}{\partial x} \left(N_\alpha k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dA - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dA \\
 &= \int_{S_w} N_\alpha k \frac{\partial T}{\partial x} l dS_w - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dA
 \end{aligned} \tag{3.12a}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A N_\alpha \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA &= \int_A \frac{\partial}{\partial y} \left(N_\alpha k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} dA \\
 &= \int_{S_w} N_\alpha k \frac{\partial T}{\partial y} m dS_w - \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} dA
 \end{aligned} \tag{3.12b}$$

แทนค่าปริพันธ์ในสมการ (3.10) ถึง (3.12) ลงในสมการ (3.9a-c) จะได้ผลดังนี้

$$\begin{aligned}
 \int_A N_\alpha \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA + \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \sigma_x dA + \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \tau_{yx} dA \\
 = \int_{S_0} N_\alpha (\sigma_x l + \tau_{yx} m) dS_0
 \end{aligned} \tag{3.13a}$$

$$\begin{aligned}
 \int_A N_\alpha \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA + \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \tau_{xy} dA + \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \sigma_y dA + \int_A N_\alpha \rho g [1 - \beta(T - T_0)] dA \\
 = \int_{S_0} N_\alpha (\tau_{xy} l + \sigma_y m) dS_0
 \end{aligned} \tag{3.13b}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} \int N_\alpha \rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA + \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} dA + \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} dA \\ = \int_{S_w} N_\alpha \left(k \frac{\partial T}{\partial x} l + k \frac{\partial T}{\partial y} m \right) dS_w \end{aligned} \quad (3.13c)$$

หลังจากแทนค่าความเค้นจากสมการที่ (2.24) ถึง (2.26) ลงไปในสมการที่ (3.13a-c) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA - \frac{1}{\rho} \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} p dA + 2v \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dA + v \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dA \\ = \frac{1}{\rho} \int_{S_0} N_\alpha P_x dS_0 \end{aligned} \quad (3.14a)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) dA + v \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dA - \frac{1}{\rho} \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} p dA + 2v \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dA \\ - g \beta \int_A N_\alpha T dA = \frac{1}{\rho} \int_{S_0} N_\alpha P_y dS_0 - g(1 + \beta T_0) \int_A N_\alpha dA \end{aligned} \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned} \int_A N_\alpha \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dA + \frac{k}{\rho c} \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dA + \frac{k}{\rho c} \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} dA \\ = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_\alpha q_w dS_w \end{aligned} \quad (3.14c)$$

โดยที่ $P_x = \sigma_x l + \tau_{yx} m$ (3.15)

$P_y = \tau_{xy} l + \sigma_y m$ (3.16)

$q_w = k \frac{\partial T}{\partial x} l + k \frac{\partial T}{\partial y} m$ (3.17)

l และ m คือ direction cosine ในทิศทาง x และ y ตามลำดับ

การแทนค่าของความเร็ว อุณหภูมิ และความเค้นจากสมการที่ (3.1) ถึง (3.4) ลงในสมการที่ (3.14a-c) และ (3.9d) จะได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปแบบดังนี้

$$K_{\alpha\beta\gamma} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda} P_\lambda + S_{\alpha\beta} u_\beta + S_{\alpha\beta\gamma} v_\beta = Q_\alpha \quad (3.18a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda} P_\lambda - K_{\alpha\beta} T_\beta + S_{\alpha\beta} u_\beta + S_{\alpha\beta\gamma} v_\beta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= Q_{\alpha'} - C_{\alpha} - D_{\alpha} \quad (3.18b)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma'} u_{\beta} T_{\gamma} + K_{\alpha\beta\gamma''} v_{\beta} T_{\gamma} + M_{\alpha\beta\alpha'} T_{\beta} + M_{\alpha\beta\gamma''} T_{\beta} = Q_{\alpha'} \quad (3.18c)$$

$$H_{\beta\mu'} u_{\beta} + H_{\beta\mu''} v_{\beta} = 0 \quad (3.18d)$$

สัมประสิทธิ์ต่าง ๆ ซึ่งแสดงไว้ในสมการ (3.18a-d) เป็นเมทริกซ์ที่อยู่ในรูปแบบของปริพันธ์บนพื้นที่ของอิลิเมนต์ และตลอดความยาวของขอบอิลิเมนต์ S_o และ S_w

$$K_{\alpha\beta\gamma'} = \int_A N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial x} dA \quad (3.19a)$$

$$K_{\alpha\beta\gamma''} = \int_A N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial y} dA \quad (3.19b)$$

$$H_{\alpha\lambda'} = \frac{1}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} H_{\lambda} dA \quad (3.19c)$$

$$H_{\alpha\lambda''} = \frac{1}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} H_{\lambda} dA \quad (3.19d)$$

$$S_{\alpha\beta\alpha'} = 2 \frac{\mu}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} dA + \frac{\mu}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} dA \quad (3.19e)$$

$$S_{\alpha\beta\gamma''} = \frac{\mu}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} dA + 2 \frac{\mu}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} dA \quad (3.19f)$$

$$S_{\alpha\beta\gamma''} = \frac{\mu}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} dA \quad (3.19g)$$

$$S_{\alpha\beta\alpha''} = \frac{\mu}{\rho_A} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial y} dA \quad (3.19h)$$

$$M_{\alpha\beta\alpha''} = \frac{k}{\rho c} \int \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x} dA \quad (3.19i)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$M_{\alpha\beta\gamma} = \frac{k}{\rho c} \int_A \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} dA \quad (3.19j)$$

$$K_{\alpha\beta} = g\beta \int_A N_\alpha N_\beta dA \quad (3.19k)$$

$$Q_{\alpha^u} = \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_x dS_o \quad (3.19l)$$

$$Q_{\alpha^v} = \frac{1}{\rho} \int_{S_o} N_\alpha P_y dS_o \quad (3.19m)$$

$$Q_{\alpha^r} = \frac{1}{\rho c} \int_{S_w} N_\alpha q_w dS_w \quad (3.19n)$$

$$C_\alpha = g \int_A N_\alpha dA \quad (3.19o)$$

$$D_\alpha = g\beta T_o \int_A N_\alpha dA \quad (3.19p)$$

$$H_{\beta\mu^x} = \frac{1}{\rho} \int_A \frac{\partial N_\beta}{\partial x} H_\mu dA \quad (3.19q)$$

$$H_{\beta\mu^y} = \frac{1}{\rho} \int_A \frac{\partial N_\beta}{\partial y} H_\mu dA \quad (3.19r)$$

สมการไฟไนต์อีลิเมนต์ที่ได้ถูกแสดงไว้ในสมการ (3.18a-d) เป็นระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งในหัวข้อ 3.4 จะได้อธิบายวิธีการแก้ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

3.4 การประยุกต์ระเบียบวิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

สมการที่ (3.18a-d) นั้นเป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งการหาผลลัพธ์ของระบบสมการดังกล่าวไม่สามารถกระทำได้โดยการคำนวณเพียงครั้งเดียว จึงจำเป็นต้องใช้วิธีการทำซ้ำสำหรับหาผลลัพธ์

พิจารณาระบบสมการไม่เชิงเส้นซึ่งประกอบด้วย n สมการดังนี้

$$[K(x)][x] = \{R\} \quad (3.20)$$

โดย $\{x\}$ คือ เวกเตอร์เมทริกซ์ของตัวไม่ทราบค่า

หาก $\{x\}$ ไม่ใช่ผลลัพธ์ของระบบสมการ บ่อมจะเกิดฟังก์ชันค่าตกค้าง ($\{R\}$) ดังสมการ

$$\{F(x)\} = [K(x)][x] - \{R\} \quad (3.21)$$

ซึ่งเมื่อนำมาแจกแจงแต่ละสมการจะได้

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n K_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) - R_i \quad (3.22)$$

โดย $i = 1, 2, \dots, n$

เมื่อใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's series) เพียงพจน์อันดับหนึ่งสำหรับประมาณค่าของฟังก์ชันค่าตกค้างที่ $\{x + \Delta x\}$ จะได้ว่า

$$F_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \Delta x_j \quad (3.23)$$

ถ้า $\{x + \Delta x\}$ เข้าสู่ผลลัพธ์แม่นยำ ฟังก์ชันค่าตกค้างจะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสมการ (3.23) จะก่อให้เกิดระบบสมการที่มี $\{\Delta x\}$ เป็นตัวไม่ทราบค่าในรูปแบบดังนี้

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \Delta x_j = -F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.24)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ฟังก์ชันค่าตกค้างของสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ (3.18a-d) อยู่ในรูปแบบดังต่อไปนี้

$$F_{\alpha^u} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta u_\gamma - H_{\alpha\lambda^x} p_\lambda + S_{\alpha\beta^x} u_\beta + S_{\alpha\beta^y} v_\beta - Q_{\alpha^u} \quad (3.25a)$$

$$F_{\alpha^v} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta v_\gamma - H_{\alpha\lambda^y} p_\lambda - K_{\alpha\beta} T_\beta + S_{\alpha\beta^x} u_\beta + S_{\alpha\beta^y} v_\beta - Q_{\alpha^v} + C_\alpha + D_\alpha \quad (3.25b)$$

$$F_{\alpha^T} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\beta T_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\beta T_\gamma + M_{\alpha\beta^x} T_\beta + M_{\alpha\beta^y} T_\beta - Q_{\alpha^T} \quad (3.25c)$$

$$F_{\beta^p} = H_{\beta\mu^x} u_\beta + H_{\beta\mu^y} v_\beta \quad (3.25d)$$

หลังจากแทนฟังก์ชันค่าตกค้างในสมการ (3.25a-d) ลงใน (3.24) จะได้ระบบสมการของค่าที่เพิ่มขึ้นของตัวไม่ทราบค่าต่าง ๆ ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uv} & 0 & K_{up} \\ K_{vu} & K_{vv} & K_{vT} & K_{vp} \\ K_{Tu} & K_{Tv} & K_{TT} & 0 \\ K_{pu} & K_{pv} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_\beta \\ \Delta v_\beta \\ \Delta T_\beta \\ \Delta p_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\alpha^u} \\ F_{\alpha^v} \\ F_{\alpha^T} \\ F_{\beta^p} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

(28 × 28) (28 × 1) (28 × 1)

โดยเมทริกซ์ต่าง ๆ ทางด้านซ้ายของสมการ (3.26) หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$K_{uu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^z} v_\gamma + S_{\alpha\beta^x} \quad (3.27a)$$

$$K_{uv} = K_{\alpha\beta\gamma^y} u_\gamma + S_{\alpha\beta^y} \quad (3.27b)$$

$$K_{up} = -H_{\alpha\lambda^x} \quad (3.27c)$$

$$K_{vu} = K_{\alpha\beta\gamma^x} v_\gamma + S_{\alpha\beta^x} \quad (3.27d)$$

$$K_{vv} = K_{\alpha\beta\gamma^x} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^y} v_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma^z} v_\gamma + S_{\alpha\beta^y} \quad (3.27e)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_{vT} = -K_{\alpha\beta} \quad (3.27f)$$

$$K_{vp} = -H_{\alpha\lambda} \quad (3.27g)$$

$$K_{Tu} = K_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma \quad (3.27h)$$

$$K_{Tv} = K_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma \quad (3.27i)$$

$$K_{TT} = K_{\alpha\beta\gamma} u_\gamma + K_{\alpha\beta\gamma} v_\gamma + M_{\alpha\beta\alpha} + M_{\alpha\beta\gamma} \quad (3.27j)$$

$$K_{p\mu} = H_{\beta\mu} \quad (3.27k)$$

$$K_{p\nu} = H_{\beta\mu} \quad (3.27l)$$

3.5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์

เพื่อแสดงวิธีการหาคำตอบด้วยการกำจัดแบบเกาส์ จึงพิจารณาระบบเมตริกซ์เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 22 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนทั่วไปของการกำจัดแบบเกาส์คือ

ขั้นตอนที่ 1 ทำการลบสมการแถวที่หนึ่งออกจากสมการแถวที่สองและสามเพื่อให้ได้ค่าเป็นศูนย์ต่ำกว่าแนวทะแยงมุมในหลักที่หนึ่ง ในตัวอย่างง่ายๆนี้ ทุกค่าในหลักที่หนึ่งคือ 1 ดังนั้นเมื่อทำการลบสมการแถวที่หนึ่งออกจากสมการแถวที่สองและสาม ดังนั้นสมการที่ได้คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2 ลบสมการแถวที่สองออกจากสมการแถวที่สาม ดังนั้นก่อนที่จะกำจัดค่าสัมประสิทธิ์ในหลักที่สอง ต้องทำการคูณสมการแถวที่สองด้วยค่า -1 แล้วนำเอาลบออกจากสมการที่สาม ดังนั้นจะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{cases} = \begin{cases} 6 \\ -4 \\ 12 \end{cases}$$

ขั้นตอนที่สาม การแทนค่ากลับ เริ่มต้นจากสมการสุดท้ายไปสู่สมการที่หนึ่ง จะได้คำตอบ x_3, x_2 และ x_1 ตามลำดับ

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{12}{4} = 3 \\ x_2 &= \frac{-4 + 4(3)}{4} = 2 \\ x_1 &= \frac{67 - 1(2) - 1(3)}{1} = 1 \end{aligned}$$

การแก้ระบบสมการขนาดใหญ่ต้องการการหาแถวสมการหลัก (Pivoting) จากระบบสมการก่อนกระทำการกำจัดแต่ละครั้ง ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้การจัดแบบเกาส์ซึ่งรวมเอาการหาสมการตัวหลักเข้าไว้ด้วย เนื่องจาก ค่าของสมาชิกของเมตริกซ์บางตำแหน่งภายในแกนทแยงมุมมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งหากไม่ทำการสลับตำแหน่งเพื่อหาแถวสมการหลัก วิธีการกำจัดแบบเกาส์ก็จะไม่สามารถหาคำตอบของระบบสมการได้

การหาสมการหลักในที่นี้ หมายถึงการค้นหาสมการที่มีค่าสัมบูรณ์ของค่าสัมประสิทธิ์สำหรับสมาชิกแรกของตัวแปรไม่ทราบค่าเป็นค่าสูงสุด แล้วสลับตำแหน่งให้มาอยู่ในแถวที่หนึ่ง สมการนี้จะถูกเรียกว่าสมการตัวหลัก (Pivoting Equation) และค่าสัมประสิทธิ์ค่าแรกจะถูกเรียกว่าสัมประสิทธิ์ตัวหลัก (Pivot Coefficient) สมการตัวหลักนี้ใช้สำหรับกำจัดตัวแปรไม่ทราบค่าตัวแปรแรกของทุกสมการออกไปจากระบบสมการ วิธีการกำจัดตัวแปรเริ่มจาก การคำนวณตัวประกอบพิเศษซึ่งเป็นค่าที่ใช้สำหรับคูณสมการตัวหลักเพื่อให้ได้สมการใหม่ที่จะนำเอาไปลบออกจากสมการในแถวอื่นที่เหลืออยู่เพื่อกำจัดค่าสัมประสิทธิ์ในสดมภ์ตัวหลัก (Pivot Column) ตัวประกอบนี้คือสัมประสิทธิ์ในสดมภ์ตัวหลักภายในแถวตัวหลัก (Pivot Row) ปัจจุบันที่ถูกหารด้วยสัมประสิทธิ์ตัวหลัก

เมทริกซ์เชิงเส้นในสมการ (3.26) จะถูกนำมาแก้ด้วยการกำจัดแบบเกาส์ เพื่อหาค่า Δu Δv ΔT และ Δp หลังจากนั้นจะนำเอาค่าเหล่านี้ไปบวกกับค่าของ u v T และ p ภายในโดเมนการไหลซึ่งเกิดจากการหาค่าตอบครั้งก่อนหน้า แล้วนำมาตรวจสอบการลู่เข้าคำตอบต่อไป

ถ้าค่า u_Y^q, v_Y^q, T_Y^q และ p_λ^q หมายถึงค่าตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งได้แก่ ความเร็วในแกน x จำนวน N จุดต่อ ความเร็วในแกน y จำนวน N จุดต่อ อุณหภูมิจำนวน N จุดต่อ และความดันจำนวน M จุดต่อ สำหรับการคำนวณครั้งที่ q ต่อจากนี้ตัวแปรทั้งหมดจำนวน $3N + M$ จะถูกแทนที่ด้วย X^q ค่า $u_Y^{q-1}, v_Y^{q-1}, T_Y^{q-1}$ และ p_λ^{q-1} เป็นค่าของตัวแปรไม่ทราบค่าของการคำนวณครั้งที่ $i-1$ ซึ่งถูกแทนที่ด้วย X^{q-1} ระเบียบวิธีการทำซ้ำนี้จะสิ้นสุดเมื่อความคลาดเคลื่อนรวม (Overall Error) มีค่าน้อยกว่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (Tolerance) ซึ่งผู้ใช้โปรแกรมสามารถกำหนดเอง ในที่นี้กำหนดให้ ความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้มีค่าเท่ากับ 0.001

$$\text{Overall error} = \max \left(\frac{|X^q - X^{q-1}|}{|X^q|} \right) < 0.001 \quad (3.28)$$

3.6 การประดิษฐ์ไฟในทีอิลิเมนต์เมทริกซ์

ฟังก์ชันประมาณค่าภายในช่วงสำหรับมาสเตอร์อิลิเมนต์ (Master element) 8 จุดต่อ ($\{N\}$) และสำหรับมาสเตอร์อิลิเมนต์ (Master element) 4 จุดต่อ ($\{H\}$) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} 0.25(1-\xi)(1-\eta)(-1-\xi-\eta) \\ 0.25(1+\xi)(1-\eta)(-1+\xi-\eta) \\ 0.25(1+\xi)(1+\eta)(-1+\xi+\eta) \\ 0.25(1-\xi)(1+\eta)(-1-\xi+\eta) \\ 0.5(1-\xi^2)(1-\eta) \\ 0.5(1+\xi)(1-\eta^2) \\ 0.5(1-\xi^2)(1+\eta) \\ 0.5(1-\xi)(1-\eta^2) \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 0.25(1-\xi)(1-\eta) \\ 0.25(1+\xi)(1-\eta) \\ 0.25(1+\xi)(1+\eta) \\ 0.25(1-\xi)(1+\eta) \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

การแปลงรูป (Transformation) ของพิกัด x และ y ระหว่างอีลิเมนต์สี่เหลี่ยมทั่วไป (Ω^e) และ มาตรฐานอีลิเมนต์เป็นไปตามสมการ

$$x = \sum_{i=1}^m x_i N_i(\xi, \eta) \quad , \quad y = \sum_{i=1}^m y_i N_i(\xi, \eta) \quad (3.31)$$

โดย N_i แทนฟังก์ชันการประมาณค่าภายใน Master element บนพิกัดธรรมชาติ

m แทนจำนวนจุดต่อภายในอีลิเมนต์

อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์เทียบกับตัวแปร x และ y หาได้จากกฎลูกโซ่ (Chain rule)

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.32a)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.32b)$$

หรือเขียนอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

โดย \mathbf{J} คือ Jacobian Matrix ของการแปลงรูป

อนุพันธ์ของฟังก์ชันประมาณค่าอันดับที่หนึ่งเทียบกับพิกัด ξ และ η คือ

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.25(\eta + 2\xi - 2\xi\eta - \eta^2) \\ 0.25(-\eta + 2\xi - 2\xi\eta + \eta^2) \\ 0.25(\eta + 2\xi + 2\xi\eta + \eta^2) \\ 0.25(-\eta + 2\xi + 2\xi\eta - \eta^2) \\ -\xi + \xi\eta \\ 0.5(1 - \eta^2) \\ -\xi - \xi\eta \\ 0.5(-1 + \eta^2) \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\left\{ \frac{\partial N}{\partial \eta} \right\} = \begin{pmatrix} 0.25(\xi + 2\eta - \xi^2 - 2\xi\eta) \\ 0.25(-\xi + 2\eta - \xi^2 + 2\xi\eta) \\ 0.25(\xi + 2\eta + \xi^2 + 2\xi\eta) \\ 0.25(-\xi + 2\eta + \xi^2 - 2\xi\eta) \\ 0.5(-1 + \xi^2) \\ -\eta - \xi\eta \\ 0.5(1 - \xi^2) \\ -\eta + \xi\eta \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับหนึ่งสำหรับฟังก์ชันประมาณค่าภายใน โดเมน (พิกัด x และ y) คือ

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

โดยที่ $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i$, $\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i$ (3.37)

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \quad (3.38)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^m \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_m}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_m}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_m & y_m \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนท์ของ Jacobian Matrix ถูกเรียกว่า Jacobian (J)

$$J = \det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (3.40)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ จะต้องทำการหาปริพันธ์ของฟังก์ชันประมาณค่าภายในเอลิเมนต์ ปริพันธ์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันประมาณค่าอันดับที่หนึ่งเทียบกับพิกัด x และ y และผลคูณของค่าทั้งสอง ซึ่งสามารถกระทำได้โดยการหาปริพันธ์ด้วยวิธีเชิงตัวเลขชื่อว่า Gauss Quadrature บนมาสเตอร์เอลิเมนต์ โดยอาศัยความสัมพันธ์

$$dA = dx dy = J d\xi d\eta \tag{3.41}$$

โดย A คือ พื้นที่ของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม

การหาปริพันธ์ด้วยวิธี Gauss Quadrature สำหรับฟังก์ชัน $F(\xi, \eta)$ บนมาสเตอร์เอลิเมนต์ Ω สามารถทำได้ด้วยสมการ

$$\int_{\Omega} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) d\eta d\xi \approx \int_{-1}^1 \left[\sum_{j=1}^N F(\xi, \eta_j) W_j \right] d\xi \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N F(\xi_i, \eta_j) W_i W_j \tag{3.42}$$

เมื่อ M และ N แทนจำนวนจุดเกาส์ในทิศทาง ξ และ η ตามลำดับ (ξ_i, η_j) แทนจุดเกาส์ W_i และ W_j แทนค่าถ่วงน้ำหนักสำหรับจุดเกาส์ในตารางที่ 3.2

เพื่อให้การคำนวณหาปริพันธ์มีความแม่นยำและใช้จำนวนรอบของการคำนวณไม่มากเกินไป จึงเลือกจำนวนจุดเกาส์ในทิศทาง ξ เท่ากับ 3 จุด และจำนวนจุดเกาส์ในทิศทาง η เท่ากับ 3 จุด ดังนั้นจำนวนจุดเกาส์ทั้งหมดเท่ากับ 9 จุด ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 พิกัด ξ และ η ของจุดเกาส์บนมาสเตอร์เอลิเมนต์

จุดที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9
พิกัด ξ	$\sqrt{0.6}$	$\sqrt{0.6}$	$\sqrt{0.6}$	0	0	0	$-\sqrt{0.6}$	$-\sqrt{0.6}$	$-\sqrt{0.6}$
พิกัด η	$\sqrt{0.6}$	0	$-\sqrt{0.6}$	$\sqrt{0.6}$	0	$-\sqrt{0.6}$	$\sqrt{0.6}$	0	$-\sqrt{0.6}$

ตารางที่ 3.2 ค่าถ่วงน้ำหนักของจุดเกาส์ และตำแหน่งจุดเกาส์ภายในพิกัด $-1 \leq \xi \leq 1$

M	I	W_I	ξ_I
1	1	2	0
2	1	1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
	2	1	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$
3	1	$\frac{5}{9}$	$-\sqrt{0.6}$
	2	$\frac{8}{9}$	0
	3	$\frac{5}{9}$	$\sqrt{0.6}$
4	1	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$	$-\sqrt{\frac{3+\sqrt{4.8}}{7}}$
	2	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$	$+\sqrt{\frac{3+\sqrt{4.8}}{7}}$
	3	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$	$-\sqrt{\frac{3-\sqrt{4.8}}{7}}$
	4	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$	$+\sqrt{\frac{3-\sqrt{4.8}}{7}}$

สมการ (3.27a-1) สามารถเขียนใหม่ให้สามารถหาปริพันธ์ด้วยวิธี Gauss Quadrature ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 K_{uu} = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha \left[N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} u_\gamma + \frac{\partial N_\beta}{\partial x} N_\gamma u_\gamma + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} N_\gamma v_\gamma \right] \right\} J d\xi d\eta \\
 & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ 2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43a)
 \end{aligned}$$

$$K_{uv} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} u_\gamma + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43b)$$

$$K_{up} = -\frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} H_\lambda \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43c)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_{vu} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} v_\gamma + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43d)$$

$$K_{vv} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha \left[\frac{\partial N_\beta}{\partial x} N_\gamma u_\gamma + N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} v_\gamma + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} N_\gamma v_\gamma \right] \right\} J d\xi d\eta \\ + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) + 2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43e)$$

$$K_{vT} = -g\beta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_\alpha N_\beta J d\xi d\eta \quad (3.43f)$$

$$K_{vp} = -\frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} H_\lambda J d\xi d\eta \quad (3.43g)$$

$$K_{Tu} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} T_\gamma \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43h)$$

$$K_{Tv} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha N_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} T_\gamma \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43i)$$

$$K_{TT} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha \left[\frac{\partial N_\beta}{\partial x} N_\gamma u_\gamma + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} N_\gamma v_\gamma \right] \right\} J d\xi d\eta \\ + \frac{k}{\rho c} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43j)$$

$$K_{pu} = \frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial H_\beta}{\partial x} N_\alpha \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43k)$$

$$K_{pv} = \frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial H_\beta}{\partial y} N_\alpha \right\} J d\xi d\eta \quad (3.43l)$$

ปัญหาการไหลในช่องปิดที่กำลังสนใจอยู่ในขณะนี้ ไม่มีการกำหนดเงื่อนไขเกี่ยวกับแรงเนื่องจากความเค้นต่าง ๆ บนผิว และไม่มีการกำหนดเงื่อนไขฟลักซ์ความร้อนที่ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นจะกำหนดให้ $Q_{\alpha^*} = 0$, $Q_{\alpha^v} = 0$ และ $Q_{\alpha^T} = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการ (3.25a-d) สามารถเขียนใหม่ให้สามารถหาปริพันธ์ด้วยวิธี Gauss Quadrature ได้ว่า

$$F_{\alpha^u} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha \left[N_\beta u_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} u_\gamma + N_\beta v_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} u_\gamma \right] \right\} J d\xi d\eta$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} H_\lambda p_\lambda + \left[2 \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right] u_\beta + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} v_\beta \right\} J d\xi d\eta \quad (3.44a)$$

$$F_{\alpha^v} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha \left[N_\beta u_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} v_\gamma + N_\beta v_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} v_\gamma \right] \right\} J d\xi d\eta$$

$$+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} H_\lambda p_\lambda + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} u_\beta + \left[\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} \right) + 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right] v_\beta \right\} J d\xi d\eta$$

$$- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ g N_\alpha (1 + (T_0 + N_\beta) \beta) \right\} J d\xi d\eta \quad (3.44b)$$

$$F_{\alpha^T} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ N_\alpha \left[N_\beta u_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial x} T_\gamma + N_\beta v_\beta \frac{\partial N_\gamma}{\partial y} T_\gamma \right] \right\} J d\xi d\eta$$

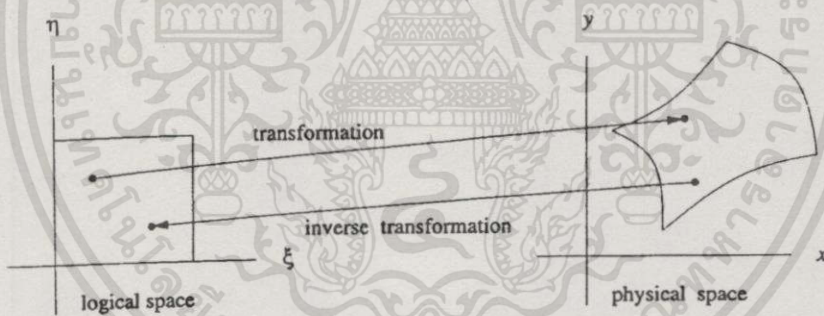
$$+ \frac{k}{\rho c} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial N_\alpha}{\partial x} \frac{\partial N_\beta}{\partial x} + \frac{\partial N_\alpha}{\partial y} \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \right) T_\beta \right\} J d\xi d\eta \quad (3.44c)$$

$$F_{\beta^p} = \frac{1}{\rho} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x} u_\beta + \frac{\partial N_\beta}{\partial y} v_\beta \right) H_\mu \right\} J d\xi d\eta \quad (3.44d)$$

บทที่ 4

การสร้างโครงประสาณ

เป็นที่ทราบกันดีว่า การสร้างโครงประสาณ (Mesh) ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นงานที่ต้องใช้ความละเอียดรอบคอบสูงและใช้เวลานาน โดยเฉพาะสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนเนื่องจากต้องทำการป้อนข้อมูลให้แก่โปรแกรมคอมพิวเตอร์จำนวนมาก หากสามารถแปลงรูป (Transform) จากขอบเขตโดเมนของปัญหาจริงไปสู่ขอบเขตที่มีรูปร่างอย่างง่ายก็จะทำให้เราสามารถกำจัดความยุ่งยากเกี่ยวกับรูปร่างของโดเมนออกไปได้ วิธีแปลงรูปอาจหมายถึงการเปลี่ยนรูปร่างทางกายภาพไปสู่ระบบพิกัดเชิงเส้นโค้ง (Curvilinear Coordinate System) ทั่วไปสำหรับรูปร่างใด ๆ วิธีดั้งเดิมของการแปลงรูปคือ การแปลงรูปจากขอบเขตทางกายภาพ (Physical Region) ไปสู่พิกัดเชิงขั้ว พิกัดทรงกระบอก หรือพิกัดทรงกลม เป็นต้น ข้อเสียของการใช้พิกัดเหล่านี้ก็คือ หากรูปร่างมีความซับซ้อนมากก็จะทำให้สมการของการแปลงรูปก็จะมีค่าซับซ้อนมากด้วยเช่นกัน ข้อดีของเทคนิคนี้คือง่ายต่อการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและสามารถประมาณค่าคำตอบได้อย่างแม่นยำ



รูปที่ 4.1 การแปลงรูป (Transformation)

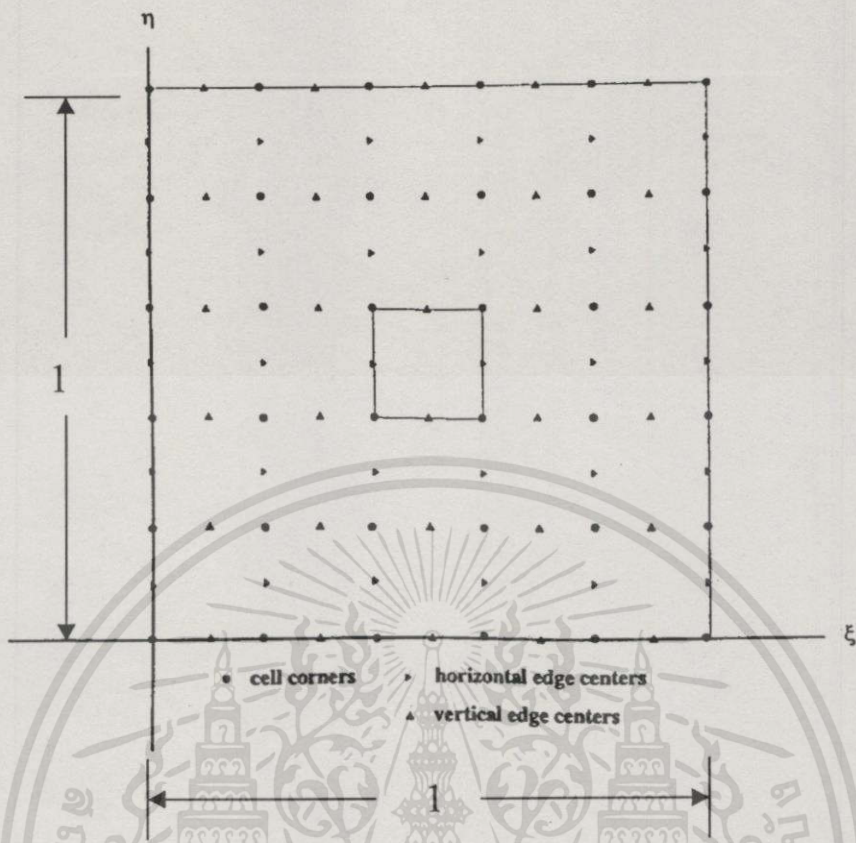
ในความเป็นจริง มีความเป็นไปได้ที่จะสามารถแปลงรูปขอบเขตทางกายภาพไปสู่พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสสำหรับปัญหาสองมิติ หรือสี่เหลี่ยมลูกบาศก์สำหรับปัญหาสามมิติ โดยที่ขอบเขตของสี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือสี่เหลี่ยมลูกบาศก์จะสอดคล้องกับขอบเขตของรูปร่างโดเมนจริง (ขอบเขตทางกายภาพ) (รูปที่ 4.1) สี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือสี่เหลี่ยมลูกบาศก์นี้จะถูกเรียกว่า ขอบเขตตรรกะ (Logical Region) และการแปลงรูปจะทำให้เกิดระบบพิกัดคงแบบ (Boundary Conforming Coordinate System) เส้นพิกัดภายในระบบพิกัดนี้จะถูกกำหนดด้วยภาพของเส้นพิกัดซึ่งมีระยะห่างคงที่ภายในระบบพิกัดตรรกะทำให้ง่ายต่อการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตด้วยวิธีเชิงเลข

จาโคเบียนของการแปลงรูป (Jacobain of Transformation) จะต้องมีค่าไม่เป็นศูนย์ มิฉะนั้น การแปลงรูปผกผัน (Inverse Transformation) จะไม่สามารถกระทำได้ เนื่องจากจุดกริด (Grids) เป็นสิ่งที่ถูกเลือกเป็นลำดับแรกในปริภูมิตรรกะแล้วส่งค่าไปสู่ปริภูมิกายภาพ ดังนั้น การแปลงรูปสามารถมองว่าเป็นการส่งค่าจากปริภูมิตรรกะไปยังปริภูมิกายภาพดังรูปที่ 4.1 นอกจากนี้เมื่อขั้นตอนวิธี (Algorithms) ถูกนำไปดำเนินการในรหัสคอมพิวเตอร์ การคำนวณต่าง ๆ จะกระทำบนปริภูมิตรรกะ และด้วยเหตุนี้จึงเป็นที่แน่ชัดแล้วว่า ปริภูมิตรรกะจะถูกแปลงรูปไปสู่ปริภูมิกายภาพเมื่อนำมาเชื่อมโยงกับความรูทางไฟไนท์อีลิเมนต์ พบว่า มาตรฐานอีลิเมนต์ (Master Element) มีความหมายเช่นเดียวกับปริภูมิตรรกะนั้นเอง ถ้ากลุ่มของจุดได้ถูกกำหนดไว้ในปริภูมิตรรกะ การแปลงรูปผกผันจะส่งข้อมูลของจุดเหล่านี้จากปริภูมิตรรกะไปยังปริภูมิกายภาพแบบจุดต่อจุด และจุดที่เกิดขึ้นภายในปริภูมิเรียกว่า จุดกริด (รูปที่ 4.2) ถ้าจุดต่าง ๆ ภายในปริภูมิตรรกะถูกสร้างขึ้นโดยการแบ่งสี่เหลี่ยมจัตุรัสออกเป็นสี่เหลี่ยมที่มีรูปร่างเหมือนกันทุกประการ หรือ แบ่งสี่เหลี่ยมลูกบาศก์ออกเป็นกล่องมุมฉากที่เหมือนกันทุกประการ จุดกริดที่เกิดขึ้นจะถูกเรียกว่า สี่เหลี่ยมตรรกะ

การหาสูตรสำหรับขั้นตอนวิธีในการสร้างจุดกริดมีข้อดีคือ สามารถสร้างจุดกริดจำนวนมากอย่างได้ผล จุดกริดอาจมีจำนวนหลายหมื่นจุด หรืออาจมากถึงล้านจุด จุดกริดจำนวนมากเหล่านี้ทำให้ความคลาดเคลื่อนลดลงและง่ายต่อการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต



รูปที่ 4.2 จุดกริดบนปริภูมิตรรกะ (Logical space) และปริภูมิกายภาพ (Physical space)



รูปที่ 4.3 สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อบนพิกัด $\xi - \eta$

อิทธิพันธ์แปดจุดต่อแสดงอยู่ในรูปที่ 4.3 และสอดคล้องตามสูตรในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 จุดกริดทั้ง 8 ของอิทธิพันธ์หนึ่งบนพิกัด $\xi - \eta$ โดย $i, j \geq 0$

	พิกัดของจุด	ค่า i สูงสุด	ค่า j สูงสุด
จุดมุมทั้งสี่จุด (1,2,3,4)	$(i\Delta\xi, j\Delta\eta)$	M	N
จุดกึ่งกลางขอบแนวนอน (5,7)	$\left(\left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta\xi, j\Delta\eta \right)$	$M-1$	N
จุดกึ่งกลางขอบแนวตั้ง (6,8)	$\left(i\Delta\xi, \left(j + \frac{1}{2} \right) \Delta\eta \right)$	M	$N-1$

4.1 การแปลงรูปจากพิกัดฉากไปสู่พิกัดฉาก

ขั้นตอนวิธีของการสร้างจุดกริดในสองมิตินั้นจะสมมุติว่า ฟังก์ชัน $x = x(\xi, \eta)$ และ $y = y(\xi, \eta)$ ถูกนิยามไว้สำหรับ $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ และค่า M และ N เป็นตัวกำหนดจำนวนของกริด (Parameters) ตำแหน่งของจุดกริดถูกนิยามด้วย $(x_{i,j}, y_{i,j})$ โดยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= x\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{N}\right), & 0 \leq i \leq M, \\ y_{i,j} &= y\left(\frac{i}{M}, \frac{j}{N}\right), & 0 \leq j \leq N \end{aligned} \quad (4.1)$$

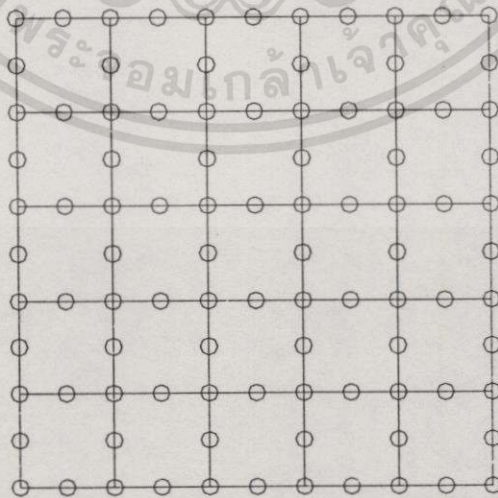
เส้น ξ แต่ละเส้นเกิดจากการลากเส้นตรงระหว่างจุด

$$\left[(x_{i,j}, y_{i,j}), (x_{i+1}, y_{i,j}) \right] \quad 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N \quad (4.2)$$

เส้น η แต่ละเส้นเกิดจากการลากเส้นตรงระหว่างจุด

$$\left[(x_{i,j}, y_{i,j}), (x_{i,j}, y_{i,j+1}) \right] \quad 0 \leq i \leq M-1, 0 \leq j \leq N \quad (4.3)$$

เมื่อนำเอาการแปลงรูปวิธีนี้มาประยุกต์กับปัญหาการพาความร้อนภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะได้โครงประสาณเป็นไปดังรูปที่ 4.4 ขอบเขตกายภาพสำหรับปัญหานี้สามารถกล่าวได้ว่ามีขนาดความยาวทุกด้านเท่ากับขอบเขตตรรกะเนื่องจาก ความกว้างและความยาวของสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้มีขนาดเท่ากับ 1 แต่ละด้านถูกแบ่งออกเป็น 5 ส่วนเท่า ๆ กัน ได้จำนวนอิลิเมนต์ทั้งหมดเท่ากับ 25 อิลิเมนต์ และจำนวนจุดต่อทั้งหมดเท่ากับ 96 จุดต่อ รหัสคำสั่งในการสร้างจุดกริดแสดงอยู่ในภาคผนวก



รูปที่ 4.4 โครงประสาณสำหรับช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 การแปลงรูปจากพิกัดฉากไปสู่พิกัดเชิงขั้ว

การแปลงระบบพิกัดที่ได้รับความนิยมมากที่สุด คือการแปลงรูปจากระบบพิกัดฉากไปสู่ระบบพิกัดเชิงขั้ว ในหัวข้อนี้จะนำเสนอสูตรสำหรับการแปลงรูปจากพิกัดฉากไปสู่พิกัดเชิงขั้วเพื่อใช้ในการสร้างจุดกริดภายในช่องปัดรูปวงแหวน เมื่อกำหนดรัศมีขึ้นมาสองค่า $0 \leq r_0 < r_1$ และกำหนดมุมมาให้สองมุม $0 \leq \theta_0 < \theta_1 \leq 2\pi$ พิกัดของจุดกริดบริเวณส่วนวง (Sector) ของวงแหวนระหว่างรัศมีทั้งสอง และมุมทั้งสองสามารถหาได้จากสมการ

$$x(\xi, \eta) = r \cos(\theta), \quad y(\xi, \eta) = r \sin(\theta) \quad (4.4)$$

โดยที่

$$\theta = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)\xi, \quad r = r_0 + (r_1 - r_0)\eta \quad (4.5)$$

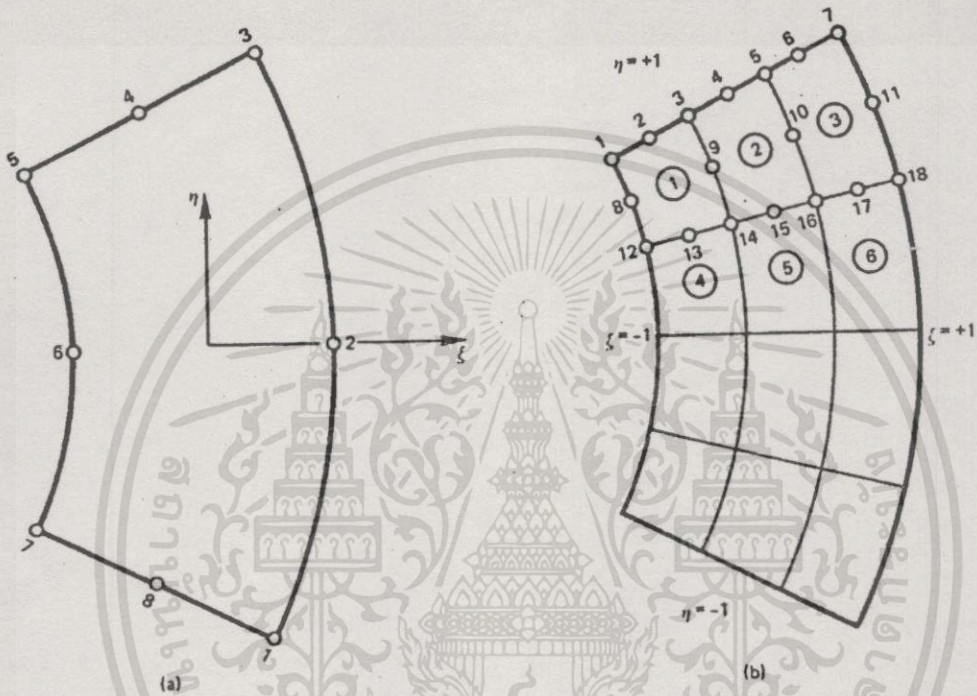
เมื่อนำเอาการแปลงรูปวิธีนี้มาประยุกต์กับปัญหาการพาความร้อนภายในช่องปัดรูปวงแหวนจะได้โครงประสานเป็นไปดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 โครงประสานสำหรับช่องปัดรูปวงแหวน (ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านในคือ 0.375 เมตร และขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านนอกคือ 0.975 เมตร)

4.3 การสร้างโครงประสาณด้วยไอโซพาราเมตริกซ์อิลิเมนต์

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีสร้างโครงประสาณที่ง่ายแต่ใช้ได้ผลด้วยการใช้แนวความคิดของไอโซพาราเมตริก (Isoparametric) โดยในครั้งแรกจะอธิบายวิธีแบ่งอิลิเมนต์ภายในหนึ่งบล็อก (block) ต่อจากนั้นจะอธิบายการรวมหลายบล็อกเป็นขอบเขต (Region) ที่มีความซับซ้อน แนวความคิดนี้เป็นหลักการเบื้องต้นของวิธีมัลติบล็อก (Multiblock)



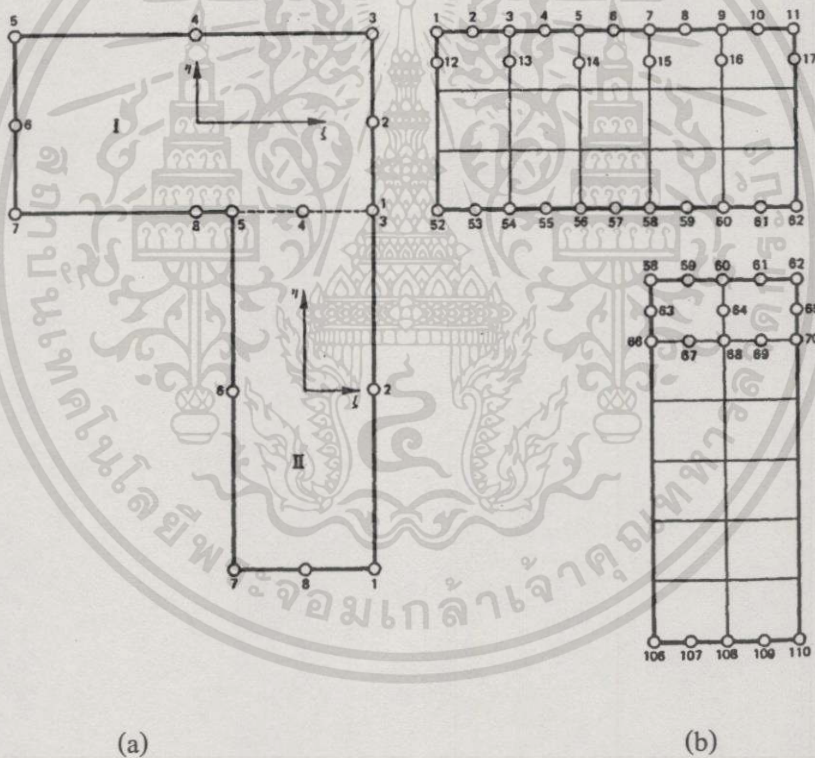
รูปที่ 4.6 ชิ้นงานรูปร่างโค้งและ โครงประสาณของชิ้นงาน

จากรูปที่ 4.6 (a) ชิ้นงานตัวอย่างรูปร่างโค้งถูกพิจารณาให้เป็นโดเมน (Domain) ที่มีไอโซพาราเมตริกอิลิเมนต์ (Isoparametric Element) จำนวนหนึ่งอิลิเมนต์และรูปร่างของชิ้นงานสามารถกำหนดด้วยแปดจุดต่อ (ส่วนโค้งถูกแทนที่ด้วยสมการพาราโบลา) โครงประสาณที่เหมาะสมได้จากการแบ่งระยะออกมาเป็น n อิลิเมนต์ในทิศทาง ξ และ n อิลิเมนต์ในทิศทาง η พิกัด x และ y ของจุดต่อ j หาได้จากสมการ

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_j, \eta_j) x_i \\ y_j &= \sum_{i=1}^8 N_i(\xi_j, \eta_j) y_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การกำหนดหมายเลขจุดต่อเริ่มต้นจาก $\xi = -1$ และ $\eta = +1$ และเพิ่มหมายเลขจุดต่อไปในทิศทาง η จนกระทั่งถึงพิกัด $\xi = +1$ สำหรับเส้นหมายเลข i จะมีจำนวนอิเลเมนต์เท่ากับ m และมีจำนวนจุดต่อเท่ากับ $2m+1$ เนื่องจากมีทั้งจุดต่อที่มุมและจุดต่อที่กึ่งกลางด้าน การใส่หมายเลขให้เริ่มต้นที่ $\xi = -1$ บนเส้น η คงที่เส้นต่อไป และขบวนการเหล่านี้จะเกิดซ้ำจนกระทั่งได้หมายเลขจุดต่อครอบคลุมทั้งโดเมน ถ้าต้องการใส่หมายเลขจุดต่อให้แก่เส้นหมายเลข k จะพบว่าจำนวนจุดต่อเพียง $m+1$ เนื่องจากจุดกึ่งกลางบนเส้นหมายเลข k นี้มีเพียงจุดกึ่งกลางด้านเพียงจุดเดียวเท่านั้น หมายเลขจุดต่อต่างๆ ได้ถูกจัดให้เป็นอาร์เรย์ (Array) เรียงลำดับจากน้อยไปหามากดังแสดงในรูปที่ 4.6(b) จุดต่อแรกส่วนใหญ่จะมีหมายเลขเป็น 1 และโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้จะยอมให้ผู้ใช้กำหนดหมายเลขใดก็ได้เป็นหมายเลขจุดต่อแรกของ block แล้วหมายเลขของจุดต่อก็จะเรียงตามๆ กันไป ทำให้สามารถสร้างจุดต่อจากหลาย ๆ บล็อกแล้วนำมาประกอบเข้าด้วยกันเป็นโดเมนที่มีความซับซ้อนได้

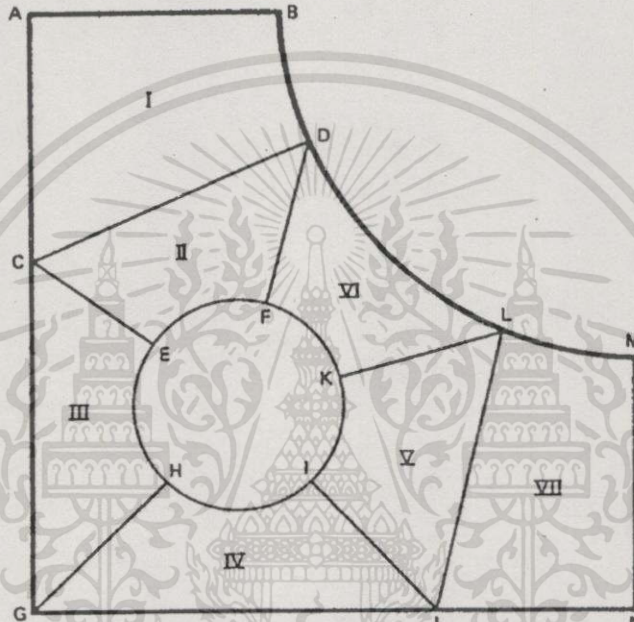


รูปที่ 4.7 การสร้างโครงประสาณภายในโดเมนรูปตัว L (a) Master Elements (b) โครงประสาณสำหรับโดเมนย่อย (Sub-domains)

ด้วยโปรแกรมง่ายๆนี้ ทำให้สามารถแบ่งโดเมนหนึ่งออกเป็นโดเมนย่อย (block) จำนวนมาก และใช้โปรแกรมนี้สร้างโครงประสาณสำหรับแต่ละ block ต่อจากนั้นทำการรวมทุก block เข้าด้วยกัน

เพื่อสร้างให้เป็นโครงประสาณที่เสร็จสมบูรณ์ ยกตัวอย่างเช่น โดเมนรูปตัว L สามารถแบ่งออกเป็นอิลิเมนต์รูปใหญ่ได้สองอิลิเมนต์พร้อมกับแกน ξ และ η ดังแสดงในรูปที่ 4.7(a) หลังจากสร้างโครงประสาณสำหรับ block I ให้กระทำซ้ำทุกชั้นตอนกับ block II แต่ขณะนี้หมายเลขจุดต่อแรกของ block นี้ไม่ได้เริ่มต้นที่หมายเลข 1 แต่เริ่มที่หมายเลข 58

โปรแกรมเดียวกันนี้สามารถใช้ในการสร้างโดเมนที่ได้จากการรวมหลาย block เข้าด้วยกันดังแสดงในรูปที่ 4.8 จากรูปพื้นที่ใหญ่สามารถแบ่งออกได้เป็นพื้นที่ย่อยจำนวน 7 พื้นที่



รูปที่ 4.8 พื้นที่ซึ่งมีรูเจาะอยู่ตรงกลาง

โปรแกรมได้ถูกนำมาใช้ซ้ำอีกครั้งในการสร้างโครงประสาณสำหรับพื้นที่ย่อย 7 block หมายเลขจุดต่อต่างๆของเส้นแรกของพื้นที่ II จะต้องสอดคล้องกับหมายเลขจุดต่อต่างๆบนเส้นสุดท้ายของพื้นที่ I และไม่จำเป็นต้องปรับเปลี่ยนหมายเลขจุดต่อที่รอยต่อระหว่าง I และ II สำหรับพื้นที่ III เส้นแรกทีสร้างขึ้นมาไม่จำเป็นต้องสอดคล้องกับเส้นสุดท้ายทีสร้างบนพื้นที่ II แต่หมายเลขจุดต่อแรกต้องเรียงต่อจากหมายเลขจุดต่อสุดท้ายของพื้นที่ II และกระทำตามวิธีการเช่นนี้กับพื้นที่ย่อยอื่นที่เหลืออยู่

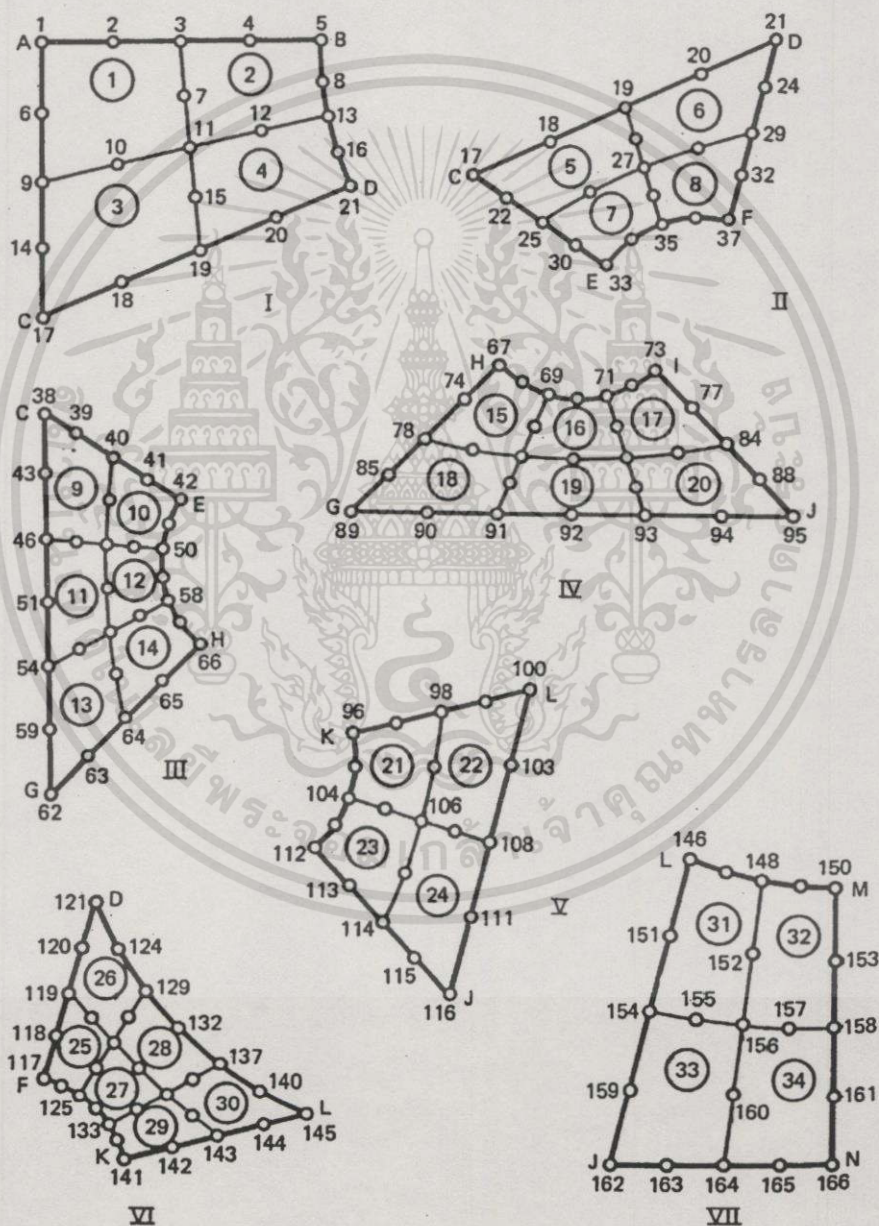
ในการเชื่อมต่อโครงประสาณของทุก block เข้าด้วยกันได้ มีเงื่อนไขว่า

จุดกริดบนเส้น CE	17 = 38,	22 = 39,	25 = 40,	30 = 41,	33 = 42
จุดกริดบนเส้น GH	62 = 89,	63 = 85,	64 = 78,	65 = 74,	66 = 67
จุดกริดบนเส้น IJ	73 = 112,	77 = 113,	84 = 114,	88 = 115,	95 = 116

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จุดกริดบนเส้น KL	96 = 141,	97 = 142,	98 = 143,	99 = 144,	100 = 145
จุดกริดบนเส้น FD	37 = 117,	32 = 118,	29 = 119,	24 = 120	21 = 121
จุดกริดบนเส้น LJ	100 = 146,	103 = 151,	108 = 154,	111 = 159,	95 = 162

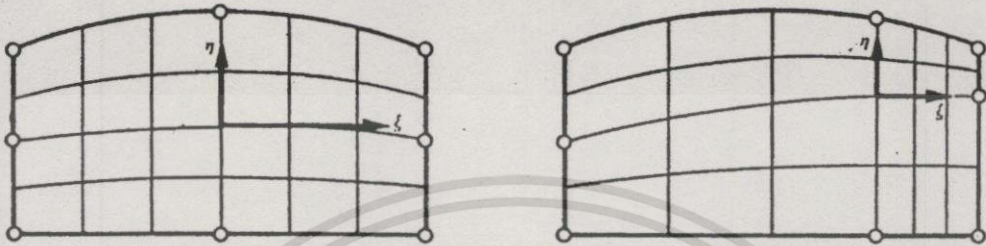
สังเกตว่าที่จุด J และ L เป็นจุดรวมของพื้นที่ย่อยถึง 3 พื้นที่และแต่ละจุดจะมีจุดต่อรวมกันได้ถึงสามจุดต่อ ดังนั้น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมานี้จะทำการแทนหมายเลขจุดต่อซึ่งอยู่ทางขวามือด้วยหมายเลขจุดต่อที่อยู่ทางซ้ายมือ โครงประสานของพื้นที่ย่อยทั้ง 7 (รูปที่ 4.9) ได้ถูกเชื่อมต่อกันเพื่อประกอบเป็นโครงประสานของโดเมนใหญ่เพียงชุดเดียว



รูปที่ 4.9 โดเมนย่อยและโครงประสานของแต่ละ โดเมนย่อย

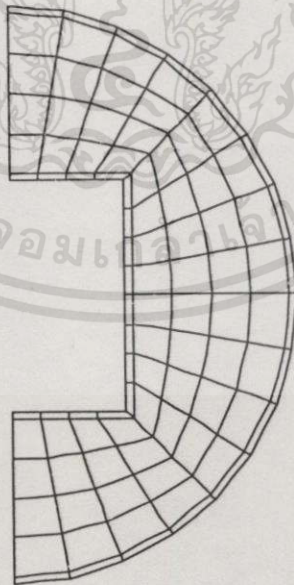
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าต้องการสร้างโครงประสาณที่มีขนาดไม่เท่ากัน จะต้องเพิ่มตัวคูณเพื่อถ่วงน้ำหนักให้กับ การแบ่งพื้นที่ภายในอิทธิเมนต์ใหญ่ ดังเช่นรูปที่ 4.10 จะเห็นได้ว่าโครงประสาณที่มีขนาดเล็กจะอยู่ ใกล้กับมุมขวาบนของพื้นที่ ดังนั้นจุดกำเนิดของแกน ξ และ η ก็จะเลื่อนไปอยู่ใกล้กับมุมขวา บนเช่นกัน



รูปที่ 4.10 โครงประสาณภายในอิทธิเมนต์ขนาดใหญ่ (a) ขนาดเท่ากัน (b) ขนาดไม่เท่ากัน

รหัสคำสั่งซึ่งสร้างจากภาษาฟอร์แทรนสำหรับ โครงประสาณรูปสี่เหลี่ยมที่เชื่อมต่อกันอย่างง่ายนี้ แสดงอยู่ในภาคผนวก ข เมื่อนำเอาวิธีการนี้มาประยุกต์กับปัญหาการพาความร้อนภายในช่องปิด ระหว่างรูปวงกลมกับรูปสี่เหลี่ยมจะได้โครงประสาณเป็นไปดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 โครงประสาณสำหรับช่องปิดระหว่างรูปวงกลมกับรูปสี่เหลี่ยม

4.4 การตรวจสอบความสมบูรณ์ของโครงประสาณ

การแสดงผลของโครงประสาณได้กระทำนโปรแกรม MATLAB ซึ่งข้อมูลรับเข้าประกอบ ด้วย ส่วนแรกเป็นข้อมูลของพิกัด x และ y ของจุดต่อซึ่งจะต้องเก็บไว้ในไฟล์ข้อความชื่อว่า xy.txt และส่วนที่สองเป็นลำดับของการจัดเรียงหมายเลขจุดต่อของอิลิเมนต์ซึ่งจะต้องเก็บไว้ในไฟล์ข้อความชื่อว่า nodes.txt เมื่อทำการเรียก M-file ชื่อว่า in_dat ภายในโปรแกรม MATLAB จะทำให้สามารถแสดงผลของโครงประสาณสำหรับปัญหาที่สนใจได้

4.4.1 ข้อมูลพิกัด x และ y ของทุกจุดต่อ

รูปแบบของข้อมูลทุกบรรทัดภายในไฟล์ชื่อว่า xy.txt คือ พิกัด x พิกัด y ตัวอย่างเช่น

0.000	0.000
0.200	0.000
0.400	0.000
0.600	0.000

4.4.2 ข้อมูลจุดต่อภายในทุกอิลิเมนต์

รูปแบบของข้อมูลทุกบรรทัดภายในไฟล์ชื่อว่า nodes.txt คือหมายเลขจุดต่อภายในอิลิเมนต์เรียงตามลำดับดังนี้ 1 5 2 6 3 7 4 8 ตัวอย่างเช่น

1	37	2	43	8	48	7	42
2	38	3	44	9	49	8	43
3	39	4	45	10	50	9	44
4	40	5	46	11	51	10	45

4.4.3 รหัสคำสั่งสำหรับโปรแกรมรับข้อมูลเข้า และแสดงผลของโครงประสาณ

รหัสคำสั่งของ M-file ชื่อ in_dat ซึ่งแปลด้วยโปรแกรม MATLAB คือ

```
load xy.txt -ascii
```

```
load nodes.txt -ascii
```

```
x=xy(:,1);
```

```
y=xy(:,2);
```

```
nlen=length(nodes);
```

```
for i=1,nlen
```

```
    plotmesh(nodes,x,y)
```

```
end
```

รหัสคำสั่งของฟังก์ชัน plotmesh ซึ่งแปลด้วยโปรแกรม MATLAB คือ

```
function plotmesh(nodes,xnod,ynod,u)
```

```
% plotmesh plots an unstructured grid in 2D
```

```
% if u is included it gives an isoplot of u
```

```
nn=nodes(:); % nodes in a long list
```

```
nlen=length(nn);
```

```
xx=xnod(nn); yy=ynod(nn); %coordinates corresponding to nodes
```

```
xplot=nodes; xplot(:)=xx; yplot=nodes; yplot(:)=yy; %format of nodes
```

```
clf; axis equal;
```

```
if (nargin == 3) patch(xplot',yplot', 'w'), end
```

```
if (nargin == 4)
```

```
    uu = u(nn); zplot=nodes; zplot(:)=uu
```

```
    patch(xplot',yplot',zplot')
```

```
end
```

โปรแกรมคอมพิวเตอร์และผลการจำลองการไหล

บทนี้นำเสนอหน้าที่ของโปรแกรมย่อยต่างๆ และแผนผังการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นบนพื้นฐานหลักการของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เพื่อนำมาแก้ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดในหัวข้อที่ 5.1 ในหัวข้อที่ 5.2 จะกล่าวถึงลักษณะข้อมูลภายในไฟล์นำเข้า หัวข้อที่ 5.3 อธิบายคุณสมบัติที่สำคัญของการพาความร้อนแบบอิสระและพารามิเตอร์ไร้มิติที่ใช้ในการเปรียบเทียบความถูกต้องกับงานวิจัยอื่นที่เกี่ยวข้อง หัวข้อที่ 5.4 ถึง 5.6 แสดงผลการจำลองการไหลสำหรับปัญหาทดสอบทั้งสามปัญหาได้แก่ การพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องว่างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ช่องว่างรูปวงแหวน และช่องว่างระหว่างวงกลมกับสี่เหลี่ยม ตามลำดับ

5.1 ขั้นตอนการคำนวณ

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นนี้ ประกอบด้วยโปรแกรมย่อยจำนวน 13 โปรแกรม ได้แก่ COUNT, DRIVES, ITERAT, CHECKCON, GAUSS, PIVOT, BACK, APPLY_BC, ASSEMBLY, MATRIX, SHAPE8, SHAPE4 และ DJACOB แผนผังการทำงานของโปรแกรมย่อยทั้งหลายอยู่ในรูป 5.1 ขั้นตอนการทำงาน of โปรแกรมย่อยต่าง ๆ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. อ่านข้อมูลของรูปแบบไฟไนต์อิลิเมนต์จากไฟล์ข้อมูลนำเข้าซึ่งประกอบด้วย
 - จำนวนจุดต่อของความเร็วและอุณหภูมิ
 - จำนวนจุดต่อของความดัน
 - จำนวนอิลิเมนต์ทั้งหมดของรูปแบบไฟไนต์อิลิเมนต์
 - จำนวนอิลิเมนต์ที่มีด้านอยู่บนขอบเขตที่ต้องกำหนดความดัน
 - จำนวนอิลิเมนต์ที่มีด้านอยู่บนขอบเขตที่ต้องกำหนดฟลักซ์ความร้อน
 - จำนวนรอบของการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน
 - ค่าความคลาดเคลื่อนที่ใช้เป็นเงื่อนไขในการหยุดการคำนวณ
 - คุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล ได้แก่ ความหนาแน่น ความหนืดพลศาสตร์ $\times 1000$ สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อน $\times 1000$ ความร้อนจำเพาะเมื่อปริมาตรคงที่ /1000 สภาพการนำความร้อน อุณหภูมิเฉลี่ยสมมุติ และความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วง
 - ข้อมูลที่ทุกจุดต่อ ได้แก่ หมายเลขประจำจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของจุดต่อ และพิกัดของจุดต่อ
 - ข้อมูลของทุกอิลิเมนต์ ได้แก่ หมายเลขประจำอิลิเมนต์และจุดต่อที่อยู่บนอิลิเมนต์นั้นๆ

2. จัดการข้อมูลเบื้องต้นโดยการเรียกโปรแกรมย่อย COUNT เพื่อนำข้อมูลนำเข้ามาสร้างข้อมูลใหม่เพิ่มขึ้น โดยข้อมูลที่สร้างขึ้นนี้จะทำให้ทราบว่าที่แต่ละจุดต่อ มีอิทธิพลที่ใดบ้างที่ใช้จุดต่อนั้นร่วมกัน ซึ่งเป็นข้อมูลที่จำเป็นสำหรับการทำงานในโปรแกรมย่อยอื่นๆต่อไป

3. เข้าสู่กระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน เริ่มต้นโดยการเรียกโปรแกรมย่อย DRIVES เพื่อสร้างไฟไนต์อิเลเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ สำหรับแต่ละอิเลเมนต์ แล้วนำไฟไนต์อิเลเมนต์เมทริกซ์มารวมกันเป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ และเวกเตอร์ค่าคก้างโดยการเรียกโปรแกรม MATRIX และ ASSEMBLY ภายในโปรแกรมย่อย MATRIX ได้มีการเรียกโปรแกรมย่อยชื่อ SHAPE4 เพื่อคำนวณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างและค่าฟังก์ชันรูปร่างของอิเลเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อ SHAPE8 เพื่อคำนวณค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันรูปร่างและค่าฟังก์ชันรูปร่างของอิเลเมนต์สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อ และ DJACOB เพื่อคำนวณจาโคเบียนเมทริกซ์ ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของจาโคเบียนเมทริกซ์และจาโคเบียนเมทริกซ์ผกผัน

4. ทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตโดยการเรียกโปรแกรมย่อย APPLY_BC

5. แก่ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าความเร็ว อุณหภูมิ และความดันที่ทุกจุดต่อ โดยการเรียกโปรแกรมย่อย ITERAT ซึ่งการทำซ้ำร่วมกับการแก้ระบบสมการเชิงเส้นซึ่งประกอบด้วยโปรแกรมย่อย GAUSS PIVOT และ BACK และการตรวจสอบการลู่เข้าสู่คำตอบด้วย CHECKCON เพื่อนำไปสั่งให้กระทำซ้ำหากไม่เกิดการลู่เข้าสู่คำตอบ

6. พิมพ์ผลลัพธ์ที่คำนวณลงในไฟล์ผลลัพธ์ เพื่อนำไปแสดงลักษณะต่าง ๆ ของการไหลด้วยโปรแกรม MATLAB ซึ่งได้แก่ รูปแบบเวกเตอร์ของการไหล และลักษณะการกระจายของอุณหภูมิ แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมได้ถูกนำมาแสดงไว้ในรูปที่ 5.1

5.2 ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้า

ลักษณะของไฟล์ข้อมูลนำเข้าที่ใช้กับโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับวิทยานิพนธ์นี้ ประกอบด้วยส่วนต่าง ๆ ทั้งหมด 5 ส่วนดังต่อไปนี้

1. ลักษณะทั่วไปของปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์

บรรทัดแรก จำนวนบรรทัดที่อธิบายลักษณะทั่วไปของปัญหา

บรรทัดที่สอง คำอธิบายลักษณะทั่วไปของปัญหาเท่ากับจำนวนบรรทัดที่ระบุไว้

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

FREE CONVECTION IN SQUARE ENCLOSURE AT RA=100000 WITH PR=1.0

THIS MODEL CONSISTS OF 95 NODES AND 25 ELEMENTS

2. รายละเอียดของรูปแบบไฟไนต์อิเลเมนต์

บรรทัดแรก คำอธิบายรายละเอียดของรูปแบบไฟไนต์อิเลเมนต์

บรรทัดที่สอง จำนวนจุดต่อความเร็วและอุณหภูมิ จำนวนจุดต่อของความดัน จำนวนอิลิเมนต์ทั้งหมด จำนวนอิลิเมนต์ที่มีด้านอยู่บนขอบเขตที่ต้องกำหนดความดัน (ทางออก) จำนวนอิลิเมนต์ที่มีอยู่ด้านบนขอบเขตที่ต้องกำหนดฟลักซ์ความร้อน (ผนังบางส่วน) จำนวนรอบของกระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน ความคลาดเคลื่อนที่ใช้เป็นเงื่อนไขในการหยุดกระบวนการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

NPOIV NPOIP NELEM NFREE NFLUX NITER TOL

96 36 25 0 10 100 0.001

3. คุณสมบัติต่าง ๆ ของของไหล

บรรทัดแรก คำอธิบายคุณสมบัติของของไหล

บรรทัดที่สอง ค่าของคุณสมบัติของของไหล

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

DENSITY VISCOSITY THERM EXP SPEC CV THERM CON REF TEMP GRAVITY

1.000 10.954 3.000 0.00275 0.0300 40.000 10.000

4. ข้อมูลของทุกจุดต่อ

บรรทัดแรก คำอธิบายทั่วไป

บรรทัดต่อมา หมายเลขของจุดต่อ เงื่อนไขขอบเขตของ u , v , T และ p ($0 =$ เปลี่ยนแปลงได้, $1 =$ ไม่เปลี่ยนแปลง) พิกัดในแนวแกน x และ y ค่าของ u , v , T และ p ที่ใช้ในการคำนวณรอบแรก ฟลักซ์ความร้อน

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

NODAL BOUNDARY CONDITIONS AND COORDINATES [96]:

1 1 1 1 0 .000 .000 .000 .000 20.000 .000 .000

2 1 1 0 0 .200 .000 .000 .000 40.000 .000 .000

3 1 1 0 0 .400 .000 .000 .000 40.000 .000 .000

4 1 1 0 0 .600 .000 .000 .000 40.000 .000 .000

5. การจัดเรียงจุดต่อภายในอิลิเมนต์

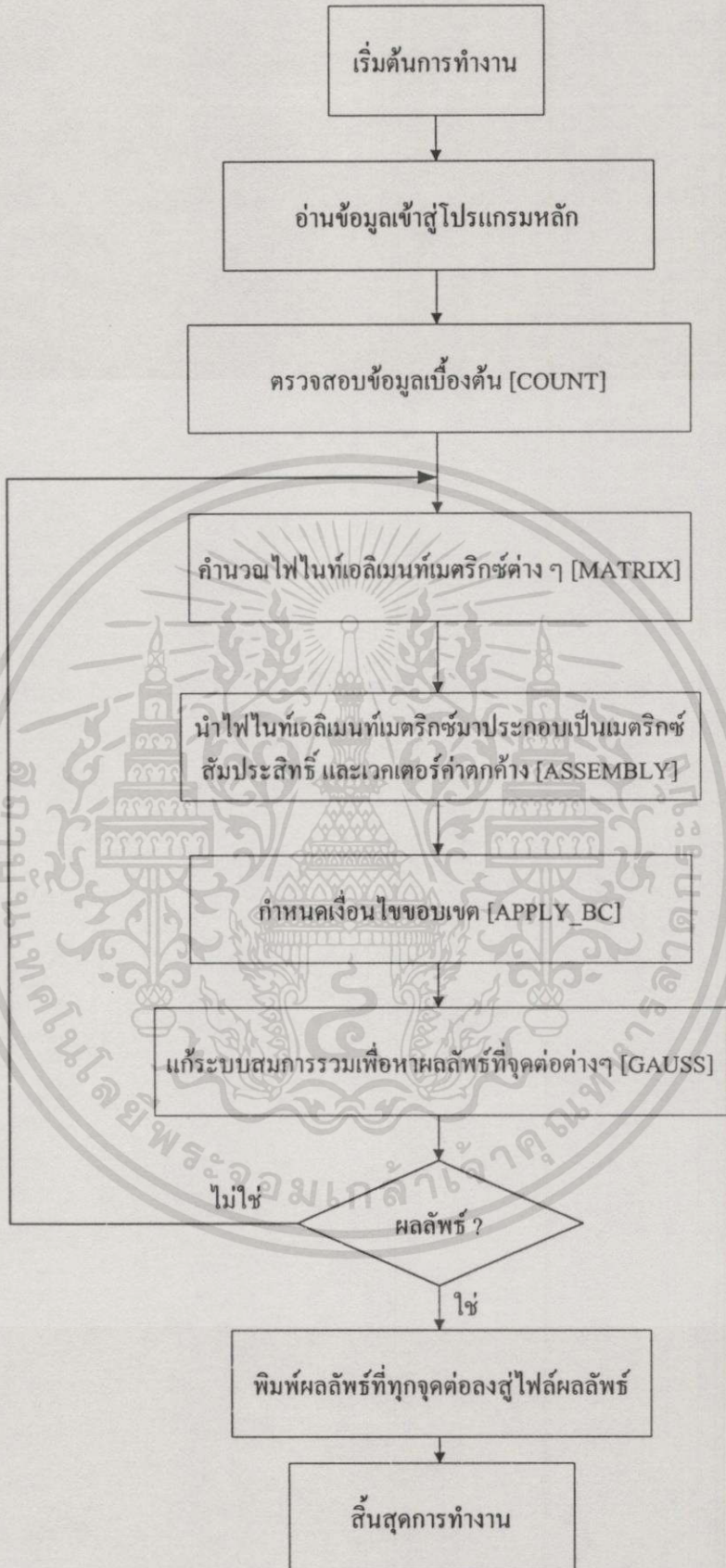
บรรทัดต่าง ๆ หมายเลขของอิลิเมนต์ หมายเลขของจุดต่อ 8 หมายเลข

ตัวอย่างในไฟล์ข้อมูลนำเข้า

1 1 37 2 43 8 48 7 42

2 2 38 3 44 9 49 8 43

3 3 39 4 45 10 50 9 44



รูปที่ 5.1 แผนภูมิการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3 การตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่จะนำไปใช้งานจริง จะต้องได้รับการตรวจสอบความถูกต้องโดยนำโปรแกรมคอมพิวเตอร์ดังกล่าวไปแก้ปัญหาพื้นฐาน แล้วนำผลการจำลองที่ได้มาเปรียบเทียบกับ การคำนวณด้วยวิธีอื่น ๆ หรือผลการทดลองของปัญหาเดียวกัน ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้ทำการเปรียบเทียบกับ การคำนวณของนักวิจัยท่านอื่นซึ่งได้รับการตีพิมพ์ผลงานในระดับนานาชาติแล้ว โดยปัญหาที่จะนำไปใช้ตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้แก่ การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Natural Convection in Square Enclosure) การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน (Natural Convection in The Annulus Between Concentric Cylinders) และ การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกกลมและสี่เหลี่ยมจัตุรัส (Natural Convection Around a Square Cylinder Placed Concentrically in a Horizontal Circular Cylinder)

5.3.1 พารามิเตอร์ไร้มิติสำหรับการพาความร้อน

พารามิเตอร์ไร้มิติ เป็นสิ่งที่ช่วยให้สะดวกต่อการอธิบายกระบวนการพาความร้อน ข้อมูลต่างๆที่ได้จากการทดลองส่วนใหญ่เกี่ยวกับการพาความร้อน ได้ถูกนำมาหาความสัมพันธ์ในรูปแบบของพารามิเตอร์ไร้มิติ นอกจากนี้ พารามิเตอร์ไร้มิติสามารถใช้ร่วมกับการประดิษฐ์สมการอนุพันธ์รูปแบบทั่วไปของการถ่ายเทความร้อน

เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ (Reynolds Number, Re)

เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ ถูกใช้กำหนดว่า การไหลนั้นมีรูปแบบราบเรียบ (Laminar) หรือปั่นป่วน (Turbulent) ความหมายในทางกายภาพของเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ คือ อัตราส่วนระหว่างแรงเฉื่อย (Inertia Force) และแรงเนื่องจากความหนืด (Viscous Force) [12] ของการไหล ส่วนใหญ่ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์การพาความร้อนแบบบังคับ

$$Re = \frac{\rho VL}{\mu} \quad (5.1)$$

- โดยที่ ρ คือ ความหนาแน่นของของไหล
 V คือ ความเร็วของของไหลที่ทางเข้า
 L คือ ความยาวเฉพาะ (Characteristic Length) ในโดเมนการไหล
 μ คือ ความหนืดพลศาสตร์ของของไหล

พรีนดท์เทิลนัมเบอร์ (Prandtl Number, Pr)

พรีนดท์เทิลนัมเบอร์ คือ อัตราส่วนระหว่างการแพร่กระจายของโมเมนตัม (Momentum Diffusivity) และการแพร่กระจายของพลังงานความร้อน (Thermal Diffusivity) ภายในการไหล

$$Pr = \frac{\mu / \rho}{k / \rho c} = \frac{\mu c}{k} \quad (5.2)$$

โดย c คือ ความร้อนจำเพาะของของไหลเมื่อความดันคงที่, k คือ สภาพการนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของของไหลและ α คือ การแพร่กระจายเชิงความร้อน (Thermal Diffusivity) ของของไหล

เรย์เลห์นัมเบอร์ (Rayleigh Number, Ra)

เรย์เลห์นัมเบอร์คือ อัตราส่วนระหว่างแรงลอยตัวกับแรงเนื่องจากความหนืด สามารถหาได้จากสมการ

$$Ra = \frac{\rho g \beta \Delta T L^3}{\mu \alpha} \quad (5.3)$$

โดย g คือ ความเร่งเนื่องจากความโน้มถ่วงของโลก, β คือ สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนของของไหล, L คือ ความยาวเฉพาะ (Characteristic Length) และ ΔT คือ ผลต่างระหว่างอุณหภูมิสูงสุดและต่ำสุดของของไหล

นัสเซลท์นัมเบอร์ (Nusselt Number, Nu)

นัสเซลท์นัมเบอร์คือ อัตราส่วนระหว่างอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการพาและอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำ มีนิยามว่า

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (5.3)$$

โดย h คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน (Convective Heat Transfer Coefficient) ของของไหล, L คือ ความยาวเฉพาะ (Characteristic Length) และ k คือ สภาพการนำความร้อน (Thermal Conductivity) ของของไหล

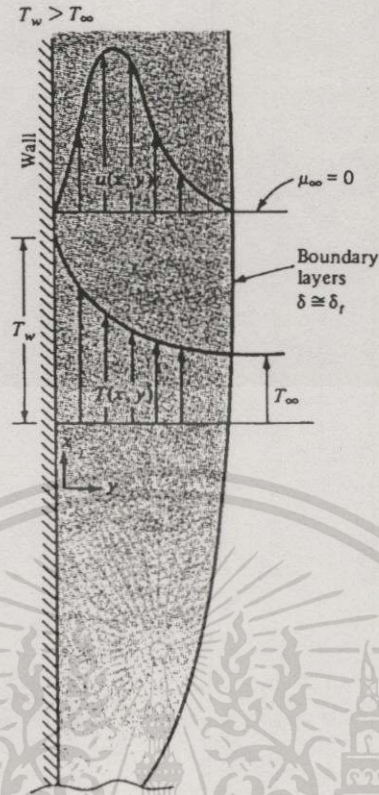
5.3.2 การพาความร้อนแบบอิสระ

การพาความร้อนแบบอิสระเกิดขึ้นเนื่องจากการเคลื่อนที่ของของไหลซึ่งอยู่ติดกับบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปสู่บริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำกว่า โดยไม่ได้ใช้อุปกรณ์ภายนอกช่วยเหลือให้เกิดการไหล เมื่อใดก็ตามที่วัตถุหนึ่งถูกวางไว้ในของไหลซึ่งมีอุณหภูมิสูงกว่าหรือต่ำกว่าวัตถุนั้น ผลต่างของอุณหภูมิจะทำให้เกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและวัตถุและเป็นสาเหตุให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของของไหลที่อยู่ใกล้กับผิวของวัตถุ ผลต่างของความหนาแน่นนำไปสู่การไหลของของไหลที่มีน้ำหนักมากลงสู่ด้านล่างและของไหลที่มีน้ำหนักเบาที่จะลอยสูงขึ้น ถ้าการเคลื่อนที่ของของไหลนี้เกิดจากผลต่างของความหนาแน่นของของไหลเพียงอย่างเดียวจะเป็นผลให้เกิดความลาดชันของอุณหภูมิ (Temperature Gradient) ขึ้น

แม้ว่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนแบบอิสระจะมีค่าค่อนข้างน้อย แต่ผลิตภัณฑ์ทางวิศวกรรมจำนวนมากเกิดการถ่ายเทความร้อนในลักษณะนี้ ในงานของวิศวกรรมไฟฟ้าเช่น สายส่งสัญญาณไฟฟ้า หม้อแปลงไฟฟ้า กล้องบรรจุอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ และขดลวดความร้อนในเตาหลอมไฟฟ้าถูกทำให้เย็นลงด้วยการพาความร้อนแบบอิสระ อุณหภูมิของวัตถุเหล่านี้มีค่าสูงกว่าอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อมเป็นผลมาจากความร้อนที่ถูกสร้างขึ้นภายในตัวมันเอง เมื่อผลต่างอุณหภูมิมีค่าเพิ่มขึ้น อัตราการไหลของความร้อนจะเพิ่มขึ้นด้วยเช่นกันจนกระทั่งถึงสถานะสมดุลซึ่งเกิดขึ้นเมื่ออัตราการสร้างความร้อนเท่ากับอัตราการสูญเสียความร้อน

งานประยุกต์ด้านอื่นของการพาความร้อนแบบอิสระได้แก่ การถ่ายเทความร้อนของหม้อไอน้ำ การถ่ายเทความร้อนจากอากาศร้อนรอบนอกตึกผ่านเข้าสู่ห้องทำงาน การถ่ายเทความร้อนจากอากาศเข้าสู่ผิวหนังของมนุษย์ (อยู่กับที่) และการไหลของของไหลซึ่งใช้ระบายความร้อนตามช่องทางซึ่งอยู่ตามผนังของเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์ (Nuclear Reactor) ความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการพาความร้อนแบบอิสระจะช่วยทำให้การคำนวณภาระความร้อนของฮีทเตอร์ (Heater) และภาระความเย็นของเครื่องปรับอากาศมีความถูกต้องแม่นยำมากขึ้น

รูปที่ 5.2 แสดงการกระจายความเร็วและอุณหภูมิในบริเวณใกล้แผ่นเรียบร้อนซึ่งวางตั้งฉากไว้ในอากาศ ความเร็วของอากาศมีทิศทางพุ่งขึ้นพร้อมกับระยะทางที่เพิ่มขึ้นจนกระทั่งที่ระยะหนึ่งความเร็วของอากาศจะมีค่าสูงสุดแล้วลดลงเป็นศูนย์ที่ขอบของชั้นขอบเขตดังรูปที่ 5.2 แม้ว่ารูปร่างความเร็วจะแตกต่างจากรูปร่างความเร็วในบริเวณชั้นขอบเขตการไหลสำหรับปัญหาการพาความร้อนแบบบังคับบนแผ่นเรียบ ความเร็วในบริเวณใกล้ ๆ กับผิวของแผ่นเรียบของการพาความร้อนทั้งสองแบบจะคล้ายกันความเร็วของของไหลในกระแสนการพาความร้อนแบบอิสระแม้จะมีค่าต่ำแต่แสดงให้เห็นถึงคุณลักษณะของการไหลในบริเวณใกล้ผิวของวัตถุ ภายในชั้นขอบเขตจะมีความเร็วมากกว่าศูนย์ และความเร็วของของไหลที่ขอบของชั้นขอบเขตมีค่าเท่ากับศูนย์



รูปที่ 5.2 การกระจายของความเร็วและอุณหภูมิของของไหลในบริเวณใกล้กับแผ่นเรียบร้อน

ในการพาความร้อนแบบอิสระ การไหลอาจมีรูปแบบราบเรียบ (Laminar) หรือปั่นป่วน (Turbulent) ก็ได้ขึ้นอยู่กับระยะห่างซึ่งวัดจากขอบด้านหน้า (Leading Edge) ของการไหล คุณสมบัติของของไหล แรงวัตถุ และผลต่างระหว่างอุณหภูมิของผิววัตถุและของไหล

การหาค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนด้วยการหาผลลัพท์แม่นยำ (Exact Solution) เป็นสิ่งที่ยากมากสำหรับการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องว่างที่ปิดสนิท ปัญหาดังกล่าวได้ถูกหาคำตอบไว้บางส่วนด้วยวิธีหาผลลัพท์แม่นยำแต่สำหรับรูปร่างง่าย ๆ เท่านั้น เช่น แผ่นเรียบอุณหภูมิคงที่ซึ่งถูกนำมาวางในแนวตั้งฉากกับพื้น และทรงกระบอกซึ่งถูกนำมาวางในแนวนอน แต่สำหรับรูปร่างอื่นนอกเหนือจากนี้ยังไม่สามารถหาผลลัพท์แม่นยำได้ จำเป็นต้องใช้การทดลองหรือการหาผลลัพท์เชิงตัวเลข

ในการวิเคราะห์การพาความร้อนแบบอิสระนับแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน เราได้อาศัยความรู้ซึ่งเกิดจากการสังเกต ปรากฏการณ์ทางธรรมชาติของชาวกรีกเมื่อสองพันปีมาแล้วและคำกล่าวของอาร์คิมิดีส (Archimedes) ซึ่งกล่าวไว้ว่า วัตถุซึ่งจมอยู่ในของไหลจะถูกรองรับไว้ด้วยแรงลอยตัว (Buoyancy Force) ด้วยขนาดเท่ากับน้ำหนักของของไหลที่ถูกวัตถุนั้นแทนที่ ดังนั้นวัตถุที่จมอยู่ในของไหลจะลอยสูงขึ้นถ้าความหนาแน่นของวัตถุน้อยกว่าของไหลที่แวดล้อมวัตถุนั้น และจะจมลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไปอีกหากวัตุนั้นมีความหนาแน่นสูงกว่าของไหล ดังนั้นแรงลอยตัวมีผลต่อการเคลื่อนที่ของของไหลสำหรับการพาความร้อนแบบอิสระ

ช่องปิด (Enclosures) ในที่นี้หมายถึงปริภูมิขนาดจำกัด (Finite Spaces) ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยผนังอย่างมิดชิดและภายในปริภูมิเต็มไปด้วยของไหล การพาความร้อนภายในช่องปิดเกิดขึ้นด้วยแรงลอยตัวซึ่งเกิดจากแรงวัตถุ ได้แก่แรงโน้มถ่วง และความแตกต่างของความหนาแน่นภายในของไหล ความแตกต่างของความหนาแน่นนี้อาจมีสาเหตุมาจากการให้ความร้อนหรือดูดความร้อนผ่านทางผนังด้านต่างๆของช่องปิด การให้ความร้อนแก่ของไหลหรือดูดความร้อนออกจากของไหลภายในช่องปิด การเปลี่ยนแปลงความเข้มข้นของของไหลเนื่องจากการถ่ายเทมวล (Mass Transfer) หรือการรวมกันของสาเหตุทั้งหมด ในวิทยานิพนธ์นี้จะไม่ศึกษาความแตกต่างของความหนาแน่นเนื่องจากการถ่ายเทมวล

ในการจำลองแบบการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดนี้ การคำนวณได้กระทำบนเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลที่ใช้ CPU Pentium III 866 MHz หน่วยความจำชั่วคราว(RAM) 256 Mbytes ข้อกำหนดสำหรับตัวอย่างต่างๆที่นำมาสร้างแบบจำลองคือ

การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

- ความยาวแต่ละด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับ 1 เมตร
- ของไหลที่อยู่ภายในช่องปิดมีค่า Prandtl Number เท่ากับ 1

การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปวงแหวน

- ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านในเท่ากับ 0.375 เมตร
- ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านนอกเท่ากับ 0.975 เมตร
- ของไหลที่อยู่ภายในช่องปิดมีค่า Prandtl Number เท่ากับ 0.7

การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างระหว่างทรงกระบอกกลมกับสี่เหลี่ยม

- ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกกลมเท่ากับ 0.4 เมตร
- ของไหลที่อยู่ภายในช่องปิดมีค่า Prandtl Number เท่ากับ 0.7
- ค่า Rayleigh Number เท่ากับ 1300

5.4 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นตัวอย่างซึ่งถูกใช้ในการทดสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณการพาความร้อนแบบอิสระอยู่เสมอ เนื่องจากเป็นปัญหาที่พบได้บ่อยในงานเกี่ยวกับ การระบายความร้อนภายในกล่องบรรจุวงจรอิเล็กทรอนิกส์ การระบายอากาศภายในห้องทำงาน การเย็นตัวของโลหะหลอมเหลวในงานหล่อวัสดุ และการเก็บสะสมพลังงานแสงอาทิตย์ เป็นต้น

ปัญหาที่กำลังพิจารณานี้เป็นปัญหาการไหลสองมิติของของไหลไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวซึ่งประมาณค่าความหนาแน่นด้วยสมการของ Boussinesq รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของโดเมนการไหลถูกแสดงไว้ในรูปที่ 5.3 ผนังแนวอนถูกหุ้มฉนวนดังนั้น

- ผนังด้านล่าง

$$q(x, y = 0) = 0$$

- ผนังด้านบน

$$q(x, y = L) = 0$$

โดย q คือ ฟลักซ์ความร้อน และผนังแนวตั้งมีอุณหภูมิคงที่

- ผนังด้านซ้าย

$$T(x = 0, y) = T_C$$

- ผนังด้านขวา

$$T(x = L, y) = T_H$$

ความเร็วในแนวแกน x และ y บนผนังทั้ง 4 ด้านมีเงื่อนไขว่า

- ผนังด้านซ้าย

$$u(x = 0, y) = v(x = 0, y) = 0$$

- ผนังด้านขวา

$$u(x = L, y) = v(x = L, y) = 0$$

- ผนังด้านล่าง

$$u(x, y = 0) = v(x, y = 0) = 0$$

- ผนังด้านบน

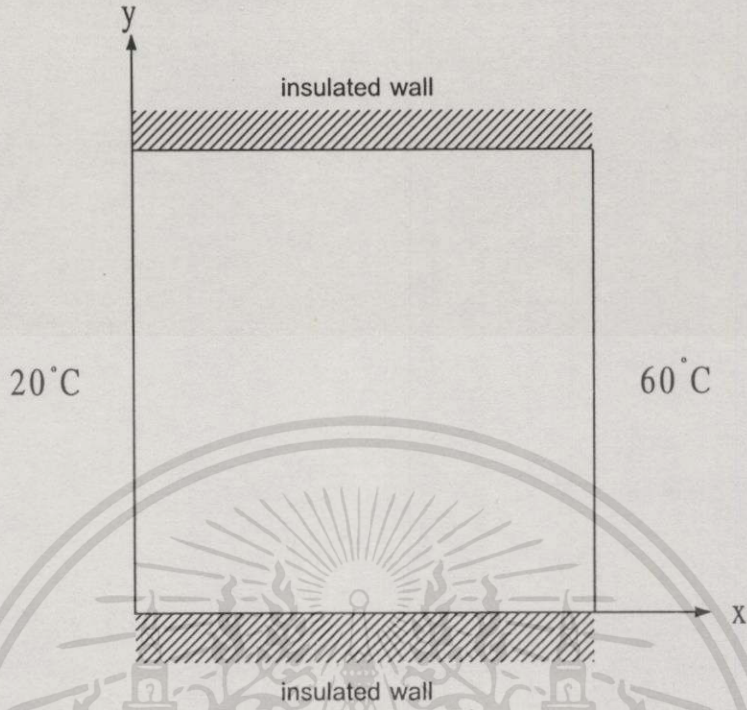
$$u(x, y = L) = v(x, y = L) = 0$$

การจำลองแบบการพาความร้อนในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสในที่นี้จะเป็นการศึกษาผลกระทบของค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่อลักษณะการกระจายตัวของความเร็วและอุณหภูมิ โดยการเปลี่ยนค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ 4 ค่าได้แก่ 100 1000 10000 และ 100000 โดยความยาวของแต่ละด้าน(L)ของสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีค่าเท่ากับ 1 เมตร อุณหภูมิบนผนังด้านซ้าย (T_C) เท่ากับ 20 องศาเซลเซียส อุณหภูมิบนผนังด้านขวา (T_H) เท่ากับ 60 องศาเซลเซียส פרันด์เทิลนัมเบอร์ของการไหลเท่ากับ 1 ค่าเริ่มต้นของความเร็วที่ไม่ทราบค่าจะกำหนดให้เป็น 0.1 เมตรต่อวินาที ค่าเริ่มต้นของอุณหภูมิไม่ทราบค่าจะกำหนดให้เป็น 40 องศาเซลเซียส และค่าเริ่มต้นของความดันทุกจุดจะกำหนดให้เป็น 0 ปาสคาล เพื่อความรวดเร็วในการคำนวณ การคำนวณจะเกิดขึ้นซ้ำจนกว่าความคลาดเคลื่อนของตัวแปรไม่ทราบค่าทั้งหมดมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ ค่าพิถีความเผื่อของการคำนวณ (Tolerance Limit) ซึ่งในที่นี้กำหนดให้มีค่าเท่ากับ 0.1 เปอร์เซ็นต์

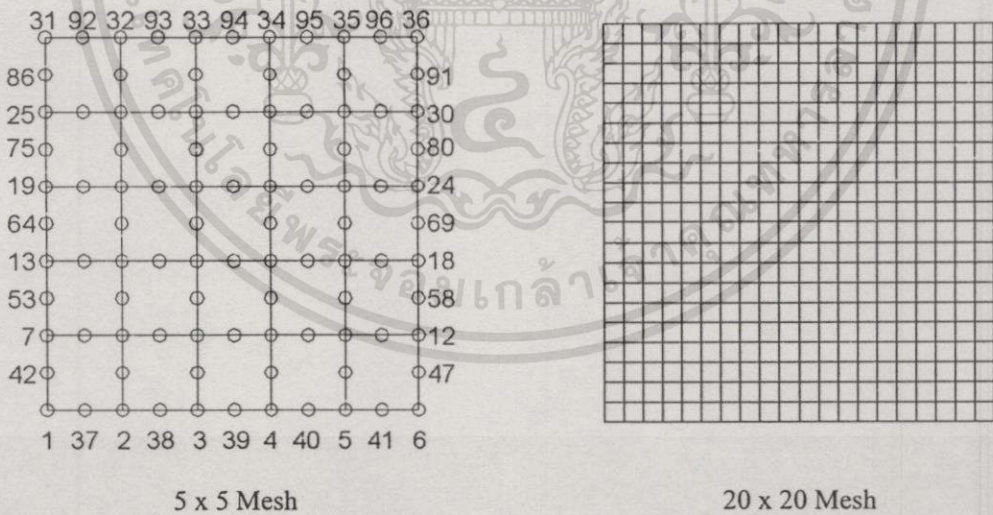
ความซับซ้อนของสมการพีชคณิตและคุณสมบัติความไม่เป็นเชิงเส้นของเมตริกซ์ต่างๆ ที่ประกอบขึ้นเป็นอีลิเมนต์เมตริกซ์ทำให้ต้องใช้การหาปริพันธ์ด้วยวิธีเชิงเลขเพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ต่างๆ ภายในเมตริกซ์ต่าง ๆ การหาปริพันธ์ด้วยวิธีเชิงเลขที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้คือ วิธีเกาส์เซียนควอดราเจอร์ (Gaussian Quadrature) โดยประเมินค่าปริพันธ์จากจุดเกาส์จำนวน 9 จุด (3 จุดในทิศทาง ξ คูณกับ 3 จุดในทิศทาง η) รูปที่ 5.3 เป็นรูปร่างของปัญหาและเงื่อนไขที่ขอบเขตต่างๆ รูปที่ 5.4 เป็นรูปของโครงประสาทรที่นำมาใช้ในการจำลองแบบ ได้แก่โครงประสาทรขนาด 5 x 5 และ 20 x 20

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอผลการจำลองแบบด้วยเวกเตอร์ความเร็วของของไหล การกระจายอุณหภูมิ และค่านีสเชิลท์นัมเบอร์ของการพาความร้อนที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่างๆ นอกจากนี้ยังได้แสดงการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองแบบกับผลการจำลองแบบที่ได้รับการตีพิมพ์แล้วด้วยกราฟความเร็วในแนวตั้งที่หน้าตัดหนึ่งภายในช่องปิดที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 100000 ดังรูปที่ 5.14 และตารางเปรียบเทียบค่านีสเชิลท์นัมเบอร์เฉลี่ยดังตารางที่ 5.1

นอกจากนี้เมื่อทำการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างอีลิเมนต์สามเหลี่ยม และอีลิเมนต์สี่เหลี่ยมเมื่อ $Ra = 10^4$ พบว่า เมื่อแบ่งพื้นที่ออกเป็นอีลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 800 อีลิเมนต์ อีลิเมนต์สามเหลี่ยมใช้เวลาเฉลี่ยในการคำนวณอีลิเมนต์เมตริกซ์และประกอบเมตริกซ์ของระบบเท่ากับ 8 วินาทีต่อหนึ่งรอบของการกระทำซ้ำของนิวตันราฟสัน และใช้เวลารวมสำหรับการแก้ปัญหาจนกระทั่งได้ผลลัพธ์เท่ากับ 485 วินาที ในขณะที่เมื่อแบ่งพื้นที่ออกเป็นอีลิเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 400 อีลิเมนต์ (20 x 20 MESH) อีลิเมนต์สี่เหลี่ยมใช้เวลาเฉลี่ยในการคำนวณอีลิเมนต์เมตริกซ์และประกอบเมตริกซ์ของระบบเท่ากับ 10 วินาทีต่อหนึ่งรอบของการกระทำซ้ำของนิวตันราฟสัน และใช้เวลารวมสำหรับการแก้ปัญหาจนกระทั่งได้ผลลัพธ์เท่ากับ 607 วินาที วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหามเมตริกซ์เชิงเส้นของการใช้อีลิเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมคือวิธี ไบคอนจูเกจเจอร์เดียนท์ [18]



รูปที่ 5.3 รูปร่างของช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสและเงื่อนไขขอบเขตในการคำนวณ

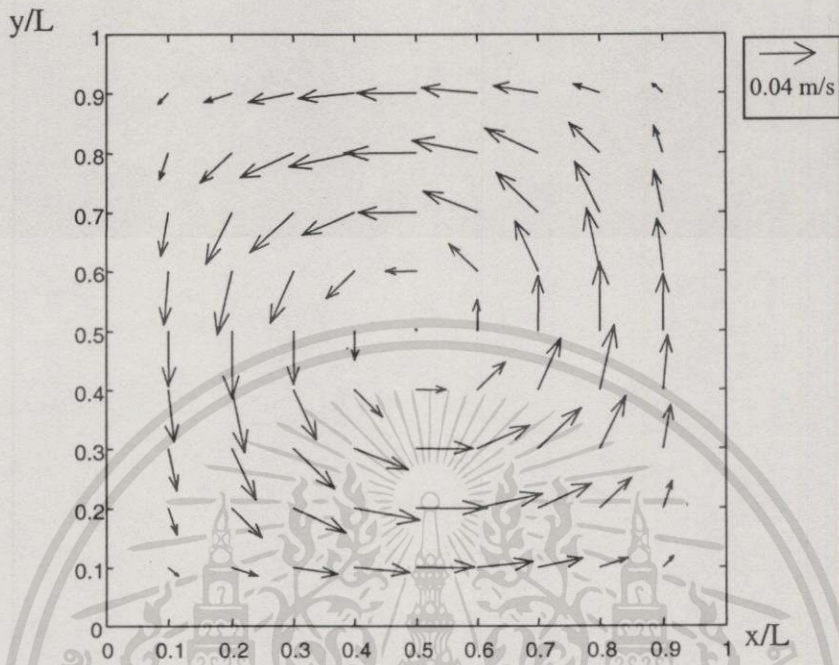


รูปที่ 5.4 การแบ่งอิเลเมนต์และตำแหน่งของจุดต่อในช่องปิด

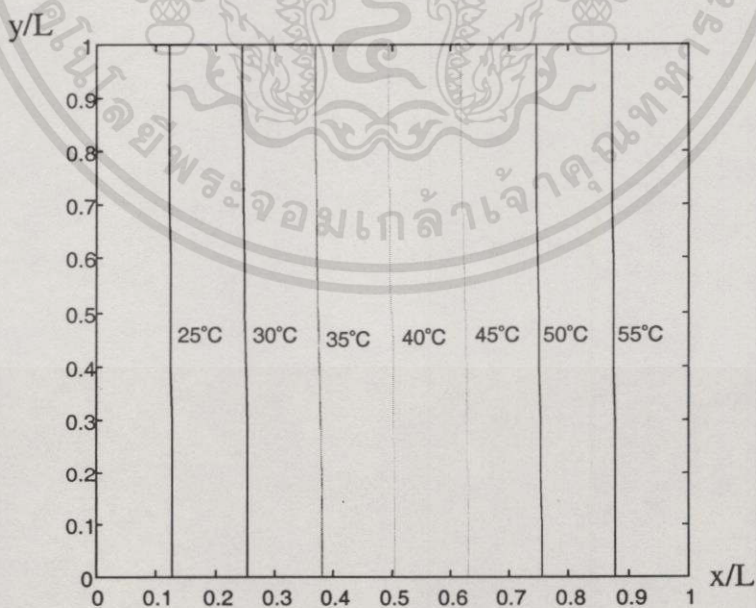
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.4.1 ผลการจำลอง

รูปที่ 5.5 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 10^2$ และรูปที่ 5.6 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 10^2$



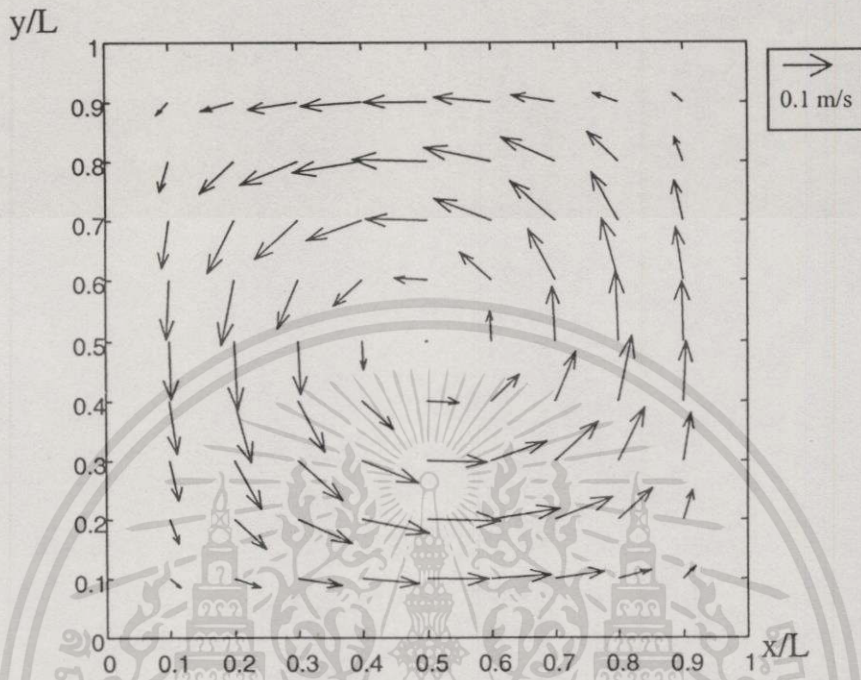
รูปที่ 5.5 เวกเตอร์ความเร็วของของไหลภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^2$



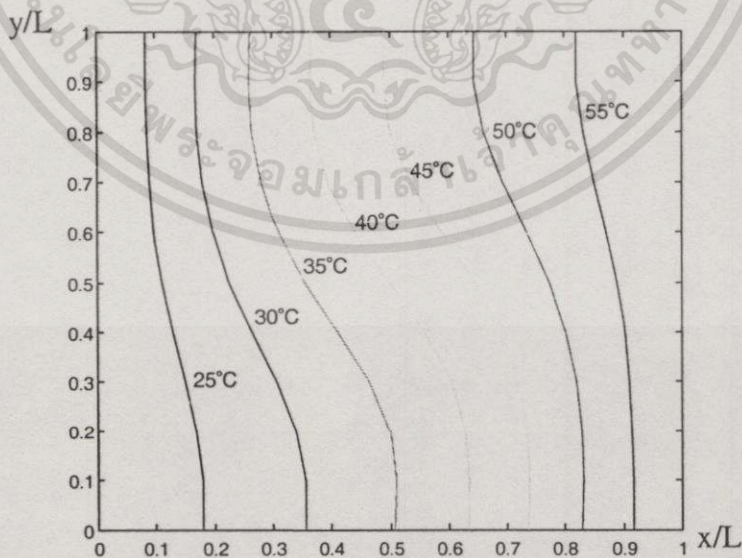
รูปที่ 5.6 การกระจายอุณหภูมิของของไหลภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.7 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 10^3$ และรูปที่ 5.8 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 10^3$



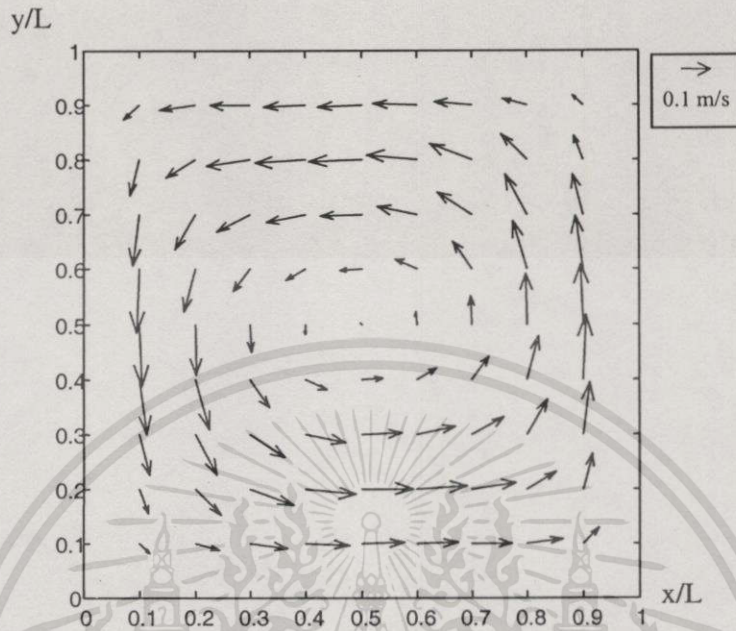
รูปที่ 5.7 เวกเตอร์ความเร็วของของไหลภายในช่องปัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^3$



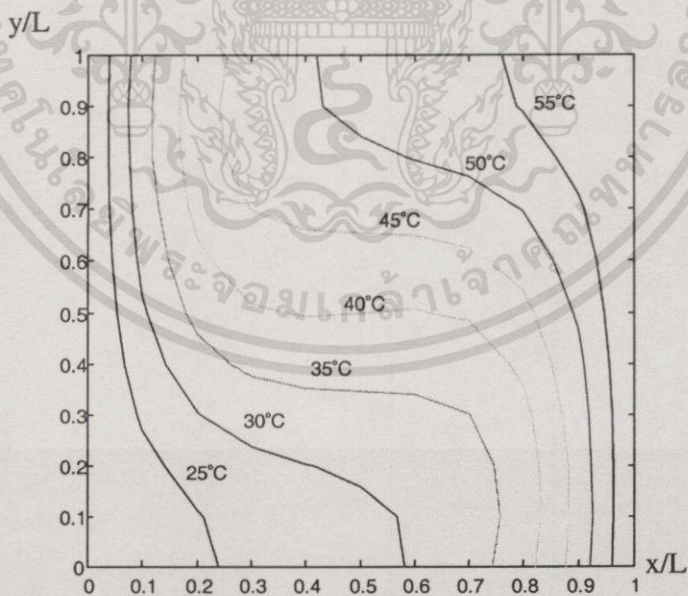
รูปที่ 5.8 การกระจายอุณหภูมิของของไหลภายในช่องปัดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.9 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 10^4$ และรูปที่ 5.10 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิของของการไหลเมื่อ $Ra = 10^4$

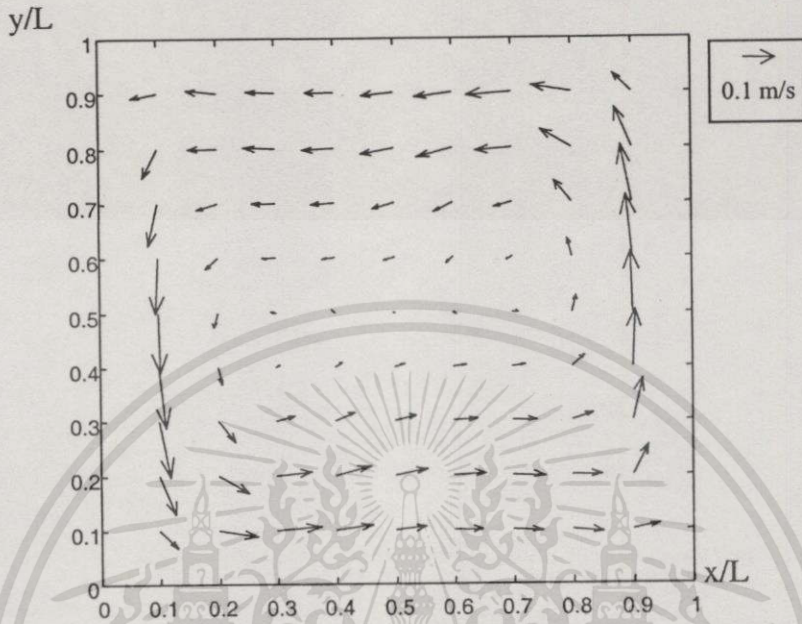


รูปที่ 5.9 เวกเตอร์ความเร็วของของไหลภายในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^4$

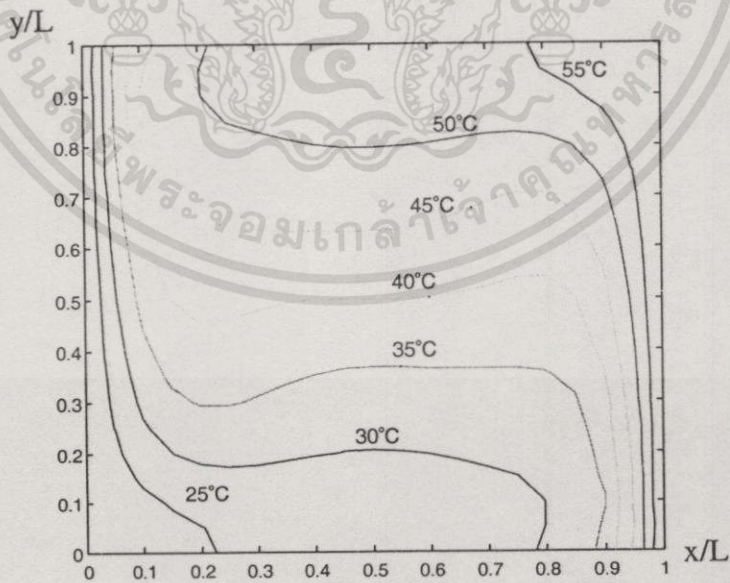


รูปที่ 5.10 การกระจายอุณหภูมิของของไหลภายในช่องสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^4$

รูปที่ 5.11 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 10^5$ และรูปที่ 5.12 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 10^5$



รูปที่ 5.11 เวกเตอร์ความเร็วของของไหลภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^5$



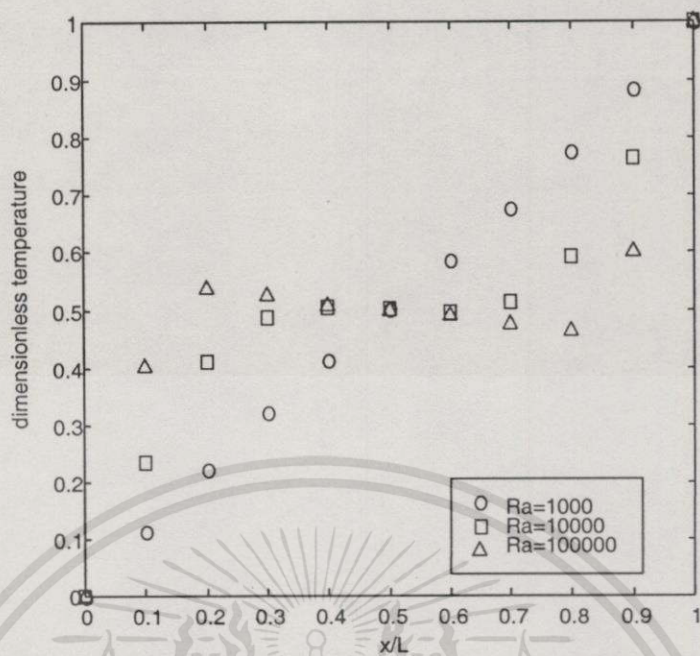
รูปที่ 5.12 การกระจายอุณหภูมิของของไหลภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อ $Ra = 10^5$

5.4.2 การวิเคราะห์ผล

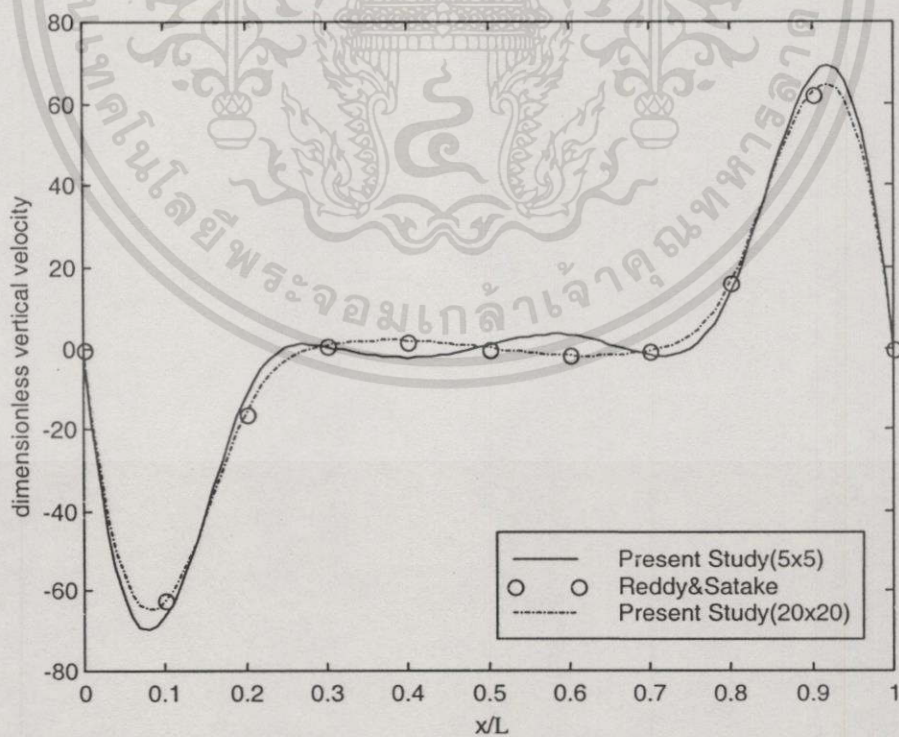
รูปที่ 5.5 5.7 5.9 และ 5.11 แสดงเวกเตอร์ความเร็วของของไหลเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^2 10^3 10^4 และ 10^5 ตามลำดับ จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีผลต่อการเคลื่อนที่ของของไหลภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส จะเห็นได้ว่าการไหลของของไหลเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าตั้งแต่ 10^2 ถึง 10^4 เป็นการหมุนวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเพียงบริเวณเดียวเท่านั้น แต่เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^5 จะเกิดการไหลหมุนวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา 2 บริเวณขึ้น เป็นที่น่าสังเกตว่า ของไหลที่อยู่ตรงกลางของช่องปิดจะมีความเร็วต่ำมากเมื่อเทียบกับของไหลที่อยู่บริเวณผนังทั้งสองด้าน และความเร็วของของไหลบริเวณผนังจะมีค่าสูงขึ้นเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้น

การกระจายอุณหภูมิของของไหลภายในช่องปิดสี่เหลี่ยมจัตุรัสเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^2 10^3 10^4 และ 10^5 ได้ถูกนำมาแสดงไว้ในรูปที่ 5.6 5.8 5.10 และ 5.12 ตามลำดับ อุณหภูมิของของไหลจะมีไม่เชิงเส้นมากขึ้นเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าสูงขึ้น กล่าวคือ ความลาดชันของอุณหภูมิจะมีค่าสูงที่บริเวณใกล้ผนังและลดลงมาเป็นศูนย์ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของช่องปิดซึ่งสามารถสังเกตเห็นได้ว่า เส้น isotherm บริเวณส่วนกลางของช่องปิดมีแนวเส้นเกือบจะขนานกับแกน x ของปัญหา ที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่ำ ($Ra = 10^3$) ความลาดชันของอุณหภูมิจะมีค่าค่อนข้างคงที่เนื่องจาก การถ่ายเทความร้อนโดยการนำจะมีผลต่อการถ่ายเทความร้อนภายในช่องปิดมากเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าต่ำกว่า 10^3 รายละเอียดของการกระจายของอุณหภูมิที่บริเวณแนวกึ่งกลางความสูงของช่องปิดได้ถูกนำมาแสดงให้เห็นเป็นตัวอย่างในรูปที่ 5.13 อุณหภูมิที่ใช้เปรียบเทียบในที่นี้คือ อุณหภูมิไร้มิติ มีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ค่าอุณหภูมิไร้มิติซึ่งมีค่าเท่ากับศูนย์จะสามารถเทียบได้กับอุณหภูมิจริงเท่ากับ 20 องศาเซลเซียส และค่าอุณหภูมิไร้มิติซึ่งค่าเท่ากับหนึ่งจะสามารถเทียบได้กับอุณหภูมิจริงเท่ากับ 60 องศาเซลเซียส จะเห็นได้ว่าที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3 จะเกิดการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิเป็นเชิงเส้นมากที่สุด เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^4 การกระจายของอุณหภูมิจะมีความไม่เชิงเส้นมากขึ้น อุณหภูมิจะเพิ่มขึ้นตามระยะทางที่เพิ่มขึ้น แสดงให้เห็นว่าการถ่ายเทความร้อนโดยการพาเริ่มมีอิทธิพลมากขึ้น ในขณะที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^5 การกระจายของอุณหภูมิมิมีความไม่เชิงเส้นมากที่สุด ไม่ได้เป็นการเพิ่มขึ้นของอุณหภูมิเพียงอย่างเดียวแต่เกิดการลดลงของอุณหภูมิตามระยะทางที่เพิ่มขึ้นด้วย รูปที่ 5.14 แสดงให้เห็นอย่างชัดเจนว่าผลลัพธ์ที่ได้จากโปรแกรมและผลลัพธ์ของ Reddy and Satake มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

การตรวจสอบความถูกต้องในส่วนของการถ่ายเทความร้อนได้กระทำโดยใช้การเปรียบเทียบค่าตัวเลขที่นัมเบอร์เฉลี่ยบนผนังด้านเย็นของวิธานิพนธ์นี้กับผลงานวิจัยของ Reddy and Satake ในตารางที่ 5.1 ซึ่งใช้การคำนวณด้วยวิธี Penalty Finite Element Method (PFEM) จะเห็นได้ว่าผลการคำนวณที่ได้มีความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 5 % สำหรับค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 10^3 และ 10^4



รูปที่ 5.13 การเปรียบเทียบอุณหภูมิไว้มิติตามแนวกึ่งกลางของช่องปิด เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ (Ra) แตกต่างกัน



รูปที่ 5.14 การเปรียบเทียบความเร็วไว้มิติที่กึ่งกลางความสูงของช่องปิดเมื่อ $Ra = 10^5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 5.1 การเปรียบเทียบค่าตัวเลขที่นัมเบอร์เฉลี่ยบนผนังด้านเย็นของช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

Ra	Average Nusselt number		Error (%)
	Reddy & Satake (PFEM)	Present Study	
1000	1.1666	1.112	4.675
10000	2.1318	2.1366	-0.234

นิยามของอุณหภูมิไร้มิติ (θ) คือ

$$\theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C} \quad (5.1)$$

โดยที่ T_C คือ อุณหภูมิซึ่งกำหนดไว้ที่ผนังด้านเย็น

T_H คือ อุณหภูมิซึ่งกำหนดไว้ที่ผนังด้านร้อน

นิยามของความเร็วไร้มิติในแนวตั้ง (v') [22] คือ

$$v' = \frac{\rho c v L}{k} \quad (5.2)$$

นิยามของค่าตัวเลขที่นัมเบอร์เฉลี่ยบนผนังด้านเย็น (Nu) คือ

$$Nu = \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} dx \quad (5.3)$$

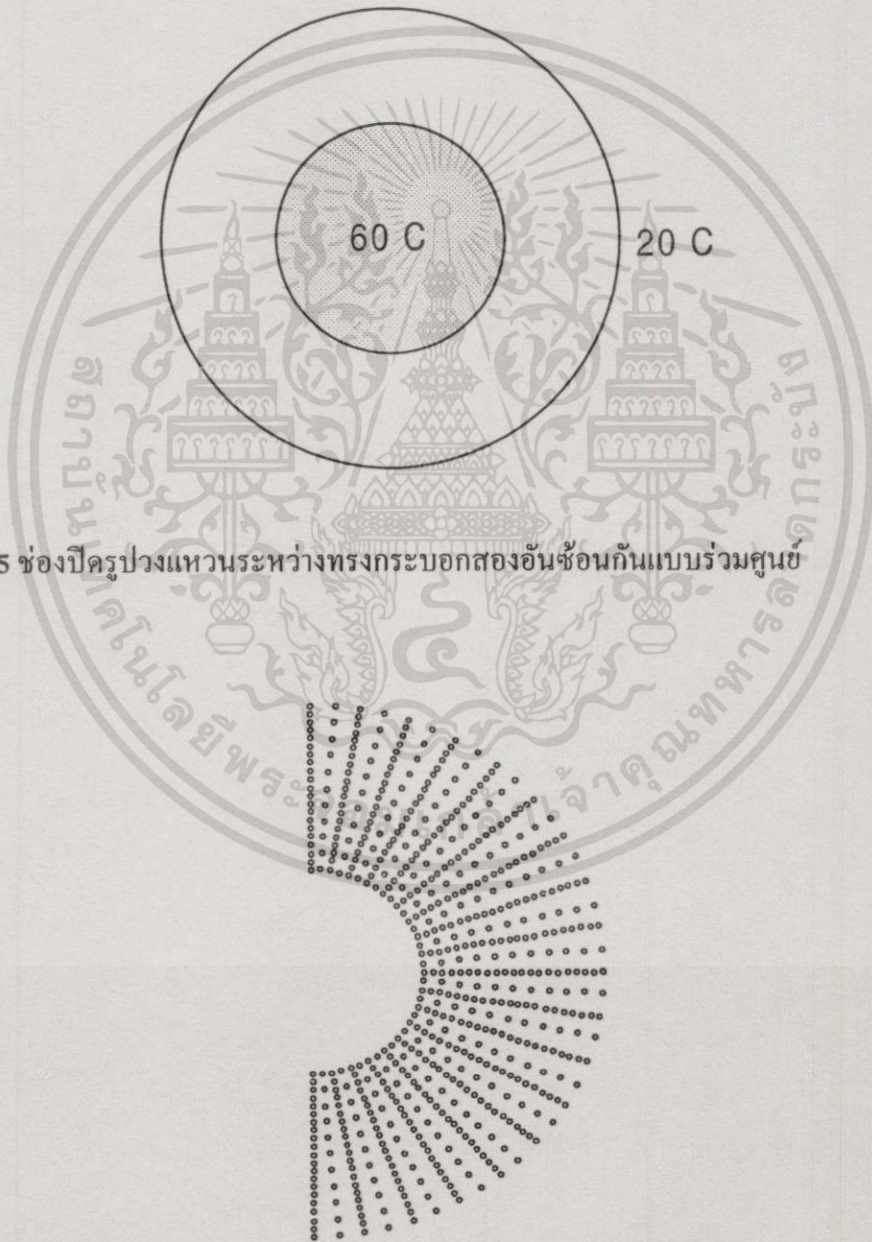
5.5 การพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างรูปวงแหวน

ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องว่างวงแหวนระหว่างทรงกระบอกที่จุดศูนย์กลางร่วมกัน (horizontal concentric cylinders) แสดงอยู่ในรูปที่ 5.15 Raithby and Hollands (1975) ได้ทำการอภิปรายถึงปัญหานี้ว่าลักษณะการไหลของของไหลภายในบริเวณวงแหวนมีความสมมาตรรอบแกนกลาง (midplane) ตามแนวตั้ง ถ้าทรงกระบอกที่อยู่ภายในมีอุณหภูมิสูง และทรงกระบอกที่อยู่ภายนอกมีอุณหภูมิต่ำกว่า ของไหลจะไหลขึ้นตามทรงกระบอกด้านในและไหลลงตามทรงกระบอกด้านนอก ในการจำลองการไหลครั้งนี้กำหนดให้ของไหลมีค่าพรีนเทิลด์นัมเบอร์เท่ากับ 0.7 และเปลี่ยนแปลงค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ทั้งหมด 5 ค่าได้แก่ 100 1000 3000 6000 และ 10000 ผลการทดลองที่ได้ถูกนำมาแสดงในรูปของเวกเตอร์ความเร็วและการกระจายอุณหภูมิ สำหรับตัวอย่างนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปร่างที่ใช้ในการคำนวณเป็นเพียงครึ่งหนึ่งของรูปวงแหวนเท่านั้น เพื่อความรวดเร็วและประหยัด หน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ จำนวนจุดต่อและจำนวนอิลิเมนต์ทั้งหมดที่ใช้ในการจำลอง แบบคือ 597 จุดต่อและ 180 อิลิเมนต์ แสดงอยู่ในรูปที่ 5.16

ค่าคงที่อื่น ๆ สำหรับปัญหานี้คือ อัตราส่วนระหว่างผลต่างของขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของ ทรงกระบอกทั้งสองกับขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านในเท่ากับ 0.8 และอัตราส่วน ระหว่างขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านนอกกับด้านในเท่ากับ 2.6 จุดประสงค์ที่เลือก ใช้ค่าคงที่เหล่านี้ก็เพื่อความสะดวกในการเปรียบเทียบผลลัพธ์กับบทความที่ได้นำมาใช้อ้างอิง



รูปที่ 5.15 ช่องปิดรูปวงแหวนระหว่างทรงกระบอกสองอันซ้อนกันแบบร่วมศูนย์

รูปที่ 5.16 โครงประสาณภายในช่องปิดรูปวงแหวน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.5.1 ผลการจำลอง

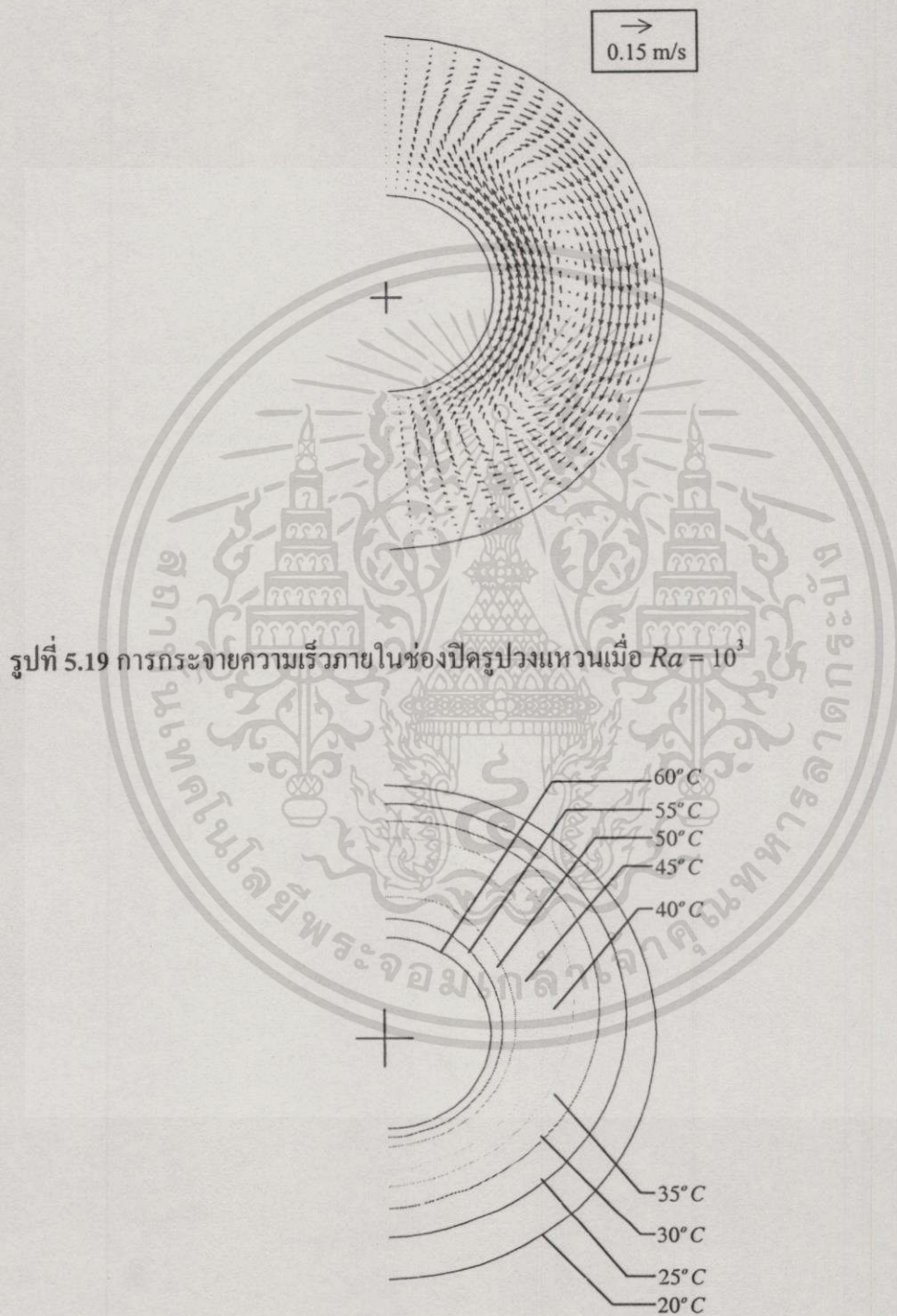
รูปที่ 5.17 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 10^2$ และรูปที่ 5.18 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 10^2$



รูปที่ 5.18 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปี่ครึ่งวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.19 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 10^3$ และรูปที่ 5.20 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 10^3$



รูปที่ 5.20 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปัดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 10^3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.21 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 3 \times 10^3$ และรูปที่ 5.22 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 3 \times 10^3$



รูปที่ 5.21 การกระจายความเร็วภายในช่องปัดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 3 \times 10^3$

รูปที่ 5.22 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปัดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 3 \times 10^3$

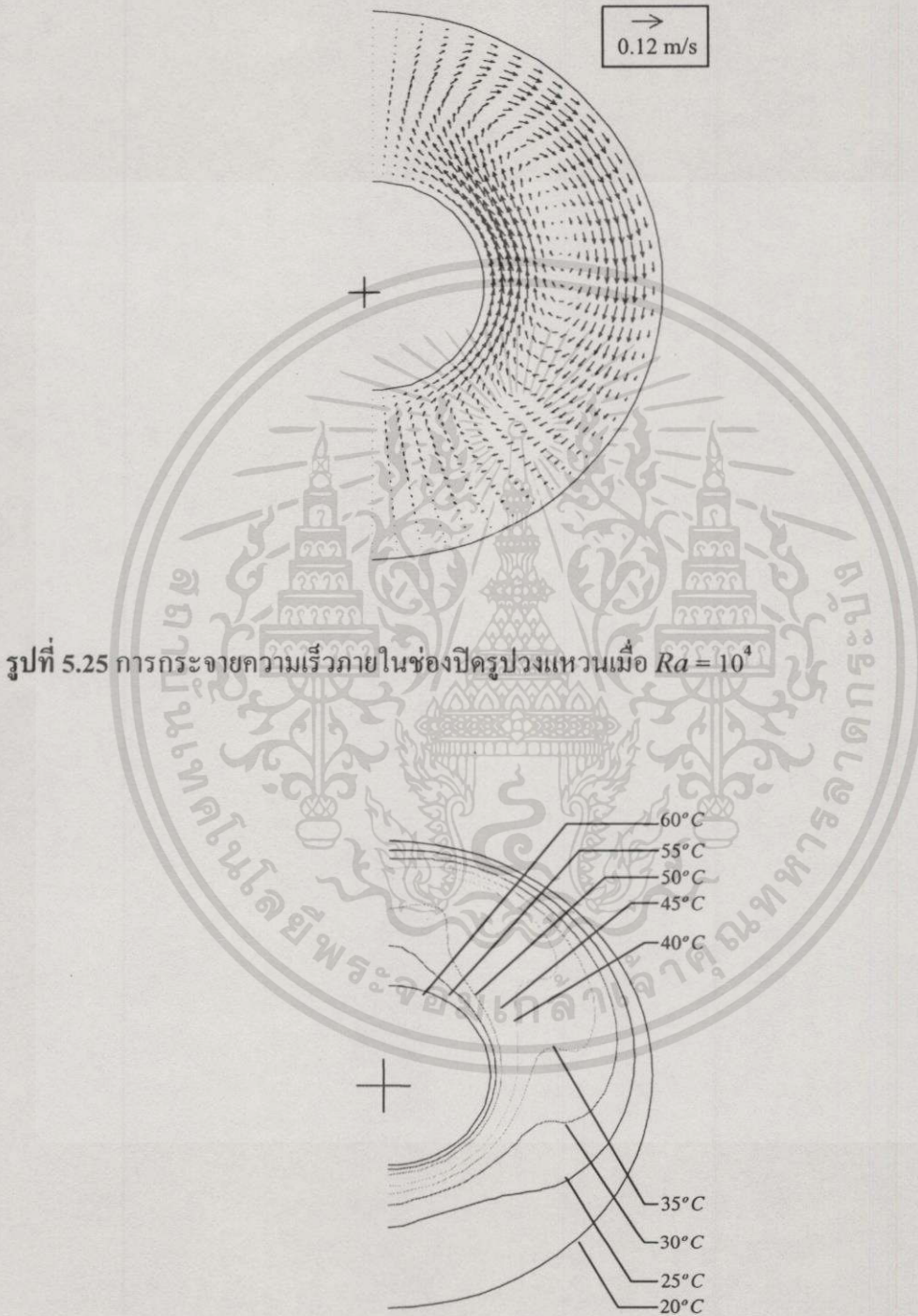
รูปที่ 5.23 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 6 \times 10^3$ และรูปที่ 5.24 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 6 \times 10^3$



รูปที่ 5.24 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปัดรูปวงแหวนเมื่อ $Ra = 6 \times 10^3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.25 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $Ra = 10^4$ และรูปที่ 5.26 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $Ra = 10^4$



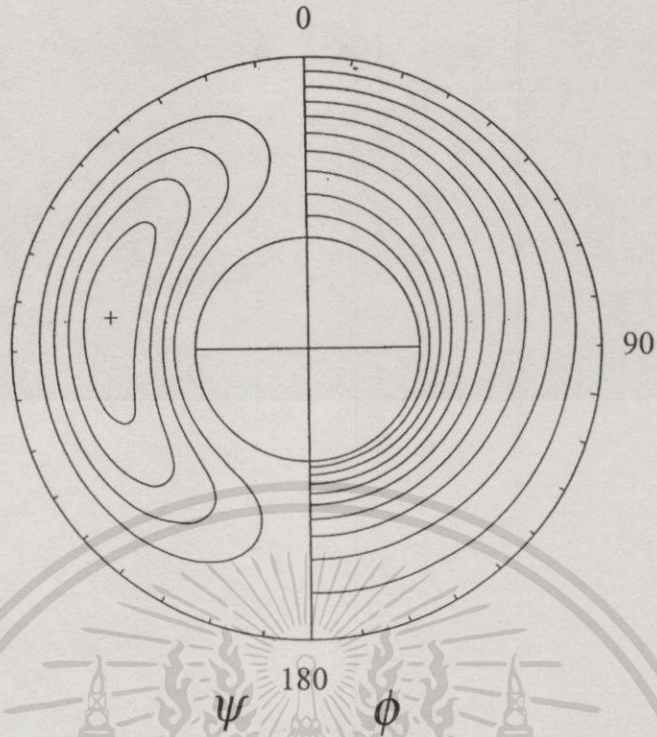
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.5.2 การวิเคราะห์ผล

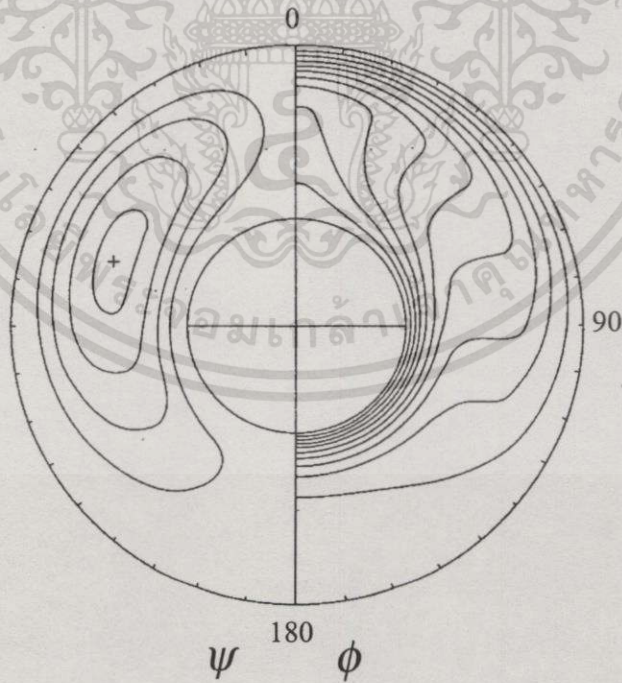
การแสดงให้เห็นถึงผลกระทบของค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ต่อการกระจายของความเร็วของอากาศภายในช่องปิดรูปวงแหวนปรากฏให้เห็นในรูปที่ 5.17 5.19 5.21 5.23 และ 5.25 ซึ่งเป็นรูปของเวกเตอร์ความเร็วของอากาศเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 100 1000 3000 6000 และ 10000 ตามลำดับ จะเห็นได้อย่างชัดเจนว่าเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์สูงขึ้น จะเป็นผลให้ความเร็วของอากาศภายในช่องปิดมีค่าสูงขึ้นในบริเวณใกล้ผนังด้านร้อนและเย็น การไหลจะเป็นลักษณะของการหมุนวนหนึ่งวง และจุดศูนย์กลางของการหมุนวนจะเคลื่อนที่สูงขึ้นเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่ามากขึ้น

อุณหภูมิของอากาศภายในช่องปิดรูปวงแหวนจะมีการกระจายที่เป็นเชิงเส้นตามแนวรัศมีเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์น้อยกว่า 1000 เนื่องจากการนำความร้อนเป็นกลไกหลักของการถ่ายเทความร้อนและอากาศเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต่ำ เมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 1000 การกระจายอุณหภูมิจะมีรูปร่างเหมือนกับวงกลมเชิงศูนย์กลางมากขึ้นเนื่องจากได้รับผลกระทบของเคลื่อนที่ของอากาศ การพัฒนารูปร่างการกระจายอุณหภูมิจะเห็นได้ชัดเมื่อพิจารณารูปที่ 5.20 5.22 และ 5.24 ซึ่งเป็นรูปการกระจายอุณหภูมิของอากาศที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 3000 6000 และ 10000 ตามลำดับ อุณหภูมิของอากาศจะเกิดการเปลี่ยนแปลงแบบผกผันขึ้นได้ในบริเวณส่วนบนของทรงกระบอกร้อน หรือ อุณหภูมิจะลดลงเมื่อรัศมีเพิ่มขึ้นแต่เมื่อรัศมีมีค่ามากกว่ารัศมีค่าหนึ่งจะพบว่าอุณหภูมิมิค่าสูงขึ้น เมื่อนำเส้นไอโซเทอมที่ได้จากวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์ของวิทยานิพนธ์นี้มาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณด้วยวิธีผลต่างสืบเนื่องของ Kuehn and Goldstein [20] พบว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ดังรูปที่ 5.27 และ 5.28

การวิเคราะห์การไหลและการถ่ายเทความร้อนด้วยวิธีเชิงตัวเลขของ Kuehn and Goldstein เริ่มต้นจากการเขียนระบบสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาการไหลให้อยู่ในพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinate) แล้วจึงประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) กับระบบสมการดังกล่าว เพื่อประดิษฐ์ระบบสมการพีชคณิตสำหรับตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ขึ้นมา หลังจากนั้นจึงใช้วิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง (Successive Over-Relaxation Method) ในการหาผลลัพธ์ของระบบสมการของตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อเหล่านั้น กริดที่ใช้คือ กริด 16×19 ซึ่งมีจำนวนจุดต่อทั้งหมดเท่ากับ 304 จุด (จุดต่อภายในจำนวน 238 จุดและจุดต่อที่ขอบเขตจำนวน 66 จุด) จำนวนช่วงของรัศมีคือ 15 (ระยะห่างของรัศมีที่ใกล้ขอบเขตจะน้อยกว่าระยะห่างของรัศมีภายในโดเมน) จำนวนช่วงขององศา คือ 18 (แบ่งช่วงละ 10 องศา)



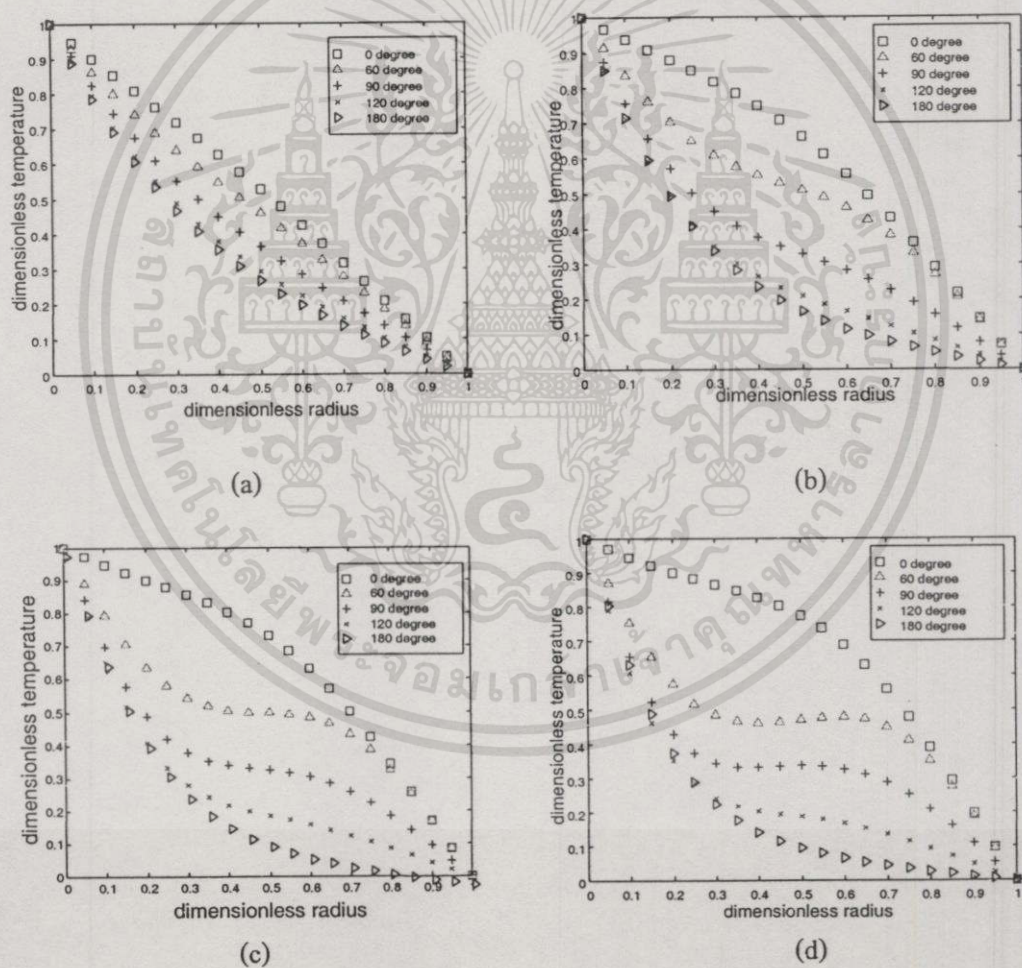
รูปที่ 5.27 เส้น streamline (ψ) และเส้น isotherm (ϕ), $Ra=10^3$, $Pr = 0.7$, $L/D_i = 0.8$, $\Delta\psi=0.5$, $\Delta\phi=0.1$ ([20])



รูปที่ 5.28 เส้น streamline (ψ) และเส้น isotherm (ϕ), $Ra=10^4$, $Pr = 0.7$, $L/D_i = 0.8$, $\Delta\psi=3.0$, $\Delta\phi=0.1$ ([20])

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปร่างของอุณหภูมิไร้มิติในแนวรัศมีที่มุมต่าง ๆ เมื่อ Ra เท่ากับ 1000 3000 6000 และ 10000 แสดงอยู่ในรูปที่ 5.29(a) ถึง 5.29(d) โดยกำหนดให้แนวเส้นของมุม 0 องศาคือแนวเส้นที่ลากตามแนวตั้งออกจากจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกทั้งสองขึ้นสู่ด้านบนในทิศทาง y ที่เป็นบวก แนวเส้นของมุม 90 องศาคือแนวเส้นที่ลากออกจากจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกทั้งสองตามแนวนอนในทิศทาง x ที่เป็นบวก และจุดกำเนิดของพิกัด x และ y ตั้งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของทรงกระบอก เห็นได้ชัดว่าค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีผลทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงการกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิดที่หน้าตัดต่างๆ บริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิไร้มิติสูงมากอยู่ในช่วงองศาตั้งแต่ 0 องศาถึง 60 องศาหรือบริเวณส่วนบนของทรงกระบอก และบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิไร้มิติน้อยมากอยู่ในช่วงองศาตั้งแต่ 120 องศาถึง 180 องศาหรือบริเวณส่วนล่างของทรงกระบอก



รูปที่ 5.29 รูปร่างของอุณหภูมิไร้มิติในแนวรัศมีที่มุมต่าง ๆ (a) $Ra = 1000$ (b) $Ra = 3000$
(c) $Ra = 6000$ (d) $Ra = 10000$

นิยามของอุณหภูมิไร้มิติคือ

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c}$$

และนิยามของรัศมีไร้มิติคือ

$$\gamma = \frac{r - r_i}{r_o - r_i}$$

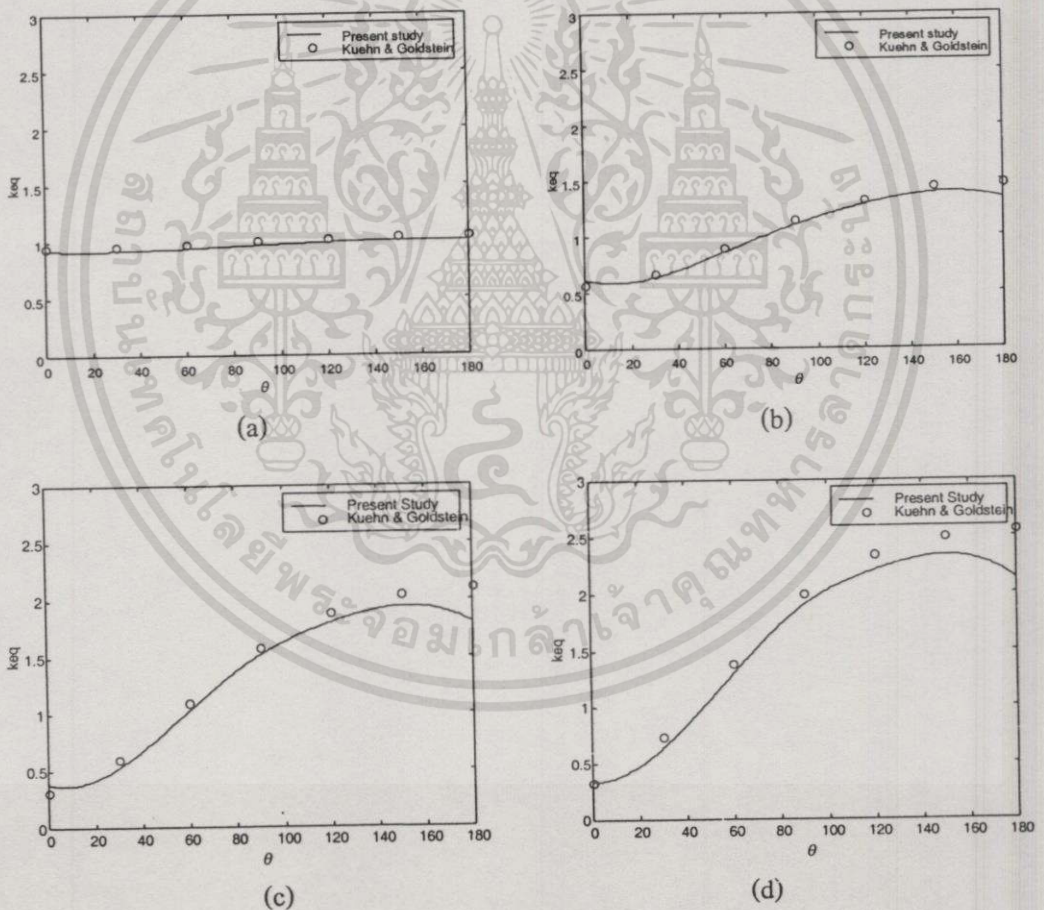
การตรวจสอบความถูกต้องของการคำนวณได้กระทำโดยการเปรียบเทียบค่าการนำความร้อนสมมูล (Equivalent conductivity) ที่ผิวของทรงกระบอกทั้งสอง รูปที่ 5.30 และ 5.31 แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องเป็นอย่างดีของผลการคำนวณที่ได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์และผลลัพธ์ของ Kuehn and Goldstein ที่แต่ละองศาบนผิวทรงกระบอกด้านในและนอก อย่างไรก็ตามค่าการนำความร้อนสมมูลสำหรับผิวทรงกระบอกด้านในจะมีความคลาดเคลื่อนมากในบริเวณใกล้ผิวด้านล่าง ในขณะที่ผิวทรงกระบอกด้านนอกจะมีความคลาดเคลื่อนมากในบริเวณใกล้ผิวด้านบน ค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลมาแสดงไว้ในตารางที่ 5.2a และ 5.2b พบว่าค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่คำนวณได้มีค่าคลาดเคลื่อนจากผลลัพธ์ของ Kuehn and Goldstein [20] ไม่เกิน 9 เปอร์เซ็นต์ ความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้นมากที่สุดที่ผิวของทรงกระบอกด้านใน ในขณะที่ความคลาดเคลื่อนที่ผิวของทรงกระบอกด้านนอกมีค่าไม่เกิน 4 เปอร์เซ็นต์ และจากตารางทั้งสองจะเห็นได้ว่าค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลจะมีความคลาดเคลื่อนมากเมื่อค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีค่าสูง ค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านในซึ่งได้จากโปรแกรมคอมพิวเตอร์มีค่าต่ำกว่าค่าเปรียบเทียบที่นำมาจากเอกสารอ้างอิงเสมอ

ตารางที่ 5.2a การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านใน(ร้อน)

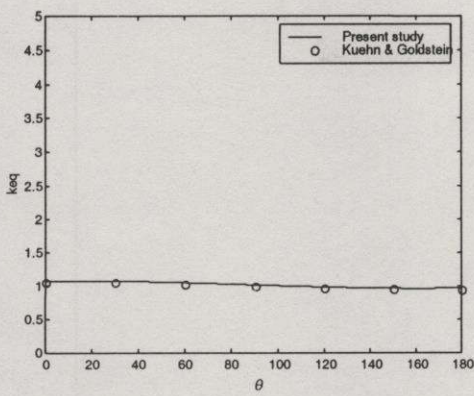
Ra	Average equivalent conductivity		Error (%)
	Kuehn & Goldstein	Present study	
100	1.000	0.963	-3.70
1000	1.081	1.037	-4.07
3000	1.404	1.312	-6.55
6000	1.736	1.591	-8.35
10000	2.010	1.830	-8.96

ตารางที่ 5.2b การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านนอก (เย็น)

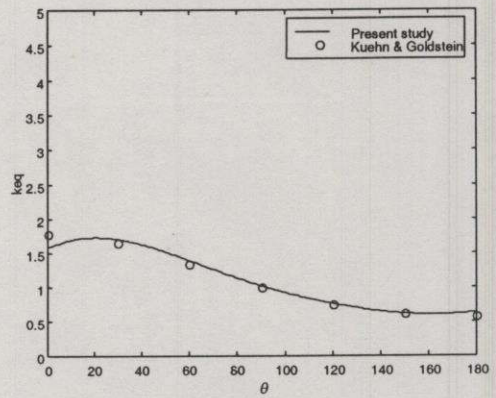
Ra	Average equivalent conductivity		Error (%)
	Kuehn & Goldstein	Present study	
100	1.002	1.017	1.47
1000	1.081	1.097	1.21
3000	1.402	1.391	-0.82
6000	1.735	1.688	-2.71
10000	2.005	1.944	-3.04



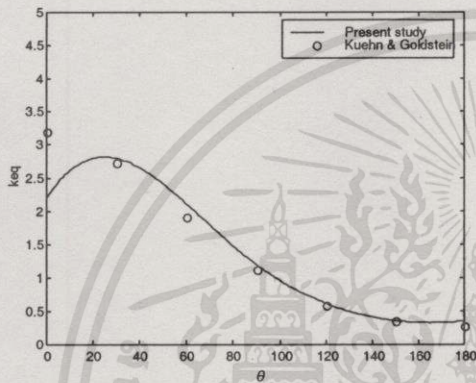
รูปที่ 5.30 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่มุมองศาต่าง ๆ บนผนังทรงกระบอกด้านใน (a) $Ra = 100$ (b) $Ra = 1000$ (c) $Ra = 3000$ (d) $Ra = 6000$



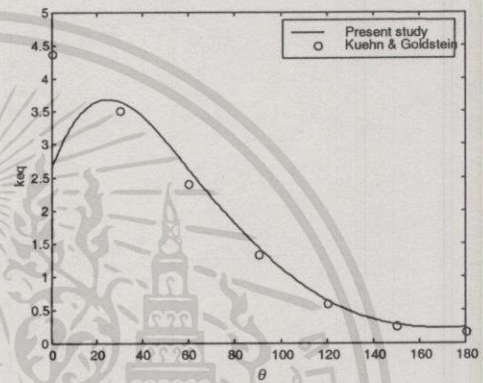
(a)



(b)



(c)



(d)

รูปที่ 5.31 การเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของการนำความร้อนสมมูลที่มุมองศาต่าง ๆ บนผนังทรงกระบอกด้านนอก (a) $Ra = 100$ (b) $Ra = 1000$ (c) $Ra = 3000$ (d) $Ra = 6000$

ค่าการนำความร้อนสมมูลคือ อัตราส่วนระหว่างฟลักซ์ความร้อนจริงที่คำนวณจากความลาดชันของอุณหภูมิตามแนวรัศมีที่ผิวทรงกระบอกและฟลักซ์ความร้อนของการนำความร้อนเมื่อพิจารณาว่าไม่เกิดการไหลของของไหลภายในช่องว่าง

ค่าการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านในมีนิยามว่า

$$(k_{eq})_i = \frac{Nu_i}{Nu_{cond}}$$

ค่าการนำความร้อนสมมูลที่ผิวทรงกระบอกด้านนอกมีนิยามว่า

$$(k_{eq})_o = \frac{Nu_o}{Nu_{cond}}$$

โดยที่ $Nu_{cond} = \frac{2}{\ln(D_o/D_i)}$

Nu_i คือ ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉพาะจุดบนทรงกระบอกด้านใน

Nu_o คือ ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉพาะจุดบนทรงกระบอกด้านนอก

D_i คือ ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านใน

D_o คือ ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกด้านนอก

ค่านัสเซิลท์นัมเบอร์เฉพาะแห่ง (Local Nusselt Number) บนทรงกระบอกทั้งสองสามารถเขียนเป็นสมการคณิตศาสตร์ได้ดังนี้ สำหรับทรงกระบอกด้านใน

$$Nu_i = \frac{(dT/dr)_i}{(\Delta T/D_i)}$$

สำหรับทรงกระบอกด้านนอก

$$Nu_o = -\frac{(dT/dr)_o}{(\Delta T/D_o)}$$

โดยที่ dT/dr คือ ความลาดชันของอุณหภูมิตามแนวรัศมี

ΔT คือ ผลต่างระหว่างอุณหภูมิของทรงกระบอกด้านในและด้านนอก

นอกจากนี้เมื่อทำการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการคำนวณระหว่างอิเลเมนต์สามเหลี่ยม และ อิเลเมนต์สี่เหลี่ยมเมื่อ $Ra = 3000$ พบว่า เมื่อแบ่งพื้นที่ออกเป็นอิเลเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 352 อิเลเมนต์ อิเลเมนต์สามเหลี่ยมใช้เวลาเฉลี่ยในการคำนวณอิเลเมนต์เมทริกซ์และประกอบเมทริกซ์ของระบบเท่ากับ 5 วินาทีต่อหนึ่งรอบของการกระทำซ้ำของนิวตันราฟสัน และใช้เวลารวมสำหรับการแก้ปัญหาจนกระทั่งได้ผลลัพธ์เท่ากับ 420 วินาที ในขณะที่เมื่อแบ่งพื้นที่ออกเป็นอิเลเมนต์สี่เหลี่ยมจำนวน 180 อิเลเมนต์ อิเลเมนต์สี่เหลี่ยมใช้เวลาเฉลี่ยในการคำนวณอิเลเมนต์เมทริกซ์และประกอบเมทริกซ์ของระบบเท่ากับ 6 วินาทีต่อหนึ่งรอบของการกระทำซ้ำของนิวตันราฟสัน และใช้เวลารวมสำหรับการแก้ปัญหาจนกระทั่งได้ผลลัพธ์เท่ากับ 514 วินาที วิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาเมทริกซ์เชิงเส้นของการใช้อิเลเมนต์สามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมคือวิธีไบนจอนจูเกจเกรเดียนท์ [18]

5.6 การพาความร้อนแบบอิสระจากทรงกระบอกกลมไปสู่กล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระจากทรงกระบอกร้อนไปสู่กล่องรูปสี่เหลี่ยมซึ่งเย็นกว่าเป็นปัญหาที่พบในอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน การให้ความร้อนด้วยแสงอาทิตย์ และการทำความเย็นให้แก่อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ เนื่องจากการศึกษาในปัญหารูปร่างนี้ไม่มีข้อมูลทั้งผลการคำนวณทางทฤษฎี และผลการทดลองในบทความทางวิชาการมาเปรียบเทียบ แต่การจำลองแบบนี้เป็นตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นถึงงานประยุกต์ที่โปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถหาผลลัพธ์ได้และช่วยให้เกิดความเข้าใจมากขึ้นเกี่ยวกับการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิด

ตัวแปรไร้มิติที่ต้องการศึกษาผลกระทบต่อการกระจายตัวของความเร็วและอุณหภูมิของอากาศ ($Pr = 0.7$) ภายในช่องปิดนี้คือ อัตราส่วนความยาว (Aspect ratio) ซึ่งมีนิยามว่า

$$W^* = \frac{W}{D}$$

โดยที่ W^* คือ อัตราส่วนความยาว (Aspect ratio)

W คือ ความกว้างของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

D คือ ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอก (0.4 เมตร)

ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ (Ra) สำหรับช่องปิดนี้มีนิยามว่า

$$Ra = \frac{\rho g \beta (T_H - T_C) D^3}{\mu \alpha}$$

โดยที่ T_H คือ อุณหภูมิที่ผิวทรงกระบอก

T_C คือ อุณหภูมิที่ผิวของกล่องสี่เหลี่ยม

การคำนวณสำหรับปัญหานี้ได้กำหนดให้ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์เท่ากับ 1300 และใช้อัตราส่วนความยาวจำนวน 3 ค่าคือ 2 3 และ 4 เมื่อสังเกตจากรูป 5.32 จะพบว่าปัญหานี้มีความสมมาตรรอบแกนแนวดิ่ง ดังนั้นรูปร่างที่ใช้ในการคำนวณจึงสามารถคิดเพียงครึ่งหนึ่งของรูปร่างจริงได้ ซึ่งจะช่วยให้เกิดความสะดวกในการสร้างโครงประสานและประหยัดหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ด้วย ผนังด้านข้างของกล่องสี่เหลี่ยมมีค่าคงที่เท่ากับ 20 องศาเซลเซียส (T_C) และผนังของทรงกระบอกมีค่าคงที่เท่ากับ 60 องศาเซลเซียส (T_H) ผนังอีกสองด้านของกล่องสี่เหลี่ยมเป็นผนังหุ้มฉนวน ความเร็วที่ผนังของกล่องสี่เหลี่ยมและผิวของทรงกระบอกจะกำหนดให้มีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด รูปที่ 5.33(a) ถึง (c) แสดงถึงโครงประสานของอิทธิพลสำหรับอัตราส่วนความยาว เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

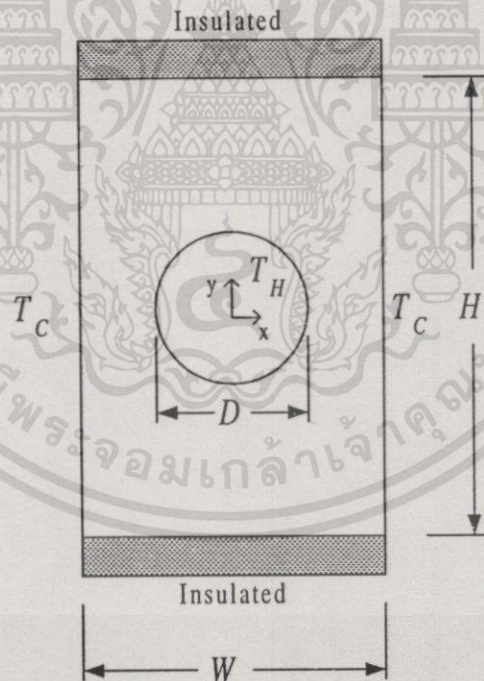
เท่ากับ 2 3 และ 4 ตามลำดับ จำนวนจุดต่อและอติเมทริกทั้งหมดที่ใช้ในการจำลองที่อัตราส่วนความยาวทั้งสามค่าคือ 173 จุดและ 48 อติเมทริก

ในการคำนวณหาจุดกริดภายในโดเมนส่วนหนึ่งได้ใช้วิธีการที่เรียกว่า การส่งค่าแบบทรานฟินิท (Transfinite Mapping) ซึ่งเป็นการสร้างกริดภายในขอบเขตระหว่างเส้นโค้งจำนวนสองเส้นซึ่งกำหนดมาให้ด้วยการประมาณค่าแบบเส้นตรง เมื่อกำหนดให้เส้น โค้งเส้นหนึ่งมีเวกเตอร์พิกัดบนเส้นเท่ากับ (x_0, y_0) และเส้น โค้งอีกเส้นหนึ่งมีเวกเตอร์พิกัดบนเส้นเท่ากับ (x_1, y_1) ดังนั้น

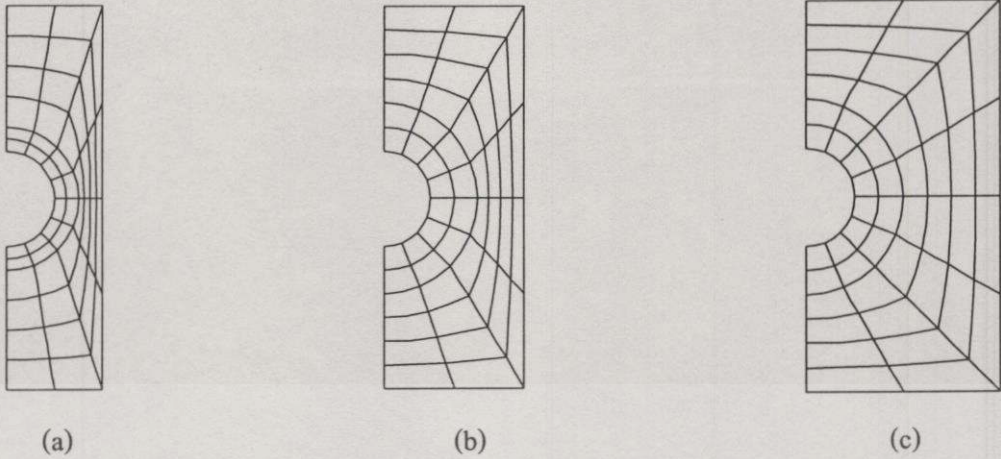
$$x = x_0 + r(x_1 - x_0)$$

$$y = y_0 + r(y_1 - y_0)$$

โดยที่ r คือ อัตราส่วนความยาวระหว่างเส้น โค้งขอบเขตเส้นเส้นมีค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 1 x คือ เวกเตอร์ของพิกัด x ซึ่งอยู่ระหว่างเส้น โค้งทั้งสอง y คือ เวกเตอร์ของพิกัด y ซึ่งอยู่ระหว่างเส้น โค้งทั้งสอง



รูปที่ 5.32 ช่องปิดซึ่งอยู่ระหว่างทรงกระบอกและกล่องสี่เหลี่ยมมุมฉาก



รูปที่ 5.33 โครงข่ายของอิติเมทท์ภายในช่องปิด (a) $W^* = 2$ (b) $W^* = 3$ (c) $W^* = 4$

ข้อกำหนดสำหรับปัญหานี้คือ

$$q(x, y = -H/2) = 0 \quad \text{และ} \quad q(x, y = H/2) = 0$$

โดย q คือ ฟลักซ์ความร้อน ผนังแนวตั้งของกล่องสี่เหลี่ยมมีอุณหภูมิคงที่ และแกนสมมาตรของช่องปิดไม่มีฟลักซ์ความร้อนไหลผ่าน

$$T(x = W/2, y) = T_c, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, -H < y < -R) = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial x}(x = 0, R < y < H) = 0$$

ความเร็วบนผนังต่าง ๆ ของกล่องสี่เหลี่ยมมีเงื่อนไขว่า

$$u(x = -W/2, y) = 0$$

$$v(x = -W/2, y) = 0$$

$$u(x = W/2, y) = 0$$

$$v(x = W/2, y) = 0$$

$$u(x, y = -H/2) = 0$$

$$v(x, y = -H/2) = 0$$

$$u(x, y = H/2) = 0$$

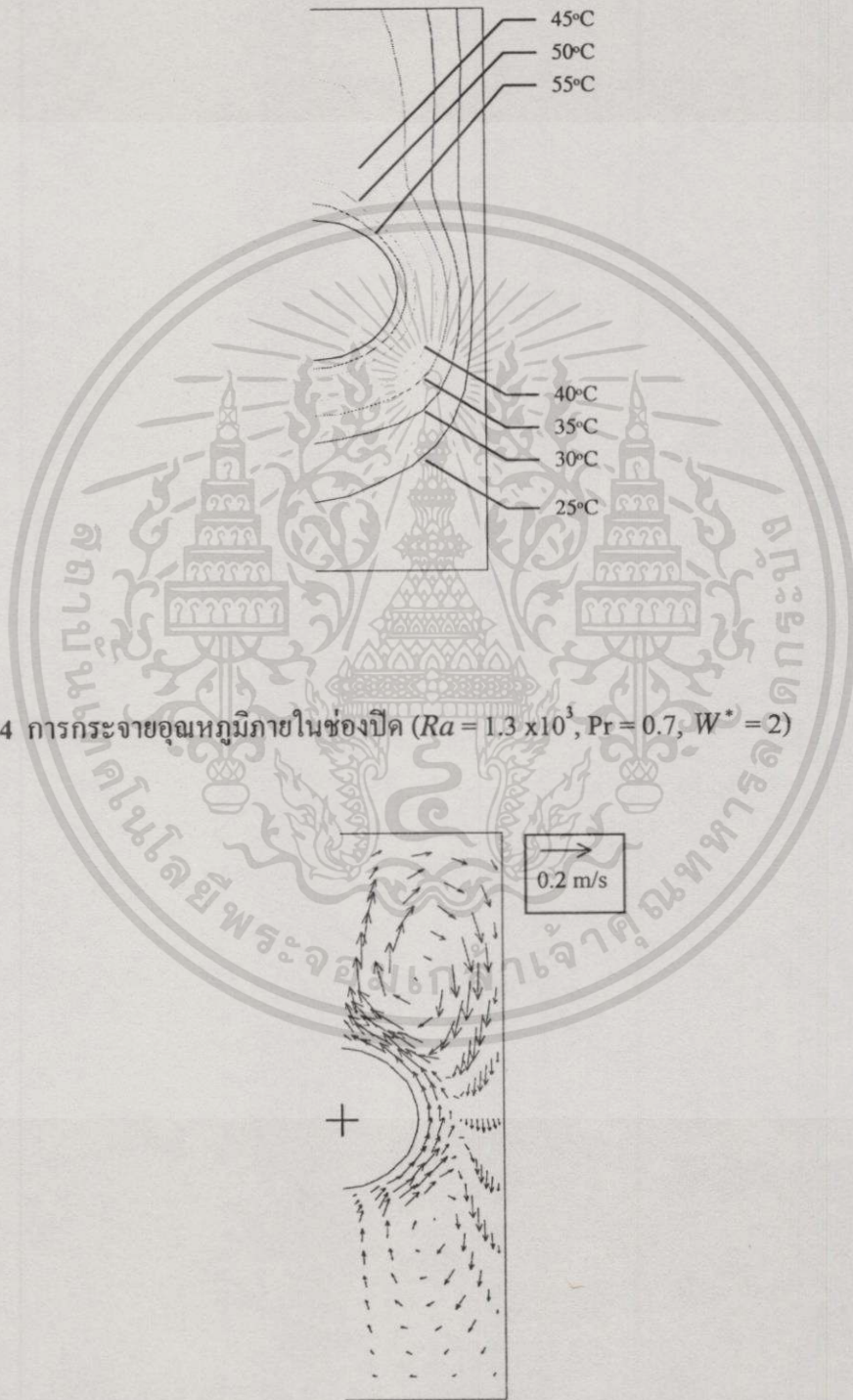
$$v(x, y = H/2) = 0$$

ความเร็วและอุณหภูมิบนผิวทรงกระบอกมีเงื่อนไขว่า $u = v = 0$ และ $T = T_H$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.6.1 ผลการจำลอง

รูปที่ 5.34 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $W^* = 2$ ในขณะที่รูปที่ 5.35 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $W^* = 2$

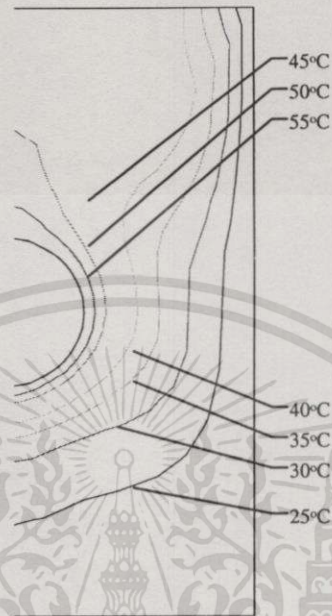


รูปที่ 5.34 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3$, $Pr = 0.7$, $W^* = 2$)

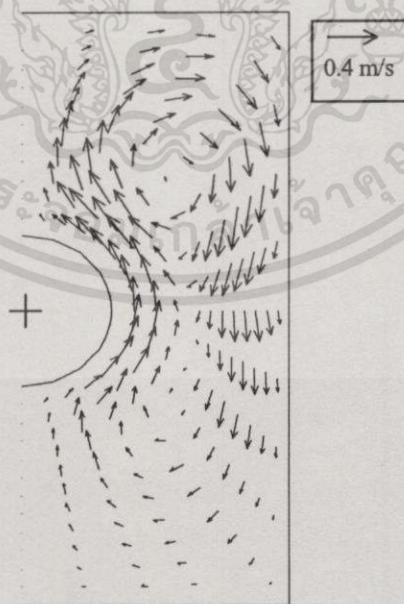
รูปที่ 5.35 การกระจายความเร็วภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3$, $Pr = 0.7$, $W^* = 2$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.36 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $W^* = 3$ ในขณะที่รูปที่ 5.37 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $W^* = 3$



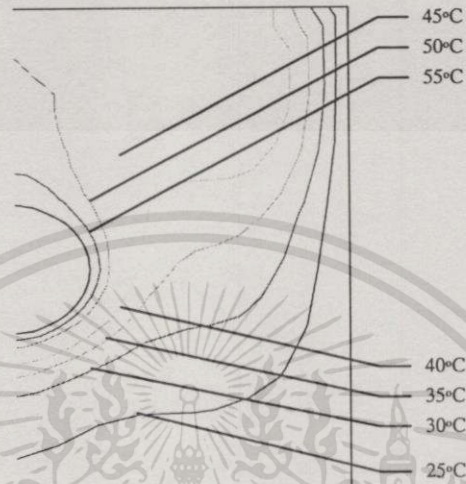
รูปที่ 5.36 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3$, $Pr = 0.7$, $W^* = 3$)



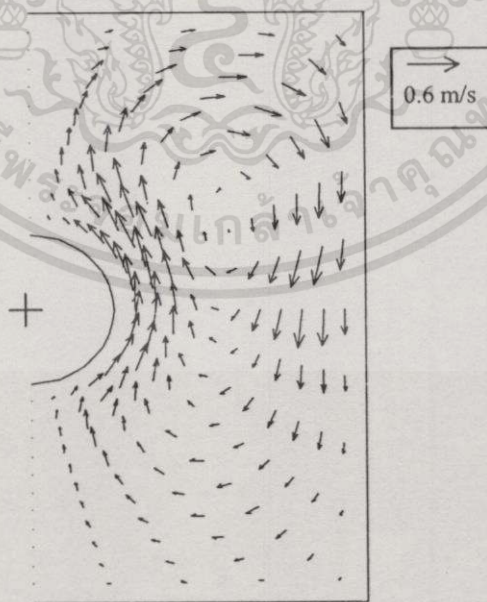
รูปที่ 5.37 การกระจายความเร็วภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3$, $Pr = 0.7$, $W^* = 3$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 5.38 เป็นการพล็อตเส้นอุณหภูมิคงที่ (Temperature Contour) ของการไหลเมื่อ $W^* = 4$ ในขณะที่รูปที่ 5.39 แสดงการกระจายตัวของของไหลในรูปของเวกเตอร์เมื่อ $W^* = 4$



รูปที่ 5.38 การกระจายอุณหภูมิภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3$, $Pr = 0.7$, $W^* = 4$)



รูปที่ 5.39 การกระจายความเร็วภายในช่องปิด ($Ra = 1.3 \times 10^3$, $Pr = 0.7$, $W^* = 4$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.6.2 การวิเคราะห์ผล

ในหัวข้อนี้เป็นการศึกษาถึงผลของค่าอัตราส่วนความยาวระหว่างความกว้างของกล่องสี่เหลี่ยมและขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางของทรงกระบอกดังแสดงในรูปที่ 5.34 ถึง 5.39 การกระจายตัวของอุณหภูมิภายในช่องปิดมีความแตกต่างกันพอสมควรเมื่ออัตราส่วนความยาวของช่องปิดไม่เท่ากัน โดยเฉพาะในบริเวณส่วนบนของทรงกระบอก กล่าวคือ เมื่ออัตราส่วนความยาวมีค่าน้อย การกระจายตัวของอุณหภูมิที่ส่วนบนของทรงกระบอกจะมีมากกว่า แต่เมื่ออัตราส่วนความยาวมากขึ้น อุณหภูมิโดยรอบส่วนบนของทรงกระบอกจะมีค่าใกล้เคียงกันมากดังรูปที่ 5.34 5.36 และ 5.38

การเคลื่อนที่ของของไหลขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความยาวของช่องปิดอย่างมาก จะสังเกตเห็นได้จากการไหลหมุนวนจำนวนสองวงแยกออกจากกันอย่างชัดเจนเมื่ออัตราส่วนความยาวเท่ากับ 2 ดังรูปที่ 5.35 การไหลหมุนวนหนึ่งวงปรากฏขึ้นที่ส่วนบนของช่องปิดและการไหลหมุนวนอีกหนึ่งวงอยู่ในส่วนล่างของช่องปิด รูปที่ 5.37 และ 5.39 เป็นผลการจำลองเมื่ออัตราส่วนยาวเพิ่มขึ้นเป็น 3 และ 4 ตามลำดับ การไหลจะกระจายตัวออกจนเต็มช่องปิด

ดังที่ได้นำเสนอไว้ในหัวข้อที่ 5.4 และ 5.5 ว่าค่าเรย์เลห์นัมเบอร์มีส่วนต่อการเปลี่ยนแปลงทิศทางการไหลและการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในช่องปิดเช่นเดียวกับอัตราส่วนความยาวของช่องปิด ดังนั้นหากต้องการศึกษาการพาความร้อนสำหรับปัญหานี้ให้มากขึ้นควรเปลี่ยนค่าเรย์เลห์นัมเบอร์และสังเกตผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองแบบ

บทที่ 6

บทสรุปและวิจารณ์

6.1 บทสรุป

วิทยานิพนธ์นี้ได้กล่าวถึงการประยุกต์วิธีไฟไนท์อิลิเมนต์ที่เชื่อมกับปัญหาการพาความร้อนภายในช่องปิดรูปร่างต่างๆ ภายใต้เงื่อนไขของการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว ปัญหาที่สามารถหาคำตอบได้ถูกจำกัดไว้ที่ปัญหาสองมิติ ในบทที่ 1 ได้กล่าวถึงความสำคัญของการสร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการจำลองแบบปัญหาจริง และการพัฒนาวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์เพื่อหาผลลัพธ์สำหรับปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของไหลและการถ่ายเทความร้อน ซึ่งถือได้ว่าเป็นแขนงวิชาใหม่ที่มีผู้วิจัยหลายท่านทั้งในต่างประเทศและในประเทศไทยให้ความสนใจนอกเหนือจากแขนงวิชาทางด้านกลศาสตร์ของแข็งซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของการวิเคราะห์ปัญหาทางกลด้วยวิธีไฟไนท์อิลิเมนต์

สมการที่ควบคุมการเคลื่อนที่และการถ่ายเทความร้อนของของไหลสำหรับปัญหาการพาความร้อนได้ถูกนำมากล่าวถึงในบทที่ 2 ประกอบด้วยสมการอนุพันธ์ย่อยสำหรับกฎการอนุรักษ์มวล กฎการอนุรักษ์โมเมนตัม และกฎการอนุรักษ์พลังงาน รวมทั้งเงื่อนไขขอบเขตรูปแบบต่างๆ ที่ใช้ร่วมกับสมการอนุพันธ์เพื่อหาผลลัพธ์ของการไหลและการถ่ายเทความร้อน สมการอนุพันธ์ทั้งสามสมการนี้มีความซับซ้อนมาก จำเป็นต้องตั้งสมมติฐานเพื่อให้สามารถหาผลลัพธ์สำหรับปัญหาการพาความร้อนได้ เช่น การเพิ่มพจน์ของแรงลอยตัวซึ่งเกิดขึ้นเนื่องจากความแตกต่างของอุณหภูมิเข้าไว้ในสมการโมเมนตัมสำหรับแกน y เป็นต้น แล้วนำมาประดิษฐ์เป็นสมการที่สามารถนำไปใช้ในการพัฒนาเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยการประยุกต์หลักการถ่วงน้ำหนักเศษดก้างของการเคลื่อนที่แสดงไว้ในบทที่ 3 นอกจากนี้ในบทที่ 3 ยังได้แสดงให้เห็นถึงการประยุกต์วิธีการหาปริภูมิด้วยวิธีเชิงเลขในการสร้างอิลิเมนต์เมทริกซ์ แต่เนื่องจากสมการพีชคณิตซึ่งได้จากการประยุกต์วิธีการเคลื่อนที่นี้เป็นสมการที่คูณสมมาตรไม่เป็นเชิงเส้น ทำให้ต้องอาศัยวิธีการกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันในการทำให้ปัญหากลายเป็นปัญหาสมการเชิงเส้น (Linearization) ในขณะเดียวกันวิธีการกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันก็มีความรวดเร็วมากพอสมควรในการเข้าสู่ผลลัพธ์ สุดท้ายยังได้กล่าวถึงการแก้สมการด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยจัดแถวสมการหลักด้วย ซึ่งจำเป็นต้องใช้ในการแก้สมการเนื่องจากเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ซึ่งได้จากการประยุกต์วิธีนิวตัน-ราฟสันนั้นเป็นเมทริกซ์มากเลขศูนย์และไม่สมมาตร (Unsymmetric Sparse Matrix) นอกจากนั้น สมาชิกบางตัวในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์มีค่าเป็นศูนย์ การแก้สมการด้วยวิธีนี้แม้จะได้คำตอบที่แม่นยำแต่มีใช้เวลานานในการจัดแถวหลัก หากทำการแบ่งอิลิเมนต์ให้มีจำนวนมากขึ้น การแก้สมการด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์พร้อมด้วยการจัดแถวสมการหลักจึงไม่เหมาะสมเป็นอย่างยิ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสร้างโครงประสาณเป็นเนื้อหาหนึ่งที่มีความสำคัญมากในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำมากล่าวไว้ในบทที่ 4 เนื่องจากข้อจำกัดที่พบในเอกสารอ้างอิง [22] อันเนื่องมาจากการใช้โครงประสาณที่ไม่เป็นโครงสร้างจากการสร้างโครงประสาณแบบอัตโนมัติของโปรแกรมสำเร็จรูปชื่อ NASTRAN ทำให้ยากต่อการคำนวณพลั๊กซ์ความร้อนที่ผนังและไม่สามารถควบคุมคุณภาพของรูปร่างอิเลิเมนต์บริเวณติดผนังได้มากนัก ดังนั้นในบทที่ 4 จึงได้รวบรวมวิธีการสร้างแบบเป็นโครงสร้างเพื่อให้สามารถควบคุมขนาดอิเลิเมนต์และควบคุมมุมเอียงระหว่างจุดต่อบริเวณใกล้ผนังกับจุดต่อบนผนังที่กำลังสนใจได้อย่างแน่นอน แม้ว่าการสร้างจุดกริดด้วยวิธีการในบทที่ 4 นี้จะเป็นการสร้างที่มีระเบียบขั้นตอนที่ง่ายต่อการนำไปปฏิบัติ แต่สามารถประยุกต์กับปัญหาที่มีความซับซ้อนได้พอสมควรหากปรับปรุงโปรแกรมนี้ให้ใช้กับบล็อกหลายบล็อกได้ โดยที่ภายในแต่ละบล็อกจะใช้ระเบียบขั้นตอนการสร้างลักษณะเดียวกัน สิ่งที่ต้องระวังคือในการสร้างจุดต่อภายในบล็อกซึ่งอยู่ติดกัน การระบุจำนวนจุดต่อในบริเวณรอยต่อของบล็อกจะต้องมีค่าเท่ากัน ข้อมูลเกี่ยวกับพิกัด x และ y ของจุดต่อทุกจุดภายในโดเมน และการเชื่อมต่อระหว่างจุดต่อภายในอิเลิเมนต์ต่างๆ ของโดเมนเป็นสิ่งที่ได้จากระเบียบวิธีในบทที่ 4 เพื่อรับเข้าสู่โปรแกรมคำนวณต่อไป

โปรแกรมคำนวณที่ดำเนินตามแนวทางที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 3 มีรายละเอียดของการรับข้อมูลเข้าและแผนผังการทำงานอยู่ในบทที่ 5 แนวความคิดเบื้องต้นของการไหลภายในชั้นขอบเขตและนอกชั้นขอบเขตของของไหลเนื่องจากการพาความร้อนแบบอิสระสำหรับวัตถุแผ่นเรียบซึ่งถูกนำมาวางไว้ในแนวตั้ง และปัญหาทั้งสามที่ใช้ในการทดสอบความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น โดยในการทดสอบของรูปร่างช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปร่างแหวนนั้นได้ทำการเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้กับผลลัพธ์ที่ได้จากบทความวิชาการซึ่งได้รับการตีพิมพ์ในวารสารนานาชาติแล้ว ในส่วนของรูปร่างช่องปิดซึ่งอยู่ระหว่างสี่เหลี่ยมจัตุรัสและทรงกระบอกกลมนั้นเป็นการแสดงให้เห็นถึงประโยชน์ของวิธีไฟไนท์อิเลิเมนต์ที่สามารถใช้กับปัญหาที่มีความซับซ้อนได้โดยไม่ต้องใช้ความพยายามในการจัดรูปสมการใหม่ การสร้างจุดกริดให้สอดคล้องกับปัญหาเพียงอย่างเดียวก็สามารถทำให้สามารถคำนวณหาผลลัพธ์ได้ในทันที

6.2 ปัญหาที่พบและการวิจารณ์

ในการศึกษาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดด้วยวิธีไฟไนท์อิเลิเมนต์มีปัญหาที่พบอยู่หลายประการได้แก่

1. การเลือกชนิดอิเลิเมนต์สำหรับการคำนวณ เนื่องจากในวิทยานิพนธ์นี้เป็นการนำเสนอแนวทางของการประยุกต์อิเลิเมนต์สี่เหลี่ยมสำหรับการคำนวณการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิด ซึ่งสามารถเลือกอิเลิเมนต์สี่เหลี่ยมได้หลายชนิด แต่ควรใช้อิเลิเมนต์ที่มีโพลีโนเมียลของการประมาณค่าอันดับที่สองขึ้นไปสำหรับการคำนวณค่าของความเร็ว อุณหภูมิและใช้อิเลิเมนต์ที่มีโพลีโนเมียลของการประมาณค่าอันดับที่หนึ่งเป็นอย่างต่ำสำหรับการคำนวณค่าของความดัน เพื่อให้ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าความดันที่ต่อเนื่องกันทั่วทั้ง โดเมน ดังนั้นเพื่อการประหยัดหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์และความรวดเร็วในการคำนวณจึงได้เลือกใช้อิเลเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อสำหรับการคำนวณค่าของความดัน และอิเลเมนต์สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อสำหรับการคำนวณค่าของความเร็ว และอุณหภูมิ ในการสร้างอิเลเมนต์ที่มีจุดต่อโดยรอบจำนวนแปดจุดจะมีความซับซ้อนพอสมควรในการหาพิกัด x และ y เช่นเดียวกับการกำหนดหมายเลขจุดต่อที่ตำแหน่งต่างๆภายในแต่ละอิเลเมนต์ หากเปรียบเทียบกับอิเลเมนต์สี่เหลี่ยมเก้าจุดต่อแล้วก็จะแตกต่างกันไม่มากนักในเรื่องดังกล่าว

2. รูปแบบของข้อมูลรับเข้า รูปแบบข้อมูลรับเข้ามีความสำคัญต่อการคำนวณที่ถูกต้องเป็นอย่างมาก การคำนวณที่ได้คำตอบไม่ถูกต้องในบางครั้งเกิดจากการใส่ข้อมูลรับเข้าที่ไม่ถูกต้อง ดังนั้น การจัดรูปแบบที่สะดวกต่อการป้อนข้อมูล เป็นหมวดหมู่ จะทำให้การป้อนข้อมูลมีความผิดพลาดน้อย นอกจากนี้ควรใส่ข้อมูลเหล่านี้ไว้ในไฟล์ข้อมูลรับเข้าเพื่อสะดวกต่อการแก้ไขค่าตัวแปรบางตัว ซึ่งจะเปลี่ยนไปเมื่อทำการเปลี่ยนค่าตัวแปรไร้มิติเช่น ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ อัตราส่วนความยาว เป็นต้น และเพื่อหลีกเลี่ยงการรับข้อมูลที่ผิดพลาดจากความหลงลืม หรือความอ่อนล้าของผู้ป้อนข้อมูล หากข้อมูลที่ต้องทำการป้อนเข้าสู่โปรแกรมนั้นมีจำนวนมากก็มีความเป็นไปได้ที่จะเกิดความผิดพลาดเช่นนี้ได้สูง การทำตารางสรุปสำหรับตัวแปรที่จะต้องเปลี่ยนตามค่าตัวแปรไร้มิติค่าหนึ่งจะช่วยให้การเตรียมข้อมูลรับเข้าเป็นไปด้วยความง่ายดายและรวดเร็ว

3. ข้อจำกัดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาได้เฉพาะการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดเท่านั้น สมการไฟน์อิเลเมนต์สำหรับการพาความร้อนแบบอิสระที่ได้ประดิษฐ์ขึ้นสำหรับการศึกษาในครั้งนี้ ไม่ได้จัดทำทางเลือกไว้สำหรับการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการไหลเพียงอย่างเดียวซึ่งไม่ได้นำเอาสมการพลังงานมาคิด และตัดผลของแรงลอยตัวออกจากการแก้ปัญหา สาเหตุที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากปัญหาที่กำลังสนใจในวิทยานิพนธ์นี้เป็นเรื่องของ การแก้ปัญหาที่มีการควบคู่ของสมการอนุกรมมวล สมการโมเมนตัม และสมการพลังงาน โดยไม่ได้สนใจไปที่ความสามารถของโปรแกรมในแก้ปัญหาการไหลใดๆ การปรับปรุงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในส่วนนี้สามารถกระทำได้โดยการเพิ่มพจน์ที่เกี่ยวกับปริพันธ์ของเงื่อนไขขอบเขตเกี่ยวกับแรงที่ผิวของผนังและ พลั๊กซ์ความร้อนที่ผนัง

4. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการโดยตรง (Direct Method) ดังเช่นการกำจัดตัวแปรแบบเกาส์รวมกับการจัดแถวหลัก ซึ่งได้นำมาใช้ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นวิธีการที่ไม่ได้รับความสนใจแล้วในปัจจุบันเนื่องจากใช้เวลาในการคำนวณนานมากเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการกระทำซ้ำ (Iterative Method) เช่น วิธีเกาส์-ไซเดล (Gauss-Seidel Method) วิธีคอนจูเกตเกรเดียนท์ (Conjugate Gradient Method) วิธีไบคอนจูเกตเกรเดียนท์ (Bi-Conjugate Gradient Method) เป็นต้น ในการแก้ปัญหาที่มีการแบ่งอิเลเมนต์ไม่มากนัก การแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีการโดยตรงและวิธีการกระทำซ้ำจะใช้เวลาใกล้เคียงกันมากยกตัวอย่างเช่น ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งสร้างโครงประสานขนาด 5×5 แต่หากต้องการเปลี่ยนขนาดของโครงประสานเป็น 20×20 ความแตกต่างในเรื่องของระยะเวลาในการคำนวณจาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทั้งสองวิธีนี้จะปรากฏให้เห็นอย่างชัดเจน วิธีการกระทำซ้ำที่ได้เลือกมาเปรียบเทียบกับวิธีการโดยตรงสำหรับปัญหานี้ได้ใช้วิธีใบคอนจูเกตเกรเดียนท์พบว่ามีความรวดเร็วมาก แต่จะต้องอาศัยการจัดเก็บเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ในรูปแบบที่กะทัดรัด (Compact Form)

5. ความซับซ้อนของการสร้างไฟไนท์อิลลิเมนต์เมทริกซ์ ในระยะเริ่มแรกของการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ผู้วิจัยเสียเวลานานพอสมควรในการตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นเนื่องจากความซับซ้อนของสมการของไหล ความขาดประสิทธิภาพในการการประยุกต์วิธีการหาปริภูมิเชิงตัวเลขและระเบียบวิธีการกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสัน นอกจากนี้การอ้างอิงหมายเลขจุดต่อที่เข้าใจง่ายและสะดวกต่อการเรียกใช้ภายในโปรแกรมคอมพิวเตอร์ก็มีผลให้การสร้างไฟไนท์อิลลิเมนต์เมทริกซ์เป็นไปด้วยความสะดวก

6. การลู่เข้าหาคำตอบ ในการจำลองปัญหาที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์สูง อาจพบกับปัญหาการไม่ลู่เข้าหาคำตอบได้ เนื่องจากจำนวนอิลลิเมนต์บริเวณผนังมีไม่พอเพียงที่จะใช้กับปัญหา ปัญหาที่ค่าเรย์เลห์นัมเบอร์จะเกิดการเปลี่ยนแปลงของขนาดความเร็ว และอุณหภูมิสูงมากบริเวณผนังด้านร้อนและด้านเย็น บริเวณดังกล่าวเป็นบริเวณที่ได้รับผลของการพาความร้อนแบบอิสระมากกว่าบริเวณใดๆในโดเมน นอกจากนี้ปัญหาการไม่ลู่เข้าหาคำตอบอาจเนื่องมาจากความไม่เสถียรของระเบียบวิธีการกระทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันเนื่องจากหากมีคำตอบที่จุดต่อใดในระบบสมการลู่ออกจากขอบเขตของคำตอบ จะส่งผลให้คำตอบอื่นที่เกี่ยวข้องลู่ออกด้วยเช่นกัน ดังนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์นี้ควรปรับปรุงในเรื่องของเสถียรภาพในการลู่เข้าหาคำตอบด้วยการใช้วิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง (Successive Over-Relaxation Method) หรือเปลี่ยนวิธีการแก้สมการไม่เป็นเชิงเส้นจากวิธีนิวตัน-ราฟสันไปเป็นวิธีอื่นที่สามารถลู่เข้าหาคำตอบได้อย่างแน่นอนและใช้เวลาในการแก้ปัญหาที่ไม่นานจนเกินไป

7. เมื่อเปรียบเทียบเวลาในการคำนวณกับโปรแกรมที่ใช้อิลลิเมนต์สามเหลี่ยม [22] พบว่าการคำนวณด้วยอิลลิเมนต์สามเหลี่ยมจะใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าทั้งในเรื่องของการสร้างอิลลิเมนต์ รวมทั้งการประกอบอิลลิเมนต์ของระบบ และเวลารวมในการคำนวณเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ ทั้งนี้เนื่องจากการสร้างอิลลิเมนต์เมทริกซ์ของอิลลิเมนต์สามเหลี่ยมนั้นได้มีการหาค่าของแต่ละสมาชิกในแต่ละเมทริกซ์ไว้เรียบร้อยแล้วด้วยการหาปริภูมิแบบแมนตรงโดยผู้เขียนโปรแกรม ทำให้ไม่ต้องสร้างโปรแกรมย่อยสำหรับการหาปริภูมิ แตกต่างจากโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมา ซึ่งจำเป็นต้องคำนวณหาปริภูมิเชิงตัวเลขด้วยวิธี Gauss Quadrature สำหรับทุกสมาชิกของเมทริกซ์ในทุกครั้งของการวนรอบ ถึงแม้ว่าจำนวนจุดต่อน้อยลงจะทำให้เวลาในการแก้สมการลดลงได้แต่เวลาในการสร้างอิลลิเมนต์เมทริกซ์ก็ยังไม่ได้ถูกทำให้น้อยลง เป็นผลให้เวลารวมนานกว่าโปรแกรมที่นำมาจากเอกสารอ้างอิง [22]

6.3 ข้อเสนอแนะ

แนวทางในการปรับปรุงความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับการคำนวณการไหลของของไหลไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัวร่วมกับการถ่ายเทความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์สามารถแบ่งออกได้เป็น 4 แนวทางดังนี้

1. เพิ่มขีดความสามารถให้โปรแกรมนี้สามารถแก้ปัญหาในสามมิติได้ สิ่งที่จะต้องปรับปรุงมีอยู่หลายส่วนได้แก่ การประดิษฐ์ไฟไนต์อีลิเมนต์เมทริกซ์เพิ่มเติมในส่วนของความเร็วในแนวแกน z การเลือกอีลิเมนต์สามมิติที่เหมาะสมกับความเร็ว อุณหภูมิและความดันภายในโดเมนการไหล การประยุกต์วิธีหาปริพันธ์เชิงเลขสำหรับอีลิเมนต์สามมิติ การพัฒนาวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีความรวดเร็วสูงและให้ผลลัพธ์ที่ถูกต้องแม่นยำ และการจัดรูปแบบของไฟล์ข้อมูลส่งออกเพื่อนำไปสร้างเป็นรูปภาพของการไหล (Flow Visualization) ที่สะดวกต่อการตัดสินใจของวิศวกรผู้ออกแบบ

2. ปรับปรุงวิธีการแก้ปัญหาคาร์ไหลให้สามารถใช้ฟังก์ชันประมาณค่าภายในอีลิเมนต์ของความเร็ว อุณหภูมิ และความดันด้วยฟังก์ชันโพลีโนเมียลที่มีอันดับเท่ากัน (Equal Order Interpolation) การกระทำดังกล่าวจะทำให้สามารถลดจำนวนสมการในการแก้ปัญหาลงได้และอาจทำให้สามารถหาผลลัพธ์ได้รวดเร็วขึ้น

3. สร้างโปรแกรมย่อยเพิ่มในส่วนของการคำนวณพจน์ที่เปลี่ยนแปลงตามเวลาเพื่อให้สามารถแก้ปัญหาคาร์ไหลที่สภาวะไม่อยู่ตัวได้

4. พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อแก้ปัญหาคาร์ไหลที่มีค่าเรย์โนลด์ส์นับเบอร์ด์สูงด้วยการประยุกต์วิธีอัพวิน (Upwind) หรือการไหลแบบปั่นป่วนด้วยการเพิ่มสมการ $k-\epsilon$ เข้าไปในสมการของระบบซึ่งแนวทางดังกล่าวข้างต้นยังอยู่ในระดับของการวิจัยพัฒนา

เอกสารอ้างอิง

- [1] ปราโมทย์ เศรษฐอำไพ. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2537.
- [2] Cook R.D., Malkus D.S. and Plesha M.E. **Concepts and Application of Finite Element Analysis.** 3rd ed. New York : John Wiley & Sons, 1989.
- [3] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. **The Finite Element Method.** 4th ed. McGraw-Hill, 1991.
- [4] Lewis R.W., Morgan K., Thomas H.R. and Seetharamu K.N. **The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis.** New York : John Wiley & Sons, 1996.
- [5] Jin J. **The Finite Element Method in Electromagnetics.** New York : John Wiley & Sons, 1993.
- [6] Gallagher R.H., Simon B.R., Johnson P.C. and Gross J.F. **Finite Elements in Biomechanics.** New York : John Wiley & Sons, 1982.
- [7] Peraire J., Vahidati M., Morgan K. and Zienkiewicz O.C. "Adaptive Remeshing for Compressible Flow Computation." *Journal of Computational Physics*, 1987. pp. 449-466.
- [8] Dechaumphai P. "Adaptive Finite Element Technique for Heat Transfer Problems." *Energy, Heat & Mass Transfer*, 1995. pp. 87-94.
- [9] Fox R.W. and McDonald A.T. **Introduction to Fluid Mechanics.** 4th ed. New York : John Wiley & Sons, 1994.
- [10] Anderson J.D. Jr. **Computational Fluid Dynamics.** Singapore : McGraw-Hill, 1995.
- [11] Schlichting H. **Boundary-Layer Theory.** 6th ed. New York : McGraw-Hill, 1988.
- [12] Incropera F.P. and De Witt D.P. **Introduction to Heat Transfer.** 2nd ed. Singapore : John Wiley & Sons, 1990.
- [13] Huebner K.H. and Thornton E.A. **The Finite Element Method for Engineers.** 2nd ed. New York : John Wiley & Sons, 1982.
- [14] Sherman F.S. **Viscous Flow.** Singapore : McGraw-Hill, 1990.
- [15] ปราโมทย์ เศรษฐอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2538.
- [16] Gallerher R.H., Oden J.T., Taylor C. and Zienkiewicz O.C. **Finite Elements in Fluids.** Vol. 1 New York : John Wiley & Sons, 1975.

- [17] จิตดิน ตรีพุทธรัตน์. “การศึกษาการไหลผ่านวัตถุด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2539.
- [18] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and Flannery B.P. **Numerical recipes in FORTRAN 77.** 2nd ed. United Kingdom : Cambridge University Press, 1996.
- [19] Reddy J.N. and Satake A. “A Comparison of a Penalty Finite Element Model with the Stream Function-Vorticity Model of Natural Convection in Enclosures.” *Journal of Heat Transfer*, 1980. pp. 659-666.
- [20] Kuehn T.H. and Goldstein R.J. “An Experimental and Theoretical Study of Natural Convective in the Annulus between Horizontal Concentric Cylinders.” *Journal of Fluid Mechanics*, 1976. pp. 695-719.
- [21] Ramaswamy B. and Jue T.C. “Some Recent Trends and Developments in Finite Element Analysis for Incompressible Thermal Flows.” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992. pp. 671-707.
- [22] วรสิทธิ์ กาญจนกิจเกษม. “ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการไหลแบบไม่อัดตัวชนิดหนืดที่สภาวะอยู่ตัว.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. 2541.
- [23] ประยูร ขาวซัง. “การวิเคราะห์โครงสร้างของระบบสายพานลำเลียงฝักคอบชาววิธีไฟไนต์เอลิเมนต์.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี. 2533.
- [24] White F. M. **Viscous Fluid Flow.** McGraw-Hill., 1995.
- [25] Hutton S. G., Exeter M. K., Fussey D.E. and Webster J. J. “Primitive Variable Finite Element Formulations for Steady Viscous Flows.”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980. pp. 209-223.

ภาคผนวก ก.

บทความที่ได้รับการตีพิมพ์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



วิศวกรรมลาดกระบัง

Ladkrabang Engineering Journal

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520
Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520

วันที่ 27 เมษายน 2544

เลขที่อ้างอิง 604

เรื่อง การตอบรับบทความ

เรียน คุณภาสกร เวสละโกศล, จารุวัตร เจริญสุข

ตามที่ท่านได้ส่งบทความเรื่อง การประยุกต์วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์รูปร่างสี่เหลี่ยมสำหรับปัญหาการไหลของของเหลวและการถ่ายเทความร้อน (A Quadrilateral Finite Element Application for Thermal Fluid Flow Problems) มาให้พิจารณาเพื่อลงตีพิมพ์ในวารสารวิศวกรรมลาดกระบัง บัดนี้ ผู้ทรงคุณวุฒิได้ทำการพิจารณาแล้วเห็นว่า ยอมรับตีพิมพ์ได้ โดยจะตีพิมพ์ในปีที่ 18 ฉบับที่ 2 เดือนมิถุนายน 2544

จึงเรียนมาเพื่อทราบ

(รศ.ดร.กอบชัย เดชหาญ)

หัวหน้ากองบรรณาธิการ

การประยุกต์วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์รูปร่างสี่เหลี่ยมสำหรับ ปัญหาการไหลของของไหลและการถ่ายเทความร้อน A Quadrilateral Finite Element Application for Thermal Fluid Flow Problems

ภาสกร เวสสะโกศล จารุวัตร เจริญสุข

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

บทความนี้เกี่ยวข้องกับการหาคำตอบจากสมการ ในรูปแบบตัวแปรหลักที่ควบคุมการพาความร้อนภายในช่องปิดที่สภาวะคงตัวในสองมิติด้วยวิธีเชิงตัวเลข การไหลที่เกิดขึ้นภายในช่องปิดที่ใช้ในบทความนี้ถูกสมมุติให้เป็นการไหลแบบราบเรียบ ไม่สามารถอัดตัวได้ เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมแปดจุดต่อถูกนำมาใช้ประมาณค่าของความเร็วในแกน x , แกน y และอุณหภูมิ ในขณะที่เดียวกันเราได้ใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสี่จุดต่อในการประมาณค่าความดันของของไหล ขั้นตอนในการหาคำตอบเริ่มจากการสร้างสมการเอลิเมนต์ด้วยวิธีถ่วงน้ำหนักเศษคก้างของกาลเลอร์กินร่วมกับการอินทิเกรตเชิงตัวเลข รวมสมการเอลิเมนต์ให้เป็นระบบสมการรวม กำหนดเงื่อนไขบังคับที่ขอบ และในที่สุดนำเอาวิธีนิวตัน-ราฟสันมาช่วยในการแก้ระบบสมการไม่เป็นเชิงเส้น เราได้ทำการเปรียบเทียบผลการคำนวณจาก โปรแกรมคอมพิวเตอร์ซึ่งประดิษฐ์ขึ้นมาี้กับผลการคำนวณจากนักวิจัยท่านอื่นแล้วพบว่าได้ผลเป็นที่น่าพอใจ ภายในบทความนี้มีตัวอย่างเกี่ยวกับการพาความร้อนแบบอิสระจำนวน 2 ตัวอย่าง

Abstract

This paper is concerned with a study of the primitive variables formulation of the two-dimensional equations governing steady natural convection in enclosures. The fluid flow in these close cavities is assumed to be laminar and incompressible flow. The 8-node isoparametric quadrilateral element is used for approximating the velocity and temperature while the 4-node isoparametric quadrilateral element is used for interpolating the fluid pressure. The overall iterative solution method is follow these steps: discretize the region occupied by the fluid in to finite elements, computing the element matrices, assembling the element matrices into global nodal matrices, and solving these nonlinear discrete equations by a Newton-Raphson procedure. Finally, two examples of natural convection in enclosure are selected to validate our code. The numerical solutions are in good agreement with the computational results from other researchers.

1. บทนำ

การทำนายอัตราการถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและผนังของแข็งมีความสำคัญมากต่อการออกแบบทางวิศวกรรมในหลากหลายระบบ ระบบที่กำลังกล่าวถึงนี้คือระบบที่ต้องการคำอธิบายทางคณิตศาสตร์สำหรับการไหลของของไหลและการถ่ายเทความร้อนซึ่งมีความซับซ้อนมากเกินไปที่จะใช้วิธีเชิงวิเคราะห์ (Analytical methods) เพื่อหาผลเฉลยได้ ความพยายามที่มากมายได้มุ่งหน้าทุ่มเทให้กับการพัฒนาวิธีการประมาณค่าด้วยเทคนิคเชิงตัวเลขต่างๆ โดยเฉพาะ งานวิจัยเมื่อไม่นานมานี้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้ถูกนำมาประยุกต์แล้วในสาขากลศาสตร์ของไหล [1,2] พร้อมทั้งจะขยายไปสู่ปัญหา การพาความร้อน ดังนั้นบทความนี้จะนำเสนอความสำคัญที่เกิดขึ้นจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานที่เกี่ยวข้องกับการพาความร้อน

การวิเคราะห์ในบทความนี้จะพิจารณาเฉพาะการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิด ของไหลถูกสมมุติว่าอัดตัวไม่ได้และเกิดการไหลแบบราบเรียบ ขอบเขตทางรูปร่างที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์จะจำกัดให้การเคลื่อนที่ของของไหลอยู่ในสองมิติเท่านั้น นอกจากนี้ สนามการไหลของของไหลและความร้อนถูกสมมุติให้เข้าสู่สภาวะคงตัว

หัวข้อที่ 2 กล่าวถึงสมการควบคุมการไหลและการสร้างสมการเอลิเมนต์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ หัวข้อที่ 3 กล่าวถึงวิธีแก้ปัญหาสำหรับระบบสมการพีชคณิต ไม่เป็นเชิงเส้นที่ได้จากการประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข และหัวข้อที่ 4 กล่าวถึงปัญหาคำตัวอย่าง และการประเมินความสามารถของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้น

2. ทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 สมการบังคับ

การไหลถูกจำกัดให้อยู่ภายในสองมิติ แต่รูปร่างของขอบเขตของสนามการไหลสามารถเป็นรูปร่างใดก็ได้ ของไหลถูกสมมุติว่าเป็นของไหลนิวตันและไม่สามารถอัดตัวได้และใช้การประมาณของ Boussinesq สำหรับการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของของไหลตามอุณหภูมิ สภาวะการไหลได้ถูกสมมุติให้เป็นสภาวะคงตัวและเป็นการไหลแบบลามินาร์ ความหนาแน่นของของไหลสามารถเปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ

ของของไหลได้ และผลของการสูญเสียเนื่องจากความหนืดและการถ่ายเทความร้อนด้วยการแผ่รังสีเราจะไม่นำมาคิด

เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบาย เราจะกล่าวถึงการไหลสองมิติในพิกัดฉาก (ระนาบ xy) เท่านั้น

สมการ โมเมนตัมในแนวแกน x

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \quad (1)$$

สมการ โมเมนตัมในแนวแกน y

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho g [1 - \beta(T - T_0)] \quad (2)$$

เมื่อ

$$\sigma_x = -P + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = -P + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

สมการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

สมการพลังงาน

$$\rho c \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

ตัวแปรสำคัญต่างๆในสมการที่ (1) ถึง (4) ได้แก่ u คือ ความเร็วในแนวแกน x, v คือ ความเร็วในแนวแกน y, P คือความดัน, T คือ อุณหภูมิ, g คือความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก, ρ คือความหนาแน่น, μ คือค่าสัมประสิทธิ์ความหนืด, c คือค่าความจุความร้อน, k คือ ค่าการนำความร้อนและ β คือ สัมประสิทธิ์การขยายปริมาตร

สมการที่ (1) ถึง (2) รวมเรียกว่าสมการนาเวียร์-สโตคส์ และสมการที่ (4) ถูกเรียกว่าสมการการถ่ายเทความร้อน เพื่อให้การสร้างปัญหาขอบเขตสำหรับการพาความร้อนนี้มีความสมบูรณ์ จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องระบุเงื่อนไขขอบเขตให้แก่ปัญหาคำด้วย ส่วนที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่ของของไหล จะต้องระบุความเร็วของคัพประกอบทั้งหลายหรือความเค้น(หรือแรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่) บนผนังของการไหล ส่วนที่เกี่ยวข้องกับความร้อน ต้องการการระบุอุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนที่ทุกส่วนของขอบเขตการไหล เงื่อนไขสำหรับความเร็วของคัพประกอบ (u, v) บนขอบเขต S_1 และแรงของคัพประกอบ (t_x, t_y) บนขอบเขต S_2 คือ

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}, \quad v = \hat{v}, \\ t_x &= \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y, \\ t_y &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned} \quad (5)$$

เมื่อ \hat{u} และ \hat{v} คือความเร็วในแนวแกน x และ y ที่กำหนดบนขอบเขต S_1 , $n = n_x \vec{i} + n_y \vec{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งตั้งฉากกับขอบเขต S_2 เงื่อนไขบังคับสำหรับอุณหภูมิ (T) บนขอบเขต S_3 และฟลักซ์ความร้อน (q) บนขอบเขต S_4 คือ

$$\begin{aligned} T &= \hat{T} \\ q &= q_x n_x + q_y n_y \end{aligned} \quad (6)$$

สังเกตได้ว่าสมการที่ (5) และ (6), $S_f = S_1 \cup S_2$ คือขอบเขตทั้งหมดที่ปิดล้อมของไหลที่กำลังเคลื่อนที่และ $S_h = S_3 \cup S_4$ คือขอบเขตทั้งหมดที่ปิดล้อมบริเวณที่เกิดการถ่ายเทความร้อน สมการที่ (1) ถึง (4) พร้อมด้วยเงื่อนไขขอบเขต สมการที่ (5) และ (6) คือชุดสมการที่ใช้ในการคำนวณหาความเร็ว ความดัน และอุณหภูมิที่เกิดขึ้นในของไหลที่กำลังเคลื่อนที่

2.2 การประยุกต์วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์

การประมาณค่าแบบไม่ต่อเนื่องสำหรับสมการที่ (1) ถึง (4) ในบทความนี้ได้มาจากการใช้วิธีไฟไนท์เอลิเมนต์ในรูปแบบของกาลเลอร์กิน เราได้ทำการแบ่งพื้นที่ของบริเวณที่เกิดการไหลของของไหลและการถ่ายเทความร้อนออกเป็นพื้นที่เล็กๆ จำนวนมากเรียกว่า เอลิเมนต์ ภายในแต่ละเอลิเมนต์ ความเร็ว ความดันและอุณหภูมิจะถูกประมาณด้วย

$$\begin{aligned} u(x,y) &= N^T(x,y) \mathbf{u}; \quad v(x,y) = N^T(x,y) \mathbf{v}; \\ T(x,y) &= N^T(x,y) \mathbf{T}; \\ P(x,y) &= \mathbf{H}^T(x,y) \mathbf{P} \end{aligned} \quad (7)$$

เมื่อ \mathbf{u}, \mathbf{v} และ \mathbf{T} คือเวกเตอร์ของตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อ (Nodal point) ของเอลิเมนต์ N และ \mathbf{H} คือเวกเตอร์ของฟังก์ชันประมาณค่าภายในหรือฟังก์ชันรูปร่างชนิด 8 จุดต่อ และ 4 จุดต่อตามลำดับ เมื่อแทนค่าโดยประมาณซึ่งอยู่ในสมการที่ (7) ลงในสมการที่ (1) ถึง (4) และใช้ระเบียบวิธีของกาลเลอร์กิน เราจะได้สมการพีชคณิตของตัวแปรไม่ทราบค่าที่จุดต่อต่างๆ เมื่อเขียนในรูปแบบเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} C_1(\mathbf{u}) + C_2(\mathbf{v}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1(\mathbf{u}) + C_2(\mathbf{v}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K_{11} + K_{22} & K_{12} & 0 & -Q_1 \\ K_{21} & 2K_{22} + K_{11} & 0 & -Q_2 \\ D_1(\mathbf{u}) & D_2(\mathbf{v}) & L_{11} + L_{22} & 0 \\ -Q_1^T & -Q_2^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{T} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{G} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{u}) &= \int_A \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} dA; \\ C_2(\mathbf{v}) &= \int_A \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} dA; \\ K_{11} &= \int_A \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} dA; \\ K_{12} &= \int_A \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} dA; \\ K_{21} &= \int_A \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} dA; \\ K_{22} &= \int_A \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} dA; \\ Q_1 &= \int_A \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{H}^T dA; \quad Q_2 = \int_A \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \mathbf{H}^T dA; \\ F_1 &= \frac{1}{\rho} \int_S N t_x dS; \\ F_2 &= \int_A N g dA + \int_A \beta g \mathbf{N} \mathbf{N}^T (\mathbf{T} - T_{ref}) dA + \frac{1}{\rho} \int_S N t_y dS; \\ D_1(\mathbf{u}) &= \int_A \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} dA; \\ D_2(\mathbf{v}) &= \int_A \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} dA; \end{aligned} \quad (9)$$

$$L_{11} = \frac{1}{\alpha} \int_A \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial N^T}{\partial x} dA;$$

$$L_{22} = \frac{1}{\alpha} \int_A \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial N^T}{\partial y} dA;$$

$$G = \frac{1}{\rho c} \int_S N q dS$$

$$\text{เมื่อ } \alpha = \frac{k}{\rho c}$$

สมการที่ (8) เขียนใหม่ในรูปแบบสัญลักษณ์ได้

$$C(r) s + Ks = F \quad (10)$$

$$D(r) T + LT = G \quad (11)$$

เมื่อ $r^T = (u^T, v^T)$ และ $s^T = (u^T, v^T, P^T)$

สมการเมตริกซ์ต่างๆใน (10) และ (11) คือสมการอนุพันธ์ต่างๆที่ไม่ต่อเนื่องสำหรับหนึ่งเอลิเมนต์ของไหล ดังเกิดสมการดังกล่าวจะพบว่า เมตริกซ์ C และ D เป็นตัวแทนของ การพา (convection) ของโมเมนตัม และพลังงานความร้อน ตามลำดับ เมตริกซ์ K และ L เป็นตัวแทนของการแพร่ของโมเมนตัมและพลังงานความร้อน เวกเตอร์ F และ G คือฟังก์ชันบังคับให้เกิดการเคลื่อนที่ของของไหลภายในระบบ (แรงเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก, แรงเนื่องจากการให้ความร้อนแก่ปริมาตรของไหล) และแรงที่กระทำบนพื้นผิวของเอลิเมนต์ (ความดัน, ฟลักซ์ความร้อน)

สมการทั้งหมดข้างต้นเป็นสมการที่เกี่ยวข้องกับเอลิเมนต์เพียงหนึ่งเอลิเมนต์เท่านั้น สมการไม่ต่อเนื่องที่ใช้แทนสมการบังคับที่แท้จริงของระบบได้มาจากการรวมสมการเอลิเมนต์ทุกเอลิเมนต์เข้าด้วยกันเป็นระบบสมการเมตริกซ์ของระบบทั้งหมด เราสามารถเขียนระบบสมการนี้ในรูปแบบเดียวกับสมการที่ (10) และ (11)

3. วิธีหาคำตอบของระบบสมการไม่ต่อเนื่อง

ปัญหาพื้นฐานของบทความนี้คือ การหาคำตอบของสมการเมตริกซ์ที่กำหนดไว้ในสมการที่ (10) และ (11) เมื่อพิจารณาโครงสร้างของเมตริกซ์ต่างๆ (ดูสมการที่ (8) และ (9) ประกอบ) จะเห็นได้ว่า K และ L เป็นเมตริกซ์สมมาตร ในขณะที่ C และ D เป็นเมตริกซ์ไม่สมมาตร

ในการพาคความร้อนแบบอิสระ เราไม่สามารถแยกสมการนาเวียร์-สโตคส์ออกจากสมการการถ่ายเทความร้อนได้ จะต้องแก้สมการไปพร้อมๆกันเนื่องจากพจน์ที่เกี่ยวข้องกับอุณหภูมิได้เข้าไปแทรกอยู่ในสมการนาเวียร์-สโตคส์ซึ่งเป็นผลมาจากการประมาณของ Boussinesq ดังนั้นในบทความนี้ เราได้ใช้วิธีการทำซ้ำของนิวตัน-ราฟสันร่วมกับการกำจัดแบบเกาส์เพื่อหาคำตอบของระบบสมการรวม เงื่อนไขของการรู้เข้าผู้คำตอบคือ

$$\max \left(\frac{|\Phi_{i,j}^{n+1} - \Phi_{i,j}^n|}{|\Phi_{i,j}^n|} \right) \leq \epsilon \quad (12)$$

โดยที่

Φ หมายถึง ตัวแปรไม่ทราบค่าซึ่งได้แก่ u, v, P และ T

n หมายถึง คาบของการกระทำซ้ำ

i, j หมายถึง โคออร์ดิเนตของพิกัดฉาก (x, y)

ϵ หมายถึง ค่าคงที่ซึ่งกำหนดขึ้นมาเพื่อหยุดการกระทำซ้ำ

4. ตัวอย่างของการจำลองแบบ

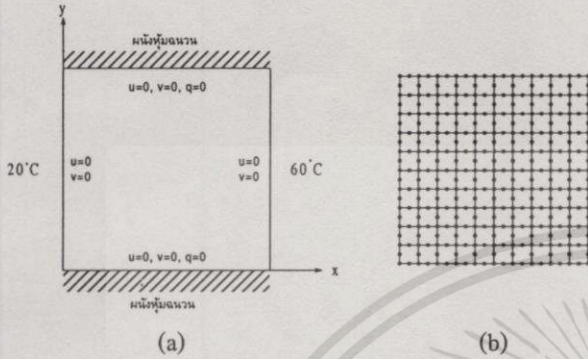
เพื่อแสดงให้เห็นถึงความน่าเชื่อถือของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาการพาคความร้อนแบบอิสระ ตัวอย่างสองตัวอย่างได้ถูกนำมาวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ประดิษฐ์ขึ้นได้แก่ ช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ ช่องปิดรูปวงแหวน

4.1 การพาคความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

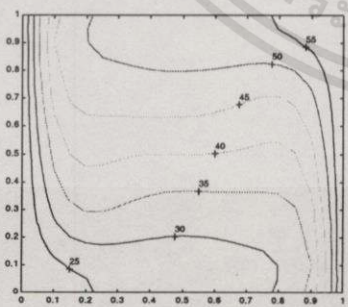
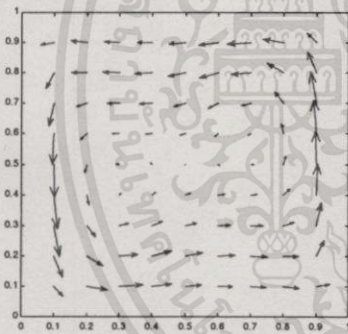
ช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาว (L) เท่ากับ 1.0 เมตร ผนังด้านขวามีอุณหภูมิเท่ากับ 60 องศาเซลเซียส, ผนังด้านซ้ายมีอุณหภูมิเท่ากับ 20 องศาเซลเซียส, ผนังด้านบนและด้านล่างถูกหุ้มฉนวนความร้อนดังแสดงในรูปที่ 1 การจำลองผลที่นำมาแสดงในบทความนี้ใช้ค่าพรีนัมเบอร์ (Pr = $\frac{\mu c}{k}$) เท่ากับ 1 และค่าเรย์เลห์นัมเบอร์ ($Ra = \frac{g \beta \Delta T L^3 Pr}{\mu^2}$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

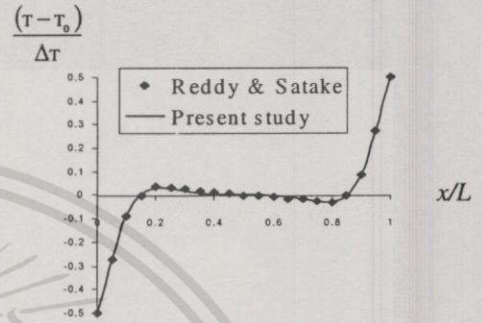
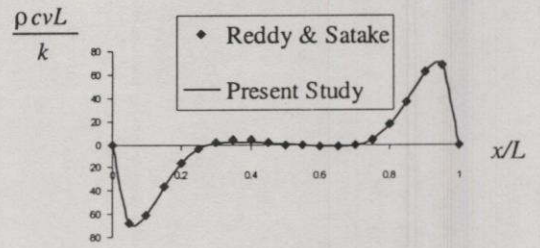
เท่ากับ 10^5 ผลการคำนวณแสดงถึงเวกเตอร์ความเร็วและการกระจายตัวของอุณหภูมิในรูปแบบที่ 2(a) และ 2(b) ตามลำดับ นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Reddy และ Satake [6] พบว่ามีความใกล้เคียงกันมากดังรูปที่ 3



รูปที่ 1 (a) เงื่อนไขขอบเขตทั้งหมดสำหรับช่องปิดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและ (b) เอลิเมนต์และจุดต่อทั้งหมด



รูปที่ 2 (a) การกระจายความเร็วและ (b) การกระจายอุณหภูมิของของไหลภายในช่องปิดสี่เหลี่ยม



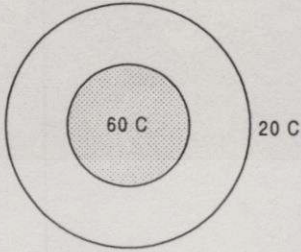
รูปที่ 3 การเปรียบเทียบผลลัพธ์ของการไหลที่ระยะกึ่งกลางความสูงของช่องปิดสี่เหลี่ยม

(a) ความเร็วไร้มิติ (b) อุณหภูมิไร้มิติ

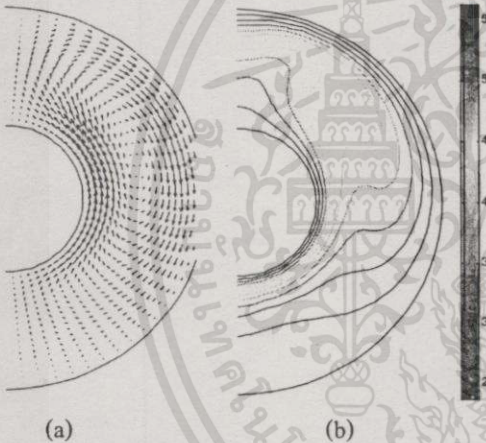
4.2 การพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปิดระหว่างทรงกระบอกซึ่งวางซ้อนกันแบบร่วมศูนย์กลาง

การพาความร้อนภายในช่องปิดรูปวงแหวนซึ่งอยู่ระหว่างทรงกระบอกยาวสองอันซึ่งวางขนานกับแนวระดับและมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน (horizontal concentric cylinders) แสดงอยู่ในรูปที่ 4 Raithby และ Hollands [4] ได้ทำการศึกษาปัญหานี้มาก่อนพบว่าลักษณะการไหลของของไหลภายในบริเวณวงแหวนมีความสมมาตรรอบแกนกลาง (midplane) ตามแนวตั้ง ถ้าทรงกระบอกที่อยู่ภายในมีอุณหภูมิสูงและทรงกระบอกที่อยู่ภายนอกมีอุณหภูมิต่ำกว่า ของไหลจะไหลขึ้นตามทรงกระบอกด้านในและไหลลงตามทรงกระบอกด้านนอก ซึ่งสามารถสังเกตเห็นได้อย่างชัดเจนจากการกระจายความเร็วในรูปที่ 5(a) การกระจายของอุณหภูมิแสดงอยู่ในรูปที่ 5(b) โดยใช้ค่า Pr เท่ากับ 0.7 และค่า Ra เท่ากับ 10000 สำหรับตัวอย่างนี้ เราทำการคำนวณเพียงครึ่งหนึ่งของรูปวงแหวนเท่านั้น เพื่อความรวดเร็วและประหยัดหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์ จำนวนจุดต่อและ

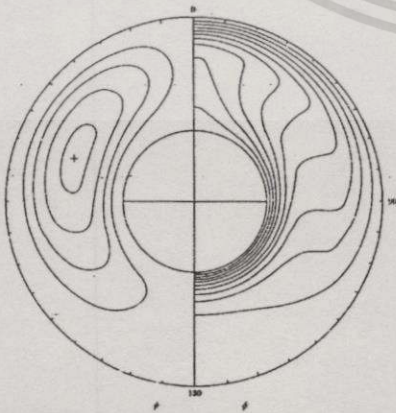
จำนวนเอลิเมนต์ทั้งหมดที่ใช้ในการจำลองแบบคือ 597 จุดต่อ และ 180 เอลิเมนต์ เมื่อนำผลการคำนวณมาเปรียบเทียบกับผลการคำนวณของ Kuehn และ Goldstein [5] พบว่ามีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี ดังรูปที่ 6



รูปที่ 4 ช่องปีกรูปวงแหวนระหว่างทรงกระบอกสองอันซ้อนกันแบบร่วมศูนย์



รูปที่ 5 (a) การกระจายความเร็วและ (b) อุณหภูมิของของไหลภายในช่องปีกรูปวงแหวน ($Ra=10^4$, $Pr=0.7$)



รูปที่ 6 เส้น streamline (ψ) และเส้น isotherm (ϕ) [5], $Ra = 10^4$, $Pr = 0.7$, $L/D_i = 0.8$, $\Delta\psi = 3.0$, $\Delta\phi = 0.1$

5. บทสรุป

ในการศึกษาครั้งนี้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์รูปร่างสี่เหลี่ยมได้รับการพัฒนาสำหรับวิเคราะห์การพาความร้อนแบบอิสระ ปัญหาการพาความร้อนแบบอิสระภายในช่องปีกรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และรูปวงแหวนได้ถูกนำมาใช้ทดสอบการใช้งานจริงของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ได้ประดิษฐ์ขึ้น ผลการจำลองแบบที่ใช้ในบทความนี้มีความใกล้เคียงกันมากในระดับที่น่าพอใจเมื่อเปรียบเทียบกับผลการคำนวณจากบทความซึ่งได้รับการตีพิมพ์แล้ว

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] D.K. Gartling and E.B. Becker, 'Finite element analysis of viscous, incompressible fluid flow,' *Comp.Meth.Applied Mech.Engr*, 8(1), 51-60 and 8(2), 127-138 (1976).
- [2] O.C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, New York, 1971.
- [3] I. Ergatoudis, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz, 'Curved, Isoparametric, "quadrilateral", elements for finite element analysis,' *Int. J. Solids Structure*, 4, 31-42 (1968).
- [4] G.D. Raithby and K.G.T. Hollands, 'A General Method of Obtaining Approximate Solutions to Laminar and Turbulent Free Convection Problems,' *Advances in Heat Transfer*, Vol. 11, 1975, pp. 265-315.
- [5] T.H. Kuehn and R.J. Goldstein, 'An experimental and theoretical study of natural convection in the annulus between horizontal concentric cylinders,' *J. Fluid Mech.*, 76, pp. 695-719, 1976.
- [6] J. N. Reddy and A. Satake, 'A Comparison of a Penalty Finite Element Model with the Stream Function-Vorticity Model of Natural Convection in Enclosures,' *J. of Heat Transfer*, 102, pp. 659-666, 1980.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข.

รหัสคำสั่งสำหรับการสร้างโครงประธาน



รหัสคำสั่งที่ 1

รหัสคำสั่งภาษา FORTRAN 90 สำหรับการสร้างจุดกริดภายในรูปสี่เหลี่ยมและสามารถตัดแปลงให้สามารถสร้างจุดกริดภายในรูปวงแหวนได้

```

program gen_node
USE PORTLIB

parameter (MaxE = 1000)
parameter (MaxN = 2000)

integer :: M,N
real :: width,height

INTEGER(4) init_time,finish_time,elapse
character*8 char_time

open (unit = 6,file = 'a:\xy.txt')
open (unit = 7,file = 'a:\nodes.txt')

width = 1
height = 1
M = 20 ! x-direction
N = 20 ! y-direction

init_time = time()
call TIME(char_time)
print *, 'begin at time: ', char_time

write(*,*) (' --- start generating grid (uniform space both x and y)')
write(*,*)

call gennod(M,N)
call genxy(M,N,width,height)

write(*,*)
write(*,*) (' --- complete work')

finish_time = time()
elapse = finish_time - init_time
call TIME(char_time)
print *, 'finish at time: ', char_time
print *, 'working time = ',elapse,' sec'

stop

```

contains

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

subroutine gennod(M,N)
integer :: M,N, lnods(MaxE,8)
integer :: h,k

```

```

k = 0
p = (M+1)*(N+1)

```

```

h = 0

```

```

do j=1,N

```

```

  do i=1,M

```

```

    k = i+(j-1)*M
    h = k+(j-1)
    p = (M+1)*(N+1)+(j-1)*M
    lnods(k,1) = h
    lnods(k,2) = h+1
    lnods(k,3) = h+M+2
    lnods(k,4) = h+M+1
    lnods(k,5) = h+p
    lnods(k,6) = h+p+M+1
    lnods(k,7) = h+p+2*M+1
    lnods(k,8) = h+p+M

```

```

    write(7,200) k,lnods(k,1),lnods(k,5),lnods(k,2),lnods(k,6), &
      lnods(k,3),lnods(k,7),lnods(k,4),lnods(k,8)

```

```

  end do

```

```

end do

```

```

200 format(5x,i5,5x,8(i4,2x))

```

```

write(*,*) ' --- total element = ',k

```

```

end subroutine gennod

```

```

subroutine genxy(M,N,width,height)

```

```

real :: x(MaxN),y(MaxN)

```

```

integer :: M,N, count

```

```

real :: width,height

```

```

! corner nodes

```

```

write(*,*) (' ----- corner nodes')

```

```

count = 0

```

```

do j=1,N+1

```

```

  if (j==1) then

```

```

    y(j) = 0.0

```

```

  else

```

```

    y(j) = y(j-1) + real(height/N)

```

```

  end if

```

```

  do i=1,M+1

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

count = count + 1
if (i==1) then
    x(i) = 0.0
else
    x(i) = x(i-1) + real(width/M)
end if
write(6,100) x(i),y(j)
end do
end do

```

! midnodes

```

write(*,*) (' ----- midnode')
do j=1,2*N+1
    if (mod(j,2)==0) then
        y(j) = y(j-1) + 0.5*real(height/N)
        do i=1,M+1
            count = count + 1
            if (i==1) then
                x(i) = 0.0
            else
                x(i) = x(i-1) + real(width/M)
            end if
            write(6,100) x(i),y(j)
        end do
    else
        if (j==1) then
            y(j) = 0.0
        else
            y(j) = y(j-1) + 0.5*real(height/N)
        end if
        do i=1,M
            count = count + 1
            if (i==1) then
                x(i) = 0.5*real(width/M)
            else
                x(i) = x(i-1) + real(width/M)
            end if
            write(6,100) x(i),y(j)
        end do
    end if
end do

```

```
100 format(5x,f5.3,5x,f5.3)
```

```

write(*,*) ' --- total node = ',count
end subroutine genxy

```

```
end program gen_node
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รหัสคำสั่งที่ 2

รหัสคำสั่งภาษา FORTRAN 77 สำหรับการสร้างจุดกริดสำหรับหลายบล็อก

```

DIMENSION XM(8), YM(8), X(1000), Y(1000), LDEF(200,8), NS(200)
DIMENSION SHP(8), XX(8), YY(8)
DATA XX/1.0,1.0,1.0,0.0,-1.0,-1.0,-1.0,0.0/
DATA YY/-1.0,0.0,1.0,1.0,1.0,0.0,-1.0,-1.0/
READ(5,1000) NXL, NYL, NN, ND
WRITE(6,1001) NXL, NYL, NN, ND
WRITE(6,1013)
DO 5 I=1,8
READ(5,1002) XM(I), YM(I)
WRITE(6,1003) I, XM(I), YM(I)
5 CONTINUE
II=0
NSF1 = 2*NYL+1
DO 50 I=1,NSF1
YL = 1.0-2.0*(I-1)/(2*NYL)
II = II+1
NS(I) = NN
IF (II.EQ.3) II=1
NSF2 = 2*NXL+1
DO 45 J=1, NSF2, II
XL = -1.0 + 2.0*(J-1) / (2*NXL)
DO 25 IJ = 1,8
GO TO (10,15,10,20,10,15,10,20), IJ
10 SHP(IJ) =0.25*(1.0+XL*XX(IJ))*(1.0+YL*YY(IJ))*
      1          (XL*XX(IJ)+YL*YY(IJ)-1.0)
GO TO 25
15 SHP(IJ) = 0.5*(1.0+XL*XX(IJ))*(1.0-YL*YL)
GO TO 25
20 SHP(IJ) = 0.5*(1.0+YL*YY(IJ))*(1.0-XL*XL)

```

25 CONTINUE

XXX=0.0

YYY=0.0

DO 30 K=1,8

XXX = XXX + SHP(K)*XM(K)

YYY = YYY + SHP(K)*YM(K)

30 CONTINUE

X(NN)=XXX

Y(NN)=YYY

NN=NN+1

45 CONTINUE

50 CONTINUE

MAXNOD=NN-1

NSS=NS(1)

WRITE(6,1014)

DO 60 NIC=NSS,MAXNOD

WRITE(6,1020) NIC, X(NIC), Y(NIC)

60 CONTINUE

NEL = 1

MEL = NYL

IF (ND.EQ.0) MEL = 1

DO 150 I = 1,NYL

IF (ND.EQ.1) NEL = I

NSS = (I-1)*2+1

N1 = NS(NSS)

N2 = NS(NSS+1)

N3 = NS(NSS+2)

DO 140 J=1,NXL

LDEF(NEL,1) = N3 + (J-1)*2

LDEF(NEL,2) = N3 + 1 + (J-1)*2

LDEF(NEL,3) = N3 + 2 + (J-1)*2

LDEF(NEL,4) = N2 + 1 + J - 1

```

LDEF(NEL,5) = N1 + 2 + (J-1)*2
LDEF(NEL,6) = N1 + 1 + (J-1)*2
LDEF(NEL,7) = N1 + (J-1)*2
LDEF(NEL,8) = N2 + J-1
NEL = NEL+MEL
140 CONTINUE
150 CONTINUE
MAXNEL = NXL*NYL
WRITE(6,1015)
DO 170 NEL = 1,MAXNEL
WRITE(6,1010) NEL, (LDEF(NEL,I),I=1,8)
170 CONTINUE
STOP
1000 FORMAT(4I10)
1001 FORMAT(1H1,4X,*NUMBER OF DIVISIONS IN LOCAL X DIRECTION = *,I3,
1 //,5X,*NUMBER OF DIVISIONS IN LOCAL Y DIRECTION = *, I3,
2 //,5X,*FIRST NODE NUMBER = *, I3,
3 //,5X,*DIRECTION PARAMETER = *,I3)
1002 FORMAT(2F10.3)
1003 FORMAT(1X,I5,4F10.3)
1010 FORMAT(10X,9I5)
1013 FORMAT(/////5X,*MASTER NODAL CO-ORDINATES*//,
1 2X,*NODE*,9X,1HX,9X,1HY)
1014 FORMAT(/////5X,*NODAL CO-ORDINATES*//,
1 7X,*NODE*,9X,1HX,9X,1HY)
1015 FORMAT(/////5X,*ELEMENT DEFINITIONS*)
1020 FORMAT(6X,I5,2E10.3)
END

```

ประวัติผู้เขียน

นายภาสกร เวสสะโกศล เกิดเมื่อวันที่ 12 ธันวาคม 2511 ที่จังหวัดประจวบคีรีขันธ์ สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปีการศึกษา 2533 เข้าศึกษาต่อในหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปีการศึกษา 2542 ปัจจุบันทำงานในตำแหน่งอาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร

