

การวิเคราะห์วิธีการกำหนดค่าวงโคจรดาวเทียมแบบวงโคจรต่ำโดยพิจารณา  
การเกิดการรบกวนจากแรงดึงดูดและแรงดันในชั้นบรรยากาศ

A NUMERICAL SOLUTION OF ORBIT DETERMINATION  
WITH PERTURBATION OF ATTRACTING FORCE AND  
PRESSURE IN ATMOSPHERE



วิทยานิพนธ์ชิ้นนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

KMITL-2009-EN-M-010-174

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การวิเคราะห์วิธีการกำหนดค่าวงโคจรดาวเทียมแบบวงโคจรต่ำโดยพิจารณา  
การเกิดการรบกวนจากแรงดึงดูดและแรงดันในชั้นบรรยากาศ

A NUMERICAL SOLUTION OF ORBIT DETERMINATION  
WITH PERTURBATION OF ATTRACTING FORCE AND  
PRESSURE IN ATMOSPHERE



รพ.  
ร146ก  
2552

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน.....105514  
วัน,เดือน,ปี..... 26 พ.ย. 2552

12121335

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
KMITL 2009-EN-M-010-174  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**A NUMERICAL SOLUTION OF ORBIT DETERMINATION  
WITH PERTURBATION OF ATTRACTING FORCE AND  
PRESSURE IN ATMOSPHERE**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN TELECOMMUNICATIONS ENGINEERING  
FACULTY OF ENGINEERING  
KING MONGUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2009  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
KMITL 2009-EN-M-010-174



**COPYRIGHT 2009**

**FACULTY OF ENGINEERING**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การวิเคราะห์วิธีการกำหนดค่าวงโคจรดาวเทียมแบบวงโคจรต่ำโดยพิจารณาการเกิดการรบกวนจากแรงดึงดูดและแรงดันในชั้นบรรยากาศ

Thesis Title The Numerical Solution of Orbit Determination by Consideration of the Perturbation of Attracting Force and Pressure in Atmosphere

นักศึกษา นางสาวพีพรรณ แจ่มศิลป์

รหัสประจำตัว 47061076

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมโทรคมนาคม

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.สุทธิชัย นพนาถิพงษ์

หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2009-EN-M-010-174

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
รศ.สมยศ	จุมณะปิยะ	
ผศ.ดร.สมเกียรติ	ฤกษ์วีรฤณ	
รศ.จิระศักดิ์	ชาญวุฒิชรรม	
ดร.มนตรี	คำเงิน	
ผศ.ดร.สุทธิชัย	นพนาถิพงษ์	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันพุธที่ 28 ตุลาคม พ.ศ. 2552 เวลา 14.00-16.00 น.

สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 3 ห้องประชุม 2

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.กอบชัย เดชหาญ)

คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

วันที่ 28 ตุลาคม พ.ศ. 2552

สำนักทะเบียนและประมวลผล สทล.

วันที่ส่งเล่มวิทยานิพนธ์ฉบับสมบูรณ์

วันที่ 30 เดือน ตุลาคม พ.ศ. 2552

เอกสารนี้เป็นเอกสารสงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น มิใช่เผยแพร่ให้คนอื่นได้โดยไม่ได้รับอนุญาต  
สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับเอกสารฉบับนี้ และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การวิเคราะห์วิธีการกำหนดค่าวงโคจรดาวเทียมแบบวงโคจร  
ต่ำโดยพิจารณาการเกิดการรบกวนจากแรงดึงดูดและแรงดันใน  
ชั้นบรรยากาศ

นักศึกษา

นางสาวรพีพรรณ แจ่มศิลป์

รหัสนักศึกษา

47061076

ปริญญา

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา

วิศวกรรมโทรคมนาคม

พ.ศ.

2552

อาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์

ผศ.ดร.สุทธิชัย นพนาถิพงษ์

### บทคัดย่อ

ในระบบนำร่อง (Navigation system) นั้น ความแม่นยำในเรื่องของพิกัดตำแหน่งเป็นสิ่งสำคัญ แต่ในทางปฏิบัติแล้วย่อมเกิดการรบกวนต่างๆขึ้น ทำให้เราไม่สามารถระบุตำแหน่งที่แท้จริงของดาวเทียมได้ และจะส่งผลกระทบต่อเนื่องต่อกระบวนการส่งข้อมูลลงมายังสถานีภาคพื้นดินในแง่ของความเที่ยงตรงของตำแหน่งและเวลา วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เราจะทำการศึกษาและวิเคราะห์การรบกวนที่เกิดจากการรบกวนที่เกิดจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ ซึ่งส่งผลโดยตรงต่อการกำหนดวงโคจรของดาวเทียม (Satellite Orbit Determination)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<b>Thesis Title</b>	The Numerical solution of orbit determination by consideration of the perturbation of attracting force and pressure in atmosphere
<b>Student</b>	Ms.Rapeepan Jangsilapa
<b>Student ID.</b>	47061076
<b>Degree</b>	Master of Engineering
<b>Program</b>	Telecommunications Engineering
<b>Year</b>	2009
<b>Thesis Advisor</b>	Asst.Prof. Dr. Sutthichai Noppanekkepong

## ABSTRACT

In the navigation system, the high accuracy orbit determination is very important. In practical, there are many perturbation of satellite motion that involve to estimation and evaluation of actual satellite position. And the sequential problem of signal transfer process will be occur. We are going to study and analyze the perturbation that they are necessary to calculate the precise orbit of satellite. We pay special attention to the perturbation of solar radiation pressure.

# กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี ด้วยการที่ข้าพเจ้าได้รับคำแนะนำเป็นอย่างดีตลอดมาจากอาจารย์ ศศ.ดร.สุทธิชัย นพนาศิพงษ์ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษา ที่ถ่ายทอดความรู้ รวมทั้งประสบการณ์การวิจัยในระดับสูง ข้าพเจ้าจึงขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ได้ทำให้การศึกษาวิจัยสำเร็จลุล่วงมาได้พร้อมกับยังให้ข้าพเจ้าได้เพิ่มเติมความรู้อื่นๆที่นอกเหนือจากสิ่งที่อยู่ในตำรา

นอกจากนี้ยังขอขอบคุณ Dr. Shinichi Nakamura และ Mr. Ryo Nakamura ซึ่งทำงานอยู่ใน JAXA ประเทศญี่ปุ่นซึ่งเป็นผู้ร่วมโครงการในการวิจัยของข้าพเจ้าโดยตรง ในการที่ทั้งสองท่านได้ให้ความรู้และความตั้งใจในการร่วมมือและข้อเสนอแนะที่เป็นประโยชน์ต่าง ๆ มากมาย

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณ พ่อแม่ เพื่อนๆ พี่ และน้องๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือแก่ข้าพเจ้าในทุกด้าน จนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้ด้วยดี

รพีพรรณ แจ่มศิลป์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการ.....	1
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	2
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	2
1.5 ขอบเขตการวิจัย.....	2
1.6 ขั้นตอนของการศึกษา.....	2
บทที่ 2 การทำนายวงโคจรดาวเทียมในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน.....	3
2.1 กล่าวนำ.....	3
2.2 สมการของเคปเลอร์ และ เวลาอิสระของการเคลื่อนที่.....	3
2.3 การแก้สมการเคปเลอร์.....	5
2.4 วงโคจรในอวกาศ.....	6
บทที่ 3 วงจรกรองแบบคาถมานสำหรับกะประมาณ.....	11
3.1 กล่าวนำ.....	11
3.2 ระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ.....	11
3.2.1 ระบบที่มีการสลัดลำคลื่น (Sequential lobing).....	12
3.2.2 ระบบการทำงานที่มีการหมุนของลำคลื่น (conical scan).....	13
3.2.3 ระบบการทำงานโดยส่งคลื่นแบบพัลส์เดียว (mono pulse).....	14
3.3 เหตุผลที่ต้องมีวงจรกรองสำหรับกะประมาณตำแหน่งสำหรับระบบ เรดาร์ตามร่องวัตถุ.....	15

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
3.4 การตามร่องวัตถุ โดยวงจรรองแบบคาลมาล.....	17
3.4.1 ความเป็นมา.....	17
3.4.2 แบบจำลองของวงจรรองแบบคาลมาล.....	17
3.4.3 การทำงานของวงจรรองแบบคาลมาล.....	20
3.4.4 ค่าตั้งต้น (initial).....	27
<b>บทที่4 การสร้างแบบจำลองเปรียบเทียบระหว่างกรณีที่ไม่เกิดการรบกวนและกรณีที่เกิดการรบกวน แบบต่างๆ.....</b>	<b>33</b>
4.1 กล่าวนำ.....	33
4.2 แบบจำลองวงโคจรกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน.....	33
4.2.1 บทนำ.....	33
4.2.2 วิธีการแบบรันจ์-กัตตา (Rung-kutta methods).....	34
4.2.3 สูตรสมการทั่วไปแบบรันจ์-กัตตา.....	36
4.2.4 การควบคุมขนาดของขั้นคอน.....	38
4.2.5 ผลการทดลอง.....	39
4.3 แบบจำลองวงโคจรกรณีที่เกิดการรบกวนอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์.....	42
4.3.1 แรงดันอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์.....	42
4.3.2 รูปแบบความผิดพลาดจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์.....	46
4.3.3 อนุพันธ์ย่อยที่เกี่ยวข้องกับแรงดันที่เกิดจากการแผ่รังสีจากดวงอาทิตย์.....	47
4.3.4 ผลการทดลอง.....	49
4.4 แบบจำลองการบอกตำแหน่งที่ได้จากการกะประมาณ โดยวงจรรองแบบคาลมาล.....	53

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 5 วิจัยและสรุปผล.....	57
บรรณานุกรม.....	58
ภาคผนวก ก ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์.....	59



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญตาราง

ตารางที่

หน้า

4.1 แสดงองค์ประกอบวงโคจรจากดาวเทียมที่ใช้ในการคำนวณ..... 39



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญรูป

รูปที่

หน้า

2.1 แสดงถึงตำแหน่งอ้างอิงต่างๆ โจร	3
2.2 แสดงระบบพิกัดระนาบศูนย์สูตร	7
2.3 แสดงองค์ประกอบวงโคจรดาวเทียม ได้แก่ $i$ , $\Omega$ และ $\omega$	8
3.1 การสลับลำดับของระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ	12
3.2 การหมุนลำดับในระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ	13
3.3 แสดงการส่งคลื่นแบบพัลส์เดียวในระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ	15
3.4 แบบจำลองของวงจรรองแบบคาบมาล	18
3.5 แสดงโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการวัด	25
3.6 แสดงโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของดาวเทียม	25
3.7 แสดงโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการกะประมาณ	26
3.8 แสดงกระบวนการทำงานของวงจรรองแบบคาบมาล	26
4.1 แสดงแบบจำลองวงโคจรกรณีที่ไม่เกิดการรบกวนใดๆ	40
4.2 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่ามุมยก (elevation angle) เทียบกับช่วงคาบเวลา 30 นาที	40
4.3 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่ามุมอาซิมูท (Azimuth angle) เทียบกับช่วงคาบเวลา 30 นาที	41
4.4 แสดงการเปลี่ยนแปลงค่าระยะห่างระหว่างดาวเทียมกับจุดสังเกตการณ์ ในช่วงคาบเวลา 30 นาที	42
4.5 แสดงบริเวณพื้นผิวที่เกิดเงา	45
4.6 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า $a$ เทียบกับเวลา	50
4.7 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า $i$ เทียบกับเวลา	50
4.8 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า $\Omega$ เทียบกับเวลา	51
4.9 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า $\omega$ เทียบกับเวลา	51
4.10 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า $e$ เทียบกับเวลา	52
4.11 แสดงการเปลี่ยนแปลงของค่า $M$ เทียบกับเวลา	53
4.12 แสดงการวัดค่ามุมอาซิมูทเทียบกับเวลาในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน	54
4.13 แสดงภาพขยายการวัดค่ามุมอาซิมูทเทียบกับเวลาในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน	55
4.14 แสดงการวัดค่ามุมยกเทียบกับเวลาในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน	55
4.15 แสดงการวัดค่าระยะทางจากจุดสังเกตการณ์เทียบกับเวลาในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน	56

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในช่วงเวลาหลายปีที่ผ่านมา หลายประเทศได้ทำการค้นคว้าเกี่ยวกับการกำหนดวงโคจรของดาวเทียมแบบวงโคจรต่ำ เนื่องจากความต้องการใช้งานดาวเทียมมีสูงขึ้น จึงจำเป็นต้องมีการจัดระบบเพื่อรองรับการขยายตัวดังกล่าว หัวใจหลักที่จำเป็นต่อการพัฒนา คือ “การกำหนดค่าวงโคจรที่มีความแม่นยำสูงของดาวเทียม”

งานวิจัยฉบับนี้ได้ทำการศึกษา และจำลองแบบวงโคจรดาวเทียมขึ้นมาเพื่อแสดงถึงโครงสร้าง และความสัมพันธ์ ของพารามิเตอร์ต่างในชั้นต้น จากนั้นทำการสร้างแบบจำลองจากค่าที่ทำการวัด แล้วนำมาวิเคราะห์ร่วมระหว่างแบบจำลองวงโคจรที่ไม่เกิดการรบกวนใดๆ จากสภาพแวดล้อม และแบบจำลองที่ใส่ค่าการรบกวนจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ และส่งผลกระทบต่อระบบสื่อสาร และระบบนำร่องของดาวเทียมที่ใช้กันในปัจจุบัน ถึงแม้ว่าที่ผ่านมาได้มีการปรับปรุงและแก้ไขความผิดพลาดของอุปกรณ์รับส่งสัญญาณจากดาวเทียมแล้ว แต่ปฏิเสธไม่ได้ว่าค่าของความผิดพลาดต่างๆเหล่านั้นก็ยังคงเกิดขึ้นอยู่ตลอดเวลา และงบประมาณในการปรับปรุงส่วนของอุปกรณ์นั้นก็มีความสูงมาก ทำให้มีการนำเอาวิธีการทางคณิตศาสตร์เข้ามาประยุกต์ใช้ในการทำนายค่าวงโคจร ส่วนวิธีที่จะนำมาใช้ในงานวิจัยฉบับนี้คือ การจำลองวงโคจรโดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ของรังค์-กัตตา และวงจรรองแบบ คาลมาน (Kalman filter) ซึ่งเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพสูง และเป็นที่ยอมรับกันโดยทั่วไป

### 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. เพื่อศึกษาและ สร้างแบบจำลองของวงโคจรดาวเทียมที่ไม่เกิดการรบกวน จากนั้นนำไปเปรียบเทียบกับ แบบจำลองวงโคจรดาวเทียมที่เกิดการรบกวนจากสภาพแวดล้อมในอวกาศ
2. เพื่อปรับปรุงประสิทธิภาพ และความแม่นยำในการกำหนดวงโคจร และสามารถนำไปใช้ในการหาค่าตำแหน่งในการปฏิบัติงาน
3. เพื่อทำการสร้างแบบจำลองวงโคจรดาวเทียมที่มีมาตรฐาน เพื่อการศึกษาวิจัยการเกิดการรบกวนจากปัจจัยอื่นๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 1.3 สมมติฐานของการศึกษา

1. การสร้างแบบจำลองการโคจรของดาวเทียมด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ของรังค์-กัตตา ช่วยในการศึกษาลักษณะพื้นฐานตัวแปร และแนวโน้มในการเคลื่อนที่
2. วงจรกรองแบบคาลมานช่วยในการจำลองการวัดค่าความเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ ซึ่งสำคัญต่อการทำนายตำแหน่งของดาวเทียม และสามารถใช้เป็นแนวทางในการศึกษาแนวโน้มการเกิดผลกระทบต่อวงโคจรของดาวเทียม

### 1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

การกำหนดวงโคจรของดาวเทียมในงานวิจัยฉบับนี้ใช้เทคนิคการจำลองแบบโดยใช้สมการทางคณิตศาสตร์ของเคปเลอร์ (Kepler's equation) จากนั้นการแก้สมการแบบรังค์-กัตตา จะถูกนำมาใช้ และวงจรกรองแบบคาลมาน (Kalman filter) จะถูกนำมาใช้เพื่อจำลองการวัดค่าตำแหน่ง เพื่อเปรียบเทียบ โดยข้อมูลเหล่านี้จะสามารถนำมาใช้ในการชดเชยค่าตำแหน่งที่ผิดพลาดไปเนื่องจากสภาวะต่างๆ

### 1.5 ขอบเขตการวิจัย

งานวิจัยฉบับนี้ทำการศึกษา และสร้างแบบจำลองวงโคจรดาวเทียมในขั้นตอนแรก จากนั้นทำการใส่วงจรกรองแบบคาลมานเข้าสู่ระบบ เพื่อสร้างอุปสรรคต่างๆในการโคจร จากนั้นทำการเปรียบเทียบความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากตัวแปรต่างๆ และทำการเปรียบเทียบ

### 1.6 ขั้นตอนของการศึกษา

1. ศึกษาวงโคจรของดาวเทียม
2. ศึกษาการทำงานของวงจรกรองแบบคาลมาน
3. ทำการเขียนโปรแกรมจำลองวงโคจร แบบที่ไม่เกิดการรบกวนใดๆ
4. ใส่ค่าตัวแปรต่างๆ ที่ทำหน้าที่เสมือนอุปสรรคในการโคจร โดยใช้วงจรกรองแบบคาลมาน
5. เปรียบเทียบผลที่ได้จากสภาวะที่ทำการตั้งสมมติฐานไว้ และสรุปผล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

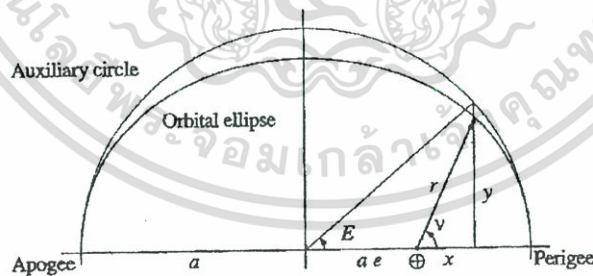
# การทำนายวงโคจรดาวเทียมในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน

### 2.1 กล่าวนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีของเคปเลอร์ที่อธิบายถึงแนวการเคลื่อนที่ของดาวเทียม ลักษณะของวงโคจร และตัวแปรต่างๆที่ส่งผลต่อลักษณะของวงโคจร

### 2.2 สมการของเคปเลอร์ และ เวลาอิสระของการเคลื่อนที่

ในการอธิบายวงโคจรแบบเคปเลอร์นั้นเกี่ยวข้องกับ รูปแบบของเรขาคณิต ของวงโคจร ดาวเทียมในอวกาศ จากกฎของแรงโน้มถ่วง ได้ถูกนำมากล่าวไว้ว่า การเคลื่อนที่จะไม่เป็นไปตาม เส้นโค้งที่กำหนดในอวกาศ แต่จะถูกจำกัด ด้วย รูปวงรี หรือ รูปทรงที่เกิดจากภาคตัดทรงกรวย อื่นๆ อย่างไรก็ตาม ยังไม่มีรายละเอียดของเวลาขณะเคลื่อนที่ที่ได้รับการแก้สมการ ดังนั้น ตำแหน่งวงโคจร ณ เวลาเฉพาะใดๆ ยังคงไม่สามารถทราบได้



รูปที่ 2.1 ความผิดพลาดที่เกิดขึ้นของวงโคจร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพื่อจุดประสงค์นี้ ค่าตัวแปรเสริม  $E$  ที่เรียกว่า ค่าตำแหน่งศูนย์กลางวงโคจร ถูกนิยามผ่านสมการ

$$\begin{aligned}\hat{x} &= r \cos \nu =: a(\cos E - e) \\ \hat{y} &= r \sin \nu =: a\sqrt{1-e^2} \sin E\end{aligned}\quad (2.1)$$

หรือเท่ากับ

$$r = a(1 - e \cos E) \quad (2.2)$$

ความหมายของรูปแบบทางเรขาคณิต ของค่า  $E$  ถูกแสดงตัวอย่างโดยรูปที่ 2.1

โดยการใช้โคออดิเนต  $\hat{x}$  และ  $\hat{y}$  ซึ่งแทนค่าตำแหน่งดาวเทียมในระนาบวงโคจร โดยอ้างอิงที่จุดศูนย์กลางของโลก สิ่งหนึ่งที่อาจอธิบายถึงค่าความเร็วที่แท้จริง  $h = |\dot{h}|$  ในรูปแบบฟังก์ชันของค่า  $E$  คือ

$$\begin{aligned}h &= \dot{\hat{x}}\dot{\hat{y}} - \dot{\hat{y}}\dot{\hat{x}} \\ &= a(\cos(E) - e) \cdot a\sqrt{1-e^2} \cos(E)\dot{E} \\ &\quad + a\sqrt{1-e^2} \sin(E) \cdot a \sin(E)\dot{E} \\ &= a^2 \sqrt{1-e^2} \dot{E} (1 - e \cos(E))\end{aligned}\quad (2.3)$$

สามารถทำให้สมการง่ายขึ้นโดยให้

$$h = \sqrt{GM_{\oplus}} a(1 - e^2) \dot{E} \quad (2.4)$$

กำหนดให้

$$(1 - e \cos E)\dot{E} = n \quad (2.5)$$

ค่าเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ ได้เป็น

$$n = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{a^3}} \quad (2.6)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คาบของวงโคจร ได้แก่ ค่าของเวลาช่วงระหว่าง ที่เกิดการเปลี่ยนแปลงของค่าตำแหน่งศูนย์กลางวงโคจร ไป  $2\pi$  หรือ  $360^\circ$  ซึ่งเป็นสัดส่วนต่อค่าพหุคูณของค่าเฉลี่ยการเคลื่อนที่  $n$  และสามารถหาได้จากสมการ

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_\oplus}} \quad (2.7)$$

### 2.3 การแก้สมการเคปเลอร์

สมการของเคปเลอร์นั้นสัมพันธ์กับเวลาที่โคออดิเนต  $\hat{x}$  และ  $\hat{y}$  ในระบบโคจรที่เกี่ยวข้องเนื่องกับตำแหน่งที่ดาวเทียมกวาดมุมไป โดยอ้างอิงตำแหน่งศูนย์กลางของวงโคจร ในกรณีที่ทำให้ได้มาซึ่งค่าตำแหน่งของดาวเทียม ณ เวลา  $t$  ใดๆ สิ่งที่ต้องรู้ได้แก่ เวลาของดาวเทียม ณ จุดที่อยู่ใกล้กับ โลกมากที่สุด ในวงโคจร และแกนระยะจากศูนย์กลางวงโคจรถึงดาวเทียม ณ จุดที่ไกลที่สุดของวงโคจร (Semi-Major Axis) เพื่อคำนวณหาค่าเฉลี่ยของความผิดพลาด ซึ่งอาจหาค่า  $E$  ออกมาได้และสุดท้ายก็จะหาค่า  $\hat{x}$  และ  $\hat{y}$  ได้จากสมการที่ 2.1

สมการเคปเลอร์นั้นสามารถหาได้ แต่อย่างไรก็ตามต้องแก้สมการ โดยการทำซ้ำเท่านั้น ขั้นตอนปกติจะเริ่มค้นด้วยการประมาณค่าของ

$$E_0 = M \text{ หรือ } E_0 = \pi \quad (2.8)$$

และใช้วิธีการของนิวตัน (Newton) ในการคำนวณการถ่วงรอนสมการแบบต่อเนื่อง  $E_i$  จนกว่าผลลัพธ์จะเปลี่ยนไป จนต่ำกว่าจำนวนที่ระบุไว้จากการทำซ้ำรอบหนึ่งๆ ไปถึงรอบต่อไป นิยามฟังก์ชันเสริมว่า

$$f(E) = E - e \sin E - M, \quad (2.9)$$

คำตอบของสมการเคปเลอร์ เทียบเท่ากับการหาค่ารากของ  $f(E)$  สำหรับค่า  $M$  ที่กำหนดให้ การประยุกต์วิธีของนิวตันมาใช้ในจุดประสงค์นี้ การประมาณค่าราก  $E_i$  ของ  $f$  อาจจะได้รับปรับปรุงโดยการคำนวณ

$$E_{i+1} = E_i - \frac{f(E_i)}{f'(E_i)} = E_i - \frac{E_i - e \sin E_i - M}{1 - e \cos E_i} \quad (2.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์อื่น การค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข้อแนะนำ การแสดงนี้ต้องถูกนำมาประเมินค่าด้วย  $E$  ในแบบเรเดียนต์ ( $1$  เรเดียนต์  $= \frac{180^\circ}{\pi}$ ) และจะไม่ใช่ในแบบองศาเพื่อหลีกเลี่ยงค่าผิดพลาดต่างๆ

ถ้ากำหนดค่าเริ่มต้น  $E_0 = M$  กล่าวคือ สถานะข้างบนนั้นเหมาะสมกับค่า  $e$  น้อยๆ เมื่อ  $E$  เปลี่ยนไปจากค่า  $M$  ในรูปแบบของ  $e$  สำหรับค่า  $e > 0.8$  การทำซ้ำจะถูกเริ่มต้นที่  $E_0 = \pi$  เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาระหว่างกระบวนการทำซ้ำ

## 2.4 วงโคจรในอวกาศ

นานมาแล้วที่การเคลื่อนที่ของดาวเทียมถูกนำมาอธิบายในรูปแบบระนาบวงโคจรอ้างอิงตามธรรมชาติ ซึ่งใช้ได้กับรูปแบบธรรมดาเท่านั้น ในการแสดงค่าทั่วไป สามารถหาได้โดยการนำเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $P = A/|A|$  ซึ่งชี้ตรงไปยังจุดใกล้โลกมากที่สุด และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวตั้งฉาก  $Q$  จะตอบสนองต่อความผิดปกติที่แท้จริงของ  $v = 90^\circ$  ด้วยสมการนี้สามารถแสดงตำแหน่งในแบบสามมิติได้โดย

$$\begin{aligned} r &= \hat{x}P + \hat{y}Q \\ &= r \cos vP + r \sin vQ \\ &= a(\cos E - e)P + a\sqrt{1-e^2} \sin EQ \end{aligned} \quad (2.11)$$

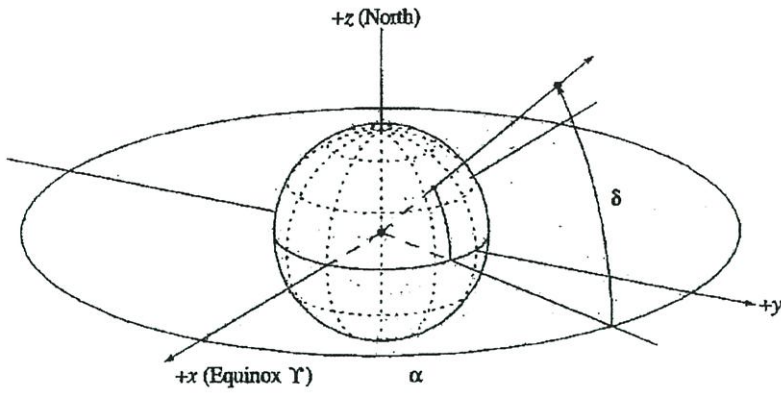
และความเร็ว โดย

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \dot{\hat{x}}P + \dot{\hat{y}}Q \\ &= \frac{\sqrt{GM_\oplus}a}{r} (-\sin EP + \sqrt{1-e^2} \cos EQ) \end{aligned} \quad (2.12)$$

เมื่อ  $a\dot{E} = \sqrt{GM_\oplus}a/r$  เนื่องจากสมการที่ (2.5)

โดย  $G$  คือ ค่าคงที่แรงโน้มถ่วง  $= (6.67259 \pm 0.00085) \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

$M_\oplus$  คือ มวลของโลก  $= 5.974 \times 10^{24} kg$



รูปที่ 2.2 ระบบโคออดิเนตระนาบศูนย์สูตร

ระบบโคออดิเนตสามัญทั้งหมดที่ถูกนำมาใช้อธิบายวงโคจรดาวเทียมที่อยู่ในขอบเขตของโลกเป็นระบบโคออดิเนตระนาบเส้นศูนย์สูตรโลก ซึ่งถูกจัดให้อยู่ในแนวเดียวกันกับแกนหมุนของโลก และเส้นศูนย์สูตร จุดกำเนิดของคัมมันคือจุดศูนย์กลางของโลก แกน  $z$  ชี้ไปทางขั้วโลกเหนือและระนาบเส้นศูนย์สูตร ซึ่งสร้างระบบ  $x-y$  อ่างอิง แกน  $x$  จะอยู่ในแนวเดียวกันกับเวอ์นอลอิควิน็อกซ์ ซึ่งอธิบายทิศทางของดวงอาทิตย์ที่มองเห็นจากโลก ณ จุดเริ่มต้นของฤดูใบไม้ผลิ หรือเทียบเท่ากับ จุดตัดกันของระนาบศูนย์สูตรกับระนาบวงโคจรของโลก ดังรูปที่ 2.2 ตำแหน่งของจุดใดๆในระบบโคออดิเนตระนาบศูนย์สูตร อาจจะถูกระบุโดย โคออดิเนตแบบค่าที่เขียน(Cartesian Coordinates),  $(x,y,z)$  หรือแบบโคออดิเนตเชิงขั้ว  $(\alpha, \delta, r)$  การเปลี่ยนจากระบบโคออดิเนตเชิงทรงกลม(Spherical Coordinates) ไปเป็นระบบโคออดิเนตแบบสามแกน(Cartesian Coordinates)และ ในทางกลับกันนั้นทำได้โดยใช้ความสัมพันธ์พื้นฐาน

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

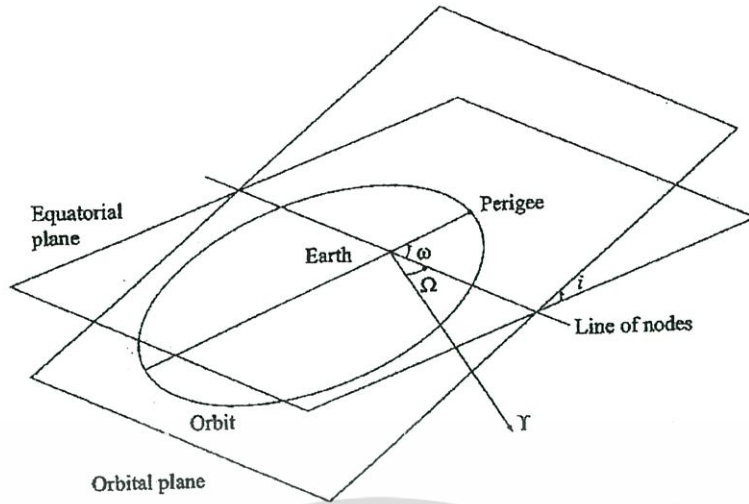
และ

$$\alpha = \arctan \frac{y}{x} \quad \delta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.14)$$

ในที่นี้เส้นทางตามแนววงกลม  $\alpha$  จะต้องถูกเลือกในทิศทางที่ค่า  $(x)$  เท่ากับ  $(\cos \alpha)$  ได้แก่  $-90^\circ < \alpha < +90^\circ$  สำหรับ  $x > 0$  และ  $+90^\circ < \alpha < +270^\circ$  สำหรับ  $x < 0$

ในการอธิบายเพื่อกำหนดทิศทางของระนาบวงโคจร และจุดใกล้โลกที่ขึ้นต่อระบบโคออดิเนตระนาบศูนย์สูตร มุมสามมุมจะถูกนำมาใช้ในการพิจารณา (ดังรูปที่ 2.3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ประโยชน์ในการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.3 แสดงองค์ประกอบวงโคจรดาวเทียม ได้แก่  $i$ ,  $\Omega$  และ  $\omega$

$i$  คือ เส้นลาดเอียงจากมุมของการตัดกันของระนาบโคจรและเส้นศูนย์สูตร แนวเอียงที่มีค่ามากกว่า  $90^\circ$  หมายถึง การเคลื่อนที่ของดาวเทียมมีทิศทางถอยกลับ โดยทิศทางในการหมุนรอบโลกของดาวเทียมสวนทางกับทิศทางการหมุนของโลก

$\Omega$  คือ มุมระหว่าง Vernal Equinox และจุดใดๆบนวงโคจรขณะที่ดาวเทียมข้ามเส้นศูนย์สูตร จากใต้ไปเหนือ

$\omega$  คือ มุมระหว่างทิศทางของ โหนดขาขึ้น กับจุดที่ดาวเทียมใกล้โลกมากที่สุด (Perigee)

ตำแหน่งดาวเทียมในอวกาศอาจถูกแสดงออกมาในรูปแบบของฟังก์ชันของมุมเหล่านี้ ระบบระนาบโคจรที่ซึ่งนิยาม โดยเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $P, Q$  และ  $W=h/h$  โคออดิเนทที่ได้ออกมาจะมีลักษณะเป็น

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = (r \cos \nu, r \sin \nu, 0) \quad (2.15)$$

ในระบบโคออดิเนทซึ่งหมุนรอบ  $W$  ด้วยมุม  $-\omega$  (ได้แก่ แกน  $x'$  ไปยัง โหนดขาขึ้น) จะได้โคออดิ-เนทออกมาเป็น

$$(x', y', z') = (r \cos (\nu + \omega), r \sin (\nu + \omega), 0) \quad (2.16)$$

และเมื่อทำการแปลงออกมา จะได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$r \begin{pmatrix} \cos(\nu + \omega) \\ \sin(\nu + \omega) \\ 0 \end{pmatrix} = R_z(-\omega) r \begin{pmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

ในรูปแบบของตำแหน่งควาเทียมในโคออดิเนตระนาบศูนย์สูตร รูปแบบการหมุนในลักษณะอื่นๆ ก็เป็นสิ่งจำเป็น แบบแรกคือ การหมุนรอบแกน  $x'$  ด้วยมุม  $-i$  ถูกนำมาใช้เพื่อให้ได้โคออดิเนตออกมาในระนาบศูนย์สูตร พิจารณาจากเส้นแนวโนด การหมุนอีกรูปแบบคือ การหมุนรอบแกน  $z''$  ด้วยมุม  $-\Omega$  ซึ่งจะให้ผลของโคออดิเนตระนาบศูนย์สูตรที่พิจารณาจากทิศทางของอิควีเนอกซ์

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_z(-\Omega) R_x(-i) R_z(-\omega) r \begin{pmatrix} \cos \nu \\ \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

ในการประเมินค่าจะได้

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos u \cos \Omega - \sin u \sin i \sin \Omega \\ \cos u \sin \Omega + \sin u \cos i \cos \Omega \\ \sin u \sin i \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

ด้วยค่า  $u = \omega + \nu$  เป็นมุมระหว่าง  $r$  และเส้นของโนด การพิจารณาที่คล้ายคลึงกันนำไปสู่การแสดงค่าโคออดิเนตของเวกเตอร์  $P$  และ  $Q$  ที่ตอบสนองต่อจุดระยะทางหนึ่งหน่วยด้วยค่าระยะจากศูนย์กลางวงโคจรที่แท้จริงของ  $0^\circ$  และ  $90^\circ$

$$P = \begin{pmatrix} + \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \cos i \sin \Omega \\ + \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos i \cos \Omega \\ + \sin \omega \sin i \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

และ

$$Q = \begin{pmatrix} - \sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \cos i \sin \Omega \\ - \sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos i \cos \Omega \\ + \cos \omega \sin i \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เวกเตอร์ที่สาม ( $W$ ) จะแสดงออกมาเป็น

$$W = \begin{pmatrix} + \sin i \sin \Omega \\ - \sin i \cos \Omega \\ + \cos i \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

รู้จักกันในรูปแบบของเวกเตอร์คอลัมน์ของเมทริก

$$(P, Q, W) = R_z(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega) \quad (2.23)$$

ซึ่งจะมีประโยชน์เมื่อ โคออดิเนตต้องถูกแปลงระหว่างระนาบเส้นศูนย์สูตร และระบบ โคออดิเนตระนาบโคจร เวกเตอร์ทั้งสามจะถูกอ้างอิงเป็นแกนเขียนเวกเตอร์



## บทที่ 3

# วงจรรองแบบกาลมานสำหรับการประมาณ

### 3.1 กล่าวนำ

บทนี้จะกล่าวถึงหลักการเบื้องต้นของระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ (Tracking Radar) และความสำคัญของการประมาณซึ่งมีการนำมาใช้ในระบบเรดาร์ดังกล่าว การประมาณนั้นจะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในเรื่องความแม่นยำของระบบเรดาร์ติดตามวัตถุซึ่งต้องการความแม่นยำค่อนข้างสูง วิธีการประมาณโดยใช้วงจรรองแบบกาลมาน ซึ่งจะถูกลำดับต่อไป

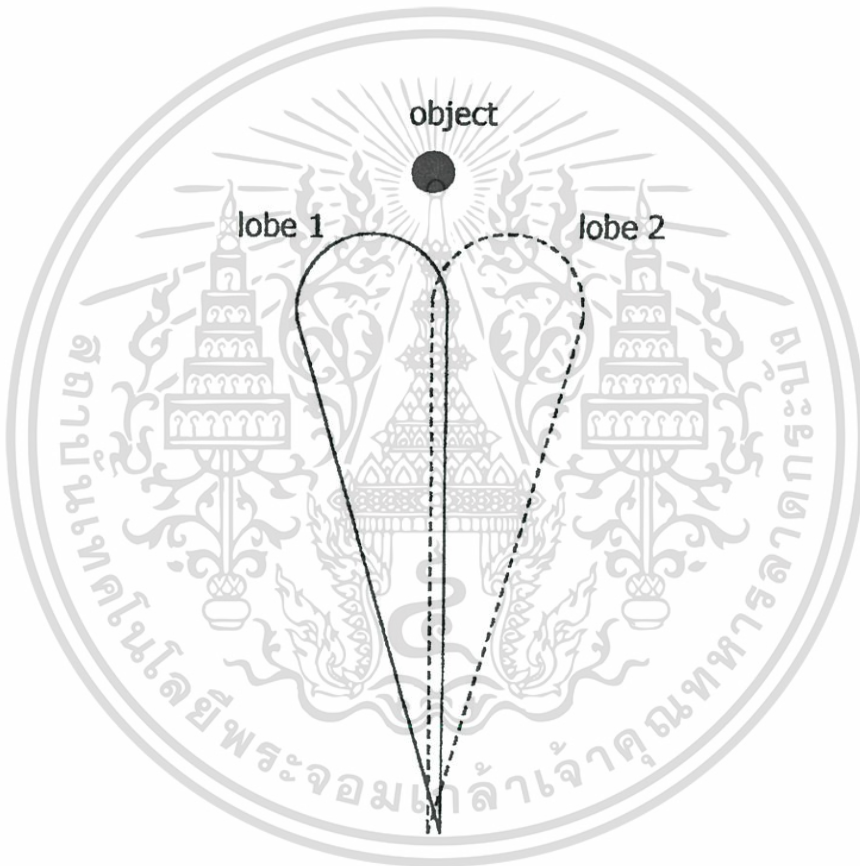
### 3.2 ระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ

ระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุจะทำหน้าที่ในการวัดตำแหน่งการเคลื่อนที่ของวัตถุและสามารถที่จะคาดเดาเส้นทางการเคลื่อนที่หรือตำแหน่งต่อไปที่วัตถุจะปรากฏขึ้นได้ ซึ่งข้อมูลที่ได้จากเรดาร์ตามร่องวัตถุประกอบด้วยตำแหน่ง, ความเร็วหรือความเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุก็ได้ ความผิดพลาดเชิงมุมของเรดาร์ตามร่องวัตถุนั้นมีผลค่อนข้างมากต่อความแม่นยำที่ได้ เนื่องจากในระยะ 10 กิโลเมตรนั้น หากมีความผิดพลาดเชิงมุมเพียง 1 องศา อาจเป็นสาเหตุให้มีการคำนวณระยะทางผิดพลาดได้ถึง 150 เมตร

ระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุยังสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 แบบคือ แบบที่มีการตรวจจับการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างต่อเนื่อง (Continuous) และแบบที่มีการตรวจจับการเคลื่อนที่เฉพาะขณะที่กำลังทำการกวาด (Track-While-Scan) ระบบเรดาร์ติดตามวัตถุแบบที่มีการตรวจจับการเคลื่อนที่เฉพาะขณะที่กำลังทำการกวาดนั้น จะไม่ทำการตรวจจับการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างต่อเนื่อง แต่จะมีการตรวจสอบเป็นระยะๆ และเก็บข้อมูลไว้ ซึ่งทำให้สามารถตรวจจับการเคลื่อนที่ของวัตถุได้พร้อมกันหลายๆ จุด แต่ความแม่นยำมักจะน้อยกว่าระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุที่มีการตรวจจับการเคลื่อนที่ของวัตถุอย่างต่อเนื่อง เรดาร์ตามร่องวัตถุที่ทำงานลักษณะนี้มักใช้ในภารกิจทางการทหาร เช่น การนำร่องให้กับระบบป้องกันภัยทางอากาศยาน เป็นต้น หลักการในการส่งสัญญาณความถี่ในการตรวจจับการเคลื่อนที่ของวัตถุ ในเรดาร์ตามร่องวัตถุ โดยทั่วไปแบ่งได้เป็น 3 แบบ คือ

### 3.2.1 ระบบที่มีการสลับลำคลื่น (Sequential Lobing)

เรดาร์ตามร่องวัตถุที่ใช้ลักษณะการส่งคลื่นแบบนี้จะมีจานสายอากาศอยู่ด้วยกัน 4 ส่วน โดย 2 ส่วนแรกจะใช้ในการตรวจวัดตำแหน่งของวัตถุในแนวตั้ง อีก 2 ส่วนจะใช้ในการตรวจวัดตำแหน่งของวัตถุในแนวนอน จานสายอากาศนั้นมีลักษณะแยกจากกัน หรืออาจเป็นแบบเฟสอาร์เรย์ก็ได้ หลักการทำงานตรวจวัดตำแหน่งของวัตถุในเรดาร์ตามร่องวัตถุที่ใช้ระบบนี้จะแยกการตรวจวัดออกเป็นสองแนว คือการตรวจวัดในแนวนอนและแนวตั้ง ในที่นี้จะอธิบายการตรวจวัดในแนวนอน ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 การสลับลำคลื่นของระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ

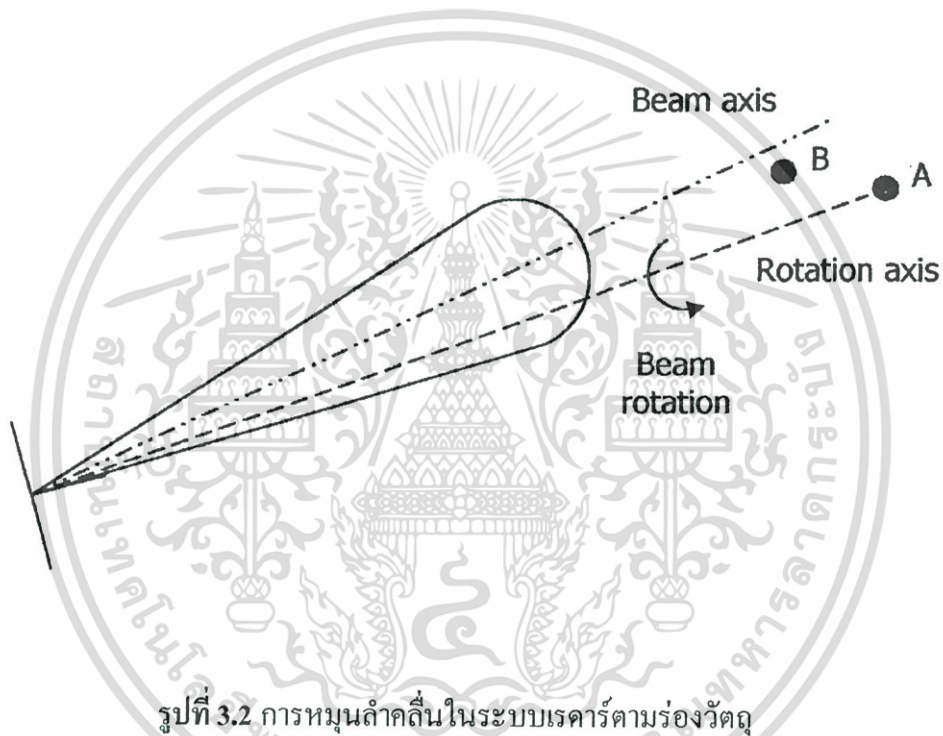
คลื่นจะถูกส่งออกไป 2 ทิศทางที่แตกต่างกัน โดยสลับการส่งกลับไปมาด้วยความเร็วสูงตลอดเวลา จากนั้นวงจรรับสัญญาณของคลื่นทั้งสองชุดจะเปรียบเทียบระดับสัญญาณที่รับได้ ในกรณีที่จานสายอากาศมีกลไกในการหมุนงานได้นั้น หากสัญญาณที่รับได้จากคลื่นลูบที่ 1 มากกว่าลูบที่ 2 จานสายอากาศจะถูกหมุนไปทางซ้าย จนกระทั่งคลื่นที่ได้ทั้งสองลูบจะมีค่าเท่ากันนั้น

แสดงว่า ตำแหน่งของวัตถุอยู่ตรงกลางของจานสายอากาศแล้ว และระบบเรดาร์จะวัดมุมที่ได้จากการคำนวณจากอุปกรณ์กลไกดังกล่าว เพื่อเป็นตัวคำนวณตำแหน่งของวัตถุต่อไป

ในบางครั้ง ตัวรับสัญญาณนั้นอาจประกอบด้วยฟีดฮอร์น(Feed Horn) จำนวน 5 ตัว วางเรียงบนจานสายอากาศ โดย 2 ใน 5 ตัวจะถูกนำมาใช้ในการรับสัญญาณเพื่อวัดตำแหน่งของวัตถุในแนวนอน และอีก 2 ตัวจะถูกนำมาใช้ในการรับสัญญาณเพื่อวัดตำแหน่งของวัตถุในแนวตั้ง อีก 1 ตัวที่เหลือจะเป็นตัวส่งสัญญาณ

### 3.2.2 ระบบการทำงานที่มีการหมุนของลำคลื่น (Conical Scan)

วิธีการนี้จะคล้ายกับการสลับลำคลื่นที่ได้กล่าวไปแล้ว แต่จะเปลี่ยนจากการสลับการส่งคลื่น ไปเป็นการส่งคลื่นด้วยลำคลื่นเดียว รูปที่ 3.2 แสดงการส่งคลื่นแบบที่มีการหมุนลำคลื่น



รูปที่ 3.2 การหมุนลำคลื่นในระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ

แนวแกนของการหมุนลำคลื่น (Rotation Axis) นั้นจะอยู่คนละแนวกับแกนของกึ่งกลางลำคลื่น (Beam Axis) พิจารณาจากรูปที่ 3.2 กรณีที่วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง A สัญญาณที่สะท้อนกลับ (Echo) จากวัตถุซึ่งรับได้ในมุมของการหมุนต่างๆ จะถูกนำมารวมเข้าด้วยกัน ขนาดของสัญญาณที่ได้จะมีค่าๆ หนึ่งซึ่งขึ้นอยู่กับรูปร่างของลำคลื่น มุมระหว่างแกนกลางของลำคลื่นกับแกนการหมุนของลำคลื่น และมุมระหว่างแนวแกนของวัตถุกับมุมของแกนการหมุนลำคลื่น สัญญาณที่ได้จะถูกส่งเข้าไปยังวงจรควบคุมเซอร์โวมอเตอร์ (Servo-Control) เพื่อคำนวณและทำการปรับตำแหน่งของจานสายอากาศ จานสายอากาศจะถูกปรับเปลี่ยนตำแหน่งจนกระทั่งแนวแกนของวัตถุอยู่ในแนวเดียวกับแกนหมุน ซึ่งคือตำแหน่ง B ดังรูปที่ 3.2 เมื่อตำแหน่งของวัตถุอยู่ในแนวแกนเดียวกับแกนของการหมุนแล้วจะทำให้ผลรวมของสัญญาณที่สะท้อนจากวัตถุซึ่งรับได้

เอกสารในมุมมองการหมุนต่างๆ นั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ นั่นหมายถึงจุดกึ่งกลางของจานสายอากาศขณะนั้นวางการคำนวณว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

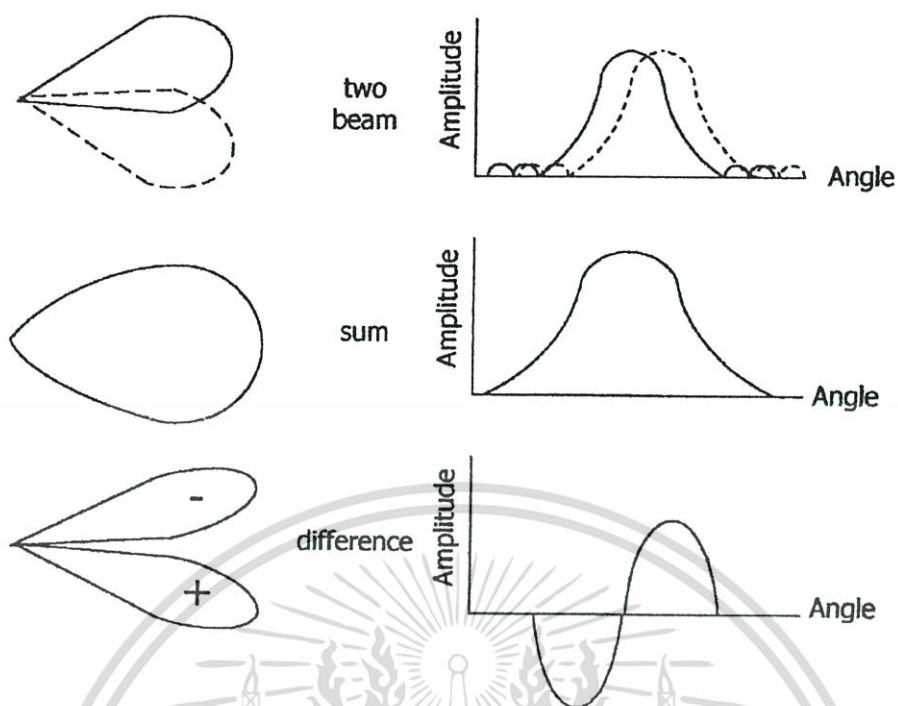
อยู่ในตำแหน่งซึ่งตรงกันกับตำแหน่งของวัตถุ จากนั้นมุมของงานสายอากาศที่วัดได้จากอุปกรณ์กลไกจะถูกส่งไปยังส่วนของการคำนวณระยะพิกัดของวัตถุต่อไป

### 3.2.3 ระบบการทำงานโดยส่งคลื่นแบบพัลส์เดียว (Mono Pulse)

วิธีการของการส่งคลื่นแบบที่มีการสลับลำคลื่นและแบบที่มีการหมุนลำคลื่นดังที่ได้กล่าวมาในส่วนที่แล้วนั้น การส่งคลื่นจะถูกส่งออกไปเป็นช่วงๆ ที่เรียกว่าพัลส์ ซึ่งเพื่อความแม่นยำแล้ว อาจต้องใช้จำนวนพัลส์ตั้งแต่ 4 พัลส์ขึ้นไป ซึ่งปัญหาที่ตามมาก็คือ หากในขณะที่ส่งพัลส์สัญญาณพัลส์ใดพัลส์หนึ่งออกไปแล้ว สัญญาณที่สะท้อนจากวัตถุเกิดความไม่แน่นอนขึ้น เช่นช่วงเวลาที่รับสัญญาณสะท้อนกลับล่าช้าไปเล็กน้อยเนื่องจากการดูดกลืนคลื่นหรือพื้นที่หน้าตัดของวัตถุมีขนาดเล็ก ปัญหาดังกล่าวจะก่อให้เกิดกระทบอย่างมากต่อระบบ ซึ่งจะทำให้เกิดความผิดพลาดขึ้นได้จากการตรวจวัดตำแหน่งของวัตถุ

อย่างไรก็ตาม ปัญหาดังกล่าวจะไม่ส่งผลกระทบต่อความถูกต้องของระบบมากนักถ้าหากว่าการส่งพัลส์นั้นมีลักษณะแบบพัลส์เดียว วิธีการนี้จะทำการส่งพัลส์เดียวกันนั้นออกไปในทิศทางต่างๆทำให้เกิดลักษณะที่คล้ายกับเป็นการส่งสัญญาณหลายๆลำคลื่นจากงานสายอากาศในเวลาเดียวกัน รูปที่ 3.3 แสดงการส่งคลื่นแบบพัลส์เดียว

ที่ตำแหน่งต่างๆของวัตถุนั้น ขนาดและเฟสของคลื่นที่สะท้อนกลับมาจากวัตถุจะถูกนำมารวมกันเพื่อหาส่วนต่างของระดับแรงดันที่ได้จากลำคลื่นในทิศทางต่างๆ โดยในรูปที่ 3.3 แสดงการส่งลำคลื่นใน 2 ทิศทางพร้อมๆกัน และเมื่อใดก็ตามที่วัตถุเคลื่อนที่มาอยู่บริเวณกึ่งกลางระหว่างลำคลื่นทั้งสองจะทำให้ผลต่างของระดับสัญญาณที่รับได้จากลำคลื่นทั้งสองนั้นมีค่าเท่ากับศูนย์ ในกรณีที่มีการจางหายของคลื่น (Fading) ที่สะท้อนออกมาจากวัตถุนั้น ผลกระทบที่เกิดขึ้นกับการรับสัญญาณในทิศทางทั้งสองจะเท่ากัน ดังนั้นการจางหายของคลื่นจึงไม่ส่งผลกระทบต่อความถูกต้องของระบบแต่อย่างใด



รูปที่ 3.3 การส่งคลื่นแบบพัลส์เดียวในระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ

### 3.3 เหตุผลที่ต้องมีวงจรกรองสำหรับกะประมาณตำแหน่งสำหรับระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ

เมื่อเราทำการศึกษาถึงปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นกับระบบที่เรากำลังพิจารณา เราอาจทราบผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้โดยอาศัยวิธีการ 2 แบบคือ (1) การวัดด้วยเครื่องมือวัด และ (2) การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งได้มาจากทฤษฎีและกฎเกณฑ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบที่เราพิจารณา

#### (1) การวัดด้วยเครื่องมือวัด

ในการสังเกตผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นจากระบบที่เราทำการพิจารณา เครื่องมือวัดได้ถูกสร้างขึ้นโดยจะให้สัญญาณหรือข้อมูลทางด้านเอาต์พุท (Output) ที่เป็นสัดส่วนที่สอดคล้องกับตัวแปรทางด้านอินพุท (Input) ของระบบที่เราสนใจ สัญญาณเอาต์พุทและสัญญาณอินพุทเป็นเพียงสิ่งเดียวที่เราสามารถมองเห็นได้จากการทำงานทั้งหมดของระบบ

(2) การใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งได้มาจากทฤษฎีและกฎเกณฑ์ที่เกี่ยวข้องกับระบบที่เราพิจารณา

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่ถูกออกแบบมาเพื่อการศึกษาถึงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นจากการทำงานของระบบที่เรากำลังพิจารณา เราสามารถศึกษาถึงโครงสร้างและการตอบสนองของระบบได้โดยเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ต่างๆ ให้สอดคล้องกับสิ่งที่เรากำลังพิจารณา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทั้งนี้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะต้องได้มาจากทฤษฎีที่สัมพันธ์กับปรากฏการณ์ที่เรากำลังพิจารณาอยู่

มีเหตุผลด้วยกัน 3 ประการที่แสดงให้เห็นว่า เหตุใดการประมาณ (Estimation) จึงมีความจำเป็นในการนำมาใช้พิจารณาถึงผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในระบบนอกเหนือไปจากวิธีการวัดและการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งได้มาจากทฤษฎีและกฎเกณฑ์ที่เกี่ยวข้อง คือ

### 1. ไม่มีแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใดที่มีความสมบูรณ์แบบ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งได้มาจากทฤษฎีต่างๆ มักมีข้อจำกัดในการใช้งานอยู่ในตัวเอง เนื่องจากมันไม่สามารถแทนคุณลักษณะต่างๆ ของระบบได้อย่างครบถ้วนโดยแท้จริง แม้แต่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่แทนทฤษฎีทางกลศาสตร์ของนิวตัน (Newtonian Physics) ก็ยังถือว่าเป็นเพียงการประมาณค่าที่ใกล้เคียงความเป็นจริงเท่านั้น ซึ่งใช้ได้กับกรณีที่มีการเคลื่อนที่ของวัตถุมีความเร็วต่ำกว่าแสงมากๆ แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ทฤษฎีต่างๆ สามารถให้ความถูกต้องได้ดีในระดับหนึ่ง ซึ่งแท้จริงแล้วอาจยังมีสัมประสิทธิ์หรือตัวแปรอื่นๆ อีกมากที่ถูกมองข้ามและไม่ได้รับการพิจารณา

### 2. ปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในระบบหนึ่งๆ มักได้รับผลกระทบจากระบบอื่นๆ

ในการศึกษาถึงปรากฏการณ์ในระบบหนึ่งๆ นั้น ในความเป็นจริงเราไม่สามารถแยกการพิจารณาจากระบบที่เรากำลังสนใจนั้นออกโดยลำพัง เนื่องจากระบบอื่นๆ อาจเข้ามามีส่วนเกี่ยวข้องโดยที่เราอาจมองข้ามไป เช่น หากเราต้องการปรับปรุงมุมในการเลี้ยวของอากาศยานในขนาดที่เราทราบแน่ชัด แต่การตอบสนองที่แท้จริงอาจต่างจากที่เราต้องการเนื่องจากได้รับผลกระทบจากกระแสลม ความผิดพลาดจากระบบควบคุม เป็นต้น

### 3. ไม่มีเครื่องมือวัดใดที่สมบูรณ์แบบและให้ข้อมูลที่ถูกต้องอย่างสมบูรณ์

การสร้างเครื่องมือวัดชนิดต่างๆ มักพบข้อจำกัดของตัวเอง ไม่ว่าจะเป็นขนาด, น้ำหนัก, ความสามารถของวัสดุ หรือแม้กระทั่งงบประมาณที่ต้องใช้ ส่งผลให้ในทางปฏิบัติแล้วเครื่องมือวัดไม่สามารถให้ข้อมูลที่เที่ยงตรงได้อย่างสมบูรณ์ แต่มักมีความผิดพลาดเกิดขึ้นปะปนอยู่ด้วย

เมื่อเราลองพิจารณาถึงระบบการวัด กับการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ต่างๆ ทางกายภาพโดยอาศัยทฤษฎีที่อยู่ในรูปแบบของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวข้างต้นแล้ว เราจะพบว่า ผลที่ได้จากระบบการวัดและผลที่ได้จากการคำนวณ โดยอาศัยทฤษฎีที่เกี่ยวข้องมักมีข้อผิดพลาดซึ่งมักทำให้ได้ข้อมูลที่คลาดเคลื่อนจากความเป็นจริงไม่มากนักน้อย จึงมีคำถามเกิดขึ้นว่า ทำอย่างไรเราจะลดความผิดพลาดนั้นลงได้เพื่อให้ได้ข้อมูลที่ใกล้เคียงความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น ด้วยเหตุผลนี้วิธีประมาณจึงได้ถูกนำมาใช้โดยอยู่ในรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่ง

กลไกการทำงานของ การประมาณเป็นการผสมผสานระหว่างข้อมูลที่ได้จากการวัด (Measurement) และข้อมูลที่ได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับระบบ ในไม่ช้ากรณีใดๆ ที่สนใจ ออกทั้งห้ามมิให้คิดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งหากมีการนำไปใช้

กรณีของระบบเรดาร์ตามร่องวัตถุ นั้น แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งแทนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุจะถูกนำมาใช้ร่วมกับข้อมูลที่ได้จากการวัดซึ่งมาจากเรดาร์ตามร่องวัตถุ

วงจรกรองแบบคาลมาลเป็นวิธีที่ใช้ในการประมาณแบบหนึ่งที่ทำให้ผลดีและยังใช้กันอยู่ในปัจจุบัน ซึ่งความเป็นมาและรายละเอียดในการทำงานของวงจรกรองแบบคาลมาล จะ ได้กล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

### 3.4 การตามร่องวัตถุโดยวงจรกรองแบบคาลมาล

#### 3.4.1 ความเป็นมา

ในปี ค.ศ. 1960 R.E. Kalman ได้นำเสนองานวิจัยเกี่ยวกับวงจรกรองแบบเชิงเส้น (Linear Filter) ซึ่งในช่วงเวลานั้นมีการพัฒนาในเรื่องเกี่ยวกับการประมวลผลสัญญาณดิจิทัลกันอย่างกว้างขวาง วงจรกรองแบบคาลมาลได้รับความสนใจเป็นอย่างมากและได้มีการนำมาศึกษาวิจัยเพื่อประยุกต์ใช้ โดยเฉพาะในงานเกี่ยวกับการควบคุมตำแหน่งและการนำร่อง

วงจรกรอง (Filter) โดยแท้จริงแล้วอาจจะหมายถึงกระบวนการประมวลผลข้อมูล (Data Processing) ถึงแม้ว่าโดยทั่วไปเราอาจจะมองวงจรกรอง (Filter) เป็นเสมือนกล่องดำซึ่งภายในประกอบด้วยวงจรไฟฟ้า แต่ในความเป็นจริงแล้ว ในการปฏิบัติเราพบว่าวงจรกรอง (Filter) เป็นเพียงโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในหน่วยประมวลผลกลาง (Central Processor) ที่มีการทำงานในเชิงเวลาแบบสุ่มสัญญาณเป็นช่วงๆ หรือคิสกรีท (Discrete) มากกว่าที่จะมีการทำงานกับสัญญาณอย่างต่อเนื่อง (Continuous)[5]

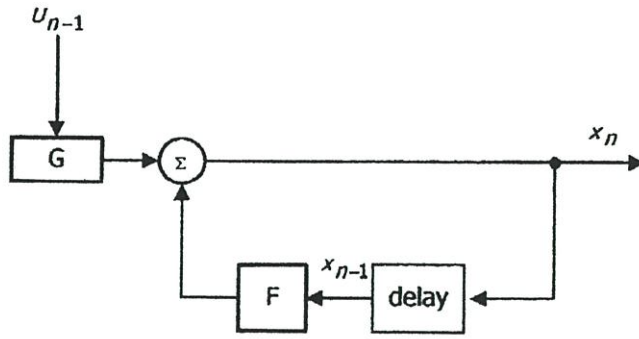
วงจรกรองแบบคาลมาล มีรูปแบบการทำงานแบบย้อนกลับ (Recursive) โดยนำข้อมูลที่ได้จากการทำงานในขั้นตอนที่ผ่านมากลับมาใช้ในการประมวลผลในขั้นตอนปัจจุบัน

#### 3.4.2 แบบจำลองของวงจรกรองแบบคาลมาล

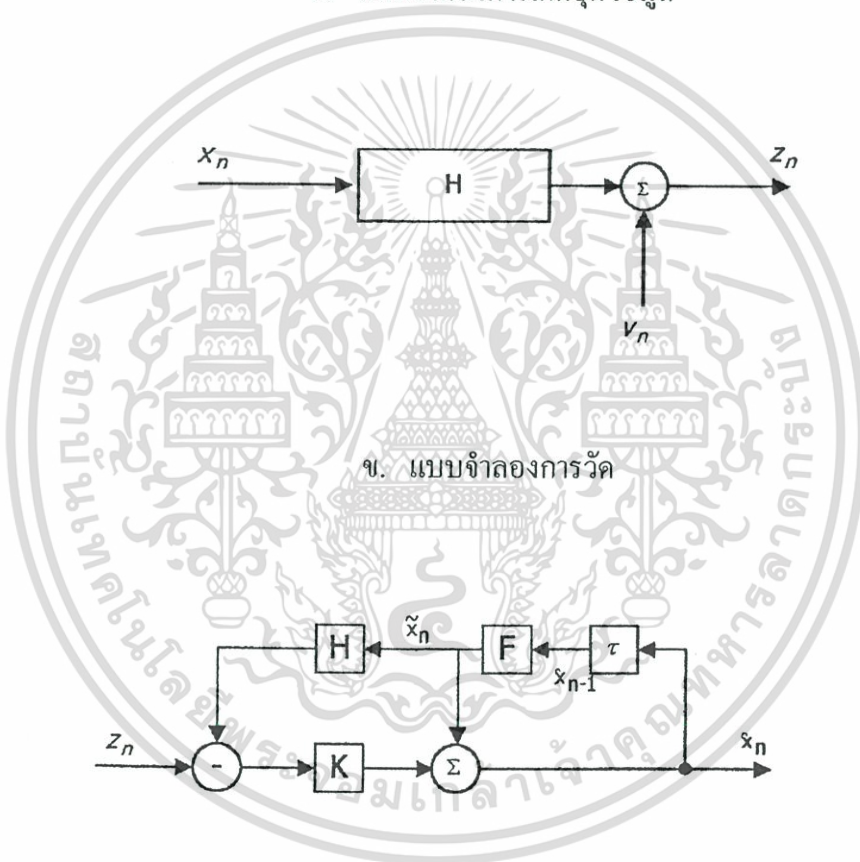
โดยทั่วไปแล้วแบบจำลองของวงจรกรองแบบคาลมาลสามารถแยกออกได้เป็น 3 ส่วนหลักๆ คือ

- 1) แบบจำลองการเกิดชุดข้อมูล (State Model)
- 2) แบบจำลองการวัด (Measurement Model)
- 3) แบบจำลองการประมาณ (State Estimation Model)

ดังแสดงในรูปที่ 3.4



ก. แบบจำลองการเกิดชุดข้อมูล



ข. แบบจำลองการวัด

ค. แบบจำลองการกะประมาณ

รูปที่ 3.4 แบบจำลองของวงจรรองแบบคาลมาด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4.2.1 แบบจำลองการเกิดชุดข้อมูล (State Model) คือแบบจำลองที่ใช้แทนปรากฏการณ์ที่ก่อให้เกิดชุดข้อมูล อาทิเช่น ตำแหน่งของวัตถุ ความเร็วในกาเคลื่อนที่ ความเร่งในการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นข้อมูลที่แท้จริงของวัตถุ โดยมีรายละเอียดต่างๆและเขียนในรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$x_n = Fx_{n-1} + GU_{n-1} \quad (3.1)$$

- $x_n, x_{n-1}$  คือ เวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่ที่แท้จริงของวัตถุ(State Vector) ที่เวลา  $n$  และ  $n-1$  ตามลำดับ ซึ่งอาจประกอบด้วย ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่ง
- $F$  คือ เมตริกซ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Transition Metric)
- $G$  คือ เมตริกซ์ที่ใช้แทนสมการความไม่แน่นอนในการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Transition Uncertainly Metric)
- $U_{n-1}$  คือ เวกเตอร์แทนความไม่แน่นอนในการเคลื่อนที่ของวัตถุ(Model Uncertainly Vector) ที่เวลา  $n-1$  เช่น การคลาดเคลื่อนของตำแหน่ง, ความเร็ว และ ความเร่ง

ความไม่แน่นอนในการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Model Uncertainly) ในที่นี้จะถูกพิจารณาว่ามีรูปแบบการกระจายแบบเกาส์เซียน (Gaussian Distribution) โดยที่

$$E\{U_n\} = 0 \text{ และ } E\{U_n U_n^T\} = Q_n \quad (3.2)$$

3.4.2.2 แบบจำลองของการวัด (Measurement Model) คือแบบจำลองที่แทนรูปแบบการได้มาของข้อมูลที่วัดได้ โดยมีรายละเอียดต่างๆ และเขียนในรูปแบบสมการได้ดังนี้

$$Z_n = Hx_n + v_n \quad (3.3)$$

- $Z_n$  คือ เวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ได้จากการวัดของเรดาร์ (Measurement Vector)
- $H$  คือ เมตริกแทนสมการของการวัด (Observation Metric)
- $v_n$  คือ เวกเตอร์แทนความผิดพลาดจากการวัดของเรดาร์ (Measurement Noise Vector)

โดยที่ขนาดของความผิดพลาดจากการวัดหรือเวกเตอร์  $v_n$  (Measurement Noise) ในที่นี้จะถูกพิจารณาว่ามีรูปแบบการกระจายเป็นแบบเกาส์เซียน (Gaussian Distribution) โดยที่เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E\{v_n\} = 0 \text{ และ } E\{v_n v_n^T\} = R_n \quad (3.4)$$

3.4.2.3 แบบจำลองการประมาณ (State Estimation Model) เป็นส่วนการประมาณชุดข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลา  $n$  ซึ่งแทนด้วย  $\hat{x}_n$  จากรูปที่ 3.1 (ข) สามารถเขียนในรูปสมการได้เป็น

$$\hat{x}_n = \tilde{x}_n + K_n(z_n - H\tilde{x}_n) \quad (3.5)$$

โดยที่

$K_n$  คือ คาลมาลเกน (Kalman Gain) เป็นเวกเตอร์ในการชดเชยความผิดพลาดสำหรับการประมาณ (Estimation)

$\tilde{x}_n$  คือ เวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่ที่ได้การทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ (การประมาณครั้งแรกแบบคร่าวๆ หรือเรียกว่า Prediction) โดยอาศัยสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่ง

$$\tilde{x}_n = F\hat{x}_{n-1} \quad (3.6)$$

สมการที่ (3.6) เรียกว่าสมการของการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Prediction Equation) ที่เวลา  $n$  ซึ่งจะได้ข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุจากการทำนายเป็น  $\tilde{x}_n$  โดยอาศัยการคำนวณจากชุดข้อมูลจากการประมาณ (Estimation) ที่เวลา  $n-1$  หรือ  $\hat{x}_{n-1}$  ลองพิจารณาจากสมการที่(3.1) จะพบว่าทางปฏิบัติเราจะไม่สามารถทราบรูปแบบความไม่แน่นอนในการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ ดังนั้นเวกเตอร์  $U_{n-1}$  และเมตริกซ์  $G$  ดังในสมการที่(3.1) จึงไม่ทราบค่าที่จะนำมาพิจารณา ด้วยเหตุนี้สมการของการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Prediction Equation) ที่แสดงใน (3.6) จึงไม่ปรากฏเวกเตอร์และเมตริกซ์ดังกล่าว

### 3.4.3 การทำงานของวงจรกรองแบบคาลมาล

หลักการการทำงานจะอยู่ในลักษณะการลดขนาดโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการประมาณ (Estimation Error Covariance หรือเรียกว่า Posterior Covariance) ให้ต่ำที่สุดซึ่งอาจเขียนได้ในรูป

$$E\{e_n e_n^T\} \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $e_n$  คือค่าผิดพลาดจากการประมาณ (Estimation Error) ซึ่ง

$$e_n = x_n - \hat{x}_n \quad (3.8)$$

$x_n$  คือ เวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่ที่แท้จริงของวัตถุ

$\hat{x}_n$  คือ เวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ได้จากการประมาณซึ่งได้จากการทำงานของวงจรกรองแบบคาลมาล

ในการประมาณของวงจรกรองแบบคาลมาล จะอาศัยข้อมูลการเคลื่อนที่ที่ได้จากการทำนาย, ข้อมูลที่ได้จากการวัดของเรดาร์ และตัวถ่วงน้ำหนัก หรือเรียกว่าคาลมาลเกน (Kalman Gain) ดังสมการที่(3.5) เมื่อพิจารณาสมการที่ (3.7) และ (3.8) จะได้

$$E\{e_n e_n^T\} = E\{(x_n - \hat{x}_n)(x_n - \hat{x}_n)^T\} \quad (3.9)$$

แทนสมการที่(3.5)ลงในสมการที่(3.9)

$$\begin{aligned} E\{e_n e_n^T\} &= E\{(x_n - \tilde{x}_n - K_n(z_n - H\tilde{x}_n))(x_n - \tilde{x}_n - K_n(z_n - H\tilde{x}_n))^T\} \\ E\{e_n e_n^T\} &= E\{(x_n - \tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\} \\ &\quad + E\{(K_n(z_n - H\tilde{x}_n))(K_n(z_n - H\tilde{x}_n))^T\} \\ &\quad - E\{(x_n - \tilde{x}_n)(K_n(z_n - H\tilde{x}_n))^T\} \\ &\quad - E\{(K_n(z_n - H\tilde{x}_n))(x_n - \tilde{x}_n)^T\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

กำหนดให้

$$\tilde{P}_n = E\{(x_n - \tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\} \quad (3.11)$$

$\tilde{x}_n$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (3.11) เป็นเวกเตอร์แทนชุดข้อมูลของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ได้มาจากการประมาณอย่างคร่าวๆ ในครั้งแรก (Prediction) โดยอาศัยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้มาจากสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ ส่วน  $x_n$  นั้นคือเวกเตอร์ที่แทนชุดข้อมูลการเคลื่อนที่ที่แท้จริงของวัตถุ ดังนั้นเทอม  $x_n - \tilde{x}_n$  จึงแทนความผิดพลาดจากการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วัตถุที่เราจึงเรียก  $\tilde{P}_n$  ว่าเป็นโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Prediction Error Covariance หรือเรียกว่า Prior Covariance)

แทนที่สมการที่(3.11)ลงในสมการที่(3.10)จะได้เป็น

$$\begin{aligned} E\{e_n e_n^T\} &= \tilde{P}_n + K_n E\{(z_n - H\tilde{x}_n)(z_n - H\tilde{x}_n)^T\} K_n^T \\ &\quad - E\{(x_n - \tilde{x}_n)(z_n - H\tilde{x}_n)^T\} K_n^T \\ &\quad - K_n E\{(z_n - H\tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

แทน  $z_n$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่(3.12)ด้วยสมการที่(3.3)จะได้

$$\begin{aligned} E\{e_n e_n^T\} &= \tilde{P}_n + K_n E\{(Hx_n + v_n - H\tilde{x}_n)(Hx_n + v_n - H\tilde{x}_n)^T\} K_n^T \\ &\quad - E\{(x_n - \tilde{x}_n)(Hx_n + v_n - H\tilde{x}_n)^T\} K_n^T \\ &\quad - K_n E\{(Hx_n + v_n - H\tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

พิจารณาแทน  $E\{v_n v_n^T\}$  ที่ปรากฏอยู่ในสมการที่ (3.13) ด้วย  $R_n$  ในสมการที่ (3.4) จะได้

$$\begin{aligned} E\{e_n e_n^T\} &= P_n + K_n H E\{(x_n - \tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\} H^T K_n^T + K_n R_n K_n^T \\ &\quad - E\{(x_n - \tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\} H^T K_n^T \\ &\quad - K_n H E\{(x_n - \tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

จากสมการที่ (3.14) จะพบว่าเราสามารถยุบเทอมด้านขวาที่มีลักษณะดังสมการที่ (3.11) ได้เป็น  $\tilde{P}_n$  ดังนี้

$$E\{e_n e_n^T\} = \tilde{P}_n + K_n H \tilde{P}_n H^T K_n^T + K_n R_n K_n^T - \tilde{P}_n H^T K_n^T - K_n H \tilde{P}_n \quad (3.15)$$

ทำการดิฟเฟอเรนเชียล (Differentiate) สมการที่ (3.15) เพื่อหาจุดต่ำสุดซึ่งเป็นจุดที่ทำให้ขนาดของการผิดพลาดจากการประมาณ (Estimation) ต่ำที่สุด จะได้เป็น

$$\frac{\partial E\{e_n e_n^T\}}{\partial K_n} = 2H\tilde{P}_n H^T K_n^T + 2R_n K_n^T - H\tilde{P}_n - (\tilde{P}_n H^T) = 0 \quad (3.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_n^T = (H\tilde{P}_n H^T + R_n)^{-1} H\tilde{P}_n \quad (3.17)$$

$$K_n = \tilde{P}_n H^T (H\tilde{P}_n H^T + R_n)^{-1} \quad (3.18)$$

สมการที่ (3.18) แทนขนาดของคาลมาลเกน (Kalman Gain) ซึ่งเป็นเฟลคเตอร์ที่สำคัญในกระบวนการประมาณ (Estimation) ของวงจรกรองแบบคาลมาล (Kalman Filter)

พิจารณาโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการประมาณ (Expected Error Covariance หรือ Posterior Covariance) จากสมการที่ (3.15) โดยกำหนดให้เขียนแทนด้วยตัวแปร  $P_n$  ดังนี้

$$P_n = E\{e_n e_n^T\} = \tilde{P}_n + K_n H\tilde{P}_n H^T K_n^T + K_n R_n K_n^T - \tilde{P}_n H^T K_n^T - K_n H\tilde{P}_n \quad (3.19)$$

แทน  $K_n$  ด้วยสมการที่ (3.18) ลงในสมการที่ (3.19) จะได้

$$P_n = \tilde{P}_n + K_n H\tilde{P}_n \quad (3.20)$$

$$P_n = (I - K_n H)\tilde{P}_n \quad (3.21)$$

พิจารณาสมการที่ (3.11)

$$\tilde{P}_n = E\{(x_n - \tilde{x}_n)(x_n - \tilde{x}_n)^T\}$$

แทนสมการที่ (3.1) และ (3.6) ลงในสมการที่ (3.11) จะได้

$$\tilde{P}_n = E\{((Fx_{n-1} + GU_{n-1}) - (F\tilde{x}_{n-1}))((Fx_{n-1} + GU_{n-1}) - (F\tilde{x}_{n-1}))^T\} \quad (3.22)$$

$$\tilde{P}_n = E\{((Fx_{n-1} - F\tilde{x}_{n-1}) + GU_{n-1})(Fx_{n-1} - F\tilde{x}_{n-1} + GU_{n-1})^T\} \quad (3.23)$$

$$\tilde{P}_n = E\{((Fx_{n-1} - F\tilde{x}_{n-1})(Fx_{n-1} - F\tilde{x}_{n-1})^T) + (GU_{n-1})(GU_{n-1})^T\} \quad (3.24)$$

$$\tilde{P}_n = FE\{(x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})(x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})^T\}F^T + GE\{U_{n-1}U_{n-1}^T\}G^T \quad (3.25)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ (Prior Covariance) จะได้เป็น

$$\tilde{P}_n = FP_{n-1}F^T + GQ_{n-1}G^T \quad (3.26)$$

ขั้นตอนการทำงานของวงจรกรองแบบคาลมาลเป็นไปตามสมการต่างๆ ดังนี้

$$\tilde{x}_n = F\hat{x}_{n-1} \quad (3.27)$$

$$\tilde{P}_n = FP_{n-1}F^T + GQ_{n-1}G^T \quad (3.28)$$

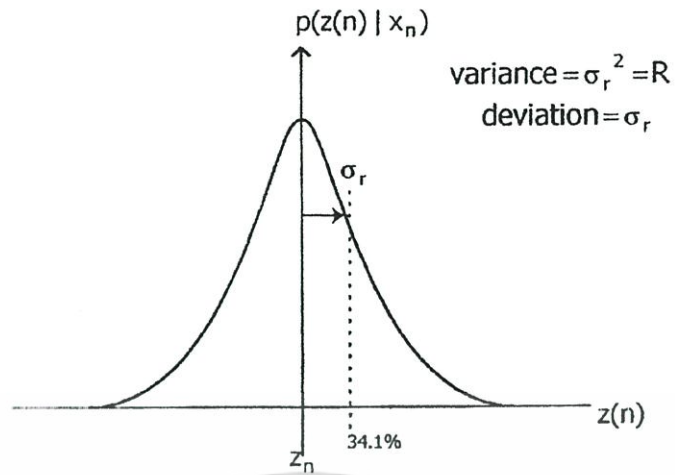
$$K_n = \tilde{P}_n H^T (H\tilde{P}_n H^T + R_n)^{-1} \quad (3.29)$$

$$\hat{x}_n = \tilde{x}_n + K_n (z_n - H\tilde{x}_n) \quad (3.30)$$

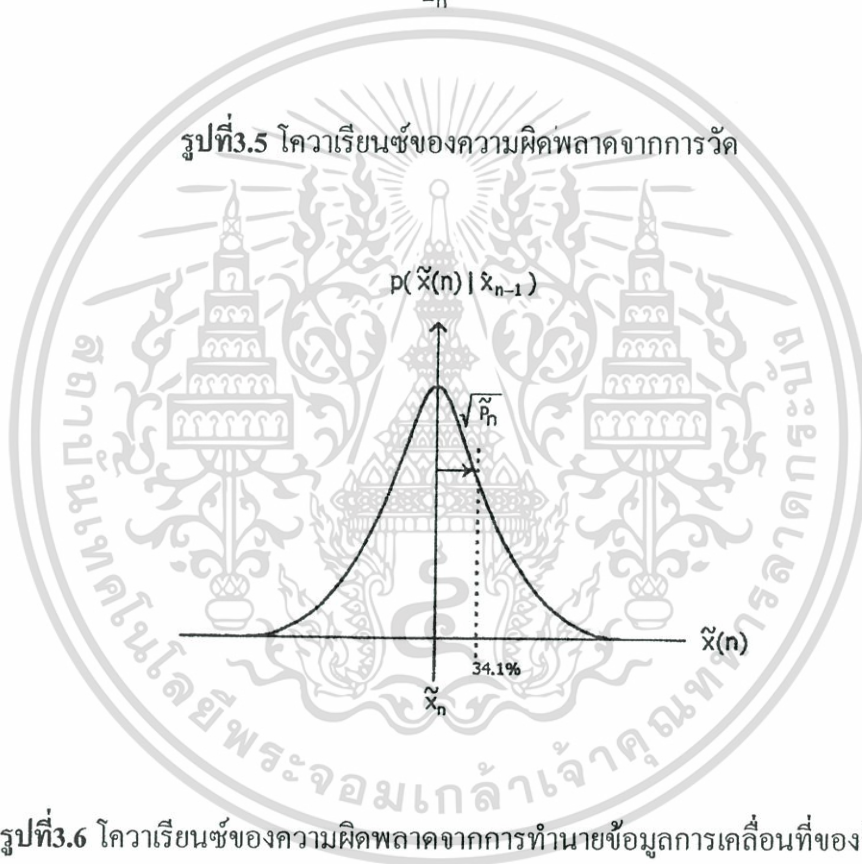
$$P_n = (I - K_n H)\tilde{P}_n \quad (3.31)$$

- 1) สมการที่ (3.27) เป็นการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลา  $n$  โดยอาศัยการคำนวณจากข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ได้จากการประมาณที่เวลา  $n-1$
- 2) สมการที่ (3.28) เป็นการหาขนาด โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ เพื่อนำไปคำนวณหาขนาดของคาลมาลเกน
- 3) สมการที่ (3.29) เป็นการคำนวณหาขนาดของคาลมาลเกน เพื่อเป็นตัวแปรในการชดเชยความผิดพลาดของการประมาณ
- 4) สมการที่ (3.30) เป็นการประมาณข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เวลา  $n$
- 5) สมการที่ (3.31) เป็นการหาขนาดของ โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการประมาณ (Posterior Covariance)

ความหมายของ โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการประมาณ , โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ , โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการวัดอธิบายได้ดัง รูปที่ 3.5 ถึงรูปที่ 3.7

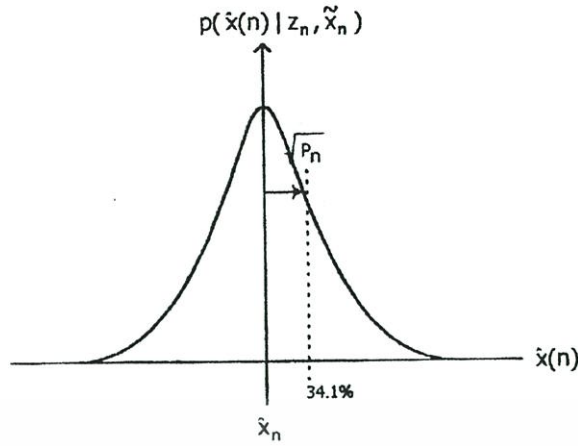


รูปที่ 3.5 โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการวัด

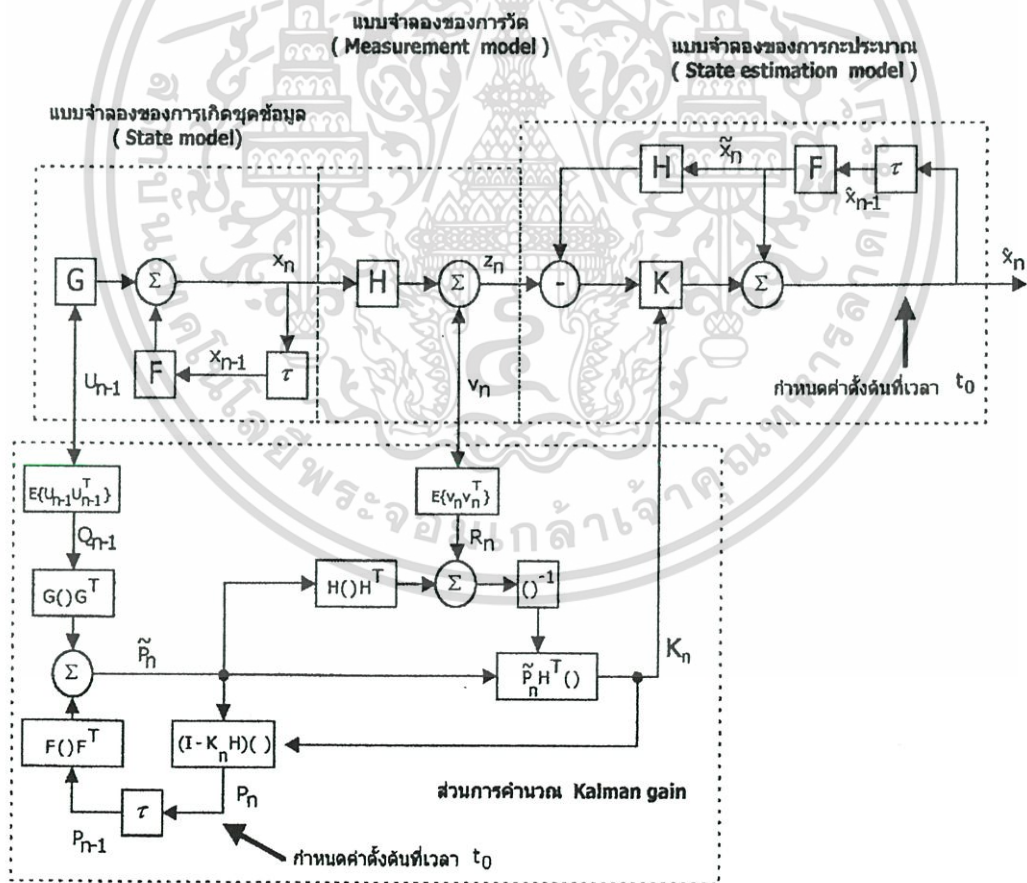


รูปที่ 3.6 โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการทำนายข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.7 โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการประมาณ



รูปที่ 3.8 กระบวนการทำงานของวงจรกรองแบบคาลมาล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.4.4 ค่าตั้งต้น (initial)

ในการทำงานของวงจรกรองแบบคาบคาลนั้น จะสังเกตเห็นว่ามีค่าสัมประสิทธิ์บางตัวที่จำเป็นต้องกำหนดค่าตั้งต้น ดังพิจารณาได้จากสมการที่ (3.27) ถึงสมการที่ (3.31) ซึ่งจากสมการที่ (3.27) ปรากฏเทอมของ  $\tilde{x} = F\tilde{x}_{n-1}$  โดยที่สถานะเริ่มต้นเราจำเป็นต้องกำหนดขนาดของ  $\tilde{x}_0$  และเมตริกซ์  $F$  ให้กับสมการ ต่อมาพิจารณาสมการที่ (3.28) พบว่าเราจำเป็นต้องกำหนดค่าตั้งต้นให้กับ  $P_0$  และ  $Q_0$  รวมทั้งเวกเตอร์  $G$  ให้กับสมการที่ (3.28) สุดท้ายคือเวกเตอร์  $R$  ที่จะต้องกำหนดให้แก่สมการที่ (3.29)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงเวกเตอร์และเมตริกซ์ต่างๆ ที่จำเป็นต้องกำหนดขนาดให้กับการเริ่มต้นทำงานของวงจรกรองแบบคาบคาล ซึ่งที่มาต่างๆ สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จาก [1] , [7] ในที่นี้จะกล่าวถึงอย่างคร่าวๆ การกำหนดค่าตั้งต้นเหล่านี้มีผลต่อความเร็วในการทำงานของวงจรกรองแบบคาบคาลเพื่อให้เข้าสู่สภาวะนิ่งเร็วที่สุด นอกจากนี้ยังมีผลต่อความแม่นยำของวงจรกรองแบบคาบคาลด้วย

เมตริกซ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้นได้มาจากรูปแบบการเคลื่อนที่ของวัตถุที่เรากำลังพิจารณา ทั้งนี้เราต้องทราบรูปแบบการเคลื่อนที่ของวัตถุก่อนโดยทั่วไปก็จะมีลักษณะเป็นไปตามกฎของนิวตัน ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่วัตถุเคลื่อนที่โดยปราศจากความเร่ง เราอาจเขียนสมการได้เป็น

$$\begin{aligned} s_x &= s_{x0} + v_x t \\ v_x &= v_x \end{aligned}$$

เขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} s_{xn+1} \\ v_{xn+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{xn} \\ v_{xn} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

หรือเขียนได้ในรูป

$$X_{n+1} = FX_n$$

โดยที่  $X_n$  คือเวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่เวลา  $n$  ซึ่งประกอบด้วย ตำแหน่ง ( $s_{xn}$ ) , ความเร็ว ( $v_{xn}$ )

ในกรณีนี้เราจะได้เมตริกซ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็น  
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์โดย บริษัท อีทีเอ จำกัด หากมีข้อสงสัยหรือต้องการข้อมูลเพิ่มเติม กรุณาติดต่อฝ่ายบริการลูกค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยที่  $T$  ระยะเวลาของแต่ละช่วงเวลาในการตรวจจับ เช่น หากเรามีการตรวจวัดการเคลื่อนที่ของวัตถุทุกๆ 2 วินาที เราก็จะได้ขนาดของ  $T$  เท่ากับ 2 วินาทีเป็นต้น

ในกรณีที่เราพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุซึ่งมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ เราอาจเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$s_x = s_{x0} + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_x = v_0 + a_x t$$

$$a_x = a_x$$

เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} s_{xn+1} \\ v_{xn+1} \\ a_{xn+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5T \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{xn} \\ v_{xn} \\ a_{xn} \end{bmatrix}$$

หรือเขียนได้ในรูป

$$X_{n+1} = FX_n$$

โดยที่  $X_n$  คือเวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่เวลา  $n$  ซึ่งประกอบด้วย ตำแหน่ง ( $s_{xn}$ ) ความเร็ว ( $v_{xn}$ ) และความเร่ง ( $a_{xn}$ )

ในกรณีนี้เราจะได้เมตริกซ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5T \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือในกรณีที่เรากำลังพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุซึ่งมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งไม่คงที่ อาจเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} s_x &= s_{x0} + v_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 + \frac{1}{6} u t^3 \\ v_x &= v_0 + a_x t + \frac{1}{2} u t^2 \\ a_x &= a_x + u t \end{aligned} \quad (3.33)$$

โดยที่  $u$  คือความไม่แน่นอนของอัตราเร่งในการเคลื่อนที่ของวัตถุ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} s_{xn+1} \\ v_{xn+1} \\ a_{xn+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5T \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{xn} \\ v_{xn} \\ a_{xn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1/6)T^3 \\ (1/2)T^2 \\ T \end{bmatrix} U_n$$

หรือเขียนได้ในรูป

$$X_{n+1} = FX_n + GU_n$$

ในกรณีนี้เราจะได้เมทริกซ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แทนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็น

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5T \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และเวกเตอร์  $G$  ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} (1/6)T^3 \\ (1/2)T^2 \\ T \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมตริกซ์แทนสมการของการวัดขึ้นอยู่กับจำนวนชนิดของข้อมูล และรูปแบบการเคลื่อนที่ของวัตถุเช่น สมมติว่าวัตถุมีการเคลื่อนที่ในรูปแบบตามสมการที่ (3.32) และเครื่องมือวัดที่ใช้ทำการวัดค่าของตำแหน่งแต่ไม่วัดค่าความเร็วเราจะได้สมการของการวัดเป็น

$$H = [1 \quad 0] \quad (3.34)$$

ซึ่งถ้าแทนลงไปนสมการที่ (3.3) กล่าวคือ

$$z_n = Hx_n + v_n$$

เราจะได้

$$z_{xn} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s_{xn} \\ v_{xn} \end{bmatrix} + v_n \quad (3.35)$$

ดังนั้นเราจะได้

$$z_{xn} = s_{xn} + v_n$$

เป็นต้น

สำหรับเวกเตอร์  $R$  เป็นเวกเตอร์ของโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการวัด ซึ่งจะมีขนาดเมตริกซ์สอดคล้องเท่ากับเมตริกซ์  $Z_{xn}$  ในสมการที่ (3.35) กล่าวคือ สมมติว่าค่าโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการวัดมีขนาดเท่ากับ  $\sigma_r^2$  และมีเวกเตอร์แทนสมการของการวัดเป็นดังสมการที่ (3.33) จะได้  $R = \sigma_r^2$  หรือกรณีที่เรานำสมการการเคลื่อนที่เป็นแบบที่มีการเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร่งที่ไม่คงที่ ดังสมการที่ (3.33) และมีการวัดตำแหน่งของวัตถุด้วยเครื่องมือวัดทั้งในแกน  $x$  และ  $y$  โดยไม่ได้ทำการวัดความเร็วหรือความเร่ง เราจะสามารถเขียนเมตริกซ์ตามสมการที่ (3.33) ได้ใหม่ดังนี้

$$\begin{bmatrix} s_{xn+1} \\ v_{xn+1} \\ a_{xn+1} \\ s_{yn+1} \\ v_{yn+1} \\ a_{yn+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0.5T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{xn} \\ v_{xn} \\ a_{xn} \\ s_{yn} \\ v_{yn} \\ a_{yn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1/6)T^3 & 0 \\ (1/2)T^2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & (1/6)T^3 \\ 0 & (1/2)T^2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xn} \\ u_{yn} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

และจะเขียนสมการของการวัดได้เป็น

$$\begin{bmatrix} z_{xn} \\ z_{yn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{xn+1} \\ v_{xn+1} \\ a_{xn+1} \\ s_{yn+1} \\ v_{yn+1} \\ a_{yn+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{xn} \\ v_{yn} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

จะได้เมตริกซ์ของโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดจากการวัดเป็น

$$R = E \left\{ \begin{bmatrix} v_{xn} \\ v_{yn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{xn} & v_{yn} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.38)$$

ทำการคูณเมตริกซ์เข้าด้วยกันจะได้

$$R = E \left\{ \begin{bmatrix} v_{xn}^2 & v_{xn}v_{yn} \\ v_{xn}v_{yn} & v_{yn}^2 \end{bmatrix} \right\}$$

หรืออาจเขียนได้ในรูป

$$R = \begin{bmatrix} E\{v_{xn}^2\} & E\{v_{xn}v_{yn}\} \\ E\{v_{xn}v_{yn}\} & E\{v_{yn}^2\} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าขนาดของความผิดพลาดจากการวัดทางด้านแกน x และ y มีการกระจายแบบเกาส์ เชียนและมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และโควาเรียนซ์ของความผิดพลาดทางด้านแกน x เป็น  $\sigma_x^2$  โควาเรียนซ์ของความผิดพลาดทางด้านแกน y เป็น  $\sigma_y^2$  และหากกำหนดให้ขนาดความผิดพลาดทางด้านแกน x ไม่ขึ้นอยู่กับขนาดความผิดพลาดจากการวัดทางด้านแกน y แล้ว จะได้

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

สำหรับค่าตั้งต้นของโควาเรียนซ์ความผิดพลาดของการประมาณนั้นเราสามารถกำหนดได้จาก[1] ,[7]

$$P_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \frac{\sigma_x^2}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_x^2}{T} & \frac{2\sigma_x^2}{T} + \sigma_{ux}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{ux}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_y^2 & \frac{\sigma_y^2}{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sigma_y^2}{T} & \frac{2\sigma_y^2}{T} + \sigma_{uy}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{uy}^2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

โดยที่  $\sigma_{ux}^2$  และ  $\sigma_{uy}^2$  คือโควาเรียนซ์ของความไม่แน่นอนในการเปลี่ยนแปลงความเร่งของวัตถุสำหรับเวกเตอร์แทนข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้น จะถูกกำหนดอย่างคร่าวๆ ก่อนที่วงจรรองแบบคาตมาลจะทำงาน โดยอาจถูกส่งมาจากระบบการวัดข้อมูลการเคลื่อนที่ของวัตถุในขั้นต้น เช่น จากเรดาร์ค้นหา เป็นต้น

## บทที่ 4

# การสร้างแบบจำลองเปรียบเทียบระหว่างกรณีที่ไม่เกิด

## การรบกวนและกรณีที่เกิดการรบกวนแบบต่างๆ

### 4.1 กล่าวนำ

ในบทนี้จะอธิบายเกี่ยวกับโครงสร้างของแบบจำลองวงโคจรที่สร้างขึ้น โดยแบ่งออกเป็นสองกรณี คือ กรณีที่กำหนดให้ดาวเทียมที่พิจารณาไม่เกิดการรบกวนใดๆ ในขณะที่เคลื่อนที่อยู่ตามแนววงโคจร จากนั้นจะทำการสร้างแบบจำลองในกรณีที่สองคือ การเกิดการรบกวนอันเนื่องมาจากแรงดันอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ จากนั้นจะทำการเปรียบเทียบผลการจำลองแบบที่ไม่เกิดสภาวะการรบกวนใดๆ ซึ่งในส่วนนี้จะเป็นส่วนที่เป็นไปตามหลักทฤษฎีซึ่งไม่มีทางเป็นจริงได้ในทางปฏิบัติ แต่โมเดลนี้มีไว้เพื่อใช้ในการศึกษาอิทธิพลหลักในกรณีที่ไม่มีกรรบกวนจากภายนอก เมื่อได้ผลลัพธ์ในส่วนนี้แล้ว เราก็จะทำการพิจารณาสภาวะการเคลื่อนที่ที่เกิดการรบกวนอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ เมื่อได้ผลลัพธ์ในส่วนที่สองนี้แล้ว เราก็จะทำการเปรียบเทียบความผิดพลาดคลาดเคลื่อนของตำแหน่งดาวเทียมและผลการทดลองเหล่านี้สามารถที่จะนำไปใช้ประโยชน์ในการหาค่าของตำแหน่งที่ถูกกระทำให้เกิดการผิดเพี้ยนไป

### 4.2 แบบจำลองวงโคจรกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน

#### 4.2.1 บทนำ

แบบจำลองวงโคจรกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน ทำเพื่อการศึกษาอิทธิพลหลักในกรณีที่ไม่มี การรบกวนจากสภาพแวดล้อมรอบๆวงโคจรเพื่อความแม่นยำในการคำนวณหาค่าวงโคจร ดาวเทียมนั้นจำเป็นที่จะต้องใช้วิธีการวิเคราะห์ทางตัวเลข เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของสมการการเคลื่อนที่ มีวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลขหลากหลายวิธีที่ได้รับการพัฒนามาเพื่อใช้ในงานวิจัยชิ้นนี้ และจากหลายๆวิธีนี้เราได้เลือกรูปแบบที่เหมาะสมมาใช้ในการวิเคราะห์ นั่นก็คือวิธีแบบ รังค์-กัตตา (Runge-Kutta Methods) เพราะเป็นวิธีการที่ใช้งานได้ง่าย และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการ แก้ปัญหาที่แตกต่างกันออกไปในวงกว้างได้ และเรายังให้ความสนใจเป็นพิเศษ สำหรับการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อินทิเกรตโดยตรงของสมการอันดับสองของการเคลื่อนที่ ซึ่งวิธีนี้จะเหมาะสมกับกรณีที่แรงที่กระทำต่อดาวเทียมไม่ขึ้นกับความเร็วของตัวดาวเทียม

โดยเริ่มต้นที่การสมมติสมการคิฟเฟอร์เรนเซียนที่พิจารณาอยู่ในรูปแบบสมการอันดับหนึ่ง  $n$  มิติ

$$\dot{y} = f(t, y)y, \dot{y}, f \in R^n \quad (4.1)$$

เมื่อจุดในสมการแสดงถึงอนุพันธ์ที่ขึ้นกับเวลา ( $t$ ) รูปแบบนี้มักจะได้อาจมาจากสมการอนุพันธ์อันดับสอง

$$\ddot{r} = a(t, r, \dot{r}) \quad (4.2)$$

สำหรับความเร่งของดาวเทียม ได้จากสมการรวมค่าตำแหน่ง ( $r$ ) และความเร็ว  $\dot{r}$  ไว้ในเวกเตอร์สถานะแบบ 6 มิติ

$$y = \begin{pmatrix} r \\ \dot{r} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

และ

$$\dot{y} = f(t, y) = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ a(t, r, \dot{r}) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

#### 4.2.2 วิธีการแบบรังก์-กัตตา (Rung-kutta methods)

เริ่มที่ค่าตั้งต้น  $y_0 = y(t_0)$  ณ เวลา  $t_0$  วิธีหนึ่งที่สามารถนำมาใช้คำนวณการประมาณค่าแบบง่าย ๆ ของ  $y$  ณ เวลาต่อมาที่  $t_0 + h$  ก็คือ การขยายสมการอันดับหนึ่งของเทเลอร์ (First Order Taylor Expansion)

$$\begin{aligned} y(t_0 + h) &\approx y_0 + h\dot{y}_0 \\ &= y_0 + hf(t_0, y_0) \end{aligned} \quad (4.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยรู้จักกันในนาม ขั้นตอนแบบออยเลอร์(Euler Step) ในการอธิบายทางเรขาคณิตของสมการนี้ จะเริ่มต้นด้วย  $(t_0, y_0)$  จากนั้นต่อด้วย ขั้นตอนของเวลาที่มีขนาด  $h$  ตามแนวเส้นสัมผัสเส้นโค้งของกราฟ  $y$  ในการแสดง อนุกรมของขั้นตอนในลำดับต่อไปแบบออยเลอร์ (จากสมการที่ 4.1) ส่วนหนึ่งได้มาจากการประมาณค่า  $\eta_i$  ของการแก้สมการ เมื่อ  $t_i = t_0 + ih (i = 1, 2, \dots)$

ขนาดของขั้นตอน จะต้องมีความเล็กมากๆ หากต้องการตามการหาคำตอบสมการเส้นโค้ง และต่อเนื่องกันไปหลายๆ ขั้นตอน ดูเหมือนว่าจะคุ้มค่ากว่าที่จะมองหาการประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพมากกว่า ในการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ทั่วไปเขียนออกมาเป็น

$$y(t_0 + h) \approx y_0 + h \cdot \Phi = \eta(t_0 + h) \quad (4.6)$$

สำหรับการหาคำตอบของการประมาณค่า  $\eta(t_0 + h)$  เห็นได้ชัดว่า  $\Phi$  เป็นฟังก์ชันการเพิ่มจำนวนซึ่งจะประมาณค่าใกล้เคียงแนวตลของเส้นตัดผ่าน  $(t_0, y_0)$  และ  $(t_0 + h, y(t_0 + h))$  ที่ซึ่งอาจจะเบนออกจาก สโลฟ  $f$  ของเส้นสัมผัสสวางโคจรที่ใช้ใน Euler step

เพื่อเอาชนะข้อบกพร่องต่างๆ นักคณิตศาสตร์ Carl Runge และ Wilhelm Kutta ได้ทำการปรับปรุงการอธิบายหลักการ ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของสโลฟที่จุดต่างๆ ภายในขั้นตอนของการอินทิเกรต ในวิธีการแก้สมการอนุพันธ์อันดับที่ 4 ของริงค์-กัตตา (Runge-kutta 4<sup>th</sup>-Order Method, RK4) แบบคลาสสิก ฟังก์ชันเพิ่ม  $\Phi$  จะถูกคำนวณออกมาเสมือนว่าเป็นค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก

$$\Phi_{RK4} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.7)$$

สำหรับค่าสโลป 4 ค่า

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_0, y_0) \\ k_2 &= f(t_0 + h/2, y_0 + hk_1/2) \\ k_3 &= f(t_0 + h/2, y_0 + hk_2/2) \\ k_4 &= f(t_0 + h, y_0 + hk_3) \end{aligned} \quad (4.8)$$

สูตรนี้ถูกออกแบบมาเพื่อการประมาณค่าการหาคำตอบที่แท้จริง ที่ขึ้นกับเทอมของลำดับ  $h^4$  และค่า  $y(t)$  ที่มีความกลมกลื่น (Smooth) เพียงพอ และสามารถหาค่าความต่างของอนุพันธ์ได้ ดังนั้นวิธีการ RK4 จึงถูกเรียกว่าวิธีการอันดับที่ 4 (4<sup>th</sup>-Order Method) สมการความผิดพลาดช่วงสั้นที่ได้ออกมาจะเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$${}^eRK4 = |y(t_0 + h) - \eta(t_0 + h)| \leq \text{const} \cdot h^5 \quad (4.9)$$

ซึ่งถูกกำหนดขอบเขตโดยเทอมของลำดับ  $h^5$

ความแม่นยำของวิธีการ RK4 นั้นสามารถเอาไปเปรียบเทียบกับวิธี 4<sup>th</sup>-Order Taylor Polynomial

$$y_0 + hy_0 + \frac{h^2}{2!} y_0^{(2)} + \frac{h^3}{3!} y_0^{(3)} + \frac{h^4}{4!} y_0^{(4)} \quad (4.10)$$

ตัวเลขที่ยกกำลังในวงเล็บชี้ให้เห็นถึงอันดับของอนุพันธ์ที่ขึ้นกับเวลา อย่างไรก็ตาม วิธีการแบบรันจ์-กัตตา จะหลีกเลี่ยงการคำนวณสมการอนุพันธ์

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= f(t_0, y_0) \\ y_0^{(2)} &= \frac{d}{dt} \dot{y}_0 = \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial t_0} + \frac{\partial \dot{y}_0}{\partial y_0} \dot{y}_0 = \frac{\partial f(t_0, y_0)}{\partial t_0} + \frac{\partial f(t_0, y_0)}{\partial y_0} \dot{y}_0 \\ y_0^{(3)} &= \frac{d}{dt} y_0^{(2)} = \frac{\partial y_0^{(2)}}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0^{(2)}}{\partial y_0} \dot{y}_0 \\ y_0^{(4)} &= \frac{d}{dt} y_0^{(3)} = \frac{\partial y_0^{(3)}}{\partial t_0} + \frac{\partial y_0^{(3)}}{\partial y_0} \dot{y}_0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

ซึ่งเห็นได้ว่าไม่สะดวกต่อการคำนวณ และต้องแทนค่าประมาณของฟังก์ชัน  $f$  ลงไปด้วยเหตุนี้วิธีการแบบรันจ์-กัตตา จึงง่ายต่อการใช้ในแบบเทคนิคมาตรฐานสำหรับการหาคำตอบเชิงตัวเลข ของสมการดิฟเฟอเรนเชียลพื้นฐาน

#### 4.2.3 สูตรสมการทั่วไปแบบรันจ์-กัตตา

วิธีการ RK4 ที่นำเสนอขึ้นก่อนข้างจะห่างไกลจากสูตรต้นแบบของรันจ์-กัตตาในส่วน of โครงสร้างพื้นฐานที่สามารถใช้ร่วมกันได้ในสถานะ  $s$  ของสูตร RK การประมาณค่า  $s$  ฟังก์ชันจะเป็น

$$k_1 = f(t_0 + c_1 h, y_0)$$

$$k_i = f\left(t_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j\right) \quad (i = 2, \dots, s) \quad (4.12)$$

จะถูกนำมาใช้ในการสร้างฟังก์ชันเพิ่ม

$$\Phi = \sum_{i=1}^s b_i k_i$$

ซึ่งให้ผลการประมาณค่าเป็น

$$\eta(t_0 + h) = y_0 + h\Phi \quad (4.13)$$

ซึ่งถูกเลือกมาใช้จากกรณีที่อันดับ  $p$  ของค่าผิดพลาดช่วงสั้นมีค่าสูงสุดเท่าที่จะเป็นไปได้ โดยปกติค่าสัมประสิทธิ์จะถูกกำหนดตามลักษณะความสัมพันธ์

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \quad (i > 1) \quad (4.14)$$

สำหรับวิธีแบบ RK4 ที่อธิบายด้านบน จำนวนของ  $s$  ของการประมาณค่าฟังก์ชันจะเท่ากับจำนวนอันดับ  $p$  ของค่าผิดพลาดช่วงสั้น

แต่วิธีการกำหนดค่าสัมประสิทธิ์จากสถานะของอันดับสูงสุด ให้ออกมาค่าเดียว และแม่นยำนั้นเป็นเรื่องยาก จึงมีการนำวิธี Embedded Runge-Kutta จึงถูกนำมาใช้ในการกะประมาณค่าความผิดพลาดช่วงสั้นแบบง่ายๆ ขึ้นมา ซึ่งจะเป็นกระบวนการที่เกิดก่อนกระบวนการควบคุมขนาดของขั้นตอน ในระหว่างกระบวนการอินทิเกรชัน วิธีการ Embedded ของ  $s$  สถานะ จะให้ค่าประมาณออกมา 2 ค่า

$$\begin{aligned} \eta(t_0 + h) &= y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \\ \hat{\eta}(t_0 + h) &= y_0 + h \sum_{i=1}^s \hat{b}_i k_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

ของอันดับ  $p$  และ  $p + 1$  ค่าความผิดพลาดช่วงสั้นเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned} e &= |y(t_0 + h) - \eta(t_0 + h)| \leq ch^{p+1} \\ \hat{e} &= |y(t_0 + h) - \hat{\eta}(t_0 + h)| \leq \hat{c}h^{p+2} \end{aligned} \quad (4.16)$$

เมื่อค่า  $\hat{e}$  มีค่าน้อยกว่า ค่า  $e$  มากๆ โดยอันดับของ  $h$  (เราสมมติให้มีค่าน้อยมากๆ) จะได้เป็น

$$e = |y - \eta| \approx |\hat{\eta} - \eta| \quad (4.17)$$

หมายความว่าเราสามารถหาค่าการประมาณของความผิดพลาดช่วงสั้นของสูตรอันดับ  $p$  ได้จาก ผลต่างของการแก้สมการทั้งสอง

#### 4.2.4 การควบคุมขนาดของขั้นตอน

ในระหว่างการอินทิเกรตขั้นเชิงตัวเลข ของสมการอนุพันธ์ขนาดของขั้นตอน จะถูกเลือกในลักษณะที่ แต่ละขั้นตอนให้ผลลัพธ์ออกมาเหมือนกัน ต่อค่าผลรวมความผิดพลาดจากการอินทิเกรต เห็นได้ชัดว่าขั้นตอนเดียวจะมีขนาดไม่ใหญ่มาก และก็ไม่เล็กด้วย นับตั้งแต่มีการเพิ่มจำนวนขั้นตอนรวม ค่าความผิดพลาดต่อรอบ และประสิทธิภาพในการคำนวณเทคนิคพื้นฐานของการควบคุมขนาดของขั้นตอน สำหรับวิธีแบบ Embedded ซึ่งจะพยายามจำกัดค่าผิดพลาดช่วงสั้น และทำการคำนวณออกมาในแต่ละขั้นตอน

สมมติให้การอินทิเกรตขั้นในขั้นตอนเดียวที่มีขนาดขั้นตอนเป็น  $h$  จะให้ผลการประมาณเป็น

$$e(h) \approx |\hat{\eta} - \eta| \quad (4.18)$$

ถ้ารับค่าความผิดพลาดช่วงสั้นของสูตรที่ลำดับต่ำกว่า ถ้าค่านี้มากกว่าค่าผ่อนผัน (Tolerance)  $\mathcal{E}$  ขั้นตอนจะต้องถูกทำซ้ำด้วยขนาดที่เล็กกว่าขนาดขั้นตอนเป็น  $h^*$  เป็นที่รู้กันว่า  $e(h)$  นั้นเป็นสัดส่วนคงที่ต่อ  $h^{p+1}$  สำหรับวิธีการของลำดับ  $p$  ดังนั้นค่าความผิดพลาดช่วงสั้นจะเท่ากับ

$$e(h^*) = e(h) \left( \frac{h^*}{h} \right)^{p+1} \approx |\hat{\eta} - \eta| \left( \frac{h^*}{h} \right)^{p+1} \quad (4.19)$$

สำหรับค่าขนาดของขั้นตอน ใหม่นั้นต้องการค่านี้น้อยกว่าค่า  $\varepsilon$  และแก้สมการสำหรับ  $h^*$  ให้ได้ค่าสูงสุด จะได้ค่าขนาดของขั้นตอนเป็น

$$h^* = {}^{p+1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{e(h)}} \cdot h \approx {}^{p+1}\sqrt{\frac{\varepsilon}{|\hat{\eta} - \eta|}} \cdot h \quad (4.20)$$

เมื่อทำการวนขั้นตอนซ้ำ ในทางปฏิบัติประมาณ 0.9 เท่าของค่าสูงสุดจะถูกนำมาใช้เพื่อหลีกเลี่ยงกรณีที่เกิดความล้มเหลวในขั้นตอนอื่นๆ หากขั้นตอนนั้นใช้งานได้ในขั้นตอนต่อไปก็อาจจะใช้ค่า  $h^*$  ในการหลีกเลี่ยงการเกิดออสซิลเลชันอย่างเฉียบพลันของขั้นตอนหนึ่ง ไปสู่อีกขั้นตอนหนึ่ง

ขณะที่การควบคุมขนาดของขั้นตอนรูปแบบนี้ สามารถที่จะปรับขนาดของขั้นตอน ที่ใช้ให้เหมาะสมกับลักษณะของสมการอนุพันธ์ แต่ก็ไม่สามารถช่วยหาค่าขนาดของขั้นตอนตั้งต้นได้ แต่ก็สามารถหาค่าที่สมเหตุสมผลได้จากการทดลองคำนวณ และจากการค้นคว้าเพิ่มเติม สำหรับการอินทิเกรตของวงโคจรดาวเทียม เราอาจเริ่มต้นด้วยค่า  $h$  เท่ากับ 1/100 ของเวลาโคจร หรืออีกวิธีหนึ่ง ด้วยการกะประมาณ ฟังก์ชัน  $f$

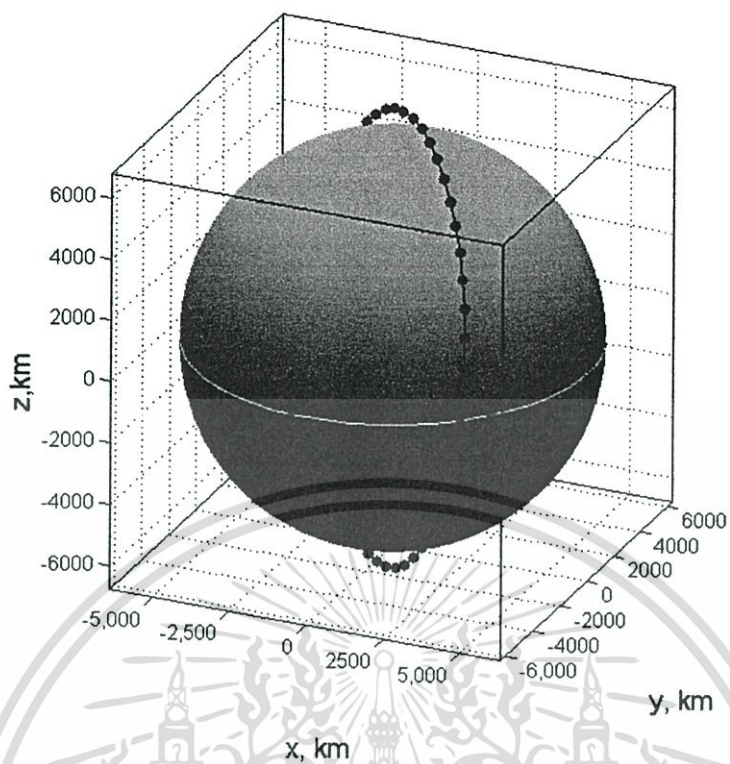
#### 4.2.5 ผลการทดลอง

จากการศึกษาทฤษฎีสำหรับการสร้างแบบจำลองการเคลื่อนที่ของดาวเทียมในวงโคจรที่ไม่เกิดการรบกวน เราทราบว่าพารามิเตอร์ 6 ตัวที่มีความสำคัญต่อการสร้างแบบจำลอง ได้แก่  $a$  และ  $e$  ซึ่งเป็นตัวแปรที่ใช้อธิบายวงโคจร ค่า  $M$  เป็นตัวแปรกำหนดตำแหน่งตามเส้นทางวงโคจร และค่า  $\Omega, i$  และ  $\omega$  เป็นพารามิเตอร์ที่เป็นตัวกำหนดทิศทางของวงโคจร ในที่นี้เราอ้างอิงองค์ประกอบวงโคจรจากดาวเทียมที่มีลักษณะของวงโคจรเกือบเป็นวงกลม หรือรีน้อยที่สุดมาใช้ในการคำนวณ มีค่าดังตาราง

ตารางที่ 4.1 แสดงองค์ประกอบวงโคจรจากดาวเทียมที่ใช้ในการคำนวณ

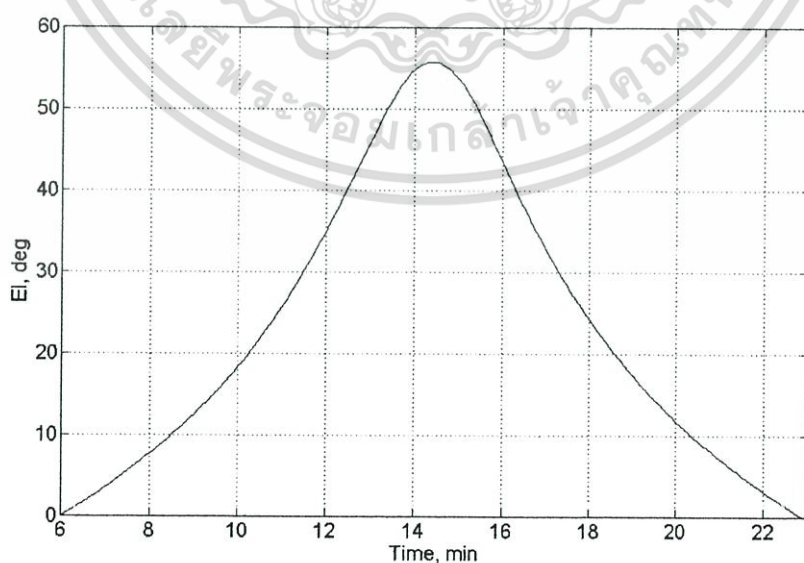
semimajor Axis	$a$	7338.183 km
eccentricity	$e$	0°
inclination	$i$	97.74°
long. of Ascending node	$\Omega$	130.7°
Argument of perigee	$\omega$	0.0°
Mean Anomaly	$M$	0.0°

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.1 แบบจำลองวงโคจรกรณีที่ ไม่เกิดการรบกวนใดๆ

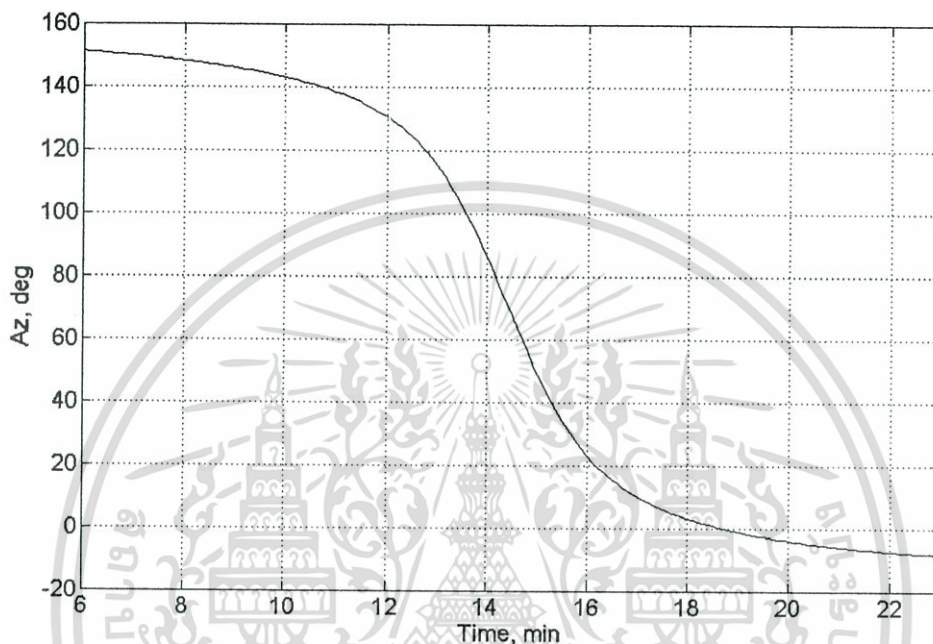
จากนั้นทำการทำนายวงโคจรจากการจำลองแบบวิธีอินทิเกรตเชิงตัวเลขของรังค์-กัตตา ซึ่งได้ผลลัพธ์แสดงออกมาในรูปแบบของกราฟ ดังนี้



รูปที่ 4.2 การเปลี่ยนแปลงค่ามุมยก (Elevation Angle) เทียบกับช่วงคาบเวลา 30 นาที

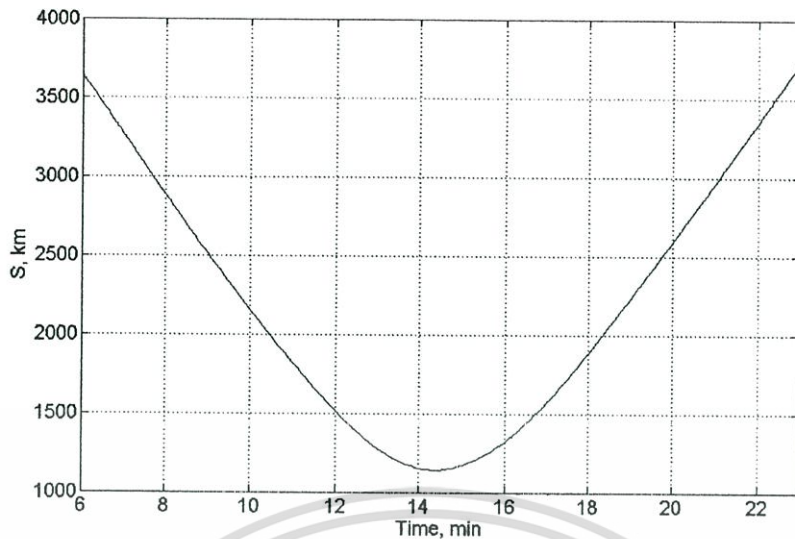
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น มิใช่ข้อมูลให้เผยแพร่เชิงพาณิชย์ การค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากกราฟนี้เราจะเห็นว่าช่วงพีคที่สุดของกราฟจะอยู่ราวๆนาที่ที่ 14 ถึงนาที่ที่ 16 มีค่าประมาณ  $56^{\circ}$  ซึ่งค่าสูงสุดในช่วงนี้แสดงให้เห็นว่าเป็นช่วงที่ดาวเทียมมีระยะทางใกล้โลกมากที่สุด และจากการคำนวณจะได้ว่า ที่ระยะนี้ดาวเทียมจะเคลื่อนที่ผ่าน โลกด้วยความเร็วค่าที่สุดจนเข้าใกล้ 0



รูปที่ 4.3 การเปลี่ยนแปลงค่ามุมอาซิมูท (Azimuth Angle) เทียบกับช่วงคาบเวลา 30 นาที

จากกราฟ จะเห็นว่าค่ามุมอาซิมูท ณ จุดเริ่มต้นการสังเกตการณ์ค่าจะสูงสุด และจากนั้นจะเปลี่ยนแปลงเข้าสู่ค่า 0 อย่างรวดเร็ว ซึ่งแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ว่ามีการเดินทางมาจากทิศใต้เฉียงไปทางทิศตะวันออกจนเข้าสู่ระยะสังเกตการณ์ที่มุมอาซิมูท  $150^{\circ}$  จากนั้นค่าเปลี่ยนแปลงเข้าสู่ 0 องศา ซึ่งมุ่งหน้าไปทางทิศเหนือและดาวเทียมก็จะพ้นระยะสังเกตการณ์



**รูปที่ 4.4** การเปลี่ยนแปลงค่าระยะห่างระหว่างดาวเทียมกับจุดสังเกตการณ์ ในช่วงคาบเวลา 30 นาที

จากรูปที่ 4.3 เป็นระยะทางระหว่างดาวเทียมและจุดสังเกตการณ์ จะเห็นได้ว่าที่ระยะเข้าใกล้โลกมากที่สุดจะอยู่ที่ประมาณ 1100 กิโลเมตร และระยะไกลสุดอยู่ที่ประมาณ 3600 กิโลเมตร โดยที่ระยะทางไกลสุดดาวเทียมจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสูงสุดที่ 6 กิโลเมตรต่อวินาที

#### 4.3 แบบจำลองวงโคจรกรณีที่เกิดการรบกวนอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์

แบบจำลองวงโคจรกรณีที่เกิดการรบกวนอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ ทำเพื่อศึกษาแนวโน้มของการเกิดความผิดพลาดในการระบุตำแหน่งและเพื่อพัฒนาความสามารถการชดเชยความผิดพลาด ซึ่งเป็นสิ่งสำคัญต่อระบบการนำร่อง

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอการเกิดการรบกวนวงโคจรดาวเทียมที่เกิดจากแรงดันอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์

##### 4.3.1 แรงดันอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์

แรงดันจากการแผ่รังสีจากดวงอาทิตย์คือ แรงที่กระทำต่อพื้นผิวของดาวเทียม ที่มีสาเหตุมาจากแสงอาทิตย์ แรงที่เกิดจากการแผ่รังสีนั้นสามารถนำมาเขียนเป็นสมการคือ

$$\vec{f}_{solar} = m\gamma P_s C_r r_{sun}^2 \frac{S}{m} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{sun}}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|^3} \quad (4.21)$$

เมื่อ  $r$  คือ แฟคเตอร์เงา,  $P_s$  คือสภาพส่องสว่างของดวงอาทิตย์,  $C_r$  คือ สภาพสะท้อนของพื้นผิว,  $r_{sun}$  คือระยะทางของดวงอาทิตย์ถึงศูนย์กลางโลก,  $S/m$  คือค่าอัตราส่วนพื้นผิวต่อมวลของดาวเทียม และ  $\vec{r}$  และ  $\vec{r}_{sun}$  คือ เวกเตอร์อิงศูนย์กลางโลกของดาวเทียมและดวงอาทิตย์ตามลำดับ โดยปกติแล้ว  $P_s$  จะมีค่าเท่ากับ  $4.5605 \times 10^{-6}$  Newton/meter,  $C_r$  มีค่าตั้งแต่ 1-2 กรณีที่เป็นคือมีการดูดกลืนแสงอาทิตย์อย่างสมบูรณ์และสำหรับบอลูนีเยียม ค่า  $C_r$  จะเท่ากับ 1.95 แฟคเตอร์เงาสามารถอธิบายเป็นสมการได้ว่า

$$\gamma = 1 - \frac{A_{ss}}{A_s} \quad (4.22)$$

เมื่อ  $A_s$  คือ พื้นผิวของดวงอาทิตย์ที่มองเห็นจากดาวเทียม และ  $A_{ss}$  คือ เงาของดวงอาทิตย์บนพื้นผิวสังเกตการณ์ แสงจากดวงอาทิตย์จะถูกทำให้เกิดเงาขึ้นโดยโลกและดวงจันทร์ ในที่นี้จะทำการอธิบายพารามิเตอร์ของทั้งสองสิ่งที่ใช้ในระบบของดาวเทียม-โลก-ดวงอาทิตย์ เท่านั้น

$$\begin{aligned} \alpha_e &= \sin^{-1}\left(\frac{a_e}{|\vec{r}|}\right) \\ \alpha_m &= \sin^{-1}\left(\frac{a_m}{|\vec{r}_m - \vec{r}|}\right) \\ \alpha_s &= \sin^{-1}\left(\frac{a_s}{|\vec{r}_s - \vec{r}|}\right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

เมื่อ  $a_e$ ,  $a_s$  และ  $a_m$  คือ เส้นกึ่งรัศมีของโลก, ดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ตามลำดับ  $a_m = 0.272493a_e$  และ  $a_s = 959.63 \pi / (3600 \times 180)(AU)$  สำหรับดาวเทียมจีพีเอส  $\alpha_s < 0.3^\circ$ ,  $\alpha_e \approx 16.5^\circ$  และ  $\alpha_m \approx \alpha_s \pm 0.03^\circ$  และค่า  $A_s = \alpha_s^2 \pi$  และ  $A_m = \alpha_m^2 \pi$  มุมระหว่างศูนย์กลางของโลกและดวงอาทิตย์ซึ่งก็เหมือนกับที่ ศูนย์กลางของดวงจันทร์และดวงอาทิตย์ คือ

$$\beta_{es} = \cos^{-1}\left(\frac{-\hat{r} \cdot (\vec{r}_s - \vec{r})}{r|\vec{r}_s - \vec{r}|}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\beta_{ms} = \cos^{-1} \left( \frac{(\vec{r}_m - \vec{r}) \cdot (\vec{r}_s - \vec{r})}{|\vec{r}_m - \vec{r}| \cdot |\vec{r}_s - \vec{r}|} \right) \quad (4.24)$$

เมื่อเวกเตอร์  $s$  และ  $m$  คือ เวกเตอร์อิงศูนย์กลางโลกของดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ตามลำดับ เวกเตอร์ตัวที่ไม่มีตัวห้อยคือเวกเตอร์อิงศูนย์กลางโลกของดาวเทียม และ  $r = |\vec{r}|$  ถ้า  $\beta_{es} \geq \alpha_e + \alpha_s$  แล้วแสดงว่าดาวเทียมไม่อยู่ในเงาของโลก(ได้แก่  $A_{ss} = 0$ ) ถ้า  $\beta_{es} \geq \alpha_e - \alpha_s$  แล้วแสดงว่าดาวเทียมมองเห็นดวงอาทิตย์ในขณะนั้น(ได้แก่  $A_{ss} = A_s$ ) ถ้า

$\alpha_e - \alpha_s < \beta < \alpha_e + \alpha_s$  แสดงว่าแสงอาทิตย์เกิดการทอดเงาโดยโลก สูตรของพื้นที่ผิวส่วนที่เกิดเงาสามารถหาได้โดยรูปที่ 4.5 เมื่อวงกลมสองวงที่มีรัศมี  $\alpha_e$  และ  $\alpha_s$  ตัดกันที่จุด  $p$  และ  $q$  เส้น  $pq$  เรียกว่าเส้นตัดโค้ง(กำหนดให้เท่ากับ  $2a$ ) เส้นตัดโค้งนี้สัมผัสกับมุมศูนย์กลางที่จุดกำเนิด  $\alpha_s$  แทนด้วย  $\phi_1$  พื้นที่บริเวณผิวหน้าระหว่างเส้นคอร์ด กับเส้นโค้งของวงกลม  $\alpha_s$  ด้านขวามือของเส้นคอร์ดกำหนดให้เป็น  $A_1$  เส้น  $pq$  ตัดกับเส้น  $o_s o_e$  ที่จุดขณะที่  $o_s g$  และ  $g o_e$  แทนด้วย  $b$  และ  $b_1$  ดังนั้นสมการจะออกมาเป็น

$$\begin{aligned} a^2 &= \alpha_s^2 - b^2, b_1 = \frac{\alpha_e^2 + \beta_{es}^2 - \alpha_s^2}{2\beta_{es}} \\ b &= \begin{cases} \beta_{es} - b_1 & \text{if } b_1 \leq \alpha_e \\ b_1 - \beta_{es} & \text{if } b_1 > \alpha_e \end{cases} \\ \phi_1 &= \begin{cases} 2 \cos^{-1} \left( \frac{b}{\alpha_s} \right) & \text{if } b_1 \leq \alpha_e \\ 2\pi - 2 \cos^{-1} \left( \frac{b}{\alpha_s} \right) & \text{if } b_1 > \alpha_e \end{cases} \\ A_1 &= \begin{cases} \frac{1}{2} \phi_1 \alpha_s^2 - ab & \text{if } b_1 \leq \alpha_e \\ \frac{1}{2} \phi_1 \alpha_s^2 + ab & \text{if } b_1 > \alpha_e \end{cases} \end{aligned} \quad (4.25)$$

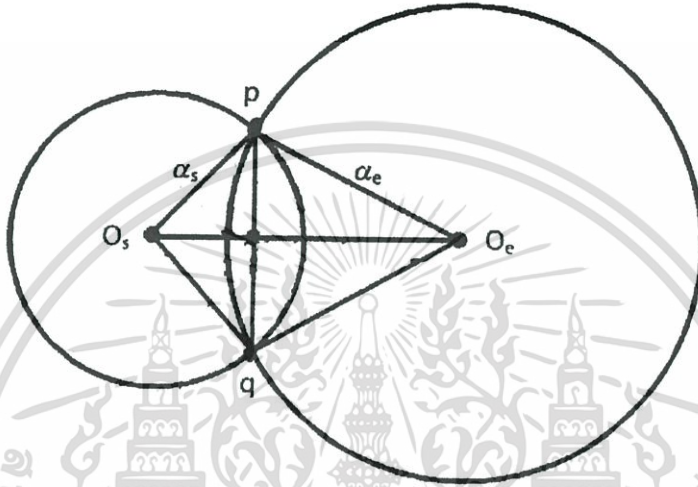
แล้วก็เหมือนกันเมื่อพิจารณามุมเส้นตัดโค้งที่จุดกำเนิดเป็น  $O_e$  แทนด้วย  $\phi_2$  ขณะที่พื้นที่ผิวหน้าบริเวณระหว่างเส้นคอร์ดและเส้นโค้งของสมการ  $\alpha_e$  ทางด้านซ้ายมือของเส้นคอร์ดแทนค่าเป็น  $A_2$  จะได้สมการเป็น

$$\phi_2 = 2 \cos^{-1} \left( \frac{b_1}{\alpha_e} \right), \quad A_2 = \frac{1}{2} \phi_2 \alpha_e^2 - ab_1 \quad (4.26)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\gamma = 1 - \frac{A_1 + A_2}{\alpha_s^2 \pi} \quad (4.27)$$



รูปที่ 4.5 บริเวณพื้นที่ผิวที่เกิดเงา

ในการกำหนดค่าวงโคจรดาวเทียมจีพีเอสที่มีการเคลื่อนที่จะมีการนำข้อมูลมาใช้เฉพาะชุดข้อมูลที่มีค่าซูดแฟคเตอร์เงา ( $\gamma$ ) เป็น 0 และ 1 เท่านั้น

เนื่องจากรูปร่างที่ซับซ้อนของตัวดาวเทียมค่าคงที่การสะท้อนและค่าคงที่การส่องสว่างของดวงอาทิตย์ซึ่งก็เหมือนกับการเกิดการแผ่รังสีดวงอาทิตย์ทางอ้อม(เกิดการสะท้อนจากผิวโลก) ดังที่ได้อธิบายไว้ในสมการ 4.21 นั้นแท้จริงแล้วค่าความแม่นยำก็ยังไม่มากพอตามวัตถุประสงค์ ดังนั้น โมเดลที่ใช้สำหรับตั้งค่าผลกระทบจากการแผ่รังสีจากดวงอาทิตย์ให้เหมาะสมจึงเป็นที่ต้องการ

ค่าเวกเตอร์แรงจะถูกชี้จากดวงอาทิตย์ไปยังดาวเทียม ค่าเวกเตอร์แรงจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ในระบบ ECSF จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \vec{f}_{solar} &= m \gamma P_s C_r \frac{S}{m} \frac{r_{sun}^2}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|^2} \vec{n}_{sun} \\ &= m \gamma P_s C_r \frac{S}{m} \frac{r_{sun}^2}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|^2} (\sin \beta \cdot \vec{e}_x + \cos \beta \cdot \vec{e}_z) \end{aligned} \quad (4.28)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$\vec{e}_z = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad \vec{e}_y = \frac{\vec{e}_z X \vec{n}_{sun}}{|\vec{e}_z X \vec{n}_{sun}|}, \quad \vec{e}_x = \vec{e}_y X \vec{e}_z \quad \text{and} \quad \vec{n}_{sun} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_{sun}}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|} \quad (4.29)$$

เมื่อนำค่าคงเหลือของความผิดพลาดของแรงดันการแผ่รังสีมาแก้แล้วได้ลงรายละเอียดการคำนวณโมเดลของแรงการแผ่รังสีจากดวงอาทิตย์สามารถแทนสมการออกมาเป็น

$$\vec{f}_{solar-force} = \vec{f}_{solar} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

เห็นได้ว่าสมการนี้ประกอบด้วย 9 พารามิเตอร์เคยถูกนำมาใช้ในการสร้างโมเดล ค่าความผิดพลาดของงานที่เกิดจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ ของดาวเทียมทุกดวง

โมเดลการแก้ไขปัญหาเกี่ยวกับ การแผ่รังสีของดวงอาทิตย์จะได้มาจากรูปแบบระบบที่เรียกว่า ระบบการรบกวน โคออดิเนต ซึ่งจะกล่าวถึง โครงสร้างในหัวข้อต่อไป

#### 4.3.2 รูปแบบความผิดพลาดจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์

เวกเตอร์แรงที่เกิดจากการแผ่รังสีจะถูกชี้จากดวงอาทิตย์ไปยังดาวเทียม ถ้าค่าแฟคเตอร์เงาสามารถคำนวณออกมาได้อย่างแท้จริงแล้ว ค่าสภาพส่องสว่างของดวงอาทิตย์จะเป็นค่าคงที่ ดังนั้นความยาวของเวกเตอร์แรงของแสงอาทิตย์ สามารถพิจารณาให้เป็นค่าคงที่ได้เนื่องจาก

$$\frac{r_{sun}^2}{(r_{sun} \pm r)^2} \leq \frac{r_{sun}^2}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|^2} \leq \frac{r_{sun}^2}{(r_{sun} - r)^2} \quad (4.31)$$

และ

$$\frac{r_{sun}^2}{(r_{sun} \pm r)^2} = \left( \frac{r_{sun}}{r_{sun} \pm r} \right)^2 \approx \left( 1 \mp \frac{r}{r_{sun}} \pm \dots \right)^2 \approx 1 \mp \frac{2r}{r_{sun}} \approx 1 \mp 3 \times 10^{-5}$$

ค่าความผิดพลาดไบแอสใดๆ ใน  $P_r$ ,  $C_r$  และ  $(S/m)$  อาจเป็นสาเหตุของความผิดพลาดของ  $\alpha \vec{f}_{solar}$  เมื่อ  $\alpha$  เป็นตัวแปรตัวหนึ่ง, ดังนั้นค่า  $\alpha \vec{f}_{solar}$  จะได้รับการพิจารณาว่าเป็นรูปแบบหลัก เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้าของการหาค่าความผิดพลาดของการแผ่รังสี เนื่องจากค่าอัตราส่วนของระยะทางอิงศูนย์กลางโลก ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ของดาวเทียมและดวงอาทิตย์นั้นมีค่าน้อยมาก ระยะทางและทิศทางเวกเตอร์ของดวงอาทิตย์ซึ่งไปยังดาวเทียมที่เปลี่ยนแปลงไปจะถูกตัดทิ้ง ด้วยการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ เวกเตอร์แรงจากการแผ่รังสีจะเปลี่ยนทิศทางของมันไปตามเวลา ในระบบโคออดิเนตแบบ ECSF (Earth-Centered-Space-Fixed) ผลกระทบเหล่านี้อาจจะพิจารณาว่าเป็นผลกระทบเล็กน้อย ไม่ใช่การเปลี่ยนแปลงตามช่วงเวลาสำหรับวงโคจรในระบบการรบกวนโคออดิเนตนั้นรูปแบบความผิดพลาดแรงดันที่เกิดจากการแผ่รังสีดวงอาทิตย์สามารถแทนค่าออกมาได้เป็น

$$\alpha \vec{f}_{solar} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

เมื่อเทอมของ  $b$  นั้นมีค่าน้อยมากๆ

4.3.3 อนุพันธ์ย่อยที่เกี่ยวข้องกับแรงดันที่เกิดจากการแผ่รังสีจากดวงอาทิตย์ แรงจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ที่เราจะทำต่อพื้นผิวของดาวเทียมคือ

$$\vec{f}_{solar} = m \gamma P_s C_r r_{sun}^2 \frac{s}{m} \frac{\vec{r} - \vec{r}_{sun}}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|^3} \quad (4.33)$$

อนุพันธ์ย่อยของแรงรบกวนที่สัมพันธ์กับเวกเตอร์ของดาวเทียมจะได้เป็น

$$\frac{\partial \vec{f}_{solar}}{\partial \vec{r}} = m \gamma P_s C_r r_{sun}^2 \frac{s}{m} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|^3} \left( E - \frac{3}{|\vec{r} - \vec{r}_{sun}|^2} \begin{pmatrix} x - x_{sun} \\ y - y_{sun} \\ z - z_{sun} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_{sun} \\ y - y_{sun} \\ z - z_{sun} \end{pmatrix}^T \right) \quad (4.34)$$

เมื่อค่า  $E$  คือค่าเมทริกซ์ขนาด  $3 \times 3$  อนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์แรงที่สัมพันธ์กับเวกเตอร์ความเร็วของดาวเทียมมีค่าเป็น 0 การรบกวนที่เกิดจากการแผ่รังสีนี้จะถูกพิจารณาให้เป็นรูปแบบที่ไม่สมบูรณ์ ดังนั้นตัวแปรที่ไม่รู้ค่าจะถูกปรับค่า โดยรูปแบบรวมออกมาเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\vec{f}_{solar-force} = \vec{f}_{solar} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos u \\ \sin u \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

ดังนั้น

$$\frac{\vec{\partial} f_{solar-force}}{\partial \vec{r}} = \frac{\vec{\partial} f_{solar}}{\partial \vec{r}} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin u \\ \cos u \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial \vec{r}} \quad (4.36)$$

เมื่อ

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial u}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)} \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \quad (4.37)$$

ทางซ้ายมือของสมการด้านบนประกอบด้วย 3 เมทริก, เมทริกแรกเป็นแบบ 1x6 (เวกเตอร์) เมทริกที่ 2 เป็นอินเวอร์สเมทริกของเมทริกแรก และเมทริกที่ 3 เป็นเมทริกขนาด 6x3 หรือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)} &= \left( 0, 0, 1, 0, \frac{2 + e \cos f}{1 - e^2} \sin f, \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1 - e^2} \right) \\ \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} &= \left( \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial(\Omega, i, \omega)} \vec{q} & R \frac{\partial \vec{q}}{\partial(a, e, M)} \\ \frac{\partial R}{\partial(\Omega, i, \omega)} \vec{q} & R \frac{\partial \vec{q}}{\partial(a, e, M)} \end{pmatrix}^{-1} \\ \frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial r} &= \begin{pmatrix} E_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial u}{\partial \dot{\vec{r}}} &= \frac{\partial u}{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)} \frac{\partial(\Omega, i, \omega, a, e, M)}{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})} \frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial \dot{\vec{r}}} \quad (4.38) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\frac{\partial(\vec{r}, \dot{\vec{r}})}{\partial \dot{\vec{r}}} = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \\ E_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

อนุพันธ์ย่อยของเวกเตอร์แรงกับความสัมพัทธ์ต่อตัวแปรของโมเดลคือ (ถ้าสำหรับ  $i=1,2,3$ )

$$\frac{\partial \vec{f}_{solar-force}}{\partial a_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{if } j=1 \\ \cos u & \text{if } j=2 \\ \sin u & \text{if } j=3 \end{cases} \quad (4.40)$$

ถ้าโมเดลของสมการ

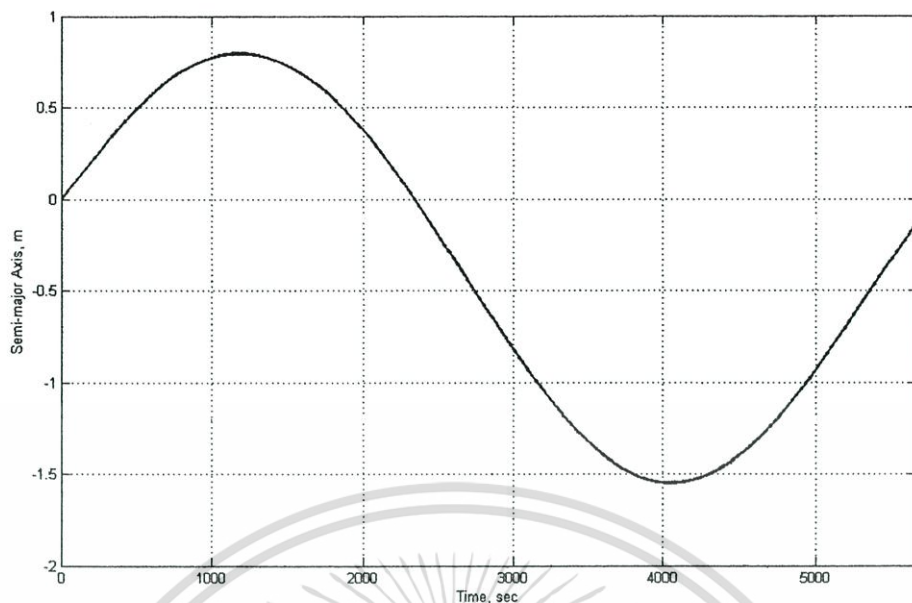
$$\vec{a}f_{solar} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

ถูกนำมาใช้ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial \vec{f}_{solar-force}}{\partial (a_i, b_i)} = (1, t), i = 1, 2, 3. \quad (4.42)$$

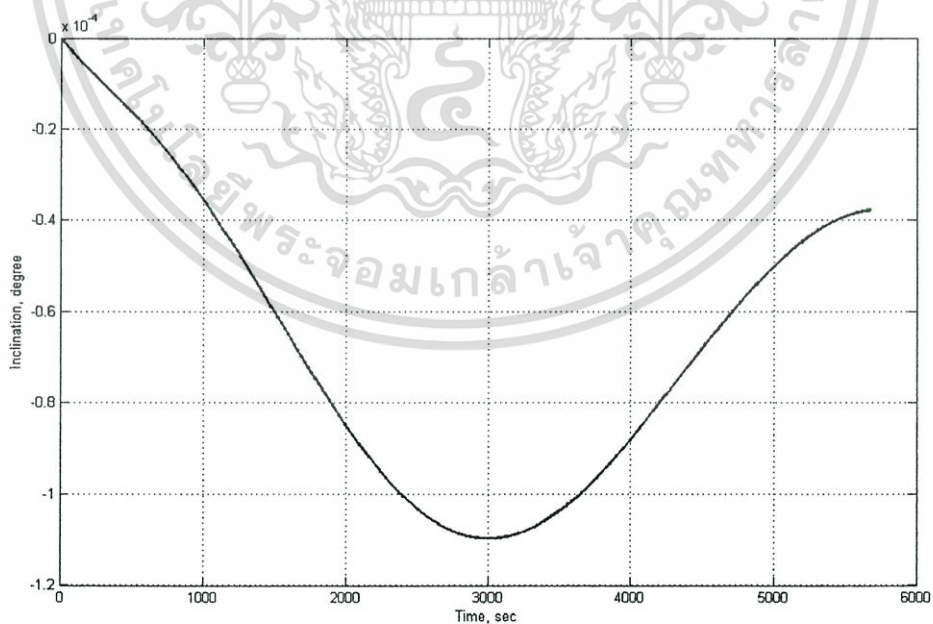
#### 4.3.4 ผลการทดลอง

ในการประมาณค่าการเกิดการรบกวนการโคจรของดาวเทียมให้มีความแม่นยำสูงนั้น จำเป็นต้องทำการกะประมาณวงโคจรที่นำมาใช้อ้างอิงให้มีความแม่นยำสูงเสียก่อน ซึ่งในที่นี้เราได้แบบจำลองการทำนายวงโคจรมาแล้ว จากนั้นจึงทำการกำหนดการรบกวนที่เกิดขึ้นจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ ด้วยสมการที่ได้อธิบายแล้วข้างต้น จากนั้นทำการวัดค่าตัวแปรต่างๆ เทียบกับเวลา ซึ่งได้ผลแสดงออกมาในรูปแบบกราฟดังนี้



รูปที่ 4.6 การเปลี่ยนแปลงของค่า  $a$  เทียบกับเวลา

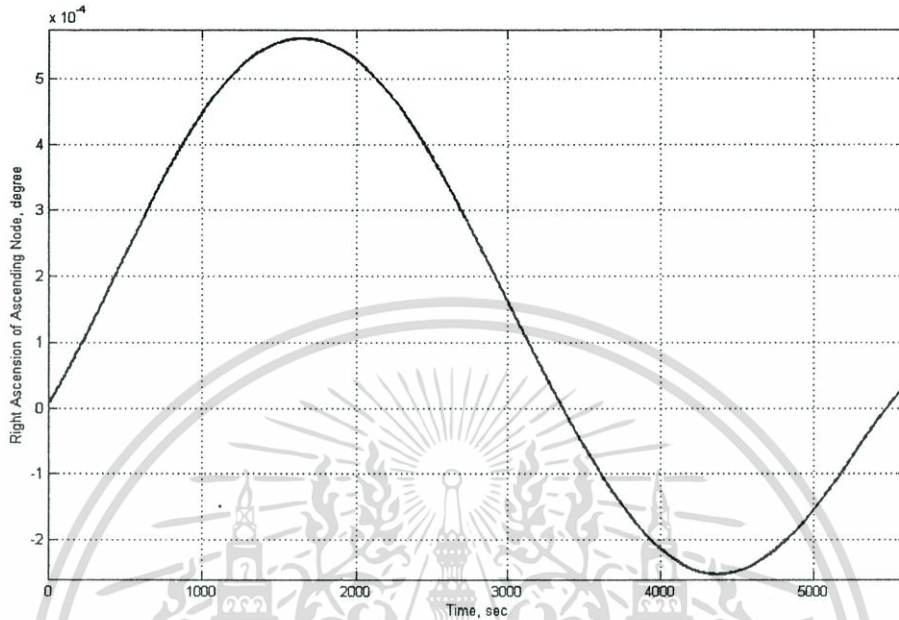
จากกราฟ  $a$  ที่ตำแหน่งเวลาเป็น 0 ค่า  $M$  จะเป็น 0 เมื่อเริ่มมีการเคลื่อนที่ไปจนถึงนาฬิกาที่ 20 วง โครจรจะขยับตัวสูงออกจากตำแหน่งเดิมมากที่สุด มีค่าประมาณ 0.78 เมตร จากนั้นค่าจะลดลงเรื่อยๆ จนต่ำกว่าระดับความสูงแบบที่ไม่เกิดการรบกวนประมาณ 1.52 เมตร ในนาฬิกาที่ 67



รูปที่ 4.7 การเปลี่ยนแปลงของค่า  $i$  เทียบกับเวลา

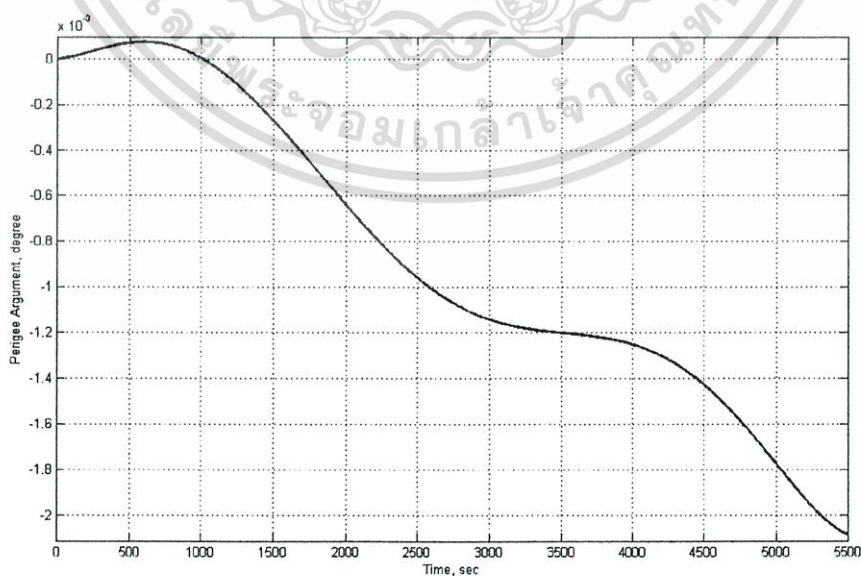
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อพิจารณามุมยก ( $i$ ) จากระนาบศูนย์สูตรมุมยกจะถูกรบกวนให้ต่ำลงจากระนาบเดิม โดยต่ำสุดที่นาทีกี่ 50 ประมาณ 1.1 องศา



รูปที่ 4.8 การเปลี่ยนแปลงของค่า  $\Omega$  เทียบกับเวลา

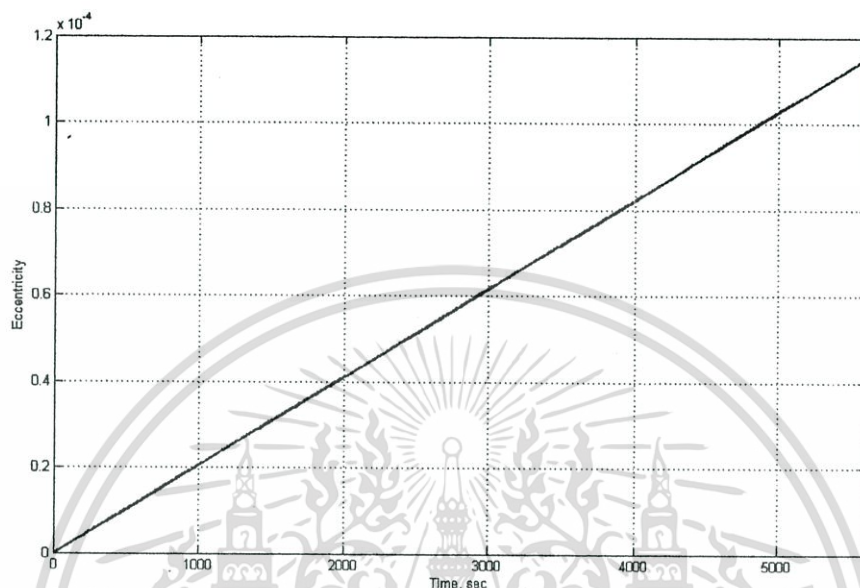
จากกราฟในนาทีกี่ 26 ค่าการบิดตัวเทียบกับอิกวินออกซ์เพิ่มจากองศาปกติไปเพียงเล็กน้อยประมาณ 0.00055 องศา ในนาทีกี่ 72 มุมนี้จะลดค่าลงไปประมาณ 0.00025 องศา



รูปที่ 4.9 การเปลี่ยนแปลงของค่า  $\omega$  เทียบกับเวลา

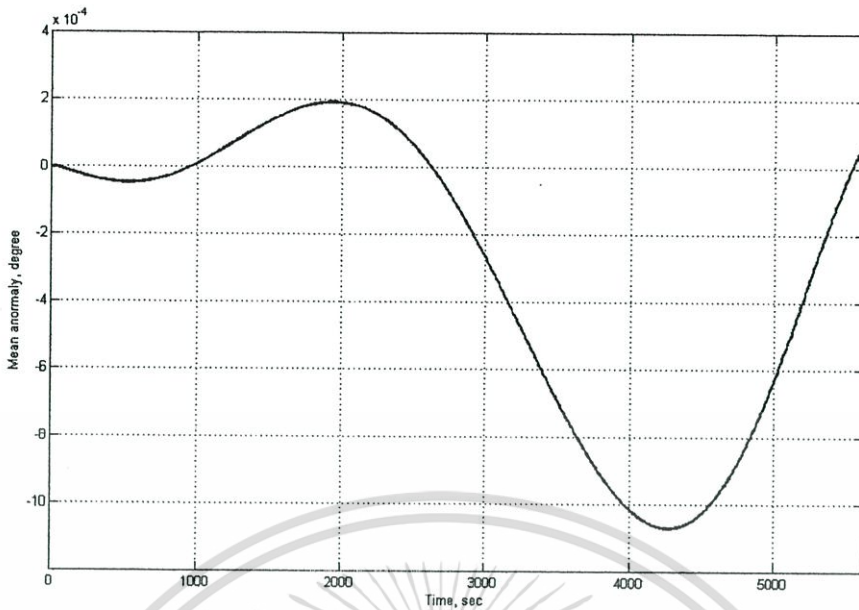
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในขณะที่การรบกวนการบิดตัวของตำแหน่งเพอริจีเทียบกับตำแหน่งเส้นของโนคพบว่า มุมถูกรบกวนไปในทิศทางที่เป็นลบและจะถูกรบกวนไปเรื่อยๆ เมื่อเคลื่อนที่ไปครบรอบจะเกิดการรบกวนมากที่สุด คือ 0.0021 องศา



รูปที่ 4.10 การเปลี่ยนแปลงของค่า  $e$  เทียบกับเวลา

ค่า Eccentricities มีแนวโน้มเพิ่มขึ้นแบบเชิงเส้น หมายความว่าวงโคจรของดาวเทียมจะเริ่มมีรูปร่างเพี้ยนไปจากแบบวงกลม กลายเป็นวงรีที่มีความรีเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $e$  มีค่าประมาณ 0.00015 ต่อรอบ



รูปที่ 4.11 การเปลี่ยนแปลงของค่า  $M$  เกี่ยวกับเวลา

จากรูปจะเห็นว่ามีการเปลี่ยนแปลงไป โดยเพิ่มจากระดับปกติที่นาที่ 33 ประมาณ 0.0002 และลดลงมากที่สุดนาที่ที่ 72 ประมาณ 0.00105

#### 4.4 แบบจำลองการบอกตำแหน่งที่ได้จากการประมาณโดยวงจรรองแบบกาลมาน

แบบจำลองการวัดตำแหน่งที่ได้จากการประมาณโดยวงจรรองแบบกาลมาน จะถูกนำไปทำนายค่าตำแหน่งของดาวเทียมในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวนจากสภาพแวดล้อมในอวกาศ ผลการทดลองจะแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ของตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่

เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหา และข้อจำกัดต่างๆที่เกิดขึ้นในการใช้วงจรรองแบบกาลมาน สำหรับทำนายวงโคจร วิธีการแบบขยายจึงถูกนำมาใช้ในการทดลอง ซึ่งวิธีการขยายแบบนี้เราสามารถแก้สมการจากสมการกาลมานแบบพื้นฐานได้ โดยการรีเซตค่าสถานะอ้างอิง  $x_{i-1}^{ref}$  เพื่อการประมาณค่า  $x_{i-1}^+$  ที่จุดเริ่มต้นของแต่ละขั้นตอน

เฟสของเวลาที่เปลี่ยนไปของวงจรรองแบบขยายนี้ประกอบด้วย การถ่ายทอดคุณสมบัติของการประมาณก่อนหน้า  $x_{i-1}^+$  คือจาก  $t_{i-1}$  ไปยัง  $t_i$  และการหาคำตอบของสมการที่เปลี่ยนไป จะได้ค่าเวกเตอร์สถานะ  $x_i^-$  และค่าโควาเรียนซ์เมทริก  $P_i^-$  เป็น

$$\begin{aligned} x_i^- &= x(t_i; x(t_{i-1})) = x_{i-1}^+ \\ P_i^- &= \Phi_i P_{i-1}^+ \Phi_i^T \end{aligned} \quad (4.44)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

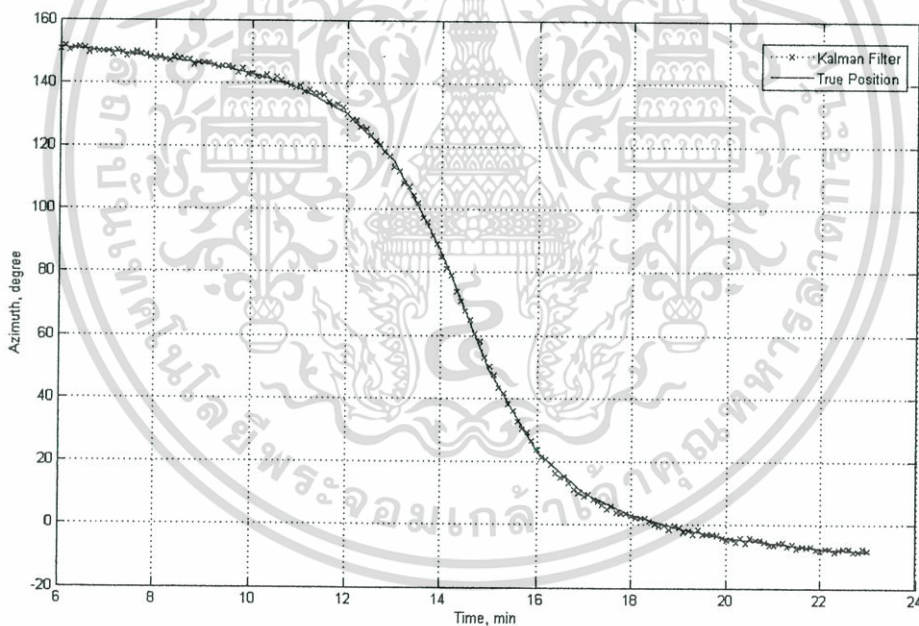
เฟสการวัดที่เปลี่ยนแปลงจะมีค่าคงเหลืออยู่เหมือนกับวิธีแบบพื้นฐานของคาลมาน ยกเว้นสำหรับสมการการเปลี่ยนแปลงสถานะแบบง่าย ๆ

$$\begin{aligned} K_i &= P_i^- G_i^T (W_i^{-1} + G_i P_i^- G_i^T)^{-1} \\ x_i^+ &= x_i^- + K_i (z_i - g_i(x_i^-)) \\ P_i^+ &= (1 - K_i G_i) P_i^- \end{aligned} \quad (4.45)$$

ค่าเริ่มต้นของฟิลเตอร์จะเป็น  $x_0 = x_0^{apr}$  และ  $P_0 = P_0^{apr}$  เนื่องจากหลักใน สถานะอ้างอิงแบบ ไม่เชิงเส้นจะถูกลดค่าลงให้น้อยที่สุด และสามารถหาคำตอบได้ภายในไม่กี่ขั้นตอน

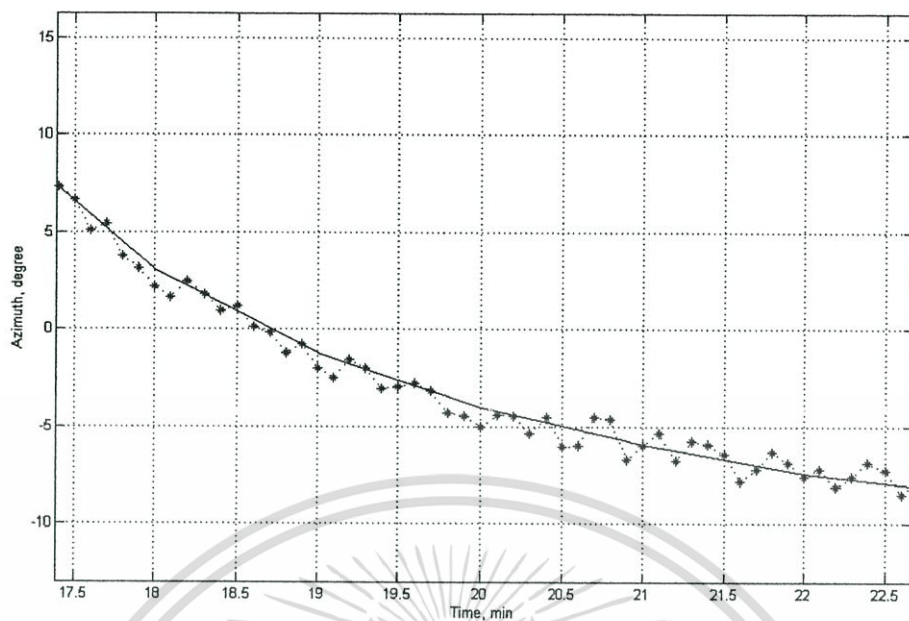
### ผลการทดลอง

ในการทดลองเราได้ทำการสร้างแบบจำลองการวัดตำแหน่งวงโคจร ซึ่งให้ผลออกมาดังนี้

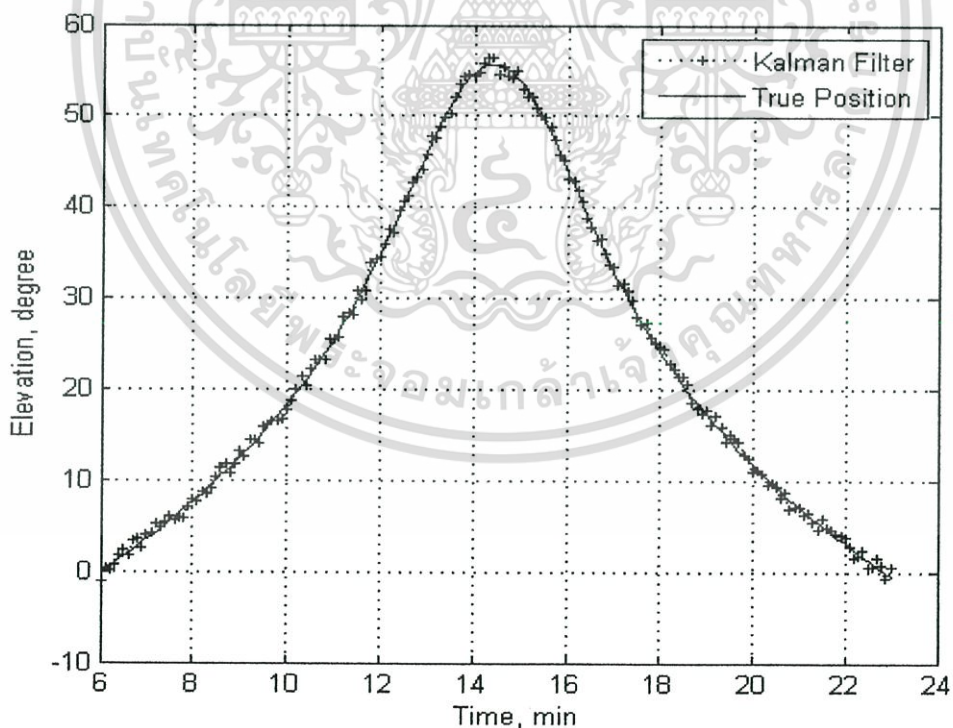


รูปที่ 4.12 การวัดค่ามุมอาซิมุทเทียบกับเวลาในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

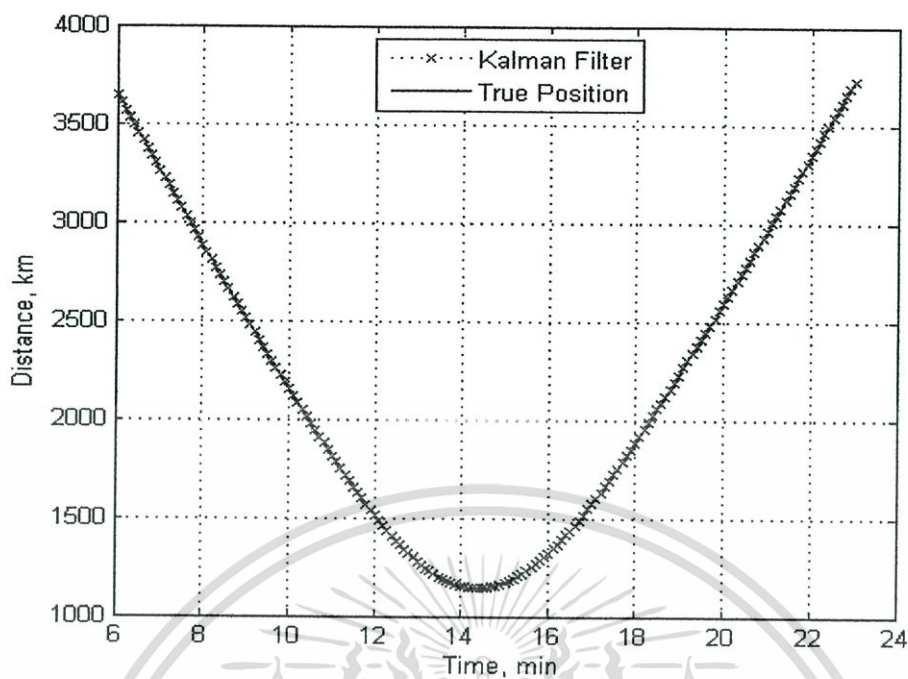


รูปที่ 4.13 ภาพขยายการวัดค่ามุมอาซิมุทเทียบกับเวลาในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน



รูปที่ 4.14 การวัดค่ามุมยกเทียบกับเวลาในกรณีที่ไม่เกิดการรบกวน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.15 การวัดค่าระยะทางจากจุดสังเกตการณ์เทียบกับเวลาในกรณีที่ไมเกิดการรบกวน

จากกราฟแสดงให้เห็นถึงความผิดพลาดจากการวัดค่าวงโคจรที่ไม่เกิดการรบกวนด้วยวงจรรองแบบคาตาลาน โดยเรากำหนดให้วงจรทำการสแกน 10 ครั้งต่อ 1 นาที ผลที่ได้คือค่าความผิดพลาดในการวัดของมุมอาซิมูทมีค่าสูงสุดที่ประมาณ 1.3 องศา ค่าความผิดพลาดในการวัดของมุมยกมีค่าสูงสุดที่ประมาณ 2.1 องศา และสุดท้ายความผิดพลาดค่าระยะทางจากจุดสังเกตการณ์ถึงดาวเทียมมีค่าสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 1.2 เมตร

## บทที่ 5

# บทสรุปและวิจารณ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการศึกษา และวิจัยเกี่ยวกับการทำนายตำแหน่งวงโคจรของดาวเทียมแบบที่ไม่เกิดการรบกวน และแบบที่เกิดการรบกวนวงโคจรอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ โดยอาศัยสมมติฐานในการสร้างแบบจำลองวงโคจรดาวเทียมที่มีความแม่นยำสูง เพื่อสามารถนำไปใช้ในการวิเคราะห์หาค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากสาเหตุต่างๆ เช่น จากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ เป็นต้น ซึ่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้แบ่งออกเป็น 5 บท เริ่มด้วยบทที่ 1 เป็นการกล่าวถึงความเป็นมา และความสำคัญของการกำหนดวงโคจรดาวเทียมที่มีความแม่นยำสูง และปัญหาที่เกิดขึ้น อันเป็นจุดเริ่มต้นของสมมติฐานที่นำไปสู่การค้นคว้า และวิจัยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

บทที่ 2 เป็นการกล่าวถึงหลักการ และทฤษฎีที่นำมาใช้ในการทำนายวงโคจรดาวเทียม ประกอบไปด้วยสมการของเคปเลอร์ และวิธีการแก้สมการเคปเลอร์ ซึ่งเป็นวิธีการที่นิยมนำมาใช้ในการทำนายวงโคจรดาวเทียม จากนั้นจะนำเข้าสู่ทฤษฎีการยกตัวของวงโคจรเมื่อทำการอ้างอิงจากศูนย์กลางโลก โดยหลักการเหล่านี้เป็นหลักการพื้นฐานที่สำคัญต่อการศึกษาความเป็นมา และความเปลี่ยนแปลงเกี่ยวกับวงโคจรดาวเทียม

บทที่ 3 เป็นการศึกษาเกี่ยวกับหลักการของระบบตามร่องวัตถุ เป็นการกล่าวถึงหลักการตามร่องวัตถุ โดยวงจรรองแบบคาถมาน ซึ่งทำการศึกษาตามสมมติฐานที่ว่าวงจรรองแบบคาถมานนั้นมีประสิทธิภาพสูง และสามารถนำมาใช้ในการจำลองแบบการทำนายวงโคจรได้ด้วย และจากนั้นจะทำการเปรียบเทียบผลการทำนายที่ได้

บทที่ 4 เป็นการนำเสนอหลักการสร้างแบบจำลองและผลการทดลองที่ได้ ในหัวข้อที่ 4.2 จะกล่าวถึงหลักการของการอินทิเกรตเชิงตัวเลขแบบรันจ-กัตตาอันดับที่ 4 โดยวิธีการนี้เป็นที่นิยมนำมาใช้แก้สมการเกี่ยวกับวงโคจร จากนั้นเราได้นำเสนอผลการทดลองทำนายการวัดค่าการเปลี่ยนแปลงต่างๆ หัวข้อที่ 4.3 เสนอผลการทดลองกรณีที่มีการป้อนค่าการรบกวนอันเนื่องมาจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าการเปลี่ยนแปลงในลักษณะที่แตกต่างกันออกไปถ้าเราต้องการความแม่นยำในระดับสูง ก็ต้องทำการเพิ่มเทอมของการรบกวนในกรณีอื่นๆเข้าไป เช่น การรบกวนอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์น้ำขึ้นน้ำลงความสัมพัทธ์ทั่วไป หรืออิทธิพลของแรงดึงดูดจากดวงจันทร์ และหัวข้อสุดท้าย 4.4 เป็นการวัดค่าการเคลื่อนที่ของดาวเทียมบนแบบจำลองวงโคจรที่ถูกสร้างขึ้นในหัวข้อที่ 4.2 ด้วยวงจรรองแบบคาถมาน จากผลที่ได้นั้นมีค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นสูงสุดอยู่ที่ประมาณ 2-3 องศา ซึ่งเมื่อทำการอ้างอิงตำแหน่งจริงถือว่าการระบุตำแหน่งผิดพลาดไปค่อนข้างมากคือ ประมาณ 1 เมตรต่อ 1 องศา

## บรรณานุกรม

- [1] K.V.Ramachandra, “**Kalman Filtering Techniques for radar tracking**”, Marcel Dekker, Newyork, 2000.
- [2] A. Hauschild, O. Montenbruck., “**Real-time Clock Estimation for Precise Orbit Determination of LEO-Satellites**”, ION-GNSS-2008, 16-19 Sep. 2008
- [3] S. Nakamura, N. Kudo, Y. Yamamoto and O. Montenbruck, “**Precise Orbit Determination for Adeos-II**”, 19th International Symposium on Space Flight Dynamics , 4-11 June 2006
- [4] Oliver Montenbruck, Eberhard Gill.,”**Satellite Orbits**”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
- [5] นิคม พรหมกะจิน, “การปรับปรุงวงจรมอบคาลมานสำหรับการตามร่องเป้าหมายที่มีการเคลื่อนที่ที่มีการป้อนกลับความผิดพลาด” ,สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2547
- [6] R. Jangsilapa, S. Noppanakeepong “**A Study of Ionosphere Characteristics over King Mongkut’s Institute of Technology Ladkrabang by using GPS data**, TISD 2008 , 28-29 January 2008.
- [7] Mohinder S.Grewal , Angus P.Andrews, “**Kalman Filter Theory and Practice**”, Prentice - Hall, New Jersey 1993.
- [8] Paul Vergez<sup>1</sup>, Luke Sauter<sup>2</sup>, and Scott Dahlke<sup>3</sup>, “**An Improved Kalman Filter for Satellite Orbit Predictions**”, The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 52, No. 3, July–September 2004



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



ภาคผนวก ก.

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

1. Rapeepan Jangsilapa Suthichai Noppanakeepong, "A Study of Ionosphere Characteristics over King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang by using GPS data", TISD 2008, 28-29 January 2008.

# TISD2008

The 2<sup>nd</sup> Technology and Innovation  
for Sustainable Development Conference

January 28–29, 2008

Khon Kaen, Thailand

## Abstract Collection

เอกสารรวบรวมบทความคัดย่อ



Faculty of Engineering, Khon Kaen University



North-Eastern Engineering Institute of Thailand  
Under H.M. the King's Patronage



Sustainable Infrastructure Research and  
Development Center (SIRDC)

Energy Management and Conservation Office  
(EMCO), Khon Kaen University



Research Center for Environmental and  
Hazardous Substance Management



Electricity Generating Authority of  
Thailand (EGAT)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นิยมนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหาและต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Agricultural Machinery and  
Postharvest Technology Center



The GPS satellites generate a 10.23 MHz pseudorandom noise (PRN) code to modulate the carriers of the L1 and L2 signals (called the P code). The P code is classified information, but one method used obtains the time delay ( $\delta t$ ) by correlating the code of the two carriers. The difference in the group delay between the two frequencies  $f_1$  and  $f_2$  is related to TEC as

$$\delta t = b \left( \frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right) N_T \quad (2)$$

Where  $b = \frac{e^2}{8\pi m \epsilon_0 c}$  In our calculation, we obtained  $b = 1.3446 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . [2]

Substituting constants into eq.2, we have the total electron content of

$$N_T = 2.85 \times 10^{25} \delta t \quad [el/m^2] \quad (3)$$

The total electron content (TEC) that presented above is known as slant TEC (sTEC) and is defined as total number of electrons integrated along the path from each GPS satellite to receiver. It is measured at differing elevation angles. Therefore, the vertical TEC is calculated [3] by

$$vTEC = sTEC(\text{obliquity}) \quad (4)$$

when

$$\text{obliquity} = \sqrt{1 - a^2} \quad (5)$$

$$a = \frac{R \cos(e)}{R + h}$$

Where

- e is the elevation of satellite as seen at the receiver (assumed on Earth's surface)
- R is the Earth's radius
- h is the height of maximum electron density (about 450 km.)

The point at which the signal crosses the ionosphere shell is called the ionosphere pierce point or IPP. The IPP for a given satellite and receiver can be computed from the receiver position and the observed elevation and Azimuth angles of the satellite as seen at the receiver, along with the height of ionosphere. If the angle subtended at Earth's center by the receiver and the IPP is

$$IPP = \frac{\pi}{2} - e - \sin^{-1} \left( \frac{R \cos(e)}{R + h} \right)$$

(6)

Then the latitude  $\phi$  and longitude  $\lambda$  of the IPP are

$$\phi_{IPP} = \sin^{-1}(\sin(\phi) \cos(p) + \cos(\phi) \sin(p) \cos(a)) \quad (7)$$

$$\lambda_{IPP} = \lambda + \sin^{-1}(\sin(p) \sin(a) / \cos(\phi)) \quad (8)$$

where the receiver position is given by latitude and longitude  $(\phi, \lambda)$  and  $(e, a)$  are the observed elevation and azimuth of the satellite. The radius of the IPP is  $R+h$ . [4]

## 2.2 An open source program

In this experiment, we use GPS toolkit for open source the RINEX files and calculate TEC at epoch by using the delay data. [5] The GRS toolkit consists of a library and a set of applications that build on the library. The library provides base functionality common to most GPS processing, including algorithms and standards commonly defined in GPS textbooks. Library capabilities include reading and writing observations in standard formats such as RINEX; atmospheric delay modeling and P-code generation

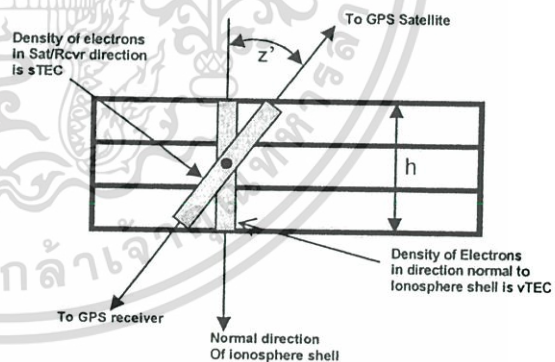


Figure2. The ionosphere shell that show the difference between the two electron densities sTEC and vTEC

## 3. Results

In this section, we present results of the Total Electron Content (TEC) mapping from observed data.

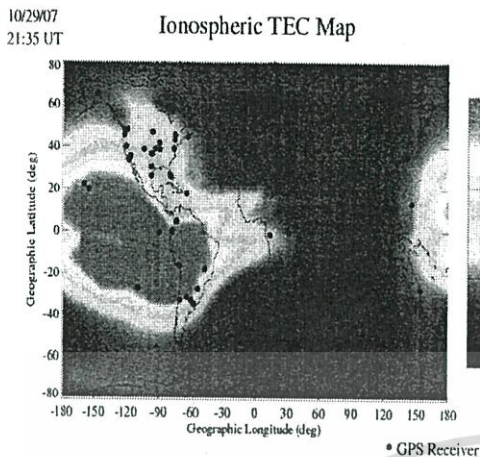


Figure3. The Ionospheric TEC Map of 29 October 2007, 03.01 P.M.

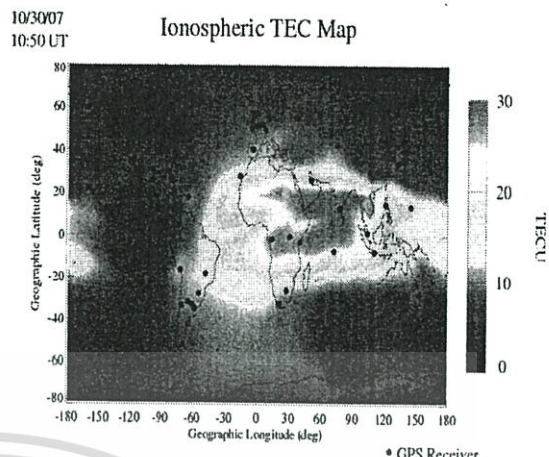


Figure6. The Ionospheric TEC Map of 30 October 2007, 04.01 A.M.

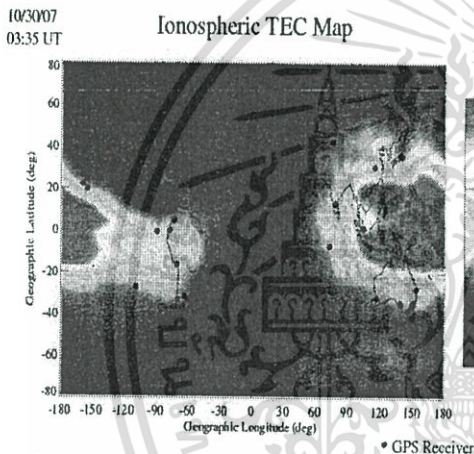


Figure4. The Ionospheric TEC Map of 29 October 2007, 09.01 P.M.

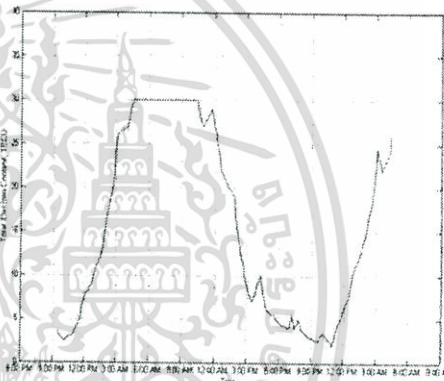


Figure7. show the Total Electron Content over KMITL's GPS receiver area from day 301 to 302 of year 2007

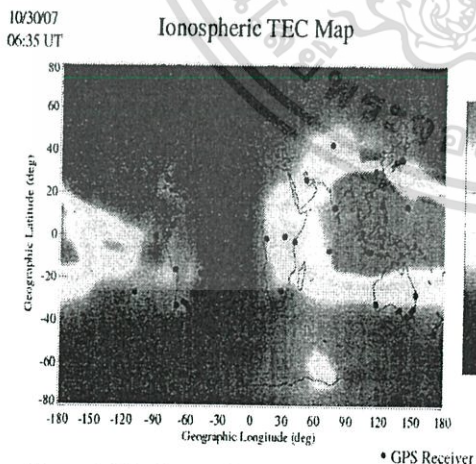


Figure5. The Ionospheric TEC Map of 30 October 2007, 00.01 A.M.

#### 4. Conclusions

Total Electron Content (TEC) map were generated for day 301 to 302 of 2007 using data from KMITL's monitoring station in High Accuracy Clock (HAC) experiment. The following figures give some representative TEC map results at different times of day

The GPS Measurement of ionospheric TEC is complicated by the fact that hardware delays exist both the satellite and GPS receiver. These delays arise from differing path lengths for the two GPS signal frequencies. They are essentially constant over short periods (days), but vary over longer timescales (months or year). Therefore, we must continuously observe for precise results.

Studying Ionosphere Characteristics is very Important in satellite communication, because the variation in the Total Electron Content can cause the signal to delay. If we can calculate the absolute TEC, the delay time

can be compensated in real time for precisely communication system.

### Acknowledgments

The authors wish to acknowledge those who have provided data input and advice to this process. To Dr. Narong Hemmakorn and Dr. Nipa Leelaruji from The Research Center for Communication and Information Technology (ReCCIT), King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Thailand for advising and to Dr. Shinichi Nakamura from JAXA for input data and technical discussions throughout this entire research project. And special thanks for Internet service data and application from NASA.

### References

- [1] Jun Awaka , Masaharu Fujita , “ETS-2 Experiments Part V: Effect of Ionosphere” , IEEE Transactions on Aerospace and Electronic systems , vol. AES-16 , no.5, pp. 590-599, September 1980.
- [2] Tadanori Ondoh and Katsuhide Marubashi eds. , Science of Space Environment , Ohmsha Ltd. , Japan , 2000.
- [3] Ahmed Faizal Mohd , Ho Yih Hwa , Abdulah , “First Ionospheric Experimental Campaign and Observation at Fraser’s Hill, Malaysia: Total Electron Content (TEC) and Scintillation Measurements” , Asia-Pacific conference on applied electromagnetics proceedings , pp. 134 -136, December 2005.
- [4] T. Gaussrian , “An Open Source Toolkit for GPS Processing , Total Electron Content Effects , Measurements and Modeling” , International Beacon Satellite Symposium , Italy , October 2004.
- [5] Y.Otsuka , T.Ogawa , T.Tsugawa , S.Fokao , S.Miyazaki , “A new technique for mapping of total electron content using GPS network in Japan” , Earth Planets Space , vol. 54 , pp. 63-70 , 2002.

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อผู้เขียน	นางสาวรพีพรรณ แจ่มศิลป์
วันเดือนปีเกิด	2 มกราคม 2524
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
วุฒิการศึกษาระดับปริญญาตรี	วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาฟิสิกส์ประยุกต์
สถานที่สำเร็จการศึกษา	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีที่สำเร็จการศึกษา	2545



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้