

อิเลิเมนต์คานทีโมเซนโกแบบเชิงเส้นที่ใช้เนิร์บส์เบสิสฟังก์ชัน

A LINEAR TIMOSHENKO BEAM ELEMENT USING NURBS BASIS FUNCTION



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2561

KMITL-2018-EN-M-093-158

อีลิเมนต์คานทิโมเชนโกแบบเชิงเส้นที่ใช้เนิร์บส์เบสิสฟังก์ชัน

A LINEAR TIMOSHENKO BEAM ELEMENT USING NURBS BASIS FUNCTION



ภมร ฐานวัฒนประเสริฐ  
PHAMORN THANWATHANAPRASERT

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโยธา

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ.2561

KMITL-2018-EN-M-093-158

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# A LINEAR TIMOSHENKO BEAM ELEMENT USING NURBS BASIS FUNCTION



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN CIVIL ENGINEERING  
FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2018

KMITL-2018-EN-M-093-158

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



**COPYRIGHT 2018**

**FACULTY OF ENGINEERING**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	อิลิเมนต์คานาทิโมเชนโกแบบเชิงเส้นที่ใช้เนิร์บส์เบสิสฟังก์ชัน
นักศึกษา	นายภมร ฐานวัฒน์ประเสริฐ
รหัสประจำตัว	59601281
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมโยธา
พ.ศ.	2561
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.อำพน จรัสจรวงเกียรติ

### บทคัดย่อ

ทฤษฎีคานาของทิโมเชนโกได้วิเคราะห์ถึงการเสถียรของหน้าตัดคานาเนื่องจากแรงดัดและแรงเฉือน ซึ่งมีข้อจำกัดของทฤษฎี คือ เมื่อความหนาของคานามีค่าน้อยลง จะทำให้เกิดความไม่สมดุลระหว่างการประมาณค่าพลังงานความเครียดดัดและพลังงานความเครียดเฉือน ทำให้เกิดปัญหาที่เรียกว่า Shear locking จนกระทั่งมีการประยุกต์ใช้ฟังก์ชันเนิร์บส์ (NURBS: Non-Uniform Rational B-Splines) ซึ่งฟังก์ชันเนิร์บส์มีข้อดี คือ มีความต่อเนื่องของฟังก์ชันสูง งานวิจัยนี้จึงได้นำประโยชน์ของฟังก์ชันเนิร์บส์มาประยุกต์ใช้ร่วมกับอิลิเมนต์คานาทิโมเชนโกแบบเชิงเส้น (Linear Timoshenko Beam Element) ทดแทนการใช้ฟังก์ชันพหุนาม พบว่าเมื่อเพิ่มดีกรีของฟังก์ชันเนิร์บส์ ทำให้การลู่เข้าของผลลัพธ์ดีขึ้น อย่างไรก็ตามจะต้องมีการใช้เทคนิคเพิ่มเติม เพื่อที่จะช่วยในการแก้ปัญหาได้ดียิ่งขึ้น ซึ่งจะต้องมีการศึกษาเชิงลึกในลำดับต่อไป

<b>Thesis</b>	A Linear Timoshenko Beam Element Using NURBS Basis Function
<b>Student</b>	Mr.Phamorn Thanwathanaprasert
<b>Student ID.</b>	59601281
<b>Degree</b>	Master of Engineering
<b>Program</b>	Civil Engineering
<b>Year</b>	2018
<b>Thesis Advisor</b>	Asst.Prof.Dr.Amphon Jarusjarungkiat

### ABSTRACT

The Timoshenko beam theory considered bending and shear deformation. There was a limitation when the beam thickness being very thin, the bending and the shear strain energy were unbalanced. This phenomenon is well known as shear locking. With the advent of NURBS (Non-uniform Rational B-Splines) possessing better smoothness and continuity than polynomial basis functions, this research employed advantages of using NURBS with linear Timoshenko beam element. The results showed that when increasing the degree of NURBS. It made the results of convergence better. However, additional techniques were required for further investigations.

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.อำพน จรัส-  
จรุงเกียรติ ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษาชี้แนะช่วยแก้ปัญหา ตลอดจนให้ความรู้รวมทั้งแง่คิดและ  
ประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้าตลอดการทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้จนเสร็จสมบูรณ์ ผู้ศึกษาจึงขอกราบ  
ขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบคุณมิตรสหาย ญาติพี่น้องทุกคน ที่ช่วยเหลือสนับสนุนทั้งด้านกำลังใจและกำลัง  
ทรัพย์ด้วยดีตลอดมา นอกจากนี้ยังมีผู้ที่มีความร่วมมือช่วยเหลืออีกหลายท่าน ซึ่งผู้เขียนไม่สามารถ  
กล่าวนามในที่นี้ได้หมด จึงขอขอบคุณทุกท่านเหล่านั้นไว้ ณ โอกาสนี้ด้วย

คุณงามความดีและประโยชน์อันเกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดา  
มารดา ผู้เป็นที่รักและเคารพยิ่งของข้าพเจ้า ตลอดจนอาจารย์ผู้ซึ่งประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้และ  
ถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้แก่ข้าพเจ้า

ภมร ฐานวัฒน์ประเสริฐ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 กล่าวนำ.....	1
1.2 วัตถุประสงค์.....	2
1.3 ขอบเขตของการศึกษา.....	2
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	2
1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	3
1.5.1 NURBS-BASED ISOGOMETRIC ANALYSIS OF BEAMS AND PLATES USING HIGH ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY [6].....	3
1.5.2 STATIC STRUCTURAL AND MODAL ANALYSIS USING ISOGOMETRIC ANALYSIS [7].....	4
1.5.3 SINGLE-VARIABLE FORMULATIONS AND ISOGOMETRIC DISCRETIZATIONS FOR SHEAR DEFORMABLE BEAMS [8].....	5
บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.1 ทฤษฎีคานของทีโมเซนโก.....	6
2.1.1 สมการสมดุล (Equilibrium equation).....	7
2.1.2 สมการจลนศาสตร์ (Kinematic equation).....	8
2.1.3 สมการคอนสทิทิวทีฟ (Constitutive equation).....	8
2.1.4 หลักการงานเสมือน (Virtual work principle).....	9
2.1.5 สมการในรูปเมตริกซ์.....	10
2.1.6 Discretization.....	11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.2 ฟังก์ชันเนิร์บส์ (NURBS: Non-Uniform Rational B-Splines).....	13
2.2.1 B-splines .....	13
2.2.2 ฟังก์ชันเนิร์บส์ .....	23
บทที่ 3 วิธีดำเนินงานวิจัย.....	29
3.1 รายละเอียดการดำเนินงานวิจัย .....	29
3.2 ฟังก์ชันฐาน .....	31
3.3 สติเฟเนสมetriks์ของอิลิเมนต์.....	32
3.4 เวกเตอร์ของแรงภายนอก.....	34
3.5 เงื่อนไขที่ขอบและผลลัพธ์.....	34
บทที่ 4 ผลการศึกษา.....	36
4.1 คานยี่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคาน .....	38
4.2 คานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคาน.....	40
บทที่ 5 สรุปผลการศึกษา.....	42
เอกสารอ้างอิง .....	43
ภาคผนวก ก ชุดคำสั่งที่ใช้กับซอฟต์แวร์ช่วยคำนวณทางคณิตศาสตร์.....	44
ภาคผนวก ข เอกสารงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์ .....	50
ประวัติผู้เขียน.....	57

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 คุณสมบัติของคานาที่ใช้ในการทดสอบเชิงตัวเลข.....	29
3.2 คุณสมบัติของคานาที่ใช้ในการทดสอบแบบใช้งานจริง.....	31
3.3 ข้อมูลที่ใช้ในการสร้างฟังก์ชันฐาน.....	31
3.4 ฟังก์ชันฐานดีกรี $p = 2$ .....	31
4.1 ระยะแอนตัวที่ปลายคานของคานยี่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบเชิงตัวเลข.....	38
4.2 ระยะแอนตัวที่ปลายคานของคานยี่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง.....	39
4.3 ระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบเชิงตัวเลข.....	40
4.4 ระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง.....	41

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 รูปแบบคานและจลนศาสตร์ [8] .....	6
2.2 ความเค้นและแรงภายนอกที่กระทำกับคานส่วนย่อย [2] .....	7
2.3 แรงกระทำที่ขอบ [2] .....	7
2.4 การเชื่อมโยงมิติของวิธีการไฟไนท์อีลิเมนต์ [5] .....	13
2.5 การเชื่อมโยงมิติของ B-splines [5] .....	13
2.6 ฟังก์ชันฐาน B-splines ดีกรี 0, 1 และ 2 ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์แบบสม่ำเสมอ $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ [5] .....	15
2.7 ฟังก์ชันฐานดีกรี 4 ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์แบบเปิดแต่ไม่สม่ำเสมอ $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$ และแสดงความต่อเนื่องที่ตำแหน่งน็ทต่างๆ [5] .....	16
2.8 แผนผังการสร้างฟังก์ชันฐานดีกรี $p = 2$ ที่มีน็ทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$ .....	17
2.9 ฟังก์ชันฐานค่าคงที่ในพิกัดดัดขึ้น ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$ [5] .....	17
2.10 ฟังก์ชันฐานเส้นตรงในพิกัดดัดขึ้น ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$ [5] .....	19
2.11 ฟังก์ชันฐานดีกรี $p = 2$ ในพิกัดดัดขึ้น ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$ [5] .....	21
2.12 ฟังก์ชันฐานดีกรี 2 ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์แบบเปิดแต่ไม่สม่ำเสมอ $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ [5] .....	22
2.13 เส้นโค้ง B-splines (a) รูปเหลี่ยมควมคุม ซึ่งตำแหน่งของจุดควมคุมแสดงด้วย ● (b) การแบ่งส่วนของเส้นโค้งออกเป็นอีลิเมนต์ด้วยน็ท ซึ่งตำแหน่งของน็ทแสดงด้วย ■ [5] .....	22
2.14 รูปวงกลมที่สร้างจากการแปลงภาพฉายของฟังก์ชัน B-splines ดีกรี 2 (a) การแปลงภาพฉายของจุดควมคุมโปรเจกทีฟ $\mathbf{P}_i^w$ ทำให้ได้จุดควมคุม $\mathbf{P}_i$ (b) การแปลงภาพฉายของเส้นโค้งโปรเจกทีฟ $\mathbf{C}^w(\xi)$ ทำให้ได้เส้นโค้ง $\mathbf{C}(\xi)$ [5] .....	24
2.15 เส้นโค้งเนิร์บส์ ที่แสดงการแปรผันของการถ่วงน้ำหนักที่จุดควมคุม $\mathbf{P}_4$ [4] .....	28
2.16 รูปวงกลมที่สร้างจากเส้นโค้งเนิร์บส์ $w_1 = w_3 = w_5 = w_7 = 1, w_2 = w_4 = w_6 = w_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 1, 1, 1\}$ [4] .....	28
3.1 ลักษณะของคานที่ใช้ในการทดสอบเชิงตัวเลข .....	29
3.2 ลักษณะของคานที่ใช้ในการทดสอบแบบใช้งานจริง .....	30
3.3 หน้าตัดคานเหล็กรูปพรรณที่ใช้ในการทดสอบแบบใช้งานจริง .....	30
3.4 ฟังก์ชันฐานดีกรี $p = 2$ ที่สร้างจากตารางที่ 3.3 ซึ่งแสดงน็ทด้วย ● .....	32

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.1 ฟังก์ชันฐานดีกรี $p=1$ ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 1, 1\}$ ซึ่งแสดง น็อทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ● .....	36
4.2 ฟังก์ชันฐานดีกรี $p=2$ ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ ซึ่งแสดง น็อทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ● .....	37
4.3 ฟังก์ชันฐานดีกรี $p=3$ ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$ ซึ่งแสดง น็อทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ● .....	37
4.4 ฟังก์ชันฐานดีกรี $p=4$ ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์ $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$ ซึ่งแสดง น็อทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ● .....	37
4.5 ระยะเวลาเอนตัวที่ปลายคานของคานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบเชิงตัวเลข .....	38
4.6 ระยะเวลาเอนตัวที่ปลายคานของคานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง .....	39
4.7 ระยะเวลาเอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบเชิงตัวเลข .....	40
4.8 ระยะเวลาเอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง .....	41

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 กล่าวนำ

ทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์คาน มีอยู่ 2 ทฤษฎี คือ ทฤษฎีของแบร์นูลลี [1] และทฤษฎีของทีโมเซนโก [2] ในทฤษฎีของแบร์นูลลี กล่าวว่า เมื่อคานมีการเสียรูป หน้าตัดของคานจะยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับแกนกลางคาน นั้นหมายถึงมุมหมุนของหน้าตัด คือ อนุพันธ์ของระยะแอนตัว ซึ่งทฤษฎีนี้ได้พิจารณาการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนและเป็นทฤษฎีที่เหมาะสมกับคานที่มีความหนาแน่น ส่วนทฤษฎีของทีโมเซนโก กล่าวว่า หน้าตัดของคานจะยังคงเป็นเส้นตรง แต่ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับแกนกลางคาน ซึ่งสามารถรองรับการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือนได้ ซึ่งเป็นผลให้มุมหมุนและระยะแอนตัว จะถูกพิจารณาเป็นตัวแปรอิสระแยกจากกัน แต่อย่างไรก็ตาม ในทฤษฎีคานของทีโมเซนโก ยังพบว่ามีปัญหา Shear locking [3] อยู่ อันเป็นผลมาจากการประมาณค่าพลังงานความเครียดเฉือนที่ไม่เป็นจริง ส่งผลให้คานที่มีความหนาแน่นมีค่าสติเฟนสการเฉือนมากเกินไป ทำให้ผลการวิเคราะห์ที่ได้มีค่าระยะแอนตัวน้อยตามไปด้วย

วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มีข้อบกพร่องในการแบ่งรูปร่างที่สร้างมาจากการใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณ (CAD: Computer Aided Design) [4] ออกเป็นชิ้นส่วนเล็กๆ (Mesh) ทำให้แบบจำลองที่ได้ นั้น ไม่มีความสมจริง Hughes และคณะ (2005) [5] ได้นำเสนอเทคนิคที่นำการจำลองรูปร่างของปัญหาและวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์มารวมกัน ซึ่งทำให้เกิด Isogeometric element ที่ใช้ฟังก์ชันฐานเนิร์บส์ (NURBS: Non-Uniform Rational B-Splines) ทดแทนฟังก์ชันฐานพหุนามเดิม ซึ่งฟังก์ชันเนิร์บส์มีความต่อเนื่องของฟังก์ชันสูง และสามารถเลือกฟังก์ชันฐานที่มีดีกรีที่แตกต่างกันได้ อีกทั้งยังมีความแม่นยำสูงในการจำลองรูปร่างของปัญหามากกว่าวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์อีกด้วย

งานวิจัยนี้ได้นำเทคนิค Isogeometric มาประยุกต์ใช้กับปัญหาคานของทีโมเซนโก โดยใช้ฟังก์ชันเนิร์บส์เป็นฟังก์ชันฐานแทนฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งการใช้ฟังก์ชันเนิร์บส์สามารถนำเสนอรูปร่างของปัญหาหลังจากที่แบ่งส่วนของรูปร่างแล้วได้เท่ากับรูปร่างที่สร้างมาจาก CAD ส่งผลให้สามารถลดความคลาดเคลื่อนจากการจำลองรูปร่างได้ จึงทำให้ความคลาดเคลื่อนในการคำนวณขั้นตอนอื่นๆ ลดลงได้ด้วยเช่นกัน อีกทั้งยังสามารถกำหนดดีกรีของฟังก์ชันที่จะใช้ได้อย่างหลากหลาย

## 1.2 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาคุณสมบัติของฟังก์ชันฐาน B-splines และ NURBS ซึ่งจะทำให้การศึกษาคุณสมบัติและข้อดีของฟังก์ชันแต่ละประเภท และแนวทางการนำมาประยุกต์เข้ากับงานวิจัยนี้
2. เพื่อศึกษาผลวิเคราะห์ที่ได้จากการใช้ฟังก์ชันเนิร์บส์ทดแทนฟังก์ชันพหุนาม ในส่วนนี้ถือเป็นจุดสำคัญของงานวิจัยนี้ เนื่องจากสามารถแสดงให้เห็นถึงข้อดีของฟังก์ชันฐาน B-splines และ NURBS ได้เป็นอย่างดี
3. เพื่อศึกษาอัตราการลู่เข้าของปัญหา เพื่อที่จะเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่ได้จากการทดสอบกับผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการไฟไนท์อิลิเมนต์

## 1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1. ศึกษาปัญหาคานที่ใช้ทฤษฎีคานของทิมอเชนโก ซึ่งประเภทของคานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ จะถูกกำหนดให้เป็นคานตรงที่สามารถเสถียรรูปได้ทั้งแรงดัดและแรงเฉือน
2. ศึกษาคานที่มีฐานรองรับอย่างง่ายโดยมีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคาน และพิจารณาระยะแอนตัวที่กลางคาน
3. ศึกษาคานยื่นที่มีแรงแบบจุดกระทำที่ปลายคาน และพิจารณาระยะแอนตัวที่ปลายคาน
4. ปรับแต่งอิลิเมนต์ (Refinement) โดยใช้วิธีการเพิ่มดีกรีของฟังก์ชัน (Order elevation: p-refinement)

## 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. เข้าใจกระบวนการของเทคนิค Isogeometric และสามารถวิเคราะห์ปัญหาอื่นๆ โดยใช้เทคนิคนี้ได้เช่นเดียวกัน
2. สามารถใช้ฟังก์ชันเนิร์บส์ทดแทนฟังก์ชันพหุนามได้ เพื่อที่จะได้เห็นถึงข้อดีของฟังก์ชันเนิร์บส์อย่างแท้จริง
3. การศึกษานี้อาจเป็นวิธีการที่นำไปสู่การแก้ปัญหา Shear locking ได้

## 1.5 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

### 1.5.1 NURBS-BASED ISOGOMETRIC ANALYSIS OF BEAMS AND PLATES USING HIGH ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY [6]

Xinkang Li และคณะ ได้ทำการศึกษาคานและเพลท โดยใช้เทคนิค Isogeometric ที่เป็นฟังก์ชันเนิร์บส์ ร่วมกับทฤษฎีการเสีรูปเนื่องจากแรงเฉือนที่เป็นฟังก์ชันยกกำลังสูง กล่าวคือ ในทฤษฎีคานของแบร์นูลลีและทฤษฎีเพลทของเคอร์ซอฟฟ์ ทั้งคู่จะถูกมองว่าเป็นปัญหาที่อยู่ในรูปฟังก์ชันยกกำลัง 4 ซึ่งจะสามารถใช้งานได้ ถ้าคานและเพลทมีความหนาน้อย เพราะว่า ไม่ได้พิจารณาแรงเฉือนตามขวาง ส่วนทฤษฎีการเสีรูปเนื่องจากแรงเฉือนดิกรี 1 (First-order shear deformation theory: FSDT) ได้พิจารณาถึงผลกระทบจากแรงเฉือนตามขวาง จึงทำให้สามารถใช้ได้กับทั้งคานและเพลทที่มีความหนาปานกลางและความหนาน้อย อย่างไรก็ตามใน FSDT ความเครียดเฉือนตามขวางถือว่าเป็นค่าคงที่ตลอดความหนา ดังนั้น จึงต้องพิจารณาถึงค่าปรับแก้แรงเฉือนด้วย (Shear correction factor) ซึ่งค่าปรับแก้แรงเฉือนจะขึ้นอยู่กับปัจจัยหลายประการ จึงให้ผลลัพธ์ที่มีความแม่นยำไม่สูงมากนัก

เพื่อก้าวข้ามข้อจำกัดของ FSDT โดยเฉพาะคานและเพลทที่มีความหนามาก จะใช้ทฤษฎีการเสีรูปเนื่องจากแรงเฉือนดิกรี 3 (Third-order shear deformation theory: TSDT) ซึ่งใช้กันอย่างแพร่หลายเข้ามาช่วยแก้ปัญหา และมีข้อดี คือ TSDT มีความเหมาะสมกับสถานการณ์ที่จะพิจารณามากกว่า จึงไม่จำเป็นต้องคำนวณค่าปรับแก้แรงเฉือน และให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่า FSDT

อย่างไรก็ตาม TSDT ต้องมีระยะแอนตัวที่มีความต่อเนื่องที่  $C^1$  ซึ่งวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ที่ไม่สามารถอธิบายให้เข้าใจถึงปัญหาได้โดยง่าย ในบทความนี้จะแสดงให้เห็นว่าการใช้  $C^1$ -TSDT นั้นสามารถทำได้โดยง่าย โดยการใช้นิยาม Isogeometric ที่เป็นฟังก์ชันเนิร์บส์ เข้ามาวิเคราะห์ปัญหาคานและเพลท

จากผลการทดสอบเชิงตัวเลข สามารถสรุปได้ว่า TSDT สามารถให้ผลลัพธ์ที่แม่นยำกว่ามาก ทั้งคานและเพลทที่มีทั้งความหนาและความหนาน้อย อย่างไรก็ตามเมื่อคานและเพลทมีความหนาน้อยมาก ผลลัพธ์ที่ได้จะเกิดปัญหา Shear locking แต่สามารถลดปัญหาลงได้โดยการปรับแต่งเอลิเมนต์แบบ h-refinement และแบบ k-refinement เนื่องจากการปรับแต่งเอลิเมนต์จะต้องเพิ่มจำนวนจุดควบคุมและเพิ่มดิกรีของฟังก์ชันเนิร์บส์ ส่งผลให้การคำนวณจะต้องใช้เวลาและทรัพยากรในการคำนวณมากขึ้นตามไปด้วย สำหรับการศึกษาในลำดับต่อไป จะมุ่งเน้นไปที่การแก้ปัญหา Shear locking ที่เกิดในคาน, เพลท และแผ่นบาง (Shells)

## 1.5.2 STATIC STRUCTURAL AND MODAL ANALYSIS USING ISOGEOMETRIC ANALYSIS [7]

Sangamesh Gondegaon และ Hari K. Voruganti ได้ศึกษาโครงสร้างแบบสถิตย์และวิเคราะห์แบบจำลองโดยใช้เทคนิค Isogeometric ซึ่งมีรายละเอียดของการศึกษา ดังต่อไปนี้ วิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ คือ วิธีการเชิงตัวเลขที่สามารถหาค่าประมาณของปัญหาได้จากสมการอนุพันธ์ย่อย ในวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ แบบจำลองรูปร่างของวัตถุจะถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ (Mesh) แต่ถือเป็นเรื่องยากที่เราจะแบ่งรูปร่างที่ซับซ้อนออกเป็นเอลิเมนต์ปกติ (เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม และเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม) ดังนั้น การแบ่งรูปร่างของวัตถุออกเป็นเอลิเมนต์จะไม่สามารถใช้แทนรูปร่างที่แท้จริงได้ จะเป็นเพียงแค่การประมาณเท่านั้น ซึ่งส่งผลให้ผลลัพธ์ที่ได้จะมีความคลาดเคลื่อนเกิดขึ้น นอกจากนี้การแบ่งรูปร่างออกเป็นเอลิเมนต์ของรูปร่างที่ซับซ้อนจะใช้เวลาในกระบวนการนี้ค่อนข้างนาน เป็นที่สังเกตว่า กว่า 80% ของการคำนวณ จะถูกใช้ไปกับการแบ่งรูปร่างออกเป็นเอลิเมนต์ ดังนั้น จึงถือว่าเป็นอุปสรรคที่ใหญ่มากของวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์

เพื่อที่จะก้าวข้ามอุปสรรคนี้ แนวคิดของเทคนิค Isogeometric ที่ถูกนำเสนอโดย Hughes กล่าวคือ เทคนิค Isogeometric เป็นสะพานเชื่อมระหว่าง CAD และวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์ ซึ่งมีแนวคิด คือ การใช้ฟังก์ชันฐาน B-Spline ทั้งในการแสดงรูปร่างและในการคำนวณ ซึ่งสามารถแก้ปัญหาการแบ่งรูปร่างออกเป็นเอลิเมนต์ได้อย่างสิ้นเชิง เนื่องจากแบบจำลองของวัตถุจะถูกกำหนดโดยใช้ฟังก์ชันฐาน B-Spline ซึ่งจะช่วยให้ได้แบบจำลองที่สมจริง ส่งผลให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีกว่าและสามารถลดระยะเวลาการคำนวณได้อีกด้วย เนื่องจากฟังก์ชันฐาน B-Spline เป็นเทคโนโลยีที่แพร่หลายที่สุดในโปรแกรม CAD ดังนั้น จึงถูกนำมาใช้ในเทคนิค Isogeometric นอกจากนี้ฟังก์ชันเนิร์บสามารถปรับแต่งได้โดยง่าย และไม่ส่งผลกระทบต่อรูปร่างของวัตถุหรือการกำหนดพารามิเตอร์ของวัตถุ

ในงานวิจัยนี้จึงได้นำเสนอการนำเทคนิค Isogeometric เข้ามาใช้ร่วมกับบาร์เอลิเมนต์ และเพลทแบบ 2 มิติ อีกทั้งยังประยุกต์เข้ากับบาร์เอลิเมนต์ที่มีการสั่นสะเทือน และคานแบร์นูลลีที่มีการสั่นสะเทือนอีกด้วย

จากการทดสอบพบว่า เทคนิค Isogeometric เป็นเทคนิคที่มีประโยชน์อย่างสูง และจะเป็นเทคนิคที่น่าสนใจอย่างมากในอนาคต จะสังเกตได้ว่าเทคนิคนี้นำไปประยุกต์ใช้กับรูปร่างได้อย่างง่ายดาย และสามารถใช้กับรูปทรงที่มีความซับซ้อนได้อีกด้วย ในการศึกษาเพิ่มเติม คือ การบูรณาการเทคนิค Isogeometric กับ CAD เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาการแบ่งรูปร่างออกเป็นเอลิเมนต์ที่เกิดกับวิธีการไฟไนท์เอลิเมนต์

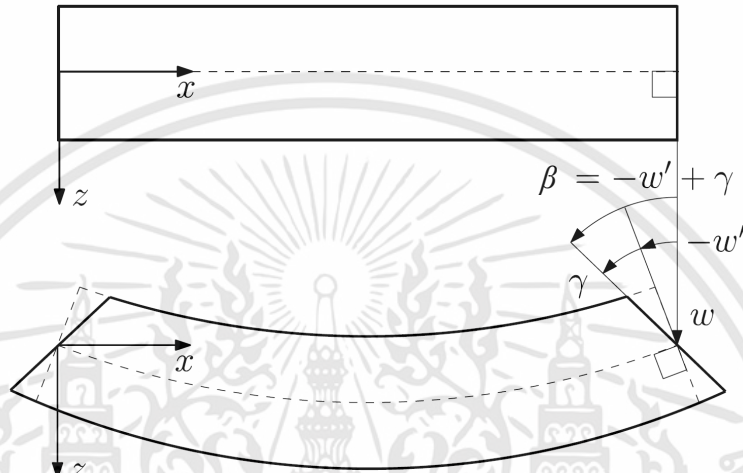
### 1.5.3 SINGLE-VARIABLE FORMULATIONS AND ISOGEOMETRIC DISCRETIZATIONS FOR SHEAR DEFORMABLE BEAMS [8]

J. Kiendl และคณะ ได้ศึกษาการสร้างสมการตัวแปรเดียวและการแยกส่วน Isogeometric สำหรับคานที่เสีรูปร่างได้เนื่องจากแรงเฉือน (คานทิมูเซนโก) สำหรับงานวิจัยนี้ได้ทำการแยกส่วนระยะแอนตัวออกเป็น 2 ส่วน คือ ระยะแอนตัดและระยะแอนเฉือน ซึ่งได้แสดงสมการเชิงอนุพันธ์เดี่ยว (Single Differential Equation) ของปัญหาคานทิมูเซนโกกับระยะแอนตัด สมการเชิงอนุพันธ์นี้มีรูปแบบเหมือนสมการของแบร์นูลลี แต่มีข้อแตกต่าง คือ มีการอธิบายถึงการเสีรูปร่างเนื่องจากแรงเฉือนเพิ่มเข้ามา ซึ่งคล้ายกับที่ Li และ Falsone และคณะ ได้เคยนำเสนอไว้ ทั้งสองบทความนั้นอธิบายปัญหาของคานทิมูเซนโก โดยลดรูปให้เป็นสมการตัวแปรเดียวเช่นเดียวกัน แต่ไม่ได้วิเคราะห์แบบแยกส่วนระยะแอนตัวเป็น 2 ส่วน และผลลัพธ์ที่ได้ก็เทียบเท่ากับสมการที่ได้จากงานวิจัยนี้เช่นกันด้วย อย่างไรก็ตาม Li ไม่ได้พัฒนาสมการรูปร่างอย่างง่าย (Weak Forms) และสมการที่ได้ก็ไม่มี ความต่อเนื่อง ส่วน Falsone และคณะ ได้พัฒนาสมการรูปร่างอย่างง่าย และสมการของ Falsone และคณะ มีความสอดคล้องกับสมการจากวิธีไฟไนท์อีลิเมนต์ แต่สมการรูปร่างอย่างง่ายของ Falsone และคณะ เป็นสมการที่ไม่สมมาตรและมีเงื่อนไขที่อีลิเมนต์

ในงานวิจัยนี้เราสร้างสมการรูปร่างอย่างง่าย ซึ่งเป็นทั้งสมการที่สมมาตร และไม่มีเงื่อนไขที่อีลิเมนต์ แต่ระยะแอนตัดที่ได้ จะยังคงเป็นอนุพันธ์อันดับที่ 2 และ 3 ซึ่งถือเป็นเรื่องที่น่าประหลาดใจเป็นอย่างมาก เนื่องจากฟังก์ชันฐาน Isogeometric ได้ถูกนำมาใช้ ส่งผลให้เราได้ตีกรและ ความต่อเนื่องของระยะแอน ออกมาในทางที่ดีโดยอัตโนมัติ นอกจากนี้สำหรับสมการของ Galerkin เรายังพัฒนาวิธีการจัดระเบียบ Isogeometric ซึ่งใช้สมการรูปร่างอย่างยาก (Strong Forms) เนื่องจากสมการมีเพียงตัวแปรเดียวเท่านั้น จึงทำให้มีผลต่อ Degree of Freedom เพียงครั้งหนึ่งเท่านั้น เมื่อเทียบกับสมการมาตรฐานของทิมูเซนโก และในขณะเดียวกันก็สามารถลดปัญหา Shear locking ได้อย่างสมบูรณ์ ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จะแสดงให้เห็นถึงความถูกต้องและประสิทธิภาพของวิธีการที่นำเสนอ ในมุมมองของผู้เขียน สมการที่ได้นั้น ได้ให้กระบวนทัศน์ใหม่ในการพัฒนาอีลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์โครงสร้าง

## บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

### 2.1 ทฤษฎีคานของทีโมเซนโก



รูปที่ 2.1 รูปแบบคานและจลนศาสตร์ [8]

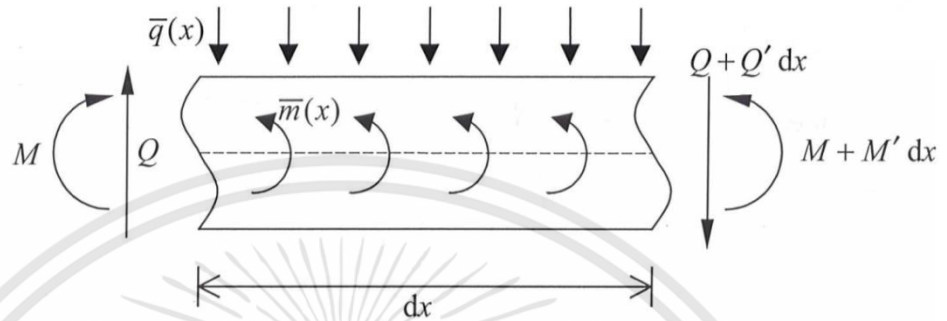
ทฤษฎีคานของทีโมเซนโกถูกพัฒนาขึ้นโดยสติเฟน ทีโมเซนโก ในช่วงต้นศตวรรษที่ 20 แบบจำลองนี้ได้พิจารณาถึงการเสียรูปของคานเนื่องจากแรงเฉือนและผลของการตัดจากการหมุน ทำให้เหมาะสมที่จะอธิบายพฤติกรรมของคานที่มีความหนา และคานที่เป็นเนื้อวัสดุผสม ผลลัพธ์ของสมการที่ได้จะอยู่ในรูปของอนุพันธ์อันดับที่ 4 ซึ่งแตกต่างจากทฤษฎีของออยเลอร์ – แบรินูลลี

ในแบบจำลองคานของออยเลอร์ – แบรินูลลี กล่าวว่าเมื่อคานมีการเสียรูป หน้าตัดของคานจะยังคงเป็นเส้นตรงและตั้งฉากกับแกนกลางคาน ซึ่งในแบบจำลองจะไม่ได้พิจารณาถึงการเสียรูปเนื่องจากแรงเฉือน ส่วนแบบจำลองคานของทีโมเซนโก ดังแสดงในรูปที่ 2.1 กล่าวว่าในขณะที่คานเสียรูป หน้าตัดของคานจะยังคงเป็นเส้นตรงแต่ไม่ตั้งฉากกับแกนกลางคาน เนื่องจากมีการเสียรูปจากแรงเฉือน และสมมติฐานนี้จะถูกพิจารณาบนพื้นฐานของคานตรง (Straight beam)

สำหรับทฤษฎีคานของทีโมเซนโกที่พิจารณาบนพื้นฐานของวิธีการไฟไนต์อีลิเมนต์ มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

### 2.1.1 สมการสมดุล (Equilibrium equation)

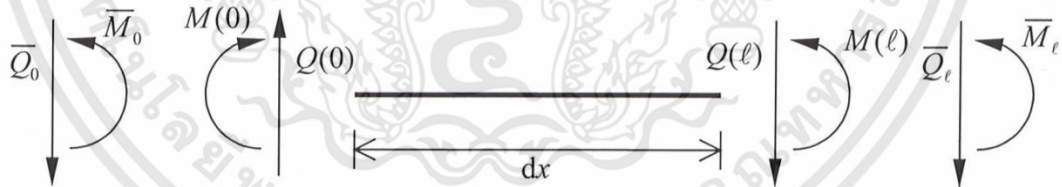
สำหรับเงื่อนไขของสมการสมดุลจะได้จากการพิจารณาชิ้นส่วนคานาย่อยยาว  $dx$  ที่ถูกกระทำด้วยแรงกระจาย  $\bar{q}$  และโมเมนต์กระจาย  $\bar{m}$  ดังแสดงในรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ความเค้นและแรงภายนอกที่กระทำกับคานาส່วนย่อย [2]

จะได้สมการสมดุล ดังนี้

$$\begin{aligned}\bar{q} &= -\frac{dQ}{dx} = -Q' \\ \bar{m} &= -\frac{dM}{dx} + Q = -M' + Q\end{aligned}\quad (2.1)$$



รูปที่ 2.3 แรงกระทำที่ขอบ [2]

เงื่อนไขของแรงกระทำที่ขอบ (Force boundary conditions) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเงื่อนไขขอบนิวมานน์ (Neumann boundary conditions) พิจารณาได้ดังแสดงในรูปที่ 2.3 จากสมดุลของแรงภายนอก  $\bar{Q}$  และโมเมนต์  $\bar{M}$  กับความเค้น  $N, Q$  และ  $M$  จะได้แรงกระทำที่ขอบ ดังนี้ (โดยที่ 0 และ  $l$  ใช้ระบุตำแหน่งปลายด้านซ้ายและขวาของคาน ตามลำดับ)

$$\begin{aligned}Q(0) &= \bar{Q}_0, & Q(l) &= -\bar{Q}_l, \\ M(0) &= \bar{M}_0, & M(l) &= -\bar{M}_l\end{aligned}\quad (2.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.2 สมการจลนศาสตร์ (Kinematic equation)

สำหรับสมการส่วนที่สองที่จำเป็นสำหรับการหาอนุพันธ์ย่อย (Partial differential equations) เพื่อที่จะอธิบายปัญหาเชิงคณิตศาสตร์ คือ สมการจลนศาสตร์ ในรูปที่ 2.1 แสดงถึงความสัมพันธ์ของทั้งขณะที่เสีรูปและขณะที่ไม่เสีรูป จะเห็นได้ว่ามุมหมุนของหน้าตัด  $\beta$ , ความชันของแกนกลางคาน  $w'$  และการเสีรูปจากแรงเฉือน  $\gamma$  มีความสัมพันธ์กัน

กำหนดให้มุมหมุนที่เป็นบวกของ  $\beta$  และ  $\gamma$  เป็นทิศทวนเข็มนาฬิกา ส่วนความชัน  $w'$  มีมุมหมุนเป็นบวกที่ทิศตามเข็มนาฬิกา จะได้สมการจลนศาสตร์ ในเทอมของการเสีรูปจากแรงเฉือน  $\gamma$  และความโค้ง (Curvature)  $\kappa$  ดังนี้

$$\begin{aligned}\gamma &= w' + \beta \\ \kappa &= \beta'\end{aligned}\tag{2.3}$$

เงื่อนไขของการเคลื่อนตัวที่ขอบ (Displacement boundary conditions) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าเงื่อนไขขอบดิริชเลต์ (Dirichlet boundary conditions) คือ

$$\begin{aligned}w(0) &= w_0, & w(l) &= w_l, \\ \beta(0) &= \beta_0, & \beta(l) &= \beta_l\end{aligned}\tag{2.4}$$

เมื่อ  $w$  และ  $\beta$  คือ ระยะแอนตัวที่ขอบคานและมุมหมุนที่ขอบคาน ตามลำดับ

### 2.1.3 สมการคอนสทิทิวทีฟ (Constitutive equation)

ในกรณีทั่วไปของวัสดุที่เป็นอีลาสติกเชิงเส้น จะมีความสัมพันธ์ตามกฎของฮุก (Hooke's law) จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด ดังนี้

$$\begin{aligned}Q &= \alpha GA \gamma \\ M &= EI \kappa\end{aligned}\tag{2.5}$$

เมื่อ  $E$  คือ ย้งมอดุลัส,  $G = E/2(1+\nu)$  คือ มอดุลัสแรงเฉือน,  $A = bt$  คือ พื้นที่หน้าตัด และ  $I = bt^3/12$  คือ โมเมนต์ความเฉื่อย โดยที่  $b$  คือ ความกว้างของหน้าตัดคาน และได้มีการใช้ค่าปรับแก้แรงเฉือน  $\alpha$  เนื่องจากมีความคลาดเคลื่อนจากสมมติฐานของแบร์นูลลีที่ว่าหน้าตัดคานยังคงเป็นเส้นตรง ซึ่งในความเป็นจริงแล้วหน้าตัดคานจะเกิดการบิดตัว

### 2.1.4 หลักการงานเสมือน (Virtual work principle)

หลักการงานเสมือน กล่าวว่า เมื่อระบบอยู่ในสภาวะสมดุล ผลรวมของงานเสมือนภายในและภายนอกจะเท่ากับศูนย์ ซึ่งเขียนให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ดังนี้

$$\delta W^{int} + \delta W^{ext} = 0 \quad (2.6)$$

งานเสมือนภายนอก สามารถอธิบายได้ดังนี้

$$\delta W^{ext} = \int_0^l (\bar{q}\delta w + \bar{m}\delta\beta) dx + \bar{Q}(0)\delta w_0 + \bar{Q}(l)\delta w_l + \bar{M}(0)\delta\beta_0 + \bar{M}(l)\delta\beta_l \quad (2.7)$$

ระยะแอนตัวเสมือน  $\delta w$  และมุมหมุนเสมือน  $\delta\beta$  เป็นตัวแปรอิสระ แต่ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของการเคลื่อนที่ที่ขอบ งานเสมือนภายในสำหรับคานที่เสถียรได้เนื่องจากแรงเฉือน อธิบายได้ดังนี้

$$-\delta W^{int} = \int_0^l (Q\delta\gamma + M\delta\kappa) dx \quad (2.8)$$

จากสมการจลนศาสตร์ (2.3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปปริมาณเสมือน (Virtual quantities) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \delta\gamma &= \delta w' + \delta\beta \\ \delta\kappa &= \delta\beta' \end{aligned} \quad (2.9)$$

ดังนั้น จะได้งานเสมือนภายใน ดังนี้

$$-\delta W^{int} = \int_0^l (Q\delta w' + Q\delta\beta + M\delta\beta') dx \quad (2.10)$$

ใช้การปริพันธ์แยกส่วน (Integrate by parts) เพื่อเปลี่ยนอนุพันธ์จากการเคลื่อนที่เสมือนและความเครียด ไปเป็นแรงและความเค้น ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$-\delta W^{int} = \int_0^l (-Q'\delta w + Q\delta\beta + M'\delta\beta) dx - Q(0)\delta w_0 + Q(l)\delta w_l - M(0)\delta\beta_0 + M(l)\delta\beta_l \quad (2.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนสมการที่ (2.7) และ (2.11) ในสมการที่ (2.6) และประยุกต์ใช้พื้นฐานของการแปรผันแคลคูลัส (Fundamental lemma of variational calculus) จะได้สมการออยเลอร์ – ลากรางจ์ คือ สมการสมดุล (สมการที่ (2.1)) และเงื่อนไขของแรงกระทำที่ขอบ (สมการที่ (2.2)) ซึ่งในความเป็นจริงแล้วสมการข้างต้นทั้ง 2 สมการ มีความเทียบเท่ากันทางคณิตศาสตร์กับหลักการงานเสมือน

ปริพันธ์ที่ได้จากสมการที่ (2.6) เรียกว่า รูปแบบอย่างง่าย (Weak form) ส่วนสมการออยเลอร์ – ลากรางจ์ (สมการที่ (2.1) และ (2.2)) เรียกว่า รูปแบบอย่างยาก (Strong form)

### 2.1.5 สมการในรูปเมตริกซ์

สำหรับวิธีการไฟไนต์อีลิเมนต์ การเขียนสมการให้อยู่ในรูปเมตริกซ์จะทำให้มีความสะดวกมากขึ้น ระยะเวลาแอนตัวและมุมหมุนจะเป็นเวกเตอร์ของการเคลื่อนตัวทั่วไป  $\mathbf{u}$  (Generalized displacement) ในทำนองเดียวกันความเค้น  $\boldsymbol{\sigma}$  และความเครียด  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ก็จะถูกเขียนในรูปเวกเตอร์เช่นเดียวกัน

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} w \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \gamma \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

ใช้ข้อกำหนดเดียวกันกับปริมาณเสมือน  $\delta u$  และ  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  จะได้สมการสมดุล, สมการจลนศาสตร์ และสมการคอนสทิทิวทีฟ ดังนี้

$$\mathbf{L}^* \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{p}} = 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (2.13)$$

โดยที่  $\mathbf{C}$  คือ เมตริกซ์ของคุณสมบัติวัสดุ (Material matrix),  $\mathbf{L}$  และ  $\mathbf{L}^*$  คือ เมตริกซ์ดำเนินการ และ  $\bar{\mathbf{p}}$  คือ แรงกระจายกระทำตลอดความยาวคาน ซึ่งเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} GA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ -1 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \bar{q} \\ \bar{m} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

เงื่อนไขของแรงและระยะเคลื่อนตัวที่ขอบ คือ

$$\boldsymbol{\sigma}(0) = \bar{\mathbf{P}}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(l) = \bar{\mathbf{P}}_l, \quad \bar{\mathbf{P}}_0 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_0 \\ \bar{M}_0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{P}}_l = \begin{bmatrix} \bar{Q}_l \\ \bar{M}_l \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น หลักการงานเสมือนจะเขียนในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\int_0^l (\boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{p}}^T \delta \mathbf{u}) dx - \bar{\mathbf{P}}_0^T \delta \mathbf{u}_0 - \bar{\mathbf{P}}_l^T \delta \mathbf{u}_l = 0 \quad (2.16)$$

### 2.1.6 Discretization

พิจารณาสมการการเคลื่อนตัวเพียงอย่างเดียวที่อยู่บนพื้นฐานของหลักการงานเสมือน จะได้

$$\begin{aligned} & \int_0^l (\bar{q} \delta w + \bar{m} \delta \beta - Q \delta w' - Q \delta \beta - M \delta \beta') dx \\ & + \bar{Q}(0) \delta w_0 + \bar{Q}(l) \delta w_l + \bar{M}(0) \delta \beta_0 + \bar{M}(l) \delta \beta_l = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

สมการที่ (2.17) พิจารณาจากหัวข้อที่ 2.1.4 โดยการแทนสมการที่ (2.7) และ (2.10) ในสมการที่ (2.6) ซึ่งมีตัวแปรอิสระ คือ ระยะเวลาในตัว  $w$  และมุมหมุน  $\beta$  สำหรับการ Discretization ได้เลือกใช้ฟังก์ชันกำหนดรูปร่าง (Shape function) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ดังนี้

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (2.18)$$

โดยที่ 1 และ 2 หมายถึง โหนด (Nodes) ของอีลิเมนต์ และจะได้รับการประมาณค่าระยะเวลาในตัวและมุมหมุน ดังนี้

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (2.19)$$

โดยที่  $\mathbf{N}$  คือ เมตริกซ์ของฟังก์ชันกำหนดรูปร่าง และ  $\mathbf{d}$  คือ ระยะเวลาเคลื่อนตัวที่โหนดของอีลิเมนต์ สามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} w^1 \\ \beta^1 \\ w^2 \\ \beta^2 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับสมการความเครียด จะได้ว่า

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{L}\mathbf{u}_h = \mathbf{L}\mathbf{N}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.21)$$

โดยที่  $\mathbf{B}$  คือ เมตริกซ์ความเครียด - ระยะแอนตัว (Strain - Displacement matrix) สามารถเขียนอยู่ในรูปเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_1 & N_{2,x} & N_2 \\ 0 & N_{1,x} & 0 & N_{2,x} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

เมื่อ

$$N_{K,x} = \frac{\partial N_K}{\partial x} = \frac{\partial N_K}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2.23)$$

ในส่วนถัดไปจะเป็นแนวคิดของบับนอฟ - การเลอคิน (Bubnov-Galerkin) ที่ใช้การ Discretization แบบเดียวกันกับระยะแอนตัวเสมือน  $\delta\mathbf{u}_h$  และมุมหมุนเสมือน  $\delta\boldsymbol{\beta}_h$  แทนค่าสมการดังกล่าวในหลักการงานเสมือน (สมการที่ (2.16)) พร้อมกับแทนสมการคอนสทิทิวทีฟ  $\boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_h$  ด้วยเช่นเดียวกัน จะได้หลักการงานเสมือนที่ Discretized แล้ว ดังนี้

$$\int_0^l (\delta\mathbf{d}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{d} - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}}) dx - \delta\mathbf{d}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_l \end{bmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

ซึ่ง  $\mathbf{d}$  และ  $\delta\mathbf{d}$  เป็นค่าคงที่ จึงสามารถแยกออกจากปริพันธ์ได้ ดังนั้น เราจึงสามารถจัดรูปสมการใหม่ ได้ดังนี้

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (2.25)$$

เมื่อ  $\mathbf{K}$  คือ สติฟเนสเมตริกซ์ และ  $\mathbf{F}$  คือ เวกเตอร์ของแรงภายนอก

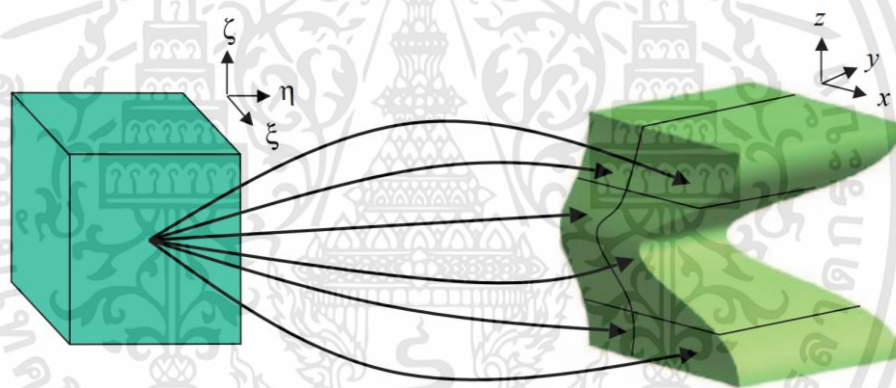
$$\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dx, \quad \mathbf{F} = \int_0^l \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{p}} dx + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_l \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

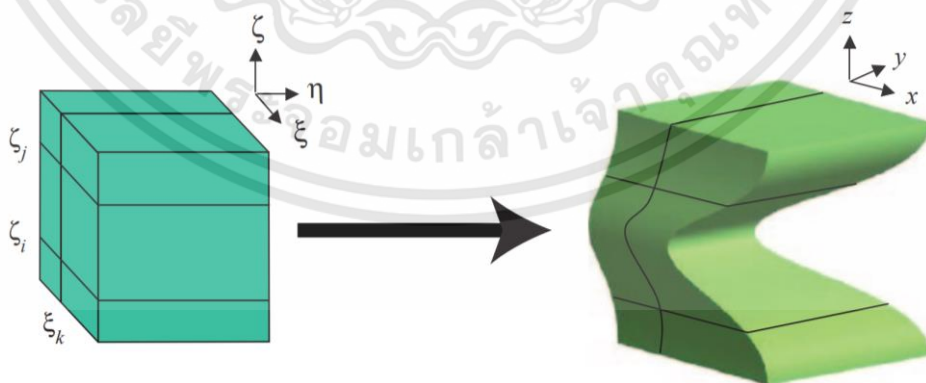
## 2.2 ฟังก์ชันเนิร์บส์ (NURBS: Non-Uniform Rational B-Splines)

### 2.2.1 B-splines

ฟังก์ชันเนิร์บส์สร้างขึ้นมาจาก B-splines ดังนั้น จะเริ่มต้นหัวข้อนี้ด้วยการอธิบายเกี่ยวกับ B-splines ก่อน กล่าวคือ อิลิเมนต์ที่อยู่ในพิกัดพารามิเตอร์ (Parameter space) ของ B-splines จะเรียงตัวกันเรียกว่า แพทช์ (Patches) ซึ่งแตกต่างจากวิธีการไฟไนท์อิลิเมนต์ ดังนี้ อิลิเมนต์ที่อยู่ในพิกัดพารามิเตอร์ของวิธีการไฟไนท์อิลิเมนต์ ซึ่งเรียกว่า อิลิเมนต์อ้างอิง (Reference element) หรืออิลิเมนต์หลัก (Parent element) จะเกิดการเชื่อมโยงพิกัด (Mapping) ไปเป็นอิลิเมนต์เดี่ยวในพิกัดจริง (Physical space) ซึ่งแต่ละอิลิเมนต์จะมีความเชื่อมโยงพิกัดของตัวเอง ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ในทางกลับกันการเชื่อมโยงพิกัดของ B-splines จะใช้แพทช์ที่ประกอบด้วยหลายอิลิเมนต์เชื่อมโยงกับพิกัดจริง ดังแสดงในรูปที่ 2.5 ซึ่งแต่ละอิลิเมนต์ที่อยู่ในพิกัดจริงจะมีความสอดคล้องกับอิลิเมนต์ที่อยู่ในพิกัดพารามิเตอร์



รูปที่ 2.4 การเชื่อมโยงมิติของวิธีการไฟไนท์อิลิเมนต์ [5]



รูปที่ 2.5 การเชื่อมโยงมิติของ B-splines [5]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.2.1.1 นี้อทเวกเตอร์ (Knot vector)

นี้อทเวกเตอร์ คือ เซ็ทของจำนวนจริงที่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ และอยู่บนพิกัดพารามิเตอร์ เขียนในรูปทั่วไปได้ว่า

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (2.27)$$

เมื่อ  $p$  คือ ดีกรีของฟังก์ชันฐาน และ  $n$  คือ จำนวนจุดควบคุม (จำนวนฟังก์ชันฐาน) สำหรับช่วง  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  เรียกว่า ช่วงนี้อท (Knot span) และช่วง  $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$  เรียกว่า แพทช์ (Patch) ถ้าภายในนี้อทเวกเตอร์มีค่าซ้ำกัน เรียกว่า นี้อทซ้ำ (Multiple knot) และถ้าระยะห่างของช่วงนี้อทมีค่าเท่ากันตลอดทุกช่วง จะเรียกว่า นี้อทเวกเตอร์แบบสม่ำเสมอ (Uniform knot vector) นอกจากนี้ ถ้าหากว่าจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายของนี้อทเวกเตอร์ มีค่าซ้ำกันเป็นจำนวน  $p+1$  นี้อท จะเรียกว่า นี้อทเวกเตอร์แบบเปิด (Open knot vector) ซึ่งโดยทั่วไปมักจะใช้นี้อทเวกเตอร์แบบเปิดในการวิเคราะห์ปัญหา ขนาดของนี้อทเวกเตอร์  $m$  สามารถคำนวณได้จาก  $m = n + p + 1$

มีข้อสังเกตที่น่าสนใจเกี่ยวกับนี้อทเวกเตอร์ คือ ค่าของนี้อทจะไม่มีผลใดๆ กับการสร้างฟังก์ชันฐานและเส้นโค้ง ถ้ามีอัตราส่วนของระยะห่างระหว่างนี้อทเท่ากัน เช่น  $\Xi = \{-1, -1, -1, 0, 1, 1, 1\}$ ,  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$  และ  $\Xi = \{10, 10, 10, 20, 30, 30, 30\}$

### 2.2.1.2 ฟังก์ชันฐาน (Basis function)

B-splines คือ ฟังก์ชันที่ประกอบด้วยฟังก์ชันช่วงพหุนาม (Piecewise Polynomials) ซึ่งฟังก์ชันนี้ถูกสร้างขึ้นจากนี้อทเวกเตอร์ และถูกคำนวณจากสมการของค็อก-เดอบอร์ (Cox-de Boor) ดังนี้

สำหรับ  $p = 0$

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.28)$$

สำหรับ  $p \geq 1$

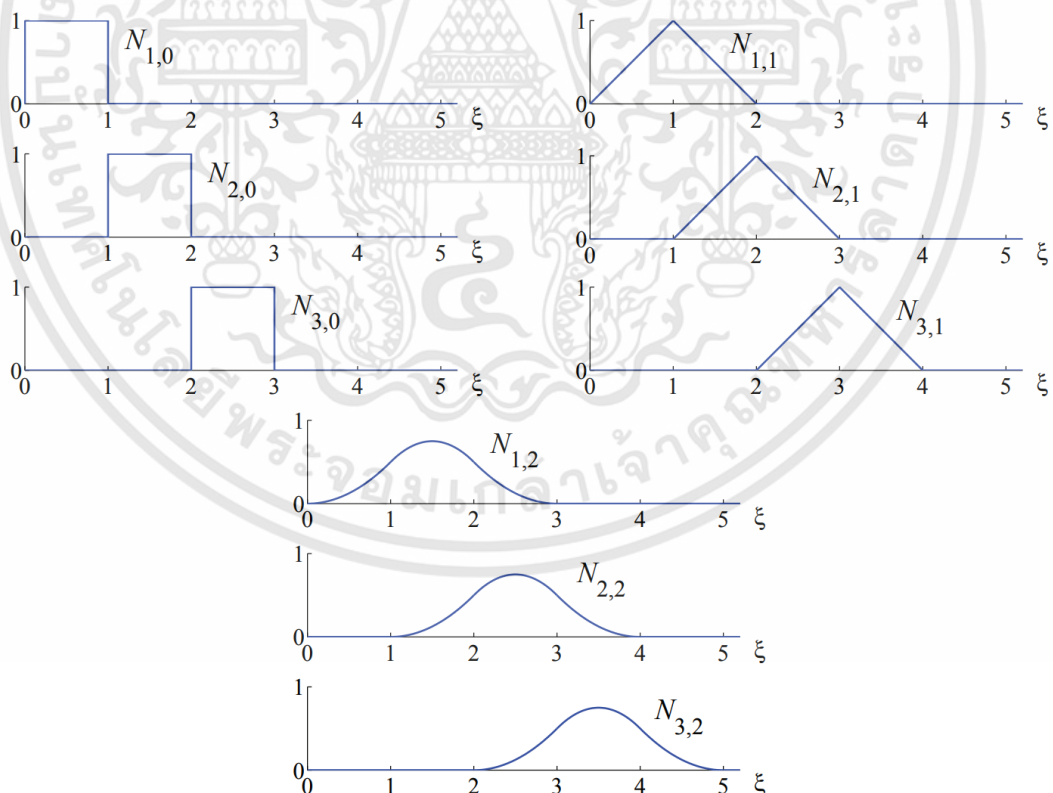
$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.29)$$

เมื่อ  $i$  คือ ลำดับของฟังก์ชันฐาน และ  $p$  คือ ดีกรีของฟังก์ชันฐาน

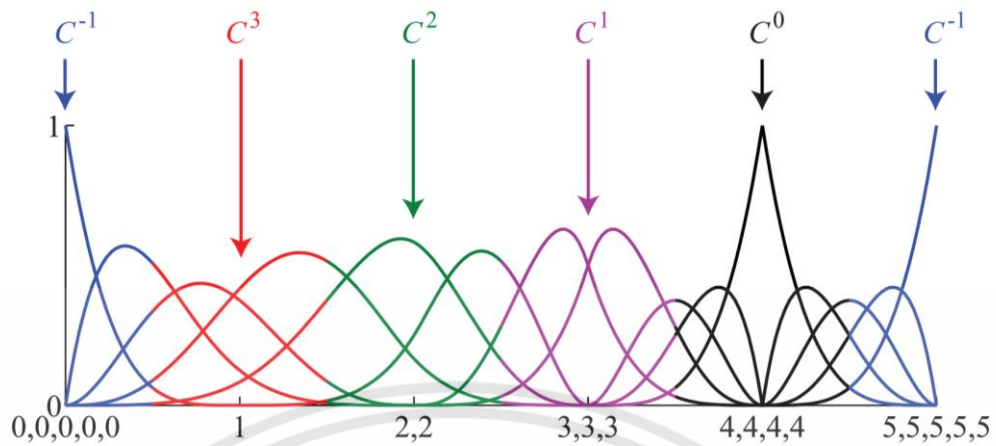
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการประยุกต์ใช้สมการที่ (2.28) และ (2.29) โดยใช้น็ทเวกเตอร์เป็นแบบสม่ำเสมอ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 2.6 สำหรับฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=0$  และ  $p=1$  จะได้ผลลัพธ์เป็นค่าคงที่และฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear finite element function) ตามลำดับ ส่วนฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=2$  แต่ละฟังก์ชันที่ได้จะมีความเหมือนกัน แต่จะขยับออกจากกันไปเรื่อยๆ ซึ่งแตกต่างจากฟังก์ชันในไฟไนท์อีลิเมนต์ที่รูปร่างของฟังก์ชันจะขึ้นอยู่กับโหนดภายในหรือขึ้นอยู่กับโหนดปลาย

การใช้น็ทเวกเตอร์แบบไม่สม่ำเสมอ ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 2.7 ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=4$  ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์แบบเปิดแต่ไม่สม่ำเสมอ  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$  จะเห็นว่าเกิดการแทรกฟังก์ชันฐานเข้ามาที่น็ทซ้ำ  $\xi = 4$  และทำให้ที่ตำแหน่งนี้มีความต่อเนื่อง  $C^0$  ซึ่งโดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันฐานจะมีความต่อเนื่อง  $C^\infty$  อยู่ภายในช่วงของน็ท (ระหว่างน็ท 2 น็ท) มีความต่อเนื่อง  $C^{p-1}$  ที่น็ทเดี่ยว (Single knot) และมีความต่อเนื่อง  $C^{p-k}$  เมื่อมีน็ทซ้ำเป็นจำนวน  $k$  น็ท กล่าวคือ เมื่อมีน็ทซ้ำเพิ่มขึ้น จะทำให้ความต่อเนื่องลดลง สำหรับความต่อเนื่อง  $C^{-1}$  หมายถึง ฟังก์ชันฐานจะไม่มีค่าต่อเนื่องโดยสิ้นเชิงซึ่งถือเป็นการสิ้นสุดของโดเมน



รูปที่ 2.6 ฟังก์ชันฐาน B-splines ดีกรี 0, 1 และ 2 ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์แบบสม่ำเสมอ  $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$  [5]



รูปที่ 2.7 ฟังก์ชันฐานตริกกรี 4 ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์แบบเปิดแต่ไม่สม่ำเสมอ  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5\}$  และแสดงความต่อเนื่องที่ตำแหน่งน็อทต่างๆ [5]

### 2.2.1.3 การสร้างฟังก์ชันฐานจากน็อทเวกเตอร์แบบสม่ำเสมอ

เพื่อที่จะเข้าใจรายละเอียดในการสร้างฟังก์ชันฐานมากขึ้น จึงได้นำเสนอตัวอย่างด้วยการสร้างฟังก์ชันฐานตริกกรี  $p=2$  ที่มีน็อทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$  ซึ่งลำดับขั้นตอนเป็นดังแผนผังที่แสดงในรูปที่ 2.8 และจากสมการที่ (2.28) เริ่มต้นที่  $i=1$  จะได้

$$N_{1,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi_1 \leq \xi < \xi_2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.30)$$

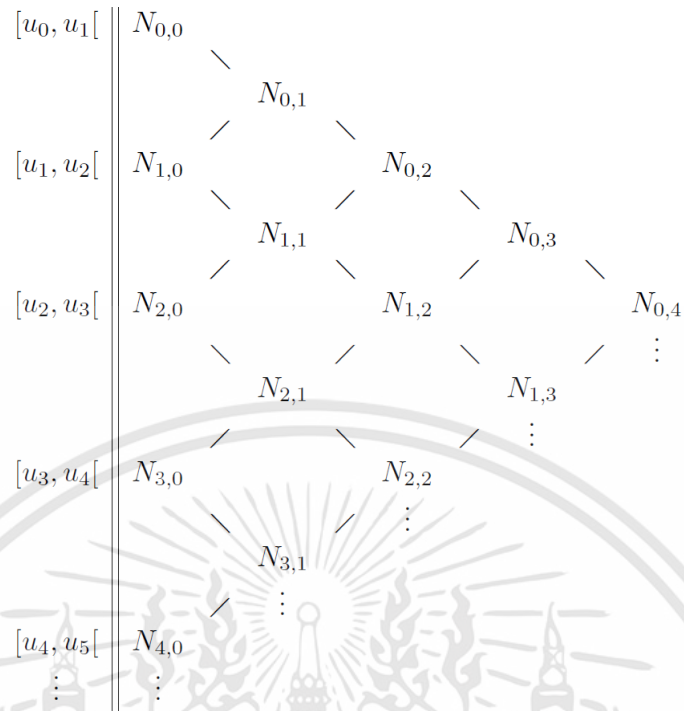
เมื่อ  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  จะสังเกตเห็นว่า  $\xi$  ไม่มีค่าอยู่ระหว่างช่วง  $[\xi_1, \xi_2]$  กล่าวคือ  $0 \leq \xi$  และ  $\xi < 0$  ดังนั้น  $N_{1,0}(\xi) \equiv 0$  และในทำนองเดียวกันพิจารณาว่า  $i=2, 3, 4$  จะได้

$$N_{1,0}(\xi) = 0$$

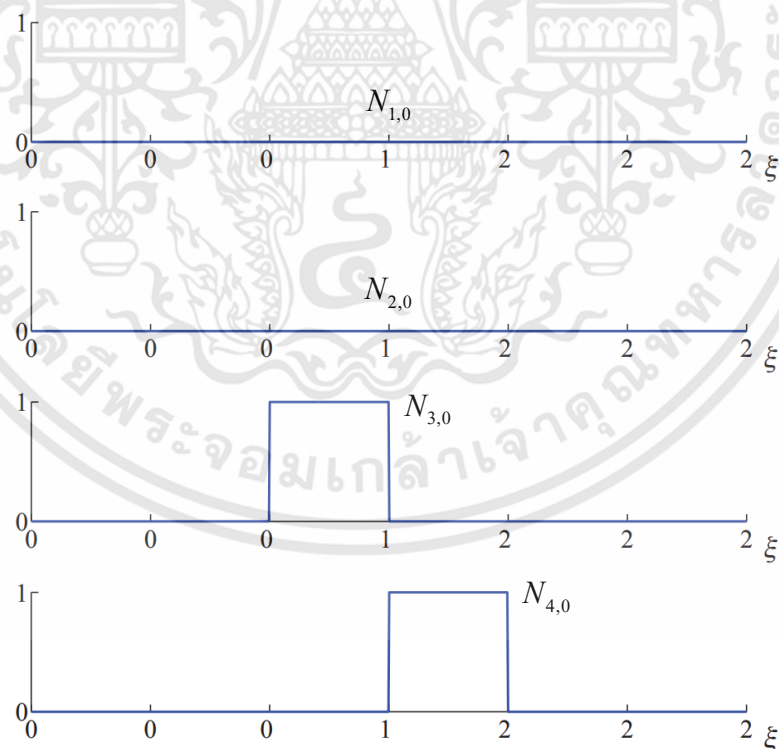
$$N_{2,0}(\xi) = 0$$

$$N_{3,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$N_{4,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



รูปที่ 2.8 แผนผังการสร้างฟังก์ชันฐานตริกัรี  $p=2$  ที่มีน็อเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$



รูปที่ 2.9 ฟังก์ชันฐานค่าคงที่ในพิกัดตขนิ ที่สร้างจากน็อเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$  [5]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในรูปที่ 2.9 คือ กราฟของสมการที่ (2.31) ที่อยู่ในพิกัดดัชนี (Index space) และเราสามารถคำนวณที่  $i=5$  และ  $i=6$  ได้ แต่ฟังก์ชัน  $N_{5,p}$  และ  $N_{6,p}$  ที่ได้จะมีค่าเป็นศูนย์ทุกตัวกริของฟังก์ชัน

สำหรับการสร้างฟังก์ชันเส้นตรง  $N_{i,1}(\xi)$  จะสร้างจากสมการที่ (2.29) สำหรับ  $i=1$  และ  $p=1$  จะได้

$$N_{1,1}(\xi) = \frac{\xi-0}{0-0} N_{1,0}(\xi) + \frac{0-\xi}{0-0} N_{2,0}(\xi) \quad (2.32)$$

เมื่อ  $N_{1,0}(\xi) = N_{2,0}(\xi) = 0$  และกำหนดให้

$$\frac{0}{0} \doteq 0 \quad (2.33)$$

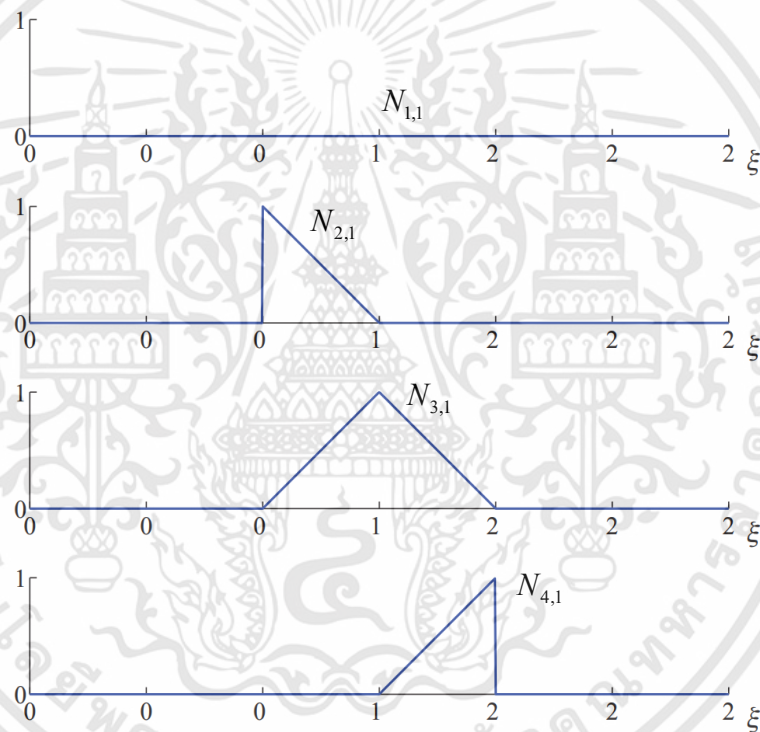
ดังนั้น  $N_{1,1}(\xi) \equiv 0$

สำหรับตัวอย่างเพิ่มเติม จะพิจารณาที่  $i=3$  จะได้

$$\begin{aligned} N_{3,1}(\xi) &= \frac{\xi-0}{1-0} N_{3,0}(\xi) + \frac{2-\xi}{2-1} N_{4,0}(\xi) \\ &= \xi \begin{cases} 1 & 0 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &\quad + (2-\xi) \begin{cases} 1 & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \xi & 0 \leq \xi < 1 \\ 2-\xi & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.34)$$

ดำเนินการแบบเดียวกันกับ  $i=1, 2, 4$  จะได้ผลลัพธ์ในรูปของฟังก์ชันช่วงเส้นตรง (Piecewise linear function) ดังแสดงในสมการที่ (2.35) และเขียนกราฟได้ดังแสดงในรูปที่ 2.10 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 N_{1,1}(\xi) &= 0 \\
 N_{2,1}(\xi) &= \begin{cases} 1-\xi & 0 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 N_{3,1}(\xi) &= \begin{cases} \xi & 0 \leq \xi < 1 \\ 2-\xi & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 N_{4,1}(\xi) &= \begin{cases} \xi-1 & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.35}$$



รูปที่ 2.10 ฟังก์ชันฐานเส้นตรงในพิกัดดัชนิ ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$  [5]

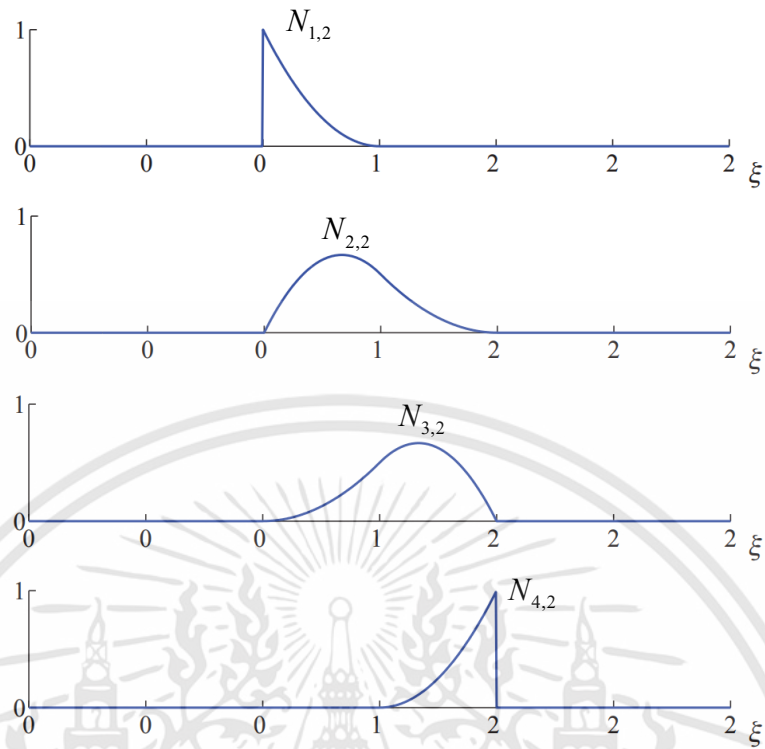
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนสุดท้าย จะเป็นการสร้างฟังก์ชันช่วงดีกรี  $p = 2$  (Piecewise quadratic function) สำหรับตัวอย่างที่  $i = 2$  จะได้

$$\begin{aligned}
 N_{2,2}(\xi) &= \frac{\xi-0}{1-0} N_{2,1}(\xi) + \frac{2-\xi}{2-0} N_{3,1}(\xi) \\
 &= \xi \begin{cases} 1-\xi & 0 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &\quad + \frac{1}{2}(2-\xi) \begin{cases} \xi & 0 \leq \xi < 1 \\ 2-\xi & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \xi(1-\xi) + \frac{1}{2}(2-\xi)\xi & 0 \leq \xi < 1 \\ \frac{1}{2}(2-\xi)^2 & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

ดำเนินการแบบเดียวกันกับ  $i = 1, 3, 4$  จะได้ฟังก์ชันช่วงดีกรี  $p = 2$  ทั้งหมด และเขียนกราฟได้ดังแสดงในรูปที่ 2.11 ดังนี้

$$\begin{aligned}
 N_{1,2}(\xi) &= \begin{cases} (1-\xi)^2 & 0 \leq \xi < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 N_{2,2}(\xi) &= \begin{cases} \xi(1-\xi) + \frac{1}{2}(2-\xi)\xi & 0 \leq \xi < 1 \\ \frac{1}{2}(2-\xi)^2 & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 N_{3,2}(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\xi^2 & 0 \leq \xi < 1 \\ \frac{1}{2}\xi(2-\xi) + (2-\xi)(\xi-1) & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\
 N_{4,2}(\xi) &= \begin{cases} (\xi-1)^2 & 1 \leq \xi < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{2.37}$$



รูปที่ 2.11 ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p = 2$  ในพิกัดดัดขึ้น ที่สร้างจากน็อเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 2, 2\}$  [5]

#### 2.2.1.4 อนุพันธ์ของฟังก์ชันฐาน B-splines

อนุพันธ์ของฟังก์ชันฐาน B-splines จะอยู่ในเทอมของฟังก์ชันที่มีดีกรีต่ำลง สำหรับฟังก์ชันดีกรี  $p$  และน็อเวกเตอร์  $\Xi$  จะมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันฐานลำดับที่  $i^{th}$  คือ

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.38)$$

เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นไป ได้ดังนี้

$$\frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left( \frac{d^{k-1}}{d\xi^{k-1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \right) \quad (2.39)$$

### 2.2.1.5 เส้นโค้ง B-splines

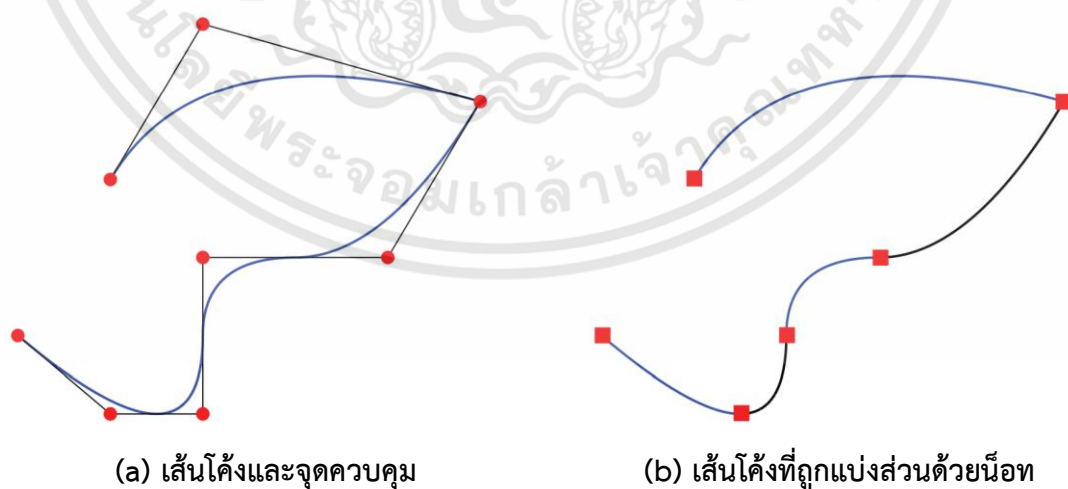
เส้นโค้ง B-splines ถูกสร้างขึ้นมาจากการรวมกันของฟังก์ชันฐาน B-splines และสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันฐานหรือเรียกว่า “จุดควบคุม” ซึ่งคล้ายกับพิกัดในวิธีการไฟไนท์อีลิเมนต์ กำหนดให้  $n$  คือ จำนวนฟังก์ชันฐาน  $N_{i,p}, i=1, 2, \dots, n$  และ  $P_i, i=1, 2, \dots, n$  คือจุดควบคุม จะได้ฟังก์ชันของเส้นโค้ง B-splines ซึ่งเป็นฟังก์ชันช่วง ดังนี้

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad (2.40)$$

เมื่อ  $i$  คือ จุดควบคุม สำหรับการแบ่งช่วงแบบเชิงเส้นระหว่างจุดควบคุม จะเรียกว่า รูปเหลี่ยมควบคุม (Control polygon) ดังแสดงในรูปที่ 2.13 (a)



รูปที่ 2.12 ฟังก์ชันฐานดีกรี 2 ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์แบบเปิดแต่ไม่สม่ำเสมอ  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$  [5]



รูปที่ 2.13 เส้นโค้ง B-splines (a) รูปเหลี่ยมควบคุม ซึ่งตำแหน่งของจุดควบคุมแสดงด้วย ● (b) การแบ่งส่วนของเส้นโค้งออกเป็นอีลิเมนต์ด้วยน็ท ซึ่งตำแหน่งของน็ทแสดงด้วย ■ [5]

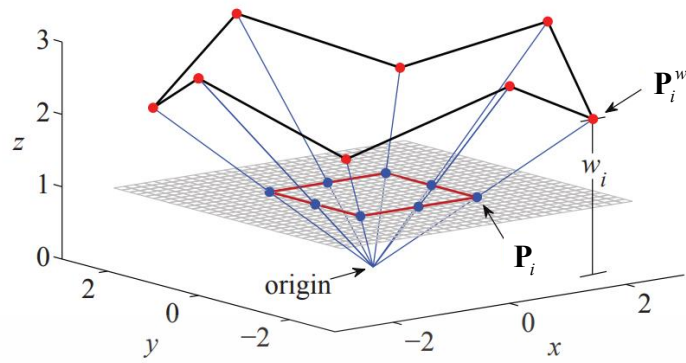
ตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2.13 ถูกสร้างมาจากฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=2$  ดังแสดงในรูปที่ 2.12 สำหรับเส้นโค้งที่เริ่มต้นที่จุดควบคุมแรกและสิ้นสุดลงที่จุดควบคุมสุดท้าย จะเป็นลักษณะของเส้นโค้งที่สร้างมาจากน็ทเวกเตอร์แบบเปิด จากตัวอย่างจะสังเกตเห็นได้ว่าการแทรกเส้นโค้งขึ้นมาใหม่ที่จุดควบคุมที่ 6 ทำให้เส้นโค้งมีลักษณะหักงอ (Kink) ซึ่งสาเหตุเกิดมาจากการที่มีน็ทเข้าอยู่ในน็ทเวกเตอร์ที่  $\xi=4$  ดังที่กล่าวในหัวข้อก่อนหน้านี้ และข้อสังเกตอีกอย่างหนึ่ง คือ เส้นโค้งจะเป็นเส้นสัมผัสกับรูปเหลี่ยมควบคุมที่จุดควบคุมแรก, จุดควบคุมสุดท้าย และจุดควบคุมที่ 6 เส้นโค้งนี้จะมีความต่อเนื่อง  $C^{p-1} = C^1$  ในทุกตำแหน่ง ยกเว้นที่  $\xi=4$  ซึ่งเป็นตำแหน่งที่  $C^{p-k} = C^0$  จะสังเกตเห็นความแตกต่างระหว่างจุดควบคุมที่แสดงในรูปที่ 2.13 (a) และลักษณะของน็ท ซึ่งได้แบ่งเส้นโค้งออกเป็นอีลิเมนต์ (Curve element) และมีการเชื่อมโยงกับพิกัดจริง ดังแสดงในรูปที่ 2.13 (b)

### 2.2.2 ฟังก์ชันเนิร์บส์

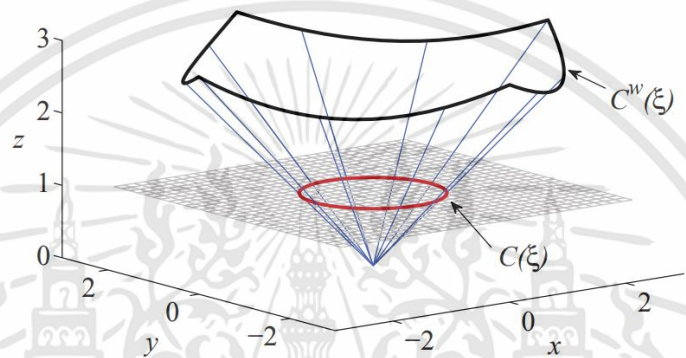
NURBS เป็นคำย่อของ Non-Uniform Rational B-Splines ซึ่งคำว่า “Non-Uniform” หมายถึง น็ทเวกเตอร์ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วจะเป็นแบบไม่สม่ำเสมอ ส่วนคำว่า “Rational” หมายถึง ฟังก์ชันฐาน ในขณะที่เส้นโค้ง B-splines จะมีฟังก์ชันฐานเป็นฟังก์ชันช่วงพหุนาม แต่เส้นโค้งเนิร์บส์ จะมีฟังก์ชันฐานเป็นฟังก์ชันตรรกยะ (Rational functions)

ฟังก์ชันเนิร์บส์มีความสำคัญอย่างมาก เนื่องจากสามารถที่จะแสดงรูปร่างของวัตถุได้อย่างหลากหลายและแม่นยำ ซึ่งไม่สามารถแสดงได้อย่างถูกต้องด้วยฟังก์ชันพหุนาม และในการออกแบบทั่วไปก็ยังคงใช้ฟังก์ชันพหุนามอยู่

เพื่อให้เข้าใจถึงการทำงานของฟังก์ชันเนิร์บส์ เราต้องเข้าใจทั้งมุมมองทางเรขาคณิตและมุมมองทางพีชคณิต ซึ่งมุมมองทางเรขาคณิตจะทำให้เราเข้าใจในขั้นตอนการแบ่งรูปร่างวัตถุ ส่วนมุมมองทางพีชคณิตจะเป็นประโยชน์ในการออกแบบอัลกอริทึมและการสร้างซอฟต์แวร์ ซึ่งทั้งสองมีความจำเป็นที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์แบบ Isogeometric



(a) รูปเหลี่ยมควบคุม



(b) เส้นโค้ง

รูปที่ 2.14 รูปวงกลมที่สร้างจากการแปลงภาพฉายของฟังก์ชัน B-splines ดิกรี 2 (a) การแปลงภาพฉายของจุดควบคุมโปรเจกทีฟ  $P_i^w$  ทำให้ได้จุดควบคุม  $P_i$  (b) การแปลงภาพฉายของเส้นโค้งโปรเจกทีฟ  $C^w(\xi)$  ทำให้ได้เส้นโค้ง  $C(\xi)$  [5]

### 2.2.2.1 มุมมองทางเรขาคณิต

ฟังก์ชันเนิร์บส์จะได้จากการแปลงภาพฉาย (Projective transformation) ของฟังก์ชัน B-splines ซึ่งสามารถสร้างได้อย่างแม่นยำ และถือเป็นหนึ่งในคุณสมบัติของเทคนิค Isogeometric จากตัวอย่างที่แสดงในรูปที่ 2.14 รูปวงกลมที่สร้างขึ้นด้วยเส้นโค้ง B-splines ดิกรี  $p=2$  จะแปลงโดยทำการฉายทุกจุดบนเส้นโค้งไปยังระนาบ  $z=1$  โดยเส้นรังสีจะมาจากจุดกำเนิด (Origin) จะทำให้เราได้จุดควบคุมสำหรับเส้นโค้งเนิร์บส์ที่ได้จากการแปลงภาพฉายเดียวกันกับจุดควบคุมของเส้นโค้ง B-splines ซึ่งในบริบทนี้เราจะเรียกเส้นโค้ง B-splines  $C^w(\xi)$  ว่าเส้นโค้งโปรเจกทีฟ (Projective curve) ที่สร้างมาจากจุดควบคุมโปรเจกทีฟ  $P_i^w$  (Projective control points) สำหรับคำว่า “เส้นโค้ง” และ “จุดควบคุม” จะสงวนไว้ใช้กับเนิร์บส์  $C(\xi)$  และ  $P_i$  ตามลำดับ

จากเส้นโค้งโปรเจกทีฟและจุดควบคุมโปรเจกทีฟ จะได้ความสัมพันธ์ของจุดควบคุมของเส้นโค้งเนิร์บส์ ดังนี้

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}_i)_j &= (\mathbf{P}_i^w) / w_i, \quad j=1, \dots, d \\ w_i &= (\mathbf{P}_i^w)_{d+1}\end{aligned}\tag{2.41}$$

เมื่อ  $j^{\text{th}}$  คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์  $\mathbf{P}_i$  และ  $w_i$  คือ ค่าถ่วงน้ำหนัก ในรูปที่ 2.14 (a) ค่าถ่วงน้ำหนัก คือ องค์ประกอบในแกน  $z$  ของจุดควบคุมโปรเจกทีฟ โดยทั่วไปแล้วในการใช้งานทางวิศวกรรมจะมีค่าถ่วงน้ำหนักเป็นบวก การแบ่งจุดควบคุมโปรเจกทีฟด้วยค่าถ่วงน้ำหนักจะเทียบเท่ากับการใช้การแปลงภาพฉาย ซึ่งเราต้องการใช้การแปลงภาพฉายกับทุกจุดบนเส้นโค้ง และเราสามารถทำได้โดยการกำหนดฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ดังนี้

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i\tag{2.42}$$

โดยที่  $N_{i,p}(\xi)$  คือ ฟังก์ชันฐาน B-splines และ  $W(\xi) = z(\xi)$  คือ ความสูงของเส้นโค้งที่เป็นฟังก์ชันของ  $\xi$  และตอนนี้เราจะได้เส้นโค้งเนิร์บส์ ดังนี้

$$(\mathbf{C}(\xi))_j = \frac{(\mathbf{C}^w(\xi))_j}{W(\xi)}, \quad j=1, \dots, d\tag{2.43}$$

ทั้ง  $\mathbf{C}^w(\xi)$  และ  $W(\xi)$  เป็นฟังก์ชันช่วงพหุนาม ส่วนเส้นโค้ง  $\mathbf{C}(\xi)$  เป็นฟังก์ชันตรรกยะ

### 2.2.2.2 มุมมองทางพีชคณิต

แม้ว่ามุมมองทางเรขาคณิตจะทำให้เราทราบการทำงานของเนิร์บส์ แต่มุมมองทางพีชคณิตจะทำให้เราสามารถจัดการกับเนิร์บส์ได้โดยตรงมากที่สุด สำหรับประสิทธิภาพของ B-splines คือ ความสามารถในการเปลี่ยนรูปร่างโดยการปรับจุดควบคุม ซึ่งเราต้องการที่จะจัดการกับเนิร์บส์ในแบบเดียวกันและต้องสามารถทำได้โดยง่ายด้วย เมื่อทราบเช่นนี้แล้ว เราจึงต้องการสร้างฟังก์ชันเนิร์บส์จากน็ทเวกเตอร์ และสร้างเส้นโค้งจากผลรวมเชิงเส้น (Linear combination) ของฟังก์ชันฐานและจุดควบคุม ซึ่งวิธีการนี้จะทำให้ทุกอย่างเกี่ยวกับ B-splines ที่ศึกษามาเป็นจริงและสามารถใช้กับเนิร์บส์เช่นเดียวกัน

ในมุมมองทางพีชคณิตจะทำให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นในการสร้างฟังก์ชันฐานเนิร์บส์ ดังนั้น เราจะสามารถสร้างรูปร่างและแบ่งส่วนของรูปร่างได้ ซึ่งจะได้ฟังก์ชันฐานเนิร์บส์ ดังนี้

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (2.44)$$

จะเห็นได้ว่าสมการที่ (2.44) เป็นฟังก์ชันตรรกยะ และใช้สมการนี้ร่วมกับจุดควบคุม (สมการที่ (2.41)) จะทำให้เราได้สมการสำหรับเส้นโค้งเนิร์บส์ซึ่งเป็นรูปแบบเดียวกับ B-splines ดังนี้

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)P_i \quad (2.45)$$

### 2.2.2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันเนิร์บส์

เนื่องจากฟังก์ชันฐานเนิร์บส์ถูกสร้างขึ้นมาจากฟังก์ชันฐาน B-splines ทำให้อนุพันธ์ของฟังก์ชันเนิร์บส์ขึ้นอยู่กับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน B-splines เช่นเดียวกัน ใช้กฎการหารกับสมการที่ (2.44) จะได้

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (2.46)$$

เมื่อ  $N'_{i,p}(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi)$  จะได้ว่า

$$W'(\xi) = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi)w_i \quad (2.47)$$

สำหรับนิพจน์ที่จะใช้สำหรับอนุพันธ์อันดับสูง จะได้จาก Piegl and Tiller (1997) ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$A_i^{(k)}(\xi) = w_i \frac{d^k}{d\xi^k} N_{i,p}(\xi), \quad (\text{no sum on } i) \quad (2.48)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเราไม่หาผลรวมของดัชนีที่ซ้ำกัน จะได้ว่า

$$W^{(k)}(\xi) = \frac{d^k}{d\xi^k} W(\xi) \quad (2.49)$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับสูงของฟังก์ชันตรรกยะ สามารถแสดงได้ดังนี้

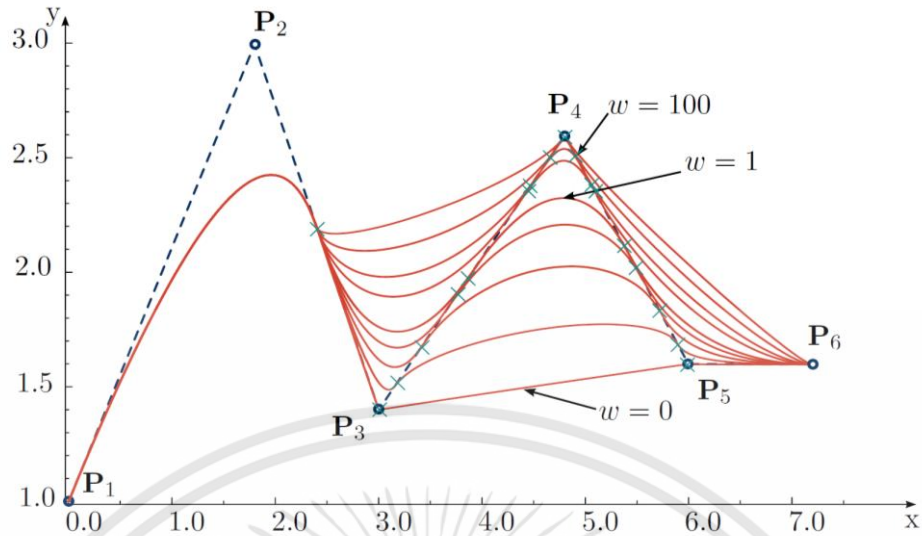
$$\frac{d^k}{d\xi^k} R_i^p(\xi) = \frac{A_i^{(k)}(\xi) - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} W^{(j)}(\xi) \frac{d^{(k-j)}}{d\xi^{(k-j)}} R_i^p(\xi)}{W(\xi)} \quad (2.50)$$

เมื่อ

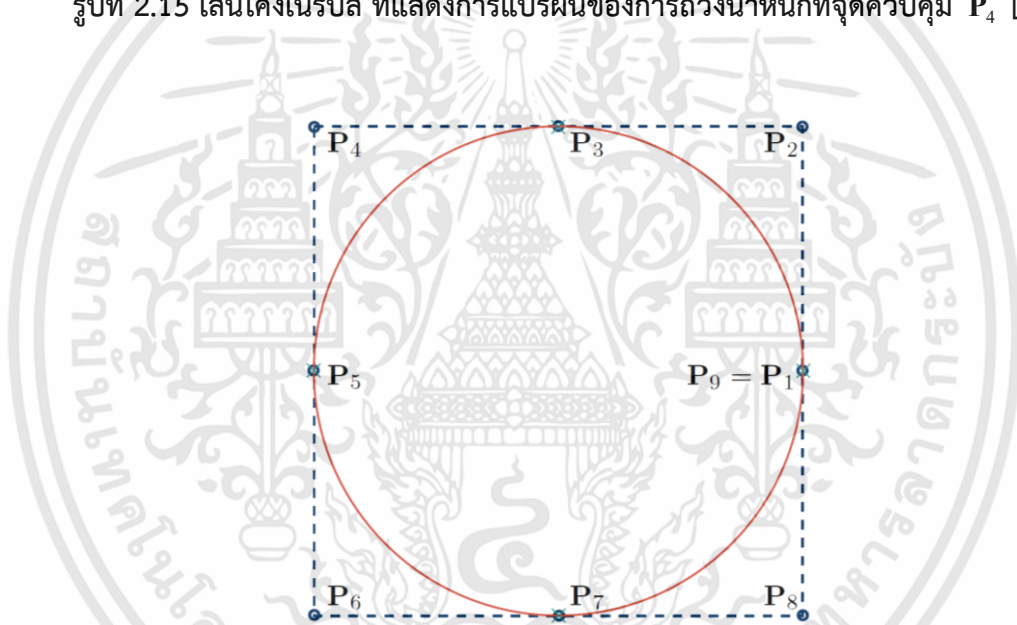
$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad (2.51)$$

#### 2.2.2.4 เส้นโค้งเนิร์บส์

เราสามารถสร้างเส้นโค้งเนิร์บส์ได้จากสมการที่ (2.45) ซึ่งถ้าทุกจุดควบคุมมีการถ่วงน้ำหนักเท่ากันทั้งหมด จะทำให้ฟังก์ชันฐานเนิร์บส์ในสมการที่ (2.44) ลดรูปไปเป็นฟังก์ชันฐาน B-splines ซึ่งหมายความว่า B-splines เป็นกรณีที่มีการถ่วงน้ำหนักเท่ากันนั่นเอง และทำให้คุณสมบัติต่างๆ ของ B-splines จะสามารถใช้งานได้กับเนิร์บส์เช่นเดียวกัน ในรูปที่ 2.15 แสดงการแปรผันของการถ่วงน้ำหนักที่จุดควบคุม  $\mathbf{P}_4$  ในขณะที่จุดควบคุมอื่นๆ จะถูกกำหนดให้มีค่าเท่ากับ 1 ทั้งหมด จะเห็นได้ว่าการเพิ่มค่าถ่วงน้ำหนักจะเป็นการดึงเส้นโค้งให้เข้าหาจุดควบคุม



รูปที่ 2.15 เส้นโค้งเนิร์บส์ ที่แสดงการแปรผันของการถ่วงน้ำหนักที่จุดควบคุม  $P_4$  [4]



รูปที่ 2.16 รูปวงกลมที่สร้างจากเส้นโค้งเนิร์บส์  $w_1 = w_3 = w_5 = w_7 = 1, w_2 = w_4 = w_6 = w_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}$   
 $\Xi = \{0, 0, 0, 0.25, 0.25, 0.5, 0.5, 0.75, 0.75, 1, 1, 1\}$  [4]

ประโยชน์ที่สำคัญของการใช้ฟังก์ชันตรรกยะ คือ สามารถแสดงรูปของภาคตัดกรวย ได้อย่างแม่นยำ ซึ่งรวมถึงวงกลมและวงรี ในรูปที่ 2.16 แสดงถึงรูปวงกลมที่สร้างจาก ฟังก์ชันเนิร์บส์ ทำให้สามารถสรุปได้ว่า เนิร์บส์สามารถแสดงวัตถุทางเรขาคณิตที่แม่นยำได้ สามารถสร้างเป็นรูปทรงเรียบ, รูปทรงอิสระ, รูปร่างเชิงเส้น, เส้นขอบที่มีความคมและเป็น เหลี่ยมมุมได้

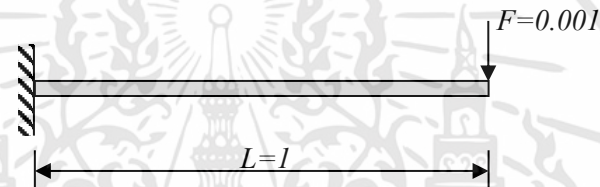
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

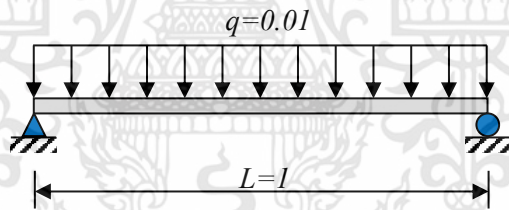
## วิธีดำเนินงานวิจัย

### 3.1 รายละเอียดการดำเนินงานวิจัย

ในการทดสอบเชิงตัวเลขจะใช้เทคนิค Isogeometric วิเคราะห์คาน 2 รูปแบบ คือ คานยื่นที่มีแรงแบบจุดกระทำที่ปลายคาน ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (a) และคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคาน ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (b) สมมุติให้คานมีคุณสมบัติเหมือนกันตลอดความยาวคาน (Isotropic material) และหน่วยทั้งหมดที่ใช้มีความสอดคล้องกันทั้งหมด ซึ่งคุณสมบัติของคานที่ใช้ แสดงดังตารางที่ 3.1



(a) คานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคาน



(b) คานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคาน

รูปที่ 3.1 ลักษณะของคานที่ใช้ในการทดสอบเชิงตัวเลข

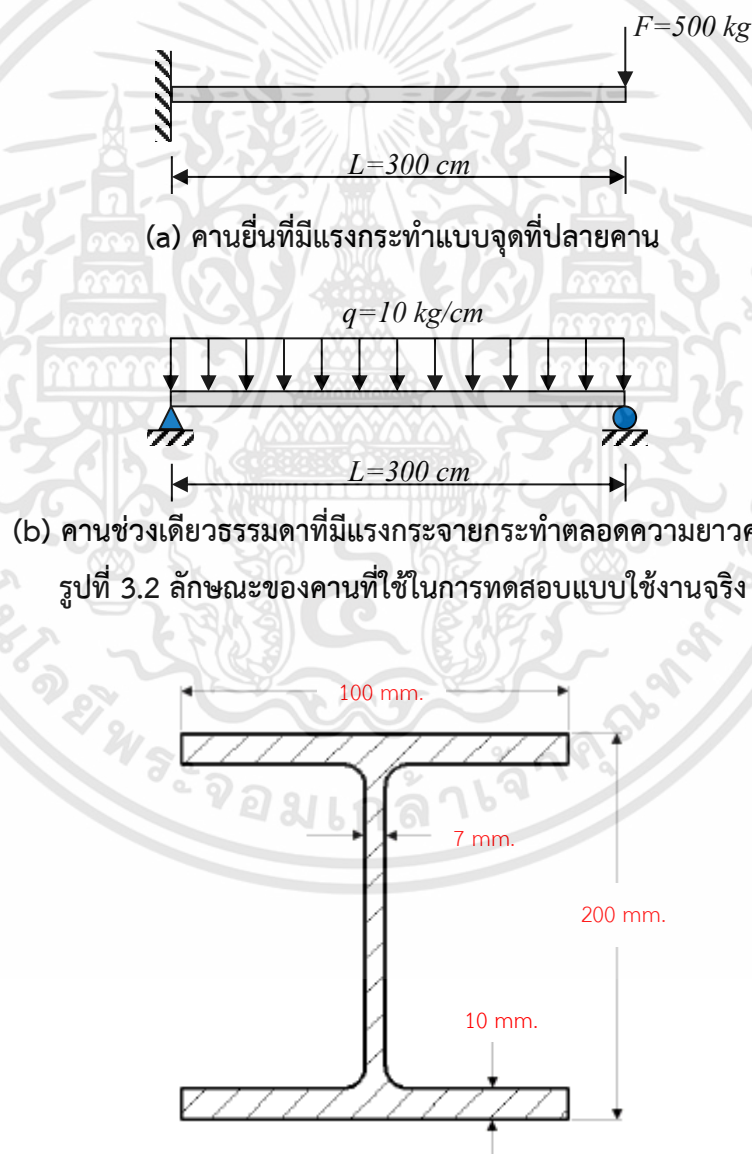
ตารางที่ 3.1 คุณสมบัติของคานที่ใช้ในการทดสอบเชิงตัวเลข

ยังมอดูลัส, $E$	1,000
อัตราส่วนปัวซอง, $\nu$	0
มอดูลัสแรงเฉือน, $G$	500
ความยาวคาน, $L$	1
ความกว้างคาน, $b$	1
ความหนาคาน, $t$	0.1
พื้นที่หน้าตัด, $A$	0.1
โมเมนต์ความเฉื่อย, $I$	0.0000833

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับแรงกระทำบนคานที่ใช้ในการทดสอบ จะเป็นแรงแบบจุด  $F = -0.001$  และแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคาน  $q = -0.01$  และในส่วนของฟังก์ชันฐานที่ใช้ในการทดสอบ จะใช้ฟังก์ชันฐานที่สร้างมาจาก Open-Uniform Knot Vector ที่มีดีกรี  $p = 1, 2, 3, 4$  โดยที่กำหนดให้เส้นโค้งสำหรับฟังก์ชันฐานทุกดีกรีมี 1 อิลิเมนต์

นอกจากนี้ยังประยุกต์การทดสอบให้สอดคล้องกับการใช้งานจริง โดยกำหนดคุณสมบัติของวัสดุให้สอดคล้องกับวัสดุที่มีในท้องตลาด และวิเคราะห์คานที่มีฐานรองรับ 2 รูปแบบเช่นเดียวกับการทดสอบเชิงตัวเลข ซึ่งวัสดุที่ใช้ถูกกำหนดให้เป็นคานเหล็กรูปพรรณหน้าตัดตัวไอ (I-Beam) มีความยาว 3 เมตร มีแรงแบบจุดขนาด 500 กิโลกรัม และมีแรงกระจายขนาด 10 กิโลกรัมต่อเซนติเมตร ดังแสดงในรูปที่ 3.2 (a) และรูปที่ 3.2 (b) ซึ่งคุณสมบัติของคานเป็นดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3 หน้าตัดคานเหล็กรูปพรรณที่ใช้ในการทดสอบแบบใช้งานจริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 คุณสมบัติของคานที่ใช้ในการทดสอบแบบใช้งานจริง

ยังมอดูลัส, $E$ ( $kg/cm^2$ )	2,000,000
อัตราส่วนปัวซอง, $\nu$	0.25
มอดูลัสแรงเฉือน, $G$ ( $kg/cm^2$ )	800,000
ความยาวคาน, $L$ ( $cm$ )	300
ความกว้างคาน, $b$ ( $cm$ )	10
ความหนาคาน, $t$ ( $cm$ )	20
พื้นที่หน้าตัด, $A$ ( $cm^2$ )	33.06
โมเมนต์ความเฉื่อย, $I$ ( $cm^4$ )	2,170

ในตัวอย่างการคำนวณจะแสดงเฉพาะตัวอย่างของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานที่คำนวณด้วยฟังก์ชันฐานดีกรี  $p = 2$  ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

### 3.2 ฟังก์ชันฐาน

เนื่องจากฟังก์ชันฐานที่ใช้ในการคำนวณจะถูกสร้างขึ้นมาจากน็ทเวกเตอร์แบบ Open-Uniform Knot Vector และจะต้องเป็นเส้นโค้งที่มี 1 อิลิเมนต์ ดังนั้น ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p = 2$  จะต้องมีจุดควบคุมจำนวน 3 จุด ( $m = n + p + 1$ ) ดังแสดงในตารางที่ 3.3 และเมื่อใช้ชุดคำสั่งในซอฟต์แวร์ช่วยคำนวณทางคณิตศาสตร์ ซึ่งคำนวณจากสมการที่ (2.28) และ (2.29) จะได้ฟังก์ชันฐานเป็นจำนวน  $p + 1$  ฟังก์ชัน ดังแสดงในตารางที่ 3.4 และรูปที่ 3.4

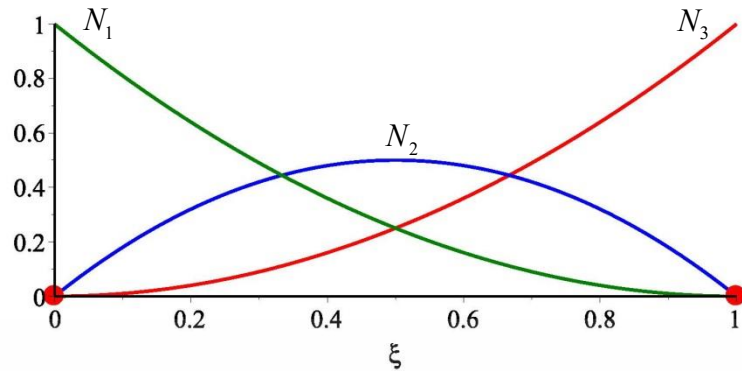
ตารางที่ 3.3 ข้อมูลที่ใช้ในการสร้างฟังก์ชันฐาน

ดีกรีของฟังก์ชันฐาน, $p$	2
จุดควบคุม, $\mathbf{P}_i(x_i, y_i)$	$[0,0], [0.5,0], [1,0]$
น็ทเวกเตอร์, $\Xi$	$\{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$
จำนวนอิลิเมนต์ของเส้นโค้ง	1

ตารางที่ 3.4 ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p = 2$ 

ช่วงของน็ท	ฟังก์ชันฐาน		
$[0,1]$	$N_1 = \xi^2 - 2\xi + 1$	$N_2 = -2\xi^2 + 2\xi$	$N_3 = \xi^2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4 ฟังก์ชันฐานตติกรี  $p=2$  ที่สร้างจากตารางที่ 3.3 ซึ่งแสดงน็อทด้วย ●

### 3.3 สติเฟเนสมเมตริกซ์ของอีลิเมนต์

สติเฟเนสมเมตริกซ์ของอีลิเมนต์  $\mathbf{K}$  สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.26) และเมื่อฟังก์ชันฐานถูกกำหนดให้อยู่บนพิกัดพารามิเตอร์ จาโคเบียนก็จะถูกนำมาใช้ในการคำนวณเพื่อเปลี่ยนจากพิกัดจริงไปสู่พิกัดพารามิเตอร์ ดังนั้น จุดบนเส้นโค้ง จะได้จากการหาผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันฐาน  $N_i$  และจุดควบคุม  $\mathbf{P}_i$  ดังนี้

$$x = N_1 \mathbf{P}_1 + N_2 \mathbf{P}_2 + N_3 \mathbf{P}_3 \quad (3.1)$$

แทนค่าฟังก์ชันฐานและจุดควบคุม จะได้

$$x = (\xi^2 - 2\xi + 1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2\xi^2 + 2\xi) \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} + \xi^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\therefore x = \begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้จาโคเบียน คือ

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 1 \quad (3.3)$$

จากนั้นใช้กฎลูกโซ่ในการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันฐาน ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=2$  คือ

$$N'_1 = 2\xi - 2, \quad N'_2 = -4\xi + 2, \quad N'_3 = 2\xi \quad (3.5)$$

แทนค่าฟังก์ชันฐานจากตารางที่ 3.4 และอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันฐาน (สมการที่ (3.5)) ในเมตริกซ์ความเครียด - ระยะแอนตัว  $\mathbf{B}$  (สมการที่ (2.22)) จะได้

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2\xi - 2 & \xi^2 - 2\xi + 1 & -4\xi + 2 & -2\xi^2 + 2\xi & 2\xi & \xi^2 \\ 0 & 2\xi - 2 & 0 & -4\xi + 2 & 0 & 2\xi \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

ขั้นตอนสุดท้าย แทนค่าเมตริกซ์ความเครียด - ระยะแอนตัว (สมการที่ (3.6)) และเมตริกซ์ของคุณสมบัติวัสดุ  $\mathbf{C}$  (สมการที่ (2.14)) ในสมการที่ (2.26) และหาปริพันธ์แบบเชิงวิเคราะห์ (Analytical solution) จะได้สติเฟเนสมเมตริกซ์ของอีลิเมนต์  $\mathbf{K}$  ดังนี้

$$\int_0^l \mathbf{B}(x)^T \mathbf{C} \mathbf{B}(x) dx = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \mathbf{B}(\xi)^T \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi) J d\xi, \quad J = \frac{dx}{d\xi} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}\alpha GA & -\frac{1}{2}\alpha GA & -\frac{2}{3}\alpha GA & -\frac{1}{3}\alpha GA & -\frac{2}{3}\alpha GA & -\frac{1}{6}\alpha GA \\ & \frac{1}{5}\alpha GA + \frac{4}{3}EI & \frac{1}{3}\alpha GA & \frac{1}{10}\alpha GA - \frac{2}{3}EI & \frac{1}{6}\alpha GA & \frac{1}{30}\alpha GA - \frac{2}{3}EI \\ & & \frac{4}{3}\alpha GA & 0 & -\frac{2}{3}\alpha GA & -\frac{1}{3}\alpha GA \\ & & & \frac{2}{15}\alpha GA + \frac{4}{3}EI & \frac{1}{3}\alpha GA & \frac{1}{10}\alpha GA - \frac{2}{3}EI \\ & & & & \frac{4}{3}\alpha GA & \frac{1}{2}\alpha GA \\ \text{sym.} & & & & & \frac{1}{5}\alpha GA + \frac{4}{3}EI \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.4 เวกเตอร์ของแรงภายนอก

เวกเตอร์ของแรงภายนอก  $\mathbf{F}$  สามารถคำนวณได้จากสมการที่ (2.26) เริ่มต้นด้วยการหาปริพันธ์แบบเชิงวิเคราะห์ของฟังก์ชันฐาน จะได้ดังนี้

$$\int_0^l qN(x) dx = \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} qN(\xi)J d\xi, \quad J = \frac{dx}{d\xi} \quad (3.9)$$

ดังนั้น จะได้เวกเตอร์ของแรงภายนอก  $\mathbf{F}$  คือ

$$\mathbf{F}^T = \left[ \frac{1}{3}q \quad 0 \quad \frac{1}{3}q \quad 0 \quad \frac{1}{3}q \quad 0 \right] \quad (3.10)$$

### 3.5 เงื่อนไขที่ขอบและผลลัพธ์

ในกรณีของคานช่วงเดียวธรรมดา ดังแสดงในรูปที่ 3.1 (b) และรูปที่ 3.2 (b) จะมีเงื่อนไขที่ขอบของฐานรองรับ (Support boundary conditions) คือ

$$u(0)=0, \quad u(l)=0 \quad (3.11)$$

ใช้วิธีการขจัด (Elimination method) เช่นเดียวกับที่ใช้ในวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อกำหนดเงื่อนไขที่ขอบของฐานรองรับ แถวและหลักที่แสดงถึง DOF (Degree of freedom) ของสติฟเนสเมตริกซ์ทั้งระบบ (Global stiffness matrix) และเวกเตอร์ของแรงภายนอกทั้งระบบ (Global force vector) จะถูกตัดออกตามเงื่อนไขที่ขอบของฐานรองรับ แสดงได้ดังนี้

$$\mathbf{K}_{red} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5}\alpha GA + \frac{4}{3}EI & \frac{1}{3}\alpha GA & \frac{1}{10}\alpha GA - \frac{2}{3}EI & 0 & \frac{1}{30}\alpha GA - \frac{2}{3}EI & 0 \\ & \frac{4}{3}\alpha GA & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\alpha GA & 0 \\ & & \frac{2}{15}\alpha GA + \frac{4}{3}EI & 0 & \frac{1}{10}\alpha GA - \frac{2}{3}EI & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ sym. & & & & \frac{1}{5}\alpha GA + \frac{4}{3}EI & 0 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{F}_{red}^T = \left[ 0 \quad 0 \quad \frac{1}{3}q \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \quad (3.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (2.25) สามารถคำนวณหาเวกเตอร์ของการเคลื่อนตัว  $\mathbf{d}$  ได้ดังนี้

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (3.14)$$

ดังนั้น การเคลื่อนตัวของจุดควบคุมสำหรับกรณีของคานช่วงเดียวธรรมดาที่ใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p = 2$  คือ

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \\ \frac{1}{48} \frac{q(\alpha GA + 12EI)}{\alpha GA EI} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{24} \frac{q}{EI} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

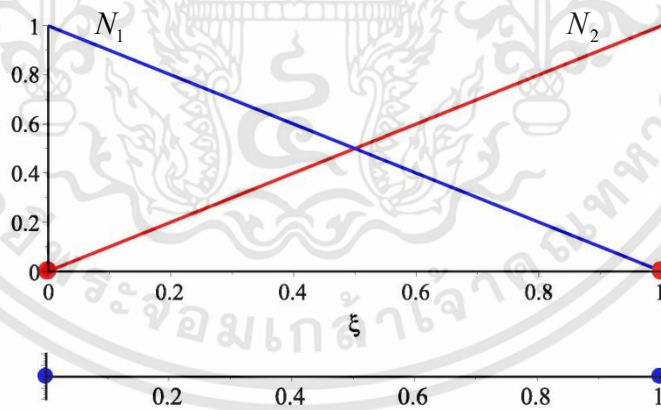
## บทที่ 4

### ผลการศึกษา

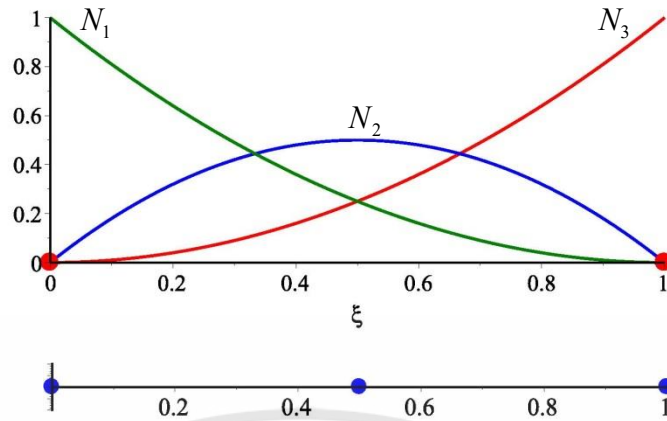
สำหรับอิลิเมนต์คานทีโมเซนโกที่ใช้ฟังก์ชันเนิร์บส์เป็นฟังก์ชันฐานและพิจารณาบนพื้นฐานของคานตรง มีการนำเสนอผลการทดสอบ 2 รูปแบบ คือ การทดสอบเชิงตัวเลข จะใช้คุณสมบัติของคานดังแสดงในตารางที่ 3.1 และการทดสอบแบบใช้งานจริง จะใช้คุณสมบัติของคานดังแสดงในตารางที่ 3.2 สำหรับการทดสอบทั้ง 2 รูปแบบ จะมีฟังก์ชันฐานแบบเดียวกัน คือ ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=1, 2, 3, 4$  ดังแสดงในรูปที่ 4.1 ถึงรูปที่ 4.4

สำหรับรูปที่ 4.1 เป็นฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=1$  ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 1, 1\}$  มีจุดควบคุม 2 จุด, รูปที่ 4.2 เป็นฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=2$  ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$  มีจุดควบคุม 3 จุด, รูปที่ 4.3 เป็นฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=3$  ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$  มีจุดควบคุม 4 จุด และสุดท้ายรูปที่ 4.4 เป็นฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=4$  ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$  มีจุดควบคุม 5 จุด

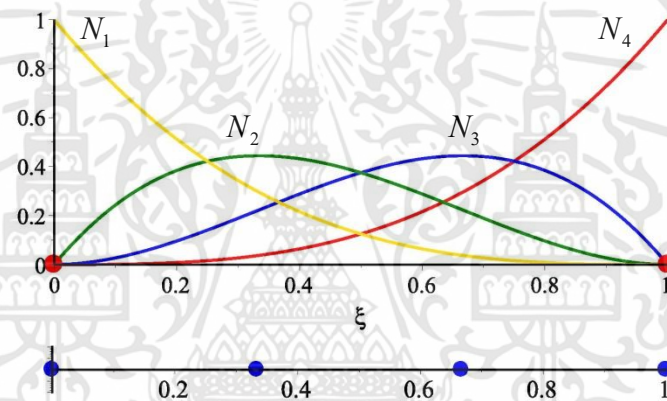
จากฟังก์ชันฐานที่ได้ นำไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณที่แสดงในบทที่ 3 จะได้เวกเตอร์การเคลื่อนตัวของจุดควบคุม  $\mathbf{d}$  จากนั้นนำระยะแอนตัวที่ได้ไปเขียนเส้นโค้งดังที่นำเสนอไว้ในบทที่ 2 จะได้รูปร่างของคานที่มีการเสียรูปแล้ว และสามารถวิเคราะห์ผลทดสอบในแต่ละกรณี ได้ดังต่อไปนี้



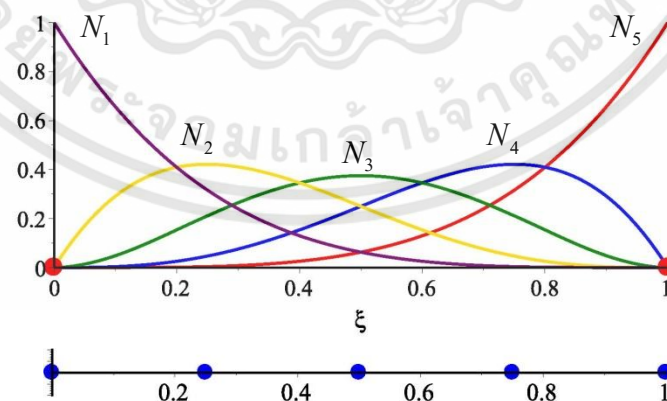
รูปที่ 4.1 ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=1$  ที่สร้างจากน็ทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 1, 1\}$  ซึ่งแสดงน็ทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ●



รูปที่ 4.2 ฟังก์ชันฐานตริกกรี  $p=2$  ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$  ซึ่งแสดงน็อทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ●



รูปที่ 4.3 ฟังก์ชันฐานตริกกรี  $p=3$  ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}$  ซึ่งแสดงน็อทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ●



รูปที่ 4.4 ฟังก์ชันฐานตริกกรี  $p=4$  ที่สร้างจากน็อทเวกเตอร์  $\Xi = \{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$  ซึ่งแสดงน็อทด้วย ● และแสดงจุดควบคุมด้วย ●

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.1 คานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคาน

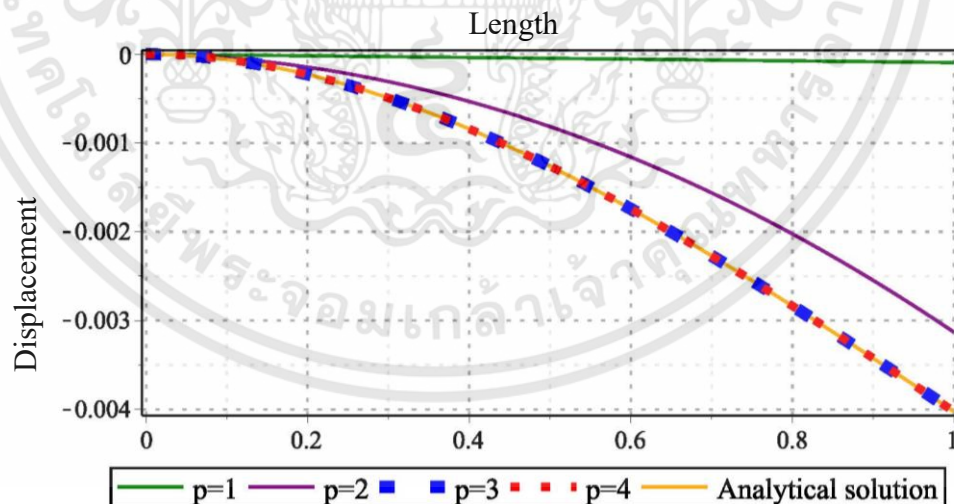
ในกรณีแรก คือ คานยื่น ซึ่งจะพิจารณาระยะแอนตัวที่ปลายคานเท่านั้น ค่าระยะแอนตัวที่ปลายคานที่คำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ เป็นดังนี้

$$u = \frac{FL^3}{3EI} + \frac{FL}{\alpha GA} \quad (4.1)$$

ประยุกต์ใช้การคำนวณจากบทที่ 3 และการเขียนเส้นโค้งจากบทที่ 2 จะได้ผลลัพธ์ของระยะแอนตัวที่ปลายคานยื่นของการทดสอบเชิงตัวเลขและการทดสอบแบบใช้งานจริง ดังแสดงในตารางที่ 4.1 และตารางที่ 4.2 ตามลำดับ และสามารถพล็อตได้ดังแสดงในรูปที่ 4.5 และรูปที่ 4.6 ตามลำดับ

ตารางที่ 4.1 ระยะแอนตัวที่ปลายคานของคานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบเชิงตัวเลข

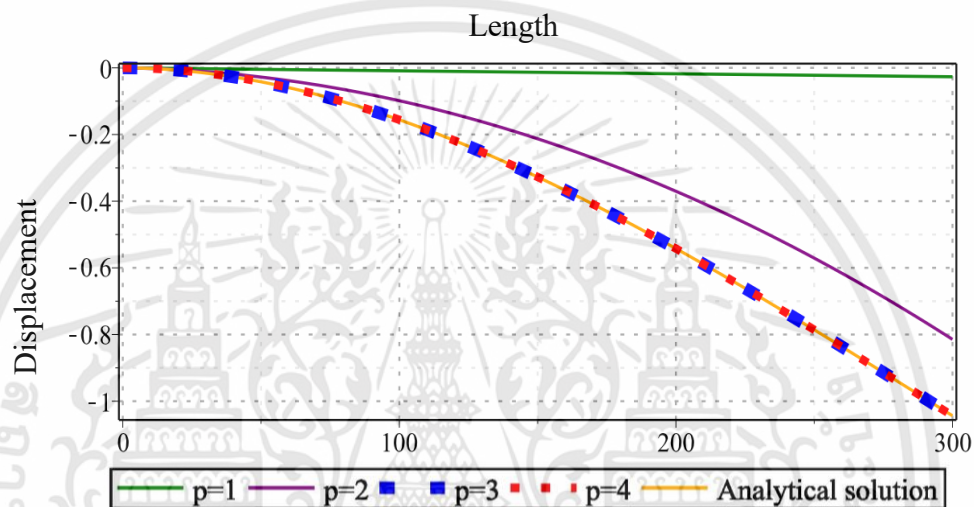
ดีกรี	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
ระยะแอนตัวที่ปลายคาน	0.000094	0.003131	0.004024	0.004024
อัตราส่วนผลลัพธ์เชิงตัวเลขจากการทดสอบต่อผลลัพธ์จากทฤษฎี	0.023	0.778	1.000	1.000



รูปที่ 4.5 ระยะแอนตัวที่ปลายคานของคานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบเชิงตัวเลข

ตารางที่ 4.2 ระยะแอนตัวที่ปลายคานของคานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง

ดีกรี	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
ระยะแอนตัวที่ปลายคาน	0.032447	0.815815	1.043657	1.043657
อัตราส่วนผลลัพธ์จากการทดสอบแบบประยุกต์ต่อผลลัพธ์จากทฤษฎี	0.031	0.781	1.000	1.000



รูปที่ 4.6 ระยะแอนตัวที่ปลายคานของคานยื่นที่มีแรงกระทำแบบจุดที่ปลายคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง

จากผลการทดสอบเชิงตัวเลขและการทดสอบแบบใช้งานจริง จะเห็นได้ว่าคานยื่นที่ใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=1$  จะได้ผลลัพธ์ที่ต่ำมากๆ เมื่อเพิ่มดีกรีเป็น  $p=2$  ระยะแอนตัวที่ได้จะมีค่าลู่เข้าสู่ผลลัพธ์จากทางทฤษฎีมากขึ้น และเมื่อใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=3$  ขึ้นไป จะได้ระยะแอนตัวที่เท่ากับผลลัพธ์จากทางทฤษฎี

## 4.2 คานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคาน

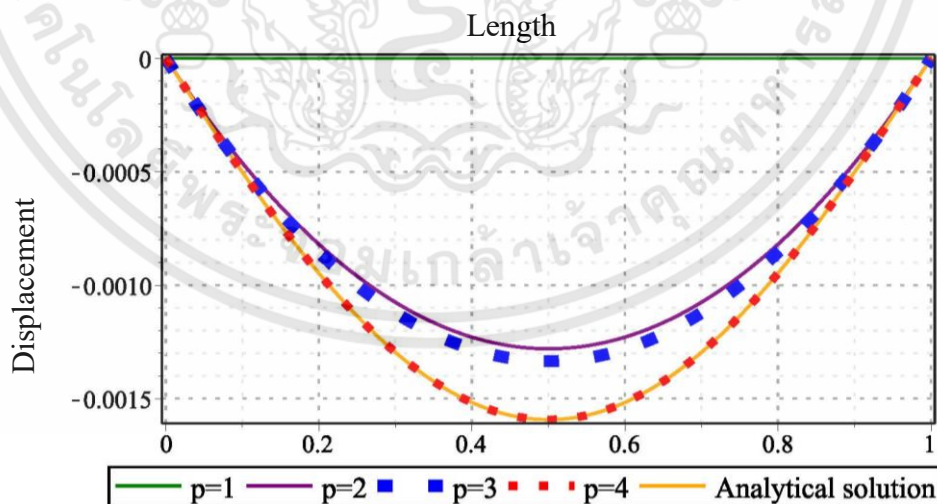
สำหรับคานช่วงเดียวธรรมดาจะพิจารณาระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานเท่านั้น ซึ่งค่าระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานสามารถคำนวณด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ ได้ดังนี้

$$u = \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{qL^2}{8\alpha GA} \quad (5.1)$$

ประยุกต์ใช้การคำนวณจากบทที่ 3 และการเขียนเส้นโค้งจากบทที่ 2 เช่นเดียวกับกรณีของคานยื่น จะได้ผลลัพธ์ของระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานของการทดสอบเชิงตัวเลขและการทดสอบแบบใช้งานจริง ดังแสดงในตารางที่ 4.3 และตารางที่ 4.4 ตามลำดับ และสามารถพล็อตได้ดังแสดงในรูปที่ 4.7 และรูปที่ 4.8 ตามลำดับ

ตารางที่ 4.3 ระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบเชิงตัวเลข

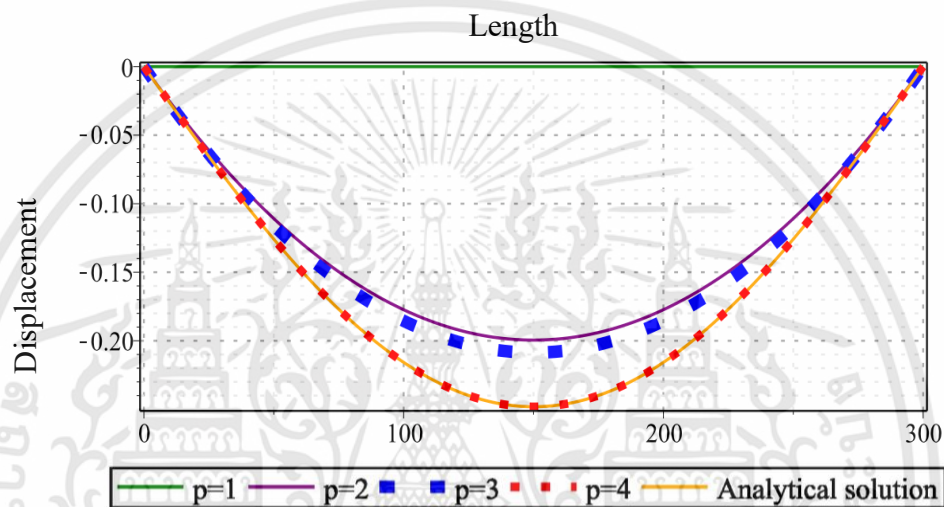
ตีกี	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
ระยะแอนตัวที่ปลายคาน	0.000000	0.001279	0.001334	0.001592
อัตราส่วนผลลัพธ์เชิงตัวเลขจากการทดสอบต่อผลลัพธ์จากทฤษฎี	0.000	0.778	0.822	1.000



รูปที่ 4.7 ระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบเชิงตัวเลข

ตารางที่ 4.4 ระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง

ดีกรี	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$
ระยะแอนตัวที่ปลายคาน	0.000000	0.199786	0.208852	0.248114
อัตราส่วนผลลัพธ์เชิงตัวเลขจากการทดสอบต่อผลลัพธ์จากทฤษฎี	0.000	0.805	0.841	1.000



รูปที่ 4.8 ระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานของคานช่วงเดียวธรรมดาที่มีแรงกระจายกระทำตลอดความยาวคานของการทดสอบแบบใช้งานจริง

จากผลการทดสอบเชิงตัวเลขและการทดสอบแบบใช้งานจริง จะเห็นได้ว่าคานช่วงเดียวธรรมดาที่ใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=1$  จะได้ผลลัพธ์เท่ากับศูนย์ สาเหตุอันเนื่องมาจากจำนวนจุดควบคุม 2 จุดนั้น อยู่ที่ตำแหน่งฐานรองรับของคาน ส่งผลให้ไม่มีจุดควบคุมที่จะแสดงผลของระยะแอนตัวที่กึ่งกลางคานได้ แต่เมื่อเพิ่มดีกรีของฟังก์ชันฐานเป็น  $p=2$  และ  $p=3$  ระยะแอนตัวที่ได้ก็เข้าสู่ผลลัพธ์จากทางทฤษฎีเช่นเดียวกับกรณีของคานอื่น จนกระทั่งเมื่อใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p=4$  เป็นต้นไป จะได้ระยะแอนตัวเท่ากับผลลัพธ์จากทางทฤษฎี

## บทที่ 5

### สรุปผลการศึกษา

ในงานวิจัยนี้ได้นำเทคนิค Isogeometric ที่มีฟังก์ชันเนิร์บส์เป็นฟังก์ชันฐานมาใช้ในการวิเคราะห์คานแบบทโทโมเซนโก ซึ่งฟังก์ชันเนิร์บส์มีข้อดี คือ มีความต่อเนื่องของสมการสูง ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการวิเคราะห์ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลลัพธ์จากทฤษฎี จะเห็นได้ว่าในกรณีของคานยื่น จะพบปัญหาเมื่อใช้ฟังก์ชันฐานที่มีดีกรี  $p < 3$  และจะได้ผลลัพธ์ที่เท่ากับทฤษฎีก็ต่อเมื่อใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p \geq 3$  เป็นต้นไป แต่ในกรณีของคานช่วงเดียวธรรมดา จะพบปัญหาเมื่อใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p < 4$  และจะได้ผลลัพธ์ที่เท่ากับทฤษฎีก็ต่อเมื่อใช้ฟังก์ชันฐานดีกรี  $p \geq 4$  เป็นต้นไป สำหรับทั้งสองกรณีเมื่อใช้ฟังก์ชันฐานที่มีดีกรีสูงขึ้น จะทำให้อัตราการลู่เข้ามีแนวโน้มที่ดีขึ้นเช่นกัน และจะสังเกตเห็นได้ว่าเมื่อดีกรีของฟังก์ชันฐานเท่ากับดีกรีของฟังก์ชันของผลลัพธ์จากทฤษฎี จะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้นั้นถูกต้องแม่นยำ กล่าวคือเท่ากับผลลัพธ์จากทฤษฎี และจุดสังเกตอีกอย่างหนึ่งที่ได้เห็นได้อย่างชัดเจน คือ หากพบปัญหา Shear locking การเพิ่มดีกรีของฟังก์ชันเนิร์บส์อาจช่วยให้ปัญหา Shear locking บรรเทาลงได้ อย่างไรก็ตามงานวิจัยนี้เป็นเพียงการศึกษาขั้นต้น ยังคงต้องมีการศึกษาในรายละเอียดเชิงลึกเพิ่มเติม ซึ่งอาจจะมีการใช้เทคนิคเพิ่มเติมเพื่อที่จะแก้ปัญหา Shear locking ได้ดียิ่งขึ้น

## เอกสารอ้างอิง

- [1] Fehmi Cirak. **Finite element formulation for beams** handout 2. University of Cambridge.
- [2] Manfred Bischoff. **Advanced Finite Elements**. Technical University of Munich. 2002.
- [3] Gangan Prathap. **Finite element analysis as computation**. APJ Abdul Kalam Technological University. 2014.
- [4] Roland Wüchner, Michael Breitenberger and Anna Bauer. Isogeometric structural analysis and design. Technical University of Munich. 2016.
- [5] J. Austin Cottrell, Thomas J. R. Hughes and Yuri Bazilevs. **Isogeometric analysis toward integration of CAD and FEA**. WILEY. 2009.
- [6] Xinkang Li, Jifa Zhang and Yao Zheng. “NURBS-Based isogeometric analysis of beams and plates using high order shear deformation theory” **Mathematical Problems in Engineering**. Volume 2013, Article ID 159027.
- [7] Sangamesh Gondegaon and Hari K. Voruganti. “Static structural and modal analysis using isogeometric analysis” **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**. Vol. 46, No. 4, 2016. pp. 36-75.
- [8] J. Kiendl, F. Auricchio, T.J.R. Hughes and A. Reali. “Single-variable formulations and isogeometric discretizations for shear deformable beams” **Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering**. Volume 284, 1 February 2015. pp. 988-1004.
- [9] Piaras Kelly. **Solid Mechanics - Part I**. The University of Auckland. 2013.
- [10] Timoshenko, S.P. and Goodier .JN. **Theory of Elasticity**. 3rd edition. McGraw Hill. 1970.

## ภาคผนวก ก

# ชุดคำสั่งที่ใช้กับซอฟต์แวร์ช่วยคำนวณทางคณิตศาสตร์

### ก.1 Procedure

```
restart :  
with(LinearAlgebra) :  
with(linalg) :  
with(CurveFitting) :  
with(plots) :  
interface(rtablesize = 100) :  
Digits := 30 :
```

#### # Modify master for displacement boundary conditions

```
ModifyMasterStiffForDBC := proc(pdof, K)
```

```
local i, j, k, nk, np, Kmod;
```

```
nk := coldim(K);
```

```
np := vectdim(pdof);
```

```
Kmod := Matrix(nk, nk, K);
```

```
for k from 1 to np do
```

```
  i := pdof[k];
```

```
  for j from 1 to nk do
```

```
    Kmod[i, j] := 0; Kmod[j, i] := 0;
```

```
  od;
```

```
  Kmod[i, i] := 1;
```

```
  od;
```

```
RETURN(eval(Kmod)) :
```

```
end:
```

#### # Modify node forces for displacement boundary conditions

```
ModifyNodeForcesForDBC := proc(pdof, f)
```

```
local i, k, np, fmod;
```

```
np := vectdim(pdof);
```

```
fmod := f;
```

```
for k from 1 to np do
```

```
  i := pdof[k];
```

```
  fmod[i] := 0;
```

```
od;
```

```
RETURN(eval(fmod)) :
```

```
end:
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ก.2 Input data

### #NURBS Data

```

n_CP := 6;
p_Degree := 5;
n_knot := n_CP + p_Degree + 1;
L_Beam := 1;

```

### #Beam Data

```

beamcase := 2;

```

```

alpha :=  $\frac{5}{6}$ ;

```

```

E := 1000;

```

```

G :=  $\frac{E}{2}$ ;

```

```

A := 0.1;

```

```

MI :=  $\frac{0.1^3}{12}$ ;

```

```

w_Load := -0.01;

```

```

P_Load := -0.001;

```

```

if beamcase = 1 then

```

```

loadcase := 2 :

```

```

supportcase := 2 :

```

```

elif beamcase = 2 then

```

```

loadcase := 2 :

```

```

supportcase := 1 :

```

```

elif beamcase = 3 then

```

```

loadcase := 1 :

```

```

supportcase := 2 :

```

```

elif beamcase = 4 then

```

```

loadcase := 1 :

```

```

supportcase := 1 :

```

```

end if;

```

### n.3 Basis function

#### #Define Control Point

```

for  $i$  from 2 to  $n\_CP - 1$  do
for  $j$  from 1 to  $n\_CP - 2$  do
 $P[i] := \left[ j \cdot \frac{L\_Beam}{n\_CP - 1}, 0 \right];$ 
 $Q[i] := Vector\left(2, \left[ j \cdot \frac{L\_Beam}{n\_CP - 1}, 0 \right]\right);$ 
 $i := i + 1;$ 
end do;
end do;

 $CP := vector(n\_CP, [[0, 0], seq(P[i], i=2..n\_CP - 1), [L\_Beam, 0]]);$ 
 $CP\_3 := [[0, 0], seq(P[i], i=2..n\_CP - 1), [L\_Beam, 0]];$ 
 $CP\_2 := vector\left(n\_CP, \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right], seq(Q[i], i=2..n\_CP - 1), \left[ \begin{array}{c} L\_Beam \\ 0 \end{array} \right] \right)$ 

```

#### #Define Knot Vector

```

for  $i$  from  $p\_Degree + 2$  to  $n\_knot - p\_Degree - 1$  do
for  $j$  from 1 to  $n\_CP$  do
 $C[i] := \frac{j}{n\_knot - 2 \cdot (p\_Degree + 1) + 1};$ 
 $i := i + 1;$ 
end do;
end do;

 $KV := vector\left(n\_knot, \left[ seq(0 \cdot i, i=1..p\_Degree + 1), seq(C[i], i=p\_Degree + 2..n\_knot - p\_Degree - 1), seq\left(\frac{1 \cdot i}{i}, i=1..p\_Degree + 1\right) \right]\right);$ 
 $k\_v := \left[ seq(0 \cdot i, i=1..p\_Degree + 1), seq(C[i], i=p\_Degree + 2..n\_knot - p\_Degree - 1), seq\left(\frac{1 \cdot i}{i}, i=1..p\_Degree + 1\right) \right]$ 

for  $i$  from 1 to  $n\_CP$  do
for  $j$  from 1 to  $n\_CP$  do
 $K[i] := [seq(KV[i], i=j..p\_Degree + j + 1)];$ 
 $i := i + 1;$ 
end do;
end do;

 $k := vector(n\_CP, [seq(K[i], i=1..n\_CP)])$ 

```

### #Define Basis Function

$b := \{seq(BSpline(p\_Degree + 1, xi, knots = k[i]), i = 1 .. n\_CP)\} :$

**if**  $n\_CP = 6$  **then**

$$N[1] := -\xi^5 + 5\xi^4 - 10\xi^3 + 10\xi^2 - 5\xi + 1;$$

$$N[2] := 5\xi^5 - 20\xi^4 + 30\xi^3 - 20\xi^2 + 5\xi;$$

$$N[3] := -10\xi^5 + 30\xi^4 - 30\xi^3 + 10\xi^2;$$

$$N[4] := 10\xi^5 - 20\xi^4 + 10\xi^3;$$

$$N[5] := -5\xi^5 + 5\xi^4;$$

$$N[6] := \xi^5;$$

**elif**  $n\_CP = 5$  **then**

$$N[1] := \xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2 - 4\xi + 1;$$

$$N[2] := -4\xi^4 + 12\xi^3 - 12\xi^2 + 4\xi;$$

$$N[3] := 6\xi^4 - 12\xi^3 + 6\xi^2;$$

$$N[4] := -4\xi^4 + 4\xi^3;$$

$$N[5] := \xi^4;$$

**elif**  $n\_CP = 4$  **then**

$$N[1] := -\xi^3 + 3\xi^2 - 3\xi + 1;$$

$$N[2] := 3\xi^3 - 6\xi^2 + 3\xi;$$

$$N[3] := -3\xi^3 + 3\xi^2;$$

$$N[4] := \xi^3;$$

**elif**  $n\_CP = 3$  **then**

$$N[1] := \xi^2 - 2\xi + 1;$$

$$N[2] := -2\xi^2 + 2\xi;$$

$$N[3] := \xi^2;$$

**elif**  $n\_CP = 2$  **then**

$$N[1] := -\xi + 1;$$

$$N[2] := \xi;$$

**end if;**

$plot(CP, style = point, color = "Red", symbol = Circle, symbolsize = 25);$

$plot(b, xi = 0 .. 0.9999);$

## ก.4 Mapping

### #Map from Physical space to Parameter space

$$x := \sum_{m=1}^{n\_CP} N[m] \cdot CP\_2[m];$$

$$dx\_d\xi := \frac{d}{d\xi} x[1];$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ก.5 Stiffness matrix

### #B – Matrix

```

interface(rtablesize = 20) :
  for c from 1 to n_CP*2 do
    F[c] := 0 :
    
$$F[c + 1] := \frac{1}{dx\_d\xi} \frac{d}{dxi} N \left[ \frac{c}{2} - \frac{(c \bmod 2)}{2} + 1 \right] ;$$

    c := c + 1
  end do:

  for b from 1 to n_CP*2 do
    
$$Q[b] := \frac{1}{dx\_d\xi} \frac{d}{dxi} N \left[ \frac{b}{2} - \frac{(b \bmod 2)}{2} + 1 \right] ;$$

    
$$Q[b + 1] := N \left[ \frac{b}{2} - \frac{(b \bmod 2)}{2} + 1 \right] ;$$

    b := b + 1
  end do:

  B := Matrix([[seq(Q[b], b = 1 ..n_CP*2)], [seq(F[c], c = 1 ..n_CP*2)]]);

  C := 
$$\begin{bmatrix} \alpha \cdot G \cdot A & 0 \\ 0 & E \cdot MI \end{bmatrix} ;$$

  Ke := dx_d\xi * Multiply(Multiply(Transpose(B), C), B) :
  K := map(int, Ke, xi = 0 ..1);

```

## ก.6 Force vector

### #Distribute load

```

if loadcase = 2 then
  for d from 1 to n_CP*2 do
    
$$J[d] := N \left[ \frac{d}{2} - \frac{(d \bmod 2)}{2} + 1 \right] ;$$

    J[d + 1] := 0 :
    d := d + 1
  end do:
  f := w_Load * Vector(n_Cp*2, [seq(J[d], d = 1 ..n_CP*2)]);
  F := map(int, f, xi = 0 ..1)

```

### #Point load at free end

```

elif loadcase = 1 then
  node := 2 * n_CP - 1 :
  for z from 1 to n_CP*2 do
    if z = node then
      T[z] := P_Load :
    else
      T[z] := 0 :
    end if:
  end do:
  F := Vector(n_CP*2, [seq(T[z], z = 1 ..n_CP*2)]);

end if;

```

## ก.7 Modify matrix

### **#...Simple support**

**if** *supportcase* = 1 **then**

*Kmod* := *ModifyMasterStiffForDBC*([1, 2·*n\_CP* - 1], *K*);

*Fmod* := *ModifyNodeForcesForDBC*([1, 2·*n\_CP* - 1], *F*);

### **#...Cantilever**

**elif** *supportcase* = 2 **then**

*Kmod* := *ModifyMasterStiffForDBC*([1, 2], *K*);

*Fmod* := *ModifyNodeForcesForDBC*([1, 2], *F*);

**end if**;

## ก.8 Solve

*u* := *Multiply*(*MatrixInverse*(*Kmod*), *Fmod*)



## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล นายภมร ฐานวัฒน์ประเสริฐ  
วัน เดือน ปีเกิด 7 พฤษภาคม 2537 ที่กรุงเทพมหานคร  
ที่อยู่ 148/2 หมู่ที่ 1 ตำบลแหลมทอง อำเภอแหลมทอง จังหวัดตราด 23120  
ประวัติการศึกษา 2559 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมโยธา (เกียรตินิยมอันดับ 1)  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ความชำนาญเฉพาะด้าน 1.) วิธีการไฟไนท์อีลิเมนต์  
2.) การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์  
ประสบการณ์การทำงานและผลงานวิจัย  
พ.ศ.2558 งานวิจัยเรื่อง การศึกษาค่าความสัมพันธ์ระหว่างค่าความเร่งสูงสุดบนผิวดิน  
กับความรุนแรงของแผ่นดินไหว และระยะทางจากจุดกำเนิดแผ่นดินไหว  
ภายในประเทศไทยและประเทศข้างเคียง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้