# รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

# การทำซ้ำของฟังก์ชันทั่วถึงและเพิ่ม
# Iterates of Surjective And Increasing Functions

ดร. ศุกระวรรณ มะเวชะ

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากกองทุนวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

# รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

## การทำซ้ำของฟังก์ชันทั่วถึงและเพิ่ม
## Iterates of Surjective And Increasing Functions

ดร. ศุกระวรรณ มะเวชะ



ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากกองทุนวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ชื่อโครงการ การทำซ้ำของฟังก์ชันทั่วถึงและเพิ่ม
แหล่งเงิน ทุนพัฒนานักวิจัย กองทุนวิจัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ประจำปีงบประมาณ 2558 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 668,200 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย 2 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2557 ถึง 30 กันยายน 2559
หัวหน้าโครงการ ดร. ศุกระวรรณ มะเวชะ
หน่วยงาน คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

## บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ศึกษาเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำเสมือนพหุนาม โดยเน้นสมการรูปแบบ $f^q(x)=g(x)$ เมื่อกำหนดให้ฟังก์ชัน $g$ และจำนวนเต็มบวก $q$ ซึ่งนิยามบนโดเมน $\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{N}\cup\{0\}$

**คำสำคัญ :** สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ ฟังก์ชันทางเดียว วงโคจร

**Research Title:** Iterates of Surjective And Increasing Functions
**Researcher:** DR. SUKRAWAN MAVECHA
**Faculty:** Science **Department:** Mathematics

## ABSTRACT

This work study about polynomial-like iterative functional equations which is given. Emphases are placed upon equations of the form $f^q(x) = g(x)$, for a given function $g$ and a positive integer $q$, defined over three kinds of domain, namely, $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ and $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Keywords** : iterative functional equations, monotone functions, cycles

# กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ ศ.ดร.วิเชียร เลาหโกศล และ ผศ.ดร.บุญรอด ยุทธานันท์ เป็นอย่างสูง สำหรับคำปรึกษาและคำแนะนำต่างๆในเรื่องการทำงานวิจัยและความรู้มากมายที่ใช้ในการทำงานวิจัยนี้ ขอบคุณภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง สำหรับการสนับสนุนการทำงานวิจัยนี้ และขอบพระคุณสำหรับกำลังใจจากครอบครัว

ข้าพเจ้าขอบพระคุณอย่างยิ่งสำหรับกองทุนวิจัย สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เนื่องจากการวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากแหล่งทุนพัฒนานักวิจัย ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2558

ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ

# สารบัญ

# บทที่ 1
# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

สำหรับฟังก์ชัน $f$ และ $q \in \mathbb{N}$ นิยามการทำซ้ำ $q$ ครั้งของ $f$ โดย

$$f^q = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (q \text{ ครั้ง})$$

เมื่อ $\circ$ แทนฟังก์ชันประกอบ (composition of function)

รูปแบบการทำซ้ำ เป็นที่สนใจอย่างกว้างขวางและมีการพัฒนางานวิจัยอย่างรวดเร็ว ทั้งในด้านฟิสิกส์ ชีววิทยา รวมทั้งทางด้านเศรษฐศาสตร์

ให้ฟังก์ชัน $f: I \to I$ และ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก สัญลักษณ์ $f^n$ แทนฟังก์ชันประกอบ (composite function) บน $I$ โดย

$$f^1(x) = x, f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \text{ for } n = 1, 2, \ldots$$

ฟังก์ชัน $f^n$ คือเทอมการทำซ้ำที่ $n$ ของ $f$ ถ้า $x_0 \in I$ เราเขียน $x_n = f^n(x_0), n = 1, 2, \ldots$

พิจารณาตัวอย่างทางชีววิทยา สมมติว่าในสภาพแวดล้อมที่กำหนดให้มีกระต่ายอาศัยอยู่ เราสนใจจำนวนกระต่ายที่ขึ้นกับเวลา สมมติมีการนับจำนวนกระต่ายหนึ่งครั้งในแต่ละปี ทุกหน้าร้อน เริ่มต้นให้ $x_0$ เป็นจำนวนกระต่ายที่มีอยู่ หลังจาก 1 ปีผ่านไป จำนวนกระต่ายคือ $x_1$ 1 ปีผ่านไปจำนวนกระต่ายคือ $x_2$ เป็นต้น ภายใต้เงื่อนไขต่างๆเช่นเดิม พบว่า จำนวนกระต่ายในปีที่ $n+1$ ขึ้นอยู่กับจำนวนกระต่ายในปีที่ $x_n$ ซึ่งได้สมการความสัมพันธ์ดังนี้

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

เมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า

ตัวอย่างข้างต้นเป็นโมเดลทางคณิตศาสตร์อย่างง่ายของการเติบโตของประชากรของสปีชีเดียวในเวลาที่กำหนด เรานิยามลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งแต่ละเทอมแทนจำนวนประชากรของสปีชีที่กำหนดที่เวลา $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้วพิจารณาค่าลิมิตเมื่อ $n \to \infty$ ซึ่งเรากำลังพิจารณาระบบของจำนวนประชากร กระบวนการนี้สำคัญมากๆในหลายสาขาทางคณิตศาสตร์ รวมถึงการเคลื่อนที่ของดวงดาว และกาแลคซีในจักรวาล การขึ้นและลงของตลาดหุ้น สภาพอากาศของโลก จำนวนสารเคมีที่ได้รับ การเพิ่มและลดของประชากร

## 1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. หาฟังก์ชัน $f: X \to X$ เมื่อ $X$ คือ $\mathbb{N}$ หรือ $\mathbb{Z}$ ที่ซึ่งสำหรับ $q \geq 2, a \geq 2$ และ ทุกจำนวนเต็มไม่เป็นลบ $b$ ฟังก์ชันสอดคล้อง $f^q(x) = ax + b$ สำหรับทุก $n \in X$
2. หาฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สำหรับ $q \geq 2, a \geq 2$ และ ทุกจำนวนเต็มไม่เป็นลบ $b$ ฟังก์ชันสอดคล้อง $f^q(x) = ax + b$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{R}$
3. หาฟังก์ชัน $f: X \to X$ เมื่อ $X$ คือ $\mathbb{N}$ หรือ $\mathbb{Z}$ ที่ซึ่งสำหรับ $q \geq 1$ $f^q(x)$ เป็น

ฟังก์ชันทั่วถึงและเพิ่ม

4. หาฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ ซึ่งสำหรับ $q\geq 1$ $f^{q}(x)$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงและเพิ่ม

**1.3 ขอบเขตของการวิจัย**

โดเมนของฟังก์ชันคือ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ หรือ $\mathbb{R}$

**1.4 วิธีดำเนินการวิจัย**

1. รวบรวมเอกสารที่จำเป็นและเกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยโดยการสืบค้นจากฐานข้อมูลต่างๆ ทั้งในและต่างประเทศเพื่อให้ได้ข้อมูลทั้งหมดที่จำเป็นต่อการวิจัย
2. ศึกษาความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการทำซ้ำของฟังก์ชันในรูปแบบความสัมพันธ์ต่างๆจากเอกสารอ้างอิงต่างๆ เพื่อให้ได้ความรู้ที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อวิจัยและเป็นแนวทางในการทำวิจัยต่อไป
3. พิจารณาสมบัติที่เกี่ยวข้องของฟังก์ชันที่มีรูปแบบการทำซ้ำของฟังก์ชันในรูปแบบความสัมพันธ์ที่ต้องการศึกษาบนโดเมนต่างๆของฟังก์ชัน
4. ใช้ผลที่ได้จากข้อ 3. เพื่อหารูปแบบของฟังก์ชันบนโดเมนต่างๆที่สอดคล้องกับรูปแบบความสัมพันธ์นั้น
5. พิมพ์ผลงานวิจัยเพื่อตีพิมพ์ผลงานวิจัยในวารสารระดับนานนาชาติ และนำเสนองานวิจัยในการประชุมวิชาการระดับนานาชาติ

**1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ**

1. นักวิทยาศาสตร์ในสาขาต่างๆสามารถนำผลลัพธ์ไปใช้งานในงานวิจัยของตนเองได้โดยสามารถค้นหาได้โดยใช้กระบวนการที่ง่ายขึ้น
2. นำความรู้ที่ได้งานการทำงานวิจัยนี้ไปแนะนำแนวทางให้นักศึกษาปริญญาโทและปริญญาเอกที่ทำวิจัยในด้าน classical analysis ที่เกี่ยวกับการทำซ้ำของฟังก์ชัน
3. ได้ผลงานไปเสนอในงานประชุมวิชาการนานาชาติด้านคณิตศาสตร์และตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ

# บทที่ 2
# ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

สำหรับฟังก์ชัน $f$ และ $q \in \mathbb{N}$ นิยามการทำซ้ำ $q$ ครั้งของ $f$ โดย

$$f^q = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (q\text{ ครั้ง})$$

เมื่อ $\circ$ แทนฟังก์ชันประกอบ (composition function)

ทฤษฎีของสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equations) มีมาอย่างยาวนานและแพร่หลายมาก [8] ในที่นี้ เราจะพิจารณาสมการเชิงฟังก์ชันเสมือนพหุนาม (polynomial-like functional equations) ระดับขั้นที่ $n$ มีรูปแบบ

$$a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + a_{n-2} f^{n-2}(x) + \ldots + a_1 f(x) + a_0 x = F(x) \qquad (2.1)$$

เมื่อ $f : X \to X$ คือฟังก์ชันไม่ทราบ (unknown function), $F$ คือฟังก์ชันกำหนดให้ และ $a_0, \ldots, a_{n-1}$ คือจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

นิยามสมการลักษณะเฉพาะ(The characteristic equation) ของ (2.1) มีรูปแบบ

$$P(r) := a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \ldots + a_1 r + a_0 = 0 \qquad (2.2)$$

และ $P(r)$ เรียกว่าพหุนามลักษณะเฉพาะ (characteristic polynomial) ของ (2.2)

**กรณีเซตไม่วิยุต (Non-discrete set case)**

ให้ $X$ เป็นปริภูมิเชิงเส้นของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน (real or complex linear space) ในปี 1996 Jarczyk, [10] หาผลเฉลยของกรณีพิเศษของ (2.1) คือสมการ

$$\sum_{i=1}^{k} a_i f^{n_i}(x) = x \qquad (2.3)$$

ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.1** ([10]) สมมติให้ $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = 1$ ถ้า $D \subset (-\infty, 0)$ หรือ $D \subset (0, \infty)$ อย่างใดอย่างหนึ่ง และ ถ้า $f : D \to D$ สอดคล้องกับ (2.3) เมื่อ $a_1, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนบวก แล้ว

$$cD \subset D \text{ และ } f(x) = cx \qquad (x \in D)$$

เมื่อ c เป็นรากบวกรากเดียวของสมการลักษณะเฉพาะ $\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda^{n_i} = 1$

นอกจากนี้ ถ้า $\gcd(n_1, \ldots, n_k) = p$ แล้ว

$$c^p D \subset D \text{ และ } f^p(x) = c^p x \qquad (x \in D)$$

แนวคิดหลักของการพิสูจน์คือแปลง (2.3) ให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (linear difference equation) บน $\mathbb{N}^k$ และสนใจวิธีการเวียนบังเกิด (recurrent method) ก่อนหน้านี้

ในปี 2000 Matkowski และ Zhang [1] แสดงในทฤษฎีบทถัดไปว่าผลเฉลยของสมการฟังก์ชันเหมือนพหุนามที่มีระดับขั้นที่ต่ำกว่าเป็นผลเฉลยของสมการระดับขั้นสูงกว่า

**ทฤษฎีบท 2.2** ([1]) ให้ $X$ แทนปริภูมิเชิงเส้นของจำนวนจริงหรือเชิงซ้อนและให้

$$Q(x) = x^k - b_{k-1}x^{k-1} - \cdots - b_1 x - b_0 \in \mathbb{C}[x]$$
$$P(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1 x - a_0 \in \mathbb{C}[x]$$

สมมติ $k \le n$ และ $Q | P$ ถ้า $f : X \to X$ สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f^k(x) = b_{k-1}f^{k-1}(x) + b_{k-2}f^{k-2}(x) + \cdots + b_0 x, \quad (x \in X) \tag{2.4}$$

แล้ว $f$ สอดคล้อง

$$f^n(x) = a_{n-1}f^{n-1}(x) + a_{n-2}f^{n-2}(x) + \cdots + a_0 x, \quad (x \in X)$$

ในปีเดียวกัน พวกเขาอธิบายความเกี่ยวข้องกันของผลเฉลยต่อเนื่องของ (1.4) ที่มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวกับพฤติกรรมของค่ารากของสมการลักษณะเฉพาะของมัน พวกเขาวิเคราะห์กรณี $k = 2$ คือสมการ

$$f^2(x) = a_1 f(x) + a_0 x, \qquad a_0 \ne 0, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

และอธิบายกรณีทั่วไป ได้ผลลัพธ์ดังต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 2.3** ([2])

(i) ให้ $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ , $a_0 \ne 0$ สมมติพหุนาม

$$r^{n+1} - a_n r^n - a_{n-1} r^{n-1} - \ldots - a_0$$

มีสองค่ารากคือ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ ที่ซึ่ง $1 < r_1 < r_2$ หรือ $0 < r_1 < r_2 < 1$ หรือ $0 < r_1 < 1 < r_2$ หรือ $r_1 < r_2 < -1$ หรือ $-1 < r_1 < 1 < r_2 < 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง แล้วผลเฉลยฟังก์ชั่นต่อเนื่องของ

$$f^{n+1}(x) = a_n f^n(x) + a_{n-1} f^{n-1}(x) + \ldots + \mathrm{a}_0 x \quad , \quad a_0 \ne 0 \qquad (x \in \mathbb{R}) \tag{2.6}$$

ขึ้นอยู่กับฟังก์ชันต่างๆ นอกจากนี้ ทุกฟังก์ชันผลเฉลยที่ต่อเนื่องเป็นสมานสัณฐาน (homeomorphism) ของ $\mathbb{R}$

(ii) ให้ $a_k \ge 0$ $(k = 1, \ldots, n), a_0 \ne 0$ ที่ซึ่ง $a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 1$
ถ้า $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยที่ต่อเนื่องของ (1.6) แล้ว $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \ge 0$

ในปี 2004 Yang และ Zhang ได้ศึกษาทฤษฎีลักษณะเฉพาะ (Characteristic Theory) ของสมการทำซ้ำเสมือนพหุนามในกรณีทั่วไปเมื่อรากลักษณะเฉพาะเป็นศูนย์ พวกเขาพิจารณาสมการ (2.1) เมื่อ $a_0 = 0, a_1, a_2, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ และ $X = \mathbb{R}$

งานของพวกเขาใช้ความคิดของออยเลอร์ เกี่ยวกับผลเฉลยลักษณะเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ แล้วพวกเขาได้หาผลเฉลยรูปแบบ $f(x) = rx$ เมื่อ $r \in \mathbb{C}$ ไม่ทราบค่า พวกเขาได้แสดงว่า สมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำไม่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้าสมการนั้นไม่มีค่ารากลักษณะเฉพาะเป็นจำนวนจริง

ในปี 2009 Berg[7] พิจารณาสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f^k = F(x, f, ... f^{k-1})$$

เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ และ $F : I^k \to I$ โดยที่ $I \subset \mathbb{R}$ โดยพิจารณาสมการที่สัมพันธ์กัน

$$y_{n+k}(z) = F(y_n(z), y_{n+1}(z), ..., y_{n+k-1}(z))$$

ให้ $y : \mathbb{R} \to I \subset \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทางเดียวโดยแท้ (strictly monotone continuous function) และผกผันของ $y$ แทนด้วย $y^{[-1]} : I \to \mathbb{R}$ มีรูปแบบ

$$f^n(x) = y(n + y^{[-1]}(x))$$

เมื่อจำนวนเต็ม $n$ คือเทอมการทำซ้ำครั้งที่ $n$ ของ $f$

**บทตั้ง 2.4** ([7]) ถ้า $y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$y_{n+2} = y_n(1 + y_{n+1})$$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น $y_0 = y_1 = z$ เมื่อ $z$ เป็นพารามิเตอร์แน่นอน แล้วฟังก์ชัน $f_n = y_{n+1}(y_n^{[-1]})$ สอดคล้องกับ

$$f_{2n} < f_{2n+2} < f_{2n+3} < f_{2n+1}$$

สำหรับ $x > 0$ และทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$

**กรณีเซตวิยุต (Discrete set case)**

ตามที่กล่าวไว้ใน [3] Mallows สังเกตว่ามีลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียว $(a(n))_{n\geq 0}$ ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่ซึ่ง $a(a(n)) = 2n$ สำหรับ $n \neq 1$ ในปี 1979 Propp [9,10] แนะนำ ลำดับ $(s(n))_{n\geq 0}$ ที่นิยามให้เป็นลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียว ที่ซึ่ง $s(s(n)) = 3n$ ในปี 2005 Allouche และคณะ [3] แสดงว่ามีลำดับเพิ่มเป็นจำนวนนับไม่ได้ $(a(n))_{n\geq 0}$ ที่ซึ่ง $a(a(n)) = dn$ สำหรับทุก $d \geq 4$ ขณะที่มีลำดับเพิ่มเพียงหนึ่งเดียวที่สอดคล้องกับ $a(a(n)) = dn$ สำหรับ $d = 2, 3$

**ทฤษฎีบท 2.5** ([3]) ให้ $b_1, ..., b_n$ เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับทุก $b_i \in \{2 \cdot d^i - 3, 2 \cdot d^i - 2\}$ เมื่อ $i = 1, 2, ...$ มีลำดับเพิ่ม $a = (a(n))_{n\geq 0}$ ของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ ที่ซึ่ง $a(a(n)) = dn; d \geq 4$ และ $a(d^i - 1) = b_i$

ในปี 2008 Sarkaria [6] พิจารณาฟังก์ชันทั้งหมด $f: X \to X$ เมื่อ $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ หรือ $\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = n+k$ สำหรับ $q, k \in \mathbb{N}$ ที่กำหนดให้ ปัญหานี้นำมาจากปัญหาในคณิตศาสตร์โอลิมปิกนานาชาติ (International Mathematical Olympiad) ในปี 1987: พิสูจน์ว่าไม่มีฟังก์ชัน $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง

$$f(f(n)) = n+1987$$

นอกจากนี้, Sarkaria พิสูจน์ว่า

- สำหรับ $q \geq 1, k \geq 1,$ มีจริงฟังก์ชัน $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับ $f^q(n) = n+k$ ก็ต่อเมื่อ $q$ หาร k ลงตัว
- มีฟังก์ชันดังกล่าวจำนวน $k!/(k/q)!$
- มีฟังก์ชัน $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ จำนวนอนันต์ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = n+k$ ก็ต่อเมื่อ $q$ หาร k ลงตัว
- มีจริงฟังก์ชันต่อเนื่อง $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับ $f^q(n) = n+k$ และรูปแบบของฟังก์ชันได้ถูกพิจารณา

ในปี 2014 ผลของ Propp [4,5] และ Allouche และคณะ [1] ได้ถูกขยาย โดย Laohakosol และ Yuttanan ใน [6] ซึ่งได้แสดงว่า สำหรับ $q \geq 2, D \geq 2$ ถ้า $D-1$ หาร $q$ ลงตัว แล้วมีฟังก์ชันเพิ่มเพียงหนึ่งเดียว $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับ $f^q(n) = Dn, (\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\})$; นอกจากนี้ มีฟังก์ชันเพิ่มจำนวนอนันต์ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำนี้

# บทที่ 3
# ผลการวิจัย

## 3.1 ฟังก์ชันบนเซตของจำนวนจริง

หัวข้อนี้จะหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องสมการ

$$f^q(x)=ax+b \text{ เมื่อ } a\notin\{0,1\},\ x\in\mathbb{R}, q\geq 2 \tag{3.1}$$

กรณี $a=1$ ได้ทำแล้วใน [6]

**บทตั้ง 3.1.1** ถ้า $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยที่ต่อเนื่องของ (3.1) แล้ว $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงและฟังก์ชันทางเดียวแท้จริง

**พิสูจน์** ให้ $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ที่ซึ่ง $f(x_1)=f(x_2)$ แล้ว $f^q(x_1)=f^q(x_2)$

โดย (3.1) ได้ว่า $ax_1=f^q(x_1)-b=f^q(x_2)-b=ax_2$

เนื่องจาก $a\neq 0$ ได้ว่า $x_1=x_2$ ดังนั้น $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ถ้า $f$ มีขอบเขต แล้ว $f^q(x)$ มีขอบเขต ขณะที่ฟังก์ชัน $ax+b$ ไม่มีขอบเขต เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $f$ ต้องไม่มีขอบเขต

เนื่องจาก $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและไม่มีขอบเขต ดังนั้น $f$ ต้องเป็นฟังก์ชันทั่วถึงและฟังก์ชันทางเดียวแท้จริง □

**บทตั้ง 3.1.2** ถ้า $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นผลเฉลยของ (3.1) แล้ว $x=b/(1-a)$ เป็นจุดตรึงเพียงจุดเดียวของ $f$

**พิสูจน์** จาก (3.1) เรามี

$$f(ax+b)=f^{q+1}(x)=af(x)+b$$

และ

$$f\left(\frac{b}{1-a}\right)=af\left(\frac{b}{1-a}\right)+b=\frac{b}{1-a}$$

ซึ่งแสดงได้ว่า $\frac{b}{1-a}$ เป็นจุดตรึง นอกจากนี้ ถ้า $f(d)=d$ แล้วโดย (3.1)

เราได้ว่า $d=ad+b$ นั่นคือ $d=b/(1-a)$ □

ต่อไปนี้กำหนดให้ $p:=b/(1-a)$ เราจะพิจารณาเป็น 3 กรณีดังต่อไปนี้

กรณี 1 : $a>1$

**กรณี 1.1** $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม การสร้างฟังก์ชันขึ้นอยู่กับคุณสมบัติพื้นฐานต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 3.1.3** สำหรับ $x_0\in(p,\infty)$ และกำหนด $x_1,\ldots,x_{q-1}\in\mathbb{R}$ โดยที่

$$p<x_0<\ldots<x_{q-1}<ax_0+b$$

และสำหรับฟังก์ชันสมานสัณฐานเพิ่ม นิยามโดย

$$f_0:[x_0,x_1]\to\left[x_1,x_2\right]$$
$$f_1:[x_1,x_2]\to\left[x_2,x_3\right]$$
$$\vdots$$
$$f_{q-2}:[x_{q-2},x_{q-1}]\to\left[x_{q-1},ax_0+b\right]$$

มีจริงฟังก์ชันเพิ่มขึ้นต่อเนื่องเพียงหนึ่งเดียว $F:(p,\infty)\to(p,\infty)$ สอดคล้อง $F^q(x)=ax+b$ และ
$$F(x)=f_m(x) \text{ สำหรับ } x\in\left[x_m,x_{m+1}\right], m=0,1,...,q-2$$

**พิสูจน์** สำหรับ $n\in\mathbb{Z}$ นิยาม $x_{n+q}=ax_n+b$

เราจะเห็นว่าสำหรับ $m,r\in\mathbb{Z}$ ซึ่ง $0\le r<p$ ,
$$X_{mq+r}=a^m x_r+\frac{a^m-1}{a-1}b=a^m(x_p-p)+p$$

เนื่องจาก $a>1$ จะได้ว่า
$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty \text{ และ } \lim_{n\to\infty}x_n=p$$

เริ่มจาก $f_0,f_1,...,f_{q-2}$ เราสร้างฟังก์ชันสมานสัณฐาน ดังนี้
$$f_n:\left[x_n,x_{n+1}\right]\to\left[x_{n+1},x_{n+2}\right]$$
ตามลำดับ

สำหรับ $n\in\mathbb{Z}$ อื่นๆ กำหนดโดย
$$f_n(x)=af^{-1}_{n-(q-1)}(f^{-1}_{n-(q-2)}(...f^{-1}_{n-1}(x)...))+b_2x\in\left[x_n,x_{n+1}\right]$$
ลำดับ $(f_n)_n\in\mathbb{Z}$ อธิบายได้ดังนี้

$$...\xrightarrow{f_{-3}}\left[x_{-2},x_{-1}\right]\xrightarrow{f_{-2}}\left[x_{-1},x_0\right]\xrightarrow{f_{-1}}\left[x_0,x_1\right]\xrightarrow{f_0}\left[x_1,x_2\right]\xrightarrow{f_1}\left[x_2,x_3\right]\xrightarrow{f_2}...$$
สุดท้าย นิยามฟังก์ชัน $F:(p,\infty)\to(p,\infty)$ โดย
$$F(x)=f_n(x)\ ,\ x\in\left[x_n,x_{n+1}\right]\ ,\ n\in\mathbb{Z}$$
สำหรับ $x\in\left[x_n,x_{n+1}\right]$ $(n\in\mathbb{Z})$ เรามี
$$F^q(x)=\underbrace{F(...F}_{q}(x)...)=\underbrace{F(...F}_{q-1}(f_n(x))...)=F(...F(f_{n+1}(f_n(x)))...)$$
$$\vdots$$
$$=f_{n+q-1}(f_{n+q-2}(...f_{n+1}(f_n(x))...))$$
$$=af_n^{-1}(f_{n+1}^{-1}(...f_{n+q-2}^{-1}(f_{n+q-2}(...f_{n+1}(f_n(x))...))...))+b$$
$$=ax+b$$
ซึ่งแสดงว่า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มต่อเนื่องจาก $(p,\infty)$ ทั่วถึง $(p,\infty)$
และมีเพียงหนึ่งเดียวโดยพิจารณาจากค่าตั้งต้น $f_0,f_1,...,f_{q-2}$ และสอดคล้อง $F^q(x)=ax+b$ □

สำหรับในส่วนของโดเมนที่เหลือ คือ $(-\infty, p)$ จะพูดถึงในบทแทรกต่อไปนี้

**บทแทรก 3.1.4** ถ้า $h:(-\infty,p)\rightarrow(-\infty,p)$ นิยามโดย

$$h(x)=2p-F(2p-x)$$

เมื่อ $F$ เป็นฟังก์ชันที่สร้างเช่นเดียวกันในทฤษฎีบท 3.1.3 แล้ว $h$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและสอดคล้อง (3.1)

**พิสูจน์** เนื่องจาก $2p-x\in(p,\infty)$ ก็ต่อเมื่อ $x\in(-\infty,p)$ เราเห็นว่า $h$ นิยาม และเป็นฟังก์ชันเพิ่ม สำหรับ $x\in(-\infty,p)$

$$\begin{aligned} h^q(x) &= h^{q-1}(2p-F(2p-x)) = h^{q-2}(2p-F^2(2p-x)) = \dots \\ &= 2p-F^q(2p-x) = 2p-(a(2p-x)+b) = ax+b \end{aligned}$$

ดังนั้น $h$ สอดคล้อง (3.1) บน $(-\infty,p)$ □

โดยการรวม 2 ทฤษฎีบทล่าสุดจะได้

**ทฤษฎีบท 3.1.5** ฟังก์ชันเพิ่มอย่างต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$f^q(x)=ax+b \quad \text{เมื่อ } a>1, q\geq 2 \tag{3.2}$$

ก็ต่อเมื่อมีรูปแบบ

$$f(x)=\begin{cases} F_1(x), x\in(p,\infty), \\ p, x\in p, \\ 2p-F_2(2p-x), x\in(-\infty,p), \end{cases} \tag{3.3}$$

เมื่อ $F_1$ และ $F_2$ เป็นฟังก์ชันที่ถูกสร้างในทฤษฎีบท 3.1.3

**พิสูจน์** ดังที่แสดงในทฤษฎีบท 3.1.3 และ บทแทรก 3.1.4 ฟังก์ชัน $f$ นิยามดังใน (3.3) สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชัน $f^q(x)=ax+b$

นอกจากนี้ ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยต่อเนื่องของ (3.2) แล้วสำหรับ $x_0\in(p,\infty)$ และ $F_1=f\big|_{(p,\infty)}$

นิยาม $x_i=F_1^i(x_0)\quad(i=1,2,\dots,q)$

ถ้า $x_0>F_1(x_0)$ เนื่องจาก $F_1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เรามี

$$x_0>F_1(x_0)>F^2{}_1(x_0)>\dots>F_1^q(x_0)=ax_0+b$$

ซึ่งสรุปได้ว่า $x_0<p$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $x_0<x_1<\dots<x_{q-1}<x_q=ax_0+b$

โดยบทตั้ง 3.1 $f$ เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐานเพิ่ม และนิยาม

$$F_1\big|_{[x_{i-1},x_i]}:[x_{i-1},x_i]\xrightarrow[onto]{1-1}[x_i,x_{i+1}]\quad(i=1,2,\dots,q-1)$$

จะได้ว่า $F_1$ เป็นฟังก์ชันเหมือน $F$ ในทฤษฎีบท 3.1.3

นิยาม $F_2:(p,\infty)\rightarrow(p,\infty)$ โดย $F_2(y)=2p-f(2p-y)$

$F_2$ นิยามและเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ให้ $y_0 \in (p,\infty)$ นิยาม $y_i = F_2^i(y_0)$ $(i=1,2,...,q)$

โดยข้อโต้แย้งทำนองเดียวกันกับข้างต้นแสดงได้ว่า $F_2^q(y) = ay+b$ และ

$$F_2\Big|_{[y_{i-1},y_i]} : [y_{i-1},y_i] \xrightarrow[onto]{1-1} [y_i,y_{i+1}] \quad (i=1,2,...,q-1)$$

กล่าวคือ $F_2$ เป็นฟังก์ชันเหมือน $F$ ในทฤษฎีบท 3.1.3

สำหรับ $x \in (-\infty,p)$ มีจริง $y \in (p,\infty)$ ที่ซึ่ง $x = 2p-y$

ดังนั้น $f(x) = f(2p-y) = 2p - F_2(y) = 2p - F_2(2p-x)$ ซึ่งแสดงว่า ทุกฟังก์ชันผลเฉลยต่อเนื่องจะต้องมีรูปแบบดัง (3.3) □

**กรณี 1.2 :** $f$ เป็นฟังก์ชันลด

ถ้า $q$ เป็นเลขคี่ แล้ว $f^q(x)$ เป็นฟังก์ชันลด แต่ $ax+b$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $q$ เป็นเลขคู่ ให้ $q = 2k$

**ทฤษฎีบท 3.1.6** สำหรับ $x_0 \in (p,\infty)$ กำหนด $x_1,...,x_{k-1},y_0,...,y_{k-1} \in \mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$ay_0 + b < y_{k-1} < ... < y_0 < p < x_0 < ... < x_{k-1} < ax_0 + b$$

และสำหรับฟังก์ชันสมานสัณฐานลดลง โดยนิยาม

$$f_0 : [x_0,x_1] \to [y_1,y_0]$$
$$f_1 : [y_1,y_0] \to [x_1,x_2]$$
$$\vdots$$
$$f_{2k-3} : [y_{k-1},y_{k-2}] \to [x_{k-1},ax_0+b]$$
$$f_{2k-2} : [x_{k-1},ax_0+b] \to [ay_0+b,y_{k-1}]$$

มีจริงฟังก์ชันผลเฉลยลดลงต่อเนื่องเพียงหนึ่งเดียว $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ของสมการทำซ้ำ $f^q(x) = ax+b$ และสำหรับ $l = 0,1,...,k-2$

$$F(x) = \begin{cases} f_{2l}(x), x \in [x_l, x_{l+1}], \\ f_{2l+1}(x), x \in [y_{l+1}, y_l], \\ f_{2k-2}(x), x \in [x_{k-1}, ax_0+b] \end{cases}$$

เมื่อ $y_k = ay_0 + b$

นอกจากนี้ ถ้าฟังก์ชันลดลงต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชันของ

$$f^q(x) = ax+b \quad \text{เมื่อ } a>1, q\ge 2$$

แล้ว $f$ ต้องมีรูปแบบหนึ่งในฟังก์ชัน $F$ ที่นิยามข้างบน

**พิสูจน์** สำหรับ $n \in \mathbb{Z}$ นิยาม

$$x_{n+k} = ax_n + b, y_{n+k} = ay_n + b$$

จะได้ว่าสำหรับ $m,r \in \mathbb{Z}$ โดย $0 \le r < k$ เรามี

$$x_{mk+r} = a^m x_r + \frac{a^m - 1}{a-1} b = a^m (x_r - p) + p$$
$$y_{mk+r} = a^m y_r + \frac{a^m - 1}{a-1} b = a^m (y_r - p) + p$$

เนื่องจาก $a > 1$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty, \lim_{n\to-\infty} x_n = p, \lim_{n\to-\infty} y_n = p$$

สำหรับ $n \in \mathbb{Z}$ นิยามฟังก์ชันสมานสัณฐานดังนี้

$$f_{2n-1} : [y_n, y_{n-1}] \to [x_n, x_{n+1}]$$
$$f_{2n} : [x_n, x_{n+1}] \to [y_{n+1}, y_n]$$

โดย
$$f_{2n-1}(y) = af_{2n-2k}^{-1}(f_{2n-2k+1}^{-1}(\dots f_{2n-2}^{-1}(y)\dots)) + b$$
$$f_{2n}(x) = af_{2n-2k+1}^{-1}(f_{2n-2k+2}^{-1}(\dots f_{2n-1}^{-1}(x)\dots)) + b$$

ลำดับ $(f_n)_n \in \mathbb{Z}$ มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\dots \xrightarrow{f_{-4}} [y_{-1}, y_{-2}] \xrightarrow{f_{-3}} [x_{-1}, x_0] \xrightarrow{f_{-2}} [y_0, y_{-1}] \xrightarrow{f_{-1}} [x_0, x_1]$$
$$\xrightarrow{f_0} [y_1, y_0] \xrightarrow{f_1} [x_1, x_2] \xrightarrow{f_2} \dots$$

สุดท้ายนิยาม $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย

$$F(x) = \begin{cases} f_{2n}(x), x \in [x_n, x_{n+1}], n \in \mathbb{Z} \\ p, x = p \\ f_{2n-1}(x), x \in [y_n, y_{n+1}], n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

เห็นว่าสำหรับ $x \in [x_n, x_{n+1}]$ $(n \in \mathbb{Z})$ เรามี

$$\begin{aligned} F^{2k}(x) &= \underbrace{F(\dots F}_{2k}(x)\dots) = \underbrace{F(\dots F}_{2k-1}(f_n(x))\dots) \\ &= f_{2n+2k-1}(f_{2n+2k-2}(\dots f_{2n+1}(f_{2n}(x))\dots)) \\ &= af_{2n}^{-1}(f_{2n+1}^{-1}(\dots f_{2n+2k-2}^{-1}(f_{2n+2k-2}(\dots f_{2n+1}(f_{2n}(x))\dots))\dots)) + b \\ &= ax + b \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับ $x \leftarrow [y_n, y_{n-1}], n \in \mathbb{Z}$ เรามี $F^{2k}(x) = ax + b$

เนื่องจาก $f_{2n}(x_{n+1}) = y_{n+1} = f_{2(n+1)}(x_{n+1}), f_{2n-1}(y_n) = x_{2+1} = f_{2n+1}(y_n), y_n \nearrow p, x_n \searrow p$ ขณะที่ $n \searrow -\infty$ ฟังก์ชัน $f_{2n}, f_{2n+1}$ และ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันลดต่อเนื่องจาก $\mathbb{R}$ ทั่วถึง $\mathbb{R}$ ฟังก์ชัน $F$ มีเพียงหนึ่งเดียวโดยการพิจารณาค่าเริ่มต้นที่กำหนดให้ $f_0, f_1, \dots, f_{2k-2}$ และสอดคล้อง $F^{2K}(x) = ax + b$

เราสามารถแสดงได้เช่นเดียวกับ ทฤษฎีบท 3.1.5 ว่าฟังก์ชัน $f$ ลดลงต่อเนื่องที่สอดคล้อง $f^q(x) = ax + b$ จะต้องเป็นรูปแบบหนึ่งของฟังก์ชัน $F$ ดังข้างบน $\square$

กรณี 2 : $0<a<1$

**ทฤษฎีบท 3.1.7** ฟังก์ชันต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$f^{q}(x)=ax+b \text{ เมื่อ } 0<a<1 \ , \ q\geq 2$$

ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันที่อธิบายใน ทฤษฎีบท 3.1.3 หรือ ทฤษฎีบท 3.1.6 อย่างใดอย่างหนึ่ง

**พิสูจน์** แทน $x$ โดย $f^{-q}(x)$ ใน (3.1) จะได้ $x=af^{-q}(x)+b$

กล่าวถึง
$$f^{-q}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a} \tag{3.4}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{a}>1$ เราได้ผลเฉลย $f^{-1}$ ของ (3.4) โดยกรณี 1 แล้วเราได้ $f$ จาก $f^{-1}$ □

กรณี 3 : $a<0$

ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้ว $f^{q}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มด้วย แต่ $ax+b$ เป็นฟังก์ชันลด เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $f$ ต้องเป็นฟังก์ชันลด

ถ้า $q$ เป็นเลขคู่ แล้ว $f^{q}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $q$ ต้องเป็นเลขคี่ ให้ $q=2k+1$ เราต้องแบ่งะพิจารราออกเป็น 3 กรณีย่อย โดยพิจารณาค่าของ $a$

กรณี 3.1 : $a=-1$

**ทฤษฎีบท 3.1.8** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยลดต่อเนื่องของสมการ $f^{2k+1}(x)=-x+b$ แล้ว $f(x)=-x+b$

**พิสูจน์** เนื่องจาก $f$ เป็นฟังก์ชันลด แล้ว $f^{2}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ให้ $x\in\mathbb{R}$

ถ้า $x>f^{2}(x)$ แล้ว

$$x>f^{2}(x)>f^{4}(x)>...>f^{4k+2}(x)=f^{2k+1}(-x+b)=x$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า $x<f^{2}(x)$ แล้ว

$$x<f^{2}(x)<f^{4}(x)<...<f^{4k+2}(x)=f^{2k+1}(-x+b)=x$$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $x=f^{2}(x)$ ทำซ้ำจนได้ว่า $f(x)=f^{3}(x)=...=f^{2k+1}(x)=-x+b$ □

กรณี 3.2 : $a<-1$

**บทแทรก 3.1.9** ถ้า $x\in(p,\infty)$ แล้ว $ax+b<\frac{x-b}{a}<p$ และ $x<a^{2}x+ab+b$

**พิสูจน์** เนื่องจาก $\frac{b}{1-a}=p<x$ และ $a^{2}>1$ ได้ว่า

$$(1+a)b>x(1-a^{2}),a^{2}x+ab+b>x>p,$$

$$ax+b<\frac{x-b}{a}<\frac{p-b}{a}=p$$ □

**ทฤษฎีบท 3.1.10** สำหรับ $x_0 \in (p,\infty)$ กำหนด $x_1,\dots,x_{k-1},x_k,y_0,\dots,y_{k-1}\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $ax_0+b<y_{k-1}<\dots<y_0<\frac{x_0-b}{a}<p<x_0<\dots<x_{k-1}<x_k<ay_0+b$

และสำหรับกำหนดฟังก์ชันสมานสัณฐานลด

$$\begin{aligned}
f_0 &: [x_0,x_1]\to[y_1,y_0]\\
f_0 &: [y_1,y_0]\to[x_1,x_2]\\
&\vdots\\
f_{2k-3} &: [y_{k-1},y_{k-2}]\to[x_{k-1},x_k]\\
f_{2k-2} &: [x_{k-1},x_k]\to[ax_0+b,y_{k-1}]\\
f_{2k-1} &: [ax_0+b,y_{k-1}]\to[x_k,ay_0+b]
\end{aligned}$$

มีจริงฟังก์ชันผลเฉลยลดลงต่อเนื่องเพียงหนึ่งเดียว $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ของสมการทำซ้ำ $F^q(x)=ax+b$ นอกจากนี้ สำหรับ $l=0,1,\dots,k-1$ เรามีว่า

$$F(x)=\begin{cases} f_{2l}(x), x\in[x_l,x_{l+1}]\\ f_{2l+1}(x), x\in[\mathrm{y}_{l+1},\mathrm{y}_l],\end{cases}$$

เมื่อ $y_k=ax_0+b$

ในทางกลับกัน ถ้าฟังก์ชันลดลงต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$f^q(x)=ax_0+b \text{ เมื่อ } a<-a, q\geq 2 \tag{3.5}$$

แล้ว $f$ ต้องมีรูปแบบหนึ่งในฟังก์ชัน $F$ ข้างบน

**พิสูจน์** สำหรับ $n\in\mathbb{Z}$ นิยาม $x_{n+k+1}=ay_n+b, y_{n+k}=ax_n+b$

สำหรับ $m,r\in\mathbb{Z}$ โดย $0\leq r<k$ เราได้ว่า

$$x_{m(2k+1)+r}=a^{2m}x_r+\frac{a^{2m}-1}{a-1}b=a^{2m}(x_r-p)+p$$

$$y_{m(2k+1)+r}=a^{2m}y_r+\frac{a^{2m}-1}{a-1}b=a^{2m}(\mathrm{y}_r-p)+p$$

เนื่องจาก $a<-1$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty, \lim_{n\to\infty}y_n=-\infty, \lim_{n\to-\infty}x_n=p, \lim_{n\to-\infty}y_n=\infty$$

สำหรับ $n\in\mathbb{Z}$ นิยามฟังก์ชันสมานสัณฐานดังนี้

$$\begin{aligned}
f_{2n-1} &: [\mathrm{y}_n,y_{n-1}]\to[x_n,x_{n+1}]\\
f_{2n} &: [x_n,x_{n+1}]\to[\mathrm{y}_{n+1},y_n]
\end{aligned}$$

โดย $f_{2n-1}(y)=af^{-1}_{2n-2k}(f^{-1}_{2n-2k+1}(\dots f^{-1}_{2n-2}(y)\dots))+b$

$f_{2n}(\mathrm{x})=af^{-1}_{2n-2k+1}(f^{-1}_{2n-2k+2}(\dots f^{-1}_{2n-1}(\mathrm{x})\dots))+b$ ตามลำดับ

ลำดับ $(f_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ อธิบายได้ดังนี้

$$\cdots \xrightarrow{f_{-4}} [y_{-1}, y_{-2}] \xrightarrow{f_{-3}} [x_{-1}, x_0] \xrightarrow{f_{-2}} [y_0, y_{-1}] \xrightarrow{f_{-1}} [x_0, x_1]$$
$$\xrightarrow{f_0} [y_1, y_0] \xrightarrow{f_1} [x_1, x_0] \xrightarrow{f_2} \cdots$$

สุดท้าย นิยามฟังก์ชัน $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ โดย

$$F(x)=\begin{cases} f_{2n}(x), x\in[x_n, x_{n+1}], n\in\mathbb{Z} \\ p, x=p \\ f_{2n+1}(x), x\in[\mathrm{y}_{n+1}, \mathrm{y}_{n-1}], n\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

สำหรับ $x\in[x_n, x_{n+1}] (n\in\mathbb{Z})$ เรามี

$$\begin{aligned} F^{2k+1}(x) &= \underbrace{F(\ldots F}_{2k+1}(x)\ldots) = \underbrace{F(\ldots F}_{2k}(f_{2n}(x))\ldots) = \ldots \\ &= f_{2n+2k}(f_{2n+2k-1}(\ldots f_{2n+1}(f_{2n}(x))\ldots)) \\ &= af_{2n}^{-1}(f_{2n+1}^{-1}(\ldots f_{2n+2k-1}^{-1}(f_{2n+2k-1}(\cdots f_{2n+1}(f_{2n}(x))\ldots))\ldots)) + \mathrm{b} \\ &= ax+b \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับ $x\in[y_n, y_{n-1}] (n\in\mathbb{Z})$ เรามี $F^{2k+1}(x)=ax+b$

เนื่องจาก $\quad f_{2n}(x_{n+1}) = y_{n+1} = f_{2(n+1)}(x_{n+1}),$

$$f_{2n-1}(\mathrm{y}_n) = x_{n+1} = f_{2(n+1)}(y_n), y_n \nearrow p, x_n \searrow p (n \searrow -\infty)$$

ฟังก์ชัน $F(x)$ เป็นฟังก์ชันลดลงและต่อเนื่องจาก $\mathbb{R}$ ทั่วถึง $\mathbb{R}$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $f_0, f_1, \ldots, f_{2k-1}$ ทำให้ $F$ มีเพียงหนึ่งเดียวและสอดคล้อง $F^{2k+1}(x)=ax+b$

ในทางกลับกัน สมมติ $f$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยที่ต่อเนื่องของ (3.5)

ให้ $x_0\in(p,\infty)$

นิยาม $y_i = f(x_i)$ และ $x_{i+1} = f(y_i) (\mathrm{i}=0,1,\ldots\mathrm{k})$

ถ้า $x_0 > f^2(x_0)$ เนื่องจาก $f^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มแล้ว

$$x_0 \ge f^2(x_0) \ge f^4(x_0) \ge \cdots \ge f^{4k+2}(x_0) = a^2x_0 + ab + b$$

แสดงว่า $x_0 < p$ โดยบทแทรก 3.1.9 เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้นเรามีว่า

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_k < x_{k+1} = f^{2k+1}(y_0) = ay_0 + b$$

ทำนองเดียวกันเรามี

$$ax_0 + b = f^{2k+1}(x_0) = y_k < y_{k-1} < \ldots < y_0$$

โดยบทแทรก 3.1.1 $f$ เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐานลด นิยามโดย

$$f\Big|_{[x_{i-1}, x_i]} : [x_{i-1}, x_i] \xrightarrow[onto]{1-1} [y_i, y_{i-1}],$$

$$f\Big|_{[\mathrm{y}_i, y_{i-1}]} : [y_i, y_{i-1}] \xrightarrow[onto]{1-1} [x_i, x_{i+1}],$$

เมื่อ $i=1,2,..,k$ กล่าวคือ $f$ ต้องมีรูปแบบเช่นเดียวกับ $F$ ดังข้างบน $\square$

กรณี 3.3 : $-1 < a < 0$

**ทฤษฎีบท3.1.11** ฟังก์ชันลดและต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้อง

$f^{q}(x) = ax + b$ เมื่อ $-1 < a < 0, q \geq 2$

ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันดังที่อธิบายไว้ในทฤษฎีบท 3.1.10

**พิสูจน์** จาก (3.4) ซึ่ง $f^{-q}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$

เนื่องจาก $f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันลดด้วยและ $\frac{1}{a} < -1$ เราได้ผลเฉลยสำหรับ $f^{-1}$ ที่ใช้ในกรณี 3.2 และหารูปของ $f$ จาก $f^{-1}$ $\square$

**3.2 ฟังก์ชันบนเซตของจำนวนเต็ม**

พิจารณาฟังก์ชัน $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ เมื่อ $\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับ สมการฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation)

$$f^{q}(n)=an+b \qquad \text{สำหรับทุก } n\in\mathbb{Z} \tag{3.6}$$

ให้ $a,b,q$ เป็นจำนวนเต็มที่ซึ่ง $q\geq 2$ และ $a\neq 0,\pm 1$

$$g(n)=an+b \;,\quad p=\frac{b}{1-a}$$

**บทตั้ง3.2.1** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยของสมการ (3.6)

(i) ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ดังนั้น $f^{-1}$ นิยามบน $R_f\subseteq\mathbb{Z}$ เมื่อ $R_f$ แทน เซตของเรนจ์ของฟังก์ชัน)

(ii) ฟังก์ชัน $f$ แบ่ง (partition) $\mathbb{Z}$ เป็นคลาสที่สมมูล (equivalence class) (ไม่เป็นเซตว่าง) ภายใต้ความสัมพันธ์

$$x\sim y \Leftrightarrow y=f^{sq}(x) \qquad \text{สำหรับบาง } s\in\mathbb{Z}$$

(iii) $f$ มีจุดตรึงจุดเดียวเมื่อ $x=p$ เป็นจำนวนเต็ม

**พิสูจน์** (i) ให้ $n_1,n_2\in\mathbb{Z}$

สมมติ $f(\mathrm{n}_1)=f(\mathrm{n}_2)$

$$\begin{aligned}
f(f(\mathrm{n}_1)) &= f(f(\mathrm{n}_2))\\
f^2(\mathrm{n}_1) &= f^2(\mathrm{n}_2)\\
f(f^2(\mathrm{n}_1)) &= f(f^2(\mathrm{n}_2))\\
f^3(\mathrm{n}_1) &= f^3(\mathrm{n}_2)\\
&\vdots\\
f^q(\mathrm{n}_1) &= f^q(\mathrm{n}_2)\\
an_1+b &= an_2+b
\end{aligned}$$

จะได้ $n_1=n_2$

(ii) $x\sim x$ เนื่องจาก $x=f^{0\cdot q}(x)=x$

ให้ $x\sim y$

ดังนั้น $y=f^{tq}(x)$ สำหรับบาง $t\in\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(y) &= f^{-1}(f^{tq}(x))\\
f^{-1}(y) &= f^{tq-1}(x)\\
f^{-1}(f^{-1}(y)) &= f^{-1}(f^{tq-1}(x))\\
f^{-2}(y) &= f^{tq-2}(x)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$f^{-tq}(y) = f^{0}(x) = x$$

$$x = f^{-tq}(y) \qquad ; -t \in \mathbb{Z}$$

ให้ $x \sim y$ และ $y \sim z$

จะได้ $y = f^{tq}(x)$ และ $z = f^{sq}(y)$ ; สำหรับบาง $t, s \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = f^{sq}(f^{tq}(x)) = f^{(s+1)q}(x)$ ; สำหรับบาง $(s+t) \in \mathbb{Z}$

สรุปว่า $x \sim z$

(iii) จาก (3.6) จะได้ $f(ax+b) = f^{q+1}(x) = af(x)+b$

แทน $x = \dfrac{b}{1-a}$

$$f(a\left(\frac{b}{1-a}\right)+b) = af\left(\frac{b}{1-a}\right)+b$$

$$f\left(\frac{b}{1-a}\right) = af\left(\frac{b}{1-a}\right)+b$$

$$(1-a)f\left(\frac{b}{1-a}\right) = b$$

$$f\left(\frac{b}{1-a}\right) = \frac{b}{1-a}$$

ดังนั้น $\dfrac{b}{1-a}$ เป็นจุดตรึงของ $f$

จะแสดงว่าจุดตรึงของ $f$ มีเพียงจุดเดียว

สมมติ $d$ เป็นจุดตรึงของ $f$

ถ้า $f(d) = d$

จาก $f^{2}(d) = f(f(d)) = f(d) = d$

$$f^{3}(d) = f(f^{2}(d)) = f(f(d)) = f(d) = d$$

$$\vdots$$

$$f^{q}(d) = f(f^{q-1}(d)) = f(d) = d$$

ดังนั้น $ad + b = d$

$$d - ad = b$$

$$d(1-a) = b$$

$$d = \frac{b}{1-a}$$

สรุปว่า จุดตรึงของ $f$ มีเพียงจุดเดียว □

กรณี $a=-1$

**ทฤษฎีบท 3.2.2** ให้ $q\geq 2$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n)=-n+b$ ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน $f_\pi$ ที่นิยามต่อไปนี้

**พิสูจน์** โดยบทตั้ง 3.2.1(ii) คลาสสมมูลอยู่ในรูปแบบ

$$C_i=\{i,b-i\},\ i\in\{m\in\mathbb{Z}\mid m\geq b/2\}$$

ให้ $\pi$ เป็นการแบ่งเซต $\{C_i\}_{i\neq b/2}$ อยู่ในวงโคจร(orbits) แต่ละอันบรรจุ $r$ ของ $C_i$

ถ้า $q/r$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว $q=(2l+1)r$

ให้ $(C_{i1},C_{i2},...,C_{ir})$ เป็นวงโคจร สำหรับ $h=1,2,...,r$ เขียนได้เป็น

$$C_{i_h}=\{\alpha_{i_h},\beta_{i_h}\},\ \alpha_{i_h}\in\{i_h,b-i_h\},\quad \beta_{i_h}=b-\alpha_{i_h}$$

นิยามฟังก์ชัน

$$f_\pi:C_{i_h}\to C_{i_{h+1}}\qquad (h=1,2,...,r-1)$$

โดย

$$f_\pi(\alpha_{i_h})=\alpha_{i_{h+1}},\qquad f_\pi(\beta_{i_h})=\beta_{i_{h+1}}$$

และ

$$f_\pi:C_{i_r}\to C_{i_1}$$

โดย

$$f_\pi(\alpha_{i_r})=\beta_{i_1},\qquad f_\pi(\beta_{i_r})=\alpha_{i_1}$$

ถ้า $b/2\in\mathbb{Z}$ นิยาม $f_\pi(b/2)=b/2$ ดังนั้น $f_\pi^q(b/2)=b/2=-(b/2)+b$ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
&f_\pi(\alpha_{i_h})=\alpha_{i_{h+1}}, && f_\pi^2(\alpha_{i_h})=f(\alpha_{i_{h+1}})=\alpha_{i_{h+2}},\\
&\vdots && \vdots\\
&f_\pi^{r-h}(\alpha_{i_h})=\alpha_{i_{h+(r-h)}}=\alpha_{i_r}, && f_\pi^{(r-h)+1}(\alpha_{i_h})=f_\pi(\alpha_{i_r})=\beta_{i_1},\\
&\vdots && \vdots\\
&f_\pi^{r}(\alpha_{i_h})=f_\pi^{h-1}(\beta_{i_1})=\beta_{i_h}, && -\alpha_{i_h}+b=\beta_{i_h},
\end{aligned}$$

จะได้

$$f_\pi^r(\alpha_{i_h})=-\alpha_{i_h}+b \text{ และ } f_\pi^{2r}(\alpha_{i_h})=\alpha_{i_h}$$

ดังนั้น

$$f_\pi^q(\alpha_{i_h})=f_\pi^{2lr+r}(\alpha_{i_h})=f_\pi^r(\alpha_{i_h})=-\alpha_{i_h}+b$$

ให้ $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ สอดคล้องกับ $f^q(n)=-n+b$ $(n\in\mathbb{Z})$ โดยบทแทรก 3.2.1(iii) ถ้า $b/2\in\mathbb{Z}$ แล้ว $f(b/2)=b/2$

ให้ $\alpha\in\mathbb{Z}\setminus\{b/2\}$ พิจารณาเซต

$$\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ..., f^q(\alpha) = -n+b, ..., f^{2q}(\alpha) = \alpha\}$$

ซึ่งมีสมาชิกมากสุด $2q$

ให้ $m$ เป็นจำนวนนับที่น้อยที่สุด ที่ซึ่ง $f^m(\alpha) = \alpha$

เนื่องจาก $f^{-1}$ มีจริงและ $f^{2q}(\alpha) = \alpha$ เราจะได้ $m|2q$

ถ้า $m$ เป็นเลขคี่แล้ว $m|q$ นั่นคือ $m = qk$ ดังนั้น $f^q(\alpha) = f^{mk}(\alpha) = \alpha$ ซึ่งขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้น $m$ เป็นเลขคู่ ดังนั้น $m = 2r$

ถ้า $\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ..., f^{2r-1}(\alpha)$ แตกต่างกัน แล้ว $f^i(\alpha) = f^j(\alpha)$ สำหรับบาง $0 \le i < j \le 2r-1$

ได้ว่า $f^{j-i}(\alpha) = \alpha$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ..., f^{2r-1}(\alpha)$ แตกต่างกัน

เนื่องจาก $r|q$ และ $f^{2r}(\alpha) = \alpha$ จะได้ $f^r(n) = f^q(n) = -\alpha + b$

นอกจากนี้ ถ้า $q/r$ เป็นเลขคู่ นั่นคือ $q = (2t)r$ แล้ว $f^q(\alpha) = f^{(2r)t}(\alpha) = \alpha$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $q/r$ ต้องเป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น

$\{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ..., f^{2r-1}(\alpha)\} = \{\alpha, f(\alpha), f^2(\alpha), ..., f^{r-1}(\alpha), -\alpha+b, , -f(\alpha)+\mathrm{b}, ..., -f^{r-1}(\alpha)+b\}$

ให้ $D_h^\alpha := \{f^h(\alpha), f^{h+r}(\alpha)\} = \{f^h(\alpha), -f^h(\alpha)+b\} \quad h = 0, 1, ..., r-1$

เราจะเห็นว่า $D_h^\alpha$ เหมือนกับบาง $C_i$ เราเรียก $(D_1^\alpha, ..., D_r^\alpha)$ ว่าวงโคจร (orbit)

ทำซ้ำวิธีการเดิมในเซต $\mathbb{Z} \setminus (D_1^\alpha \cup ... \cup D_r^\alpha \cup \{\mathrm{b}/2\})$ จะได้วงโคจรอื่น

โดยการทำซ้ำกระบวนการนี้จำกัดครั้งจนได้เซต $\mathbb{Z} \setminus \{\mathrm{b}/2\}$

เราจะเห็นว่า $f$ ส่งคลาสไปคลาสที่แตกต่างกัน และ จำนวนสมาชิก (cardinality) ในวงโคจร คือ $r$ และ $q/r$ ที่เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $f$ คือรูปแบบหนึ่งใน $f_\pi$ □

**บทตั้ง3.2.3** ให้ $\beta \in \mathbb{Z}$

(i) ถ้า $g^{-i}(\beta) \notin \mathbb{Z}$ สำหรับบาง $i \in \mathbb{N}$ แล้ว $g^{-(i+1)}(\beta) \notin \mathbb{Z}$

(ii) ถ้า $\beta = p$ แล้ว $g^{-j}(\beta) \in \mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j \ge 1$

(iii) ถ้า $\beta \ne p$ แล้วมีจำนวนเต็มบวก $J$ ที่ซึ่ง $g^{-j}(\beta) \in \mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j \le J$ และ $g^{-j}(\beta) \notin \mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j > J$

พิสูจน์ (i) สมมติ $g^{-(i+1)}(\beta) := n \in \mathbb{Z}$

แล้ว $g(g^{-(i+1)}(\beta)) = g^{-i}(\beta) = g(n)$

ซึ่ง $g(n) = an + b \in \mathbb{Z}$

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะ $g^{-i}(\beta) \notin \mathbb{Z}$

(ii) ถ้า $\beta = p$ จะแสดงว่า $g^{-j}(\beta) \in \mathbb{Z}$ สำหรับทุก $j \ge 1$

จาก $g(n) = an + b$

จะเห็นว่า $g(p) = a\left(\dfrac{b}{1-a}\right) + b = \dfrac{b}{1-a} = p$

ดังนั้น $g(p) = p$

$$p = g^{-1}(p)$$
$$g^{-2}(p) = g^{-1}(p) = p$$
$$\vdots$$
$$g^{-j}(p) = p \in \mathbb{Z} \quad \text{สำหรับทุก } j \geq 1$$

(iii) สมมติ $\beta \neq p$

กรณี $p \in \mathbb{Z}$ แล้ว $a^J \| \beta - p$ สำหรับบาง $J \in \mathbb{N}_0$ เมื่อ $i = 0,1,2,...,J$ มี $\frac{\beta - p}{a^i} + p \in \mathbb{Z}$

และ
$$\begin{aligned}
\frac{\beta - p}{a^i} + p &= \frac{\beta}{a^i} - \frac{b}{a^i}\left(\frac{a^i - 1}{a-1}\right) \\
&= \frac{\beta}{a^i} - \frac{b}{a^i}\left(a^{i-1} + a^{i-2} + ... + a + 1\right) \\
&= \frac{\beta}{a^i} - \frac{b}{a} - \frac{b}{a^2} - \frac{b}{a^3} - \cdots - \frac{b}{a^{i-1}} - \frac{b}{a^i} \\
&= \frac{\beta - b}{a^i} - \frac{b}{a^{i-1}} - \frac{b}{a^{i-2}} - \cdots - \frac{b}{a^3} - \frac{b}{a^2} - \frac{b}{a} \\
&= \frac{1}{a}\left\{\left(\frac{\beta - b}{a^{i-1}} - \frac{b}{a^{i-2}} - \cdots - \frac{b}{a}\right) - b\right\} \\
&= g^{-1}\left(\frac{\beta - b}{a^{i-1}} - \frac{b}{a^{i-2}} - \cdots - \frac{b}{a}\right) \\
&= \cdots = g^{-i}(\beta)
\end{aligned}$$

เมื่อ $j > J$ แสดงว่า $g^{-j}(\beta) = \frac{\beta - p}{a^j} + p \notin \mathbb{Z}$

กรณี $p \notin \mathbb{Z}$ แล้วพิจารณา $\frac{\beta - p}{a^k} + p$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}_0$

สำหรับ $k = 0$ สังเกตว่า $\frac{\beta - p}{a^k} + p \in \mathbb{Z}$

ให้ $K \in \mathbb{N}$ ใหญ่เพียงพอ $\left|\frac{\beta - p}{a^K}\right| < |p| - \lfloor |p| \rfloor$ ดังนั้น $\frac{\beta - p}{a^K} + p \notin \mathbb{Z}$

ให้ $J$ เป็นจำนวนบวกที่ใหญ่ที่สุดที่ซึ่ง $\frac{\beta - p}{a^j} + p \in \mathbb{Z}$ สำหรับ $j = 0,1,...,J$

สำหรับ $j > J$ เรามีว่า $g^{-j}(\beta) = \frac{\beta - p}{a^j} + p \notin \mathbb{Z}$ □

จากบทตั้งก่อนหน้า นำไปสู่สัญลักษณ์ต่อไปนี้

จำนวนเต็ม $\alpha$ เรียกว่า **จุดเริ่มต้น** (starter) ถ้าไม่มีจำนวนเต็ม $n$ ที่ซึ่ง $g(n) = \alpha$ นอกจากนี้จะเรียกว่า **จุดไม่เริ่มต้น** (nonstarter)

ให้ $S$ แสดงถึงเซตของจุดเริ่มต้นทั้งหมดใน $\mathbb{Z}$ และให้ $N$ แสดงถึงเซตของจุดไม่เริ่มต้นทั้งหมดใน $\mathbb{Z}$

จะเห็นว่า $S$ เป็นเซตอนันต์เนื่องจาก $\{ma+b-1 \mid m \in \mathbb{N}_0\} \subset S$ นอกจากนี้ถ้า $p \in \mathbb{Z}$ แล้ว $p \in N$

โดยบทตั้ง 3.2.3 คลาสสมมูลที่สร้างผ่านโดยความสัมพันธ์สมมูลในบทตั้ง 3.2.1(ii) มีรูปแบบอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

$$C_\alpha = \{g^m(\alpha) \mid m \in \mathbb{N}_0\} \text{ เมื่อ } \alpha \in S$$

หรือรูปแบบ

$$C_p = \begin{cases} \{p\}, p \in \mathbb{Z} \\ \varnothing, p \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

ซึ่ง

$$\mathbb{Z} = \left( \bigcup_{\alpha = S} C_\alpha \right) \bigcup C_p$$

เพื่อให้เข้าใจง่าย ให้ $C = \{C_\alpha \mid \alpha \in S\}$

**บทตั้ง** 3.2.4 ถ้า $r$ และ $l$ อยู่ใน $S$ แต่ $r \neq l$ แล้ว $r$ และ $l$ อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน

**พิสูจน์** ถ้า $r$ และ $l$ อยู่ในคลาสสมมูลเดียวกันแล้วจะมี $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ที่ซึ่ง $r = f^{tq}(l)$ โดยการสับเปลี่ยนระหว่าง $r$ และ $l$ เราอาจจะสมมติ $t > 0$ ดังนั้น $r = f^q(f^{(t-1)q}(l)) = g(f^{(t-1)q}(l))$ นั่นคือ $r \notin S$ เกิดข้อขัดแย้ง □

**บทตั้ง 3.2.5** (i) สำหรับแต่ละ $\alpha \in S$ $f$ ส่งจากคลาส $C_\alpha$ ไปยังคลาสเดียวเท่านั้นใน $C$ ที่บรรจุ $f(\alpha)$

(ii) มี $f^q(C_\alpha) \subset C_\alpha$ สำหรับทุก $a \in S$

(iii) $f$ เป็นฟังก์ชันไม่ทั่วถึง

**พิสูจน์** (i) ให้ $x \in C_\alpha$ ดังนั้นมีจำนวนเต็มไม่เป็นลบ $m$ ที่ซึ่ง $x = g^m(\alpha)$ จะเห็นว่า

$$f(x) = f(g^m(\alpha)) = f^{qm}(f(\alpha)) = g^m(f(\alpha))$$

นั่นคือ $f(x)$ และ $f(\alpha)$ อยู่ในคลาสเดียวกัน เรียก $C_{\bar{\alpha}}$ สำหรับบาง $\bar{\alpha} \in S$

ถ้า $C_{\bar{\alpha}} \bigcap C_p \neq \phi$ แล้วมีจำนวนเต็มไม่ลบ $m$ ที่ซึ่ง $p = g^m(f(\alpha)) = f(g^m(\alpha))$

เนื่องจาก $p$ เป็นจุดตรึงของ $f$ และ $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ $g^m(\alpha) = p$ ดังนั้น $\alpha = p$ เกิดข้อขัดแย้ง

(ii) ให้ $\alpha \in S$ และ $x = C_\alpha$ ดังนั้น $x = g^m(\alpha)$ สำหรับบาง $m \in \mathbb{N}_0$

แล้ว $f^q(x) = g^{m+1}(\alpha) \in C_\alpha$ แสดงว่า $f^q(C_\alpha) \subset C_\alpha$ สำหรับทุก $\alpha \in S$

(iii) สมมติว่า $f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $\alpha \in S$ แล้วมี $\alpha_1 \in \mathbb{Z}$ ที่ซึ่ง $\alpha = f(\alpha_1)$
ในทำนองเดียวกันมี $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ ที่ซึ่ง $\alpha_1 = f(\alpha_2)$ ดังนั้น $\alpha = f^2(\alpha_2)$
ทำซ้ำจนได้ $\alpha = f^q(\alpha_q)$ สำหรับบาง $\alpha_q \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $\alpha = g(\alpha_q)$ เกิดข้อขัดแย้ง □

บทตั้ง 3.2.5(iii) แสดงให้เห็นว่า $R_f \neq \mathbb{Z}$ เนื่องจาก $N \subset R_f$ ดังนั้น $S \setminus R_f$ ไม่เป็นเซตว่างและจะศึกษาต่อไป

**บทตั้ง 3.2.6** ถ้า $k \in S \setminus \mathrm{R}_f$ แล้ว $f^{q-1}(k), f^{q-2}, ..., f(k), k$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $q$ ที่อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน.

**พิสูจน์** ให้ $i = 0, 1, ..., q-1$

สมมติ $f^i(k) \in C_{\alpha_i}$ เมื่อ $\alpha_i$ ไม่จำเป็นต้องต่างกันทุกตัว

เราจะแสดงว่า $f^i(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของ คลาส $C_{\alpha_i}$

เริ่มพิจารณาคลาส $C_{\alpha_{q-1}}$

เรามี $f^{q-1}(k) = g^t(\alpha_{q-1})$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{N}_0$

เนื่องจาก $\alpha_{q-1}$ และ $f^{q-1}(k)$ อยู่ในคลาส $C_{\alpha_{q-1}}$

โดยบทตั้ง 3.2.5 (i) ดังนั้น $f(\alpha_{q-1})$ และ $f^q(k)$ อยู่ในคลาสเดียวกัน.

โดย บทตั้ง 3.2.5 (ii) เรามี $f^q(k) \in C_{\alpha_0}$ และ $f(\alpha_{q-1}) \in C_{\alpha_0}$ นั่นคือ $f(\alpha_{q-1}) = g^s(k)$ สำหรับบาง $s \in \mathbb{N}$ เมื่อ

พิจารณา $g(k) = f^q(k) = f(f^{q-1}(k)) = f(g^t(\alpha_{q-1})) = g^t(f(\alpha_{q-1})) = g^{t+s}(k)$

เนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เรามี $k = g^{t+s-1}(k) = a^{t+s-1}(k-p) + \mathrm{p}$

เนื่องจาก $k$ ไม่เป็นจุดตรึง เรามี $t + s = 1$ ดังนั้น $t = 0$ และ $s = 1$

ดังนั้น $f^{q-1}(k) = \alpha_{q-1}$

โดยเหตุผลทำนองเดียวกันได้ว่า $f^{q-2}(k), ..., f(k), k$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาสที่แตกต่างกัน $C_{\alpha_{q-2}}, ..., C_{\alpha_1}, C_{\alpha_0}$ ตามลำดับ □

**ทฤษฎีบท 3.2.7** ให้ $q, a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็ม และ $q \geq 2$, $a \notin \{0, 1, -1\}$ แล้ว $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = an + b$ ก็ต่อเมื่อ $f$ มีรูปแบบหนึ่งในฟังก์ชัน $f_\pi$ ที่นิยามดังต่อไปนี้

**พิสูจน์** โดยสัญลักษณ์ที่กำหนดข้างต้น นิยาม

$$C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, ...\}, r_{j,i} = a^j i - (a^j - 1)p \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

สังเกตว่า $C_p = \{p\}$ ถ้า $p \in \mathbb{Z}$ และ $C_i \cap C_j = \phi$ ถ้า $i \neq j$

ให้ $\pi$ เป็นการแบ่งเซต $\{C_i\}_{i\neq p}$ ไปเป็นวงโคจร (orbit) ซึ่งแต่ละวงโคจรประกอบด้วย $q$ คลาส $C_i$ ให้ $(C_{i_1},C_{i_2},...,C_{i_q})$ เป็นวงโคจร นิยาม

$$f_\pi : C_{ih} \to C_{ih+1} \qquad (h=1,2,...,q-1)$$

โดย
$$f_\pi(r_{j,i_h}) = r_{j,ih+1} \qquad (j\in\mathbb{N}_0)$$

และ
$$f_\pi : C_{i_q} \to C_{i_1}$$

โดย
$$f_\pi(r_{j,i_q}) = r_{j+1,i_1} \qquad (j\in\mathbb{N}_0)$$

ถ้า $p\in\mathbb{Z}$ นิยาม $f_\pi(p)=p$

ดังนั้น $f_\pi^q(p)=ap+b$

ให้ $r_{j,i_h}\in C_{ih}$ เนื่องจาก

$$f_\pi(r_{j,i_h}) = r_{j,ih+1}\ , \qquad f_\pi^2(r_{j,i_h}) = f(r_{j,i_{h+1}}) = r_{j,i_{h+2}}\ ,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f_\pi^{q-h}(r_{j,i_h}) = r_{j,i_{h+(q-h)}} = r_{j,i_q}\ , \qquad f_\pi^{(q-h)+1}(r_{j,i_h}) = f_\pi(r_{j,i_q}) = r_{j+1,i}\ ,$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f_\pi^q(r_{j,i_h}) = f_\pi^{(q-h)+h}(r_{j,i_h}) = r_{j+1,i_h}\ , \qquad ar_{j,i_h}+b = r_{j+1,i_h}\ ,$$

จะได้

$$f_\pi^q(r_{j,i_h}) = ar_{j,i_h}+b$$

ถ้า $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ สอดคล้องกับ $f^q(n)=an+b\ (n\in\mathbb{Z})$ โดยบทแทรก 3.2.6 เราจะเห็นว่า $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{q-1}$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาสของมัน โดย $\alpha_i\neq p$ สำหรับทุกๆ $i$

แท้จริงแล้ว $\alpha_i = f^i(\alpha_0)$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $C_{\alpha i}$

ถ้ามี $\alpha_i=\alpha_j$ โดย $i<j$ สำหรับบาง $i,j\in\{0,1,...,q-1\}$

กรณี $i\neq 0$ เนื่องจาก $f$ ส่งคลาสไปยังอีกคลาสหนึ่ง $f$ จะไม่ส่งกลับไปที่ $C_{\alpha_0}$ หลังจากการทำซ้ำ $q$ ครั้ง เกิดข้อขัดแย้ง

กรณี $i\neq 0$ เนื่องจากหลังการทำซ้ำของ $q$ ครั้ง $f$ จะส่งคลาสกลับสู่คลาสเดิม ดังนั้น $j|q$ และเนื่องจาก $f^m(\alpha_0)$ เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับ $m=0,1,...,q-1$ ดังนั้น $\alpha_0=f^q(\alpha_0)=a\alpha_0+b$ เกิดข้อขัดแย้ง

เราเรียกลูป $(C_{\alpha_0},...,C_{\alpha_{q-1}})$ ว่าวงโคจร ประยุกต์ขั้นตอนในบทแทรก 3.2.6 อีกจนได้เซตที่เหลือ $\mathbb{Z}\setminus(C_{\alpha_0}\cup...\cup C_{\alpha_{q-1}})$ ซึ่งเราจะได้วงโคจรหนึ่ง ทำซ้ำจนสุดท้ายได้เซต $\mathbb{Z}\setminus\{p\}$

เราจะเห็นว่า $f$ ส่งไปยังคลาสที่แตกต่างกันและจำนวนสมาชิกแต่ละวงโคจรเป็น $q$

แต่ละวงโคจรมีสมาชิกเพียง 1 ตัวที่ไม่ได้อยู่ในภาพของ $f$ และ $f(p)=p$ ดังนั้น $f$ เป็นรูปแบบหนึ่งของ $f_\pi$ $\square$

### 3.3 ฟังก์ชันบนเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

#### 3.3.1 กรณี $f^{q}(n)=an+b$

ให้ $q\geq 2, a\geq 2$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

พิจารณาฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ เมื่อ $\mathbb{N}_0$ แทนเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ (iterative functional equation)

$$f^{q}(n)=an+b \qquad \text{สำหรับทุก } n\in\mathbb{N}_0 \tag{3.7}$$

**บทแทรก 3.3.1** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยของสมการ (3.7)

(i) ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ดังนั้น $f^{-1}$ นิยามบน $R_f\subseteq\mathbb{N}_0$ เมื่อ $R_f$ แทนเซตของเรนจ์ของฟังก์ชัน)

(ii) ฟังก์ชัน $f$ แบ่ง (partition) $\mathbb{N}_0$ เป็นคลาสที่สมมูล (equivalence class) (ไม่เป็นเซตว่าง) ภายใต้ความสัมพันธ์

$$x\sim y\Leftrightarrow y=f^{sq}(x) \qquad \text{สำหรับบาง } s\in\mathbb{Z}$$

(iii) ให้ $r,s\in\mathbb{N}_0$ และ $r\neq s$

ถ้า $r$ และ $s$ ไม่เป็นสมาชิกใน $R_f$ แล้ว $r$ และ $s$ อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน

(iv) มี $r$ ตัวเดียวที่ไม่อยู่ในรูปแบบ $am+b\left(m\in\mathbb{N}_0\right)$ ในแต่ละคลาสสมมูล และเป็น สมาชิกที่เล็กที่สุดในคลาส

**พิสูจน์** (i) ให้ $n_1,n_2\in\mathbb{N}_0$

สมมติ
$$\begin{aligned}
f(n_1)&=f(n_2)\\
f(f(n_1))&=f(f(n_2))\\
f^2(n_1)&=f^2(n_2)\\
f(f^2(n_1))&=f(f^2(n_2))\\
f^3(n_1)&=f^3(n_2)\\
&\vdots\\
f^q(n_1)&=f^q(n_2)\\
an_1+b&=an_2+b
\end{aligned}$$

จะได้ $$n_1=n_2$$

(ii) $x\sim x$ เนื่องจาก $x=f^{0\cdot q}(x)=x$

ให้ $x \sim y$ ดังนั้น $y = f^{tq}(x)$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{Z}$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f^{tq}(x))$$
$$f^{-1}(y) = f^{tq-1}(x)$$
$$f^{-1}(f^{-1}(y)) = f^{-1}(f^{tq-1}(x))$$
$$f^{-2}(y) = f^{tq-2}(x)$$
$$\vdots$$
$$f^{-tq}(y) = f^{0}(x) = x$$
$$x = f^{-tq}(y) \qquad ; -t \in \mathbb{Z}$$

ให้ $x \sim y$ และ $y \sim z$

จะได้ $y = f^{tq}(x)$ และ $z = f^{sq}(y)$ ; สำหรับบาง $t, s \in \mathbb{Z}$

ฉะนั้น $z = f^{sq}(f^{tq}(x)) = f^{(s+t)q}(x)$ ; $(s+t) \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $x \sim z$

(iii) สมมติ $r$ และ $s$ อยู่ในคลาสเดียวกัน

จะมี $t \in \mathbb{Z} - \{0\}$ ที่ซึ่ง $r = f^{tq}(s) = f(f^{tq-1}(s))$

กรณี $t > 0$ แสดงว่า $r \in R_f$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $r \notin R_f$

กรณี $t < 0$ $s = f^{-tq}(r)$ ซึ่ง $-t > 0$

$s = f(f^{-tq-1}(r))$ แสดงว่า $s \in R_f$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $s \notin R_f$

(iv) สมมติ $C$ เป็นคลาสสมมูล

ให้ $r, w \in C$

สมมติ $r, w \neq am + b$ , $\exists m \notin \mathbb{N}_0$

สมมติ $r < w$

เนื่องจาก $r, w \in C$ ดังนั้น

$$r = f^{q}\left(f^{s}(w)\right) \ ; \exists q, s \in \mathbb{N}_0$$
$$= af^{s}(w) + b \quad ; f^{s}(w) \in \mathbb{N}_0$$

ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง □

ให้ $C_r$ แทน คลาสสมมูล เมื่อ $r \neq am + b$ ; $m \in \mathbb{N}_0$ และ $r$ เป็นสมาชิกที่น้อยที่สุดใน $C_r$ เรียก $r$ ว่า จุดเริ่มต้น$(Starter)$

ให้ $C_r = \left\{r_0, r_1, r_2, \ldots, r_m = a^m r + \left(a^m - 1\right)A; m \in \mathbb{N}_0\right\}$ เมื่อ $A = \dfrac{b}{a-1}$

ดังนั้น $C_r = \{r, ar+b, a^2r+ab+b+\ldots\}$
$= \{f^{mq}(r); m \in \mathbb{N}_0\}$

**บทแทรก 3.3.2** คลาส $C_r$ ทั้งหมดต้องแตกต่างกัน

**พิสูจน์** ให้ $r, s \in \mathbb{N}_0$ โดยที่ $r \neq am+b$ และ $s \neq am+b$ สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}_0$

ให้ $C_r$ และ $C_s$ เป็นคลาสสมมูล

จะแสดงว่า $C_r \bigcap C_s = \phi$

สมมติ $C_r \bigcap C_s \neq \phi$

ให้ $x \in C_r \bigcap C_s$

เพราะฉะนั้น $x \in C_r$ และ $x \in C_s$

$$x = a^m r + (a^m - 1)A \quad ; \exists m \in \mathbb{N}_0$$

$$x = a^n s + (a^n - 1)A \quad ; \exists n \in \mathbb{N}_0$$

ดังนั้น $a^m r + (a^m - 1)A = a^n s + (a^n - 1)A$

ถ้า $m \leq n$

$$a^m r = a^n s + (a^n - 1)A - (a^m - 1)A$$

$$r = a^{n-m} s + \frac{1}{a^m}(a^n - 1)A - \frac{1}{a^m}(a^m - 1)A$$

$$= a^{n-m} s + \frac{1}{a^m}(a^n - a^m)A$$

$$= a^{n-m} s + (a^{n-m} - 1)A \quad ; n-m \in \mathbb{N}_0$$

ดังนั้น $r \in C_s$ ขัดแย้งกับ $r$ เป็นสมาชิกเดียว โดยที่ $r \neq am+b$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ ในแต่ละคลาสสมมูล

ถ้า $m > n$

$$a^n s = a^m r + (a^m - 1)A - (a^n - 1)A$$

$$s = a^{m-n} r + \frac{1}{a^n}(a^m - 1)A - \frac{1}{a^n}(a^n - 1)A$$

$$= a^{m-n} r + \frac{1}{a^n}(a^m - a^n)A$$

$$= a^{m-n} r + (a^{m-n} - 1)A \quad ; m-n \in \mathbb{N}_0$$

ดังนั้น $s \in C_r$ ขัดแย้งกับ $r$ เป็นสมาชิกเดียว โดยที่ $r \neq am+b$ $(m \in \mathbb{N}_0)$ ในแต่ละคลาสสมมูล □

**บทแทรก 3.3.3** ให้ $r$ เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับ $C_r$

(i) ฟังก์ชัน $f$ ส่งคลาส $C_r$ ไปยังคลาสที่บรรจุ $f(r)$ เท่านั้น

(ii) $f^q(C_r) \subseteq C_r$

(iii) แต่ละคลาส $C_r$ ฟังก์ชัน $\dfrac{f(x)-x}{x-A}$ เป็นค่าคงที่ สำหรับทุก $x \in C_r$

(iv) มีสมาชิกใน $\mathbb{N}_0$ แต่ไม่เป็นภาพของ $f$

(v) ถ้า $k \in \mathbb{N}_0$ แต่ไม่เป็นภาพของ $f$ แล้ว $k, f(k), f^2(k), \ldots, f^{q-1}(k)$ อยู่ในคลาสที่แตกต่างกัน และเป็นจุดเริ่มต้นของคลาสนั้นด้วย

**พิสูจน์** (i) สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้

$$f(an+b) = f(f^q(n)) = f^q(f(n)) = af(n)+b$$

ให้ $x \in C_r$ จาก $x = a^s r + (a^s - 1)A$ สำหรับบาง $s$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a^s r + (a^s - 1)A) \\
&= f(a^s r + a^{s-1}b + a^{s-2}b + a^{s-3}b + \ldots + ab + b) \\
&= af(a^{s-1}r + a^{s-2}b + a^{s-3}b + \ldots + ab + b) + b \\
&= a^2 f(a^{s-2}r + a^{s-3}b + a^{s-4}b + \ldots + ab + b) + ab + b \\
&= a^3 f(a^{s-3}r + a^{s-4}b + a^{s-5}b + \ldots + a^2b + ab + b) + a^2b + ab + b \\
&\vdots \\
&= a^s f(r) + a^{s-1}b + a^{s-2}b + \ldots + ab + b \\
&= a^s f(r) + (a^s - 1)A
\end{aligned}$$

(ii) สมมติว่า $x \in C_r$

แสดงว่า $x = a^m r + (a^m - 1)A \qquad , \exists m \in \mathbb{N}_0$

จะได้

$$\begin{aligned}
f^q(x) &= f^q(a^m r + (a^m - 1)A) \\
&= a(a^m r + (a^m - 1)A) + b \\
&= a^{m+1} \mathrm{r} + (a^{m+1} - a)A + b \\
&= a^{m+1} \mathrm{r} + (a^{m+1} - a)\frac{b}{a-1} + b \\
&= a^{m+1} \mathrm{r} + (a^{m+1} - a + a - 1)\frac{b}{a-1} \\
&= a^{m+1} r + (a^{m+1} - 1)A
\end{aligned}$$

$$f^q(x) = a^n r + (a^n - 1)A \qquad , \exists n \in \mathbb{N}_0$$

ดังนั้น $f^q(x) \in C_r$

สรุปว่า $f^q(C_r) \subseteq C_r$

(iii) ให้ $x = a^s r + (a^s - 1)A \in C_r$

แล้ว $f(x) - x = a^s(f(r) - r)$

เนื่องจาก $a^s = \dfrac{x+A}{r+A}$ จะได้

$$\frac{f(x)-x}{x+A} = \frac{f(r)-r}{r+A}$$

(iv) ถ้าเซตภาพของ $f$ คือ $\mathbb{N}_0$ แล้ว $f$ และ $f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $x < y$ แล้ว $f^q(x) = ax + b < ay + b = f^q(y)$

นั่นคือ $f^q$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $f^{-q}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ใช้ $f^{-q}$ ซ้ำๆเป็นจำนวนครั้งจำกัด จะได้จำนวนเต็มลบซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

(v) ให้ $k$ เป็นสมาชิกที่ไม่อยู่ในภาพของ $f$

ให้ $f^i(k) \in C_{r_i}$ $(i = 0,1,2,\ldots,q-1)$ ซึ่งไม่จำเป็นต้องแตกต่างกันสำหรับตอนนี้

เราจะแสดงว่า $f^i(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $C_r$

ใน $C_{r_{q-1}}$ ถ้ามี $k_{q-1} \in C_{r_{q-1}}$ ที่ซึ่ง $k_{q-1} < f^{q-1}(k)$ แล้ว

$$\begin{aligned} f(k_{q-1}) &= k_{q-1} + (k_{q-1} + A)\left(\frac{f^q(k) - f^{q-1}(k)}{f^{q-1}(k) + A}\right) \\ &< k_{q-1} + f^q(k) - f^{q-1}(k) < f^q(k) = ak + b \end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(f^{q-1}(k)) = f^q(k) \in C_{r_0}$ เรามี $f(k_{q-1}) \in C_{r_0}$

เนื่องจากไม่มีสมาชิกที่อยู่ระหว่าง $k$ และ $ak+b$ ใน $C_{r_0}$ ดังนั้น $f(k_{q-1}) \le k$ ทำให้ $f^{sq}(f(k_{q-1})) = k$ สำหรับบาง $s \ge 0$ นั่นคือ $k$ อยู่ในเซตภาพของ $f$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^{q-1}(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาสมันเอง

พิจารณาคลาส $C_{r_{q-2}}$ ถ้ามี $k_{q-2} \in C_{r_{q-2}}$ ที่ซึ่ง $k_{q-2} < f^{q-2}(k)$ แล้ว

$$\begin{aligned} f(k_{q-2}) &= k_{q-2} + (k_{q-2} + A)\left(\frac{f^{q-1}(k) - f^{q-2}(k)}{f^{q-2}(k) + A}\right) \\ &< k_{q-2} + f^{q-1}(k) - f^{q-2}(k) < f^{q-1}(k) \end{aligned}$$

ทำให้เกิดข้อขัดแย้ง เพราะว่า $f^{q-1}(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส ทำนองเดียวกัน ที่ $r_0 = k$, $r_1 = f(k)$, $r_2 = f^2(k), \ldots, r_{q-1} = f^{q-1}(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาสนั้นๆ □

**ข้อสังเกต** แน่นอนว่าในการพิสูจน์บทแทรก 3.3.3 เป็นข้อเท็จจริงที่ว่า ค่า $\dfrac{f(r)-r}{r+A}$ เรียกว่าค่าที่เพิ่มขึ้น (increment) ของ $f$ บนคลาส $C_r$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$f(x) = x + (x+A) \times \text{ค่าที่เพิ่มขึ้น}$$

**ทฤษฎีบท 3.3.4** ให้ $q \geq 2,\ a \geq 2$ และ $b \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้อง

$$f^q(n) = an + b \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน $f_\pi$ นิยามไว้ด้านล่าง

**พิสูจน์** โดยการใช้สัญลักษณ์ดังที่กำหนดไว้ข้างต้น นิยาม

$$C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots\}, r_{j,i} = a^j i + (a^j - 1)A \quad (j \in \mathbb{N}_0),\ A = \frac{b}{a-1}$$

สังเกตได้ว่า $C_i \cap C_j = \emptyset$ ถ้า $i \neq j$ ให้ $\pi$ เป็นการแบ่งกั้นเซต $\{C_i\}$ เป็นวงโคจรแต่ละวงโคจรบรรจุ $q$ คลาส

ให้ $\left(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_q}\right)$ เป็นวงโคจร และนิยาม

$$f_\pi : C_{i_h} \to C_{i_{h+1}} \quad (h = 1, 2, \ldots, q-1)$$

โดย $$f_\pi\left(r_{j,i_h}\right) = r_{j,i_{h+1}} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

และ $$f_\pi : C_{i_q} \to C_{i_1}$$

โดย $$f_\pi\left(r_{j,i_q}\right) = r_j + 1, i_1 \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

ให้ $r_{j,i_h} \in C_{i_h}$ เนื่องจาก

$$f_\pi\left(r_{j,i_h}\right) = r_{j,i_{h+1}}, f_\pi^2\left(r_{j,i_h}\right) = f_\pi\left(r_{j,i_{h+1}}\right) = r_{j,i_{h+2},\ldots,}\ f_\pi^{q-h}\left(r_{j,i_h}\right) = r_{j,i_{h+(q-h)}} = r_{j,i_q},$$

$$f_\pi^{(q-h)+1}\left(r_{j,i_h}\right) = f\left(r_{j,i_q}\right) = r_{j+1,i_1,\ldots,}\ f_\pi^q\left(r_{j,i_h}\right) = f_\pi^{(q-h)+h}\left(r_{j,i_h}\right) = r_{j+1,i_h},$$

$$ar_{j,i_h} + b = r_{j+1,i_h},$$

เราจะได้ $f_\pi^q\left(r_{j,i_h}\right) = ar_{j,i_h} + b$

ให้ $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้อง $f^q(n) = an + b \ (n \in \mathbb{N}_0)$

จากบทแทรก 3.3.3 เราจะเห็นว่า $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาสของมัน โดยแท้จริง $r_i = f^i(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $C_{r_i}$

ถ้ามี $r_i = r_j$ โดย $i < j$ สำหรับบาง $i, j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$

กรณี $i \neq 0$ เนื่องจาก $f$ ส่งคลาสไปยังอีกคลาสหนึ่ง $f$ จะไม่ส่งกลับไปที่ $C_{r_0}$ หลังจากการทำซ้ำ $q$ ครั้ง เกิดข้อขัดแย้ง

กรณี $i \neq 0$ เนื่องจากหลังการทำซ้ำของ $q$ ครั้ง $f$ จะส่งคลาสกลับสู่คลาสเดิม ดังนั้น $j|q$ และเนื่องจาก $f^m(\alpha_0)$ เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับ $m = 0, 1, \ldots, q-1$ ดังนั้น $k = f^q(k) = ak + b$ เกิดข้อขัดแย้ง เราเรียกลูป $(C_{r_0}, \ldots, C_{r_{q-1}})$ ว่าวงโคจร ประยุกต์ขั้นตอนในบทแทรก 3.3.3 อีกจนได้เซตที่เหลือ $\mathbb{N}_0 \setminus (C_{r_0} \cup \ldots \cup C_{r_{q-1}})$ ซึ่งเราจะได้วงโคจรหนึ่ง ทำซ้ำจนสุดท้ายได้เซต $\mathbb{N}_0$

เราจะเห็นว่า $f$ ส่งไปยังคลาสที่แตกต่างกันและจำนวนสมาชิกแต่ละวงโคจรเป็น $q$

แต่ละวงโคจรมีสมาชิกเพียง 1 ตัวที่ไม่ได้อยู่ในภาพของ $f$ ดังนั้น $f$ เป็นรูปแบบหนึ่งของ $f_\pi$ □

3.3.2 กรณี $f^q(n)=g(n)$

**ทฤษฎีบท 3.3.5** ให้ $q\in\mathbb{N}, q\geq 2$ และ $g:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$
สมมติ $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างต่อเนื่องที่ไม่มีจุดตรึง
ถ้า $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ

$$f^q(n)=g(n) \tag{3.8}$$

แล้วรูปแบบของฟังก์ชันถูกพิจารณา

ให้ $R_g$ และ $R_f$ แทนเรนจ์ของ $g$ และ $f$ ตามลำดับ

เรามีข้อสังเกตดังนี้

(i) เนื่องจาก $g=f^q$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างต่อเนื่องแล้ว $g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(ii) เนื่องจาก $g$ ไม่มีจุดตรึงดังนั้น $g(1)\neq 1$

(iii) $fog=gof$

ภายใต้สมมติฐานว่า มีจริงฟังก์ชัน $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับ (3.8) เราจะพิสูจน์บทตั้งเป็นคุณสมบัติของ $f$ ดังต่อไปนี้

**บทตั้ง3.3.6** ฟังก์ชัน $f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 (และ $f^{-1}$ นิยามบน $f_f\subseteq\mathbb{N}_0$ ด้วย)

**พิสูจน์** สำหรับ $m,n\in\mathbb{N}_0$ ถ้า $f(m)=f(n)$ แล้ว

$$g(m)=f^q(m)=f^{q-1}(f(m))=f^{q-1}(f(n))=f^q(n)=g(n)$$

เนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น $m=n$ □

**บทตั้ง3.3.7** ฟังก์ชัน $f$ แบ่ง $\mathbb{N}_0$ ไปเป็นคลาสสมมูล (equivalence classes) ที่ไม่เป็นเซตว่าง ตามความสัมพันธ์

$$x\sim y\Leftrightarrow y=f^{sq}(x) \qquad \text{สำหรับบาง } s\in\mathbb{Z}$$

**พิสูจน์** สำหรับ $x=f^{sq}(x)$ เราได้ว่า $x\sim x$

ถ้า $x\sim y$ แล้วมี $s\in\mathbb{Z}$ ที่ซึ่ง $y=f^{sq}(x)$ และ $x=f^{-sq}(y)$ ด้วย กล่าวคือ $y\sim x$

ถ้า $x\sim y$ และ $y\sim z$ แล้วมี $s,t\in\mathbb{Z}$ ที่ซึ่ง $y=f^{sq}(x)$ และ $z=f^{tq}(y)$

ได้ว่า $z=f^{tq}(f^{sq}(x))=f^{tq+sq}(x)$ ดังนั้น $x\sim z$ □

**บทตั้ง3.3.8** สำหรับ $r,s\in\mathbb{N}_0$ และ $r\neq s$ ถ้า $r$ และ $s$ ไม่อยู่ใน $R_g$ แล้ว $r$ และ $s$ อยู่ในคลาสแตกต่างกัน

**พิสูจน์** สมมติ $r$ และ $s$ อยู่ในคลาสเดียวกัน

มี $t\in\mathbb{Z}$ ซึ่ง $r=f^{tq}(s)$

เนื่องจาก $r \neq s$ เราพบว่า $t \neq 0$ และโดยการเปลี่ยนแปลง $r$ และ $s$
เราสามารถสมมติ $t > 0$ ดังนั้น $r = f^q(f^{(t-1)q}(s)) = g(f^{(t-1)q(s)})$
แสดงว่า $r \in R_g$ เกิดข้อขัดแย้ง □

**บทตั้ง3.3.9** มีจำนวนเต็มไม่เป็นลบเพียงหนึ่งเดียว $r \notin R_g$ ในแต่ละคลาสสมมูลและ $r$ เป็นสมาชิกน้อยสุดในคลาสนี้

**พิสูจน์** ให้ $C$ คลาสสมมูล
ถ้า $C \subset R_g$ และให้ $n_0 \in C$
เนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างต่อเนื่อง เราพบว่า $n_0 = g(n_1)$ สำหรับบาง $n_1 \leq n_0$
และเนื่องจาก $g$ ไม่มีจุดตรึง เราได้ว่า $n_1 < n_0$
นอกจากนี้ จาก $f^q(n_1) = g(n_1) = n_0$ ดังนั้น $n_1 \in C$
โดยเหตุผลเดียวข้างบนได้ว่า $n_1 = g(n_2), n_2 < n_1, n_2 \in C$
ทำซ้ำไปเรื่อยๆจนได้จำนวนเต็มลบอยู่ใน $C$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
ดังนั้น $C$ บรรจุ $r \notin R_g$ ซึ่งต้องมีเพียงหนึ่งเดียวโดยบทตั้ง 3.3.8
เราจะแสดงว่า $r$ เป็นสมาชิกน้อยสุดใน $C$
ถ้ามีจริง $u \in C$ ที่ซึ่ง $u < r$ จากผลลัพธ์ข้างต้นได้ว่า $u \in R_g$ กล่าวคือ $u = g(u_1)$ สำหรับบาง $u_1 \in \mathbb{N}_0$ สมาชิกนี้สอดคล้อง $u_1 < u$ โดยเหตุผลเดียวกันข้างบนได้ว่า $u_1 \in C$ ทำซ้ำไปเรื่อยๆเราได้จำนวนเต็มลบใน $C$ ขัดแย้งกับเงื่อนไข □

ให้ $C_r$ แทนคลาสสมมูลเมื่อ $r \notin R_g$ เป็นสมาชิกน้อยสุดในคลาส เรียกสมาชิก $r$ นี้ว่าจุดเริ่มต้น (starter)ของ $C_r$ เราได้ว่าคลาส $C_r$ แตกต่างกัน(disjoint) และ

$$\mathbb{N}_0 = \bigcup_{r \notin R_g} C_r,\ C_r = \{g^m(r) \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

**บทตั้ง3.3.10** ถ้า $r \notin R_g$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $C_r$ แล้ว $C_r = \{g^m(r) \mid m \in \mathbb{N}_0\}$

**พิสูจน์** ถ้า $x \in C_r$ และ $x = g^{-m}(r)$ สำหรับบาง $m \in \mathbb{N}$ แล้ว $r = g^m(x)$
เนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มที่ไม่มีจุดตรึง เรามี

$$r = g^m(x) > g^{m-1}(x) \geq g^{m-2}(x) \geq \ldots \geq x$$

ขัดแย้งกับการเป็นสมาชิกน้อยสุดของ $r$ □

**บทตั้ง3.3.11** ให้ $r$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $C_r$ แล้ว

(i) ฟังก์ชัน $f$ ส่งคลาส $C_r$ ไปคลาสหนึ่งเดียวที่บรรจุ $f(r)$

(ii) $f^q(C_r) \subseteq C_r$

**พิสูจน์** (i) จากบทตั้ง 3.3.10 แต่ละสมาชิกใน $C_r$ เขียนได้ในรูป $g^s(r) \in C_r (s \in \mathbb{N}_0)$ เนื่องจาก

$$f(g^s(r)) = f(g(g^{s-1}(r))) = g(f(g^{s-1}(r))) = ... = g^s(f(r))$$

เราพบว่า $f(g^s(r))$ และ $f(r)$ อยู่ในคลาสเดียวกัน ซึ่งแสดงว่าทุกสมาชิกของ $f(\mathrm{C}_r)$ อยู่ในคลาสเดียวเท่านั้น

(ii) สังเกตว่า

$$f^q(g^s(r)) = g(g^s(r)) = g^{s+1}(r) \in C_r$$

ถ้า $x \notin R_g = R_{f^q}$ แล้ว $x \in R_f$ กล่าวคือ $R_g \subseteq R_f$ □

**บทตั้ง3.3.12** (i) มีสมาชิกใน $\mathbb{N}$ ที่ไม่ได้อยู่ใน $R_f$

(ii) ถ้า $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathrm{R}_f$ แล้ว $k, f(k), f^2(k), ..., f^{q-1}(k)$ อยู่ในคลาสที่ต่างกันและแต่ละตัวเป็นจุดเริ่มต้นของคลาสนั้นๆ

**พิสูจน์** (i) ถ้า $R_f = \mathbb{N}_0$ แล้ว $f$ เป็น1-1 และทั่วถึง (บทตั้ง 3.3.6) และ $f^{-1}$ ด้วย

เนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มไม่มีจุดตรึง แล้ว $g(0) \neq 0$ ดังนั้น

$g(0) \geq 1, g(1) \geq 2, ..., f^q(k) = g(k) \geq k + 1 (k \in \mathbb{N}_0)$

จากความสัมพันธ์สุดท้ายได้ว่า $f^{-q}(l) := u \leq l - 1$

โดยการทำซ้ำ เราได้ว่า

$f^{-q}(l) = f^{-q}(u) \leq u - 1 \leq l - 2, f^{-3q}(l) = f^{-2q}(u) \leq u - 2 \leq l - 3, ...$

ดังนั้น สำหรับ $t$ ที่ใหญ่มากพอ ได้ว่า $f^{-tq}(l) < 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

(ii) ให้ $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{R}_f$ และ ให้

$$f^i(k) \in C_{r_i} \qquad (i = 0, 1, 2, ..., q-1) \tag{3.9}$$

เมื่อ $r_i$ ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน

เราจะพิสูจน์ว่า $f^i(x)$ เป็นสมาชิกน้อยสุดในคลาส $C_{r_i}$

เริ่มจากคลาสสุดท้าย $C_{r_{q-1}}$ ถ้าสมมติฐานไม่จริง แล้วจุดเริ่มต้นต้องสอดคล้องกับ

$$r_{q-1} < f^{q-1}(k)$$

เนื่องจาก $r_{q-1} = g^0(r_{q-1})$ แล้วนิยามของคลาสแสดงว่า $f^{q-1}(k) = g^t(r_{q-1})$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{N}$

เนื่องจาก $r_{q-1}$ และ $f^{q-1}(k)$ อยู่ในคลาส $C_{r_{q-1}}$ ทั้งคู่ โดยบทตั้ง 3.3.11 (i) ได้ว่า $f(r_{q-1})$ และ $f(f^{q-1}(k))$ อยู่ในคลาสเดียวกัน

เนื่องจาก $k \in C_{r_0}$ โดยบทตั้ง 3.3.11 (ii) ได้ว่า $f(f^{q-1}(k)) = f^q(k) \in C_{r_0}$ ดังนั้น $f(r_{q-1}) \in C_{r_0}$

ในขณะที่ $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มไม่มีจุดตรึง เรามี

$$f(r_{q-1}) < g^t(f(r_{q-1})) = f(g^t(r_{q-1})) = f(f^{q-1}(k)) = f^q(k) = g(k)$$

เนื่องจากไม่มีสมาชิกระหว่าง $k$ และ $g(k)$ ใน $C_{r_0}$ และเนื่องจาก $k \notin \mathbb{R}_f$ ดังนั้น $f(r_{q-1}) < k$

หลังจากใช้ $f^q = g$ ทำซ้ำจนได้ $f(r_{q-1})$ เราจะได้ $k$ ซึ่ง $k \in \mathbb{R}_f$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $f^{q-1}(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นใน $C_{r_{q-1}}$

โดยเหตุผลเดียวกัน ได้ว่า $f^{q-\mathbb{R}}(k),\ldots,f(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส $C_{r_{q-2}},\ldots C_{r_1}$ ตามลำดับ

จะแสดงว่า $k$ เป็นจุดเริ่มต้นใน $C_{r_0}$

เนื่องจาก $r_0 = g^0(r_0), k = g^t(r_0) \quad (t \in \mathbb{N})$ อยู่ใน $C_{r_0}$ ทั้งคู่ โดยบทตั้ง 3.3.11 (i) ได้ว่า $f(r_0)$ และ $f(k)$ อยู่ในคลาสเดียวกัน

เนื่องจาก $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มไม่มีจุดตรึง ได้ว่า

$$f(r_0) < g^t(f(r_0)) = f(g^t(r_0)) = f(k) \in C_{r_1}$$

ดังนั้น $f(r_0) \in C_{r_1}$ เกิดข้อขัดแย้ง $f(k)$ เป็นสมาชิกน้อยที่สุดใน $C_{r_1}$ □

**บทตั้ง 3.3.13** ทุก $r_i$ ใน (3.9) แตกต่างกัน

**พิสูจน์** สมมติ $r_i = r_j$ สำหรับบาง $i, j \in \{0,1,\ldots,q-1\}$ และ $i \neq j$ WLOG ที่ให้ $i < j$

ถ้า $i \neq 0$ โดยบทตั้ง 3.3.11 เราได้แผนภาพดังนี้

$$C_{r_0} \xrightarrow{f} C_{r_1} \cdots \xrightarrow{f} C_{r_i} \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} C_{r_{j-1}} \xrightarrow{f} C_{r_j} = C_{r_i}$$

จากแผนภาพแสดงให้เห็นว่าการทำซ้ำของ $f$ ไม่ได้ค่าใน $C_{r_0}$ อีกเลย ขัดแย้งกับบทตั้ง 3.3.11 (ii)

ถ้า $i = 0$ ให้ $q = j5 + r \quad (0 \le r < j)$

โดย บทตั้ง 3.3.11 (ii) และ $r_j = r_0$ เรามี

$$C_{r_0} = f^q\left(C_{r_0}\right) = f^{js+r}\left(C_{r_0}\right) = f^r(f^{js}\left(C_{r_0}\right)) = f^r\left(C_{r_0}\right)$$

จากการเลือก $j$ ได้ว่าความสัมพันธ์สุดท้ายเกิดขึ้นได้เมื่อ $r = 0$ เท่านั้น กล่าวคือ $j|q$

เรามีแผนภาพ ดังนี้

$$C_{r_0} \xrightarrow{f} C_{r_1} \cdots \xrightarrow{f} C_{r_{j-1}} \xrightarrow{f} C_{r_j} = C_{r_0}$$

ให้ $k \in \mathbb{N}_0 \setminus R_f$ เป็นจุดเริ่มต้นของ $C_{r_0}$

โดย บทตั้ง 3.3.11 (ii) โดย $f^j(k)$ เป็นจุดเริ่มต้นของคลาส $C_{r_j} = C_{r_0}$ และ $f^j(k) = k$

ทำซ้ำความสัมพันธ์และใช้ $j|q$ ได้ว่า $g(k) = f^q(k) = k$ ขัดแย้งกับสมมติฐาน คือ $g$ ไม่มีจุดตรึง □

**ข้อสังเกต** จากสองบทตั้งล่าสุดสรุปได้ว่า $r_i = f^i(k) \quad (i = 0,1,\ldots,q-1)$

**พิสูจน์ทฤษฎีบท 3.3.5**

เราจะพิสูจน์โดยแสดงว่า $f:\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้อง (3.8) จะต้องมีรูปแบบหนึ่งในฟังก์ชัน $f_k$ ที่นิยามต่อไปนี้

สำหรับ $k \in \mathbb{N}_0 \setminus R_f$ และ $r_i = f^i(k_0) \quad (i = 0,1,...,q-1)$

โดย บทตั้ง 3.3.12-3.3.13 คลาสสมมูลมีรูปแบบดังนี้

$$C_{r_i}^{(k_0)} = \{f^i(k_0), g(f^i(k_0)), g^2(f^i(k_0)),...\} = \{g^j(f^i(k_0)); j \geq 0\} \quad (i = 0,1,...,q-1)$$

และจากโครงสร้างเราได้ว่า $C_{r_i}^{(n_0)} \cap C_{r_i}^{(k_0)} = \phi \quad (i \neq j)$

เราเรียก $\left(C_{r_i}^{(k_0)},...,C_{r_{q-1}}^{(k_0)}\right)$ ว่า $k_0 - orbit$

ถ้า $\bigcup_{i=0}^{q-1} C_{r_i}^{(k_0)} \subset \mathbb{N}_0$ เราจะเลือก $k \in \mathbb{N}_0 \setminus R_f$ และสร้าง $k_1 - orbit$ ใหม่ $\left(C_{r_0}^{(k_1)},...,C_{r_{q-1}}^{(k_1)}\right)$ ทำซ้ำจนกว่าเราจะได้

$$\mathbb{N}_0 = \bigcup_{i \geq 0}\left(C_{r_0}^{(k_i)} \cup ... \cup C_{r_{q-1}}^{(k_i)}\right) \tag{3.10}$$

ให้ $K = \{k_0, k_1, ...\}$ แทนเซตของจุดเริ่มต้นทั้งหมด

ให้ $\left(C_{r_0}^{(k)},...,C_{r_{q-1}}^{(k)}\right)$ แทน $k_0 - orbit \quad (k \in K)$ ใดๆ

นิยามการส่งฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$f_k : C_{r_i}^{(k)} \to C_{r_{i+1}}^{(k)} \qquad (i = 0,1,...,q-2, k \in K)$$

(3.11)

$$f_k : C_{r_{q-1}}^{(k)} \to C_{r_q}^{(k)} := \{f^q(k) = g(k), g^2(k), g^3(k), ...\} = C_{r_0}^{(k)} \big| \{k\}$$

(3.12)

โดย $$f_k(g^j(f^i(k))) = g^j(f^{i+1}(k)) \quad (i = 0,1,...,q-2, j \in \mathbb{N}_0)$$

(3.13)

$$f_k(g^j(f^{q-1}(k))) = g^j(f^q(k)) = g^{j+1}(k)$$

(3.14)

สำหรับ $j \in \mathbb{N}_0$ , $i = \{0,1,...,q-1\}$ เนื่องจาก $g^j(f^i(k)) \in C_{r_i}^{(k)}$ และ

การทำซ้ำ $f_k(g^j(f^i(k))) = g^j(f^{i+1}(k))$ เราได้ว่า

$$f^2{}_k(g^j(f^i(k))) = f_k(g^j(f^{i+1}(k))) = g^j(f^{i+2}(k))$$

$$\vdots$$

$$f_k^{q-i-1}(g^j(f^i(k))) = g^j(f^{i+q-i-1}(k)) = g^j(f^{q-1}(k))$$

$$f_k^{(q-i-1)+1}(g^j(f^i(k))) = f_k(g^j(f^{q-1}(k)) = g^{j+1}(k)$$

ดังนั้น $$f_k^q(g^j(f^i(k))) = f_k^{\{(q-i-1)+1\}+i} g^j(f^i(k)) = f_k^i(g^{j+1}(k))$$

$$= g^{j+1}(f_k^i(k)) \qquad (k \in C_{r_0}^{(k)})$$

กล่าวคือ $f_k$ สอดคล้อง $f_k^q(n) = g(n)$

โดย (3.10) ได้ว่า $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและโดยโครงสร้างของ $f_k$ ได้ว่า $f$ ใดๆ ที่สอดคล้อง (3.10) จะต้องมีรูปแบบเป็นหนึ่งในรูปแบบของ $f_k$ $\square$

# บทที่ 4
# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

## 4.1 สรุปผลการวิจัย

### 4.1.1 ฟังก์ชันบนเซตของจำนวนจริง

กรณี 1 : $a>1$

กรณี 1.1 $f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

**ทฤษฎีบท 1** สำหรับ $x_0 \in (p,\infty)$ และกำหนด $x_1,\ldots,x_{q-1} \in \mathbb{R}$ โดยที่

$$p < x_0 < \ldots < x_{q-1} < ax_0 + b$$

และสำหรับฟังก์ชันสมานสัณฐานเพิ่ม นิยามโดย

$$\begin{aligned} f_0 &: [x_0, x_1] \to [x_1, x_2] \\ f_1 &: [x_1, x_2] \to [x_2, x_3] \\ &\vdots \\ f_{q-2} &: [x_{q-2}, x_{q-1}] \to [x_{q-1}, ax_0 + b] \end{aligned}$$

มีจริงฟังก์ชันเพิ่มขึ้นต่อเนื่องเพียงหนึ่งเดียว $F:(p,\infty)\to(p,\infty)$ สอดคล้อง $F^q(x)=ax+b$ และ

$$F(x)=f_m(x) \text{ สำหรับ } x\in[x_m,x_{m+1}], m=0,1,\ldots,q-2$$

**บทแทรก 2** ถ้า $h:(-\infty,p)\to(-\infty,p)$ นิยามโดย

$$h(x)=2p-F(2p-x)$$

เมื่อ $F$ เป็นฟังก์ชันที่สร้างเช่นเดียวกันในทฤษฎีบท 1 แล้ว $h$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและสอดคล้อง $h^q(x)=ax+b$

**ทฤษฎีบท 3** ฟังก์ชันเพิ่มอย่างต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$f^q(x)=ax+b \quad \text{เมื่อ } a>1, q\geq 2$$

ก็ต่อเมื่อมีรูปแบบ

$$f(x)=\begin{cases} F_1(x), x\in(p,\infty), \\ p, x\in p, \\ 2p-F_2(2p-x), x\in(-\infty,p), \end{cases}$$

เมื่อ $F_1$ และ $F_2$ เป็นฟังก์ชันที่ถูกสร้างในทฤษฎีบท 1

กรณี 1.2 : $f$ เป็นฟังก์ชันลด

**ทฤษฎีบท 4** สำหรับ $x_0 \in (p,\infty)$ กำหนด $x_1,\ldots,x_{k-1},y_0,\ldots,y_{k-1} \in \mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$ay_0 + b < y_{k-1} < \ldots < y_0 < p < x_0 < \ldots < x_{k-1} < ax_0 + b$$

และสำหรับฟังก์ชันสมานสัณฐานลดลง โดยนิยาม

$$\begin{aligned} &f_0 : [x_0, x_1] \to [y_1, y_0] \\ &f_1 : [y_1, y_0] \to [x_1, x_2] \\ &\quad\vdots \\ &f_{2k-3} : [y_{k-1}, y_{k-2}] \to [x_{k-1}, ax_0 + b] \\ &f_{2k-2} : [x_{k-1}, ax_0 + b] \to [ay_0 + b, y_{k-1}] \end{aligned}$$

มีจริงฟังก์ชันผลเฉลยลดลงต่อเนื่องเพียงหนึ่งเดียว $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ของสมการทำซ้ำ $f^q(x) = ax + b$ และสำหรับ $l = 0,1,\ldots,k-2$

$$F(x) = \begin{cases} f_{2l}(x), x \in [x_l, x_{l+1}], \\ f_{2l+1}(x), x \in [y_{l+1}, y_l], \\ f_{2k-2}(x), x \in [x_{k-1}, ax_0 + b] \end{cases}$$

เมื่อ $y_k = ay_0 + b$

นอกจากนี้ ถ้าฟังก์ชันลดลงต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชันของ

$$f^q(x) = ax + b \quad \text{เมื่อ } a > 1, q \geq 2$$

แล้ว $f$ ต้องมีรูปแบบหนึ่งในฟังก์ชัน $F$ ที่นิยามข้างบน

กรณี 2 : $0 < a < 1$

**ทฤษฎีบท 5** ฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$f^q(x) = ax + b \text{ เมื่อ } 0 < a < 1 \ , \ q \geq 2$$

ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันที่อธิบายใน ทฤษฎีบท 1 หรือ ทฤษฎีบท 4 อย่างใดอย่างหนึ่ง

กรณี 3 : $a < 0$

กรณี 3.1 : $a = -1$

**ทฤษฎีบท 6** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันผลเฉลยลดต่อเนื่องของสมการ $f^{2k+1}(x) = -x + b$ แล้ว $f(x) = -x + b$

กรณี 3.2 : $a < -1$

**ทฤษฎีบท 7** สำหรับ $x_0 \in (p,\infty)$ กำหนด $x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,y_0,\ldots,y_{k-1} \in \mathbb{R}$

ซึ่ง $ax_0 + b < y_{k-1} < \ldots < y_0 < \dfrac{x_0 - b}{a} < p < x_0 < \ldots < x_{k-1} < x_k < ay_0 + b$

และสำหรับกำหนดฟังก์ชันสมานสัณฐานลด

$$
\begin{aligned}
f_0 &: [x_0, x_1] \to [y_1, y_0] \\
f_0 &: [y_1, y_0] \to [x_1, x_2] \\
&\vdots \\
f_{2k-3} &: [y_{k-1}, y_{k-2}] \to [x_{k-1}, x_k] \\
f_{2k-2} &: [x_{k-1}, x_k] \to [ax_0 + b, y_{k-1}] \\
f_{2k-1} &: [ax_0 + b, y_{k-1}] \to [x_k, ay_0 + b]
\end{aligned}
$$

มีจริงฟังก์ชันผลเฉลยลดลงต่อเนื่องเพียงหนึ่งเดียว $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ของสมการทำซ้ำ $F^q(x) = ax + b$ นอกจากนี้ สำหรับ $l = 0,1,\ldots,k-1$ เรามีว่า

$$
F(x) = \begin{cases} f_{2l}(x), x \in [x_l, x_{l+1}] \\ f_{2l+1}(x), x \in [\mathrm{y}_{l+1}, \mathrm{y}_l], \end{cases}
$$

เมื่อ $y_k = ax_0 + b$

ในทางกลับกัน ถ้าฟังก์ชันลดลงต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้อง $f^q(x) = ax_0 + b$ เมื่อ $a < -a, q \geq 2$ แล้ว $f$ ต้องมีรูปแบบหนึ่งในฟังก์ชัน $F$ ข้างบน

กรณี 3.3 : $-1 < a < 0$

**ทฤษฎีบท 8** ฟังก์ชันลดและต่อเนื่อง $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้อง

$f^q(x) = ax + b$ เมื่อ $-1 < a < 0, q \geq 2$

ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}$ เป็นฟังก์ชันดังที่อธิบายไว้ในทฤษฎีบท 7

### 4.1.2 ฟังก์ชันบนเซตของจำนวนเต็ม

**ทฤษฎีบท 9** ให้ $q, a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็ม และ $q \geq 2$ , $a \notin \{0,1,-1\}$ แล้ว $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ $f^q(n) = an + b$ ก็ต่อเมื่อ $f$ มีรูปแบบหนึ่งในฟังก์ชัน $f_\pi$ ที่นิยามดังต่อไปนี้

นิยาม $C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots\}, r_{\mathrm{j},i} = a^j i - (a^j - 1)p \quad (i \in \mathbb{Z})$.

ให้ $\pi$ เป็นการแบ่งเซต $\{\mathrm{C}_i\}_{i \neq p}$ ไปเป็นวงโคจร (orbit) ซึ่งแต่ละวงโคจรประกอบด้วย $q$ คลาส $C_i$

ให้ $(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_q})$ เป็นวงโคจร นิยาม

$$f_\pi : C_{ih} \to C_{ih+1} \qquad (h = 1,2,\ldots,q-1)$$

โดย $$f_\pi(r_{j,i_h}) = r_{j,_{ih+1}} \qquad (j \in \mathbb{N}_0)$$

และ $$f_\pi : C_{i_q} \to C_{i_1}$$

โดย $$f_\pi(r_{j,i_q}) = r_{j+1,i_1} \qquad (j \in \mathbb{N}_0)$$

ถ้า $p \in \mathbb{Z}$ นิยาม $f_\pi(p) = p$

### 4.1.3 ฟังก์ชันบนเซตของจำนวนเต็มไม่เป็นลบ

**กรณี 1:** $f^q(n) = an + b$

**ทฤษฎีบท 10** ให้ $q \geq 2$, $a \geq 2$ และ $b \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม ฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้อง

$$f^q(n) = an + b \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน $f_\pi$ นิยามไว้ด้านล่าง

นิยาม $C_i = \{r_{0,i}, r_{1,i}, r_{2,i}, \ldots\}, r_{j,i} = a^j i + (a^j - 1)A \quad (j \in \mathbb{N}_0),\ A = \dfrac{b}{a-1}$

ให้ $\pi$ เป็นการแบ่งกั้นเซต $\{C_i\}$ เป็นวงโคจรแต่ละวงโคจรบรรจุ $q$ คลาส

ให้ $\left(C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_q}\right)$ เป็นวงโคจร และนิยาม

$$f_\pi : C_{i_h} \to C_{i_{h+1}} \quad (h = 1, 2, \ldots, q-1)$$

โดย $$f_\pi\left(r_{j,i_h}\right) = r_{j,i_{h+1}} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

และ $$f_\pi : C_{i_q} \to C_{i_1}$$

โดย $$f_\pi\left(r_{j,i_q}\right) = r_j + 1, i_1 \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

**กรณี 2:** $f^q(n) = g(n)$

**ทฤษฎีบท 11** ให้ $q \in \mathbb{N}, q \geq 2$ และ $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$

สมมติ $g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างต่อเนื่องที่ไม่มีจุดตรึง ถ้า $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องสมการเชิงฟังก์ชันทำซ้ำ

$$f^q(n) = g(n)$$

ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นหนึ่งในฟังก์ชัน $f_k$ นิยามไว้ด้านล่าง

สำหรับ $k \in \mathbb{N}_0 \setminus R_f$ และ $r_i = f^i(k_0) \quad (i = 0, 1, \ldots, q-1)$ นิยาม

$$C_{r_i}^{(k_0)} = \{f^i(k_0), g(f^i(k_0)), g^2(f^i(k_0)), \ldots\} = \{g^j(f^i(k_0)); j \geq 0\} \quad (i = 0, 1, \ldots, q-1)$$

ให้ $K = \{k_0, k_1, \ldots\}$ แทนเซตของจุดเริ่มต้นทั้งหมด

ให้$\left(C_{r_0}^{(k)}, \ldots, C_{r_{q-1}}^{(k)}\right)$ แทน $k_0 - orbit \ \ (k \in K)$ ใดๆ

นิยามการส่งฟังก์ชันดังต่อไปนี้

$$f_k : C_{r_i}^{(k)} \to C_{r_{i+1}}^{(k)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, q-2, k \in K)$$

$$f_k : C_{r_{q-1}}^{(k)} \to C_{r_q}^{(k)} := \{f^q(k) = g(k), g^2(k), g^3(k), \ldots\} = C_{r_0}^{(k)} \Big| \{k\}$$

โดย $$f_k(g^j(f^i(k))) = g^j(f^{i+1}(k)) \quad (i = 0, 1, \ldots, q-2, j \in \mathbb{N}_0)$$

### 4.2 ข้อเสนอแนะ

จากการทำงานวิจัยนี้สิ่งที่สำคัญคือการหาจุดเริ่มต้นของแต่ละคลาส สามารถใช้ความคิดนี้ไปหาผลเฉลยของฟังก์ชัน $f^q$ ในรูปแบบอื่นๆ แต่จะต้องคิดรูปแบบการนิยามการส่งของฟังก์ชันในรูปแบบอื่น

# เอกสารอ้างอิง

[1] J. Matkowski and W. Zhang, On linear dependence of iterates, J. of Appl. Anal. 6 (1) (2000) 149-157.

[2] J. Matkowski and W. Zhang, On the polynomial-like iterative functional equation, Th. M. Rassias (Ed.) Functional Equations and Inequalities (2000) 145-170.

[3] J.-P. Allouche, N. Rampersad, J.O. Shallit, On integer sequences whose first iterates are linear, Aequationes Math. 69 (1-2) (2005) 114-127.

[4] J. Propp, Problem proposal 474, Crux Math. 5 (1979) 229.

[5] J. Propp, Solution by G. Patruno, Crux Math. 6 (1980) 198.

[6] K.S. Sakaria, Roots of translations, Aequations Math. 75 (2008) 304-307.

[7] L. Berg, Iterative functional equations, Restock. Math. Kolloq. 64 (2009) 3-10.

[8] M. Kuczama, B. Choczewski and R. Ger, Iterative Functional Equations, Encyclopedia of Mathermatics and Its Applications, Vol. 32, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[9] V. Laohakosol and B. Yuttanan, Iterates of increasing sequence of positive integers, Aequationes Math. 87 (2014) 89-103.

[10] W. Jarczyk, On an equation of linear iteration, Aequationes Math. 51 (1996) 303-310.

# ภาคผนวก

## ภาคผนวก ก

แสดงเอกสารการนำเสนอผลงานในการประชุมวิชาการงาน
The Sixteenth International Conference on Functional Equations and Inequalities 2015
เรื่อง An approach to obtain asymptotic expansions of some functional iterates
ณ ประเทศโปแลนด์ ตั้งแต่ 17 พฤษภาคม 2558 ถึง 23 พฤษภาคม 2558

POLAND, BEDLEWO 2015
16th ICFEI

THE SIXTEENTH
INTERNATIONAL CONFERENCE
ON FUNCTIONAL EQUATIONS
AND INEQUALITIES

**Postal address: 16th ICFEI**
Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 KRAKÓW, Poland

**E-mail:** icfei@up.krakow.pl
**Fax:** (48)(12) 637-22-43
**Phone:** (48)(12) 662-62-73
or 662-62-74

May 23 2015

# CERTIFICATE

This is to certify that

Professor Sukrawan MAVECHA

took part and gave the talk entitled

*Iterative roots of an increasing function with no fixed point*

at the 16th International Conference on Functional Equations and Inequalities (16th ICFEI).

The conference has been organized by the Department of Mathematics of the Pedagogical University of Cracow and taken place at the Mathematical Research and Conference Center (MRCC) of the Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences in Będlewo, Poland, 17 – 23 May, 2015.

On behalf of the Organizing Committee
of the 16th ICFEI

(Prof. Janusz Brzdęk, chairman)

# Sixteenth International Conference on Functional Equations and Inequalities
May 17-23, 2015, Będlewo, Poland

**Sukrawan Mavecha**
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, Thailand
(joint work with **Boonrod Yuttanan and Vichian Laohakosol**)

## Iterative roots of an increasing function with no fixed point

For a strictly increasing function with no fixed point $g(n)$, and an integer $q \geq 2$, the iterative functional equation $f^q(n) = g(n)$, where $f^q$ denotes the $q^{\text{th}}$ composite of $f$, is solved for functions whose domain and range are the set of nonnegative integers.

### References

[1] J.P. Allouche, N. Rampersad, J.O. Shallit, *On integer sequences whose first iterates are linear*, Aequationes Math. **69**(1-2), 114–127 (2005).

[2] V. Laohakosol, B. Yuttanan, *Iterates of increasing sequences of positive integers*, Aequationes Math. **87**, 89-103 (2014).

[3] J. Propp, *Problem proposal 474*, Crux Math. **5**, 229 (1979).

[4] J. Propp, *Solution by G. Patruno*, Crux Math. **6**, 198 (1980).

[5] K.S. Sarkaria, *Roots of translations*, Aequationes Math. **75**(1-2), 304–307 (2008).

# ภาคผนวก ข

แสดงเอกสารการนำเสนอผลงานในการประชุมวิชาการงาน
$7^{th}$ European Congress of Mathematics in Berlin 2016, Germany.
เรื่อง Iterative roots of a linear function over the integers
ณ ประเทศเยอรมนี ตั้งแต่ 18 กรกฎาคม 2559 ถึง 22 กรกฎาคม 2559

TUBS GmbH 7ECM 2016 Hardenbergstr. 19 D-10623 Berlin

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Mathematics
Sukrawan Mavecha
Chalongkrung Rd. Ladkrabang
10520 Bangkok
Thailand

Hardenbergstraße 19
D-10623 Berlin

Telefon
+49 30 44 72 02 77

Telefax
+49 30 44 72 02 88

E-Mail
kongresse@tubs.de

Internet
www.tubs.de

**TUBS**kongress

Berlin, 07-22-2016

## Confirmation of Attendance

**Sukrawan Mavecha**

has attended the

"7th European Congress of Mathematics"

from July 18 - 22, 2016

in Berlin

Yours sincerely,

Hekel

Lisa Heitel

TUBS GmbH
TU Berlin
ScienceMarketing

Managing Director
Ingo Finacker

Place of Jurisdiction Berlin
HRB 81219

Tax ID
27/448/05088

17:30 **Maria Joita**: *Scattered locally $C^*$-algebras*

17:50 **Kanet Ponpetch**, Sukrawan Mavecha: *Independence of multiplicative and exponential functions*

18:10 **Ricardo Almeida**: *Some results on a general form of a Caputo-type fractional derivative.*

**CS-06-H** Thursday, 09:00 – 11:00
Chair: D. Stoeva H3012 (main building)

09:00 **Boonrod Yuttanan**: *Iterative functional equations of the second order*

09:20 **Sukrawan Mavecha**, Vichian Laohakosol, Boonrod Yuttanan: *Iterative root of a linear function over the integers*

09:40 **Syed Abbas**: *Almost Periodic Solution of a non-autonomous model of Cellular Neural Network*

10:00 **Juan Matías Sepulcre**: *Zeros of exponential polynomials: some old and recent results, and their interplay in different fields*

10:20 **Huseyin Cakalli**: *A variation on upward and downward statistical quasi Cauchy sequences*

10:40 **Diana Stoeva**: *Extension of the duality principle in Gabor analysis*

## ภาคผนวก ค

บทความวิจัยตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติ Thai Journal of Mathematics
เรื่อง Iterated functional equations related to roots of simple functions

Thai Journal of Mathematics
Special Issue on ICMSA2015 (2016) : 79-87
http://thaijmath.in.cmu.ac.th
ISSN 1686-0209

# Iterated functional equations related to roots of simple functions

Vichian Laohakosol[1], Sukrawan Mavecha[2,*] and Boonrod Yuttanan[3]

[1]Department of Mathematics, Faculty of Science,
Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand
e-mail : fsciwcl@ku.ac.th
[2]Department of Mathematics, Faculty of Science,
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand
e-mail : ksukrawa@kmitl.ac.th
[3]Algebra and Applications Research Unit, Department of Mathematics and Statistics,
Faculty of Science, Prince of Songkla University, Songkhla 90110, Thailand
e-mail : boonrod.y@psu.ac.th

**Abstract :** An exposition about polynomial-like iterative functional equations is given. Emphases are placed upon equations of the form $f^n(x) = g(x)$, for a given function $g$ and a positive integer $n$, defined over two kinds of domain: continuous and discrete. In addition to historical developments, one of our recent results is presented.

**Keywords :** iterative functional equations; cycles.

**2010 Mathematics Subject Classification :** 39B12; 11B99

The first author is supported by the Faculty of Science, Kasetsart University through the grant No. RFG-1-. The second author is supported by a research fund from King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. The third author is supported by a research fund from Algebra and Applications Research Unit, Faculty of Science, Prince of Songkla University.

*Corresponding author email: ksukrawa@kmitl.ac.th

# สรุปค่าใช้จ่ายการดำเนินงานโครงการวิจัย

รหัสโครงการ/รหัสสัญญา KREF045709

# แบบรายงานการใช้จ่ายเงินโครงการวิจัย

## สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

รายงานความก้าวหน้า ครั้งที่ 2 รอบ 12 เดือน ประจำปีงบประมาณ 2559

☑ แหล่งงบประมาณแผ่นดิน (แบบปกติ) ☐ แหล่งเงินรายได้

ชื่อโครงการ (ภาษาไทย) การทำซ้ำของฟังก์ชันทั่วถึงและเพิ่ม

(ภาษาอังกฤษ) Iterates of surjective and increasing functions

**ชื่อ-สกุลหัวหน้าโครงการวิจัยผู้รับทุน/ผู้วิจัย** ดร. ศุกระวรรณ มะเวชะ

**รายงานในช่วงตั้งแต่วันที่** 1 ตุลาคม 2557 ถึงวันที่ 30 กันยายน 2559

**ระยะเวลาดำเนินการ** 2 ปี ตั้งแต่วันที่ 1 ตุลาคม 2557 ถึงวันที่ 30 กันยายน 2559

ข้อมูลการรายงานค่าใช้จ่ายงบประมาณโครงการวิจัย

1. การเบิกจ่ายงบประมาณ (กรณีการจ่ายเงินถ้าจ่ายงวดเดียวให้ลบข้อที่ไม่เกี่ยวข้องออก)

งวดที่ 1 334,100 บาท 50 % วันที่ได้รับอนุมัติให้เบิกจ่ายเงิน (ป/ด/ว) 28/10/2557

งวดที่ 2 327,000 บาท 48.94 % วันที่ได้รับอนุมัติให้เบิกจ่ายเงิน (ป/ด/ว) 22/01/2559

2. สรุปงบประมาณค่าใช้จ่ายที่ใช้นับตั้งแต่เริ่มทำการวิจัยถึงปัจจุบัน (จำแนกตามหมวดค่าใช้จ่าย (

| หมวดค่าใช้จ่าย | งบประมาณรวมทั้งโครงการ | ค่าใช้จ่าย (บาท) | คงเหลือ (หรือเกิน |
|---|---|---|---|
| ค่าตอบแทน | 28,200 | 28,200 | ขาดงวดที่ 3 จำนวน 7,050 |
| ค่าจ้างผู้ช่วยวิจัย | 126,000 | 126,000 | 0 |
| ค่าใช้สอย | 370,000 | 370,000 | 0 |
| ค่าวัสดุ | 144,000 | 140,000 | 4,000 |
| **รวม** | 668,200 | 664,200 | 4,000 |

(ดร.ศุกระวรรณ มะเวชะ)

ลงนามหัวหน้าโครงการวิจัยผู้รับทุน

/ /

( )

ลงนามเจ้าหน้าที่การเงิน/เจ้าหน้าที่ที่เกี่ยวข้อง

/ /

# ประวัติผู้วิจัย

**ประวัติส่วนตัว**

ชื่อ-สกุล ดร. ศุกระวรรณ มะเวชะ (ตาลวงค์)

ตำแหน่งปัจจุบัน อาจารย์ สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์

**ประวัติการศึกษา**

| ชื่อย่อปริญญา | สาขา | สถาบันที่จบ | ปีที่จบ |
|---|---|---|---|
| ปร.ด. | คณิตศาสตร์ | มหาวิทยาลัยมหิดล | 2553 |
| วท.ม. | คณิตศาสตร์ | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ | 2547 |
| วท.บ. | คณิตศาสตร์ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯลาดกระบัง | 2543 |

สาขาวิจัยที่มีความชำนาญพิเศษ Number Theory และ Classical Analysis

**ทุนการศึกษาและทุนวิจัยที่เคยได้รับ**

| ปี พ.ศ. | ทุนการศึกษาและทุนวิจัย | สถาบันที่ให้ |
|---|---|---|
| 2545 | ทุนพัฒนาอาจารย์ระดับป.โท และ ป.เอก | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯลาดกระบัง |
| 2547 | ทุนสนับสนุนงานวิจัย | มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ |
| 2555 | ทุนพัฒนานักวิจัยใหม่ | สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าฯลาดกระบัง |

**ผลงานวิจัยที่ตีพิมพ์เผยแพร่ (ระดับชาติและนานาชาติ)**

1. S. Talwong, V. Laohakosol and S.S. Cheng, Power function solutions of iterative functional differential equations, Appl. Math. E-Notes 4(2004), 160-163.
2. S. Talwong and V. Laohakosol, Iterative equations with linear monomial solutions, Contribution in General Algebra (NCAM 2003-2004), a special volume published by East-West J. Math., Bangkok, 2004, 119-125.
3. S.S. Cheng, S. Talwong and V. Laohakosol, Exact solutions of iterative functional differential equations, Computing 76(2006), 67-76.
4. C. Maneesawarng, B. Sroysang, S.Talwong and W. Wachiramala, Planar soap bubbles on a half plane for three and four areas with equal pressure regions, East-West K. Math., special volume (2010), 109-127.
5. S. Mavecha and V. Laohakoson, Asymptotic expansions of iterates of some classical functions, Appl. Math. E-Notes. (Submitted).
6. V. Laohakosol, S. Mavecha and B. Yuttanan, Iterated functional equations related to roots ofsimple functions, Thai Journal of Mathematics, Special issue on ICMSA2015, 2016,79-87.

7. O. Kihel, S. Mavecha and J. Midgley, On the Diophantine equation $h(a)x^2 + f(a) = g(a)a^n$, 2015, summited.
8. R. Boumahdi, O. Kihel and S. Mavecha, Proof of the conjecture of Keskin, Olcay and Siar, Bull. Math. Roumanie, 2016. Preprint.
9. V. Laohakosol, S. Mavecha and K. Ponpetch, Functions with constant sums over a hyperplane and applications, 2015, submitted.
10. S. Mavecha, On the Diophantine equation $x^2 - kxy + ky^2 + ly = 0, l = 2$, Analele Universitatii de Timisoara, 2017, accepted.
11. S. Mavecha, V. Laohakosol, and B. Yuttanan, Iterated roots of linear functions, Turkish journal of mathematics, 2016, submitted.

**การเสนอผลงานวิชาการ**

1. National Conference on General Algebra and Discrete Mathematics 2003 and 2004, Thailand.
2. International Conference in Mathematics and Applications 2010, Thailand.
3. Third Palestinian Conference on Modern Trends in Mathematics and Physics 2012, Palestine.
4. The Sixteenth International Conference on Functional Equations and Inequalities 2015, Poland.
5. The 11th IMT-GT International Conference on Mathematics, Statistics and Its Applications 2015, Thailand
6. International Conference of Mathematics of Ain Temouchent 2016, Algeria.
7. 7th European Congress of Mathematics in Berlin 2016, Germany.