การประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

APPLICATIONS OF KRONECKER PRODUCTS FOR SOLVING LINEAR MATRIX EQUATIONS

พุทธชาติ สองศรี
ภัทราภรณ์ ทองสมจิตต์
วรินทร บุษรา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

การประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

APPLICATIONS OF KRONECKER PRODUCTS FOR SOLVING LINEAR MATRIX EQUATIONS

พุทธชาติ สองศรี
ภัทราภรณ์ ทองสมจิตต์
วรินทร บุษรา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา
ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต(คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

APPLICATIONS OF KRONECKER PRODUCTS FOR SOLVING MATRIX EQUATIONS

Puttachat Songsri
Phattraporn Thongsomjitt
Warinton Budsara

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPILE MATHEMATIC)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ การประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

Applications of Kronecker Products for Solving Linear Matrix Equations

ชื่อนักศึกษา

นางสาว พุทธชาติ	สองศรี	รหัสนักศึกษา 55050108
นางสาว ภัทราภรณ์	ทองสมจิตต์	รหัสนักศึกษา 55050112
นางสาว วรินทร	บุษรา	รหัสนักศึกษา 55050133

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2558

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม

อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม ดร.กัมปนาท นามงาม

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ ประธานกรรมการ	
ดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล กรรมการ	งามเฉิด ด่านพัฒนามงคล
ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.กัมปนาท นามงาม กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา(ร่วม)	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น
ชื่อนักศึกษา	นางสาว พุทธชาติ สองศรี รหัสนักศึกษา 55050108
	นางสาว ภัทราภรณ์ ทองสมจิตต์ รหัสนักศึกษา 55050112
	นางสาว วรินทร บุษรา รหัสนักศึกษา 55050133
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	ดร.กัมปนาท นามงาม

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น รวมทั้งนำความรู้ดังกล่าวไปใช้กับปัญหาการวิเคราะห์เสถียรภาพในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

คำสำคัญ: ผลคูณโครเนคเคอร์ ตัวดำเนินการเวกเตอร์ ผลบวกโครเนคเคอร์ สมการเมทริกซ์เชิงเส้น เสถียรภาพวงกว้างเชิงเส้นกำกับ

Title	Applications Of Kronecker Products For Solving Linear Matrix Equations		
Students	Miss Puttachat	Songsri	Student ID 55050108
	Miss Rhattraporn	Thongsomjitt	Student ID 55050112
	Miss Warinton	Budsara	Student ID 55050133
Degree	Bachelor of Science (Appile Mathematic)		
Department	Mathematics		
Faculty	Science		
University	King Mongkut's Institute Of Technology Ladkrabang (KMITL)		
Academic Year	2015		
Advisor	Assist.Prof.Dr.Pattrawut Chansangiam		
Co-advisor	Dr.Kampanat Namngam		

Abstract

This special problem is to apply Kronecker products for solving certain linear Matrix equations. Moreover, we adapt these results to stability problems in science and engineering.

Keywords: kronecker product, vector operator, kronecker sum, linear matrix equation, globally asymptotically stable

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษในหัวข้อเรื่องการประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้นจนสามารถเสร็จลุล่วงด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม และดร.กัมปนาท นามงาม เป็นอย่างสูงที่ได้ให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษาและให้ความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการทำปัญหาพิเศษนี้และช่วยตรวจสอบแก้ไขงานให้เกิดความถูกต้องครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามทำปัญหาพิเศษให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ ผศ.ดร.วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ และดร.งามเฉิด ด่านพัฒนามงคลที่ได้ให้ความกรุณาสละเวลามาเป็นประธานกรรมการสอบและกรรมการสอบในปัญหาพิเศษนี้ รวมถึงให้ความรู้ ข้อเสนอแนะ เพื่อเป็นประโยชน์สำหรับใช้ในการแก้ไขปัญหาพิเศษให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

ท้ายที่สุด ทางคณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณท่านอาจารย์สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ทุกท่าน ที่ท่านช่วยประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำอันเกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมา ตลอดจนขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ของสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ที่ได้ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้ จนเป็นผลทำให้ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี

พุทธชาติ สองศรี
ภัทราภรณ์ ทองสมจิตต์
วรินทร บุษรา

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูปภาพ

สารบัญตาราง

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker product) ของเมทริกซ์เชิงซ้อน $A=\left[a_{i,j}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B\in M_{p,q}(\mathbb{C})$ นิยามให้เป็นเมทริกซ์ขนาด $mp\times nq$ ซึ่งอยู่ในรูปแบบเมทริกซ์แบบบล็อก โดยบล็อกที่ (i,j) ของ $A\otimes B$ โดยที่ $a_{i,j}B$

ผลคูณโครเนคเคอร์ได้มาจากชื่อของ เลโอพอลด์ โครเนคเคอร์ นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ซึ่งเป็นบุคคลที่มีความสำคัญในพีชคณิตเชิงเส้น โดยข้อเท็จจริงแล้วผลคูณโครเนคเคอร์ควรจะเรียกว่า "Zehfuss product" เพราะ Johann Georg Zehfuss ได้ตีพิมพ์บทความในปี 1895 ซึ่ง $|A\otimes B|=|A|^{n}|B|^{m}$ สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ที่มีขนาด m และ B ที่มีขนาด n ได้พิสูจน์ว่า เมื่อสัญลักษณ์ $\otimes$ แทนการดำเนินการของเมทริกซ์ที่เรียกว่า ผลคูณโครเนคเคอร์ ในเวลาต่อมา

ผลคูณโครเนคเคอร์เป็นการคูณเมทริกซ์แบบหนึ่งที่มีการประยุกต์ใช้มากมายในสาขาต่างๆ เช่น วิทยาการคอมพิวเตอร์ สถิติ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น การประยุกต์ของผลคูณโครเนคเคอร์แบบหนึ่งที่สำคัญ คือการประยุกต์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น ปัญหาพิเศษนี้จะเป็นการศึกษาการประยุกต์ผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้นรูปแบบต่างๆ รวมทั้งการนำไปใช้กับการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ โดยแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปสมการเมทริกซ์เชิงเส้นแล้วหาผลเฉลย

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1.2.1 ศึกษาสมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์ ผลบวกโครเนคเคอร์ และตัวดำเนินการเวกเตอร์จากเอกสารและงานวิจัยต่างๆ

1.2.2 ประยุกต์ใช้สมบัติในข้อ1.2.1 ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

1.2.3 ประยุกต์สมบัติในข้อ 1.2.1 กับปัญหาการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น 4 รูปแบบ ดังนี้

1. $AXB = C$
2. $AX + XB = C$

3. $\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C$

4. $AX + YB = C$

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 ได้ศึกษาการคูณของเมทริกซ์รูปแบบใหม่

1.4.2 สามารถนำผลคูณโครเนคเคอร์ไปประยุกต์ใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นในรูปแบบต่างๆ

1.4.3 สามารถนำไปใช้กับปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง

1.5 ระยะเวลาในการดำเนินงาน

ระยะเวลาที่ใช้ในการดำเนินงานตามแผนงาน 10 เดือน ได้แสดงไว้ใน ตารางที่ (1.1) นี้

กิจกรรมดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงาน									
	ปี 2558					ปี 2559				
	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.5.1 ศึกษาพื้นฐานในทฤษฎีเมทริกซ์										
1.5.2 ศึกษาสมบัติผลคูณโครเนคเคอร์ ผลบวกโครเนคเคอร์ และตัวดำเนินการเวกเตอร์										
1.5.3 ประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น										
1.5.4 ประยุกต์ใช้ความรู้ผลคูณโครเนคเคอร์ ผลบวกโครเนคเคอร์ และตัวดำเนินการเวกเตอร์ ในปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง										
1.5.5 สรุปผลการศึกษาและจัดทำรูปเล่ม										

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

ในการหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้นรูปแบบต่างๆ เราใช้สมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์ ตัวดำเนินการเวกเตอร์ และผลบวกโครเนคเคอร์ สำหรับการประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (บทที่5) มีความเกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน ในบทนี้เราจะกล่าวถึงความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต้องใช้ดังกล่าว

สัญลักษณ์ที่ใช้

$\mathbb{R}$	แทน เซตของจำนวนจริงทั้งหมด
$\mathbb{C}$	แทน เซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด
$M_{m,n} \in \mathbb{C}$	แทน เซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงเส้น
$M_n(\mathbb{C})$	แทน เซตของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเชิงเส้น
A^T	แทน การสลับเปลี่ยน (transpose) ของเมทริกซ์ A
$\det(A)$	แทน ตัวกำหนดของ A
$rank(A)$	แทน ค่าลำดับชั้นของ A
A^*	แทน การสลับเปลี่ยนสังยุคของ A
$\sigma(A)$	แทน เซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของเมทริกซ์ A
$A > 0$	แทน A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน
$A < 0$	แทน A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน

2.1 เมทริกซ์ไม่เอกฐาน เมทริกซ์ยูนิแทรีและเมทริกซ์เฮอร์มิเชียน

บทนิยาม 2.1 เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่า เมทริกซ์ยูนิแทรี (unitary matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^* A = I = AA^*$

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้าเมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{C})$ แล้ว A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (Nonsingular) ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

บทพิสูจน์ จากเอกสารอ้างอิง[12]

ทฤษฎีบท 2.3 เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะหาผกผันได้ก็ต่อเมื่อ $0 \notin \sigma(A)$ (นั่นคือ A จะหาผกผันไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ $0 \notin \sigma(A)$)

บทพิสูจน์ จากเอกสารอ้างอิง[2]

บทนิยาม 2.4 สำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และเซต $A_1 \subseteq \{1,2,\dots,m\}, A_2 \subseteq \{1,2,\dots,n\}$ โดยที่ $A_1, A_2 \neq \varnothing$ เรานิยาม เมทริกซ์ย่อย (submatrix) ของ A ที่มีแถวกำหนดโดย A_1 และมีคอลัมน์กำหนดโดย A_2 เป็น $A(A_1, A_2)$

ในกรณีที่ $A_1 = \{1,2,\dots,k\}$ สำหรับบาง $k = 1,2,\dots,n$ เราเรียกเมทริกซ์ย่อยสำคัญ $A(\wedge)$ ว่าเมทริกซ์ย่อยสำคัญแบบเรียง (leading principal submatrix) ของ A

บทนิยาม 2.5 ตัวกำหนดของเมทริกซ์ย่อยสำคัญแบบเรียง เรียกว่า ไมเนอร์สำคัญแบบเรียง (leading principal minor)

บทนิยาม 2.6 เมทริกซ์ $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่า เมทริกซ์ฮอร์มิเชียน (Hermitian matrix) ก็ต่อเมื่อ $A^* = A$

บทนิยาม 2.7 เมทริกซ์เฮอร์มิเชียน $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะเรียกว่า

- เมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน (positive definite matrix) ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax > 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}_n - \{0\}$
- เมทริกซ์กึ่งบวกแน่นอน (positive semidefinite matrix) ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}_n$
- เมทริกซ์ที่เป็นลบแน่นอน (negative definite matrix) ก็ต่อเมื่อ $x^*Ax < 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{C}_n - \{0\}$

ทฤษฎีบท 2.8 สำหรับแต่ละ $A \in M_n(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. A เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน
2. A เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีทุกไมเนอร์สำคัญแบบเรียงเป็นจำนวนจริงบวก

บทพิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง[2]

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> จงตรวจสอบว่า $A \in M_3(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอนหรือไม่

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u> 1. เห็นได้ชัดว่า $A^T = A$

$$\det(A) = \det[5] = 5 > 0$$

$$\det(A_2) = \det\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 9 > 0$$

$$\det(A_3) = \det\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 1 > 0$$

สรุปได้ว่า $A \in M_3(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ที่เป็นบวกแน่นอน

2.2 ผลคูณโครเนคเคอร์ (Kronecker Product)

บทนิยาม 2.10 สำหรับแต่ละ $A=\left[a_{ij}\right]\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $B=\left[b_{ij}\right]\in M_{p,q}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า ผลคูณโครเนคเคอร์ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A\otimes B$ ซึ่งจะมีขนาดเท่ากับ $mp\times nq$ นิยามได้โดย

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}\in M_{mp,nq}(\mathbb{C})$$

<u>**ตัวอย่าง 2.11**</u> ให้ $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $A\otimes B=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 0\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} & -2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \\ 3\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} & -1\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

ดังนั้น $A\otimes B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & -8 \\ 6 & 3 & 5 & 0 & -2 & -1 & -5 & 0 \\ -12 & -6 & 6 & 3 & 4 & 2 & -6 & -3 \\ -9 & 6 & -3 & 12 & 3 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 2.12 สมบัติของผลคูณโครเนคเคอร์

ให้ A, B, C, D และเป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดซึ่งทำให้การดำเนินการแต่ละข้อต่อไปนี้มีความหมายจะได้ว่า

1. $(\alpha A)\otimes B=\alpha\,(A\otimes B)=A\otimes(\alpha B)$ เมื่อ α เป็นค่าคงที่
2. $(A+B)\otimes C=(A\otimes C)+(B\otimes C)$
3. $A\otimes(B+C)=(A\otimes B)+(A\otimes C)$
4. $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$
5. $(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$
6. $(A\otimes B)^T=A^T\otimes B^T$

บทพิสูจน์

1.) สำหรับแต่ละ $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B\in M_{p,q}(\mathbb{C})$ และ $\alpha\in\mathbb{C}$ จะได้ว่า

$$(\alpha A)\otimes B=\left(\alpha\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\right)\otimes B=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{bmatrix}\otimes B$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha a_{11}B & \dots & \alpha a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1}B & \cdots & \alpha a_{mn}B\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}=\alpha(A\otimes B)$$

$$=\begin{bmatrix} \alpha a_{11}B & \dots & \alpha a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1}B & \cdots & \alpha a_{mn}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}\alpha B & \dots & a_{1n}\alpha B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\alpha B & \cdots & a_{mn}\alpha B\end{bmatrix}$$

$$=A\otimes(\alpha B)$$

2.) สำหรับแต่ละ $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $C\in M_{p,q}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$(A+B)\otimes C=\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{bmatrix}\right)\otimes C$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}\otimes C$$

$$=\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})C & \dots & (a_{1n}+b_{1n})C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})C & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})C\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(a_{11}C+b_{11}C) & \dots & (a_{1n}C+b_{1n}C)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{m1}C+b_{m1}C) & \cdots & (a_{mn}C+b_{mn}C)\end{bmatrix}$$

$$=\left(\begin{bmatrix}a_{11}C & \dots & a_{1n}C\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}C & \cdots & a_{mn}C\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11}C & \dots & b_{1n}C\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1}C & \cdots & b_{mn}C\end{bmatrix}\right)$$

$$=(A\otimes C)+(B\otimes C)$$

3.) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ ข้อ 2.)

4.) สำหรับแต่ละ $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B\in M_{p,q}(\mathbb{C})$ และ $C\in M_{r,s}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$(A\otimes B)\otimes C=\begin{bmatrix}a_{11}B & \dots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}\otimes C$$

$$=\begin{bmatrix}(a_{11}B)\otimes C & \dots & (a_{1n}B)\otimes C\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{m1}B)\otimes C & \cdots & (a_{mn}B)\otimes C\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}(B\otimes C) & \dots & a_{1n}(B\otimes C)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}(B\otimes C) & \cdots & a_{mn}(B\otimes C)\end{bmatrix}$$

$$=A\otimes(B\otimes C)$$

5.) สำหรับแต่ละ $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}), B\in M_{p,q}(\mathbb{C}), C\in M_{r,s}(\mathbb{C})$ และ $D\in M_{k,h}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$(A\otimes B)\otimes(C\otimes D)=\begin{bmatrix}a_{11}B & \dots & a_{1n}B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}D & \dots & c_{1k}D\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{n1}D & \cdots & c_{nk}D\end{bmatrix}$$

$$=(a_{11}c_{11}BD+\dots+a_{1n}c_{n1}BD)+\dots+(a_{m1}c_{1k}BD+\dots+a_{mn}c_{nk}BD)$$

$$= \sum_{h=1}^{n} \left(a_{ih} c_{hj}\right) BD$$

$$= AC \otimes BD$$

นั่นคือ $\left(A \otimes B\right)\left(C \otimes D\right) = AC \otimes BD$

6.) ให้ $A \in M_{m,n}\left(\mathbb{C}\right), B \in M_{p,q}\left(\mathbb{C}\right)$

$$\left(A \otimes B\right)^T = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{1n}B^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B^T & \cdots & a_{mn}B^T \end{bmatrix}$$

$$= A^T \otimes B^T$$

ทฤษฎีบท 2.13 สำหรับแต่ละ $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right), B \in M_m\left(\mathbb{C}\right)$ จะได้ว่า

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m (\det B)^n = \det(B \otimes A)$$

บทพิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง[4]

ทฤษฎีบท 2.14 สำหรับแต่ละ $A \in M_n\left(\mathbb{C}\right), B \in M_m\left(\mathbb{C}\right)$ จะได้ว่า ถ้า $A \otimes B$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

บทพิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง[10]

ทฤษฎีบท 2.15 (การแยกค่าเอกฐาน) สำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$A = V\Sigma W^*$$

เมื่อ $V \in M_m(\mathbb{C})$ และ $W \in M_n(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรีและ $\Sigma = \left[\sigma_{ij}\right] \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ ซึ่ง $\sigma_{ii} = \sigma_i(A); i = 1,2,\ldots,\min\{m,n\}$ และจำนวนอื่นๆมีค่าเป็น 0 โดยแต่ละ $\sigma_i(A)$ คือค่าเอกฐานต่างๆของ A ซึ่งนิยามเป็นรากที่สองที่เป็นบวกของค่าลักษณะเฉพาะของ A^*A

บทพิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง[11]

บทนิยาม 2.16 เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแนวนอน (row-echelon form) เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับ 3 เงื่อนไขต่อไปนี้

1) แนวนอนที่สมาชิกเป็นศูนย์ทั้งหมด ต้องอยู่แนวล่างสุดของเมทริกซ์
2) สมาชิกตัวแรกที่ไม่เป็นศูนย์ในแต่ละแนวนอนต้องเป็น 1 และ เรียกว่า 1 ตัวแรกของแนวนอน
3) สมาชิกที่เป็น 1 ตัวแรกของแนวนอน ต้องอยู่ทางขวามือของ 1 ตัวแรกในแนวนอนก่อนหน้า

บทนิยาม 2.17 ค่าลำดับชั้น ($rank$)

ถ้าเมทริกซ์ A เปลี่ยนเป็นเมทริกซ์ R ซึ่งอยู่ในรูปขั้นบันไดตามแนวนอน โดยการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน แล้วจำนวนของ 1 ตัวแรกใน R เรียกว่า ค่าลำดับชั้นของ A เขียนแทนด้วย $rank\ A$

ทฤษฎีบท 2.18 สำหรับแต่ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$rank(A \otimes B) = rank(A)\,rank(B)$$

บทพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 2.15 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \left(U_A \sum{}_A V_A^*\right) \otimes \left(U_B \sum{}_B V_B^*\right) \\ &= \left(U_A \otimes U_B\right)\left(\sum{}_A \otimes \sum{}_B\right)\left(V_A \otimes V_B\right)^* \end{aligned}$$

โดยที่ $U_A \otimes U_B \in M_{mp}$ และ $V_A \otimes V_B \in M_{nq}$ เป็นเมทริกซ์ยูนิแทรี และเนื่องจากค่าเอกฐานของ $A \otimes B$ คือ รากที่ 2 ของค่าลักษณะเฉพาะของ $(A \otimes B)^* (A \otimes B) = \left(A^* A\right) \otimes \left(B^* B\right)$ เนื่องจากค่าเอกฐานของ A คือรากที่ 2 ของค่าลักษณะเฉพาะของ $A^* A$ และ ค่าเอกฐานของ B คือรากที่ 2 ของค่าลักษณะเฉพาะของ $B^* B$

ดังนั้น ค่าเอกฐานของ $A \otimes B$ คือผลคูณของค่าเอกฐานของ A และ B เนื่องจาก $rank$ ของเมทริกซ์คือ จำนวนค่าเอกฐานที่ไม่เป็น 0 จะเห็นว่าค่าเอกฐานที่ไม่เป็น 0 ของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B คือ r_1 และ r_2 ตามลำดับ

ดังนั้น จำนวนค่าเอกฐานที่ไม่เป็น 0 ของ $A \otimes B$ คือ $r_1 r_2$ เพราะว่าค่าเอกฐานที่เป็น 0 ของ $A \otimes B$ มีอยู่ $\min\{mp, nq\} - r_1 r_2$ ตัว

ในทำนองเดียวกัน ค่าเอกฐานของ $B \otimes A$ คือผลคูณของค่าเอกฐานของ B และ A นั่นคือ ค่าเอกฐานของ $A \otimes B$ และ $B \otimes A$ มีค่าเท่ากัน

ดังนั้น $rank(A \otimes B) = rank(B \otimes A) = r_1 r_2 = rank(A)\,rank(B)$

2.3 ตัวดำเนินการเวกเตอร์ (Vector Operator)

บทนิยาม 2.19 สำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ ซึ่งมีขนาด $m \times n$

เรานิยาม $\mathrm{Vec}(A) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}$

โดยที่ A_j เป็นหลักที่ j ของ A

<u>ตัวอย่าง 2.20</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\mathrm{Vec}(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

บทนิยาม 2.21 ให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ

1. $Dom(f) = A$
2. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ ถ้า $x_1 = x_2$ แล้ว $y_1 = y_2$

บทนิยาม 2.22 ฟังก์ชัน $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ $\forall x, y \in A$

ถ้า $f(x) = f(y)$ แล้ว $x = y$

ทฤษฎีบท 2.23 $\mathrm{Vec}: M_{m,n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{mn}$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $X, Y \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

สมมติว่า $\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(Y)$

นั่นคือ $\mathrm{Vec}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} = \mathrm{Vec}\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{mn} \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $x_{ij} = y_{ij}, \forall i = 1, \ldots, m\ \forall j = 1, \ldots, n$

นั่นคือ $x = y$

ดังนั้น Vec เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

บทนิยาม 2.24 ฟังก์ชัน $f: A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ

$$\forall y \in B\ \exists x \in A, f(x) = y$$

ทฤษฎีบท 2.25 $\mathrm{Vec}: M_{m,n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{mn}$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

บทพิสูจน์ สำหรับแต่ละ $\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mn}$

พิจารณา $A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$

แล้ว $\mathrm{Vec}(A) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = X$

ดังนั้น Vec เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ทฤษฎีบท 2.26 สำหรับแต่ละ $A,B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$\operatorname{Vec}(A+B) = \operatorname{Vec}(A) + \operatorname{Vec}(B)$$

บทพิสูจน์ ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ จะได้

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\operatorname{Vec}(A+B) = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} \\ a_{21}+b_{21} \\ \vdots \\ a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{mn} \end{bmatrix} = \operatorname{Vec}(A) + \operatorname{Vec}(B)$

ทฤษฎีบท 2.27 สำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ และ $k \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า $\operatorname{Vec}(kA) = k\operatorname{Vec}(A)$

บทพิสูจน์

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\operatorname{Vec}(kA) = \begin{bmatrix} ka_{11} \\ ka_{21} \\ \vdots \\ ka_{mn} \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = k\operatorname{Vec}(A)$

ทฤษฎีบท 2.28 สำหรับแต่ละ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}), Y \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ และ $B \in M_{p,s}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

$$\mathrm{Vec}(AYB) = (B^T \otimes A)\,\mathrm{Vec}(Y)$$

บทพิสูจน์

สำหรับเมทริกซ์ Q_k ให้ Q_k แสดงในหลักที่ k^{th} ของ Q จะได้ว่า

$(AYB)_k = A(YB)_k = AYB_k$ ซึ่งสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned}
(AYB)_k &= A\begin{bmatrix} y_{11}b_{1k} & y_{12}b_{2k} & \cdots & y_{1p}b_{pk} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}b_{1k} & y_{n2}b_{2k} & \cdots & y_{np}b_{pk} \end{bmatrix} \\
&= A\left(\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix} b_{1k} + \begin{bmatrix} y_{12} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{bmatrix} + b_{2k} + \ldots + \begin{bmatrix} y_{1p} \\ \vdots \\ y_{np} \end{bmatrix} + b_{pk}\right) \\
&= b_{1k} A\begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{m1} \end{bmatrix} + b_{2k} A\begin{bmatrix} y_{12} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + b_{pk} A\begin{bmatrix} y_{1p} \\ \vdots \\ y_{np} \end{bmatrix} \\
&= (b_{1k}A, b_{2k}A, \ldots, b_{pk}A)\,\mathrm{Vec}(Y) \\
&= (B_{\kappa}{}^T \otimes A)\,\mathrm{Vec}(Y) \quad ; \forall k = 1,2,\ldots,q
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Vec}(AYB) = \begin{bmatrix} B_1{}^T \otimes A\,\mathrm{Vec}(Y) \\ \vdots \\ B_q{}^T \otimes A\,\mathrm{Vec}(Y) \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\mathrm{Vec}(C) = \mathrm{Vec}(AYB)$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} B_1{}^T \otimes A \\ \vdots \\ B_q{}^T \otimes A \end{bmatrix} \mathrm{Vec}(Y) \\
&= (B^T \otimes A)\,\mathrm{Vec}(Y)
\end{aligned}$$

2.4 ผลบวกโครเนคเคอร์ (Kronecker sum)

บทนิยาม 2.29 ให้เมทริกซ์ A มีขนาดเป็น $n\times n$ และเมทริกซ์ B มีขนาดเป็น $\mathrm{m}\times\mathrm{m}$ ผลบวกโครเนคเคอร์ของ A และ B เขียนแทน $A\oplus B$ นิยามได้ดังนี้

$$A\oplus B=(A\otimes I_m)+(I_n\otimes B)$$

ทฤษฎีบท 2.30 ถ้า $\{\lambda_i; i=1,2,...,n\}$ และ $\{\mu_j; j=1,2,...,m\}$ เป็นเซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ A และ B ตามลำดับ แล้ว $\{\lambda_i+\mu_j; i=1,2,...,n, j=1,2,...,m\}$ เป็นเซตของค่าลักษณะเฉพาะทั้งหมดของ $A\oplus B$

บทพิสูจน์ สมมติให้ $\lambda\in\sigma(\mathrm{A})$ และ $X\in\mathbb{C}^n$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ $A, \mu\in\sigma(\mathrm{B})$ และ $Y\in\mathbb{C}^n$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ B จะได้ว่า $AX=\lambda X$ และ $BY=\mu Y$

จาก $A\oplus B=(A\otimes I_m)+(I_n\otimes B)$

จะได้
$$\begin{aligned}\left[(A\otimes I_m)+(I_n\otimes B)\right]\left(X\otimes Y\right) &= (A\otimes I_m)(X\otimes Y)+(I_n\otimes B_n)(X\otimes Y)\\ &= (AX)\otimes Y+X\otimes(BY)\\ &= (\lambda X)\otimes Y+X\otimes(\mu Y)\\ &= \lambda\left(X\otimes Y\right)+\mu\left(X\otimes Y\right)\\ &= \left(\lambda+\mu\right)\left(X\otimes Y\right)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\lambda+\mu$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $(A\otimes I_m)+(I_n\otimes B_n)$ โดยมีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะเป็น $X\otimes Y$

<u>**ตัวอย่างที่ 2.31**</u> $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

สังเกตว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda_1=-1$ และ $\lambda_2=-3$

และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A คือ $X_1=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ และ $X_2=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^T$

ส่วนค่าลักษณะเฉพาะของ B คือ $\mu_1=1$ และ $\mu_2=2$

มีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะคือ $Y_1=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$ และ $Y_2=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$

จะได้ว่า $\alpha_1=\lambda_1+\mu_1=-1+1=0$ และ $X_1\otimes Y_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$

$\alpha_2=\lambda_1+\mu_2=-1+2=1$ และ $X_1\otimes Y_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$

$\alpha_3=\lambda_2+\mu_1=3+1=4$ และ $X_2\otimes Y_1=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$

$\alpha_4=\lambda_2+\mu_2=3+2=5$ และ $X_2\otimes Y_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$

2.5 ระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ n ตัวแปร สามารถเขียนได้ในรูปแบบ

$$Ax = b \tag{2.1}$$

เมื่อ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $x \in \mathbb{C}^n$ และ $b \in \mathbb{C}^n$ สมการดังกล่าวอาจมีหรือไม่มีผลเฉลย ในกรณีที่สมการนี้มีผลเฉลย ผลเฉลยดังกล่าวจะมีได้ 2 รูปแบบ ดังนี้

1) มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว
2) มีผลเฉลยจำนวนอนันต์ โดยอยู่ในรูปแบบอิงตัวแปรเสริม

ทฤษฎีบท 2.32 สมการ (2.1) จะมีผลเฉลย ก็ต่อเมื่อ $rank(A) = rank[A \;\; b]$

ทฤษฎีบท 2.33 พิจารณาสมการ (2.1) ในกรณีที่ $m = n$ จะได้ว่าสมการนี้มีผลเฉลยเดียว ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

บทที่ 3
การหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น

ในบทนี้เราจะศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น 4 รูปแบบ ได้แก่

1. $AXB = C$
2. $AX + XB = C$
3. $\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C$
4. $AX + YB = C$

โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับผลคูณโครเนคเคอร์ ตัวดำเนินการเวกเตอร์ และผลบวกโครเนคเคอร์

3.1 สมการ $AXB = C$

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{C})$, $C \in M_{m,q}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $AXB = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ
$$(rank\ A)(rank\ B) = rank\left(\begin{bmatrix} B^T \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}\right)$$
2. ในกรณีที่ $m=n$ และ $p=q$ สมการ $AXB = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{m,p}(\mathbb{C})$ เพียงผลเฉลยเดียว ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

บทพิสูจน์

สมการ $AXB = C$ มีผลเฉลย

$\Leftrightarrow$ สมการ $(B^T \otimes A)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลย (จากทฤษฎีบท 2.28)

$\Leftrightarrow rank\ (B^T \otimes A) = rank\left(\begin{bmatrix} B^T \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow (rank\ B^T)(rank\ A) = rank\left(\begin{bmatrix} B^T \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow (rank\ B)(rank\ A) = rank\left(\begin{bmatrix} B^T \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}\right)$

$\Leftrightarrow (rank\ A)(rank\ B) = rank\left(\begin{bmatrix} B^T \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}\right)$

สมการ $AXB = C$ มีผลเฉลยเดียว

$\Leftrightarrow$ สมการ $(B^T \otimes A)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลยเดียว

$\Leftrightarrow (B^T \otimes A)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

$\Leftrightarrow B^T$ และ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

$\Leftrightarrow A$ และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

ตัวอย่าง 3.2 จงหาผลเฉลย $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AXB = C$ โดยที่

$$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}$$

วิธีทำ

1.

$$\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix} \sim R_1 \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \begin{bmatrix}2 & 3/2\\1 & 2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix} \sim R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2 \begin{bmatrix}0 & 3\\1 & -1/2\end{bmatrix}$$

$$\therefore rank(A)=2 \qquad \therefore rank(B)=2$$

จาก $rank\left[B^T \otimes A \quad \mathrm{Vec}(C)\right] = rank\left[\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 8 & 6 & -2\\0 & 0 & 8 & 4 & 2\\12 & 9 & -4 & -3 & 4\\3 & 6 & -1 & -1 & -3\end{array}\right]$

และจากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอนจะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 23/20\\0 & 1 & 0 & 0 & -6/5\\0 & 0 & 1 & 0 & 5/4\\0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{array}\right]$

$\therefore rank\left[B^T \otimes A \quad \mathrm{Vec}(C)\right] = 4$

จะเห็นว่า $(rank\ A)(rank\ B) = 2(2) = 4 = rank\left[B^T \otimes A \quad \mathrm{Vec}(C)\right]$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

2.

$$\det\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}=5, \det\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}=-6$$

จะเห็นว่า A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

ดังนั้น สมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

จากทฤษฎีบท 2.28 จะได้ $\mathrm{Vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$

จะได้ $B^T \otimes A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 12 & 9 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 12 & 9 & -4 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

และจากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอนจะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 23/20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$

ดังนั้น $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

<u>ตัวอย่าง 3.3</u> จงหาผลเฉลย $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AXB = C$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

1.

$$rank(A) = rank \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 1$$

$$rank(B) = rank \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

$$rank\left[B^T \otimes A \quad Vec(C) \right] = rank \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 3 \\ 12 & 24 & 8 & 16 & 12 \\ 6 & 12 & 4 & 8 & 6 \end{array}\right] = 1$$

จะเห็นว่า $(rank\, A)(rank\, B) = 1(1) = 1 = rank\left[B^T \otimes A \quad \mathrm{Vec}(C) \right]$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

2.

$$\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 0, \det\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

จะเห็นว่า A และ B เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

ดังนั้น ไม่จริงที่สมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

จาก 1. และ 2. สรุปได้ว่าสมการมีผลเฉลยจำนวนอนันต์

จากทฤษฎีบท 2.28 $\text{Vec}(AXB) = \left(B^T \otimes A\right)\text{Vec}(X) = \text{Vec}(C)$

จะได้ $B^T \otimes A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 12 & 24 & 8 & 16 \\ 6 & 12 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 \\ 12 & 24 & 8 & 16 \\ 6 & 12 & 4 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

จากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2/3 & 4/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ให้ $x_2 = r,\ x_3 = s,\ x_4 = t$ จะได้ $x_1 = 1 - 2r - \dfrac{2}{3}s - \dfrac{4}{3}t$

เมื่อ t, r และ s เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2r - 2/3s - 4/3t & s \\ r & t \end{bmatrix}$ เมื่อ t, r และ s เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

<u>**ตัวอย่าง 3.4**</u> จงหาผลเฉลย $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AXB = C$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -6 & -6 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

1.

$$rank\left(A\right) = rank\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1$$

$$rank\left(B\right) = rank\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

$$rank\left[\begin{array}{cc} B^T \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 0 & 0 & -6 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & -4 \\ 9 & 18 & 3 & 6 & -6 \\ 6 & 12 & 2 & 4 & -6 \end{array}\right] = 3$$

จะเห็นว่า $\left(rank\, A\right)\left(rank\, B\right) = 1\left(2\right) \neq rank\left[\begin{array}{cc} B^T \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{array}\right]$

ดังนั้น สมการไม่มีผลเฉลย

บทแทรก 3.5 ให้ $A \in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ C \in M_{m,p}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $AX = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ

$$p(rank\ A) = rank\left(\begin{bmatrix} I_p \otimes A & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}\right)$$

2. ในกรณีที่ $m = n$ สมการ $AX = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ เพียงผลเฉลยเดียว

ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

บทพิสูจน์ ได้จากทฤษฎีบท 3.1 โดยการ แทน $B = I_p$

บทแทรก 3.6 ให้ $B \in M_{p,q}(\mathbb{C}),\ C \in M_{n,q}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $XB = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ

$$n(rank\ B) = rank\left(\begin{bmatrix} B^T \otimes I_n & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}\right)$$

2. ในกรณีที่ $p = q$ สมการ $XB = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{n,p}$ เพียงผลเฉลยเดียว

ก็ต่อเมื่อ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

บทพิสูจน์ ได้จากทฤษฎีบท 3.1 โดยการ แทน $A = I_n$

3.2 สมการ $AX + XB = C$

ทฤษฎีบท 3.7 ให้ $A \in M_n(\mathbb{C}),\ B \in M_p(\mathbb{C}),\ C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $AX + XB = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ

$$rank(B^T \oplus A) = rank\left(\left[B^T \oplus A \quad \mathrm{Vec}(C)\right]\right)$$

2. สมการ $AX + XB = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ เพียงผลเฉลยเดียว ก็ต่อเมื่อ

$$\lambda + \mu \neq 0 \ \ \forall \lambda \in \sigma(A) \forall \mu \in \sigma(B)$$

บทพิสูจน์

สมการ $AX + XB = C$ มีผลเฉลย

$\Leftrightarrow$ สมการ $(B^T \oplus A)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลย (จากทฤษฎีบท 2.28 และบทนิยาม 2.29)

$\Leftrightarrow$ $rank(B^T \oplus A) = rank\left(\left[B^T \oplus A \quad \mathrm{Vec}(C)\right]\right)$

สมการ $AX + XB = C$ มีผลเฉลยเดียว

$\Leftrightarrow$ สมการ $(B^T \oplus A)\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลยเดียว

$\Leftrightarrow$ $(B^T \oplus A)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

$\Leftrightarrow$ ทุกค่าลักษณะเฉพาะของ $B^T \oplus A$ ต้องไม่เป็น 0

$\Leftrightarrow$ $\lambda + \mu \neq 0 \ \ \forall \lambda \in \sigma(A) \forall \mu \in \sigma(B)$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาผลเฉลย $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AX + XB = C$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

1.

จาก $rank\left(B^T \oplus A\right) = rank\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore rank(B^T \oplus A) = 4$

จาก $rank\left(\left[B^T \oplus A \quad \mathrm{Vec}(C)\right]\right) = rank\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & 5 & 0 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right]$

$\therefore rank\left[B^T \otimes A \quad \mathrm{Vec}(C)\right] = 4$

จะเห็นว่า $rank(B^T \oplus A) = 4 = rank\left(\left[B^T \oplus A \quad \mathrm{Vec}(C)\right]\right)$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

2.

ค่าลักษณะเฉพาะของ $A = \frac{1}{2}(-3-\sqrt{65}), \frac{1}{2}(\sqrt{65}-3)$

ค่าลักษณะเฉพาะของ $B = -2, 2$

จะเห็นว่า $\lambda + \mu \neq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \forall \mu \in \sigma(B)$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

เนื่องจาก $AX + XB = C \Leftrightarrow (B^T \oplus A)\ \mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$

และจากบทนิยาม 2.29 จะได้ $B^T \oplus A = \left[\left(I_2^T \otimes A\right) + \left(B^T \otimes I_2\right)\right]$

$$B^T \oplus A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

จาก $(B^T \oplus A)\ \mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/6 & 1/6 \\ -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}$

<u>ตัวอย่าง 3.9</u> จงหาผลเฉลย $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AX+XB=C$ โดยที่

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

1.

$$rank\left(B^T \oplus A\right) = rank\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1 & -2\end{bmatrix} = 3$$

$$rank\left(\left[B^T \oplus A \quad Vec(C)\right]\right) = rank\left[\begin{array}{cccc|c}-1 & -1 & 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -2 & -1\end{array}\right] = 3$$

จะเห็นว่า $rank(B^T \oplus A) = 3 = rank\left(\left[B^T \oplus A \quad \mathrm{Vec}(C)\right]\right)$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

2.

ค่าลักษณะเฉพาะของ $A=1$

ค่าลักษณะเฉพาะของ $B=-1,4$

จะเห็นว่า $1+(-1)=0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A) \forall \mu \in \sigma(B)$

ดังนั้น ไม่จริงที่สมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

จาก 1. และ 2. สรุปได้ว่าสมการมีผลเฉลยอนันต์

เนื่องจาก $AX+XB=C \Leftrightarrow \left(B^T \oplus A\right)\mathrm{Vec}(X)=\mathrm{Vec}(C)$

และจากบทนิยาม 2.21 จะได้ $B^T \oplus A = \left[\left(I_2^T \otimes A\right)+\left(B^T \otimes I_2\right)\right]$

ดังนั้น $B^T \oplus A = \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2&-1\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&1\\2&-2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&2&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&0&1&0\\0&-3&0&1\\2&0&-2&0\\0&2&0&-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1&-1&1&0\\1&-3&0&1\\2&0&0&-1\\0&2&1&-2\end{bmatrix}$$

จาก $\left(B^T \oplus A\right)\mathrm{Vec}(X)=\mathrm{Vec}(C)$

จะได้ $\begin{bmatrix}-1&-1&1&0\\1&-3&0&1\\2&0&0&-1\\0&2&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}$

จากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-1/2&-1/2\\0&1&0&-1/2&-1/2\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$

ให้ $x_4=t$ จะได้ $x_1=1/2t,\ x_2=1/2t+1/2,\ x_3=t\ -2$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$X=\begin{bmatrix}x_1&x_3\\x_2&x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2t\ +\ 1/2&t\ -\ 2\\1/2t\ +\ 1/2&t\end{bmatrix}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

บทแทรก 3.10 ให้ $A, C \in M_n(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $AX + XA^T = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_n(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ

$$rank\ (A \oplus A) = rank\left(\left[A \oplus A \quad \mathrm{Vec}(C)\right]\right)$$

2. สมการ $AX + XA^T = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_n(\mathbb{C})$ เพียงผลเฉลยเดียว ก็ต่อเมื่อ

$$\lambda + \mu \neq 0 \ \ \forall \lambda,\ \mu \in \sigma(A)$$

บทพิสูจน์ ได้จากทฤษฎีบท 3.7 โดยการ แทน $B = A^T$

บทแทรก 3.11 ให้ $A, C \in M_n(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $AX - XA = C$ จะมีผลเฉลย $X \in M_n(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ

$$rank\ \left[(I_n \otimes A) - (A^T \otimes I_n)\right] = rank\left[(A^T \otimes A) - (A^T \otimes I_n) \quad \mathrm{Vec}(C)\right]$$

2. ถ้าสมการ $AX - XA = C$ มีผลเฉลย แล้วผลเฉลยจะมีจำนวนอนันต์

บทพิสูจน์

1. ได้จากทฤษฎีบท 3.7 โดยการ แทน $B = -A$
2. ได้จากความรู้ที่ว่า ถ้า $\lambda \in \sigma(A)$ แล้ว $-\lambda \in \sigma(-A)$ ซึ่งทำให้ $\lambda + (-\lambda) = 0$

   ดังนั้น ไม่จริงที่ว่า $\lambda + \mu \neq 0 \ \ \forall \lambda \in \sigma(A),\ \mu \in \sigma(-A)$

   เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 3.7 เราสามารถสรุป 2. ได้

3.3 สมการ $\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C$

ทฤษฎีบท 3.12 สำหรับแต่ละ $i = 1, \ldots, k$

ให้ $A_i \in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ B_i \in M_{p,q}(\mathbb{C}),\ C \in M_{m,q}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C$ มีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ

$$rank\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) = rank\left[\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) \quad Vec(C)\right]$$

2. ในกรณีที่ $mq = np$ สมการ $\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C$ มีผลเฉลย $X \in M_{n,p}(\mathbb{C})$

เพียงผลเฉลยเดียว ก็ต่อเมื่อ

$\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

บทพิสูจน์

สมการ $\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C$ มีผลเฉลย

$\Leftrightarrow$ สมการ $\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) \mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลย (จากทฤษฎีบท 2.28)

$$\Leftrightarrow rank\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) = rank\left[\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) \quad \mathrm{Vec}(C)\right]$$

สมการ $\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C$ มีผลเฉลยเดียว

$\Leftrightarrow$ สมการ $\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) \mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลยเดียว

$\Leftrightarrow$ $\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

<u>**ตัวอย่าง 3.13**</u> จงหาหาผลเฉลย $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $A_1XB_1 + A_2XB_2 = C$ เมื่อ

กำหนดให้ $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

1.

$$rank\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) = rank\begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore rank\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) = 4$$

จาก $\left[\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) \quad \mathrm{Vec}(C)\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 1 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -6 & 2 & -4 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right]$

$$\therefore rank\left[\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) \quad \mathrm{Vec}(C)\right] = 4$$

จะเห็นว่า $rank\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) = 4 = rank\left[\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) \quad \mathrm{Vec}(C)\right]$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

2.

$$\det\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right) = \det\begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 72$$

จะเห็นว่า $\left(\sum_{i=1}^{k} B_i^T \otimes A_i\right)$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

ดังนั้น สมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

จากทฤษฎีบท 2.18 $\mathrm{Vec}\left[A_1XB_1 + A_2XB_2\right] = \mathrm{Vec}\left(A_1XB_1\right) + \mathrm{Vec}\left(A_2XB_2\right)$

$$= \left[\left(B_1^T \otimes A_1\right) + \left(B_2^T \otimes A_2\right)\right]\mathrm{Vec}(X)$$

$$= \mathrm{Vec}(C)$$

จะได้

$$B_1^T \otimes A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2^T \otimes A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B_1^T \otimes A_1 + B_2^T \otimes A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

จาก $\left[\left(B_1^T \otimes A_1\right) + \left(B_2^T \otimes A_2\right)\right]\mathrm{Vec}(X) = \mathrm{Vec}(C)$

จะได้ $\begin{bmatrix} -5 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

การจากดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 16/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 23/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -34/9 \end{array}\right]$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/9 & 23/9 \\ -5/3 & -34/9 \end{bmatrix}$

3.4 สมการ $AX+YB=C$

ทฤษฎีบท 3.14 ให้ $A\in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ B\in M_{k,p}(\mathbb{C}),\ C\in M_{m,p}(\mathbb{C})$ จะได้ว่า

1. สมการ $AX+YB=C$ จะมีผลเฉลย $X\in M_{n,p}(\mathbb{C}), Y\in M_{m,k}(\mathbb{C})$ ก็ต่อเมื่อ

$$rank\begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I & \mathrm{Vec}(C)\end{bmatrix}$$

2. ในกรณีที่ $mp = np + mk$ สมการ $AX+YB=C$ จะมีผลเฉลย $X\in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $Y\in M_{m,k}(\mathbb{C})$ เพียงผลเฉลยเดียว ก็ต่อเมื่อ $\begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

บทพิสูจน์

สมการ $AX+YB=C$ มีผลเฉลย

$\Leftrightarrow$ สมการ $(I\otimes A)\mathrm{Vec}(X)+(B^T\otimes I)\mathrm{Vec}(Y) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลย

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Vec}(X)\\ \mathrm{Vec}(Y)\end{bmatrix} = \mathrm{Vec}(C)$$

$$\Leftrightarrow rank\begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I & \mathrm{Vec}(C)\end{bmatrix}$$

สมการ $AX+YB=C$ มีผลเฉลยเดียว

$\Leftrightarrow$ สมการ $(I\otimes A)\ \mathrm{Vec}(X)+(B^T\otimes I)\ \mathrm{Vec}(Y) = \mathrm{Vec}(C)$ มีผลเฉลยเดียว

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Vec}(X)\\ \mathrm{Vec}(Y)\end{bmatrix} = \mathrm{Vec}(C)$$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I\otimes A & B^T\otimes I\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

<u>ตัวอย่าง 3.15</u> จงหาผลเฉลย $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AX + YB = C$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

1.

$$rank \begin{bmatrix} I \otimes A & B^T \otimes I \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$rank \begin{bmatrix} I \otimes A & B^T \otimes I & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix} = rank \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right] = 3$$

จะเห็นว่า $rank \begin{bmatrix} I \otimes A & B^T \otimes I \end{bmatrix} = 3 = rank \begin{bmatrix} I \otimes A & B^T \otimes I & \mathrm{Vec}(C) \end{bmatrix}$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

2.

$$\det \begin{bmatrix} I \otimes A & B^T \otimes I \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

จะเห็นว่า $\begin{bmatrix} I \otimes A & B^T \otimes I \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

ดังนั้น ไม่จริงที่สมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

จาก 1. และ 2. สรุปได้ว่าสมการมีผลเฉลยจำนวนอนันต์

เนื่องจาก $AX + YB = C \Leftrightarrow (I \otimes A)\mathrm{Vec}(X) + (B^T \otimes I)\mathrm{Vec}(Y) = \mathrm{Vec}(C)$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} I \otimes A & B^T \otimes I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Vec}(X) \\ \mathrm{Vec}(Y) \end{bmatrix} = \mathrm{Vec}(C)$$

จาก $I_2 \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^T \otimes I_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

จากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ให้ $y_2 = t$ จะได้ $x_1 = -2 + t,\ x_2 = 5 - 2t,\ y_1 = -4 + 2t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+t & 5-2t \\ -4+2t & t \end{bmatrix}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

บทที่ 4
การประยุกต์ในปัญหาการสลับที่ของเมทริกซ์

ในบทนี้เราจะประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับสมการเมทริกซ์เชิงเส้นกับปัญหาการสลับที่ของเมทริกซ์

4.1 ปัญหาการสลับที่ในรูปแบบทั่วไป (Generalized communitivity problem)

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $A \in M_n(\mathbb{C}),\ \mu \in \mathbb{C}$ จะได้ว่า สมการ $AX - XA = \mu X$ จะมีผลเฉลย $X \in M_n(\mathbb{C})$ ที่ไม่ใช่ 0 ก็ต่อเมื่อ μ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $A \oplus (-A)^T$

บทพิสูจน์

สมการ $AX - XA = \mu X$ มีผลเฉลย X ที่ไม่ใช่ 0

$\Leftrightarrow$ สมการ $\left[(I \otimes A) - \left(A^T \otimes I\right)\right]\mathrm{Vec}(X) = \mu\,\mathrm{Vec}(X)$ มีผลเฉลย X ที่ไม่ใช่ 0

$\Leftrightarrow$ $\left[A \oplus (-A^T)\right]\mathrm{Vec}(X) = \mu\,\mathrm{Vec}(X)$ มีผลเฉลย X ที่ไม่ใช่ 0

$\Leftrightarrow$ μ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $A \oplus (-A)^T$

<u>**ตัวอย่าง 4.2**</u> จงหา $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AX - XA = \mu X$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mu = -2$$

<u>วิธีทำ</u>

ค่าลักษณะเฉพาะของ $\left(A \oplus (-A)^T\right)$ = ค่าลักษณะเฉพาะของ $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= -2, 2, 0, 0$$

จะเห็นว่า μ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $A \oplus (-A)^T$

ดังนั้น สมการจะมีผลเฉลย X ที่ไม่ใช่ 0

จาก $AX - XA = \mu X \quad \Leftrightarrow \left[\left(I \otimes A\right) - \left(A^{T} \otimes I\right)\right] \mathrm{Vec}(X) = \mu \,\mathrm{Vec}(X)$

จะได้

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 & = 0 \\ -3x_1 + 6x_3 + 3x_4 & = 0 \\ -3x_2 - x_3 + 2x_4 & = 0 \end{matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

จากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ให้ $w = t$ จะได้ $x_1 = -x_2, \; = t, \; \mathrm{x}_3 = -t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t & -t \\ t & t \end{bmatrix}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

<u>**ตัวอย่าง 4.3**</u> จงหา $X \in M_3(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AX - XA = \mu X$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \mu = -2$$

<u>วิธีทำ</u>

ค่าลักษณะเฉพาะของ $\left(A \oplus (-A)^T\right) = -6+2i, -6-2i, 6+i, 6-i, 2i, -2i, 2, 0, 0$

จะเห็นว่า μ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $A \oplus (-A)^T$

ดังนั้น สมการจะมีผลเฉลย X ที่ไม่ใช่ 0

จาก $AX - XA = \mu X \Leftrightarrow \left[[I \otimes A] - [A^T \otimes I]\right]\mathrm{Vec}(X) = \mu \mathrm{Vec}(X)$

จะได้ $$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix}$$

จากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 38/151 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1305/604 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -52/151 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 82/151 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -58/151 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1031/1208 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1771/604 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1817/604 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ให้ $x_9 = t$ จะได้ $x_1 = 38/151,\ x_2 = 1305/604,\ x_3 = -52/151, x_4 = 82/151,$

$x_5 = -58/151,\ x_6 = -1301/1208,\ x_7 = 1771/151, x_8 = 1817/604$

เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38/151 & 82/151 & 1771/151 \\ 1305/604 & -58/151 & 1817/604 \\ -52/151 & -1301/1208 & t \end{bmatrix}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

4.2 ปัญหาการสลับที่ (Communitativity problem)

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ $A \in M_n(\mathbb{C})$ สมการ $AX = XA$ มีผลเฉลย $X \in M_n(\mathbb{C})$ จำนวนอนันต์

บทพิสูจน์

ได้จากทฤษฎีบท 3.7 โดยแทน $B = -A,\ C = 0$

1. เนื่องจาก $rank\left[(I_n \otimes A) - (A^T \otimes I_n)\right] = rank\left[(A^T \otimes A) - (A^T \otimes I_n) \quad 0\right]$

จะได้ว่า สมการ $AX = XA$ มีผลเฉลย

2. เนื่องจาก $\lambda + \mu = 0\ \exists \lambda \in \sigma(A)\ \exists \mu \in \sigma(-A)$ จะได้ว่า สมการ $AX = XA$

ไม่จริงที่สมการมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

เนื่องจาก สมการ $AX = XA$ สมมูลกับ

$$\left[(I_n \otimes A) - (A^T \otimes I_n)\right]\mathrm{Vec}(X) = 0 \tag{4.1}$$

ซึ่งผลเฉลยของสมการ (4.1) จะมีเพียงผลเฉลยเดียวหรือมีผลเฉลยจำนวนอนันต์

ดังนั้น สมการ $AX = XA$ มีผลเฉลยจำนวนอนันต์

<u>ตัวอย่าง 4.5</u> จงหา $X \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AX = XA$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$rank\left[(I_n \otimes A) - (A^T \otimes I_n)\right] = rank\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3$$

$$rank\left[(A^T \otimes A) - (A^T \otimes I_n) \quad 0\right] = rank\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] = 3$$

จะเห็นว่า $rank\left[(I_n \otimes A) - (A^T \otimes I_n)\right] = 3 = rank\left[(A^T \otimes A) - (A^T \otimes I_n) \quad 0\right]$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

จาก $AX - XA = 0 \Leftrightarrow \left[\left(I_n \otimes A\right) - \left(A^T \otimes I_n\right)\right]\mathrm{Vec}(X) = 0$

พิจารณา

$$I_2 \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T \otimes I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\left[\left(I_2 \otimes A\right)-\left(A^T \otimes I_2\right)\right]=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -5 & 0 & -1\\ -2 & 0 & -5 & 2\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

จาก $\left[\left(I_2 \otimes A\right)-\left(A^T \otimes I_2\right)\right]\mathrm{Vec}(X)=0$

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -5 & 0 & -1\\ -2 & 0 & -5 & 2\\ 0 & -2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

จากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

ให้ $x_4=t$ จะได้ $x_1=t,\ x_2=0,\ x_3=0$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_3\\ x_2 & x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & t\end{bmatrix}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

<u>ตัวอย่าง 4.6</u> จงหา $X \in M_3(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้ $AX = XA$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$rank\ \left[(I_n \otimes A)\ \text{-}\ (A^T \otimes I_n)\right] = rank \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 8$$

$$rank\left[(A^T \otimes A)\ \text{-}\ (A^T \otimes I_n) \quad 0\right] = rank \left[\begin{array}{ccccccccc|c} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$= 8$$

จะเห็นว่า $rank\ \left[(I_n \otimes A)\ \text{-}\ (A^T \otimes I_n)\right] = 8 = rank\left[(A^T \otimes A)\ \text{-}\ (A^T \otimes I_n) \quad 0\right]$

ดังนั้น สมการมีผลเฉลย

จาก $AX\ \text{-}\ XA = 0 \Leftrightarrow \left(\left[I_2^T \otimes A\right] - \left[A^T \otimes I_n\right]\right)\mathrm{Vec}(X) = 0$

พิจารณา

$$I_3^T \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A^T \otimes I_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\left[I_n^T \otimes A\right] - \left[A^T \otimes I_n\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}
$$

จาก $\left[\left(I_n \otimes A\right) - \left(A^T \otimes I_n\right)\right]\mathrm{Vec}(X) = 0$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

จากการดำเนินการมูลฐานตามแนวนอน

จะได้ $\left[\begin{array}{ccccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 466/15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -227/45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 94/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -39/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 201/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 57/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 22/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 103/9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

ให้ $x_9 = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ

$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_4 & x_7 \\ x_2 & x_5 & x_8 \\ x_3 & x_6 & x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 466/15 & -39/5 & 22/3 \\ -227/45 & 201/5 & 103/9 \\ 94/5 & 57/5 & t \end{bmatrix}$ เมื่อ t เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด

บทที่ 5
การประยุกต์ในสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ในบทนี้เราจะประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับสมการเมทริกซ์เชิงเส้น กับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่อยู่ในรูปแบบ $\dot{x}(t) = Ax(t)$ เมื่อ $x(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ (vector-valued function) และ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสจริง

5.1 ความรู้พื้นฐาน

บทนิยาม 5.1 ฟังก์ชัน $f\ :[a,b] \to \mathbb{R}$ จะเรียกว่า ฟังก์ชัน C^1 (C^1 function) ก็ต่อเมื่อ f หาอนุพันธ์ได้ (นั่นคือ หาอนุพันธ์ได้บนโดเมนซึ่งคือ $[a,b]$) และ f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทนิยาม 5.2 ให้ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่าหนึ่ง และ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ และให้ f เป็นฟังก์ชันจาก D ไปยัง $\mathbb{R}$ และให้ $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$

เราจะกล่าวว่า f มีความต่อเนื่องที่จุด $(a_1, a_2, ..., a_n)$

ถ้า 1. $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ มีค่า (นั่นคือ $(a_1, a_2, ..., a_n) \in D$)

และ 2. $\lim\limits_{(x_1, x_2, ..., x_n) \to (a_1, a_2, ..., a_n)} f(x_1, x_2, ..., x_n)$ มีค่า

และ 3. $\lim\limits_{(x_1, x_2, ..., x_n) \to (a_1, a_2, ..., a_n)} f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(a_1, a_2, ..., a_n)$

บทนิยาม 5.3 ฟังก์ชัน $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ จะกล่าวว่า **หาอนุพันธ์ได้** ที่จุด $(a_1, a_2, ..., a_n)$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชันเชิงเส้น

$$L(x_1, x_2, ..., x_n) = f(a_1, a_2, ..., a_n) + m_1(x_1 - a_1) + m_2(x_2 - a_2) + ... + m_n(x_n - a_n)$$

ซึ่งทำให้ $$\lim_{\substack{h_1 \to 0 \\ h_2 \to 0 \\ \vdots \\ h_n \to 0}} \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, ..., a_n + h_n) - L(a_1 + h, a_2 + k, ..., a_n + q)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + ... + h_n^2}} = 0$$

เราเรียกฟังก์ชันค่า L ดังกล่าวว่า การประมาณค่าเชิงเส้นของ f รอบจุด $(a_1, a_2, ..., a_n)$ เรากล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้บริเวณ $\mathbb{R}$ ก็ต่อเมื่อ f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดในบริเวณ $\mathbb{C}$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้บนโดเมน เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

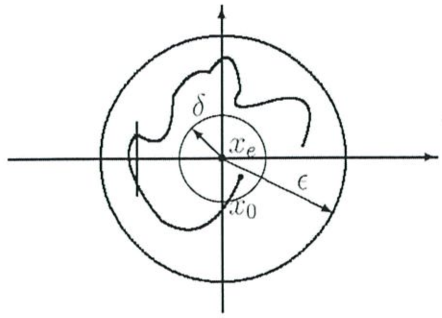
ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น สปริง, การแกว่งของลูกตุ้ม การประมวลผลสัญญาณไฟฟ้า เป็นต้น เราสามารถแปลงปัญหาดังกล่าวให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ดังนี้

$$\dot{x} = f(x) \quad f : D \to \mathbb{R} \text{ เมื่อ } D \in \mathbb{R}^n \text{ เป็นเซตปิด} \tag{5.1}$$

บทนิยาม 5.4 x_e จะเรียกว่าเป็นจุดสมดุลของระบบ (5.1) ก็ต่อเมื่อ $f(x_e) = 0$

บทนิยาม 5.5 จุดสมดุล x_e ของระบบ (5.1) จะกล่าวว่ามีเสถียรภาพ (stable) ก็ต่อเมื่อ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\| x(t_0) - x_e \| < \delta \Rightarrow \| x(t) - x_e \| < \varepsilon \ ; \forall t \geq t_0$$



รูปที่ 5.1 จุดสมดุลมีเสถียรภาพ

บทนิยาม 5.6 จุดสมดุล x_e ของระบบ (5.1) จะกล่าวว่า มีเสถียรภาพวงกว้างเชิงเส้นกำกับ (globally asymptotically stable) ก็ต่อเมื่อ x_e มีเสถียรภาพและ $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_e$

ทฤษฎีบท 5.7 สำหรับแต่ละ $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ จะได้ว่า

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \nabla V \bullet f(x)$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial v}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง 5.8</u> พิจารณาระบบสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1(t) \\ bx_2(t) + \cos x_2(t) \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $V = x_1^2 + x_2^2$ เมื่อ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ จงหา $\dot{V}(x)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax_1 \\ bx_2 + \cos x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2ax_1^2 + 2bx_2^2 + 2x_2 \cos x_1$$

5.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 5.9

พิจารณาระบบสมการ

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), t\right), t \geq 0, x(t) \in \mathbb{R}^n \tag{5.2}$$

และสมมติว่ามีฟังก์ชัน C^1 $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$V(x) > 0, x \neq 0 \tag{5.3}$$

$$V'(x) f(x) < 0, x \neq 0 \tag{5.4}$$

แล้วคำตอบ $x(t)$ ของสมการ (5.2) สอดคล้องกับ

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

<u>บทพิสูจน์</u> ดูเอกสารอ้างอิง[9]

ทฤษฎีบท 5.10

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้น

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \tag{5.5}$$

ถ้ามี $P \in M_n(\mathbb{R})$ ซึ่ง

1. $P > 0$
2. $A^T P + PA < 0$

แล้วจุดสมดุลของระบบ(5.5) มีเสถียรภาพวงกว้างเชิงเส้นกำกับ

บทพิสูจน์

จากทฤษฎีบท 5.9 และ $\dot{x}(t) = Ax(t)$

เลือก $V(x) = x^T Px$ เมื่อ $P > 0$ แล้วสมการ (5.3) เป็นจริง

จะได้ $\dot{V}(x) = x^T P\dot{x} + \dot{x}^T Px$

$= x^T PAx + (x^T A^T Px)$

$= x^T (PA + A^T P)x$

จากสมการ (5.4) ให้ $Q = -\left(A^T P + PA\right)$

จะได้ว่า

$$\dot{V}(x) = -x^T Qx < 0$$

ดังนั้น จุดสมดุลมีเสถียรภาพวงกว้างเชิงเส้นกำกับ

โดยทฤษฎีบท 5.10 ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของจุดสมดุลของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ (5.5) เราต้องหาผลเฉลยของสมการเมทริกซ์เชิงเส้น $A^T P + PA = -Q$ เมื่อ $Q > 0$ ซึ่งทำได้โดยใช้ความรู้ในบทที่ 3

<u>ตัวอย่าง 5.11</u> $\dot{x}_1 = -x_2$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2$$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า $\dot{x}(t) = Ax(t)$ เมื่อ $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

จะหา $P \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้

$$A^T P + PA = -I \tag{5.6}$$

จากทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า สมการ (5.6) สมมูลกับ $(A^T \oplus A^T)\,\mathrm{Vec}(P) = -\mathrm{Vec}(I)$

$$\begin{aligned}
A^T \oplus A^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

พิจารณา $P=\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}$

1. $P^T = P$
2. $\det\left[\frac{5}{2}\right] = \frac{5}{2} > 0$

   $\det\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{19}{4} > 0$

ดังนั้น P>0 โดยทฤษฎีบท 2.8

จะได้ $V(x) = x^T Px = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0$

โดยเงื่อนไข (5.6) และ $P>0$ จะได้ว่า $\dot{V}(x) < 0$

ดังนั้น จุดสมดุลมีเสถียรภาพวงกว้างเชิงเส้นกำกับ โดยทฤษฎีบท 5.10

<u>ตัวอย่าง 5.12</u> $\dot{x}_1 = -2x_2$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2$$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า $\dot{x}(t) = Ax(t)$ เมื่อ $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ และ $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

จะหา $P \in M_2(\mathbb{C})$ ซึ่งทำให้

$$A^T P + PA = -2I \tag{5.7}$$

จากทฤษฎีบท 3.7 จะได้ว่า สมการ (5.7) สมมูลกับ $(A^T \oplus A^T)\,\mathrm{Vec}(P) = -\mathrm{Vec}(2I)$

$$\begin{aligned}
A^T \oplus A^T &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

จะได้ $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

พิจารณา $P=\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

1. $P^T = P$

2. $\det\left[\frac{3}{2}\right] = \frac{3}{2} > 0$

   $\det\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{11}{4} > 0$

ดังนั้น $P>0$ โดยทฤษฎีบท 2.8

จะได้ $V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0$

โดยเงื่อนไข (5.7) และ $P>0$ จะได้ว่า $\dot{V}(x) < 0$

ดังนั้น จุดสมดุลมีเสถียรภาพวงกว้างเชิงเส้นกำกับ โดยทฤษฎีบท 5.10

เอกสารอ้างอิง

[1] **พัชรินทร์ เหมโชติ**, *พีชคณิตเชิงเส้น*.กรุงเทพมหานคร : สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2552

[2] **ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม**, *ทฤษฎีเมทริกซ์*. กรุงเทพมหานคร : สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง,2556

[3] **เดวิด บรรเจิดพงศ์ชัย**, *ระบบควบคุมพลวัต การวิเคราะห์ การออกแบบและการประยุกต์.* กรุงเทพมหานคร, 2551

[4] **Bobbi Jo Broxson**, *The Kronecker Product* , University of North Florida, USA, (2006)

[5] **Graham Alexander**, *Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications*, John Wiley & Sons, N.Y., (1981)

[6] **Herstein I.N., David J. Winter**, *Matrix Theory and Linear Algebra*, Macmillan, New York, (1989)

[7] **Khalil H.K**, *Nonlinear systems,* Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, (1996)

[8] **L. Perko**, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, 3rd edition, (2001)

[9] **M. Vidyasagar**, *Nonlinear Systems Analysis,* Centre for AI Robotics, India, (1993)

[10] **Roger A. Horn, Charles R.Johnson**, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, USA, (1985)

[11] **Roger A. Horn, Charles R.Johnson**, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, USA, (1991)

[12] **W.Keith Nicholson**, *Elementary Linear Algebra*, McGraw-Hill Education (Asia), Singapore, (2003)