ปัญหาแบบดีรีเคลและปัญหาแบบนิวแมนในโดเมนแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก สำหรับสมการลาปลาซ

The Dirichlet Problem and The Neumann Problem In Rectangular Domain For Laplace Equation

กตัญญู เทพเทศ
จักรพันธ์ จิรพญากุล
บุญยวีร์ เฉลิมยศพงศ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชา คณิตศาสตร์ คณะ วิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ปัญหาแบบดีรีเคลและปัญหาแบบนิวแมนในโดเมนแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก สำหรับสมการลาปลาซ

The Dirichlet Problem and The Neumann Problem In Rectangular Domain For Laplace Equation

T149018

กตัญญู เทพเทศ
จักรพันธ์ จิรพญากุล
บุญยวีร์ เฉลิมยศพงศ์

เลขหมู่ 149018
เลขทะเบียน
วัน,เดือน,ปี 27 ส.ค. 2560

b.18879435
i.

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชา คณิตศาสตร์ คณะ วิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The Dirichlet Problem and The Neumann Problem In Rectangular Domain For Laplace Equation

KATANYOO THAPTHAS
JAKKAPAN JIRAPAYAKUL
BUNYAWEE CHALOEMYOTPHONG

SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
IN APPLIED MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2015

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาพิเศษ ปัญหาแบบดีรีเคลและปัญหาแบบนิวแมนในโดเมนแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก สำหรับสมการลาปลาซ

The Dirichlet Problem and The Neumann Problem In Rectangular Domain For Laplace Equation

ชื่อนักศึกษา นาย กตัญญู เทพเทศ รหัสนักศึกษา 55050001
นาย จักรพันธ์ จิรพญากุล รหัสนักศึกษา 55050027
นางสาว บุญยวีร์ เฉลิมยศพงศ์ รหัสนักศึกษา 55050085

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2558

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร. ใจปอง เกษมสุวรรณ์ ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร. นพรัตน์ โพธิ์ชัย กรรมการ	
รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

ลิขสิทธิ์ของคณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาพิเศษ ปัญหาแบบดีรีเคลและปัญหาแบบนิวแมนในโดเมนแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากสำหรับสมการลาปลาซ

The Dirichlet Problem and The Neumann Problem In Rectangular Domain For Laplace Equation

ชื่อนักศึกษา นาย กตัญญู เทพเทศ รหัสนักศึกษา 55050001
นาย จักรพันธ์ จิรพญากุล รหัสนักศึกษา 55050027
นางสาว บุญยวีร์ เฉลิมยศพงศ์ รหัสนักศึกษา 55050085

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิตสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2558

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร. ภัคคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเกิดจากการเปลี่ยนปัญหาทางฟิสิกส์เป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ภายใต้เงื่อนไขที่แน่นอน การหาผลเฉลยของปัญหาเหล่านี้เรียกว่า การหาผลเฉลยของปัญหาที่มีขอบเขต ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจการหาผลเฉลยของปัญหาแบบดีรีเคลและแบบนิวแมนของสมการลาปลาซ โดยมีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกัน และเขียนเป็นโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยแบบดีรีเคลและแบบนิวแมนของสมการลาปลาซ

คำสำคัญ ปัญหาทางฟิสิกส์, ปัญหาแบบดีรีเคล, ปัญหาแบบนิวแมน, สมการลาปลาซ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Title	The Dirichlet Problem and The Neumann Problem In Rectangular Domain For Laplace Equation
Students	Mr. Katanyoo Thapthas Student ID 55050001 Mr. Jakkapan Jirapayakul Student ID 55050027 Miss. Bunyawee Chaloemyotphong Student ID 55050085
Degree	Bachelor of Science
Department	Applied Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2015
Advisor	Assoc.Prof.Dr.Pakkinee Chitsakul

Abstract

Partial Differential Equation change The Physics Problem is Mathematical Model for exact condition. The solution of these problem is the solution of condition. In this research, Researchers are interested in finding a solution of The Dirichlet Problem and The Neumann Problem of Laplace Equation by different boundary condition and write a program to find solution of The Dirichlet Problem and The Neumann Problem of Laplace Equation.

Keyword The Physics Problem, The Dirichlet Problem, The Neumann Problem, Laplace Equation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้ได้รับความอนุเคราะห์ของบุคคลหลายท่าน ซึ่งไม่อาจจะนำมากล่าวได้ทั้งหมด ซึ่งผู้มีพระคุณท่านแรกที่ผู้วิจัยขอขอบพระคุณคือ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล อาจารย์ที่ปรึกษาที่ให้ความรู้ คำปรึกษาเกี่ยวกับงานวิจัย คำแนะนำตรวจทานและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆด้วย ความเอาใจใส่ทุกขั้นตอน รวมถึงให้คำแนะนำอื่น ๆ เพื่อให้การเขียนงานวิจัยนี้สมบูรณ์ที่สุด นอกจากนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณเพื่อนๆ ที่ช่วยในการสืบค้นข้อมูลแลกเปลี่ยนความรู้ความคิด และให้กำลังใจในการศึกษาค้นคว้าตลอดมา

ขอขอบพระคุณคุณพ่อ และ คุณแม่ ที่อยู่เบื้องหลังในความสำเร็จที่ได้ให้คามช่วยเหลือสนับสนุนและให้กำลังใจตลอดมา

นาย กตัญญู เทพเทศ

นาย จักรพันธ์ จิรพญากุล

นางสาว บุญยวีร์ เฉลิมยศพงศ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หัวข้อเรื่อง **หน้า**

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ข

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ ..... ค

กิตติกรรมประกาศ ..... ง

สารบัญ ..... จ

สารบัญตาราง ..... ช

สารบัญรูป ..... ฌ

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา 1

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหา 1

1.3 ขอบเขตของการศึกษา 1

1.4 ประโยชน์ของปัญหา 2

1.5 แผนการดำเนินการ 2

บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 3

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) 3

2.2 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกับปัญหาทางฟิสิกส์ 5

2.3 สมการความร้อน (Heat Equation) 6

2.4 สมการลาปลาซ (Laplace's Equation) 10

2.5 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference) 12

2.6 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของปัญหาดีรีเคล

(Finite Difference of Dirichlet Problem) 13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หัวข้อเรื่อง **หน้า**

2.7 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของปัญหานิวแมน

(Finite Difference of Neumann Problem) 15

บทที่ 3 การหาผลเฉลยแบบนิวแมน 17

3.1 การหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ 21

3.1.1 ปัญหาแบบดีริคเลตสำหรับสมการลาปลาซ 23

3.1.2 ปัญหาแบบนิวแมนสำหรับสมการลาปลาซ 47

บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล 79

บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ 89

เอกสารอ้างอิง 106

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1.1 แผนการดำเนินงาน	2
3.1 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหาดีริคเลต	74
3.2 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหาดีริคเลต (2)	75
3.3 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหานิวแมน	76
3.4 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหานิวแมน (2)	77
3.5 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหานิวแมน (3)	78
4.1 ตัวอย่างแบบดีริคเลต 3 ตัวอย่าง	80
4.2 ตัวอย่างแบบดีริคเลต 3 ตัวอย่าง (2)	81
4.3 ตัวอย่างแบบดีริคเลต 1 ตัวอย่าง และตัวอย่างแบบนิวแมน 2 ตัวอย่าง	82
4.4 ตัวอย่างแบบนิวแมน 3 ตัวอย่าง	83
4.5 ตัวอย่างแบบนิวแมน 3 ตัวอย่าง (2)	84
5.1 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 1	90
5.2 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 2	91
5.3 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 3	92
5.4 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 4	93
5.5 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 5	94
5.6 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 6	95
5.7 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 7	96
5.8 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 8	97
5.9 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 9	98

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

5.10 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 10 99

5.11 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 11 100

5.12 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 12 101

5.13 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 13 102

5.14 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 14 103

5.15 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 15 104

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 รูปสมการความร้อนในแท่งโลหะผอม ๆ ยาว ๆ	6
2.2 ขอบด้านข้างของแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นฉนวน	10
2.3 การแบ่งบริเวณบนระนาบ xy	12
3.1 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 1	17
3.2 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 2	18
3.3 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 1	19
3.4 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 2	20
3.5 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 3	23
3.6 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 4	33
3.7 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 5	37
3.8 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 6	41
3.9 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 7	45
3.10 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 3	47
3.11 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 4	55
3.12 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 5	57
3.13 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 6	62
3.14 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 7	64
3.15 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 8	70
3.16 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 9	72
4.1 โปรแกรม สมการลาปลาซ (Laplace Equation)	85

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

4.2 โปรแกรม Input a and Input b 85

4.3 โปรแกรมใส่เงื่อนไขต่าง ๆ ของสมการลาปลาซ (Laplace Equation)..... 86

4.4 โปรแกรมใส่เงื่อนไขต่าง ๆ ของสมการลาปลาซ (Laplace Equation) โดยค่าคงที่... 86

4.5 โปรแกรมใส่ค่าความผิดพลาด (Error) 87

4.6 โปรแกรมแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) 87

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหา

สมการลาปลาซ (Laplace Equation) ในระบบพิกัดฉาก คือ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองของ $\varphi(x,y)$ ในรูปแบบ

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0$$

ซึ่งเป็นสมการที่มีความสำคัญในการศึกษาเกี่ยวกับศักย์ไฟฟ้า (Electrostatic Potential) แรงโน้มถ่วง (Gravitational) และความเร็วในกลศาสตร์ของไหล (Velocity In Fluid Mechanics)

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาปัญหาแบบดีรีเคลและแบบนิวแมนของสมการลาปลาซในระบบพิกัดฉากซึ่งเป็นการหา $\varphi(x,y)$ ที่เป็นไปตาม (1.1) ภายใต้เงื่อนไขใน (1.2) หรือ (1.3)

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0;0<x<a,0<y<b \tag{1.1}$$

$$\varphi_{y}(x,0)=F(x),\varphi_{y}(x,\mathrm{b})=f(x);0\le x\le a \tag{1.2}$$

$$\varphi_{x}(0,y)=G(y),\varphi_{x}(a,y)=g(y);0\le y\le b \tag{1.3}$$

เมื่อ $F(x),f(x),G(y),g(y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้และตัวห้อย x , y แทนอนุพันธ์ย่อย

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหา

เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยปัญหาแบบนิวแมนของสมการปลาซในระบบพิกัดฉาก

1.3 ขอบเขตของการศึกษา

1.3.1 ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลข

1.3.2 ศึกษาปัญหาแบบนิวแมนของสมการลาปลาซ

1.3.3 ศึกษาและพัฒนาโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยปัญหาแบบนิวแมน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ประโยชน์ของปัญหา

1.4.1 ได้โปรแกรมเพื่อหาคำตอบของผลเฉลยปัญหาแบบดีรีเคลและแบบนิวแมนในระบบพิกัดฉากได้

1.4.2 ได้โปรแกรมเพื่อเปรียบเทียบความต่างของผลเฉลยปัญหาแบบดีรีเคลและแบบนิวแมนในระบบพิกัดฉากเมื่อเงื่อนไขขอบเขตต่างกันหรือขอบเขตสี่เหลี่ยมขนาดต่างกัน

1.5 แผนการดำเนินการ

หัวข้อเรื่อง	เดือน											
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย	พ.ค.	มิ.ย	ก.ค.
วางแผนการวิจัย	/											
บทที่ 1 บทนำ		/										
บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง			/	/								
บทที่ 3 การหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน				/	/	/	/					
บทที่ 4 ผลการวิจัยและการอภิปรายผล							/	/				
บทที่ 5 สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ								/				
ศึกษาและนำเสนอ					/				/			
ทำรูปเล่มหน้าปก					/					/		

ตารางที่ 1 แผนการดำเนินการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ความรู้พื้นฐานและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation)

ฟังก์ชันหลายตัวแปร (Function of Several Variables) คือ ฟังก์ชันซึ่งตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้นมากกว่าหนึ่งตัว

เช่น ให้ x, y, z เป็นตัวแปรต้น และให้ u เป็นตัวแปรตาม

ดังนั้น $u = u(x, y)$ เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร

$u = u(x, y, z)$ เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร

$u = u(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร เพราะ ตัวแปรต้นมีตัวเดียวนั่นคือ x

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) คือ สมการที่ประกอบด้วยฟังก์ชันหลายตัวแปร และอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันนั้น

เช่น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$\frac{\partial u}{\partial x} + x = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เพราะ ไม่เป็นฟังก์ชันหลายตัวแปร

อันดับ (Order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ อันดับของอนุพันธ์ย่อยสูงสุดที่ปรากฏ

เช่น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสาม

ดีกรี (Degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือ เลขชี้กำลังของอนุพันธ์ย่อยที่มีอันดับสูงสุด

เช่น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองดีกรีหนึ่ง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย จะเรียกว่า **สมการเชิงเส้น (Linear Equation)** ถ้าตัวแปรตามและอนุพันธ์ย่อยอันดับต่างๆ ของตัวแปรตามที่ปรากฏมีดีกรีหนึ่ง และไม่มีการคูณกันระหว่างตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตาม

เช่น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ เป็นสมการเชิงเส้น

$(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})^2+(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})^2=0$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้น เพราะ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมีดีกรีสอง

$u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้น เพราะ มีการคูณกันระหว่างตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตาม

การแบ่งประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Classification of Equation)

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธ์ย่อยอันดับที่สอง

คือ $$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0$$

เมื่อ A, B, C, D, E และ F เป็นค่าคงที่ สามารถแบ่งออกเป็น 3 แบบ

นั่นคือ ถ้า $B^2-4AC>0$ แล้วจะเป็น Hyperbolic

ถ้า $B^2-4AC=0$ แล้วจะเป็น Parabolic

ถ้า $B^2-4AC<0$ แล้วจะเป็น Elliptic

ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะต้องพิจารณาว่าเป็นสมการรูปแบบใด Hyperbolic, Parabolic และ Elliptic ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยจะศึกษาเฉพาะปัญหาแบบ Elliptic

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของตัวแปร x และ y คือ ฟังก์ชัน $u=u(x,y)$ ใด ๆ ที่เป็นไปตามสมการนั้น ๆ ผลเฉลยสามารถมีมากกว่า 1 ผลเฉลยได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่า $u_{xx}-u_{yy}=0$

ผลเฉลยที่หนึ่งคือ $u_1(x,y)=(x+y)^2$

ผลเฉลยที่สองคือ $u_2(x,y)=\cos(x-y)$

วิธีทำ เนื่องจาก $u_1(x,y)=(x+y)^2$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง คือ $\frac{\partial u_1}{\partial x}=2(x+y)$ และ $\frac{\partial u_1}{\partial y}=2(x+y)$

อนุพันธ์อันดับที่สอง คือ $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=2$ และ $\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=2$

เนื่องจาก $u_{xx}-u_{yy}=0$ ดังนั้น $2-2=0$ เป็นจริง

เนื่องจาก $u_2(x,y)=\cos(x-y)$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง คือ $\frac{\partial u_2}{\partial x}=-\sin(x-y)$ และ $\frac{\partial u_2}{\partial y}=\sin(x-y)$

อนุพันธ์อันดับที่สอง คือ $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=-\cos(x-y)$ และ $\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=-\cos(x-y)$

เนื่องจาก $u_{xx}-u_{yy}=0$ ดังนั้น $-\cos(x-y)-[-\cos(x-y)]=0$ เป็นจริง

นอกจากนี้ $u_3(x,y)=c_1(x+y)^2+c_2\cos(x-y)$

หรือ รูปแบบทั่วไป $u_3(x,y)=c_1u_1(x,y)+c_2u_2(x,y)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

ถ้า $u_1(x,y)$ และ $u_2(x,y)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่

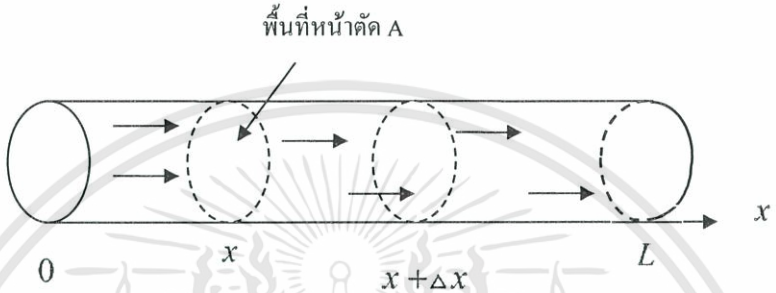
2.2 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกับปัญหาทางฟิสิกส์

ในการศึกษาคณิตศาสตร์ประยุกต์ (Applied Mathematics) พบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะเกิดจากการเปลี่ยนปัญหาทางฟิสิกส์ เป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Formulation) ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดแน่นอน (Certain Given Conditions) การหาผลเฉลยของปัญหาเหล่านี้เรียกว่า การหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขต (Solving a Boundary Value Problem) ซึ่งจะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของปัญหาความร้อน (Heat problem) บางปัญหาโดยใช้ระเบียบวิธีแยกตัวแปรในการหาผลเฉลย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 สมการความร้อน (Heat Equation)

ต้องการหาสมการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายการไหลของความร้อนในแท่งโลหะผอม ๆ ยาว ๆ หรือในเส้นลวด โดยแท่งโลหะยาว L หน่วย มีพื้นที่หน้าตัด A ตารางหน่วย ให้ S ตารางหน่วยเป็นพื้นที่พื้นผิวด้านข้างของแท่งโลหะ วางแท่งโลหะในแนวแกน x ให้ปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะอยู่ที่จุดกำเนิด ดังนั้น $0 \le L \le x$ ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 รูปสมการความร้อนในแท่งโลหะผอม ๆ ยาว ๆ

กำหนดสมมติฐานเกี่ยวกับความร้อนดังนี้

1. การไหลของความร้อนในแท่งโลหะจะไหลไปในทิศทางเดียว คือ ตามแนวแกน x
2. ด้านข้างของแท่งโลหะถูกพันด้วยฉนวนเพื่อความร้อนจะไม่สูญหายไปตามพื้นผิวด้านข้างนี้ได้
3. ไม่มีความร้อนเกิดขึ้นเองภายในแท่งโลหะ
4. แท่งโลหะเป็นสารเนื้อเดียวโดยความหนาแน่น หรือ มวลต่อหน่วยปริมาตร ρ มีค่าคงที่มากกว่าศูนย์
5. ค่าความร้อนจำเพาะ (specific heat) เขียนแทนด้วย γ และค่าการนำความร้อน (thermal conductivity) เขียนแทนด้วย k ของเนื้อสารของโลหะมีค่าคงที่มากกว่าศูนย์

เนื่องจากอุณหภูมิ u มีการเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง x และเวลา t

ดังนั้น อุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง และเวลา หรือ $u = u(x,t)$ โดยอุณหภูมิเป็นไปตามกฎการนำความร้อน ดังนี้

1 ปริมาณความร้อน Q ในแต่ละหน่วยมวล m คือ

$$Q = \gamma m u \tag{2.1}$$

เมื่อ u เป็นอุณหภูมิของแต่ละหน่วยมวล m
γ เป็นความร้อนจำเพาะ

2 การไหลของความร้อนในหนึ่งมิตินั้นจะพิจารณาเป็นสภาวะการไหลสม่ำเสมอของอุณหภูมิ u ซึ่งขึ้นอยู่กับแกน x เพียงอย่างเดียว ณ เวลาใดๆ ดังนั้น $u = u(x,t)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ A เป็นพื้นที่หน้าตัดของพื้นผิว S ของแท่งโลหะ

(ในกรณีนี้ พื้นผิว S อยู่ในแนวแกน x พื้นที่หน้าตัด A ตั้งฉากกับแกน x)

ให้ u_x เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ณ ตำแหน่ง x ใดๆ อัตราความร้อน Q_t ที่ไหลผ่านพื้นที่หน้าตัด A ของพื้นที่พื้นผิว S เป็นสัดส่วนกับ A และ u_x

ให้ Q_t เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของความร้อน ณ เวลา t ใดๆ

โดย $$Q_t \propto Au_x \tag{2.2}$$

ดังนั้น $$Q_t = -\kappa Au_x ; \kappa > 0 \tag{2.3}$$

เมื่อ κ เป็นค่าการนำความร้อนของแท่งโลหะ และเครื่องหมาย – แสดงว่าอุณหภูมิลดลง ตัดแท่งโลหะตามขวางออกเป็นแผ่นบางๆระหว่าง x และ $x+\Delta x$ แล้ว $u(x,t)$ เป็นค่าประมาณอุณหภูมิ ณ แต่ละจุดในช่วงนี้ โดยมวลของแผ่นโลหะกลมบางนี้คือ

$$m = \rho(A\Delta x) \tag{2.4}$$

เนื่องจาก (2.1) และ (2.4)

ดังนั้น $$Q = \gamma\rho A(\Delta x)u \tag{2.5}$$

อัตราการเปลี่ยนแปลงของความร้อน ณ เวลา t ใดๆ คือ

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_t = \gamma\rho A(\Delta x)u_t \tag{2.6}$$

ความร้อนไหลไปตามแกนบวก x ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของความร้อนจาก (2.3) คือ

$$Q_t = -\kappa Au_x(x,t) - (-\kappa Au_x(x+\Delta x,t) = \kappa A\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] \tag{2.7}$$

จาก (2.6) และ (2.7) จะได้

$$\kappa A\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] = \gamma\rho A(\Delta x)u_t \tag{2.8}$$

ย้ายข้างให้ u_t อยู่ข้างเดียว

ดังนั้น $$\frac{\kappa}{\gamma\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x}\right] = u_t \tag{2.9}$$

พิจารณา $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

ดังนั้น $$\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ นำไปแทนที่ (2.9)

ดังนั้น $$\frac{\kappa}{\gamma\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_t \qquad (2.10)$$

ให้ $\frac{\kappa}{\gamma\rho}=k>0$ นำไปแทนที่ (2.10) (เรียก k ว่า thermal diffusivity)

ดังนั้น $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_t$ หรือ $ku_{xx}=u_t$

บางครั้งใช้ c^2 แทน k แล้ว $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$

ถ้ากำหนดว่า ที่เริ่มต้นเวลา $t=0$ อุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง

จะได้ $$u(x,0)=f(x);0<x<L \qquad (2.11)$$

เรียกเงื่อนไขประเภท (2.11) นี้ว่า **เงื่อนไขเริ่มต้น** (Initial Condition)

ถ้ากำหนดว่าที่ปลายทั้งสองข้างของแท่งโลหะมีอุณหภูมิเป็น 0°

จะได้ $$u(0,t)=0,u(L,t)=0;t>0 \qquad (2.12)$$

ถ้ากำหนดว่าที่ปลายข้างหนึ่งอุณหภูมิเป็น 50° ปลายอีกข้างอุณหภูมิเป็น 100°

จะได้ $$u(0,t)=50,u(L,t)=100;t>0 \qquad (2.13)$$

เรียกเงื่อนไขประเภท (2.12) และ (2.13) นี้ว่า **เงื่อนไขขอบเขต** (Boundary Condition)

ดังนั้น ปัญหาความร้อนในแท่งโลหะที่มีความยาวจำกัดจัดอยู่ในรูปแบบปัญหาค่าขอบเขตที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) และ เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)

เช่น เงื่อนไขเริ่มต้น $c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}$, $0\le x\le L$, $t\ge 0$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $u(0,t)=A, u(L,t)=B, t>0$

$u(x,0)=f(x), 0<x<L$

นอกจากเงื่อนไขดังกล่าวนี้ ในบางครั้งเงื่อนไขอาจอยู่ในรูปแบบอนุพันธ์ ดังนี้
ถ้าปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะเป็นฉนวน ไม่มีความร้อนไหลออกจากแท่งโลหะหรือไหลเข้าแท่งโลหะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เช่น เงื่อนไขเริ่มต้น $$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t}\ ,\ 0\le x\le L\ ,\ t\ge 0$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \quad \text{หรือ} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=0\ ,\ t>0$$

$$u(x,0)=f(x)\ ,\ 0<x<L$$

ถ้าปลายข้างหนึ่งของแท่งโลหะแตะกับตัวกลางเช่น อากาศ หรือน้ำ ความร้อนจากแท่งโลหะอาจไหลไปยังตัวกลางแล้วอุณหภูมิของแท่งลดลง หรือความร้อนจากตัวกลางไหลไปยังแท่งโลหะแล้วอุณหภูมิแท่งโลหะเพิ่มขึ้น จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน

ที่กล่าวว่า " อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุ $u(0,t)$ กับ อุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม u_0 "

จะได้ $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}\propto u(0,t)-u_0 \qquad (2.14)$$

ดังนั้น $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\kappa\left(u(0,t)-u_0\right) \quad \text{หรือ} \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=\kappa\left(u(L,t)-u_0\right) \qquad (2.15)$$

เมื่อ κ เป็นค่าการนำความร้อนของแท่งโลหะ

ที่ปลายแต่ละข้างของแท่งโลหะ อาจกำหนดเงื่อนไขต่างกันในเวลาเดียวกันได้

เช่น $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0\ ,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=u_0\ ,\ t>0$$

หรือ $$u(0,t)=A\ ,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=u_0\ ,\ t>0$$

ถ้าความร้อนสามารถกระจายไปทางพื้นผิวด้านข้างของแท่งโลหะไปยังตัวกลางที่อยู่รอบๆ แท่งโลหะซึ่งอุณหภูมิ u_0 แล้วสมการความร้อน

คือ $$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-c^2(u-u_0)=\frac{\partial u}{\partial t};0\le x\le L,t\ge 0 \qquad (2.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 สมการลาปลาซ (Laplace's Equation)

เนื่องจาก สมการความร้อน (Heat Equation) บนแผ่นโลหะ

เช่น แผ่นให้ความร้อน (hot plate)

สมการคือ $$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (2.17)$$

ถ้ากำหนดว่าเมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ อุณหภูมิบนแผ่นโลหะไม่เปลี่ยนไปตามเวลา

แสดงว่า $t>0$ และ $u=p$ เมื่อ p เป็น ค่าคงที่

ดังนั้น $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ นำไปแทนที่ (2.17)

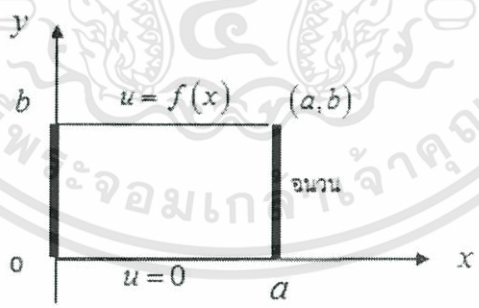
จะได้ $$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (2.18)$$

เรียกสมการในรูปแบบนี้ว่า **สมการลาปลาซ (Laplace's Equation)**

ซึ่งเป็นสมการที่ใช้ในการหาสภาวะคงตัวของอุณหภูมิ (Steady - State Temperature) ในแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งไม่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา

ถ้าขอบด้านข้างของแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นฉนวนดังรูปที่ 2.2



รูปที่ 2.2 ขอบด้านข้างของแผ่นโลหะสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นฉนวน

นั่นคือ ไม่มีความร้อนไหลออกไปทางพื้นผิวด้านข้างของแผ่นโลหะได้

ปัญหานี้ คือ การหาเฉลยของสมการลาปลาซ

ดังนั้น เงื่อนไขเริ่มต้น $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ 0\le x\le a\ ,\ 0\le y\le b,\ t\ge 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$, $0 < y < b$

$$u(x,0) = 0 \ , \ u(x,b) = f(x) \ , 0 < x < a$$

แต่ถ้า $t > 0$ และ $u = H(x,y)t$

ดังนั้น $\frac{\partial u}{\partial t} = H(x,y)$ นำไปแทนที่ (2.17)

จะได้ $$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = H(x,y)$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = H(x,y) \qquad (2.19)$$

เรียกสมการในรูปแบบนี้ว่า **สมการปัวซง (Poisson Equation)**

จากปัญหาเงื่อนไขขอบเขตที่ศึกษามานี้พบว่า ตัวแปรตาม u เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x, y หรือ t ในรูปแบบที่แตกต่างกัน ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 รูปแบบ คือ

1 Dirichlet condition คือ ตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น

เช่น $u(0,y) = F(y), u(a,y) = G(y)$

$u(x,0) = f(x), u(x,b) = g(x)$

2 Neumann condition คือ ตัวแปรตามเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งบนขอบนั้นในทิศที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

เช่น $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 4x$

3 Robbins condition หรือ Mixed condition คือ linear combination ของเงื่อนไข Dirichlet และ Neumann บนขอบนั้น

เช่น $$au(x,b) + b\left.\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|_{y=b} = f(x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference)

เป็นการหาผลเฉลยของ partial differential equation โดยใช้ Finite Difference จาก $u = f(x,y)$ ถ้า y คงที่ให้เป็น y_i สามารถหา $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ที่ $x = x_i$ ได้ดังนี้

โดย Forward Difference

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+2}, y_i) - 2u(x_{i+1}, y_i) + u(x_i, y_i)}{h^2}$$ ซึ่งเป็นสูตรแบบ Three Points

โดย Backward Difference

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x_i, y_i) - 2u(x_{i-1}, y_i) + u(x_{i-2}, y_i)}{h^2}$$ ซึ่งเป็นสูตรแบบ Three Points

โดย Cenral Difference

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i+1}, y_i) - 2u(x_i, y_i) + u(x_{i-1}, y_i)}{h^2}$$ ซึ่งเป็นสูตรแบบ Three Points

$$T = T(x) = y(x)$$

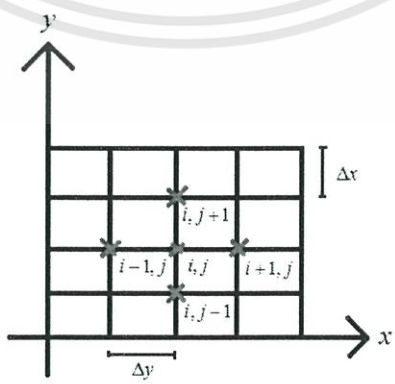
$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x_i} = y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{\Delta x}\right)$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{x_i} = y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

ถ้า T เป็นไปตาม Laplace Equation

จะได้ว่า $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ ต้องการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบ Finite Difference ทำได้ดังนี้

โดยการแบ่งบริเวณบนระนาบ xy ออกเป็นบริเวณย่อย โดย Δx มีค่าคงที่และ Δy มีค่าคงที่แล้ว Grid Spacing System แสดงดังรูป



รูปที่ 2.3 การแบ่งบริเวณบนระนาบ xy

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, x เปลี่ยน y คงที่ $\Rightarrow T = T(x)$; $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2}[T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}]$

(2.20)

$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$, y เปลี่ยน x คงที่ $\Rightarrow T = T(y)$; $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{(\Delta y)^2}[T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}]$

(2.21)

แทนในสมการ $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ ได้

คูณตลอดด้วย $(\Delta y)^2$ ได้

$$\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}[T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}] + [T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}] = 0$$

ให้ $\alpha = \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}$ จะได้

$$\alpha[T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}] + [T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}] = 0$$

$$[\alpha T_{i-1,j} - 2(\alpha+1)T_{i,j} + \alpha T_{i+1,j}] + [T_{i,j-1} + T_{i,j+1}] = 0 \qquad (2.22)$$

2.6 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของปัญหาดีรีเคล (Finite Difference of Dirichlet Problem)

ให้ R เป็นสี่เหลี่ยมขนาด $[0,a]\times[0,b]$ สามารถหาผลเฉลย $u(x,y)$ ของปัญหา

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ ; \ 0 \le x \le a \ , 0 \le y \le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $u(0,y) = G(y)$, $u(a,y) = g(y)$; $0 \le y \le b$

$u(x,0) = F(x)$, $u(x,b) = f(x)$; $0 \le x \le a$

ซึ่งเป็นปัญหาดีริคเลตของสมการลาปลาซ

ให้ $\Delta x = \frac{a}{N_x + 1}$ และ $\Delta y = \frac{a}{N_y + 1}$ เมื่อ N_x, N_y เป็นจำนวนนับ

สามารถเขียนจาก Finite Difference ของสมการ (2.20)

ในรูปของเมทริกซ์ได้ โดยกำหนดเมทริกซ์ ดังต่อไปนี้

กำหนดให้เมทริกซ์ขนาด $N_y \times N_y$ เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง (tridiagonal matrix) ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$L=\begin{bmatrix} -(2\alpha+2) & 1 & & & \\ 1 & -(2\alpha+2) & \ddots & & \\ & & & -(2\alpha+2) & 1 \\ & & & 1 & -(2\alpha+2) \end{bmatrix}$$

และกำหนดเมทริกซ์ขนาด $N_x \times N_x$ เป็นเมทริกซ์บล็อค (blockl matrix) ดังนี้

$$D=\begin{bmatrix} L & & & \\ & L & & \\ & & \ddots & \\ & & & L \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 0 & \alpha I & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha I \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $$A=D+U+U^T=\begin{bmatrix} L & \alpha I & & \\ \alpha I & L & \alpha I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \alpha I & L & \alpha I \\ & & & \alpha I & L \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ของสมการ finite difference ของปัญหาดีริคเลตในระบบสมการ $Au=b$ เมื่อ u และ b เป็นเวกเตอร์

จากทฤษฎี เมทริกซ์แนวทแยงมุมข่มแท้ (Strictly Diagonally Domainant Matrix) โดยกล่าวว่า เมทริกซ์ C ขนาด $n \times n$ จะถูกกล่าวว่าเป็น แนวทแยงมุมข่มแท้ (Strictly Diagonally Domainant Matrix) เมื่อ $|c_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |c_{ij}|$ สำหรับแต่ละ $i=1,2,...,n$

เนื่องจาก A เมทริกซ์วทแยงมุมข่มแท้ (Strictly Diagonally Domainant Matrix) และจากบทแทรกที่กล่าวว่า เมทริกซ์วทแยงมุมข่มแท้ (Strictly Diagonally Domainant Matrix) เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular Matrix) ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

ดังนั้นระบบสมการ $Au=b$ สามารถหาผลเฉลยได้เพียงผลเฉลยเดียว เช่นเดียวกับปัญหานิวแมนของสมการปัวซง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดของปัญหานิวแมน (Finite Difference of Neumann Problem)

ให้ R เป็นสี่เหลี่ยมขนาด $[0,a]\times[0,b]$ สามารถหาผลเฉลย $u(x,y)$ ของปัญหา

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $u_x(0,y)=G(y)$, $u_x(a,y)=g(y)$; $0\le y\le b$

$$u(x,0)=F(x) \ , \ u(x,b)=f(x) \ ; \ 0\le x\le a$$

ซึ่งเป็นปัญหานิวแมนของสมการลาปลาซ

ให้ $\Delta x=\dfrac{a}{N_x+1}$ และ $\Delta y=\dfrac{a}{N_y+1}$ เมื่อ N_x, N_y เป็นจำนวนนับ

สามารถเขียนจาก Finite Difference ของสมการ(2.20)

ในรูปของเมทริกซ์ได้ โดยกำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

กำหนดให้เมทริกซ์ขนาด $N_y\times N_y$ เป็นเมทริกซ์สามแนวเฉียง (tridiagonal matrix) ดังนี้

$$L_1=\begin{bmatrix} -(\alpha+2) & 1 & & & \\ 1 & -(\alpha+2) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(\alpha+2) & 1 \\ & & 1 & -(\alpha+2) \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} -(2\alpha+2) & 1 & & & \\ 1 & -(2\alpha+2) & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -(2\alpha+2) & 1 \\ & & 1 & -(2\alpha+2) \end{bmatrix}$$

และกำหนดเมทริกซ์ขนาด $N_x\times N_x$ เป็นเมทริกซ์บล็อค (blockl matrix) ดังนี้

$$D_1=\begin{bmatrix} L_1 & & & & \\ & L & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L & \\ & & & & L_1 \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} 0 & \alpha I & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & \alpha I \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $$A=D_1+U+U^T=\begin{bmatrix} L_1 & \alpha I & & & \\ \alpha I & L & \alpha I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha I & L & \alpha I \\ & & & \alpha I & L_1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เป็นเมทริกซ์ของสมการ finite difference ของปัญหานิวแมนในระบบสมการ $Au = b$

เมื่อ u และ b เป็นเวกเตอร์

เนื่องจาก A เมทริกซ์วทแยงมุมข่มแท้ (Strictly Diagonally Domainant Matrix) และจากบทแทรกที่กล่าวว่า เมทริกซ์วทแยงมุมข่มแท้ (Strictly Diagonally Domainant Matrix) เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular Matrix) ดังนั้น A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

ดังนั้นระบบสมการ $Au = b$ สามารถหาผลเฉลยได้เพียงผลเฉลยเดียวเช่นเดียวกับปัญหานิวแมนของสมการปัวซง

ในการศึกษาสมการลาปลาซนี้ M. Dagmar [1] ได้ศึกษาการหาผลเฉลยสมการลาปลาซที่เป็นไปตามปัญหาแบบนิวแมน โดยใช้ Regularity of solutions of the neumann problem for the laplace equation นอกจากนี้ E. Constantin and N. H. Pavel [2] ได้ศึกษาการหาผลเฉลยสมการลาปลาซที่เป็นไปตามปัญหาแบบนิวแมน โดยใช้ Green function of the laplacian for the neumann problem in R^n_+ นอกจากนี้ M. L. Dhumal and S. B. Kiwne [3] ได้ศึกษาการหาผลเฉลยสมการลาปลาซที่เป็นไปตามปัญหาแบบนิวแมน โดยใช้ Finite difference method for laplace equation

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาการหาผลเฉลยปัญหาแบบดีรีเคลและแบบนิวแมนในโดเมนแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากสำหรับสมการลาปลาซโดยการพัฒนาโปรแกรมเพื่อหาผลเฉลยปัญหาแบบนิวแมนในโดเมนแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากสำหรับสมการลาปลาซ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

บทที่ 3

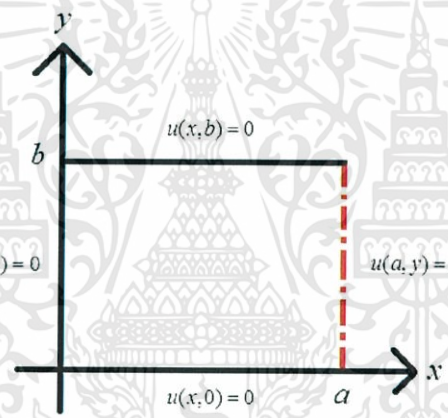
การหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการลาปลาซที่มีรูปแบบเงื่อนไขต่าง ๆ ทั้งแบบดีริคเลตและแบบนิวแมน

ปัญหาแบบแบบดีรีเคล

เนื่องจากเงื่อนไขปัญหาแบบดีรีเคล (Dirichlet Problem Condition) คือ ตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น

เช่น ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 1



รูปที่ 3.1 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 1

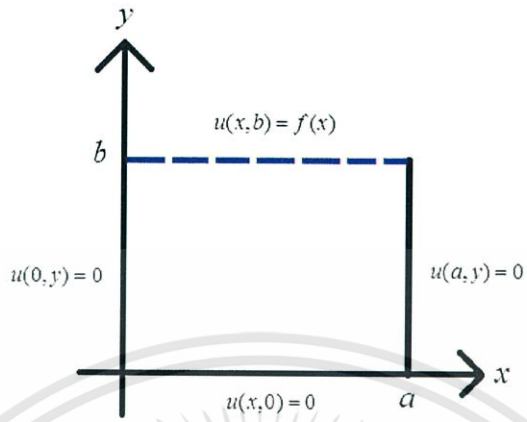
จากรูปที่ 3.1 จะเห็นว่า เส้นประสีแดงนั้นเป็นเส้นที่ตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้นแล้วมีค่าเป็น $g(y)$ และมีทิศตั้งฉากกับแกน x ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้าน คือ $u(x,0)=0, u(a,y)=g(y), u(x,b)=0, u(0,y)=0$

ดังนั้น เป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาแบบดีริคเลต

149018

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 2



รูปที่ 3.2 ปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 2

จากรูปที่ 3.2 จะเห็นว่า เส้นประสีน้ำเงินนั้นเป็นเส้นที่ตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้นแล้วมีค่าเป็น $f(x)$ และมีทิศตั้งฉากกับแกน y ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้าน คือ $u(x,0)=0, u(a,y)=0, u(x,b)=f(x), u(0,y)=0$

ดังนั้น เป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาแบบดีริคเลต

จากปัญหาแบบดีริคเลตในรูปแบบที่ 1 และรูปแบบที่ 2 ยังมีรูปแบบอื่น ๆ อีก

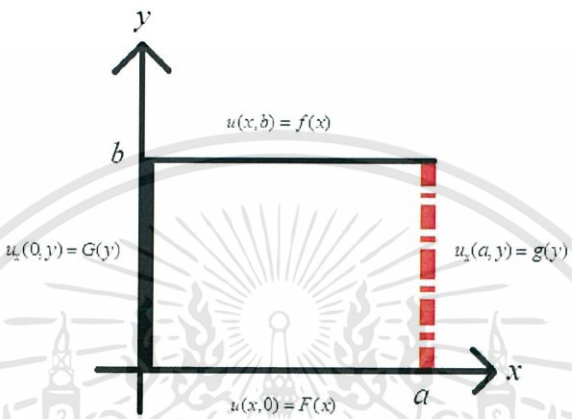
เช่น กรณีที่แกน x มีค่าเป็น $F(x)$ และแกน y มีค่าเป็น $G(y)$ พร้อมกัน นั่นคือหนึ่งในรูปแบบของปัญหาดีริคเลต ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตค่าไม่เท่ากับศูนย์ 2 ด้าน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาแบบนิวแมน

เนื่องจากเงื่อนไขปัญหาแบบนิวแมน (Neumann Problem Condition) คือ ตัวแปรตามเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งบนขอบนั้นในทิศที่ตั้งฉากกับขอบนั้น

เช่น ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 1



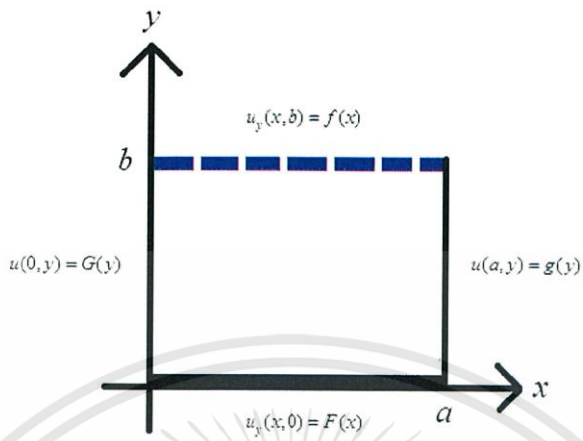
รูปที่ 3.3 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 1

จากรูปที่ 3.3 จะเห็นว่า เส้นสีประสีแดงนั้นเป็นเส้นที่ตัวแปรตามเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งแล้วมีค่าเป็น $g(y)$ และมีทิศตั้งฉากกับแกน x ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้าน คือ $u(x,0)=0$, $u_x(a,y)=g(y)$, $u(x,b)=0$, $u_x(0,y)=0$

ดังนั้น เป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาแบบนิวแมน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 2



รูปที่ 3.4 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 2

จากรูปที่ 3.4 จะเห็นว่า เส้นประสีน้ำเงินนั้นเป็นเส้นที่ตัวแปรตามเป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งแล้วมีค่าเป็น $f(x)$ และมีทิศตั้งฉากกับแกน y ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตทั้ง 4 ด้าน คือ $u_y(x,0)=0$, $u(a,y)=0$, $u_y(x,b)=f(x)$, $u(0,y)=0$

ดังนั้น เป็นไปตามเงื่อนไขของปัญหาแบบนิวแมน

จากปัญหานิวแมนในรูปแบบที่ 1 และรูปแบบที่ 2 ยังมีรูปแบบอื่น ๆ อีก

เช่น กรณีแกน x เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่งมีค่าเท่ากับ $F(x)$ และเส้นที่ขนานกับแกน x มีค่าเท่ากับ $f(x)$ พร้อมกัน นั่นคือหนึ่งในรูปแบบของปัญหานิวแมน ซึ่งมีเงื่อนไขขอบเขตค่าไม่เท่ากับศูนย์ 2 ด้าน

จากปัญหาดีริคเลตและปัญหานิวแมนที่ได้กล่าวมาข้างต้น

จะเห็นว่า **มีแต่เงื่อนไขขอบเขต แต่ไม่มีเงื่อนไขเริ่มต้น**

ดังนั้น งานวิจัยนี้จึงนำวิธีการหาผลเฉลยจากสมการลาปลาซ (Laplace's Equation) และวิธีการหาผลเฉลยจากสมการปัวซง (Poisson Equation) มาใช้แก้ปัญหานิวแมนบนสี่เหลี่ยมมุมฉากตามรูปแบบปัญหาดีริคเลตและปัญหานิวแมนข้างต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1 การหาผลเฉลยของสมการลาปลาซ (Laplace's Equation)

สมการลาปลาซ คือ สมการที่มีรูปแบบคือ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

ในงานวิจัยนี้จะใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0\,,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

โดยการหาอนุพันธ์ได้

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y) \quad , \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}'(y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y) \quad , \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)$$

นำไปแทนใน $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

ดังนั้น $\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)=-\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)$

ดังนั้น $\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0\,,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

จะได้ $\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0\,,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

เนื่องจากทางซ้ายและขวาไม่มีตัวแปร x หรือ y อื่นๆ อยู่อีก แสดงว่าทางซ้ายเป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้นและทางขวาเป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น และซ้ายเท่ากับขวา

ดังนั้น แต่ละข้างต้องเป็นค่าคงที่ให้เป็น λ^2 หรือ $-\lambda^2$ แล้วมี 3 กรณีที่จะพิจารณา

คือ $\lambda^2>0$, $\lambda^2<0$ และ $\lambda^2=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 1</u> $\lambda^2 > 0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ และ $Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0$

เนื่องจาก $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$ (3.1a)

เนื่องจาก $Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_3 \cos \lambda y + c_4 \sin \lambda y$ (3.1b)

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2 = 0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) = 0$ และ $Y''(y) = 0$

เนื่องจาก $X''(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_5 x + c_6$ (3.2a)

เนื่องจาก $Y''(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_7 y + c_8$ (3.2b)

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2 < 0$

จะได้ $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ และ $Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$

เนื่องจาก $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_9 \cos \lambda x + c_{10} \sin \lambda x$ (3.3a)

เนื่องจาก $Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_{11} \cosh \lambda y + c_{12} \sinh \lambda y$ (3.3b)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.1 ปัญหาดีริคเลตสำหรับสมการลาปลาซ

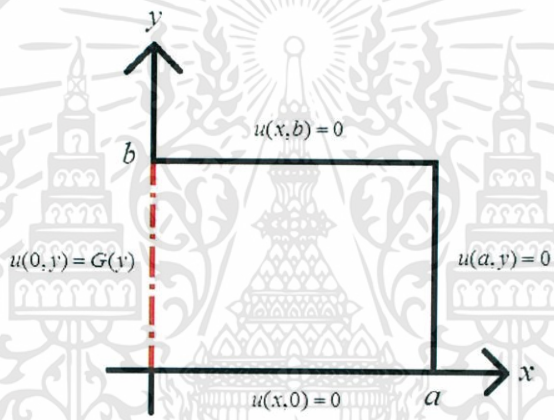
เราใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร ซึ่งปัญหาแบบดีริคเลตนี้มีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกันหลายรูปแบบ ดังตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบดีรีเคล

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u(0,y)=G(y)\,,u(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0\,,u(x,b)=0\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.5 ปัญหาแบบดีรีเคลในรูปแบบที่ 3

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0\,,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0\,,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0\,,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2<0$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (3.3b) จะได้ว่า $Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,0)=X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,b)=X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0)=0$ และ $Y(b)=0$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_{11}\cosh\lambda(0)+c_{12}\sinh\lambda(0)=c_{11}\cosh(0)+c_{12}\sinh(0)=0$

$c_{11}(1)+c_{12}(0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y)=c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $Y(b)=0$ จะได้ $Y(b)=c_{12}\sinh\lambda(b)=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda(b)\neq 0$ จะได้ว่า $c_{12}=0$

ดังนั้น $Y(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(0,y)=G(y)$

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2=0$

จะได้ $X''(x)=0$ และ $Y''(y)=0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $X''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $X(x)=c_5x+c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $Y''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_7y+c_8$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,0)=X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,b)=X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0)=0$ และ $Y(b)=0$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_7(0)+c_8=0$ จะได้ว่า $c_8=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y)=c_7y$

เนื่องจาก $Y(b)=0$ จะได้ $Y(b)=c_7b=0$ ซึ่ง $b\neq 0$ จะได้ว่า $c_7=0$

ดังนั้น $Y(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(0,y)=G(y)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2>0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2$

จะได้ $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0$ และ $Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $X''(x)-\lambda^2 X(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $X(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $Y''(y)+\lambda^2 Y(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และ $\mathrm{Y}(b)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_3\cos\lambda(0)+c_4\sin\lambda(0)=c_3\cos(0)+c_4\sin(0)=0$

$c_3(1)+c_4(0)=0$ จะได้ว่า $c_3=0$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{Y}(y)=c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(b)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(b)=c_4\sin\lambda(b)=0$

จะได้ว่า $\mathrm{Y}(b)=0$ เมื่อ $c_4=0$ หรือ $\sin\lambda(b)=0$

ถ้า $c_4=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\sin\lambda(b)=0$ จะได้ว่า $\mathrm{Y}(b)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(b)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$ เป็น Eigenvalue

จะได้ Eigenfunction คือ $\mathrm{Y}(y)=c_4\sin\dfrac{n\pi}{b}y$ เมื่อ $n=1,2,...$

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $X(a)=0$

เนื่องจาก $X(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(a)=c_1\cosh\dfrac{n\pi}{b}a+c_2\sinh\dfrac{n\pi}{b}a=0$ เมื่อ $n=1,2,...$

ซึ่งจะได้ว่า $c_1=\sinh\dfrac{n\pi}{b}a$ และ $c_2=-\cosh\dfrac{n\pi}{b}a$

จะได้

$$\mathrm{X}(x)=\sinh\frac{n\pi}{b}a\cosh\frac{n\pi}{b}x-\cosh\frac{n\pi}{b}a\sinh\frac{n\pi}{b}x=\sinh(\frac{n\pi}{b}x-\frac{n\pi}{b}a)=\sinh(\frac{n\pi}{b}(x-a))$$

ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{X}(x)=\sinh(\dfrac{n\pi}{b}(x-a))$ เมื่อ $n=1,2,...$

ดังนั้น $$u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)=\left(\sinh(\frac{n\pi}{b}(x-a))\right)\left(c_4\sin\frac{n\pi}{b}y\right)$$ เมื่อ $n=1,2,...$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(x,y) = B_n \sinh(\frac{n\pi}{b}(x-a))\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \text{เมื่อ} \quad n = 1,2,...$$

นั่นคือ $$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\frac{n\pi}{b}(x-a))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เนื่องจาก $u(0,y) = G(y)$ แทนใน $u(x,y)$

จะได้ $u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\frac{n\pi}{b}(0-a))\sin\frac{n\pi y}{b} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\frac{-n\pi a}{b})\sin\frac{n\pi y}{b} = G(y)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

จาก $G(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L G(y)\sin\frac{n\pi y}{L}dy$

จะได้ว่า $B_n \sinh(\frac{-n\pi a}{b}) = \frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ จาก $\sinh(\frac{-n\pi a}{b}) = -\sinh(\frac{n\pi a}{b})$

$$-B_n \sinh(\frac{n\pi a}{b}) = \frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

$$B_n = \frac{-2}{b\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\frac{n\pi}{b}(x-a))\sin\frac{n\pi y}{b} \quad \text{เมื่อ} \quad B_n = \frac{-2}{b\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;0\le x\le a,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u(0,y)=0,u(a,y)=g(y);0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0,u(x,b)=0;0\le x\le a$$

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0,\ \mathrm{Y}(y)\neq 0$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0,\ \mathrm{Y}(y)\neq 0$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0,\ \mathrm{Y}(y)\neq 0$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2<0$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

จาก (3.3b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และ $\mathrm{Y}(b)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_{11}\cosh\lambda(0)+c_{12}\sinh\lambda(0)=c_{11}\cosh(0)+c_{12}\sinh(0)=0$

$c_{11}(1)+c_{12}(0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{Y}(y)=c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(b)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(b)=c_{12}\sinh\lambda(b)=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda(b)\neq 0$ จะได้ว่า $c_{12}=0$

ดังนั้น $\mathrm{Y}(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(a,y)=g(y)$

กรณีที่ 2 $\lambda^2=0$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (3.2a) จะได้ว่า $X''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $X(x)=c_5x+c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $Y''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_7y+c_8$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,0)=X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,b)=X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0)=0$ และ $Y(b)=0$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_7(0)+c_8=0$ จะได้ว่า $c_8=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y)=c_7y$

เนื่องจาก $Y(b)=0$ จะได้ $Y(b)=c_7b=0$ ซึ่ง $b\neq 0$ จะได้ว่า $c_7=0$

ดังนั้น $Y(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(a,y)=g(y)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2>0$

จะได้ $X''(x)+\lambda^2X(x)=0$ และ $Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $X(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $Y''(y)+\lambda^2Y(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,0)=X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,b)=X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0)=0$ และ $Y(b)=0$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_3\cos\lambda(0)+c_4\sin\lambda(0)=c_3\cos(0)+c_4\sin(0)=0$

$c_3(1)+c_4(0)=0$ จะได้ว่า $c_3=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y)=c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $Y(b)=0$ จะได้ $Y(b)=c_4\sin\lambda(b)=0$

ดังนั้น $Y(b)=0$ เมื่อ $c_4=0$ หรือ $\sin\lambda(b)=0$

ถ้า $c_4=0$ จะได้ $Y(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\sin\lambda(b)=0$ จะได้ว่า $Y(b)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(b)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$ เป็น Eigenvalue

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ Eigenfunction คือ $\mathrm{Y}(y) = c_4 \sin\dfrac{n\pi}{b}y$ เมื่อ $n = 1, 2, \ldots$

เนื่องจาก $u(0, y) = 0$ เขียนในรูป $u(x, y) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0, y) = \mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $X(0) = 0$

เนื่องจาก $X(0) = 0$

จะได้ $\mathrm{X}(0) = c_1 \cosh\dfrac{n\pi(0)}{b} + c_2 \sinh\dfrac{n\pi(0)}{b} = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = 0$

$c_1(1) + c_2(0) = 0$ จะได้ว่า $c_1 = 0$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{X}(x) = c_2 \sinh\dfrac{n\pi}{b}x$ เมื่อ $n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น $u(x, y) = \mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y) = \left(c_2 \sinh\dfrac{n\pi}{b}x\right)\left(c_4 \sin\dfrac{n\pi}{b}y\right) = B_n \sinh\dfrac{n\pi x}{b}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$

เมื่อ $n = 1, 2, \ldots$

นั่นคือ $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\dfrac{n\pi x}{b}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$

เนื่องจาก $u(a, y) = g(y)$ แทนใน $u(x, y)$ จะได้ $u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\dfrac{n\pi a}{b}\sin\dfrac{n\pi y}{b} = g(y)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

จาก $\mathrm{g}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\dfrac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $b_n = \dfrac{2}{L}\int_0^L \mathrm{g}(y)\sin\dfrac{n\pi y}{L}\,dy$

จะได้ว่า $B_n \sinh\dfrac{n\pi a}{b} = \dfrac{2}{b}\int_0^b \mathrm{g}(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$ ดังนั้น $B_n = \dfrac{2}{b\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{g}(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\dfrac{n\pi x}{b}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $B_n = \dfrac{2}{b\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{g}(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;0\le x\le a,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u(0,y)=0,u(a,y)=0;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0,u(x,b)=f(x);0\le x\le a$$

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$ โดยที่ $\mathrm{X}(x)\neq 0,\mathrm{Y}(y)\neq 0$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2>0$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $u(0,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0,y)=\mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $\mathrm{X}(0)=0$ และ $\mathrm{X}(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(0)=c_1\cosh\lambda(0)+c_2\sinh\lambda(0)=c_1\cosh(0)+c_2\sinh(0)=0$

$c_1(1)+c_2(0)=0$ จะได้ว่า $c_1=0$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{X}(x)=c_2\sinh\lambda x$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(a)=c_2\sinh\lambda a=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda a\neq 0$ จะได้ว่า $c_2=0$

ดังนั้น $\mathrm{X}(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x,b)=f(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2 = 0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) = 0$ และ $Y''(y) = 0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $X''(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_5 x + c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $Y''(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_7 y + c_8$

เนื่องจาก $u(0, y) = 0$ เขียนในรูป $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$ จะได้ $u(0, y) = X(0)\,Y(y)$

เนื่องจาก $u(a, y) = 0$ เขียนในรูป $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$ จะได้ $u(a, y) = X(a)\,Y(y)$

นั่นคือ $X(0) = 0$ และ $X(a) = 0$

เนื่องจาก $X(0) = 0$ จะได้ $X(0) = c_5(0) + c_6 = 0$ จะได้ว่า $c_6 = 0$ ซึ่งได้ว่า $X(x) = c_5 x$

เนื่องจาก $X(a) = 0$ จะได้ $X(a) = c_5 a = 0$ ซึ่ง $a \neq 0$ จะได้ว่า $c_5 = 0$

ดังนั้น $X(x) = 0$ นั่นคือ $u(x, y) = 0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x, b) = f(x)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2 < 0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ และ $Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_9 \cos \lambda x + c_{10} \sin \lambda x$

จาก (3.3b) จะได้ว่า $Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_{11} \cosh \lambda y + c_{12} \sinh \lambda y$

เนื่องจาก $u(0, y) = 0$ เขียนในรูป $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$ จะได้ $u(0, y) = X(0)\,Y(y)$

เนื่องจาก $u(a, y) = 0$ เขียนในรูป $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$ จะได้ $u(a, y) = X(a)\,Y(y)$

นั่นคือ $X(0) = 0$ และ $X(a) = 0$

เนื่องจาก $X(0) = 0$ จะได้ $X(0) = c_9 \cos \lambda(0) + c_{10} \sin \lambda(0) = c_9 \cos(0) + c_{10} \sin(0) = 0$

$c_9(1) + c_{10}(0) = 0$ จะได้ว่า $c_9 = 0$ ซึ่งได้ว่า $X(x) = c_{10} \sin \lambda x$

เนื่องจาก $X(a) = 0$ จะได้ $X(a) = c_{10} \sin \lambda(a) = 0$

จะได้ว่า $X(a) = 0$ เมื่อ $c_{10} = 0$ หรือ $\sin \lambda(a) = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $c_{10}=0$ จะได้ $\mathrm{X}(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\sin\lambda(a)=0$ จะได้ว่า $\mathrm{X}(a)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(a)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\frac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,...$ ถ้า $\lambda=\frac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,...$ เป็น Eigenvalue

จะได้ Eigenfunction คือ $\mathrm{X}(x)=c_{10}\sin\frac{n\pi}{a}x$ เมื่อ $n=1,2,...$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_{11}\cosh\frac{n\pi}{a}0+c_{12}\sinh\frac{n\pi}{a}0=c_{11}\cosh 0+c_{12}\sinh 0=0$

$c_{11}(1)+c_{12}(0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$ ซึ่งได้ว่า $\mathrm{Y}(y)=c_{12}\sinh\frac{n\pi}{a}y$ เมื่อ $n=1,2,...$

ดังนั้น $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)=\left(c_{10}\sin\frac{n\pi}{a}x\right)\left(c_{12}\sinh\frac{n\pi}{a}y\right)$ เมื่อ $n=1,2,...$

$u(x,y)=B_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$ เมื่อ $n=1,2,...$

นั่นคือ $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$

เนื่องจาก $u(x,b)=f(x)$ แทนใน $u(x,y)$ จะได้ $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}=f(x)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

จาก $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{a}$ เมื่อ $b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

จะได้ว่า $B_n\sinh(\frac{n\pi b}{a})=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{b}dx$ ดังนั้น $B_n=\frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y\sin\frac{n\pi x}{a}$ **เมื่อ** $B_n=\frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$

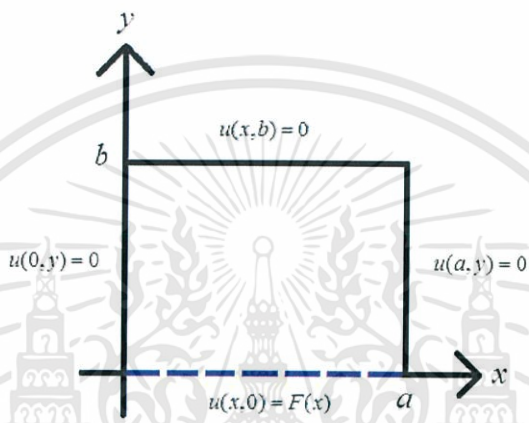
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 4 จงหาผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ ;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u(0,y)=0\,,u(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=F(x)\,,u(x,b)=0\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.6 ปัญหาแบบดีรีเคลในรูปแบบที่ 4

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=\lambda^2$$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2>0$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $u(0,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0,y)=\mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $\mathrm{X}(0)=0$ และ $\mathrm{X}(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(0)=c_1\cosh\lambda(0)+c_2\sinh\lambda(0)=c_1\cosh(0)+c_2\sinh(0)=0$

$c_1(1)+c_2(0)=0$ จะได้ว่า $c_1=0$ ซึ่งได้ว่า $\mathrm{X}(x)=c_2\sinh\lambda x$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(a)=c_2\sinh\lambda a=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda a\neq 0$ จะได้ว่า $c_2=0$

ดังนั้น $\mathrm{X}(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x,0)=F(x)$

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2=0$

ดังนั้น $\dfrac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2$ และ $\dfrac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)=0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_5x+c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_7y+c_8$

เนื่องจาก $u(0,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0,y)=\mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $\mathrm{X}(0)=0$ และ $\mathrm{X}(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(0)=c_5(0)+c_6=0$ จะได้ว่า $c_6=0$ จะได้ว่า $\mathrm{X}(x)=c_5x$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(a)=c_5a=0$ ซึ่ง $a\neq 0$ จะได้ว่า $c_5=0$

ดังนั้น $\mathrm{X}(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x,0)=F(x)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2<0$

ดังนั้น $\dfrac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2$ และ $\dfrac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

จาก (3.3b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $u(0,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0,y)=\mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $\mathrm{X}(0)=0$ และ $\mathrm{X}(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(0)=c_9\cos\lambda(0)+c_{10}\sin\lambda(0)=c_9\cos(0)+c_{10}\sin(0)=0$

$c_9(1)+c_{10}(0)=0$ จะได้ว่า $c_9=0$ ซึ่งได้ว่า $\mathrm{X}(x)=c_{10}\sin\lambda x$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(a)=c_{10}\sin\lambda(a)=0$

จะได้ว่า $\mathrm{X}(a)=0$ เมื่อ $c_{10}=0$ หรือ $\sin\lambda(a)=0$

ถ้า $c_{10}=0$ จะได้ $\mathrm{X}(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\sin\lambda(a)=0$ จะได้ว่า $\mathrm{X}(a)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(a)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$ เป็น Eigenvalue

จะได้ Eigenfunction คือ $\mathrm{X}(x)=c_{10}\sin\dfrac{n\pi}{a}x$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(b)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(b)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(b)=c_{11}\cosh\dfrac{n\pi}{a}b+c_{12}\sinh\dfrac{n\pi}{a}b=0$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ซึ่งจะได้ $c_{11}=-\sinh\dfrac{n\pi}{a}b$ และ $c_{12}=\cosh\dfrac{n\pi}{a}b$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\mathrm{Y}(y)=-\sinh\frac{n\pi}{a}b\cosh\frac{n\pi}{a}y+\cosh\frac{n\pi}{a}b\sinh\frac{n\pi}{a}y=\sinh(\frac{n\pi}{a}b-\frac{n\pi}{a}y)=\sinh(\frac{n\pi}{a}(b-y))$$

ดังนั้น $\mathrm{Y}(y)=\sinh(\dfrac{n\pi}{a}(b-y))$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ดังนั้น $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)=\left(c_{10}\sin\dfrac{n\pi}{a}x\right)\left(\sinh(\dfrac{n\pi}{a}(b-y))\right)$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(x,y) = B_n \sinh(\frac{n\pi}{a}(b-y))\sin\frac{n\pi x}{a} \quad \text{เมื่อ} \quad n = 1,2,...$$

นั่นคือ $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\frac{n\pi}{a}(b-y))\sin\frac{n\pi x}{a}$ เมื่อ $n = 1,2,...$

เนื่องจาก $u(x,b) = F(x)$ แทนใน $u(x,y)$

จะได้ $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi x}{a} = F(x)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

จาก $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$ เมื่อ $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{F}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

จะได้ว่า $B_n \sinh(\frac{n\pi b}{a}) = \frac{2}{a}\int_0^a \mathrm{F}(x)\sin\frac{n\pi x}{b}dx$

$$B_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a \mathrm{F}(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh(\frac{n\pi}{a}(b-y))\sin\frac{n\pi x}{a} \quad \text{เมื่อ} \quad B_n = \frac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\int_0^a \mathrm{F}(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

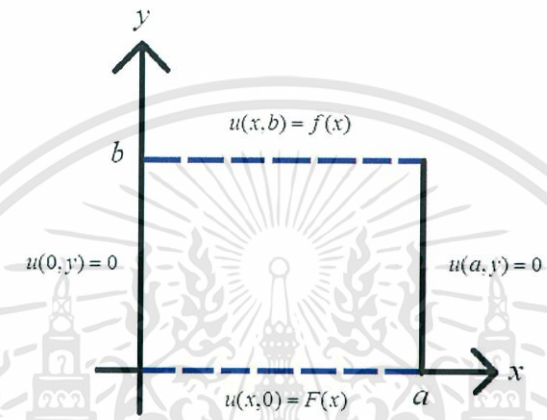
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u(0,y)=0\,,u(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=F(x)\,,u(x,b)=f(x)\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.7 ปัญหาแบบดีรีเคลในรูปแบบที่ 5

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=\lambda^2$$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2>0$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$$

จาก (1.1a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (1.1b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $u(0,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0,y)=\mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $\mathrm{X}(0)=0$ และ $\mathrm{X}(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(0)=c_1\cosh\lambda(0)+c_2\sinh\lambda(0)=c_1\cosh(0)+c_2\sinh(0)=0$

$c_1(1)+c_2(0)=0$ จะได้ว่า $c_1=0$ ซึ่งได้ว่า $\mathrm{X}(x)=c_2\sinh\lambda x$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(a)=c_2\sinh\lambda a=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda a\neq 0$ จะได้ว่า $c_2=0$

ดังนั้น $\mathrm{X}(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x,0)=F(x), u(x,b)=f(x)$

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2=0$

จะได้ $X''(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)=0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $X''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_5x+c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_7y+c_8$

เนื่องจาก $u(0,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0,y)=\mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $\mathrm{X}(0)=0$ และ $\mathrm{X}(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(0)=c_5(0)+c_6=0$ จะได้ว่า $c_6=0$ จะได้ว่า $\mathrm{X}(x)=c_5x$

เนื่องจาก $\mathrm{X}(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}(a)=c_5a=0$ ซึ่ง $a\neq 0$ จะได้ว่า $c_5=0$

ดังนั้น $\mathrm{X}(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(x,0)=F(x), u(x,b)=f(x)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2<0$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $u(0,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(0,y)=\mathrm{X}(0)\,\mathrm{Y}(y)$

เนื่องจาก $u(a,y)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(a,y)=\mathrm{X}(a)\,\mathrm{Y}(y)$

นั่นคือ $\mathrm{X}(0)=0$ และ $X(a)=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $\mathrm{X}(0)=0$ จะได้ $X(0)=c_9\cos\lambda 0+c_{10}\sin\lambda 0=c_9\cos 0+c_{10}\sin 0=0$

$c_9(1)+c_{10}(0)=0$ จะได้ว่า $c_9=0$ นั่นคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{10}\sin\lambda y$

เนื่องจาก $X(a)=0$ จะได้ $X(a)=c_{10}\sin\lambda a=0$

นั่นคือ $\mathrm{X}(a)=0$ เมื่อ $c_{10}=0$ หรือ $\sin\lambda a=0$

ถ้า $c_{10}=0$ จะได้ $X(x)=0$ ดังนั้น $u(x,y)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\sin\lambda a=0$ จะได้ว่า $X(a)=0$ เมื่อ $\sin\lambda a=0=\sin\lambda\pi$

นั่นคือ $\lambda=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ดังนั้น $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,...$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,...$ เป็น Eigenvalues

จะได้ Eigen functions คือ $X(x)=c_{10}\sin\dfrac{n\pi x}{a}$ เมื่อ $n=1,2,...$

ดังนั้น $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)=\left(c_{11}\cosh\dfrac{n\pi y}{a}+c_{12}\sinh\dfrac{n\pi y}{a}\right)\left(c_{10}\sin\dfrac{n\pi x}{a}\right)$

เมื่อ $n=1,2,...$

$u(x,y)=\left(\mathrm{A}_n\cosh\dfrac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\dfrac{n\pi y}{a}\right)\left(\sin\dfrac{n\pi x}{a}\right)$ เมื่อ $n=1,2,...$

นั่นคือ $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\dfrac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\dfrac{n\pi y}{a}\right)\left(\sin\dfrac{n\pi x}{a}\right)$

เนื่องจาก $u(x,0)=F(x)$ แทนใน $u(x,y)$

จะได้ $u(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi x}{a}=F(x)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

นั่นคือ $A_n=\dfrac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\dfrac{n\pi x}{a}dx$

เนื่องจาก $u(x,b)=f(x)$ แทนใน $u(x,y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $$u(x,b)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)=f(x)$$

ดังนั้น $$a_n=\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}$$

จาก $$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

จะได้ $$\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$B_n\sinh\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}$$

นั่นคือ $$B_n=\frac{\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)$$

เมื่อ $A_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx$ **และ** $B_n=\frac{\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$

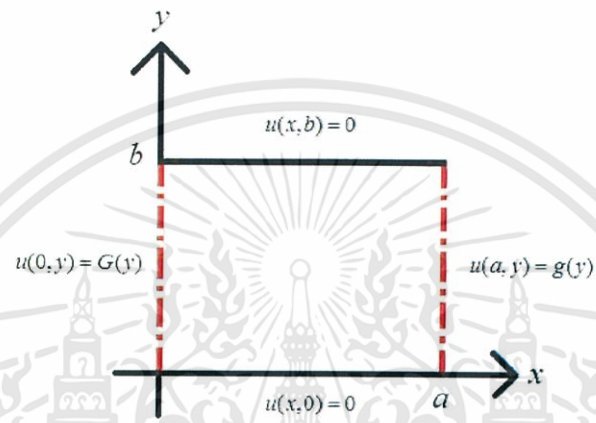
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 6 จงหาผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u(0,y)=G(y)\,,u(a,y)=g(y)\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0\,,u(x,b)=0\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.8 ปัญหาแบบดีรีเคลในรูปแบบที่ 6

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=\lambda^2$$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2<0$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และ $\mathrm{Y}(b)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_{11}\cosh\lambda(0)+c_{12}\sinh\lambda(0)=c_{11}\cosh(0)+c_{12}\sinh(0)=0$

$c_{11}(1)+c_{12}(0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$ นั่นคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(b)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(b)=c_{12}\sinh\lambda(b)=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda(b)\neq 0$ จะได้ว่า $c_{12}=0$

ดังนั้น $\mathrm{Y}(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(0,y)=G(y), u(a,y)=g(y)$

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2=0$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)=0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_5x+c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_7y+c_8$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และ $\mathrm{Y}(b)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_7(0)+c_8=0$ จะได้ว่า $c_8=0$ นั่นคือ $\mathrm{Y}(y)=c_7y$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(b)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(b)=c_7b=0$ ซึ่ง $b\neq 0$ จะได้ว่า $c_7=0$

ดังนั้น $\mathrm{Y}(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u(0,y)=G(y),\ u(a,y)=g(y)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2>0$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$

จาก (1.1a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (1.1b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และ $\mathrm{Y}(b)=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_3\cos\lambda 0+c_4\sin\lambda 0=c_3\cos 0+c_4\sin 0=0$

$c_3(1)+c_4(0)=0$ จะได้ว่า $c_3=0$ นั่นคือ $Y(y)=c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $Y(b)=0$ จะได้ $Y(b)=c_4\sin\lambda b=0$

นั่นคือ $Y(b)=0$ เมื่อ $c_4=0$ หรือ $\sin\lambda b=0$

ถ้า $c_4=0$ จะได้ $Y(y)=0$ ดังนั้น $u(x,y)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\sin\lambda b=0$ จะได้ว่า $Y(b)=0$ เมื่อ $\sin\lambda b=0=\sin\lambda\pi$

นั่นคือ $\lambda=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ดังนั้น $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$ เป็น Eigenvalues

จะได้ Eigen Functions คือ $Y(y)=c_4\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$

ดังนั้น $u(x,y)=X(x)\,Y(y)=\left(c_9\cosh\dfrac{n\pi x}{b}+c_{10}\sinh\dfrac{n\pi x}{b}\right)\left(c_4\sin\dfrac{n\pi y}{b}\right)$

เมื่อ $n=1,2,...$

$$u(x,y)=\left(A_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}\right)$$ เมื่อ $n=1,2,...$

นั่นคือ $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cosh\dfrac{n\pi x}{b}+B_n\sinh\dfrac{n\pi x}{b}\right)\left(\sin\dfrac{n\pi y}{b}\right)$

เนื่องจาก $u(0,y)=G(y)$ แทนใน $u(x,y)$

จะได้ $u(0,y)=\sum_{i=1}^{\infty}A_n\sin\dfrac{n\pi y}{b}=G(y)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

นั่นคือ $A_n=\dfrac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}dy$

เนื่องจาก $u(a,y)=g(y)$ แทนใน $u(x,y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $u(a,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi a}{b}\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}\right)=g(y)$

$$a_n=\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi a}{b}$$

จาก $a_n=\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

จะได้ $\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi a}{b}=\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

$$B_n\sinh\frac{n\pi a}{b}=\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}$$

นั่นคือ $B_n=\dfrac{\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}\right)$$

เมื่อ $A_n=\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $B_n=\dfrac{\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}$

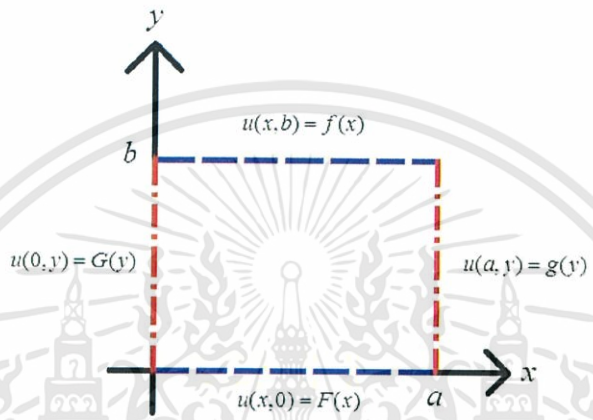
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 7 จงหาผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u(0,y)=G(y)\,,u(a,y)=g(y)\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=F(x)\,,u(x,b)=f(x)\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.9 ปัญหาแบบดีรีเคลในรูปแบบที่ 7

วิธีทำ ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรแบบนี้ต้องแบ่งออกเป็น 2 ปัญหา โดย

ปัญหาที่ 1 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_1(0,y)=G(y)\,,u_1(a,y)=g(y)\,;0\le y\le b$$

$$u_1(x,0)=0\,,u_1(x,b)=0\,;0\le x\le a$$

ปัญหาที่ 2 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_2(0,y)=0\,,u_2(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u_2(x,0)=F(x)\,,u_2(x,b)=f(x)\,;0\le x\le a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ u_1 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 1 และ u_2 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 2 แล้ว

โดย principle of superposition

$$u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 6 คือ

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}\right)$$

เมื่อ $A_n=\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $B_n=\dfrac{\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 5 คือ

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+D_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)$$

เมื่อ $C_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$ และ $D_n=\dfrac{\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนด $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ **คือ**

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+D_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)$$

เมื่อ $A_n=\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $B_n=\dfrac{\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}$

และ $C_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$ และ $D_n=\dfrac{\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.1.2 ปัญหานิวแมนสำหรับสมการลาปลาซ

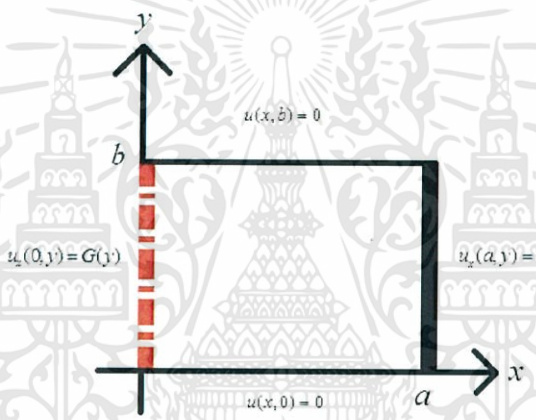
เราใช้วิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร ซึ่งปัญหาแบบนิวแมนนี้มีเงื่อนไขขอบเขตแตกต่างกันหลายรูปแบบ ดังตัวอย่างดังต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 8 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=G(y)\,,u_x(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0\,,u(x,b)=0\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.10 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 3

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=\lambda^2$$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2<0$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (3.3b) จะได้ว่า $Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,0)=X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,b)=X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0)=0$ และ $Y(b)=0$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_{11}\cosh\lambda(0)+c_{12}\sinh\lambda(0)=c_{11}\cosh(0)+c_{12}\sinh(0)=0$

$c_{11}(1)+c_{12}(0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y)=c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $Y(b)=0$ จะได้ $Y(b)=c_{12}\sinh\lambda(b)=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda(b)\neq 0$ จะได้ว่า $c_{12}=0$

ดังนั้น $Y(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u_x(0,y)=G(y)$

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2=0$

จะได้ $X''(x)=0$ และ $Y''(y)=0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $X''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $X(x)=c_5x+c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $Y''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_7y+c_8$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,0)=X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=X(x)Y(y)$ จะได้ $u(x,b)=X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0)=0$ และ $Y(b)=0$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_7(0)+c_8=0$ จะได้ว่า $c_8=0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y)=c_7y$

เนื่องจาก $Y(b)=0$ จะได้ $Y(b)=c_7b=0$ ซึ่ง $b\neq 0$ จะได้ว่า $c_7=0$

ดังนั้น $Y(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u_x(0,y)=G(y)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2>0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)}=-\lambda^2$

จะได้ $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$ และ $Y''(y)+\lambda^2Y(y)=0$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $X''(x)-\lambda^2X(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $X(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $Y''(y)+\lambda^2Y(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

เนื่องจาก $u(x,b)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และ $\mathrm{Y}(b)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_3\cos\lambda(0)+c_4\sin\lambda(0)=c_3\cos(0)+c_4\sin(0)=0$

$c_3(1)+c_4(0)=0$ จะได้ว่า $c_3=0$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{Y}(y)=c_4\sin\lambda y$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(b)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(b)=c_4\sin\lambda(b)=0$

จะได้ว่า $\mathrm{Y}(b)=0$ เมื่อ $c_4=0$ หรือ $\sin\lambda(b)=0$

ถ้า $c_4=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(y)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\sin\lambda(b)=0$ จะได้ว่า $\mathrm{Y}(b)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(b)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$ เป็น Eigenvalue

จะได้ Eigenfunction คือ $\mathrm{Y}(y)=c_4\sin\dfrac{n\pi}{b}y$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

เนื่องจาก $u_x(a,y)=0$ เขียนในรูป $u_x(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_x(a,y)=\mathrm{X}'(a)\,\mathrm{Y}(y)=0$

นั่นคือ $X'(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}'(a)=0$ จะได้ $\mathrm{X}'(a)=c_1\lambda\sinh\lambda a+c_2\lambda\cosh\lambda a=0$

ซึ่งจะได้ว่า $c_1=\cosh\lambda a$ และ $c_2=-\sinh\lambda a$

จะได้ $\mathrm{X}(x)=\cosh\lambda a\cosh\lambda x-\sinh\lambda a\sinh\lambda x=\cosh(\lambda a-\lambda x)=\cosh(\lambda(a-x))$

ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{X}(x)=\cosh(\lambda(a-x))$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$ จะได้ $\mathrm{X}(x)=\cosh(\dfrac{n\pi}{b}(a-x))$

ดังนั้น ผลเฉลย $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)=\left(\cosh(\dfrac{n\pi}{b}(a-x))\right)\left(c_4\sin\dfrac{n\pi}{b}y\right)$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

$$u(x,y)=A_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}\ \text{เมื่อ}\ n=1,2,\ldots$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นคือ $$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

จะได้ว่า $u_x(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}-A_n\frac{n\pi}{b}\sinh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$

เนื่องจาก $u_x(0,y)=G(y)$ จะได้ $u_x(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}-A_n\frac{n\pi}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}a\sin\frac{n\pi}{b}y=G(y)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

จาก $\mathrm{G}(y)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $a_n=\frac{2}{L}\int_0^L\mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{L}dy$

จะได้ว่า $-A_n\frac{n\pi}{b}\sinh(\frac{n\pi a}{b})=\frac{2}{b}\int_0^b\mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

$$A_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b\mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b\mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 9 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0;0\le x\le a,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=0,u_x(a,y)=0;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0,u(x,b)=f(x);0\le x\le a$$

วิธีทำ การหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $$\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=\lambda^2$$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

กรณีที่ 1 $\lambda^2>0$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2 \quad \text{และ} \quad \frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$$

จะได้ $$\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0 \quad \text{และ} \quad \mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

จาก $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$ จะได้ $\mathrm{X}'(x)=c_1\lambda\sinh\lambda x+c_2\lambda\cosh\lambda x$

จาก $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$ จะได้ $\mathrm{Y}'(y)=-c_3\lambda\sin\lambda y+c_4\lambda\cos\lambda y$

เนื่องจาก $u_x(0,y)=0$ เขียนในรูป $u_x(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_x(0,y)=\mathrm{X}'(0)\,\mathrm{Y}(y)=0$

เนื่องจาก $u_x(a,y)=0$ เขียนในรูป $u_x(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_x(a,y)=\mathrm{X}'(a)\,\mathrm{Y}(y)=0$

นั่นคือ $X'(0)=0$ และ $X'(a)=0$

เนื่องจาก $X'(0)=0$ จะได้ $X'(0)=c_1\lambda\sinh\lambda(0)+c_2\lambda\cosh\lambda(0)=c_1\lambda(0)+c_2\lambda(1)=0$

$c_2\lambda=0$ จะได้ว่า $c_2=0$ ซึ่งจะได้ว่า $X(x)=c_1\cosh\lambda x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $X'(a)=0$ จะได้ $X'(a)=c_1\lambda\sinh\lambda a=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda a\neq 0$ จะได้ว่า $c_1=0$

ดังนั้น $X(x)=0$ นั่นคือ $u(x,y)=0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $u(x,b)=\mathrm{X}(x)Y(b)=f(x)$

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2=0$ จะได้ $\mathrm{X}''(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)=0$

ดังนั้น $\dfrac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2$ และ $\dfrac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)=0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_5x+c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_7y+c_8$

จาก $\mathrm{X}(x)=c_5x+c_6$ จะได้ $\mathrm{X}'(x)=c_5$

จาก $\mathrm{Y}(y)=c_7y+c_8$ จะได้ $\mathrm{Y}'(y)=c_7$

เนื่องจาก $u_x(0,y)=0$ เขียนในรูป $u_x(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_x(0,y)=\mathrm{X}'(0)\,\mathrm{Y}(y)=0$

เนื่องจาก $u_x(a,y)=0$ เขียนในรูป $u_x(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_x(a,y)=\mathrm{X}'(a)\,\mathrm{Y}(y)=0$

นั่นคือ $\mathrm{X}'(0)=0$ และ $\mathrm{X}'(a)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}'(0)=0$ และ $\mathrm{X}'(a)=0$ จะได้ $X'(0)=c_5=0=X'(a)$ จะได้ว่า $c_5=0$

ซึ่งได้ว่า $\mathrm{X}(x)=c_6$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ ดังนั้น $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)=0$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_7(0)+c_8=0$ จะได้ว่า $c_8=0$ ซึ่งได้ว่า $Y(y)=c_7y$

จะได้ว่า ผลเฉลยคือ $u(x,y)=X(x)Y(y)=c_6\left(c_7y\right)=A_0y$

เนื่องจาก $u(x,b)=f(x)$ จะได้ว่า $u(x,b)=f(x)=A_0b$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2<0$

ดังนั้น $\dfrac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2$ และ $\dfrac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก (3.3b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

จาก $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$ จะได้ $\mathrm{X}'(x)=-c_9\lambda\sin\lambda x+c_{10}\lambda\cos\lambda x$

จาก $\mathrm{Y}(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$ จะได้ $\mathrm{Y}'(y)=c_{11}\lambda\sinh\lambda y+c_{12}\lambda\cosh\lambda y$

เนื่องจาก $u_x(0,y)=0$ เขียนในรูป $u_x(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_x(0,y)=\mathrm{X}'(0)\,\mathrm{Y}(y)=0$

เนื่องจาก $u_x(a,y)=0$ เขียนในรูป $u_x(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_x(a,y)=\mathrm{X}'(a)\,\mathrm{Y}(y)=0$

นั่นคือ $X'(0)=0$ และ $X'(a)=0$

เนื่องจาก $X'(0)=0$ จะได้ $X'(0)=-c_9\lambda\sin\lambda(0)+c_{10}\lambda\cos\lambda(0)=-c_9\lambda(0)+c_{10}\lambda(1)=0$

$c_{10}\lambda=0$ จะได้ว่า $c_{10}=0$ ซึ่งจะได้ว่า $X(x)=c_9\cos\lambda x$

เนื่องจาก $X'(a)=0$ จะได้ $X'(a)=-c_9\lambda\sin\lambda a=0$

ดังนั้น $X'(a)=0$ เมื่อ $c_9=0$ หรือ $\lambda\sin\lambda a=0$

ถ้า $c_9=0$ จะได้ $X(x)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\lambda\sin\lambda a=0$ เมื่อ $\lambda=0$ หรือ $\sin\lambda a=0$

ถ้า $\lambda=0$ จะได้ $\mathrm{X}''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_5x+c_6$ จะได้ว่า $\mathrm{X}'(x)=c_5$

ซึ่งได้ว่า $X(x)=c_6$

เนื่องจาก $\lambda=0$ เป็น Eigenvalue เมื่อ $n=0$ จะมี Eigenfunction คือ $X(x)=c_6$ เมื่อ $n=0$

ถ้า $\sin\lambda(a)=0$ จะได้ว่า $\mathrm{Y}'(a)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(a)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$ เป็น Eigenvalue

จะได้ Eigenfunction คือ $X(x)=c_9\cos\dfrac{n\pi}{a}x$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

เนื่องจาก $u(x,0)=0$ เขียนในรูป $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_{11}\cosh\lambda 0+c_{12}\sinh\lambda 0=c_{11}\cosh 0+c_{12}\sinh 0=0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$c_{11}(1)+c_{12}(0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$ ซึ่งได้ว่า $\mathrm{Y}(y)=c_{12}\sinh\lambda y$ เมื่อ $n=1,2,...$

ถ้า $\lambda=0$ จะได้ $\mathrm{Y}''(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_7y+c_8$

เนื่องจาก $Y(0)=0$ จะได้ $Y(0)=c_7(0)+c_8=0$ จะได้ว่า $c_8=0$ ซึ่งได้ว่า $Y(y)=c_7y$

จะได้ว่า ผลเฉลยคือ $u(x,y)=X(x)Y(y)=c_6\left(c_7y\right)=A_0y$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,...$ จะได้ $\mathrm{Y}(y)=c_{12}\sinh\dfrac{n\pi}{a}y$

ผลเฉลยคือ $u(x,y)=(c_9\cos\dfrac{n\pi}{a}x)(c_{12}\sinh\dfrac{n\pi}{a}y)=A_n\cos\dfrac{n\pi}{a}x\sinh\dfrac{n\pi}{a}y$ เมื่อ $n=1,2,...$

นั่นคือ $u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\dfrac{n\pi}{a}x\sinh\dfrac{n\pi}{a}y$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาคือ $u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\dfrac{n\pi}{a}x\sinh\dfrac{n\pi}{a}y$

เนื่องจาก $u(x,b)=f(x)$ แทนใน $u(x,y)$

จะได้ $u(x,b)=A_0b+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\dfrac{n\pi}{a}x\sinh\dfrac{n\pi}{a}b=f(x)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน cosine Series

จาก $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ เมื่อ $a_0=\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$ และ $a_n=\dfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}dx$

จะได้ว่า $2A_0b=\dfrac{2}{a}\int_0^a f(x)dx$ นั่นคือ $A_0=\dfrac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$

และ $A_n\sinh\dfrac{n\pi}{a}b=\dfrac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\dfrac{n\pi}{a}xdx$ นั่นคือ $A_n=\dfrac{2}{a\sinh\dfrac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\dfrac{n\pi}{a}xdx$

ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนดคือ

$$u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

เมื่อ $A_0=\dfrac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$ **และ** $A_n=\dfrac{2}{a\sinh\dfrac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{a}dx$

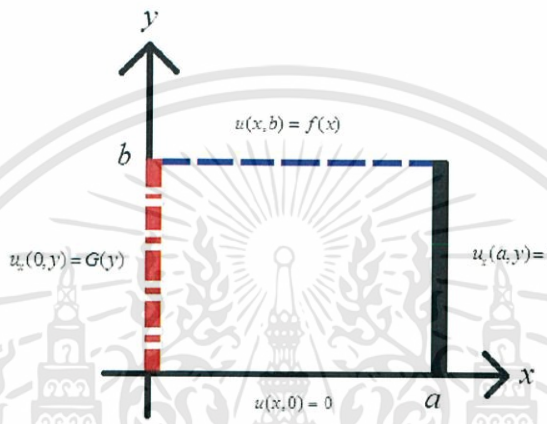
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 10 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=G(y)\,,u_x(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0\,,u(x,b)=f(x)\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.11 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 4

วิธีทำ

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรแบบนี้ต้องแบ่งออกเป็น 2 ปัญหา โดย

ปัญหาที่ 1 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{1x}(0,y)=0\,,u_{1x}(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u_1(x,0)=0\,,u_1(x,b)=f(x)\,;0\le x\le a$$

ปัญหาที่ 2 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{2x}(0,y)=G(y)\,,u_{2x}(a,y)=0\,;0\le y\le b$$

$$u_2(x,0)=0\,,u_2(x,b)=0\,;0\le x\le a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ u_1 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 1 และ u_2 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 2 แล้ว

โดย principle of superposition $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 9 คือ

$$u_1(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$ และ $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

และ ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 8 คือ

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $B_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนด $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ คือ

$$u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$, $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

และ $B_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

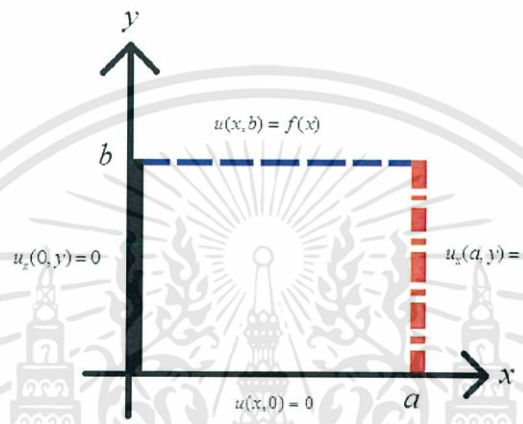
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=0\,, u_x(a,y)=g(y)\,; 0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0\,, u(x,b)=f(x)\,; 0\le x\le a$$



รูปที่ 3.12 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 5

วิธีทำ

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรแบบนี้ต้องแบ่งออกเป็น 2 ปัญหา โดย

ปัญหาที่ 1 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{1x}(0,y)=0\,,\ u_{1x}(a,y)=0\,; 0\le y\le b$$

$$u_1(x,0)=0 \ , \ u_1(x,b)=f(x)\,; 0\le x\le a$$

ปัญหาที่ 2 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{2x}(0,y)=0\,,\ u_{2x}(a,y)=g(y)\,; 0\le y\le b$$

$$u_2(x,0)=0 \ , \ u_2(x,b)=0 \ ; 0\le x\le a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ u_1 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 1 และ u_2 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 2 แล้ว

โดย principle of superposition $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 9 คือ

$$u_1(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$ และ $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

และ ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$

ดังนั้น $\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$

จะได้ $\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=\lambda^2$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

<u>กรณีที่ 1</u> $\lambda^2<0$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)+\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_9\cos\lambda x+c_{10}\sin\lambda x$

จาก (3.3b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)-\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_{11}\cosh\lambda y+c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $u_2(x,0)=0$ เขียนในรูป $u_2(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_2(x,0)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(0)$

เนื่องจาก $u_2(x,b)=0$ เขียนในรูป $u_2(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_2(x,b)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(b)$

นั่นคือ $\mathrm{Y}(0)=0$ และ $\mathrm{Y}(b)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(0)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(0)=c_{11}\cosh\lambda(0)+c_{12}\sinh\lambda(0)=c_{11}\cosh(0)+c_{12}\sinh(0)=0$

$c_{11}(1)+c_{12}(0)=0$ จะได้ว่า $c_{11}=0$ ซึ่งจะได้ว่า $\mathrm{Y}(y)=c_{12}\sinh\lambda y$

เนื่องจาก $\mathrm{Y}(b)=0$ จะได้ $\mathrm{Y}(b)=c_{12}\sinh\lambda(b)=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda(b)\neq0$ จะได้ว่า $c_{12}=0$

ดังนั้น $\mathrm{Y}(y)=0$ นั่นคือ $u_2(x,y)=0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u_{2x}(a,y)=g(y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2 = 0$

จะได้ $X''(x) = 0$ และ $Y''(y) = 0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $X''(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_5 x + c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $Y''(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_7 y + c_8$

เนื่องจาก $u_2(x,0) = 0$ เขียนในรูป $u_2(x,y) = X(x)Y(y)$ จะได้ $u_2(x,0) = X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u_2(x,b) = 0$ เขียนในรูป $u_2(x,y) = X(x)Y(y)$ จะได้ $u_2(x,b) = X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0) = 0$ และ $Y(b) = 0$

เนื่องจาก $Y(0) = 0$ จะได้ $Y(0) = c_7(0) + c_8 = 0$ จะได้ว่า $c_8 = 0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y) = c_7 y$

เนื่องจาก $Y(b) = 0$ จะได้ $Y(b) = c_7 b = 0$ ซึ่ง $b \neq 0$ จะได้ว่า $c_7 = 0$

ดังนั้น $Y(y) = 0$ นั่นคือ $u_2(x,y) = 0$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข $u_{2x}(a,y) = g(y)$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2 > 0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ และ $Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_1 \cosh \lambda x + c_2 \sinh \lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_3 \cos \lambda y + c_4 \sin \lambda y$

เนื่องจาก $u_2(x,0) = 0$ เขียนในรูป $u_2(x,y) = X(x)Y(y)$ จะได้ $u_2(x,0) = X(x)Y(0)$

เนื่องจาก $u_2(x,b) = 0$ เขียนในรูป $u_2(x,y) = X(x)Y(y)$ จะได้ $u_2(x,b) = X(x)Y(b)$

นั่นคือ $Y(0) = 0$ และ $Y(b) = 0$

เนื่องจาก $Y(0) = 0$ จะได้ $Y(0) = c_3 \cos \lambda(0) + c_4 \sin \lambda(0) = c_3 \cos(0) + c_4 \sin(0) = 0$

$c_3(1) + c_4(0) = 0$ จะได้ว่า $c_3 = 0$ ซึ่งจะได้ว่า $Y(y) = c_4 \sin \lambda y$

เนื่องจาก $Y(b) = 0$ จะได้ $Y(b) = c_4 \sin \lambda(b) = 0$

จะได้ว่า $Y(b) = 0$ เมื่อ $c_4 = 0$ หรือ $\sin \lambda(b) = 0$

ถ้า $c_4 = 0$ จะได้ $Y(y) = 0$ นั่นคือ $u_2(x,y) = 0$ ซึ่งไม่ต้องการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $\sin\lambda(b)=0$ จะได้ว่า $\mathrm{Y}(b)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(b)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\frac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$

ถ้า $\lambda=\frac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$ เป็น Eigenvalue

จะได้ Eigenfunction คือ $\mathrm{Y}(y)=c_4\sin\frac{n\pi}{b}y$ เมื่อ $n=1,2,...$

เนื่องจาก $u_{2x}(0,y)=0$ เขียนในรูป $u_{2x}(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้ $u_{2x}(0,y)=\mathrm{X}'(0)\,\mathrm{Y}(y)=0$

นั่นคือ $\mathrm{X}'(0)=0$

เนื่องจาก $\mathrm{X}'(0)=0$ จะได้ $\mathrm{X}'(0)=c_1\lambda\sinh\lambda(0)+c_2\lambda\cosh\lambda(0)=c_1\lambda(0)+c_2\lambda(1)=0$

$c_2\lambda=0$ จะได้ว่า $c_2=0$ นั่นคือ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x$

ถ้า $\lambda=\frac{n\pi}{b}$ เมื่อ $n=1,2,...$ จะได้ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\frac{n\pi}{b}x$

ดังนั้น ผลเฉลย $u_2(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)=\left(c_1\cosh\frac{n\pi}{b}x\right)\left(c_4\sin\frac{n\pi}{b}y\right)$ เมื่อ $n=1,2,...$

$$u_2(x,y)=B_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}\quad\text{เมื่อ}\quad n=1,2,...$$

นั่นคือ $$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}$$

จะได้ว่า $u_{2x}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}$

เนื่องจาก $u_{2x}(a,y)=g(y)$ จะได้ $u_{2x}(a,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi}{b}\sinh\frac{n\pi}{b}a\sin\frac{n\pi}{b}y=g(y)$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน Sine Series

จาก $g(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $B_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(y)\sin\frac{n\pi y}{L}dy$

จะได้ว่า $B_n\frac{n\pi}{b}\sinh(\frac{n\pi a}{b})=\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$B_n = \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi a/b)} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

และ ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 คือ

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cosh \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{เมื่อ} \quad B_n = \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi a/b)} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนด $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ คือ

$$u(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a} y + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cosh \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x) dx$, $A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi}{a} b} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi}{a} x dx$

และ $B_n = \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi a/b)} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$

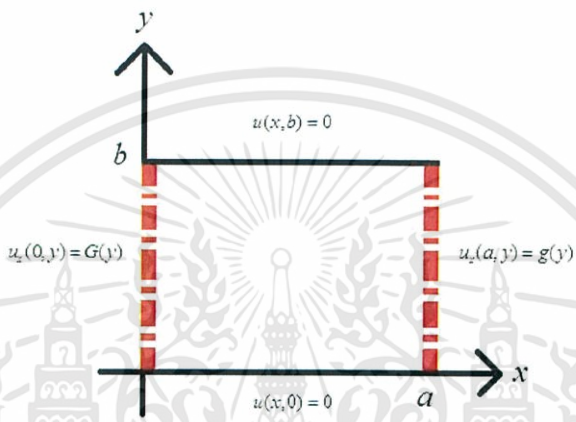
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a \, , 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=G(y) \, , u_x(a,y)=g(y) \, ; 0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0 \, , u(x,b)=0 \ ; \ 0\le x\le a$$



รูปที่ 3.13 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 6

วิธีทำ

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรแบบนี้ต้องแบ่งออกเป็น 2 ปัญหา โดย

ปัญหาที่ 1 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a \, , 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{1x}(0,y)=0 \, , u_{1x}(a,y)=g(y) \, ; 0\le y\le b$$

$$u_1(x,0)=0 \, , u_1(x,b)=0 \, ; 0\le x\le a$$

ปัญหาที่ 2 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a \, , 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{2x}(0,y)=G(y) \, , u_{2x}(a,y)=0 \, ; 0\le y\le b$$

$$u_2(x,0)=0 \ , \ u_2(x,b)=0 \ ; \ 0\le x\le a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ u_1 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 1 และ u_2 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 2 แล้ว

โดย principle of superposition $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 เป็นไปตาม ปัญหาที่ 2 ของตัวอย่างที่ 11 คือ

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_n=\dfrac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

และ ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 8 คือ

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $B_n=\dfrac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนด $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ **คือ**

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_n=\dfrac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

และ $B_n=\dfrac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

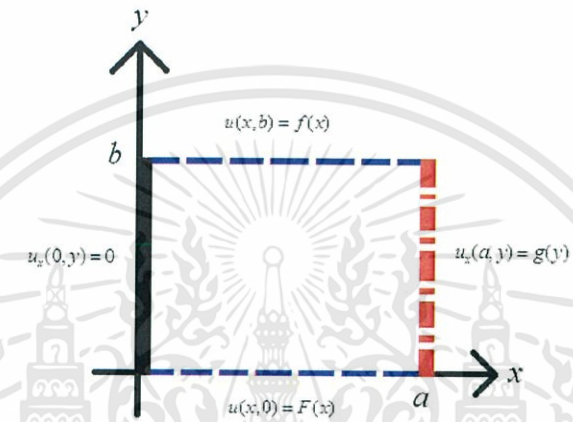
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 13 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ ;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=0\,,u_x(a,y)=g(y)\,;0\le y\le b$$

$$u(x,0)=F(x)\,,u(x,b)=f(x)\,;0\le x\le a$$



รูปที่ 3.14 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 7

วิธีทำ

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรแบบนี้ต้องแบ่งออกเป็น 2 ปัญหา โดย

ปัญหาที่ 1 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0 \ ;0\le x\le a\,,\ 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{1x}(0,y)=0\,,\ u_{1x}(a,y)=0\ ;\ 0\le y\le b$$

$$u_1(x,0)=F(x)\,,\ u_1(x,b)=f(x)\ ;\ 0\le x\le a$$

ปัญหาที่ 2 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0\,;0\le x\le a\,,0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{2x}(0,y)=0\,,\ u_{2x}(a,y)=g(y)\,;0\le y\le b$$

$$u_2(x,0)=0\,,u_2(x,b)=0\,;0\le x\le a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ u_1 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 1 และ u_2 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 2 แล้ว

โดย principle of superposition $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 สามารถหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปร

สมมติให้ $u(x,y)=\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $\mathrm{X}''(x)\,\mathrm{Y}(y)+\mathrm{X}(x)\,\mathrm{Y}''(y)=0$

ดังนั้น $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}$$

จะได้ $$\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=-\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=\lambda^2$$

แสดง 3 กรณี คือ $\lambda^2<0$, $\lambda^2=0$ และ $\lambda^2>0$

<u>กรณีที่ 1</u> $\lambda^2>0$

ดังนั้น $\frac{\mathrm{X}''(x)}{\mathrm{X}(x)}=\lambda^2$ และ $\frac{\mathrm{Y}''(y)}{\mathrm{Y}(y)}=-\lambda^2$

จะได้ $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ และ $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$

จาก (3.1a) จะได้ว่า $\mathrm{X}''(x)-\lambda^2\,\mathrm{X}(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$

จาก (3.1b) จะได้ว่า $\mathrm{Y}''(y)+\lambda^2\,\mathrm{Y}(y)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$

จาก $\mathrm{X}(x)=c_1\cosh\lambda x+c_2\sinh\lambda x$ จะได้ $\mathrm{X}'(x)=c_1\lambda\sinh\lambda x+c_2\lambda\cosh\lambda x$

จาก $\mathrm{Y}(y)=c_3\cos\lambda y+c_4\sin\lambda y$ จะได้ $\mathrm{Y}'(y)=-c_3\lambda\sin\lambda y+c_4\lambda\cos\lambda y$

เนื่องจาก $u_{1x}(0,y)=0$ เขียนในรูป $u_{1x}(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_{1x}(0,y)=\mathrm{X}'(0)\,\mathrm{Y}(y)=0$

เนื่องจาก $u_{1x}(a,y)=0$ เขียนในรูป $u_{1x}(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$ จะได้ $u_{1x}(a,y)=\mathrm{X}'(a)\,\mathrm{Y}(y)=0$

นั่นคือ $X'(0)=0$ และ $X'(a)=0$

เนื่องจาก $X'(0)=0$ จะได้ $X'(0)=c_1\lambda\sinh\lambda(0)+c_2\lambda\cosh\lambda(0)=c_1\lambda(0)+c_2\lambda(1)=0$

$c_2\lambda=0$ จะได้ว่า $c_2=0$ ซึ่งจะได้ว่า $X(x)=c_1\cosh\lambda x$

เนื่องจาก $X'(a)=0$ จะได้ $X'(a)=c_1\lambda\sinh\lambda a=0$ ซึ่ง $\sinh\lambda a\neq 0$ จะได้ว่า $c_1=0$

ดังนั้น $X(x)=0$ นั่นคือ $u_1(x,y)=0$ ซึ่งขัดแย้งกับ $u_1(x,b)=\mathrm{X}(x)Y(b)=f(x)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 2</u> $\lambda^2 = 0$ จะได้ $X''(x) = 0$ และ $Y''(y) = 0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) = 0$ และ $Y''(y) = 0$

จาก (3.2a) จะได้ว่า $X''(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_5 x + c_6$

จาก (3.2b) จะได้ว่า $Y''(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_7 y + c_8$

จาก $X(x) = c_5 x + c_6$ จะได้ $X'(x) = c_5$

จาก $Y(y) = c_7 y + c_8$ จะได้ $Y'(y) = c_7$

เนื่องจาก $u_{1x}(0, y) = 0$ เขียนในรูป $u_{1x}(x, y) = X'(x)\,Y(y)$ จะได้ $u_{1x}(0, y) = X'(0)\,Y(y) = 0$

เนื่องจาก $u_{1x}(a, y) = 0$ เขียนในรูป $u_{1x}(x, y) = X'(x)\,Y(y)$ จะได้
$u_{1x}(a, y) = X'(a)\,Y(y) = 0$

นั่นคือ $X'(0) = 0$ และ $X'(a) = 0$

เนื่องจาก $X'(0) = 0$ และ $X'(a) = 0$ จะได้ $X'(0) = c_5 = 0 = X'(a)$ จะได้ว่า $c_5 = 0$

ซึ่งได้ว่า $X(x) = c_6$

ผลเฉลยคือ $u_1(x, y) = X(x)Y(y) = c_6\left(c_7 y + c_8\right) = A_0 y + B_0$

เนื่องจาก $u_1(x, 0) = F(x)$ จะได้ว่า $u_1(x, 0) = F(x) = B_0$

เนื่องจาก $u_1(x, b) = f(x)$ จะได้ว่า $u_1(x, b) = f(x) = A_0 b + B_0$

<u>กรณีที่ 3</u> $\lambda^2 < 0$

ดังนั้น $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2$ และ $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$

จะได้ $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ และ $Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$

จาก (3.3a) จะได้ว่า $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ มีผลเฉลยคือ $X(x) = c_9 \cos \lambda x + c_{10} \sin \lambda x$

จาก (3.3b) จะได้ว่า $Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0$ มีผลเฉลยคือ $Y(y) = c_{11} \cosh \lambda y + c_{12} \sinh \lambda y$

จาก $X(x) = c_9 \cos \lambda x + c_{10} \sin \lambda x$ จะได้ $X'(x) = -c_9 \lambda \sin \lambda x + c_{10} \lambda \cos \lambda x$

จาก $Y(y) = c_{11} \cosh \lambda y + c_{12} \sinh \lambda y$ จะได้ $Y'(y) = c_{11} \lambda \sinh \lambda y + c_{12} \lambda \cosh \lambda y$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $u_{1x}(0,y)=0$ เขียนในรูป $u_{1x}(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้ $u_{1x}(0,y)=\mathrm{X}'(0)\,\mathrm{Y}(y)=0$

เนื่องจาก $u_{1x}(a,y)=0$ เขียนในรูป $u_{1x}(x,y)=\mathrm{X}'(x)\,\mathrm{Y}(y)$

จะได้ $u_{1x}(a,y)=\mathrm{X}'(a)\,\mathrm{Y}(y)=0$

นั่นคือ $X'(0)=0$ และ $X'(a)=0$

เนื่องจาก $X'(0)=0$ จะได้ $X'(0)=-c_9\lambda\sin\lambda(0)+c_{10}\lambda\cos\lambda(0)=-c_9\lambda(0)+c_{10}\lambda(1)=0$

$c_{10}\lambda=0$ จะได้ว่า $c_{10}=0$ ซึ่งจะได้ว่า $X(x)=c_9\cos\lambda x$

เนื่องจาก $X'(a)=0$ จะได้ $X'(a)=-c_9\lambda\sin\lambda a=0$

ดังนั้น $X'(a)=0$ เมื่อ $c_9=0$ หรือ $\lambda\sin\lambda a=0$

ถ้า $c_9=0$ จะได้ $X(x)=0$ ซึ่งไม่ต้องการ

ถ้า $\lambda\sin\lambda a=0$ เมื่อ $\lambda=0$ หรือ $\sin\lambda a=0$

ถ้า $\lambda=0$ จะได้ $\mathrm{X}''(x)=0$ มีผลเฉลยคือ $\mathrm{X}(x)=c_5x+c_6$ จะได้ว่า $\mathrm{X}'(x)=c_5$

ซึ่งได้ว่า $X(x)=c_6$

เนื่องจาก $\lambda=0$ เป็น Eigenvalue เมื่อ $n=0$ จะมี Eigenfunction คือ $X(x)=c_6$ เมื่อ $n=0$

ถ้า $\sin\lambda(a)=0$ จะได้ว่า $\mathrm{Y}'(a)=0$ เมื่อ $\sin\lambda(a)=0=\sin n\pi$

นั่นคือ $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ถ้า $\lambda=\dfrac{n\pi}{a}$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$ เป็น Eigenvalue

จะได้ Eigenfunction คือ $X(x)=c_9\cos\dfrac{n\pi}{a}x$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

ผลเฉลยคือ $u_1(x,y)=A_0y+B_0+(c_9\cos\dfrac{n\pi}{a}x)(c_{11}\cosh\dfrac{n\pi}{a}y+c_{12}\sinh\dfrac{n\pi}{a}y)$

$u_1(x,y)=A_0y+B_0+(A_n\cosh\dfrac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\dfrac{n\pi}{a}y)\cos\dfrac{n\pi}{a}x$ เมื่อ $n=1,2,\ldots$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาคือ

$$u_1(x,y) = A_0 y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh\frac{n\pi}{a}y + B_n \sinh\frac{n\pi}{a}y)\cos\frac{n\pi}{a}x$$

เนื่องจาก $u_1(x,0) = F(x)$ จะได้ $u_1(x,0) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{a}x$

ซึ่งเป็น Half Range Expansion ของ f ใน cosine Series

จาก $F(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$ เมื่อ $b_0 = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)dx$ และ $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$

จะได้ว่า $2B_0 = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)dx$ นั่นคือ $B_0 = \frac{1}{a}\int_0^a F(x)dx$

และ $A_n = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

เนื่องจาก $u_1(x,b) = f(x)$ จะได้

$$u_1(x,y) = A_0 b + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh\frac{n\pi}{a}b + B_n \sinh\frac{n\pi}{a}b)\cos\frac{n\pi}{a}x$$

จะได้ว่า $2(A_0 b + B_0) = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)dx$ นั่นคือ $A_0 = \frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx - 2B_0$

และ $A_n \cosh\frac{n\pi}{a}b + B_n \sinh\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

$$B_n \sinh\frac{n\pi}{a}b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx - A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b$$

$$B_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx - A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b$$

ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 คือ

$$u_1(x,y) = A_0 y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cosh\frac{n\pi}{a}y + B_n \sinh\frac{n\pi}{a}y)\cos\frac{n\pi}{a}x$$

เมื่อ $A_0 = \frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx - 2B_0$, $B_0 = \frac{1}{a}\int_0^a F(x)dx$, $A_n = \frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $B_n = \dfrac{2}{a\sinh\dfrac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\dfrac{n\pi}{a}x\,dx - A_n\cosh\dfrac{n\pi}{a}b$

และ ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 เป็นไปตาม ปัญหาที่ 2 ของตัวอย่างที่ 11 คือ

$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\cosh\dfrac{n\pi}{b}x\sin\dfrac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $C_n = \dfrac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b g(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}dy$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนด $u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$ คือ

$$u(x,y) = A_0 y + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y + B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y)\cos\frac{n\pi}{a}x + \sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_0 = \dfrac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx - 2B_0$, $B_0 = \dfrac{1}{a}\int_0^a F(x)dx$, $A_n = \dfrac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\dfrac{n\pi}{a}x\,dx$

, $B_n = \dfrac{2}{a\sinh\dfrac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\dfrac{n\pi}{a}x\,dx - A_n\cosh\dfrac{n\pi}{a}b$ และ

$C_n = \dfrac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b g(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}dy$

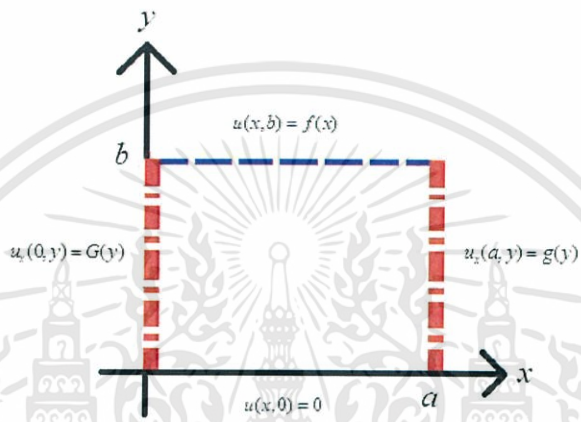
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 14 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=G(y)\,, u_x(a,y)=g(y)\,; 0\le y\le b$$

$$u(x,0)=0\,, u(x,b)=f(x)\,; 0\le x\le a$$



รูปที่ 3.15 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 8

วิธีทำ

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรแบบนี้ต้องแบ่งออกเป็น 2 ปัญหา โดย

ปัญหาที่ 1 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{1x}(0,y)=0\,, u_{1x}(a,y)=0\,; 0\le y\le b$$

$$u_1(x,0)=0\,, u_1(x,b)=f(x)\,; 0\le x\le a$$

ปัญหาที่ 2 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{2x}(0,y)=G(y)\,,\ u_{2x}(a,y)=g(y)\ ; 0\le y\le b$$

$$u_2(x,0)=0\ ,\ u_2(x,b)=0\ ; 0\le x\le a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ u_1 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 1 และ u_2 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 2 แล้ว

โดย principle of superposition $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 9 คือ

$$u_1(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y$$

เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$ **และ** $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

และ ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 12 คือ

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $B_n=\frac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

และ $C_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนด $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ **คือ**

$$u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi}{a}x\sinh\frac{n\pi}{a}y+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$, $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$,

$B_n=\frac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ **และ** $C_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

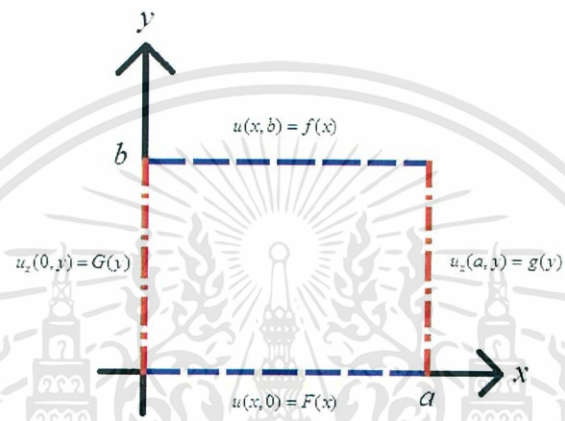
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 15 จงหาผลเฉลยของปัญหาแบบนิวแมน

ในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \ ; \ 0\le x\le a\,, 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_x(0,y)=G(y)\,, u_x(a,y)=g(y)\,; 0\le y\le b$$

$$u(x,0)=F(x)\,, u(x,b)=f(x)\,; 0\le x\le a$$



รูปที่ 3.16 ปัญหาแบบนิวแมนในรูปแบบที่ 9

<u>วิธีทำ</u>

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีการแยกตัวแปรแบบนี้ต้องแบ่งออกเป็น 2 ปัญหา โดย

ปัญหาที่ 1 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}=0\,; 0\le x\le a\,,\ 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{1x}(0,y)=0\,, u_{1x}(a,y)=0\,; 0\le y\le b$$

$$u_1(x,0)=F(x)\,, u_1(x,b)=f(x)\,; 0\le x\le a$$

ปัญหาที่ 2 คือ

จงหาผลเฉลยของปัญหาในรูปแบบ $$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}=0\,; 0\le x\le a\,,\ 0\le y\le b$$

ที่เป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $$u_{2x}(0,y)=G(y)\,, u_{2x}(a,y)=g(y)\,; 0\le y\le b$$

$$u_2(x,0)=0\,, u_2(x,b)=0\,; 0\le x\le a$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ u_1 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 1 และ u_2 เป็นผลเฉลยปัญหาที่ 2 แล้ว

โดย principle of superposition $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$

ซึ่ง ผลเฉลยของปัญหาที่ 1 เป็นไปตาม ปัญหาที่ 1 ของตัวอย่างที่ 13 คือ

$$u_1(x,y)=A_0y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y)\cos\frac{n\pi}{a}x$$

เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx-2B_0$, $B_0=\frac{1}{a}\int_0^a F(x)dx$, $A_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

และ $B_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx-A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b$

และ ผลเฉลยของปัญหาที่ 2 เป็นไปตาม ตัวอย่างที่ 12 คือ

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $C_n=\frac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

และ $D_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาที่กำหนด $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ คือ

$$u(x,y)=A_0y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh\frac{n\pi}{a}y+B_n\sinh\frac{n\pi}{a}y)\cos\frac{n\pi}{a}x+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$

เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx-2B_0$, $B_0=\frac{1}{a}\int_0^a F(x)dx$, $A_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx$

, $B_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a}xdx-A_n\cosh\frac{n\pi}{a}b$,

$C_n=\frac{2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $D_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(n\pi a/b)}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก **ตัวอย่าง 1** ถึง **ตัวอย่าง 15** สามารถสรุปผลเฉลยของปัญหาดีรีเคลและปัญหานิวแมนสำหรับสมการลาปลาซได้เป็นตารางดังต่อไปนี้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	ผลเฉลย
ตัวอย่างที่ 1 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=G(y), u(a,y)=0; 0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=0; 0\le x\le a$	$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh(\frac{n\pi}{b}(x-a))\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $A_n=\frac{-2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$
ตัวอย่างที่ 2 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(a,y)=g(y); 0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=0; 0\le x\le a$	$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $A_n=\frac{2}{b\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b \mathrm{g}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$
ตัวอย่างที่ 3 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(a,y)=0; 0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=f(x); 0\le x\le a$	$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}$ เมื่อ $B_n=\frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$
ตัวอย่างที่ 4 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(a,y)=0; 0\le y\le b$ $u(x,0)=F(x), u(x,b)=0; 0\le x\le a$	$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sinh(\frac{n\pi}{a}(b-y))\sin\frac{n\pi x}{a}$ เมื่อ $B_n=\frac{2}{a\sinh(\frac{n\pi b}{a})}\int_0^a \mathrm{F}(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$

ตารางที่ 3.1 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	ผลเฉลย
ตัวอย่างที่ 5 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(a,y)=0; 0\le y\le b$ $u(x,0)=F(x), u(x,b)=f(x);$ $0\le x\le a$	$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)$$ เมื่อ $A_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$ และ $B_n=\frac{\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$
ตัวอย่างที่ 6 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=G(y), u(a,y)=g(y);$ $0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=0; 0\le x\le a$	$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}\right)$$ เมื่อ $A_n=\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $B_n=\frac{\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}$
ตัวอย่างที่ 7 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=G(y), u(a,y)=g(y);$ $0\le y\le b$ $u(x,0)=F(x), u(x,b)=f(x);$ $0\le x\le a$	$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi x}{b}+B_n\sinh\frac{n\pi x}{b}\right)\left(\sin\frac{n\pi y}{b}\right)$$ $$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+D_n\sinh\frac{n\pi y}{a}\right)\left(\sin\frac{n\pi x}{a}\right)$$ เมื่อ $A_n=\frac{2}{b}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $B_n=\frac{\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi a}{b}}{\sinh\frac{n\pi a}{b}}$ และ $C_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$ และ $D_n=\frac{\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx-\mathrm{A}_n\cosh\frac{n\pi b}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}}$

ตารางที่ 3.2 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหาดีรีเคล (2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	ผลเฉลย
ตัวอย่างที่ 8 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=G(y), u_x(a,y)=0; 0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=0; 0\le x\le a$	$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$ เมื่อ $A_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$
ตัวอย่างที่ 9 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0, u_x(a,y)=0; 0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=f(x); 0\le x\le a$	$$u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$ เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$ และ $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$
ตัวอย่างที่ 10 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=G(y), u_x(a,y)=0; 0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=f(x); 0\le x\le a$	$$u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$ $$+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$$ เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx,$ $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$ และ $B_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b \mathrm{G}(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

ตารางที่ 3.3 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหานิวแมน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	ผลเฉลย
ตัวอย่างที่ 11 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0,$ $u_x(a,y)=g(y);0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=f(x)$ $;0\le x\le a$	$u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$ $+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$, $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$ และ $B_n=\frac{2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$
ตัวอย่างที่ 12 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=G(y),$ $u_x(a,y)=g(y);0\le y\le b$ $u(x,0)=0, u(x,b)=0;$ $0\le x\le a$	$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cosh\frac{n\pi}{b}x\sin\frac{n\pi y}{b}$ $+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $A_n=\frac{2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $B_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$
ตัวอย่างที่ 13 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a, 0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0,$ $u_x(a,y)=g(y);0\le y\le b$ $u(x,0)=F(x),$ $u(x,b)=f(x);0\le x\le a$	$u(x,y)=A_0y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi y}{a})\cos\frac{n\pi x}{a}$ $+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx-2B_0$ $B_0=\frac{1}{a}\int_0^a F(x)dx$ $A_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx,$ $B_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx-A_n\cosh\frac{n\pi b}{a}$ และ $C_n=\frac{2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

ตารางที่ 3.4 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหานิวแมน (2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	ผลเฉลย
ตัวอย่างที่ 14 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=G(y)$, $u_x(a,y)=g(y)$; $0\le y\le b$ $u(x,0)=0$, $u(x,b)=f(x)$; $0\le x\le a$	$u(x,y)=A_0y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$ $+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cosh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx$, $A_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$, $B_n=\frac{2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $C_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$
ตัวอย่างที่ 15 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le a$, $0\le y\le b$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=G(y)$, $u_x(a,y)=g(y)$; $0\le y\le b$ $u(x,0)=F(x)$, $u(x,b)=f(x)$; $0\le x\le a$	$u(x,y)=A_0y+B_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cosh\frac{n\pi y}{a}+B_n\sinh\frac{n\pi y}{a})\cos\frac{n\pi x}{a}$ $+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cosh\frac{n\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cosh(\frac{n\pi}{b}(a-x))\sin\frac{n\pi y}{b}$ เมื่อ $A_0=\frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx-2B_0$, $B_0=\frac{1}{a}\int_0^a F(x)dx$, $A_n=\frac{2}{a}\int_0^a F(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx$, $B_n=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx-A_n\cosh\frac{n\pi b}{a}$, $C_n=\frac{2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$ และ $D_n=\frac{-2}{n\pi\sinh(\frac{n\pi a}{b})}\int_0^b G(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$

ตารางที่ 3.5 ตัวอย่างผลเฉลยของปัญหานิวแมน (3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

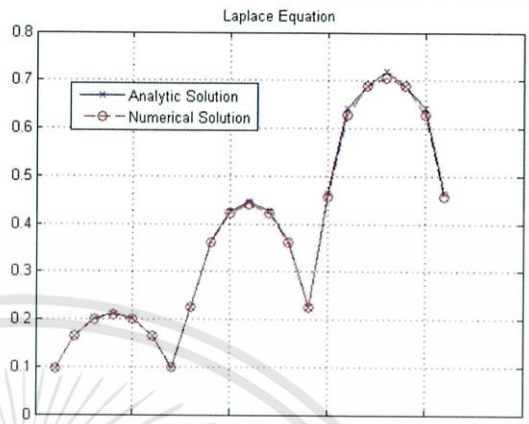
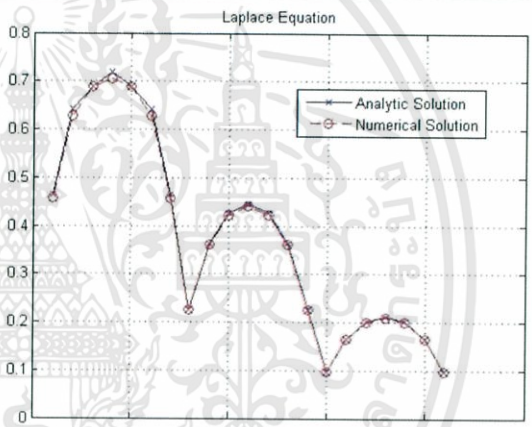
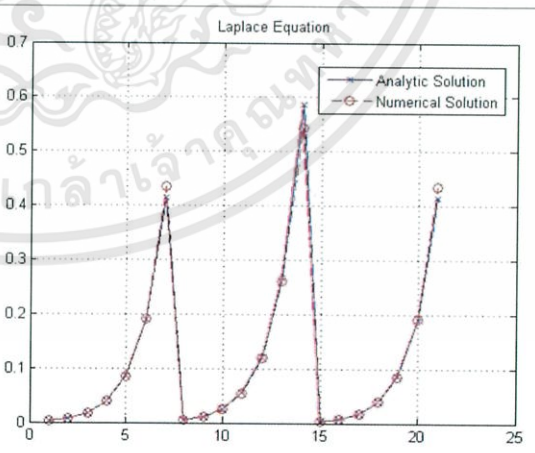
ผลการวิจัยและการอภิปรายผล

จากบทที่ 3 เราสามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ของสมการลาปลาซ (Laplace Equation) ทั้งเงื่อนไขขอบเขตแบบดีรีเคลและเงื่อนไขขอบเขตแบบนิวแมนโดยใช้วิธีการแยกตัวแปร แต่วิธีการแยกตัวแปรไม่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ของสมการปัวซง (Poisson Equation) ทั้งเงื่อนไขขอบเขตแบบดีรีเคลและเงื่อนไขขอบเขตแบบนิวแมน

จากการศึกษาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ผู้วิจัยได้นำความรู้ทางการวิเคราะห์เชิงตัวเลขมาพัฒนาเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์โดยใช้ Microsoft Visual Studio 2010 ร่วมกับ MATLAB R2010a โดยใช้วิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference) ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution)

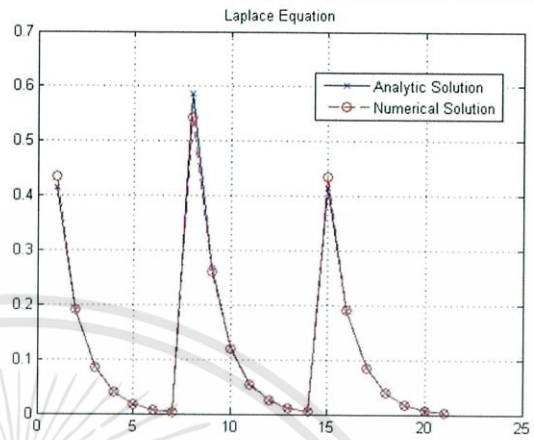
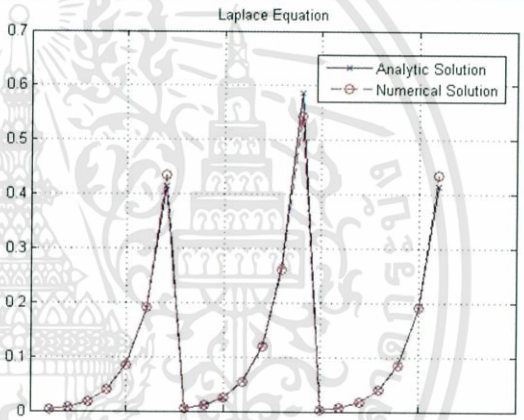
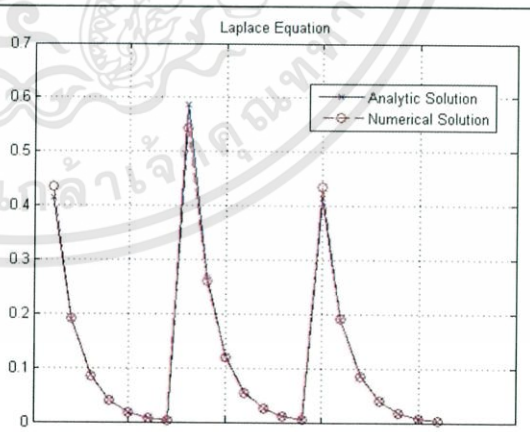
เมื่อนำผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) โดยวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference) ของตัวอย่างในบทที่ 3 สามารถแสดงด้วยกราฟได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	กราฟ
ตัวอย่างที่ 1 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=1, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 2 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 3 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.0625$, $\Delta y = 0.1250$, $error = 5\%$	

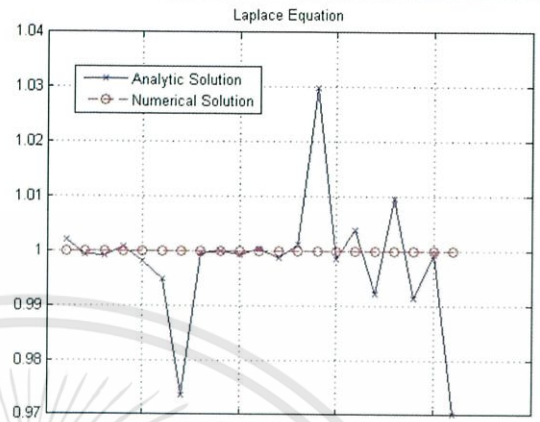
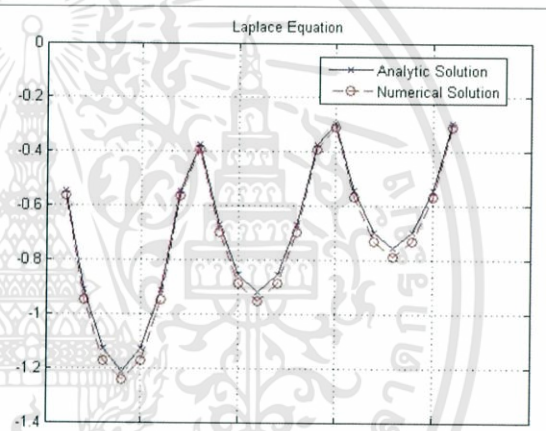
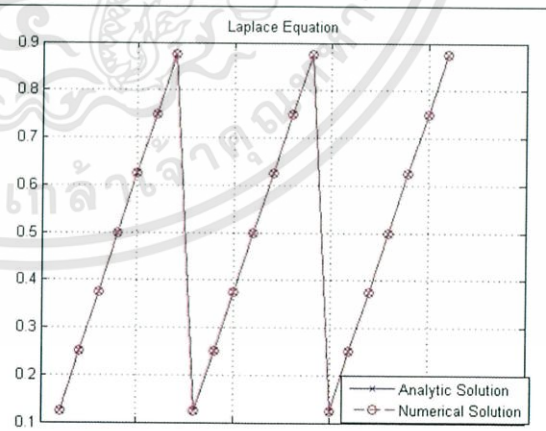
ตารางที่ 4.1 ตัวอย่างแบบดีริคเลต 3 ตัวอย่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	กราฟ
ตัวอย่างที่ 4 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.0625$, $\Delta y = 0.1250$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 5 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.0625$, $\Delta y = 0.1250$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 6 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=1, u(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	

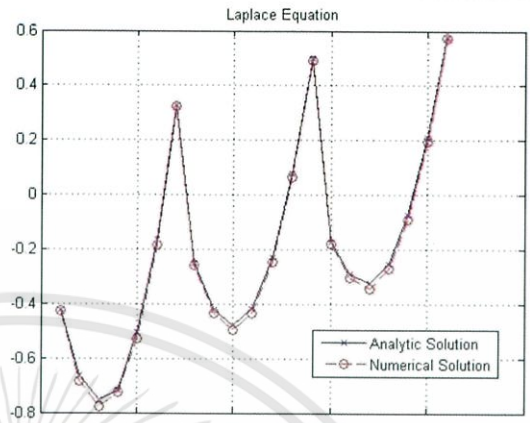
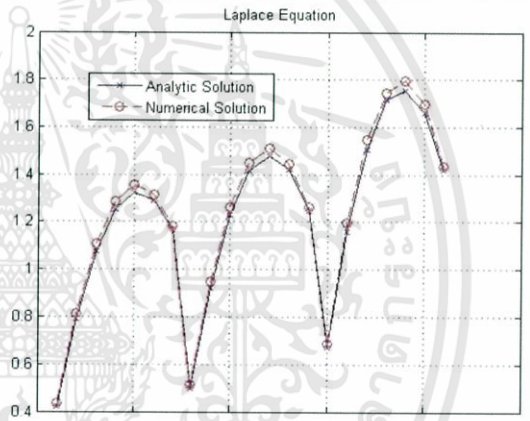
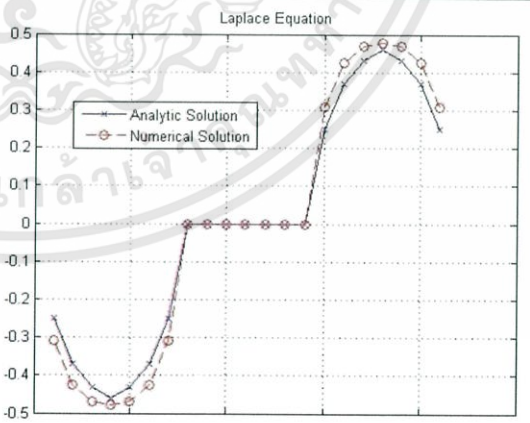
ตารางที่ 4.2 ตัวอย่างแบบดีริคเลต 3 ตัวอย่าง (2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	กราฟ
ตัวอย่างที่ 7 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=1, u(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 8 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.0625$, $\Delta y = 0.1250$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 9 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0, u_x(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	

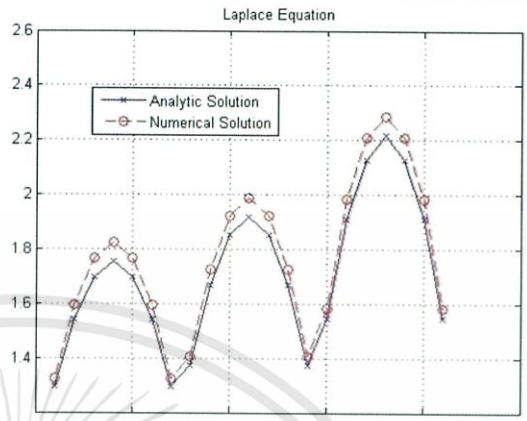
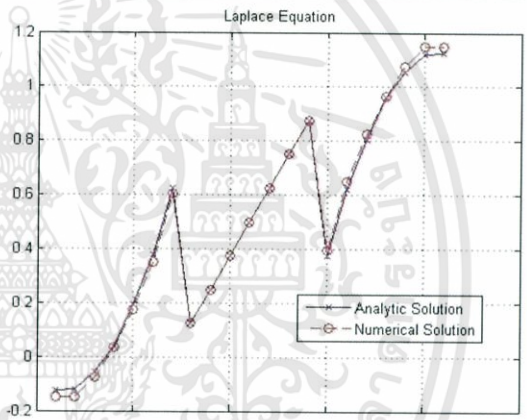
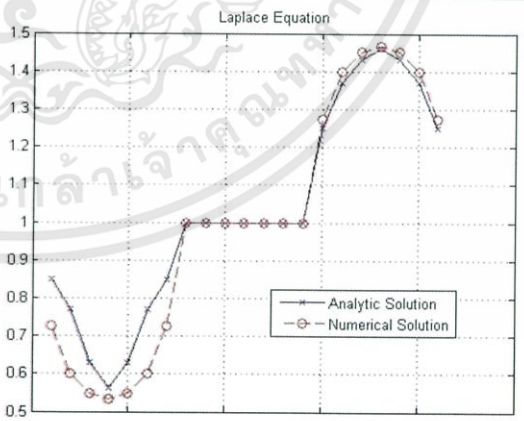
ตารางที่ 4.3 ตัวอย่างแบบดีริคเลต 1 ตัวอย่าง และตัวอย่างแบบนิวแมน 2 ตัวอย่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	กราฟ
ตัวอย่างที่ 10 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.0313$, $\Delta y = 0.0625, error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 11 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.0625$, $\Delta y = 0.1250, error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 12 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.2500$, $\Delta y = 0.5000, error = 5\%$	

ตารางที่ 4.4 ตัวอย่างแบบนิวแมน 3 ตัวอย่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

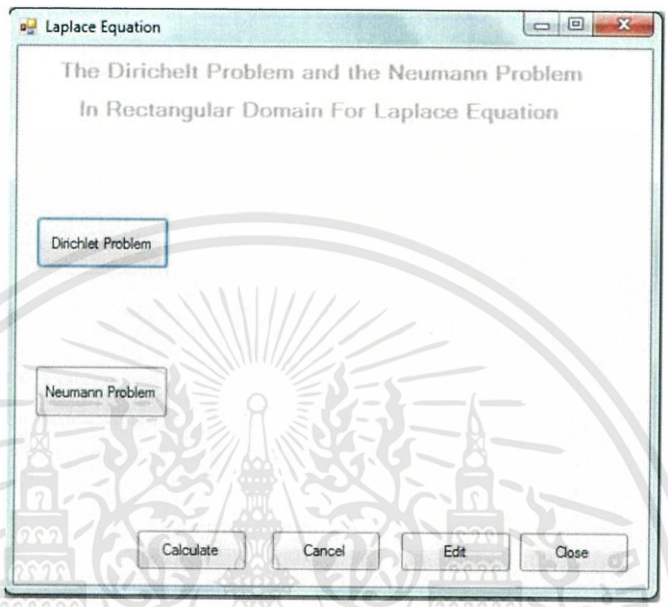
สมการและเงื่อนไขขอบเขต	กราฟ
ตัวอย่างที่ 13 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 14 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	
ตัวอย่างที่ 15 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$ หมายเหตุ $\Delta x = 0.1250$, $\Delta y = 0.2500$, $error = 5\%$	

ตารางที่ 4.5 ตัวอย่างแบบนิวแมน 3 ตัวอย่าง (2)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

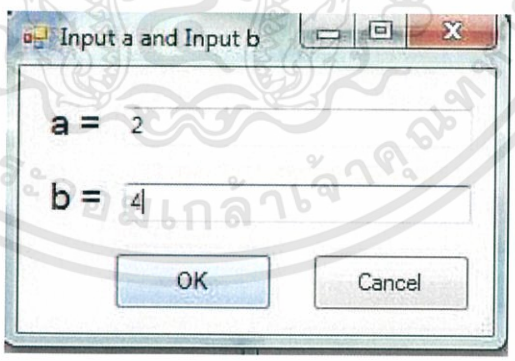
วิธีใช้โปรแกรมการหาผลเฉลยของปัญหาขอบเขตแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

1.เปิดโปรแกรม Numerical Soultion (Finite Difference) จะให้เลือกเงื่อนไขขอบเขตระหว่างปัญหาดีริคเลต (Dirichlet Problem) หรือ ปัญหานิวแมน (Neumann Problem)



รูปที่ 4.1 โปรแกรม สมการลาปลาซ (Laplace Equation)

2.เมื่อเลือกได้แล้วจะมีหน้าต่างให้ใส่ค่าขอบเขตของขอบสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยค่าแกน x คือ a และแกน y คือ b และกด OK

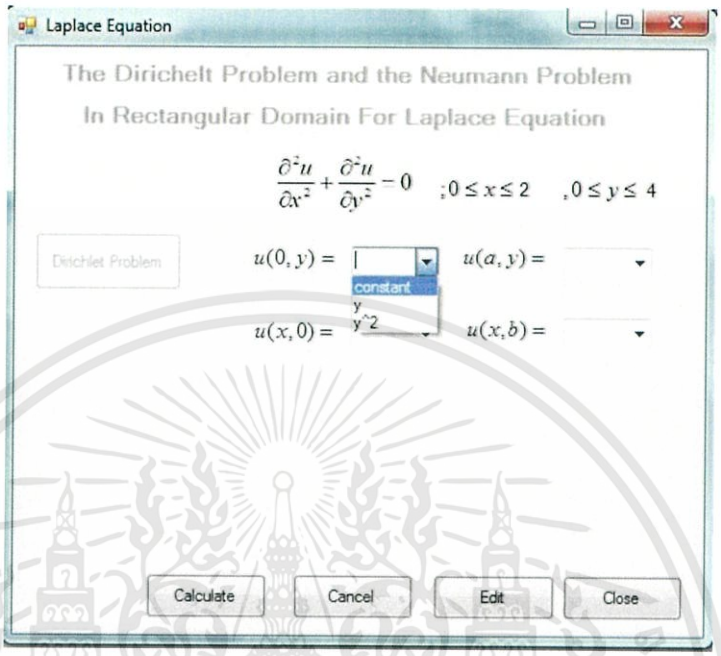


รูปที่ 4.2 โปรแกรม Input a and Input b

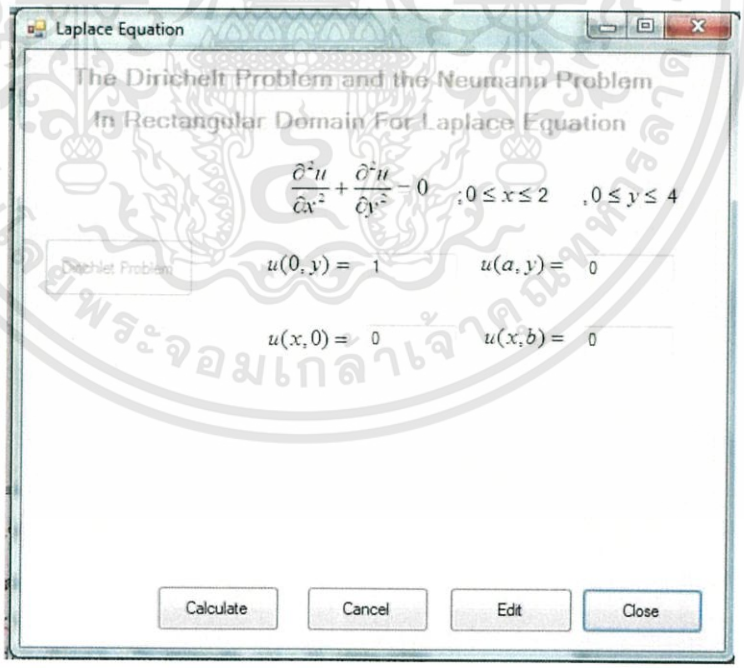
3.หลังจากใส่ค่าขอบเขตของสี่เหลี่ยมมุมฉากแล้ว ต้องกำหนดค่าขอบเขตทั้งสี่ด้านว่ามีค่าเท่าไหร่ โดยค่าแต่ละด้านสามารถเลือกได้ 5 แบบ สามารถเลือกได้ตามต้องการ แต่ถ้าเลือก constant จะต้องกรอกค่าคงที่ว่าแต่ละด้านมีค่าเท่าไหร่ หลังจากกรอกครบทั้ง 4 ด้าน กดปุ่ม Calcuate เพื่อคำนวณจะปรากฏหน้าต่างในค่า Error ($E_a = \left|\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{u^{(n+1)}}\right| \times 100\%$) ซึ่งเป็นตัวกำหนด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ว่าโปรแกรมจะหยุดคำนวณเมื่อ Error น้อยกว่าที่กำหนด หลังจากนั้นจะปรากฏหน้าต่างแสดงผลเฉลยตามที่ต้องการ

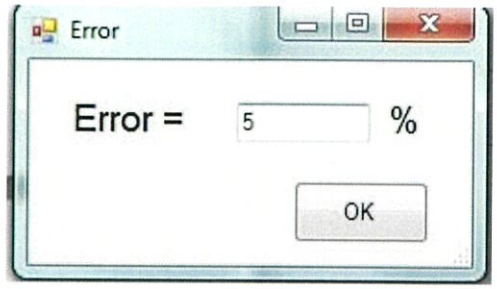


รูปที่ 4.3 โปรแกรมใส่เงื่อนไขต่าง ๆ ของสมการลาปลาซ (Laplace Equation)



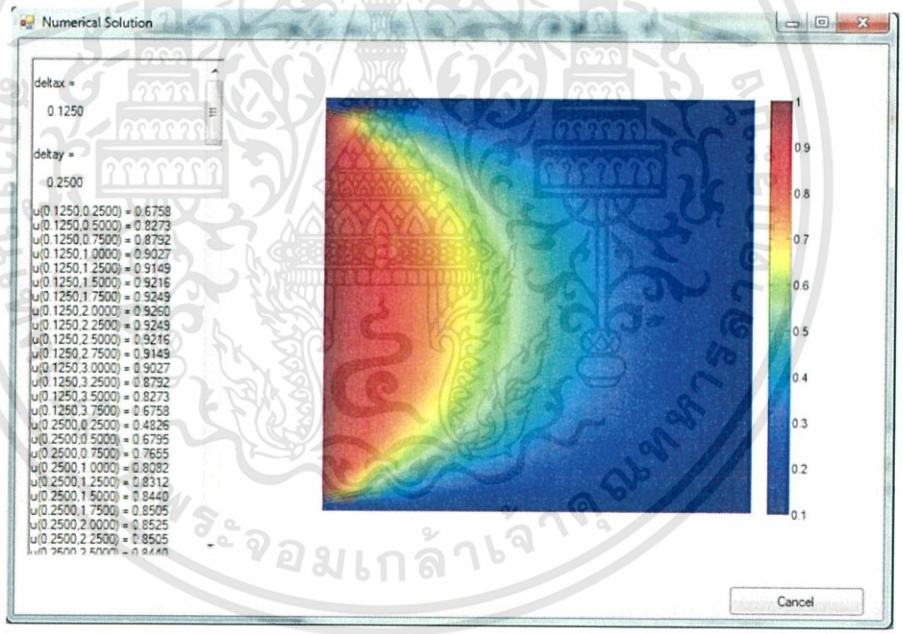
รูปที่ 4.4 โปรแกรมใส่เงื่อนไขต่าง ๆ ของสมการลาปลาซ (Laplace Equation) โดยค่าคงที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.5 โปรแกรมใส่ค่าความผิดพลาด (Error)

4.หน้าต่างที่ปรากฏขึ้นจะแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) และ กราฟ โดยจะแสดงค่าของ deltax และ deltay และค่า u(x,y) ในตำแหน่งต่างๆ ซึ่งค่า deltax และ deltay คือค่าระยะห่างระหว่างเส้นแบ่ง (grid) ทางด้านแกน x คือ deltax และ แกน y คือ deltay พร้อมแสดงกราฟซึ่งเป็นสีโดยสีหมายถึงอุณหภูมิในบริเวณต่างๆของสี่เหลี่ยมมุมฉากนั่นเอง โดยค่าของสี (อุณหภูมิ) จะแสดงอยู่ทางด้านขวามือของกราฟนั่นเอง



รูปที่ 4.6 โปรแกรมแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution)

ซึ่งการทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะใช้วิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference) ในการคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) โดยวิธีการทำงานนั่นจะแบ่งเส้นแบ่ง (grid) อัตโนมัติ โดยจะแบ่งแต่ละครั้งเป็นลักษณะแบ่งครึ่งไปเรื่อยๆ หรือก็คือ $2''$ ทั้งด้านแกน x และแกน y พร้อมๆกัน โดยในโปรแกรมจะเริ่ม n=3 นั่นก็คือจะแบ่งต่ำสุด 8×8 นั่นเอง

โดยทุกครั้งของการแบ่งจะนำค่าผลเฉลยตำแหน่งจุดศูนย์กลางของสี่เหลี่ยมมุมฉากมาเปรียบเทียบโดยจะหาค่าความผิดพลาด (Errors) โดยโปรแกรมจะสามารถตั้งค่าได้ว่าให้มีค่าความ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผิดพลาดต่ำกว่ากี่เปอร์เซ็นต์ (%) เมื่อค่าความผิดพลาดต่ำกว่าที่กำหนดจะแสดงหน้าต่างแสดงค่าผล เฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) ขึ้นมา ซึ่งการแบ่งลักษณะนี้จะใช้เวลานานเมื่อมีการแบ่งละเอียดมากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลงานวิจัยและข้อเสนอแนะ

สรุปผลวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ได้แสดงวิธีการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) ของสมการลาปลาซ (Laplace Equation) ในเงื่อนไขขอบเขตแบบต่างๆ

จากกราฟของตัวอย่างในบทที่ 4 จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytic Solution) และผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solution) มีค่าผลเฉลยแตกต่างกันเล็กน้อย โดยตรวจสอบจากค่า $E_t = \left| \frac{u_{analytic} - u_{numerical}}{u_{analytic}} \right|$ ซึ่งจะแสดงในตารางตัวอย่างดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 1	0.5	0.5	0.4649	0.4633	0.344%
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$	0.5	1	0.6416	0.6350	1.029%
โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$	0.5	1.5	0.6879	0.6941	0.901%
ตามเงื่อนไขดังนี้	0.5	2	0.7195	0.7089	1.473%
$u(0,y)=1, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$	0.5	2.5	0.6879	0.6941	0.901%
$u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$	0.5	3	0.6416	0.6350	1.029%
	0.5	3.5	0.4649	0.4633	0.344%
	1	0.5	0.2253	0.2261	0.355%
	1	1	0.3644	0.3632	0.329%
	1	1.5	0.4269	0.4262	0.164%
	1	2	0.4460	0.4439	0.471%
	1	2.5	0.4269	0.4262	0.164%
	1	3	0.3644	0.3632	0.329%
	1	3.5	0.2253	0.2261	0.355%
	1.5	0.5	0.0962	0.0966	0.416%
	1.5	1	0.1650	0.1648	0.121%
	1.5	1.5	0.2014	0.2009	0.248%
	1.5	2	0.2124	0.2117	0.330%
	1.5	2.5	0.2014	0.2009	0.248%
	1.5	3	0.1650	0.1648	0.121%
	1.5	3.5	0.0962	0.0966	0.416%

ตารางที่ 5.1 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 2 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	0.0962	0.0966	0.416%
	0.5	1	0.1650	0.1648	0.121%
	0.5	1.5	0.2014	0.2009	0.248%
	0.5	2	0.2124	0.2117	0.330%
	0.5	2.5	0.2014	0.2009	0.248%
	0.5	3	0.1650	0.1648	0.121%
	0.5	3.5	0.0962	0.0966	0.416%
	1	0.5	0.2253	0.2261	0.355%
	1	1	0.3644	0.3632	0.329%
	1	1.5	0.4269	0.4262	0.164%
	1	2	0.4460	0.4439	0.471%
	1	2.5	0.4269	0.4262	0.164%
	1	3	0.3644	0.3632	0.329%
	1	3.5	0.2253	0.2261	0.355%
	1.5	0.5	0.4649	0.4633	0.344%
	1.5	1	0.6416	0.6350	1.029%
	1.5	1.5	0.6879	0.6941	0.901%
	1.5	2	0.7195	0.7089	1.473%
	1.5	2.5	0.6879	0.6941	0.901%
	1.5	3	0.6416	0.6350	1.029%
	1.5	3.5	0.4649	0.4633	0.344%

ตารางที่ 5.2 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
<u>ตัวอย่างที่ 3</u> $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	0.0029	0.0029	0%
	0.5	1	0.0078	0.0078	0%
	0.5	1.5	0.0177	0.0177	0%
	0.5	2	0.0392	0.0391	0.255%
	0.5	2.5	0.0861	0.0859	0.232%
	0.5	3	0.1889	0.1904	0.794%
	0.5	3.5	0.4143	0.4355	5.117%
	1	0.5	0.0042	0.0042	0%
	1	1	0.0110	0.0110	0%
	1	1.5	0.0251	0.0250	0.398%
	1	2	0.0554	0.0552	0.361%
	1	2.5	0.1218	0.1207	0.903%
	1	3	0.2671	0.2613	2.171%
	1	3.5	0.5860	0.5443	7.116%
	1.5	0.5	0.0029	0.0029	0%
	1.5	1	0.0078	0.0078	0%
	1.5	1.5	0.0177	0.0177	0%
	1.5	2	0.0392	0.0391	0.255%
	1.5	2.5	0.0861	0.0859	0.232%
	1.5	3	0.1889	0.1904	0.794%
	1.5	3.5	0.4143	0.4355	5.117%

ตารางที่ 5.3 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 4 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	0.4143	0.4355	5.117%
	0.5	1	0.1889	0.1904	0.794%
	0.5	1.5	0.0861	0.0859	0.232%
	0.5	2	0.0392	0.0391	0.255%
	0.5	2.5	0.0177	0.0177	0%
	0.5	3	0.0078	0.0078	0%
	0.5	3.5	0.0029	0.0029	0%
	1	0.5	0.5860	0.5443	7.116%
	1	1	0.2671	0.2613	2.171%
	1	1.5	0.1218	0.1207	0.903%
	1	2	0.0554	0.0552	0.361%
	1	2.5	0.0251	0.0250	0.398%
	1	3	0.0110	0.0110	0%
	1	3.5	0.0042	0.0042	0%
	1.5	0.5	0.4143	0.4355	5.117%
	1.5	1	0.1889	0.1904	0.794%
	1.5	1.5	0.0861	0.0859	0.232%
	1.5	2	0.0392	0.0391	0.255%
	1.5	2.5	0.0177	0.0177	0%
	1.5	3	0.0078	0.0078	0%
	1.5	3.5	0.0029	0.0029	0%

ตารางที่ 5.4 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 5 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=0, u(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	0.4379	0.4384	0.114%
	0.5	1	0.1976	0.1982	0.304%
	0.5	1.5	0.1029	0.1036	0.680%
	0.5	2	0.0773	0.0781	1.035%
	0.5	2.5	0.1020	0.1036	1.569%
	0.5	3	0.1931	0.1982	2.641%
	0.5	3.5	0.4094	0.4384	7.084%
	1	0.5	0.5488	0.5485	0.055%
	1	1	0.2718	0.2723	0.184%
	1	1.5	0.1449	0.1457	0.552%
	1	2	0.1093	0.1104	1.006%
	1	2.5	0.1444	0.1457	0.900%
	1	3	0.2730	0.2723	0.256%
	1	3.5	0.5790	0.5485	5.268%
	1.5	0.5	0.4379	0.4384	0.114%
	1.5	1	0.1976	0.1982	0.304%
	1.5	1.5	0.1029	0.1036	0.680%
	1.5	2	0.0773	0.0781	1.035%
	1.5	2.5	0.1020	0.1036	1.569%
	1.5	3	0.1931	0.1982	2.641%
	1.5	3.5	0.4094	0.4384	7.084%

ตารางที่ 5.5 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 6 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=1, u(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	0.5641	0.5599	0.745%
	0.5	1	0.8018	0.7998	0.249%
	0.5	1.5	0.8962	0.8949	0.145%
	0.5	2	0.9235	0.9206	0.314%
	0.5	2.5	0.8962	0.8949	0.145%
	0.5	3	0.8018	0.7998	0.249%
	0.5	3.5	0.5641	0.5599	0.745%
	1	0.5	0.4508	0.4523	0.333%
	1	1	0.7282	0.7263	0.275%
	1	1.5	0.8544	0.8525	0.222%
	1	2	0.8911	0.8879	0.359%
	1	2.5	0.8544	0.8525	0.222%
	1	3	0.7282	0.7263	0.275%
	1	3.5	0.4508	0.4523	0.333%
	1.5	0.5	0.5607	0.5599	0.143%
	1.5	1	0.8062	0.7998	0.794%
	1.5	1.5	0.8893	0.8949	0.630%
	1.5	2	0.9323	0.9206	1.255%
	1.5	2.5	0.8893	0.8949	0.630%
	1.5	3	0.8062	0.7998	0.794%
	1.5	3.5	0.5607	0.5599	0.143%

ตารางที่ 5.6 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 7 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u(0,y)=1, u(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	1.0020	1.0000	0.200%
	0.5	1	0.9994	1.0000	0.060%
	0.5	1.5	0.9991	1.0000	0.090%
	0.5	2	1.0008	1.0000	0.080%
	0.5	2.5	0.9982	1.0000	0.180%
	0.5	3	0.9949	1.0000	0.513%
	0.5	3.5	0.9735	1.0000	2.722%
	1	0.5	0.9996	1.0000	0.040%
	1	1	1.0000	1.0000	0%
	1	1.5	0.9993	1.0000	0.070%
	1	2	1.0004	1.0000	0.040%
	1	2.5	0.9988	1.0000	0.120%
	1	3	1.0012	1.0000	0.120%
	1	3.5	1.0298	1.0000	2.394%
	1.5	0.5	0.9986	1.0000	0.140%
	1.5	1	1.0038	1.0000	0.379%
	1.5	1.5	0.9922	1.0000	0.786%
	1.5	2	1.0096	1.0000	0.951%
	1.5	2.5	0.9913	1.0000	0.878%
	1.5	3	0.9993	1.0000	0.070%
	1.5	3.5	0.9701	1.0000	3.082%

ตารางที่ 5.7 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 8 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	–0.5467	–0.5609	2.597%
	0.5	1	–0.9116	–0.9496	4.168%
	0.5	1.5	–1.1292	–1.1715	3.746%
	0.5	2	–1.2156	–1.2438	2.320%
	0.5	2.5	–1.1292	–1.1715	3.746%
	0.5	3	–0.9116	–0.9496	4.168%
	0.5	3.5	–0.5467	–0.5609	2.597%
	1	0.5	–0.3751	–0.3896	3.866%
	1	1	–0.6700	–0.6974	4.090%
	1	1.5	–0.8545	–0.8879	3.909%
	1	2	–0.9186	–0.9519	3.625%
	1	2.5	–0.8545	–0.8879	3.909%
	1	3	–0.6700	–0.6974	4.090%
	1	3.5	–0.3751	–0.3896;	3.866%
	1.5	0.5	–0.2962	–0.3102	4.727%
	1.5	1	–0.5408	–0.5660	4.660%
	1.5	1.5	–0.6993	–0.7316	4.619%
	1.5	2	–0.7541	–0.7884	4.548%
	1.5	2.5	–0.6993	–0.7316	4.619%
	1.5	3	–0.5408	–0.5662	4.660%
	1.5	3.5	–0.2962	–0.3102	4.727%

ตารางที่ 5.8 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 9 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0, u_x(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	0.1250	0.1250	0%
	0.5	1	0.2500	0.2500	0%
	0.5	1.5	0.3750	0.3750	0%
	0.5	2	0.5000	0.5000	0%
	0.5	2.5	0.6250	0.6250	0%
	0.5	3	0.7500;	0.7500;	0%
	0.5	3.5	0.8750	0.8750	0%
	1	0.5	0.1250	0.1250	0%
	1	1	0.2500	0.2500	0%
	1	1.5	0.3750	0.3750	0%
	1	2	0.5000	0.5000	0%
	1	2.5	0.6250	0.6250	0%
	1	3	0.7500	0.7500	0%
	1	3.5	0.8750	0.8750	0%
	1.5	0.5	0.1250	0.1250	0%
	1.5	1	0.2500	0.2500	0%
	1.5	1.5	0.3750	0.3750	0%
	1.5	2	0.5000	0.5000	0%
	1.5	2.5	0.6250	0.6250	0%
	1.5	3	0.7500	0.7500	0%
	1.5	3.5	0.8750	0.8750	0%

ตารางที่ 5.9 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
<u>ตัวอย่างที่ 10</u> $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=0; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	–0.4217	–0.4250	0.783%
	0.5	1	–0.6616	–0.6834	3.295%
	0.5	1.5	–0.7542	–0.7775	3.089%
	0.5	2	–0.7156	–0.7239	1.160%
	0.5	2.5	–0.5042	–0.5275	4.621%
	0.5	3	–0.1616	–0.1834	13.490%
	0.5	3.5	0.3283	0.3250	1.005%
	1	0.5	–0.2501	–0.2568	2.679%
	1	1	–0.4200	–0.4340	3.333%
	1	1.5	–0.4795	–0.4962	3.483%
	1	2	–0.4186	–0.4342	3.727%
	1	2.5	–0.2295	–0.2462	7.277%
	1	3	0.0800;	0.0660	21.212%
	1	3.5	0.4999	0.4932	1.340%
	1.5	0.5	–0.1712	–0.1780	3.972%
	1.5	1	–0.2908	–0.3033	4.298%
	1.5	1.5	–0.3243	–0.3420	5.458%
	1.5	2	–0.2541	–0.2708	6.572%
	1.5	2.5	–0.0743	–0.0902	21.400%
	1.5	3	0.2092	0.1967	5.975%
	1.5	3.5	0.5788	0.5720	1.175%

ตารางที่ 5.10 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 11 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le 2, 0\le y\le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0, u_x(2,y)=1; 0\le y\le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0\le x\le 2$	0.5	0.5	0.4212	0.4352	3.324%
	0.5	1	0.7908	0.8162	3.212%
	0.5	1.5	1.0743	1.1066	3.007%
	0.5	2	1.2541	1.2884	2.735%
	0.5	2.5	1.3243	1.3566	2.349%
	0.5	3	1.2908	1.3162	1.968%
	0.5	3.5	1.1712	1.1852	1.195%
	1	0.5	0.5001	0.5146	2.899%
	1	1	0.9200	0.9474	2.978%
	1	1.5	1.2295	1.2629	2.717%
	1	2	1.4186	1.4519	2.347%
	1	2.5	1.4795	1.5129	2.258%
	1	3	1.4200	1.4474	1.930%
	1	3.5	1.2501	1.2646	1.160%
	1.5	0.5	0.6717	0.6859	2.114%
	1.5	1	1.1616	1.1996	3.271%
	1.5	1.5	1.5042	1.5465	2.812%
	1.5	2	1.7156	1.7438	1.644%
	1.5	2.5	1.7542	1.7965	2.411%
	1.5	3	1.6616	1.6996	2.287%
	1.5	3.5	1.4217	1.4359	2.287%

ตารางที่ 5.11 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 12	0.5	0.5	–0.2505	–0.2721	8.623%
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$	0.5	1	–0.3708	–0.3997	7.794%
โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$	0.5	1.5	–0.4299	–0.4515	5.024%
ตามเงื่อนไขดังนี้	0.5	2	–0.4615	–0.4652	0.802%
$u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$	0.5	2.5	–0.4299	–0.4515	5.024%
$u(x,0)=0, u(x,4)=0; 0 \le x \le 2$	0.5	3	–0.3708	–0.3997	7.794%
	0.5	3.5	–0.2505	–0.2721	8.623%
	1	0.5	0.0000	0.0000	0%
	1	1	0.0000	0.0000	0%
	1	1.5	0.0000	0.0000	0%
	1	2	0.0000	0.0000	0%
	1	2.5	0.0000	0.0000	0%
	1	3	0.0000	0.0000	0%
	1	3.5	0.0000	0.0000	0%
	1.5	0.5	0.2505	0.2721	8.623%
	1.5	1	0.3708	0.3997	7.794%
	1.5	1.5	0.4299	0.4515	5.024%
	1.5	2	0.4615	0.4652	0.802%
	1.5	2.5	0.4299	0.4515	5.024%
	1.5	3	0.3708	0.3997	7.794%
	1.5	3.5	0.2505	0.2721	8.623%

ตารางที่ 5.12 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 13 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=0, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	1.2962	1.3256	4.351%
	0.5	1	1.5408	1.5937	3.433%
	0.5	1.5	1.6993	1.7665	3.955%
	0.5	2	1.7541	1.8259	3.932%
	0.5	2.5	1.6993	1.7665	3.955%
	0.5	3	1.5408	1.5937	3.433%
	0.5	3.5	1.2962	1.3256	4.351%
	1	0.5	1.3751	1.4065	2.283%
	1	1	1.6700	1.7259	3.347%
	1	1.5	1.8545	1.9230	3.694%
	1	2	1.9186	1.9892	3.680%
	1	2.5	1.8545	1.9230	3.694%
	1	3	1.6700	1.7259	3.347%
	1	3.5	1.3751	1.4065	2.283%
	1.5	0.5	1.5467	1.5839	2.405%
	1.5	1	1.9116	1.9834	3.756%
	1.5	1.5	2.1292	2.2111	3.647%
	1.5	2	2.2156	2.2852	3.141%
	1.5	2.5	2.1292	2.2111	3.647%
	1.5	3	1.9116	1.9834	3.756%
	1.5	3.5	1.5467	1.5839	2.405%

ตารางที่ 5.13 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 14 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0\le x\le 2, 0\le y\le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=1; 0\le y\le 4$ $u(x,0)=0, u(x,4)=1; 0\le x\le 2$	0.5	0.5	–0.1255	-0.1332	6.135%
	0.5	1	–0.1208	-0.1396	15.563%
	0.5	1.5	–0.0549	-0.0695	26.594%
	0.5	2	0.0385	0.0407	5.714%
	0.5	2.5	0.1951	0.1805	7.483%
	0.5	3	0.3792	0.3604	4.958%
	0.5	3.5	0.6245	0.6168	1.233%
	1	0.5	0.1250;	0.1250	0%
	1	1	0.2500	0.2500	0%
	1	1.5	0.3750	0.3750	0%
	1	2	0.5000	0.5000	0%
	1	2.5	0.6250	0.6250	0%
	1	3	0.7500	0.7500	0%
	1	3.5	0.8750	0.8750	0%
	1.5	0.5	0.3755	0.3832	2.051%
	1.5	1	0.6208	0.6396	3.028%
	1.5	1.5	0.8049	0.8195	1.814%
	1.5	2	0.9615	0.9593	0.229%
	1.5	2.5	1.0549	1.0695	1.384%
	1.5	3	1.1208	1.1396	1.677%
	1.5	3.5	1.1255	1.1332	0.684%

ตารางที่ 5.14 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 14

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการและเงื่อนไขขอบเขต	x	y	Analytic solution	Numerical solution	Error (%)
ตัวอย่างที่ 15 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ โดยที่ $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4$ ตามเงื่อนไขดังนี้ $u_x(0,y)=1, u_x(2,y)=1; 0 \le y \le 4$ $u(x,0)=1, u(x,4)=1; 0 \le x \le 2$	0.5	0.5	0.8505	0.7418	12.781%
	0.5	1	0.7708	0.6104	20.810%
	0.5	1.5	0.6299	0.5555	11.811%
	0.5	2	0.5615	0.5407	3.704%
	0.5	2.5	0.6299	0.5555	11.811%
	0.5	3	0.7708	0.6104	20.810%
	0.5	3.5	0.8505	0.7418	12.781%
	1	0.5	1.0000	1.0000	0%
	1	1	1.0000	1.0000	0%
	1	1.5	1.0000	1.0000	0%
	1	2	1.0000	1.0000	0%
	1	2.5	1.0000	1.0000	0%
	1	3	1.0000	1.0000	0%
	1	3.5	1.0000	1.0000	0%
	1.5	0.5	1.2505	1.2582	0.616%
	1.5	1	1.3708	1.3896	1.371%
	1.5	1.5	1.4299	1.4445	1.021%
	1.5	2	1.4615	1.4593	0.151%
	1.5	2.5	1.4299	1.4445	1.021%
	1.5	3	1.3708	1.3896	1.371%
	1.5	3.5	1.2505	1.2582	0.616%

ตารางที่ 5.15 ตารางแสดงผลค่า Error (%) ในตัวอย่างที่ 15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากตารางแสดงค่าความผิดพลาดทั้ง 30 ตารางจะเห็นว่า เมื่อกำหนดค่าความผิดพลาดในตำแหน่งจุดศูนย์กลางไม่สูงกว่า 5% โปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถคำนวณหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solutions) ได้รวดเร็ว มีเพียงบางตัวอย่างที่ใช้เวลาพอสมควรเช่น ตัวอย่างที่ 10 เนื่องจากการแบ่งตารางมีความถี่กว่าข้ออื่นๆ

ดังนั้นจะเห็นว่ายิ่งแบ่งตารางให้ถี่มากขึ้นเท่าไหร่ การทำงานของโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะนานไปด้วยเช่นกันและค่าผลเฉลยก็ยิ่งใกล้เคียงผลเฉลยเชิงวิเคราะห์(Analytic Solutions) มากยิ่งขึ้น ซึ่งการแบ่งตารางให้มีความถี่มากขึ้นเป็นผลมาจากค่าความผิดพลาดที่ได้กำหนดขึ้นมา ถ้ากำหนดค่าความผิดพลาดในตำแหน่งจุดศูนย์กลางต่ำกว่า 5% เช่น 1% , 0.05% เป็นต้น ซึ่งจะใช้เวลาในการคำนวณมากยิ่งขึ้น แต่ก็ให้ผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solutions) มีความละเอียดมากยิ่งขึ้นเช่นกัน ดังนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์จึงได้ออกแบบให้สามารถกำหนดค่าความผิดพลาดได้ตามที่ผู้ใช้งานต้องการสำหรับตอบสนองต่อผู้ใช้งานที่ต้องการความรวดเร็วใช้การใช้งานหรือความถูกต้องแม่นยำของผลเฉลย

แต่เนื่องจากการกำหนดค่าความผิดพลาดโดยทดสอบเพียงตำแหน่งจุดศูนย์กลางเท่านั้นยังมีข้อผิดพลาด เช่น ตัวอย่างที่ 7, ตัวอย่างที่ 12 และตัวอย่างที่ 15 เป็นต้น ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลข (Numerical Solutions) ในตำแหน่งจุดศูนย์กลางในการแบ่งแต่ละครั้งจะมีค่าเท่ากัน เมื่อนำผลเฉลยครั้งที่ n มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยครั้งที่ n-1 ผลลัพธ์จะได้ว่าค่าความผิดพลาดจะมีค่าเท่ากับ 0% ทำให้โปรแกรมหยุดทำงานทันที แม้ว่าจุดอื่นๆจะมีค่าความผิดพลาดมากอยู่ก็ตาม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] Dagmar Medkova, REGULARITY OF SOLUTION OF THE NEUMANN PROBLEM FOR THE LAPLACE EQUATION, LE MATRMATICHE Vol. LXI(2006)-Fasc. II, pp.287-300

[2] E.CONSTANTIN and H.PAVEL, Green Function of the Laplacian for the Neumann Problem in $\mathbb{R}^n_+$, LIBERTAS MATHEMATICA, Vol XXX (2010), pp 57-69

[3] M.L. Dhumal and S.B. Kiwne, Finite Difference Method for Laplace Equation, International Journal of Statistika and Mathematika,Volume 9,Issue 1,2014,pp.11-13

[4] B. David and C. George. 1995. BASIC PARTIAL DIFFERRENTIAL EQUATIONS. London: Chapman&hall

[5] M. Braun. 1975. Differential Equations and Their Applications. Rhode Island: Springer

[6] James R. Brannan and William E. Boyce. 2010. DIFFERRENTIAL EQUATION WITH BOUNDARY VALUE PROBLEMS. United States of America: United States of America

[7] C.Pakkinee. Partial Differrential Equations:Bangkok: Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้