

เส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวของพื้นผิวของระนาบหมุนรอบที่ตัดกันของพื้นผิว
ส่วนโค้งของเส้น

GEODESIC CURVES ON SOLID SURFACES OF REVOLUTION
WITH NUMERICAL STUDY FOR COMPUTATION

นทีพร บุษงำ
NATEAPRON BOONHAM

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2553

KMITL-2010.SC.M.001-008

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

เส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบที่มีการศึกษาเชิงตัวเลข
สำหรับการคำนวณ

GEODESIC CURVES ON SOME SURFACES OF REVOLUTION
WITH NUMERICAL STUDY FOR COMPUTATION



T116941

ณัฐพล บุญนำ

NATHAPHON BOONNAM

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 116941
วัน,เดือน,ปี... 17 มี.ย. 2554

b. 12331193
i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ. 2553

KMITL-2010-SC-M-001-023

**GEODESIC CURVES ON SOME SURFACES OF REVOLUTION
WITH NUMERICAL STUDY FOR COMPUTATION**

NATHAPHON BOONNAM

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE**

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2010

KMITL-2010-SC-M-001-023

COPYRIGHT 2010

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบที่มีการศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณ
 Geodesic curves on some surfaces of revolution with numerical study for computation

นักศึกษา นายฉัฐพล บุญนำ

รหัสประจำตัว 51067404

ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ภคคินี ชิตสกุล

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.พันธ์ณี พงศ์สัมพันธ์	รศ.ดร.ชูชาติ ชิตสกุล	
ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ		
รศ.ดร.ชูชาติ		
รศ.ภคคินี		

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
 วัน/เดือน/ปี ที่สอบ วันอังคารที่ 24 พฤษภาคม พ.ศ. 2554 เวลา 09.00-12.00 น.

สถานที่สอบ ณ ห้องสัมมนา 210 ชั้น 2 อาคารจุฬารามวลัยลักษณ์ 1

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว


 (รองศาสตราจารย์ ดร.คุณฉวี ธีรนริวัฒน์)
 คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ 27 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 54

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบ ที่มีการศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณ
นักศึกษา	นายณัฐพล บุญนำ
รหัสประจำตัว	51067404
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2553
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า เส้นโค้งที่สั้นที่สุดหรือจีโอเดสิกบนพื้นผิวของทรงกลม คือ จุดตัดของระนาบและทรงกลม นั่นก็คือ วงกลมใหญ่ อย่างไรก็ตาม การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวอื่นๆ นั้น ไม่ค่อยได้รับความสนใจเท่าที่ควร แต่ในปัจจุบันนี้ นักวิจัยหลายท่านเริ่มให้ความสนใจในการศึกษาปัญหาดังกล่าวอย่างกว้างขวาง สำหรับเส้นโค้ง α ใน $M \subset \mathbb{R}^3$ เป็นจีโอเดสิกของ M โดยมีเงื่อนไขว่าความเร่ง α'' จะตั้งฉากกับ M เสมอ หรือ $\alpha' \cdot \alpha'' = 0$ ในงานวิจัยนี้จะศึกษาปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบ โดยวิเคราะห์จากสมการอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวนั้นๆ เส้นโค้งที่สั้นที่สุดสามารถหาได้จากการประยุกต์ของสมการออยเลอร์ ผลการวิจัยพบว่า บนพื้นผิวของการหมุนรอบที่ได้จากการวิจัยนั้น มีจีโอเดสิกจริง แต่ไม่ได้มีเพียงหนึ่งเดียว ทำให้จำเป็นต้องระบุเงื่อนไขโดยแยกออกเป็นกรณีต่างๆ เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด นอกจากนี้ในงานวิจัยนี้ จะประยุกต์ใช้การศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณระยะทางดังกล่าว ในท้ายที่สุด จะนำเสนอแนวทางการประยุกต์ของงานวิจัยนี้

คำสำคัญ: จีโอเดสิก พื้นผิวของการหมุนรอบ สมการออยเลอร์

Thesis Title GEODESIC CURVES ON SOME SURFACES OF REVOLUTION
WITH NUMERICAL STUDY FOR COMPUTATION

Student Nathaphon Boonnam

Student ID 51067404

Degree Master of Science

Program Applied Mathematics

Year 2010

Thesis Advisor Associate Professor Pakkinee Chitsakul

ABSTRACT

It is well-known that the shortest curve or geodesic on surface of sphere is the intersection of plane and sphere; the great circle. However, finding of the shortest curve on the other surfaces is not much studied. Currently, many researchers are more interested in studying about this field widely. A curve α in $M \subset \mathbb{R}^3$ is a geodesic of M provided its acceleration α'' is always normal to M or $\alpha' \cdot \alpha'' = 0$. In this paper, we study the shortest path on some surfaces of revolution. Then, we analyze the parametric equation to determine the shortest curve by using the application of Euler's equation. We find that the solution exists but the solution is not unique. It's necessary and sufficient to specify the condition by classifying the shortest distance into all cases. For getting the solution which gives the shortest curve, we apply the numerical study to find one. Finally, the application of this study is given.

Keywords : geodesic, surface of revolution, Euler's equation

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ในหัวข้อ เส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวบางชนิดของการหมุนรอบที่มีการศึกษาเชิงตัวเลขสำหรับการคำนวณ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีนั้น ผู้จัดทำขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล ผู้ที่คอยชี้แนะ ให้คำแนะนำ และเป็นที่ปรึกษาในการตรวจสอบ ปรับปรุง เปลี่ยนแปลง และแก้ไขรายละเอียดเนื้อหา หรือปัญหาอุปสรรคในการดำเนินงานวิจัย รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพนธ์นี้ด้วย

ขอขอบพระคุณประธานกรรมการสอบ อาจารย์บัณฑิตประจำ และผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก อันประกอบด้วย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พันธณี พงศ์สัมพันธ์ ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ และรองศาสตราจารย์ ดร.ชูชาติ ปิณฑวิรุจน์ ตามลำดับ ผู้พิจารณาหัวข้อและสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง และเพิ่มเติมรายละเอียดของวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบพระคุณผู้สังเกตการณ์ ดร.บุญมาส พิมพ์พรรณชาติ ดร.ศุภระวรรณ มะเวชะ และ ดร.อาทิตย์ แจ็งธัญการ ทำให้วิทยานิพนธ์นี้มีความสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาท ทั้งทางด้านวิชาความรู้ ตลอดจนคุณธรรม จริยธรรมที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์นี้สัมฤทธิ์ผลเป็นที่เรียบร้อย

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คุณชุตติกาญจน์ ต้นยะสิทธิ์ และคุณอุคร บุญธรรม ที่คอยช่วยเหลือ ส่งเสริม และอำนวยความสะดวก ทั้งในด้านเอกสารต่างๆ อีกทั้งในส่วนของการใช้คอมพิวเตอร์ และเครื่องพิมพ์เอกสารในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

ขอขอบคุณน้องๆ นักศึกษา โดยเฉพาะ นายวงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง ที่คอยให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกัวิทยานิพนธ์นี้ รวมถึงคอยให้กำลังใจเสมอมาจนกระทั่งสำเร็จลุล่วงทุกประการ

สุดท้ายนี้ ขอขอบพระคุณ บิดา – มารดา ผู้ให้การสนับสนุน และเป็นกำลังใจเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา ประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

นายณัฐพล บุญนำ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ii
กิตติกรรมประกาศ.....	iii
สารบัญ.....	iv
สารบัญรูป.....	vi
สารบัญตาราง.....	viii
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของการวิจัย.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.....	3
1.3 ข้อยกเว้นและขอบเขตของการวิจัย.....	4
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	4
1.5 ขั้นตอนดำเนินการวิจัย.....	4
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....	6
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	17
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย.....	19
3.1 พื้นผิวของการหมุนรอบ.....	19
3.1.1 ทรงกลม (sphere).....	19
3.1.2 ทรงกระบอก (cylinder).....	20
3.1.3 ทรงกรวย (cone).....	22
3.1.4 ทรงห่วงยาง (torus).....	23
3.2 การประยุกต์ของสมการออยเลอร์ในการหาจีโอเดสิก.....	24
3.2.1 จีโอเดสิกบนทรงกลม.....	25
3.2.2 จีโอเดสิกบนทรงกระบอก.....	28
3.2.3 จีโอเดสิกบนทรงกรวย.....	30
3.2.4 จีโอเดสิกบนทรงห่วงยาง.....	33

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.3 กรณีที่เป็นไปได้สำหรับการมีเส้นโค้งจีโอเดสิก.....	36
3.3.1 เส้นโค้งเมอริเดียน.....	36
3.3.2 เส้นโค้งพาราเรล.....	38
3.3.3 เส้นเกลียวหรือเส้นเวียนก้นหอย.....	40
3.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองสำหรับการวิเคราะห์จีโอเดสิก.....	42
3.4.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกลม.....	44
3.4.2 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกระบอก.....	44
3.4.3 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกรวย.....	45
3.4.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงห้วงยาง.....	45
บทที่ 4 การวิเคราะห์การวิจัย.....	46
4.1 กราฟที่เป็นไปได้สำหรับการมีเส้นโค้งจีโอเดสิก.....	46
4.2 ระบบสมการเชิงสองมิติในรูปแบบปรกติของระบบเอกพันธ์.....	49
4.2.1 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม.....	50
4.2.2 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก.....	52
4.2.3 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย.....	54
4.2.4 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห้วงยาง.....	56
4.2 แนวทางการประยุกต์ของงานวิจัยในทางการแพทย์.....	58
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและแนวทางการพัฒนา.....	61
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	61
5.2 ข้อจำกัดของการวิจัย.....	62
5.3 แนวทางการพัฒนางานวิจัยในอนาคต.....	62
เอกสารอ้างอิง.....	64
ภาคผนวก ก ผลงานที่นำไปเสนอสู่การประชุมเชิงวิชาการ.....	65
ประวัติผู้เขียน.....	83

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1	สมการอิงพารามิเตอร์ของ $x^2 + y^2 = 1$ เมื่อ $t \in [0, 2\pi]$ 2
1.2	วงกลมใหญ่จะแบ่งครึ่งทรงกลมออกเป็น 2 ส่วน และมีจุดศูนย์กลาง (O) เดียวกัน 2
1.3 (ก)	ทุกจุดบนทรงกลมมีวงกลมใหญ่ตัดผ่านเสมอ 3
1.3 (ข)	แสดงส่วนโค้งน้อยและส่วนโค้งใหญ่ของทรงกลม 3
2.1	การส่ง $\varphi: U \rightarrow V \cap S$ ของเซตเปิด $U \subset \mathbb{R}^2$ ทัวถึง $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ 8
2.2	ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบ 11
2.3	ภาวะอิงพารามิเตอร์ที่แสดงโดยมุม v บนพื้นผิวของการหมุนรอบ 11
3.1	ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงกลม 19
3.2	การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงกลม 20
3.3	ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงกระบอก 21
3.4	การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงกระบอก 21
3.5	ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงกรวย 22
3.6	การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงกรวย 22
3.7	ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงห้วงยาง 23
3.8	การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงห้วงยาง 23
3.9	เส้นโค้งเมริเดียนที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกลม 36
3.10	เส้นโค้งเมริเดียนที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกระบอก 37
3.11	เส้นโค้งเมริเดียนที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกรวย 37
3.12	เส้นโค้งเมริเดียนที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงห้วงยาง 37
3.13	เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นจีโอเดสิก 38
3.14	เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นและไม่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกลม 38
3.15	เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกระบอก 39
3.16	เส้นโค้งพาราเรลที่ไม่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกรวย 39
3.17	เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงห้วงยาง 40
3.18	เส้นโค้งเกลียวที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกระบอก 40
3.19	เส้นเวียนก้นหอยรูปกรวยที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกรวย 41
3.20	เส้นเวียนก้นหอยรูปห้วงยางที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงห้วงยาง 41

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.1	กราฟของส่วนของวงกลมใหญ่บนทรงทรงแกลม..... 46
4.2	กราฟของส่วนของเส้นเกลียวบนทรงกระบอก..... 47
4.3	กราฟของส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปกรวยบนทรงกรวย..... 48
4.4	กราฟของส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปห่วย่างบนทรงห่วย่าง..... 49
4.5 (ก)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม..... 50
4.5 (ข)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม..... 51
4.5 (ค)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม..... 51
4.5 (ง)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม..... 51
4.6 (ก)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก..... 52
4.6 (ข)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก..... 53
4.6 (ค)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก..... 53
4.6 (ง)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก..... 53
4.7 (ก)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย..... 54
4.7 (ข)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย..... 55
4.7 (ค)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย..... 55
4.7 (ง)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย..... 55
4.8 (ก)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วย่าง..... 56
4.8 (ข)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วย่าง..... 57
4.8 (ค)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วย่าง..... 57
4.8 (ง)	กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วย่าง..... 57
4.9	เส้นทางการบินจากประเทศหนึ่งไปยังอีกประเทศหนึ่ง..... 58
4.10	การผ่าตัดโดยใช้แสงเลเซอร์..... 59
4.11	ลักษณะของแขนเชิงเรขาคณิตคล้ายกับทรงกระบอก..... 59
5.1	ผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยมบนทรงกลมนั้นมากกว่า 180 องศา แต่ถ้าใน สามเหลี่ยมเล็กนั้น มุมภายในสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ 180 องศา..... 62
5.2	หลักการทำงานของ GPS..... 63

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1.1	ตารางแผนการดำเนินการตามขั้นตอนดำเนินการวิจัย.....5
3.1	สรุบบระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองบนพื้นผิวที่ศึกษา.....45
5.1	การมีจีโอเดสิกบนพื้นผิวที่ศึกษา.....61

บทที่ 1

บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความสำคัญและที่มาของวิทยานิพนธ์ รวมทั้งวัตถุประสงค์ของการวิจัย ขอบเขตของการวิจัย ขั้นตอนของการวิจัย และประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากการวิจัยใน วิทยานิพนธ์นี้ เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจจะนำไปทำการวิจัยต่อไป

1.1 ความสำคัญและที่มาของการวิจัย

เรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (differential geometry) เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับความยาว พื้นที่ ปริมาตร ความโค้ง เป็นต้น โดยใช้สมบัติของเส้น โค้งและพื้นผิว ซึ่งในการศึกษาสมบัติเหล่านี้จะ ใช้ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยของปัญหาต่างๆ ที่ต้องการ โดยในการศึกษา สมบัติของเส้น โค้งและพื้นผิว จะเป็นการศึกษาเฉพาะบริเวณ เช่น การหาระยะทางที่สั้นที่สุด ระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวที่กำหนด การหาพื้นที่ที่มากที่สุดที่ล้อมรอบด้วยเส้นที่มีความยาวจำกัด การหาปริมาตรที่มากที่สุดที่ถูกปกคลุมด้วยพื้นผิวที่มีพื้นที่จำกัด ลักษณะความโค้งของเส้น โค้งที่อยู่ บนพื้นผิว เป็นต้น สำหรับงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาปัญหาของการหาระยะทางที่สั้นที่สุด ระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวที่ต้องการศึกษา ซึ่งปัญหานี้เรียกว่า **ปัญหาจีโอเดสิก (geodesic problem)**

ปัญหาจีโอเดสิกเป็นปัญหาหนึ่งในเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ที่จะศึกษาเกี่ยวกับการหาระยะทาง ที่สั้นที่สุดบนระนาบและพื้นผิวใดๆ นอกจากนั้น การเดินทางไปตามจีโอเดสิคบนพื้นผิวจะมี ทิศทางที่แตกต่างกัน ดังนั้นการศึกษาจีโอเดสิกจะต้องพิจารณาทิศทางบนพื้นผิวอีกด้วย เราสามารถ ที่จะหาระยะทางดังกล่าวได้ โดยจัดสมการอิงพารามิเตอร์ให้อยู่ในรูปทั่วไปสำหรับความยาวของ เส้น โค้ง จากนั้นใช้ทฤษฎีของสมการออยเลอร์ในการหาระยะทางที่สั้นที่สุด จีโอเดสิคที่ได้จะอยู่ใน รูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง แต่มีบางกรณีที่เป็นปัญหาในการหาผลเฉลยของสมการ เชิงอนุพันธ์ เนื่องจากมีวิธีที่แตกต่างกันในการจัดรูปสมการ ตัวอย่างเช่น กราฟของสมการ

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1.1)$$

ซึ่งเป็นสมการวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด ถ้ากำหนดภาวะอิงพารามิเตอร์ ของสมการ (1.1) ในรูปแบบ

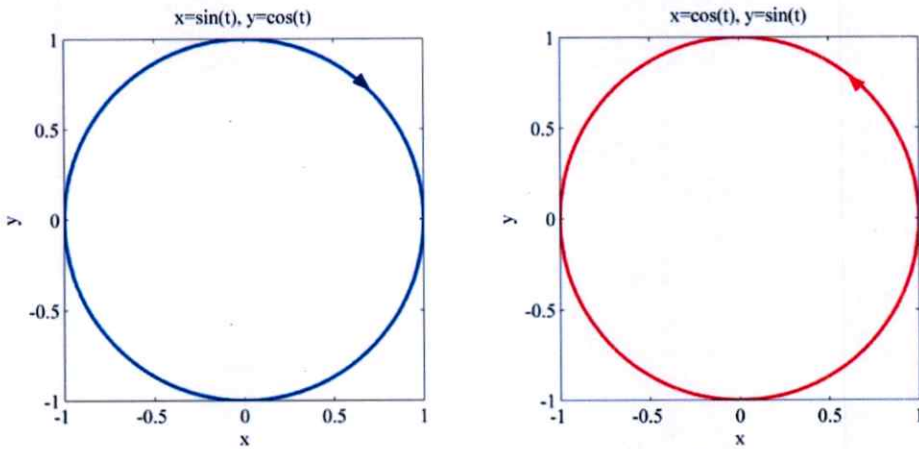
$$x = \cos t \text{ และ } y = \sin t \quad (1.2)$$

หรือ

$$x = \sin t \text{ และ } y = \cos t \quad (1.3)$$

โดยที่ t คือพารามิเตอร์ของเส้น โค้ง

ถ้าแทนค่า (1.2) หรือ (1.3) ไปในสมการวงกลม (1.1) แล้วจะเป็นจริงในทั้ง 2 กรณี แต่เมื่อพิจารณาการเดินทางของเส้นโค้ง จะพบว่ามิติศทางตรงข้ามกัน แสดงดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 สมการอิงพารามิเตอร์ของ $x^2 + y^2 = 1$ เมื่อ $t \in [0, 2\pi]$

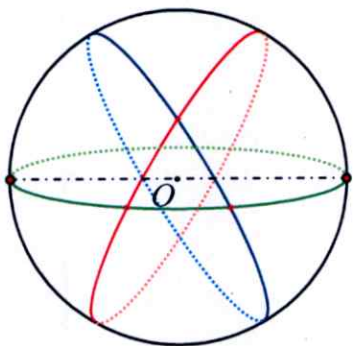
แสดงให้เห็นว่า ในสมการหนึ่งสมการ จะมีภาวะอิงพารามิเตอร์ได้หลายแบบที่แตกต่างกัน กรณีของสมการวงกลม (1.1) มีสมการอิงพารามิเตอร์ (1.2) และ (1.3) เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ซ้ำ (reparametrization) ซึ่งกันและกัน โดยทั่วไปแล้ว สมการอิงพารามิเตอร์นั้น จะเป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ซ้ำซึ่งกันและกันได้ก็ต่อเมื่อมีกราฟของสมการเดียวกัน นั่นคือ มีสมบัติทางเรขาคณิตเหมือนกัน

โดยพื้นฐานแล้ว เมื่อศึกษาจีโอเดสิกบนระนาบ ปัญหาการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ จะได้เส้นตรงเป็นคำตอบของปัญหาดังกล่าว ในกรณีที่ศึกษาจีโอเดสิกของทรงกลม ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงกลมไม่ได้เป็นเส้นตรงอย่างแน่นอน หลังจากที่มีการศึกษาและวิจัยจนเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวาง จึงเรียกจีโอเดสิกบนพื้นผิวดังกล่าวว่า **วงกลมใหญ่ (great circle)** มีลักษณะเป็นส่วนหนึ่งของเส้นโค้งที่ตัดกันระหว่างทรงกลมกับระนาบซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลม ทำให้เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมใหญ่ และเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลมซ้อนกันพอดี เพราะฉะนั้นทุกวงกลมใหญ่มีเส้นรอบวงที่มีความยาวเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางเดียวกัน นอกจากนี้ยังเป็นจุดศูนย์กลางของทรงกลมด้วย แสดงดังรูปที่ 1.2

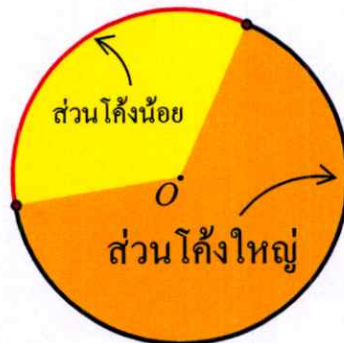


รูปที่ 1.2 วงกลมใหญ่จะแบ่งครึ่งทรงกลมออกเป็น 2 ส่วน และมีจุดศูนย์กลาง (O) เดียวกัน

สำหรับวงกลมใหญ่ เป็นวงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่สามารถวางบนทรงกลมที่กำหนดให้ได้ เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ บนพื้นผิวของทรงกลม จะมีวงกลมใหญ่ผ่านทั้งสองจุดนั้นเสมอ ในกรณีที่จุดสองจุดเป็นจุดตั้งขั้ว (antipodal) (หมายถึง จุดสองจุดที่อยู่ตรงข้ามกันบนพื้นผิว และเมื่อลากเส้นเชื่อมระหว่างจุดทั้งสองแล้วจะเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง) เราสามารถกล่าวได้ว่า ส่วนโค้งของวงกลมใหญ่ทั้งสองเส้นเป็นจีโอเดสิกของทรงกลม ถ้าในกรณีที่จุดสองจุดนั้นไม่ได้เป็นจุดตั้งขั้วกัน จะแยกพิจารณาออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนโค้งใหญ่ (major arc) และส่วนโค้งน้อย (minor arc) แสดงดังรูปที่ 1.3 (ข) สังเกตได้ว่า ส่วนโค้งน้อยของวงกลมใหญ่ระหว่างจุดสองจุด คือ ระยะทางที่สั้นที่สุด



(ก)



(ข)

รูปที่ 1.3 (ก) ทุกจุดบนทรงกลมมีวงกลมใหญ่ตัดผ่านเสมอ

(ข) แสดงส่วนโค้งน้อยและส่วนโค้งใหญ่ของทรงกลม

อย่างไรก็ตาม ถ้าเปรียบเทียบ โลกมีลักษณะเป็นทรงกลม แล้วการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวโลกนั้น เป็นการหาส่วนโค้งน้อยของวงกลมใหญ่ที่ลากผ่านจุดสองจุดบนทรงกลม แต่ในความเป็นจริงแล้ว จากข้อมูลของสหภาพดาราศาสตร์ระหว่างประเทศเผยให้เห็นว่า ลักษณะของ โลกมีแกนตั้งและแกนนอนที่ไม่เท่ากัน ซึ่งโลกนั้นมีลักษณะเหมือนผลส้ม และมีชื่อเรียกกันในทางเรขาคณิตอีกอย่างหนึ่งว่า ทรงคล้ายทรงกลม (spheroid) แต่ยังมีสมบัติสมมาตรกัน ดังนั้นจึงเป็นที่มาของการวิจัยนี้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาเส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวของการหมุนรอบ (surface of revolution) โดยทำการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์จากสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวนั้นๆ เส้นโค้งที่สั้นที่สุดสามารถหาได้จากการนำสมการออยเลอร์มาประยุกต์ โดยแยกออกเป็นกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้เพื่อให้ได้คำตอบที่เป็นระยะทางที่สั้นที่สุด รวมทั้งนำทฤษฎีในส่วนของการศึกษาเชิงตัวเลข (numerical study) มาประยุกต์ใช้สำหรับการคำนวณจีโอเดสิก อีกทั้งยังเสนอแนวคิดในการนำงานวิจัยนี้ไปประยุกต์ใช้ในทางการแพทย์

1.3 ข้อจำกัดและขอบเขตของการวิจัย

พื้นผิวของการหมุนรอบที่จะทำการวิจัยนี้ ประกอบด้วย ทรงกลม ทรงกระบอก ทรงกรวย และทรงห่วย่าง โดยพื้นผิวที่ศึกษานั้น สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบของสมการภาวะอิงพารามิเตอร์

$$\varphi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

เมื่อ u และ v เป็นพารามิเตอร์ของเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนพื้นผิวใดๆ ยกเว้นพารามิเตอร์บนพื้นผิวของทรงกระบอกที่กำหนดให้ $g(u) =$ ค่าคงที่ (เป็นความยาวของทรงกระบอก)

สำหรับสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ของพื้นผิวใดๆ นั้น หากความยาวได้ในรูปแบบ

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

โดยที่ E และ G เป็นฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการหาความยาวของส่วนโค้งในรูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (First fundamental form) บนพื้นผิว นอกจากนี้ ในการศึกษาเชิงตัวเลข จะศึกษาโดยใช้วิธีการจัดรูปสมการจีโอเดสิกให้อยู่ในระบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง และใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ในการแสดงผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของกราฟ ความสัมพันธ์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.4.1 สามารถหาเส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวที่ศึกษาได้
- 1.4.2 จำแนกกรณีที่เป็นไปได้ของการมีเส้นโค้งจีโอเดสิกอยู่จริง
- 1.4.3 แสดงผลเฉลยที่ได้จากการศึกษาเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลข
- 1.4.4 เสนอแนวคิดในการนำงานวิจัยไปประยุกต์ใช้ในทางการแพทย์
- 1.4.5 สามารถเผยแพร่ผลงานวิจัยได้ในวงกว้างมากยิ่งขึ้น

1.5 ขั้นตอนดำเนินการวิจัย

- | | |
|--------------|---|
| ขั้นตอนที่ 1 | ค้นคว้าเนื้อหา ตำราเรียน เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการหาจีโอเดสิก เพื่อเป็นแนวทางในการวิจัย |
| ขั้นตอนที่ 2 | ศึกษาข้อมูลเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย |
| ขั้นตอนที่ 3 | พิสูจน์การหาจีโอเดสิกโดยการคำนวณเชิงวิเคราะห์ |
| ขั้นตอนที่ 4 | คำนวณเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าเส้นโค้งจีโอเดสิก |
| ขั้นตอนที่ 5 | เปรียบเทียบการคำนวณเชิงวิเคราะห์และเชิงตัวเลข |
| ขั้นตอนที่ 6 | เสนอแนวคิดในการประยุกต์ที่ใช้ปัญหาจีโอเดสิก |
| ขั้นตอนที่ 7 | สรุปผลการวิจัย |
| ขั้นตอนที่ 8 | เผยแพร่ผลงานวิจัยสู่งานประชุมเชิงวิชาการ |
| ขั้นตอนที่ 9 | เขียนวิทยานิพนธ์ |

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง เพื่อนำไปใช้ในการหาจีโอเดสิกที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวของการหมุนรอบ โดยจะกล่าวถึง นิยาม บทตั้ง บทแทรก และทฤษฎีบทต่างๆ ซึ่งถือได้ว่ามีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งในการพิสูจน์ระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวที่จะศึกษา จากนั้นในส่วนของงานวิจัยที่เกี่ยวข้องได้อ้างถึงงานวิจัยเกี่ยวกับการหาจีโอเดสิกในรูปแบบที่แตกต่างกัน เพื่อนำผลที่ได้จากการวิจัยนี้ไปเปรียบเทียบและเป็นแนวทางต่อการดำเนินการวิจัยนี้ต่อไป

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

นิยาม 2.1.1 เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ (parametrized curve) เป็นการส่ง $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ของช่วงเปิด $I = (a, b)$ บนเส้นจำนวนจริง \mathbb{R} ไปยัง \mathbb{R}^3

นิยาม 2.1.2 การส่ง γ ที่เป็นไปตามการส่งแต่ละ $t \in I$ ไปยัง $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ใน \mathbb{R}^3 โดยที่ ตัวแปร t เป็นพารามิเตอร์ของเส้นโค้ง

นิยาม 2.1.3 ถ้า $x'(t), y'(t)$ และ $z'(t)$ เป็นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ x, y และ z ตามลำดับแล้ว $(x'(t), y'(t), z'(t)) = \gamma'(t) \in \mathbb{R}^3$ เป็นเวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) ของเส้นโค้ง γ ที่จุด $\gamma(t)$

นิยาม 2.1.4 เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ γ จะเป็นเส้นโค้งปกติ (regular curve) ถ้า $\gamma'(t) \neq 0$ สำหรับทุกๆ $t \in I$

นิยาม 2.1.5 ฟังก์ชันของความยาวส่วนโค้ง (arc length) บนเส้นโค้งปกติ γ ที่เริ่มจากจุด t_0 คือฟังก์ชัน $s(t)$ ซึ่ง

$$s(t) := \int_{t_0}^t |\gamma'(t)| dt$$

$$\text{เมื่อ } |\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$$

นิยาม 2.1.6 ฟังก์ชัน f บน D เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}^2$ เรียกว่า C^0 ถ้าฟังก์ชัน $f : D \rightarrow D$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

นิยาม 2.1.7 ฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน D จะเรียกว่า C^r เมื่อ $r \geq 1$ ถ้า $\frac{\partial f}{\partial u}$ และ $\frac{\partial f}{\partial v}$ มีอยู่จริง และเป็น C^{r-1}

นิยาม 2.1.8 ฟังก์ชัน f บน D จะเรียกว่า C^∞ ถ้าฟังก์ชัน f เป็น C^r สำหรับทุกๆ $r \geq 0$

นิยาม 2.1.9 การส่ง $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ จะกล่าวว่า หอนุพันธ์อันดับที่ r ได้ และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (แทนด้วย C^r) เมื่อ $r \geq 0$ ถ้าแต่ละฟังก์ชัน $x(u, v), y(u, v)$ และ $z(u, v)$ เป็น C^r บน D โดยที่ $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

นิยาม 2.1.10 สำหรับ f ที่เป็นฟังก์ชันของ u และ v จะนิยาม $f_u := \frac{\partial f}{\partial u}$ และ $f_v := \frac{\partial f}{\partial v}$ และสำหรับ φ ที่เป็นฟังก์ชันของ x, y และ z เมื่อ $x = x(u, v), y = y(u, v)$ และ $z = z(u, v)$ จะนิยาม $\varphi_u := (x_u, y_u, z_u)$ และ $\varphi_v := (x_v, y_v, z_v)$

นิยาม 2.1.11 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ จะเรียกว่า ส่วนของพื้นผิว (piece of surface) ถ้ามี $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ซึ่งเป็น C^∞ โดยที่

- i) $S = \varphi(D)$
- ii) φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจากเซต D ไปยังเซต S
- iii) แรงค์ (rank) ของเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} \varphi_u \\ \varphi_v \end{bmatrix}$ เป็น 2 ณ แต่ละจุดบน D

นิยาม 2.1.12 สำหรับส่วนของพื้นผิว S ที่มีการส่ง φ เป็นไปตามนิยาม 2.1.11 จะเรียก φ ว่า ภาวะอิงพารามิเตอร์ (parametrization) ของ S

บทตั้ง 2.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชัน C^∞ บน D แล้ว C^∞ ที่มีการส่ง φ บน D จะนิยามโดย

$$(u, v) \in D \mapsto (u, v, f(u, v)) \in \mathbb{R}^3$$

แล้ว $\varphi(D)$ เป็นส่วนของพื้นผิว และ φ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ของ $\varphi(D)$

ข้อสังเกต ถ้านิยาม φ โดย

$$(u, v) \mapsto (f(u, v), u, v) \text{ หรือ } (u, v) \mapsto (u, f(u, v), v)$$

แล้วข้อสรุปตามบทตั้ง 2.1.1 เป็นจริงเช่นเดียวกัน

นิยาม 2.1.13 ย่านใกล้เคียง (neighborhood) จุด p ในปริภูมิอิงระยะทาง (S, d) คือ เซตย่อย V ของ S ที่สามารถหาเซตเปิด U ซึ่ง p เป็นสมาชิกของ U และ U เป็นเซตย่อยของ V

นิยาม 2.1.14 สับเซต $S \subseteq \mathbb{R}^3$ เป็นพื้นผิวปกติ (regular surface) ถ้าสำหรับแต่ละ $p \in S$ จะมีย่านใกล้เคียง V ใน \mathbb{R}^3 และการส่ง $\varphi: U \rightarrow V \cap S$ ของเซตเปิด $U \subset \mathbb{R}^2$ ทั่วถึง $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ (แสดงดังรูปที่ 2.1)

i) φ สามารถหาอนุพันธ์ได้ หมายความว่า ถ้าเขียนอยู่ในรูป

$$\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad , (u, v) \in U$$

ฟังก์ชันสามฟังก์ชัน $x(u, v), y(u, v)$ และ $z(u, v)$ มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องทุกอันดับใน

U

ii) φ เป็นสมานสัณฐาน (**homeomorphism**) เนื่องจาก φ ต่อเนื่องจากเงื่อนไขที่ i)

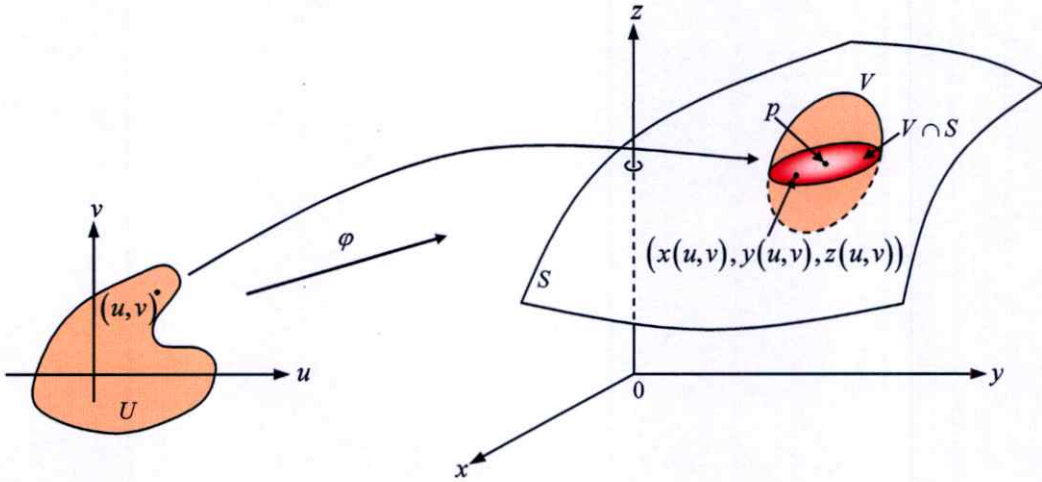
หมายความว่า φ มีการส่งแบบผกผัน (**inverse**) $\varphi^{-1}: V \cap S \rightarrow U$ ซึ่งต่อเนื่องเช่นกัน

นั่นคือ φ^{-1} เป็นการส่งแบบต่อเนื่องอย่างแท้จริง $F: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ นิยามบนเซตเปิด

W มีอยู่ใน $V \cap S$

iii) (เงื่อนไขของความสม่ำเสมอ) สำหรับแต่ละ $q \in U$ เจริญพันธ์ $d\varphi_q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็น

แบบหนึ่งต่อหนึ่ง



รูปที่ 2.1 การส่ง $\varphi: U \rightarrow V \cap S$ ของเซตเปิด $U \subset \mathbb{R}^2$ ทัวถึง $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$

ข้อสังเกต ภาวะอิงพารามิเตอร์สำหรับส่วนของพื้นผิวที่กำหนดไม่ได้มีเพียงหนึ่งเดียว

นิยาม 2.1.15 การส่ง $c: [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$ จะเรียกว่าเส้นโค้ง $C^\infty \in \mathbb{R}^3$

นิยาม 2.1.16 สำหรับแต่ละเส้นโค้ง C^1 ถ้านิยาม c บนช่วง $[a, b]$ แล้วความยาว $L(c)$ ของ c นิยามโดย

$$L(c) := \int_a^b \sqrt{c'(t) \cdot c'(t)} dt$$

ในที่นี้ \cdot แทนผลคูณภายใน (inner product) ของปริภูมิยุคลิด 3 มิติ

นิยาม 2.1.17 ถ้าเส้นโค้ง C^∞ ที่มีการส่ง $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ อยู่บนพื้นผิว S แล้วจะเรียก c ว่าเส้นโค้ง C^∞ บน S

นิยาม 2.1.18 ฟังก์ชัน C^∞ สามฟังก์ชัน E, F และ G บนโดเมน D นิยามโดย

$$E(u, v) = \varphi_u(u, v) \cdot \varphi_u(u, v),$$

$$F(u, v) = \varphi_u(u, v) \cdot \varphi_v(u, v),$$

$$G(u, v) = \varphi_v(u, v) \cdot \varphi_v(u, v)$$

ฟังก์ชันสามฟังก์ชัน E, F และ G มีบทบาทสำคัญในการคำนวณความยาวของเส้นโค้งบน S

ข้อสังเกต กำหนดให้ $c: [a, b] \rightarrow S$ เป็นเส้นโค้ง C^∞ บน S ทำให้ความยาว $L(c)$ ของ c เป็นนิพจน์ของฟังก์ชัน E, F และ G จากนิยาม 2.1.16 โดยที่ $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$ หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง จะได้

$$c'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{dv}{dt} = u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v$$

นำค่า $c'(t)$ ที่ได้ไปแทนในสมการความยาว $L(c)$ ในนิยาม 2.1.16 จะได้

$$\begin{aligned} L(c) &= \int_a^b \sqrt{(u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v) \cdot (u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v)} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(u')^2 \varphi_u \cdot \varphi_u + (2u'v') \varphi_u \cdot \varphi_v + (v')^2 \varphi_v \cdot \varphi_v} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{(u')^2 E + (2u'v') F + (v')^2 G} dt \end{aligned}$$

เมื่อ $u'(t) = du/dt$ และ $v'(t) = dv/dt$ ทำให้

$$L(c) = \int_a^b \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \right) + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

เมื่อจัดรูปสมการใหม่ จะได้นิพจน์

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

จะเรียกนิพจน์ดังกล่าวว่า **รูปแบบหลักมูลที่หนึ่ง (First fundamental form)** สำหรับ S

บทตั้ง 2.1.2 ฟังก์ชันสามฟังก์ชัน E, F และ G มีสมบัติดังต่อไปนี้

$$EG - F^2 > 0, E > 0, G > 0$$

บน D

พิสูจน์ กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงใดๆ เนื่องจาก $\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v)$ เป็นอิสระเชิงเส้นสำหรับแต่ละ $(u, v) \in D$ จะได้

$$(a\varphi_u(u, v) + b\varphi_v(u, v)) \cdot (a\varphi_u(u, v) + b\varphi_v(u, v))$$

เป็นค่าบวกสำหรับทุกๆ $(a, b) \neq (0, 0)$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$a^2 \varphi_u \cdot \varphi_u, b^2 \varphi_v \cdot \varphi_v$$

เป็นค่าบวกสำหรับทุกๆ a, b ที่ไม่เป็นศูนย์

ดังนั้น E และ G เป็นค่าบวกบน D

สำหรับ $a = -\frac{F}{E}$ และ $b = 1$ จะได้

$$\begin{aligned}(a\varphi_u + b\varphi_v) \cdot (a\varphi_u + b\varphi_v) &= a^2 E + 2abF + b^2 G \\ &= \frac{F^2}{E} - \frac{2F^2}{E} + G = \frac{GE - F^2}{E}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $GE - F^2$ เป็นค่าบวกบน D □

บทตั้ง 2.1.3 ให้ $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้ง C^∞ ที่ทำให้ $c'(t)$ ไม่เป็นศูนย์บน $[a, b]$ แล้วค่าพารามิเตอร์ของ c เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์ซ้ำโดยพารามิเตอร์ความยาวส่วนโค้ง s ถ้า $\tilde{c}(s)$ เป็นเส้นโค้งที่มีภาวะอิงพารามิเตอร์โดยพารามิเตอร์ความยาวส่วนโค้ง แล้ว $|\tilde{c}'(s)| = 1$

พิสูจน์ กำหนดให้ $s(t)$ เป็นความยาวของแต่ละส่วนโค้งย่อย $c|_{[a, t]}$ ของ c

เนื่องจาก $s(t) = \int_a^t |c'(t)| dt$ จะได้

$$\frac{ds}{dt}(t) = |c'(t)|$$

ดังนั้น $s(t)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มทางเดียวอย่างแท้จริง

เพราะว่า $|c'(t)| > 0$ ฟังก์ชัน $s = s(t)$ จึงมีฟังก์ชัน C^∞ ซึ่งเป็นฟังก์ชันผกผัน $t = t(s)$

โดยที่ $s \in [0, L(c)]$

กำหนดให้ $\tilde{c}(s) = c(t(s))$ จะได้

$$\tilde{c}[0, L(c)] = c[a, b]$$

$$\text{และ } \tilde{c}'(s) = c'(t(s)) \frac{dt}{ds}(s) = \frac{1}{ds/dt} c'(t(s)) = \frac{1}{|c'(t)|} c'(t)$$

เพราะฉะนั้น $\tilde{c}'(s)$ เป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (**unit tangent vector**)

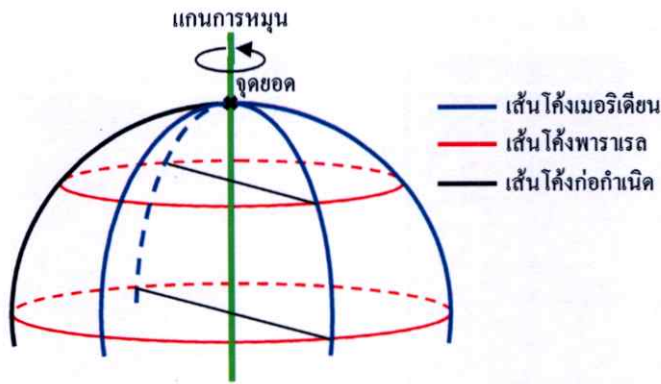
และ $|\tilde{c}'(s)| = 1$ □

นิยาม 2.1.19 ถ้าเส้นโค้ง C^∞ ที่มีการส่ง $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์โดยพารามิเตอร์ความยาวส่วนโค้ง แล้ว c เรียกว่า **เส้นโค้งอัตราเร็วหนึ่งหน่วย (unit-speed curve)**

นิยาม 2.1.20 กำหนดให้ $\alpha: (a, b) \rightarrow S$ เป็นเส้นโค้ง C^∞ บนพื้นผิว S เส้นโค้ง α จะเรียกว่า **จีโอเดสิก (geodesic)** บน S ถ้า $\alpha''(s)$ ตั้งฉากกับปริภูมิสัมผัส $S_{\alpha(s)}$ สำหรับแต่ละ $s \in (a, b)$

ข้อสังเกต เนื่องจาก $\alpha'(s)$ นั้น อยู่ในปริภูมิสัมผัส ดังนั้นจะเรียกเส้นโค้ง α ว่า จีโอเดสิกก็ต่อเมื่อ $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0$

นิยาม 2.1.21 กำหนดให้ $S \subseteq \mathbb{R}^3$ เป็นพื้นผิวที่ได้มาจากการหมุนเส้นโค้ง C^∞ ที่มีการส่ง $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ รอบแกน z แล้ว S เรียกว่า **พื้นผิวของการหมุนรอบ (surface of revolution)** (แสดงผังรูปที่ 2.2)



รูปที่ 2.2 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบ

นิยาม 2.1.22 ถ้าเส้นโค้ง C^∞ ที่มีการส่ง $c: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ เป็นเส้นโค้งซึ่งทำให้ได้พื้นผิวของการหมุนรอบ แล้วกราฟของ c เรียกว่าเป็นเส้นโค้งก่อกำเนิด (generating curve) บน S

นิยาม 2.1.23 พิกัด $(0, 0, g(0))$ เป็นจุดตัดระหว่างแกน z และ $S \subseteq \mathbb{R}^3$ จะเรียกว่า จุดยอด (vertex) ของพื้นผิว S

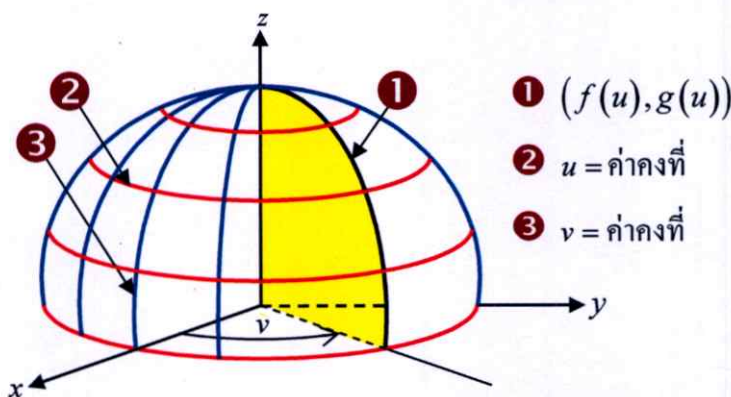
นิยาม 2.1.24 $x := f(u)$ และ $z := g(u)$ เมื่อ $a < u < b$, $f(u) > 0$ เป็นภาวะอิงพารามิเตอร์สำหรับกราฟของ c และ v เป็นมุมของการหมุนรอบแกน z จะได้การส่ง

$$\varphi(u, v) := (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

บน S เป็นพื้นผิวของการหมุนรอบ (แสดงดังรูปที่ 2.3)

นิยาม 2.1.25 เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ u มีค่าคงที่ และ v ไม่เป็นค่าคงที่ เรียกว่า เส้นโค้งพาราเรล (parallel curve) บนพื้นผิว S

นิยาม 2.1.26 เส้นโค้งอิงพารามิเตอร์ v มีค่าคงที่ และ u ไม่เป็นค่าคงที่ เรียกว่า เส้นโค้งเมริเดียน (meridian curve) บนพื้นผิว S



รูปที่ 2.3 ภาวะอิงพารามิเตอร์ที่แสดงโดยมุม v บนพื้นผิวของการหมุนรอบ

นิยาม 2.1.27 ฟังก์ชัน (function) นิยมแทนด้วย f หมายถึง ปริมาณที่เปลี่ยนแปลงได้ โดยขึ้นอยู่กับตัวแปรต้น ถ้า x เป็นตัวแปรต้น แล้ว $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x

นิยาม 2.1.28 ฟังก์ชันนอล (functional) นิยมแทนด้วย J หมายถึง ปริมาณที่เปลี่ยนแปลงได้ โดยขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน ถ้า $y(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว $J[y(x)]$ เป็นฟังก์ชันนอลของ $y(x)$

นิยาม 2.1.29 ให้ $J[y(x)]$ เป็นฟังก์ชันนอล ถ้า $y(x)$ เปลี่ยนเป็น $y(x)+h(x)$ แล้ว ฟังก์ชันนอลคือ $J[y(x)+h(x)]$

ข้อสังเกต ให้ $\Delta J[h(x)] = J[y(x)+h(x)] - J[y(x)]$ เป็นการเปลี่ยนแปลงของ ฟังก์ชันนอลที่สมนัยกับการเปลี่ยนแปลง $h(x)$ ของตัวแปรต้น $y(x)$ ถ้า $y(x)$ กำหนดแน่นอน แล้ว $\Delta J[h(x)]$ จะอยู่ในรูปแบบ

$$\Delta J[h(x)] = \eta[h(x)] + \varepsilon \|h(x)\| \quad (2.1)$$

เมื่อ $\eta[h(x)]$ เป็นฟังก์ชันนอลเชิงเส้น และ $\varepsilon \rightarrow 0$ เมื่อ $\|h(x)\| \rightarrow 0$

แล้วเรียก $J[y(x)]$ ว่าเป็นฟังก์ชันนอลที่หาอนุพันธ์ได้

และเรียก $\eta[h(x)]$ ว่าเชิงอนุพันธ์ของ $J[y(x)]$ เขียนแทนด้วย $\delta J[h(x)]$ นั่นคือ

$$\delta J[h(x)] = \eta[h(x)] \quad (2.2)$$

ดังนั้น เชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ คือฟังก์ชันนอล $\eta[h(x)]$ ของ $\Delta J[h(x)]$ นั้น จากสมการที่ (2.1) และ (2.2) จะได้

$$\Delta J[h(x)] = \delta J[h(x)] + \varepsilon \|h(x)\| \quad (2.3)$$

บทตั้ง 2.1.4 ถ้า $\beta(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ และถ้า

$$\int_a^b \beta(x) h(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

สำหรับทุกฟังก์ชันต่อเนื่อง $h(x)$ ซึ่ง $h(a) = h(b) = 0$

แล้ว $\beta(x) = 0$ สำหรับทุก x ในช่วง $[a, b]$

พิสูจน์ สมมติ $\beta(x) \neq 0$ นั่นคือ $\beta(x) > 0$ ณ บางจุดในช่วง $[a, b]$

ให้ $\beta(x) > 0$ ในช่วง $[x_1, x_2]$ ซึ่งเป็นช่วงย่อยที่อยู่ในช่วง $[a, b]$ ถ้าให้

$$h(x) = \begin{cases} (x-x_1)(x_2-x) & ; x \in [x_1, x_2] \\ 0 & ; x \notin [x_1, x_2] \end{cases}$$

แล้ว $h(a) = h(b) = 0$ และ $\beta(x)(x-x_1)(x_2-x) > 0$ ในช่วง (x_1, x_2) ทำให้

$$\int_a^b \beta(x) h(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \beta(x)(x-x_1)(x_2-x) dx > 0$$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ (2.4)

ดังนั้น ที่สมมติ $\beta(x) \neq 0$ เป็นไปไม่ได้

นั่นคือ $\beta(x) = 0$ ในช่วง $[a, b]$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน ในกรณีที่ $\beta(x) < 0$ □

บทตั้ง 2.1.5 ถ้า $\xi[h(x)]$ เป็นฟังก์ชันนอล

และถ้า $\frac{\xi[h(x)]}{\|h(x)\|} \rightarrow 0$ เมื่อ $\|h(x)\| \rightarrow 0$ แล้ว $\xi[h(x)] = 0$ สำหรับทุก $h(x)$

พิสูจน์ สมมติ $\xi[h_0(x)] \neq 0$ สำหรับบาง $h_0(x) \neq 0$

ให้ $h_n(x) = \frac{h_0(x)}{n}$ และ $\lambda = \frac{\xi[h_0(x)]}{\|h_0(x)\|} \neq 0$

แล้ว $\|h_n(x)\| \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$

และ $\lim_{\|h_n(x)\| \rightarrow 0} \frac{\xi[h_n(x)]}{\|h_n(x)\|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi\left[\frac{h_0(x)}{n}\right]}{\left\|\frac{h_0(x)}{n}\right\|} = \lambda \neq 0$ ซึ่งขัดกับสมมติฐานข้างต้น

ดังนั้น $\xi[h(x)] = 0$ สำหรับทุก $h(x)$ □

ทฤษฎีบท 2.1.6 เชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันนอลที่หาอนุพันธ์นั้นมีเพียงหนึ่งเดียว

พิสูจน์ สมมติเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ คือ $\eta_1[h(x)]$ และ $\eta_2[h(x)]$ แล้ว

$$\Delta J[h(x)] = \eta_1[h(x)] + \varepsilon_1 \|h(x)\| \quad (2.5)$$

$$\text{และ} \quad \Delta J[h(x)] = \eta_2[h(x)] + \varepsilon_2 \|h(x)\| \quad (2.6)$$

ซึ่ง ε_1 และ $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ เมื่อ $\|h(x)\| \rightarrow 0$

นำ (2.5) - (2.6) จะได้

$$\eta_1[h(x)] - \eta_2[h(x)] = \varepsilon_2 \|h(x)\| - \varepsilon_1 \|h(x)\|$$

$$\text{หรือ} \quad \frac{\eta_1[h(x)] - \eta_2[h(x)]}{\|h(x)\|} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

เนื่องจาก ε_1 และ $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ เมื่อ $\|h(x)\| \rightarrow 0$

ดังนั้น $\frac{\eta_1[h(x)] - \eta_2[h(x)]}{\|h(x)\|} \rightarrow 0$ เมื่อ $\|h(x)\| \rightarrow 0$

จาก บทตั้ง 2.1.5 จะได้

$$\eta_1[h(x)] - \eta_2[h(x)] \rightarrow 0$$

สำหรับทุก $h(x)$ นั่นคือ

$$\eta_1[h(x)] = \eta_2[h(x)]$$

แสดงว่า เชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันนอลมีเพียงหนึ่งเดียว □

ทฤษฎีบท 2.1.7 เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการมีค่าสุดขีดของฟังก์ชันนอล คือ

$$\delta J[h(x)] = 0 \quad (2.7)$$

พิสูจน์ ให้ $J[y(x)]$ มีค่าต่ำสุดบน $y(x) = y_0(x)$ (2.8)

จาก (2.3) $\Delta J[h(x)] = \delta J[h(x)] + \varepsilon \|h(x)\|$ ซึ่ง $\varepsilon \rightarrow 0$ เมื่อ $\|h(x)\| \rightarrow 0$

เนื่องจาก $\|h(x)\| \rightarrow 0$ แสดงว่า $\|h(x)\|$ มีค่าน้อยมาก

ดังนั้น $\Delta J[h(x)]$ และ $\delta J[h(x)]$ จะมีเครื่องหมายเหมือนกัน

สมมติ $\delta J[h(x)] \neq 0$ สำหรับบาง $h_0(x)$ แล้วสำหรับ $\beta > 0$

ถ้า $\delta J[-\beta h_0] = -\delta J[\beta h_0]$ แล้ว $\Delta J[-\beta h_0]$ จะต้องมีการหมายลบด้วย

โดยที่ $\Delta J[h(x)]$ อาจมีการหมายเป็นบวกหรือลบก็ได้ สำหรับ $\|h(x)\|$ ที่มีค่าน้อยๆ

ซึ่งขัดแย้งกับ (2.8)

โดยจาก (2.8) จะได้

$$\Delta J[h(x)] = J[y_0(x) + h(x)] - J[y_0(x)] \geq 0$$

สำหรับทุก $\|h(x)\| \rightarrow 0$

ดังนั้น $\delta J[h(x)] = 0$

สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ $J[y(x)]$ มีค่าสูงสุด □

ทฤษฎีบท 2.1.8 (สมการออยเลอร์) ให้ $F(x, y(x), y'(x))$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องอันดับที่สอง เมื่อเทียบกับตัวแปรทุกตัว โดย $y(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

$$y(a) = A, y(b) = B \quad (2.9)$$

ซึ่งทำให้ฟังก์ชันนอล

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (2.10)$$

มีค่าสุดขีด

แล้วฟังก์ชัน $y(x)$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไข (2.9) และทำให้ (2.10) มีค่าสุดขีด เป็นไปตามสมการ

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad (2.11)$$

เรียก (2.11) ว่าสมการออยเลอร์ (Euler's equation)

พิสูจน์ สมมติให้ $y(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ทำให้ฟังก์ชันนอล (2.10) มีค่าสุดขีด และให้ $y(x)$ มีส่วนเปลี่ยนแปลง $h(x)$ ซึ่งฟังก์ชัน $y(x) + h(x)$ เป็นไปตามเงื่อนไข (2.9) นั่นคือ

$$y(a) + h(a) = A \quad \text{และ} \quad y(b) + h(b) = B$$

จาก (2.9) $y(a) = A$ และ $y(b) = B$

ดังนั้น $h(a) = 0$ และ $h(b) = 0$ (2.12)

เมื่อ $y(x)$ มีส่วนเปลี่ยนแปลง $h(x)$ จะมีส่วนเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันนอล (2.10) คือ

$$\begin{aligned} \Delta J[y(x)] &= J[y(x) + h(x)] - J[y(x)] \\ &= \int_a^b F(x, y(x) + h(x), y'(x) + h'(x)) dx - \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx \\ &= \int_a^b [F(x, y(x) + h(x), y'(x) + h'(x)) - F(x, y(x), y'(x))] dx \end{aligned}$$

โดยการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์กับพจน์แรกจะได้

$$\begin{aligned} \Delta J[y(x)] &= \int_a^b \left[\left\{ F(x, y(x), y'(x)) + F_y(x, y(x), y'(x))h \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + F_{y'}(x, y(x), y'(x))h' + \dots \right\} - F(x, y(x), y'(x)) \right] dx \\ &= \int_a^b \left[F_y(x, y(x), y'(x))h + F_{y'}(x, y(x), y'(x))h' \right] dx + \dots \end{aligned}$$

จาก (2.3) $\Delta J[y(x)] = \delta J[y(x)] + \varepsilon \|h(x)\|$ ดังนั้น

$$\delta J[y(x)] = \int \left[F_y(x, y(x), y'(x))h + F_{y'}(x, y(x), y'(x))h' \right] dx$$

โดยเทคนิคการอินทิเกรตแบบแยกส่วนกับพจน์ที่สอง จะได้

$$\begin{aligned} \delta J[y(x)] &= \int_a^b \left[F_y(x, y(x), y'(x))h - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x))h \right] dx \\ &\quad + [F_{y'}h(x)]_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

จาก (2.12) จะได้

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left[F_y(x, y(x), y'(x))h - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x))h \right] dx$$

จากทฤษฎีบท 2.1.7 ฟังก์ชันนอลมีค่าสุดขีดเมื่อ $\delta J[y(x)] = 0$ ดังนั้น

$$\int_a^b \left[F_y(x, y(x), y'(x))h - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x))h \right] dx = 0$$

จากบทตั้ง 2.1.4 จะได้

$$F_y(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y(x), y'(x)) = 0$$

□

ซึ่งสมการออยเลอร์เป็นสมการที่สำคัญที่จะนำมาใช้ในงานวิจัยนี้

บทแทรก 2.1.6 ถ้า F ไม่ขึ้นกับ x อย่างชัดเจน นั่นคือ $F(y, y')$ แสดงว่า $F_x = 0$ และ $F_y, F_{y'}$ มีค่า แล้วสมการออยเลอร์อยู่ในรูปแบบ

$$F(x, y, y') - y'F_{y'}(y, y') = c_1 \quad (2.13)$$

เรียก (2.13) ว่ารูปแบบทางเลือกของสมการออยเลอร์ (**alternative form of Euler's equation**)

พิสูจน์ จาก $y''F_{y'y'} + y'F_{y'y'} + F_{xy'} - F_y = 0$

เนื่องจาก $F_x = 0$ จะได้

$$F_y - F_{y'y'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

คูณด้วย $\frac{dy}{dx}$ ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} - y' \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} - y'' \frac{\partial F_y}{\partial y'} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} - y' \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} - y' \frac{\partial F_y}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = 0$$

เติมพจน์ที่มีค่าเป็นศูนย์เพื่อให้จัดรูปแบบได้ง่าย ดังนี้

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} - y' \frac{\partial F_y}{\partial x} \frac{dx}{dx} - y' \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} - y' \frac{\partial F_y}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} - y' \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F_y}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} \right) - \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} - y' \frac{dF_y}{dx} - F_y \frac{dy'}{dx} = 0$$

$$\frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}(y'F_y) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_y) = 0$$

โดยการหาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$F - y'F_y = c_1 \quad \square$$

นิยาม 2.1.30 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สอง (**linear second order differential equation**) ในรูปแบบ

$$x'' + px' + qx = f(t) \quad (2.14)$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่ และไม่ขึ้นกับตัวแปรต้น t

โดยการแทน $x' = y$ และ $x'' = y'$ จะได้ ระบบสมการเชิงสองมิติ

$$\left. \begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -qx - py + f(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

เรียกระบบสมการ (2.15) นี้ว่า **รูปแบบปกติ (canonical form)** โดยที่ $f(t) = 0$ แล้วเรียกระบบเอกพันธ์ (**homogeneous**) กรณีอื่นๆ เรียกระบบไม่เอกพันธ์ (**nonhomogeneous**)

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ก่อนที่ผู้วิจัยจะดำเนินการวิจัยเกี่ยวกับการหาเส้นโค้งจีโอเดสิกบนพื้นผิวใดๆ ในเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์นั้น ผู้วิจัยได้เริ่มต้นจากการศึกษาในรายวิชา แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ และเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ จากส่วนหนึ่งของเอกสารประกอบการสอนของ รองศาสตราจารย์ภคินี ชิตสกุล [4], [5] ได้นำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับปัญหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมด้วยจุดสองจุดบนพื้นผิว อีกทั้งยังได้เข้าฟังการบรรยายพิเศษในหัวข้อ “Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution” โดยอาจารย์พิเศษจากมหาวิทยาลัยโตเกียว ประเทศญี่ปุ่น ศาสตราจารย์มิโนรุ ทานากะ [10] ได้นำเสนอสมบัติต่างๆ ของจีโอเดสิกบนพื้นผิวของการหมุนรอบ ซึ่งถือเป็นจุดเริ่มต้นที่ผู้วิจัยได้ให้ความสนใจ ศึกษาหาข้อมูลที่เกี่ยวข้อง และนำมาเป็นส่วนหนึ่งของปัญหาพิเศษจากงานวิจัยดังต่อไปนี้

การ์นต์ เรืองมัจฉา และคณะ [1] ได้นำเสนอการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้ง ซึ่งจากการศึกษาเชิงวิเคราะห์เพื่อค้นคว้าวิจัยเกี่ยวกับเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านจุดสองจุดบนพื้นผิวของรูปทรงทางเรขาคณิตนั้น ด้วยการนำวิธีการที่ใช้สมการออยเลอร์เป็นทฤษฎีในการศึกษา จึงได้พบว่าวิธีดังกล่าวนี้ยังมีข้อจำกัด เนื่องจากวิธีการนี้สามารถระบุตำแหน่งด้วยระบบพิกัดชนิดโคซนิกหนึ่งเท่านั้น จากเหตุผลดังที่กล่าว ทำให้รูปทรงทางเรขาคณิตที่นำมาหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดจึงมีเพียงบนระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอก และทรงกรวยเท่านั้น ซึ่งผลเฉลยที่ได้ ในกรณีของระนาบ เส้นโค้งที่สั้นที่สุด คือ ส่วนของเส้นตรง ซึ่งถือเป็นกรณีพื้นฐาน และเป็นทราบกันดีอยู่แล้ว นอกจากนี้ กรณีของการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนทรงกลม คือ ส่วนของวงกลมใหญ่

ณัฐพล บุญนำ และคณะ [2] ได้นำเสนอการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง ด้วยการใช้วิธีการประยุกต์จากสมการออยเลอร์ ทำให้กรณีของทรงกลมนั้น สามารถใช้ระบบพิกัดวัดตำแหน่งของจุดบนพื้นผิวได้โดยตรง หลังจากได้ทำการศึกษา พบว่าเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของทรงกลมนั้นเป็นส่วนของวงกลมใหญ่เช่นเดียวกับ [1] ในกรณีที่เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของทรงกระบอก คือ ส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเกลียวหรือฮีลิกซ์ (helix) อีกทั้งเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของรูปกรวย คือ ส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล (spiral)

หลังจากที่ได้ทำการวิจัย โดยการหาผลเฉลยที่อยู่ในรูปสมการออยเลอร์ซึ่งเป็นรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่หนึ่งแล้ว ในเวลาต่อมา F. Talay Akyildiz [7] ได้นำเสนอการหาจีโอเดสิกโดยจัดอยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง จากนั้นใช้วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยระเบียบวิธีของผลต่างอันตะแบบกลาง (centered finite-difference method) รวมทั้งทดสอบประสิทธิภาพของวิธีการดังกล่าวด้วยการสร้างภาพจำลองของจีโอเดสิกบนพื้นผิวเชิงทรงกลม และนำแต่ละวิธีมาเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีซ้ำและวิธีของนิวตัน

ต่อมา M. Guo-liang [12] ได้นำเสนออัลกอริทึมสำหรับการประมาณค่าของจีโอเดสิกที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดที่กำหนดให้บนพื้นผิวอย่างง่าย โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของการแปรผันในการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์เพื่อนำมาเปรียบเทียบกับการหาค่าการประมาณด้วยระเบียบวิธีของผลต่างอันตะแบบไปข้างหน้า (forward finite-difference method) ดังนั้น ผู้วิจัยจึงได้นำงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังกล่าวมาข้างต้นมาดำเนินการและนำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้

บทที่ 3

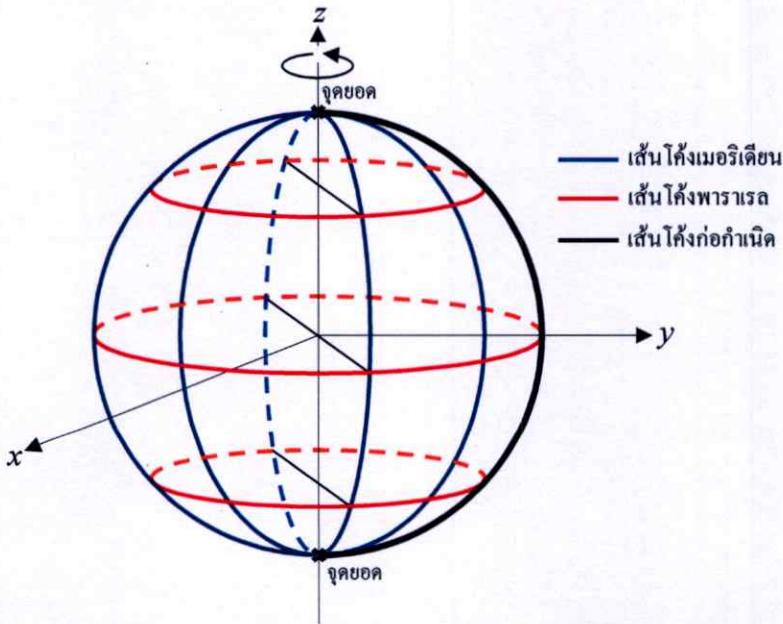
วิธีดำเนินการวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงพื้นผิวของการหมุนรอบซึ่งจะอธิบายถึงส่วนประกอบและการระบุพารามิเตอร์บนพื้นผิวที่ศึกษา และนำเสนอการออยเลอร์มาประยุกต์กับการหาผลเฉลยในรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ นอกจากนี้ยังจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบปรกติของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

3.1 พื้นผิวของการหมุนรอบ

พื้นผิวของการหมุนรอบในนิยาม 2.1.21 และ 2.1.24 มีภาวะอิงพารามิเตอร์จัดอยู่ในรูปแบบ $\varphi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ นั้น มีส่วนประกอบที่สำคัญ ได้แก่ เส้นโค้งบนพื้นผิวที่มีวงกลมประกอบกันเป็นรูปเป็นร่างโดยการหมุนจุดเดียวรอบแกน เรียกว่า เส้นโค้งพาราเรล (ตามนิยาม 2.1.25) และเส้นโค้งที่มีลักษณะเหมือนกับเส้นโค้งก่อกำเนิดซึ่งหมุนไปรอบแกนเช่นกัน เรียกว่า เส้นโค้งเมริเดียน (ตามนิยาม 2.1.26) ยิ่งไปกว่านั้น จะกล่าวได้ว่า $g(u)$ เป็นระยะห่างที่ขนานกันไปกับแกนของการหมุนรอบ และ $f(u)$ เป็นรัศมีของเส้นโค้งพาราเรล ซึ่งจะศึกษาบนพื้นผิวดังต่อไปนี้

3.1.1 ทรงกลม (sphere)



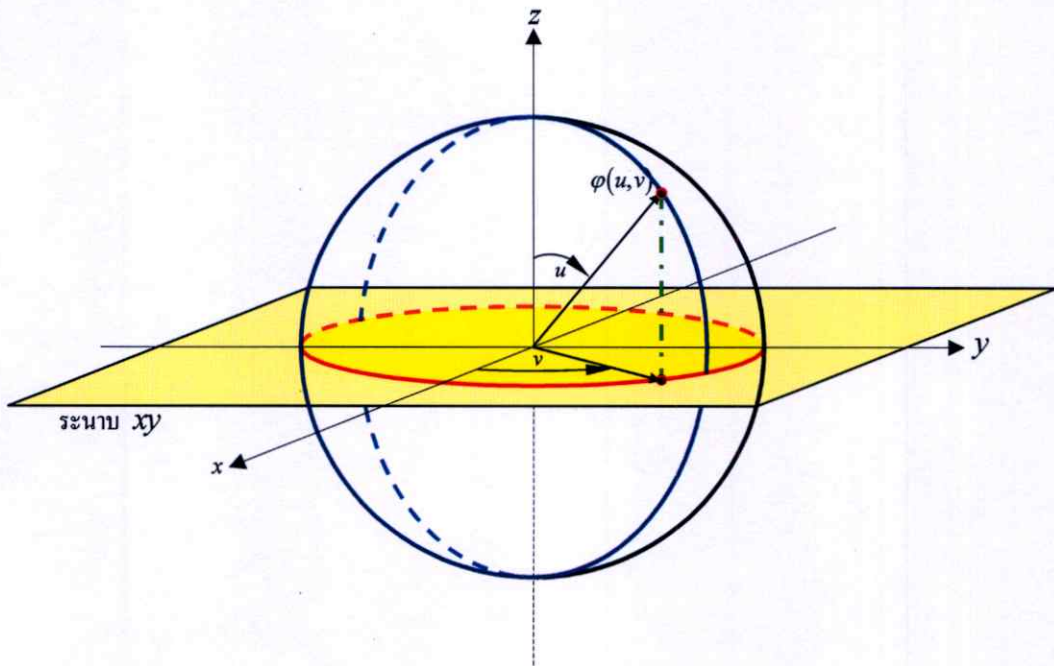
รูปที่ 3.1 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงกลม

ทรงสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ และจุดทุกจุดบนผิวโค้งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน เรียกว่า ทรงกลม เรียกจุดคงที่ว่า จุดศูนย์กลางของทรงกลม เรียกระยะทางที่เท่ากันว่า รัศมีของทรงกลม ถ้าพิจารณาการเกิดทรงกลมโดยการหมุนจะพบว่า ทรงกลมมาจากการหมุนเส้นโค้งก่อกำเนิดที่มีลักษณะเป็นครึ่งวงกลมรอบแกนหมุน แสดงดังรูปที่ 3.1

สำหรับในระบบพิกัดทรงกลมนั้น จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกลมจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ u และ v จะได้รับความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงกลมกับระบบมุมฉาก เป็นดังนี้

$$\varphi(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad (3.1)$$

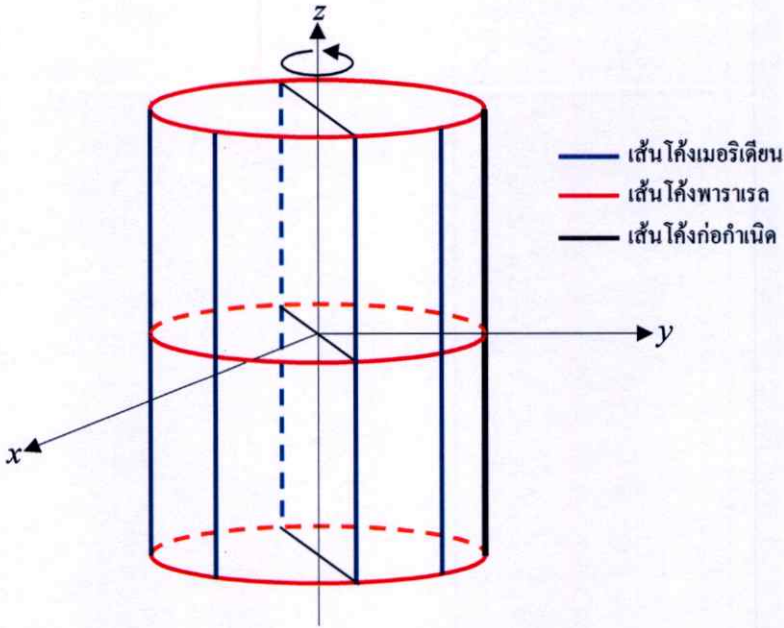
เมื่อ u คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน z บวก ที่อยู่บนช่วง $[0, \pi]$ และ v คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวก บนระนาบ xy ที่อยู่บนช่วง $[0, 2\pi]$ โดยที่ a คือ รัศมีของทรงกลม แสดงดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงกลม

3.1.2 ทรงกระบอก (cylinder)

ทรงสามมิติที่มีฐานเป็นรูปวงกลมที่เท่ากันทุกประการกับหน้าตัด และอยู่ในระนาบที่ขนานกัน โดยจุดศูนย์กลางของวงกลมที่เป็นหน้าตัดที่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และทางเดินของจุดที่มีระยะห่างจากเส้นที่กำหนดให้ นั้น เป็นจำนวนเดียวกันตลอดเวลา มีผิวโค้งเรียบ เรียกว่า ทรงกระบอก เมื่อตัดทรงสามมิตินี้ด้วยระนาบที่ขนานกับฐาน แล้วจะได้รอยตัดเป็นวงกลมที่เท่ากันทุกประการกับฐานเสมอ ถ้าพิจารณาการเกิดทรงกระบอกโดยการหมุนนั้น มาจากการหมุนเส้นโค้งก่อกำเนิดที่มีลักษณะเป็นเส้นตรงขนานกับแกน z รอบแกนหมุน แสดงดังรูปที่ 3.3

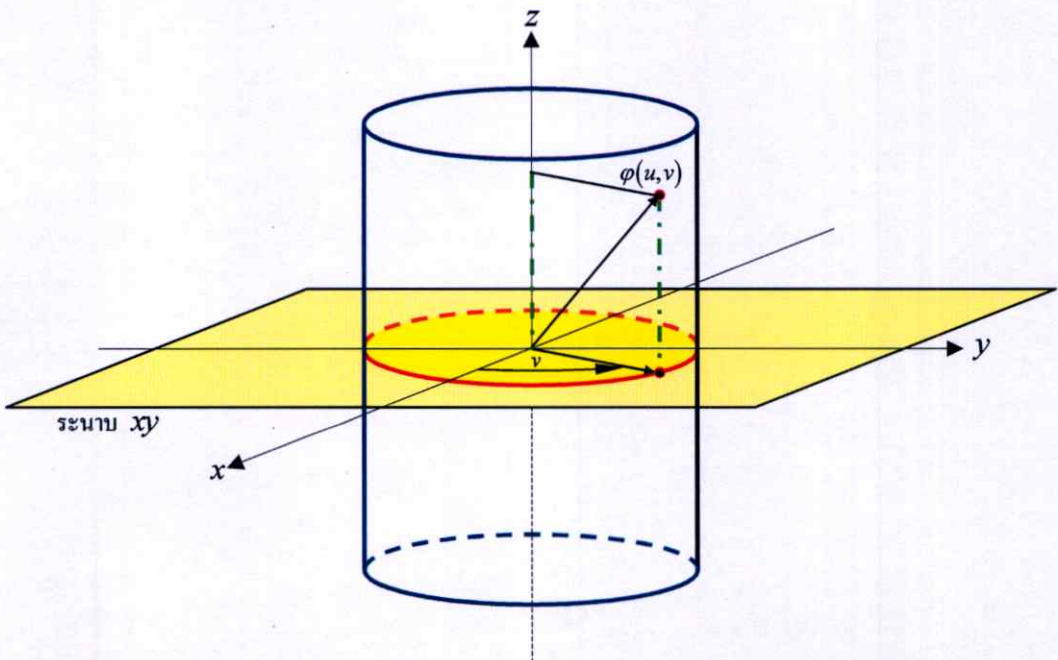


รูปที่ 3.3 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงกระบอก

สำหรับในระบบพิกัดทรงกระบอกนั้น จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกระบอกจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ u และ v จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงกระบอกกับระบบมุมฉาก เป็นดังนี้

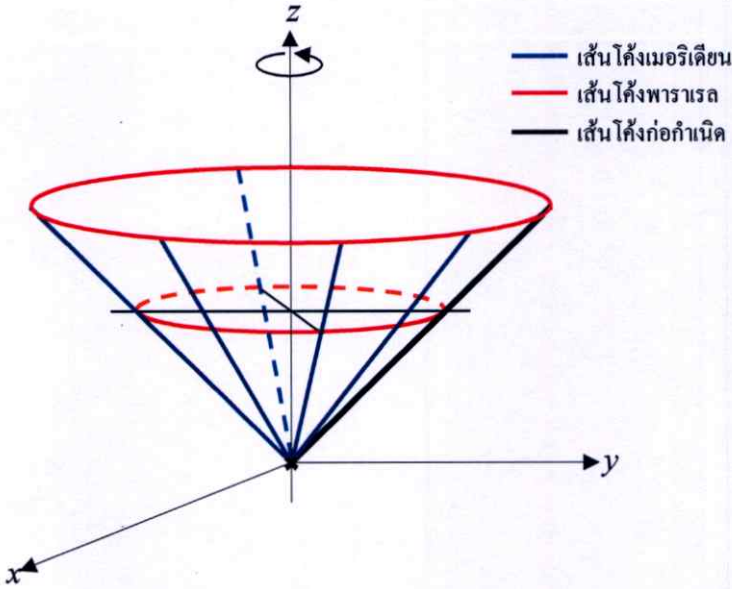
$$\varphi(u, v) = (a \cos v, a \sin v, u) \quad (3.2)$$

เมื่อ u คือ ค่าความยาวคงที่ของทรงกระบอก และ v คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บนระนาบ xy ที่อยู่บนช่วง $[0, 2\pi]$ โดยที่ a คือ รัศมีของวงกลมบนระนาบ xy แสดงดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงกระบอก

3.1.3 ทรงกรวย (cone)



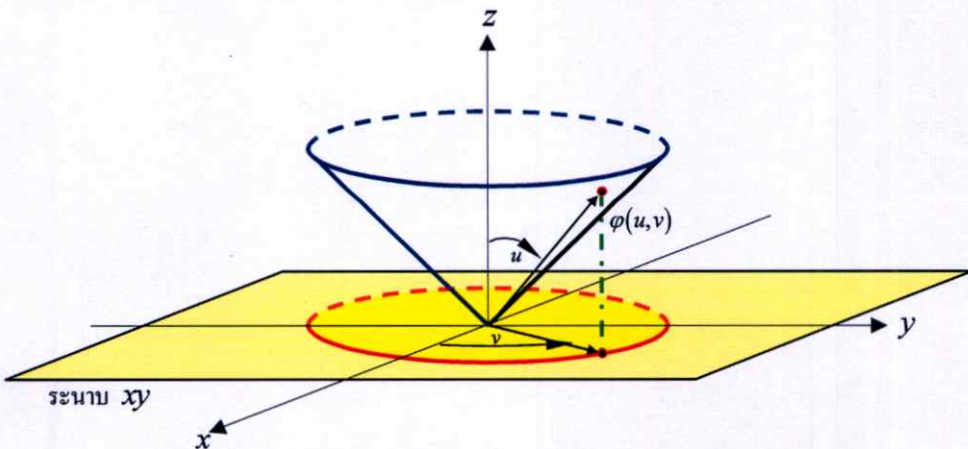
รูปที่ 3.5 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงกรวย

ทรงสามมิติที่มีฐานเป็นรูปวงกลม มียอดแหลมที่ไม่อยู่บนระนาบเดียวกันกับฐาน และเส้นที่ต่อระหว่างจุดยอดและจุดใดๆ บนขอบของฐานนั้น เป็นส่วนของเส้นตรงโดยรอบ มีผิวโค้งเรียบ เรียกว่า ทรงกรวย ถ้าพิจารณาการเกิดทรงกรวยโดยการหมุนนั้น มาจากการหมุนเส้นโค้งก่อกำเนิดที่มีลักษณะเป็นเส้นตรงที่ $y = z$ รอบแกนหมุน แสดงดังรูปที่ 3.5

สำหรับในระบบพิกัดทรงกรวยนั้น จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกรวยจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ u และ v จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงกรวยกับระบบมุมฉาก เป็นดังนี้

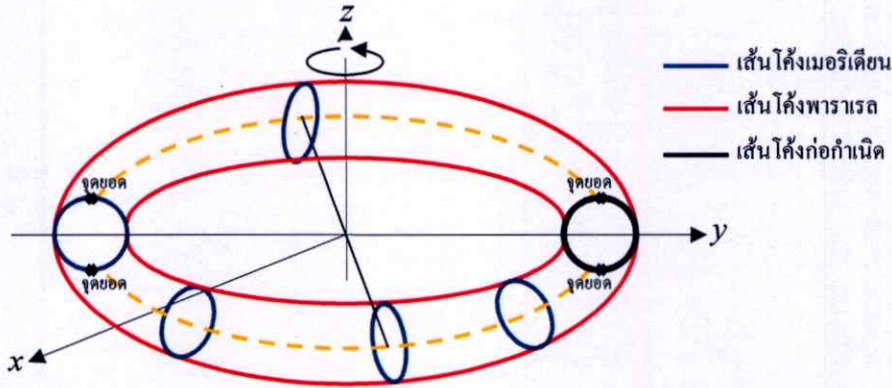
$$\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u) \quad (3.3)$$

เมื่อ u คือ รัศมีของทรงกรวย และความยาว ณ จุดยอดถึงจุดใดๆ บนทรงกรวย และ v คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy ที่อยู่บนช่วง $[0, 2\pi]$ แสดงดังรูปที่ 3.6

รูปที่ 3.6 การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงกรวย

3.1.4 ทรงห่วงยาง (torus)

ทรงสามมิติที่มีผิวโค้งเรียบ สร้างขึ้นจากการหมุนเส้นโค้งก่อกำเนิดที่มีลักษณะเป็นรูปวงกลมรอบแกนหมุน เรียกว่า ทรงห่วงยาง แสดงดังรูปที่ 3.7

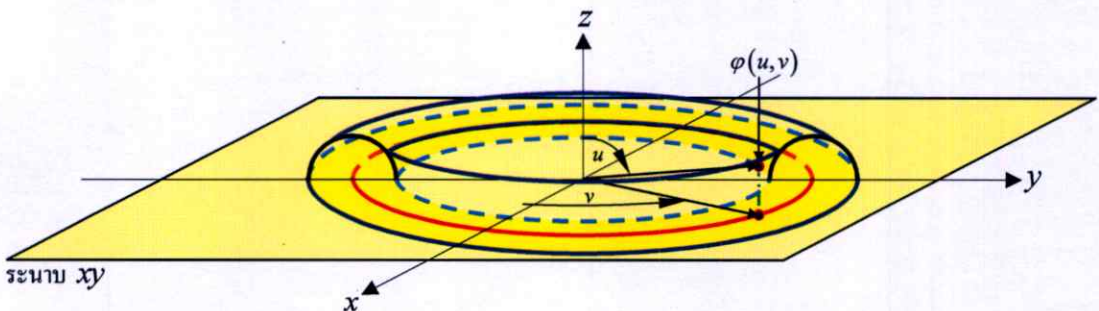


รูปที่ 3.7 ส่วนประกอบบนพื้นผิวของการหมุนรอบของทรงห่วงยาง

สำหรับในระบบพิกัดทรงห่วงยางนั้น จุดแต่ละจุดบนผิวทรงห่วงยางจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ u และ v จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงห่วงยางกับระบบมุมฉาก เป็นดังนี้

$$\varphi(u, v) = ((R + a \sin u) \cos v, (R + a \sin u) \sin v, a \cos u) \quad (3.4)$$

เมื่อ v คือ องศาของมุมระหว่าง 2 วงกลมที่ต่างกันที่วัดเทียบกับแกน x บวก บนระนาบ xy ที่อยู่บนช่วง $[0, 2\pi]$ และ u คือ องศาของมุมระหว่างรัศมีของวงกลมวัดเทียบกับแกน z ที่อยู่บนช่วง $[0, \pi]$ โดยที่ R เป็นรัศมีของทรงห่วงยาง นั่นคือระยะห่างจากจุดกำเนิด ไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลม และ a เป็นรัศมีของวงกลม แสดงดังรูปที่ 3.8



รูปที่ 3.8 การระบุพารามิเตอร์ของจุด $\varphi(u, v)$ บนทรงห่วงยาง

3.2 การประยุกต์ของสมการออยเลอร์ในการหาจีโอเดสิก

สมมติให้พื้นผิว S เป็นพื้นผิวที่มีสมการภาวะอิงพารามิเตอร์จัดอยู่ในรูปแบบ

$$\varphi = \varphi(u, v) \quad (3.5)$$

และความยาวส่วนโค้งตามนิยาม 2.1.16 ระหว่างจุดที่เป็นไปตามค่า t_0 และ t_1 ของพารามิเตอร์ t ที่ทำให้

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt \quad (3.6)$$

โดยที่ E, F, G เป็นรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งของพื้นผิว S

เนื่องจากสมการออยเลอร์เป็นสมการที่ให้ค่าสุดขีด ดังนั้นความยาวส่วนโค้งที่สั้นที่สุดบนพื้นผิว S ที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดของ φ เรียกว่า จีโอเดสิกของ S จะเป็นไปตามสมการออยเลอร์ โดยที่เส้นโค้งที่อยู่บนพื้นผิว (3.5) นั้น กำหนดให้

$$u = u(t) \text{ และ } v = v(t)$$

ดังนั้นระบบสมการออยเลอร์ของตัวแปร u และ v สำหรับ (3.6) คือ

$$f_u - \frac{d}{dt} f_{\dot{u}} = \frac{E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{dt} \frac{E\dot{u} + F\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} = 0 \quad (3.7)$$

$$f_v - \frac{d}{dt} f_{\dot{v}} = \frac{E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{dt} \frac{F\dot{u} + G\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} = 0 \quad (3.8)$$

โดยที่

$$f = \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}$$

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2} (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}} (E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2) \\ &= \frac{E_u \dot{u}^2 + 2F_u \dot{u}\dot{v} + G_u \dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\dot{u}} &= \frac{\partial f}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{2} (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}} (2E\dot{u} + 2F\dot{v}) \\ &= \frac{2E\dot{u} + 2F\dot{v}}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{2(E\dot{u} + F\dot{v})}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{E\dot{u} + F\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_v &= \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{1}{2} (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}} (E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2) \\ &= \frac{E_v \dot{u}^2 + 2F_v \dot{u}\dot{v} + G_v \dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{\dot{v}} &= \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} = \frac{1}{2} (E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2)^{-\frac{1}{2}} (2F\dot{u} + 2G\dot{v}) \\ &= \frac{2F\dot{u} + 2G\dot{v}}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{2(F\dot{u} + G\dot{v})}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} = \frac{F\dot{u} + G\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}} \end{aligned}$$

เนื่องจากในระบบพิกัดฉาก แกน x และแกน y ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ในทำนองเดียวกัน แกน u และแกน v ต่างก็ตั้งฉากซึ่งกันและกัน และจากนิยาม 2.1.18 ทำให้

$$F(u, v) = \varphi_u(u, v) \cdot \varphi_v(u, v) = 0$$

จากสมการที่ (3.7) และ (3.8) จะได้

$$\frac{E_u \dot{u}^2 + G_u \dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{dt} \frac{E\dot{u}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{E_v \dot{u}^2 + G_v \dot{v}^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{dt} \frac{G\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} = 0 \quad (3.10)$$

ในงานวิจัยนี้ จึงนำสมการที่ (3.9) และ (3.10) มาทำการหาจีโอเดสิกบนพื้นผิวที่ศึกษา ซึ่งในแต่ละพื้นผิวที่จะศึกษานั้น จะใช้วิธีการหาไปสู่ผลเฉลยโดยมีเทคนิคที่แตกต่างกันดังต่อไปนี้

3.2.1 จีโอเดสิกบนทรงกลม

สมการภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.1) สำหรับจุด $\gamma(x, y, z)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนทรงกลม สิ่งที่น่าสนใจในขณะนี้ คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนทรงกลม โดยการหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร u และ v จะได้

$$\varphi_u(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, -a \sin u)$$

และ
$$\varphi_v(u, v) = (-a \sin u \sin v, a \sin u \cos v, 0)$$

แทนค่า φ_u และ φ_v ในสมการ E และ G ซึ่งเป็นไปตามนิยาม 2.1.18 จะได้

$$\begin{aligned} E &= a^2 \cos^2 u \cos^2 v + a^2 \cos^2 u \sin^2 v + a^2 \sin^2 u \\ &= a^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= a^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 \sin^2 u \cos^2 v \\ &= a^2 \sin^2 u \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร u และ v ทั้งสมการ E และ G จะได้

$$E_u = 0, \quad E_v = 0 \quad \text{และ} \quad G_u = 2a^2 \sin u \cos u, \quad G_v = 0$$

นำค่าทั้งหมดแทนในสมการออยเลอร์ (3.9) และ (3.10) จะได้

$$\frac{(2a^2 \sin u \cos u) \dot{v}^2}{2\sqrt{a^2 \dot{u}^2 + a^2 \sin^2 u \dot{v}^2}} - \frac{d}{dt} \frac{a^2 \dot{u}}{\sqrt{a^2 \dot{u}^2 + a^2 \sin^2 u \dot{v}^2}} = 0 \quad (3.11)$$

$$-\frac{d}{dt} \frac{(a^2 \sin^2 u) \dot{v}}{\sqrt{a^2 \dot{u}^2 + a^2 \sin^2 u \dot{v}^2}} = 0 \quad (3.12)$$

จากสมการทั้งสองสมการ จะสังเกตได้ว่าสมการที่ (3.12) สามารถนำไปหาความยาวของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดนั้น จึงสามารถนำมาเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dt} \frac{a \sin^2 u \dot{v}}{\sqrt{\dot{u}^2 + \sin^2 u \dot{v}^2}} = 0$$

เมื่อ $\frac{du}{dt} = u$ ดังนั้น $du = u dt$ ในทำนองเดียวกัน $dv = v dt$ ทำให้

$$\frac{d}{du} \frac{a \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)}{\sqrt{1 + \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2}} = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{a \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)}{\sqrt{1 + \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2}} = c$$

$$a \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right) = c \sqrt{1 + \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2}$$

ยกกำลังสองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$a^2 \sin^4 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = c^2 \left(1 + \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right)$$

$$a^2 \sin^4 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = c^2 + c^2 \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2$$

$$a^2 \sin^4 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - c^2 \sin^2 u \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = c^2$$

$$(a^2 \sin^4 u - c^2 \sin^2 u) \left(\frac{dv}{du} \right)^2 = c^2$$

$$\left(\frac{dv}{du} \right)^2 = \frac{c^2}{a^2 \sin^4 u - c^2 \sin^2 u}$$

นำ $\csc^4 u$ คูณทั้งเศษและส่วนของสมการด้านขวามือ จะได้

$$\left(\frac{dv}{du} \right)^2 = \frac{c^2 \csc^4 u}{a^2 - c^2 \csc^2 u}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{a^2 - c^2 \csc^2 u}}$$

$$dv = \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{a^2 - c^2 \csc^2 u}} du$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\int 1 dv = \int \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{a^2 - c^2 \csc^2 u}} du$$

$$v = \int \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{a^2 - c^2 \csc^2 u}} du$$

สำหรับการหาปริพันธ์ดังกล่าว เริ่มโดยกำหนดให้ $\csc^2 u = 1 + \cot^2 u$ จะได้

$$v = \int \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{a^2 - c^2} (1 + \cot^2 u)} du$$

$$v = \int \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{a^2 - c^2 - c^2 \cot^2 u}} du$$

$$v = \int \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{(a^2 - c^2) - c^2 \cot^2 u} \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2 - c^2} \right)} du$$

$$v = \int \frac{c \csc^2 u}{\sqrt{a^2 - c^2} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2 - c^2} \cot^2 u}} du$$

สังเกตได้ว่า $\csc^2 u$ เป็นอนุพันธ์ของ $\cot u$ จึงกำหนดให้

$$-\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cot u = \sin x$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \csc^2 u du = \cos x dx.$$

เมื่อนำกลับไปแทนค่า จะได้

$$v = \int \frac{c \sqrt{a^2 - c^2} \cos x}{(a^2 - c^2)^{1/2} (1 - \sin^2 x)^{1/2}} dx = \int dx = x + \alpha = \arcsin \left[\frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cot u \right] + \alpha$$

หรือ
$$\sin(v - \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cot u.$$

กระจายพจน์ของ $\sin(v - \alpha)$ ให้อยู่ในรูปแบบ

$$\sin v \cos \alpha - \cos v \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}} \frac{\cos u}{\sin u} \quad (3.13)$$

จากสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.1) นำไปแทนค่าในสมการที่ (3.13) จะได้

$$y \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \cos \alpha - x \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \sin \alpha = z$$

โดยกำหนดให้ $A = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \cos \alpha$ และ $B = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} \sin \alpha$ จะได้

$$Ay - Bx = z \quad (3.14)$$

จากสมการที่ (3.14) จะพบว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงกลม จะเป็นส่วนของเส้นโค้งที่อยู่บนระนาบซึ่งต่างก็มีจุดศูนย์กลางบนทรงกลมเดียวกัน ระยะทางดังกล่าวจึงเป็นส่วนที่ตัดกันระหว่างระนาบกับทรงกลม นั่นคือ วงกลมใหญ่ ดังที่กล่าวไว้ในบทที่ 1

3.2.2 จีออเดสิกบนทรงกระบอก

สมการภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.2) สำหรับจุด $\gamma(x, y, z)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนทรงกระบอก สิ่งที่น่าสนใจในขณะนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนทรงกระบอก โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร u และ v จะได้

$$\varphi_u(u, v) = (0, 0, 1)$$

และ
$$\varphi_v(u, v) = (-a \sin v, a \cos v, 0)$$

แทนค่า φ_u และ φ_v ในสมการ E และ G ซึ่งเป็นไปตามนิยาม 2.1.18 จะได้

$$E = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$G = a^2 \sin^2 v + a^2 \cos^2 v = a^2$$

หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร u และ v ทั้งสมการ E และ G จะได้

$$E_u = 0, \quad E_v = 0 \quad \text{และ} \quad G_u = 0, \quad G_v = 0$$

นำค่าทั้งหมดแทนในสมการออยเลอร์ (3.9) และ (3.10) จะได้

$$\frac{d}{dt} \frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2 + a^2 \dot{v}^2}} = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{a^2 \dot{v}}{\sqrt{\dot{u}^2 + a^2 \dot{v}^2}} = 0 \tag{3.16}$$

ในที่นี้เลือกสมการที่ (3.15) เพื่อนำไปหาสมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุด โดยกำหนดให้ $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ ดังนั้น $du = \dot{u} dt$ ในทำนองเดียวกัน $dv = \dot{v} dt$ ทำให้

$$\frac{d}{dv} \frac{\frac{du}{dv}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + a^2}} = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{du}{dv} = c \sqrt{\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + a^2}$$

ยกกำลังสองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = c^2 \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + c^2 a^2$$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)^2 = \frac{c^2 a^2}{1 - c^2}$$

หารากที่สองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{du}{dv} = \frac{ca}{\sqrt{1 - c^2}}$$

$$dv = \frac{\sqrt{1-c^2}}{ca} du$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\int 1 dv = \int \frac{\sqrt{1-c^2}}{ca} du$$

$$v = bu + g \quad (3.17)$$

โดยที่ $b = \frac{\sqrt{1-c^2}}{ca}$ และ g เป็นค่าคงที่

จากสมการที่ (3.17) จะพบว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงกระบอกนั้น จะเป็น ส่วนที่ตัดกันระหว่างทรงกระบอกกับระนาบที่ขนานกับแกนของการหมุน และสัมผัสกับพื้นผิวของ ทรงกระบอก นั่นคือ เส้นโค้งเมริเดียน และระนาบที่ขนานกับระนาบ xy นั่นคือ เส้นโค้งพาราเรล ที่ผ่านจุดสองจุดเป็นจีโอเดสิกของทรงกระบอก ในอีกกรณีหนึ่งของการมีจีโอเดสิก เมื่อพิจารณา สมการที่ (3.15) และ (3.16) จะสังเกตได้ว่าสามารถนำสมการทั้งสองสมการนั้นไปหาความยาวของ เส้นโค้งได้ ดังนั้นจึงหาปริพันธ์ตลอดสมการทั้งสองสมการ จะได้

$$\frac{\dot{u}}{\sqrt{\dot{u}^2 + a^2 \dot{v}^2}} = c_1 \quad (3.18)$$

$$\frac{a^2 \dot{v}}{\sqrt{\dot{u}^2 + a^2 \dot{v}^2}} = c_2 \quad (3.19)$$

โดยที่ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงที่ นำสมการที่ (3.18) หารกับ (3.19) จะได้

$$\frac{\dot{u}}{\dot{v}} = D_1$$

โดยที่ $D_1 = c_1/c_2$ เป็นค่าคงที่ เมื่อกำหนดให้ $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ ดังนั้น $du = \dot{u} dt$ ในทำนองเดียวกัน

$dv = \dot{v} dt$ ทำให้

$$\frac{du}{dv} = D_1$$

$$du = D_1 dv$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$u = D_1 v + D_2$$

โดยที่ D_2 เป็นค่าคงที่ ถ้ากำหนดให้จุดสองจุด $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ เป็นจุดใดๆ ที่อยู่บน ทรงกระบอก จากสูตรอนุพันธ์ในรูปผลต่างจำกัด

$$\frac{\Delta u}{\Delta v} = \frac{du}{dv} = \frac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0}$$

ดังนั้น

$$u = \left(\frac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0} \right) v + D_2$$

นอกจากนี้ ถ้ากำหนดให้ $u_0 = D_1 v_0 + D_2$ จะได้

$$\begin{aligned} D_2 &= u_0 - D_1 v_0 \\ D_2 &= u_0 - \left(\frac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0} \right) v_0 \\ &= u_0 - \left(\frac{u_1 v_0 - u_0 v_0}{v_1 - v_0} \right) \\ &= \frac{u_0 v_1 - u_0 v_0 - u_1 v_0 + u_0 v_0}{v_1 - v_0} = \frac{u_0 v_1 - u_1 v_0}{v_1 - v_0} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$u = \left(\frac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0} \right) v + \frac{u_0 v_1 - u_1 v_0}{v_1 - v_0}$$

เมื่อนำค่าดังกล่าวไปแทนในสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.2) จะได้

$$\varphi(u, v) = \left(a \cos v, a \sin v, \left(\frac{u_1 - u_0}{v_1 - v_0} \right) v + \frac{u_0 v_1 - u_1 v_0}{v_1 - v_0} \right) \quad (3.20)$$

จากสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.20) จะพบว่าในกรณีนี้ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงกระบอกจะมีเส้นเกลียว (helix) เป็นจีโอเดสิก

3.2.3 จีโอเดสิกบนทรงกรวย

สมการภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.3) สำหรับจุด $\gamma(x, y, z)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนทรงกรวย สิ่งที่น่าสนใจในขณะนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดระหว่างจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนทรงกรวย โดยการหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร u และ v จะได้

$$\varphi_u(u, v) = (\cos v, \sin v, 1)$$

และ
$$\varphi_v(u, v) = (-u \sin v, u \cos v, 0)$$

แทนค่า φ_u และ φ_v ในสมการ E และ G ซึ่งเป็นไปตามนิยาม 2.1.18 จะได้

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 v + \sin^2 v + 1 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$G = u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v = u^2$$

หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร u และ v ทั้งสมการ E และ G จะได้

$$E_u = 0, \quad E_v = 0 \quad \text{และ} \quad G_u = 2u, \quad G_v = 0$$

นำค่าทั้งหมดแทนในสมการออยเลอร์ (3.9) และ (3.10) จะได้

$$\frac{(2u)\dot{v}^2}{2\sqrt{2\dot{u}^2 + u^2\dot{v}^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2\dot{u}}{\sqrt{2\dot{u}^2 + u^2\dot{v}^2}} = 0 \quad (3.21)$$

$$-\frac{d}{dt} \frac{u^2\dot{v}}{\sqrt{2\dot{u}^2 + u^2\dot{v}^2}} = 0 \quad (3.22)$$

จากสมการทั้งสองสมการ จะสังเกตได้ว่าสมการที่ (3.22) สามารถนำไปหาความยาวของเส้นโค้งได้ ดังนั้น จึงสามารถนำมาเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dt} \frac{u^2 \dot{v}}{\sqrt{2\dot{u}^2 + u^2 \dot{v}^2}} = 0$$

เมื่อ $\frac{du}{dt} = \dot{u}$ ดังนั้น $du = \dot{u} dt$ ในทำนองเดียวกัน $dv = \dot{v} dt$ ทำให้

$$\frac{d}{du} \frac{u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)}{\sqrt{2 + u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2}} = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)}{\sqrt{2 + u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2}} &= c \\ u^2 \left(\frac{dv}{du} \right) &= c \sqrt{2 + u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2} \\ u^4 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 &= c^2 \left(2 + u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \right) \\ u^4 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 &= 2c^2 + c^2 u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 \\ u^4 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - c^2 u^2 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 &= 2c^2 \\ \left(\frac{dv}{du} \right)^2 &= \frac{2c^2}{u^4 - c^2 u^2} \end{aligned}$$

หารากที่สองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} &= \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{u^4 - c^2 u^2}} \\ dv &= \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{u^4 - c^2 u^2}} du \end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \int 1 dv &= \int \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{u^4 - c^2 u^2}} du \\ v &= \frac{\sqrt{c^2 - u^2} \ln \left(2 \left(c + \sqrt{c^2 - u^2} \right) / u \right)}{\sqrt{u^2 - c^2}} \quad (3.23) \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3.23) จะสังเกตได้ว่า พจน์ทางขวามือของสมการค่อนข้างยุ่งยาก

ดังนั้นจากรูปแบบทางเลือกของสมการออยเลอร์ในบทแทรก 2.1.6 จะได้

$$\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} - \left(\frac{dv}{du}\right) \left[\frac{\partial}{\partial v'} \sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} \right] = c$$

$$\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} - \left(\frac{dv}{du}\right) \left(\frac{2u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)}{2\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2}} \right) = c$$

$$\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} - \left(\frac{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2}} \right) = c$$

$$\frac{\left(\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} \right)^2 - u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2}} = c$$

$$\frac{2}{\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2}} = c$$

$$2 = c \sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2}$$

ยกกำลังสองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$4 = c^2 \left(u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2 \right)$$

$$4 = c^2 u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2c^2$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{4 - 2c^2}{c^2 u^2}$$

หารากที่สองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{dv}{du} = \frac{\sqrt{4 - 2c^2}}{cu}$$

$$dv = \frac{\sqrt{4 - 2c^2}}{cu} du$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\int 1 dv = \int \frac{\sqrt{4 - 2c^2}}{cu} du$$

เพราะฉะนั้น

$$v = \frac{\sqrt{4-2c^2}}{c} \ln|u| + \text{constant} \quad (3.24)$$

จากสมการที่ (3.23) และ (3.24) จะพบว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงกรวยนั้น ไม่ได้มีเพียงสมการเดียว และสมการที่ (3.24) จัดอยู่ในรูปแบบที่ไม่ซับซ้อนเท่าสมการที่ (3.23) อย่างไรก็ตามสมการทั้งสองแบบนี้จะมีอยู่จริงได้ก็ต่อเมื่อค่าของตัวแปร u ต้องไม่เป็นศูนย์ นั่นคือ สมการที่ได้นั้นจะขึ้นอยู่กับทุกจุดยกเว้นจุดยอดของทรงกรวย

3.2.4 จีออเดสิกบนทรงห่วย่าง

สมการภาวะอิงพารามิเตอร์ (3.4) สำหรับจุด $\gamma(x, y, z)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนทรงห่วย่าง สิ่งที่น่าสนใจในขณะนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนทรงห่วย่าง โดยการหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร u และ v จะได้

$$\varphi_u(u, v) = (\rho \cos u \cos v, \rho \cos u \sin v, -\rho \sin u)$$

และ
$$\varphi_v(u, v) = (-(R + \rho \sin u) \sin v, (R + \rho \sin u) \cos v, 0)$$

แทนค่า φ_u และ φ_v ในสมการ E และ G ซึ่งเป็นไปตามนิยาม 2.1.18 จะได้

$$\begin{aligned} E &= \rho^2 \cos^2 u \cos^2 v + \rho^2 \cos^2 u \sin^2 v + \rho^2 \sin^2 u \\ &= \rho^2 \cos^2 u + \rho^2 \sin^2 u \\ &= \rho^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= (R + \rho \sin u)^2 \sin^2 v + (R + \rho \sin u)^2 \cos^2 v \\ &= (R + \rho \sin u)^2 \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์เทียบตัวแปร u และ v ทั้งสมการ E และ G จะได้

$$E_u = 0, \quad E_v = 0 \quad \text{และ} \quad G_u = 2R\rho \cos u + 2\rho^2 \cos u \sin u, \quad G_v = 0$$

นำค่าทั้งหมดแทนในสมการออยเลอร์ (3.9) และ (3.10) จะได้

$$\frac{(2R\rho \cos u + 2\rho^2 \cos u \sin u) \dot{v}^2}{2\sqrt{\rho^2 \dot{u}^2 + (R + \rho \sin u)^2 \dot{v}^2}} - \frac{d}{dt} \frac{\rho^2 \dot{u}}{\sqrt{\rho^2 \dot{u}^2 + (R + \rho \sin u)^2 \dot{v}^2}} = 0 \quad (3.25)$$

$$-\frac{d}{dt} \frac{(R + \rho \sin u)^2 \dot{v}}{\sqrt{\rho^2 \dot{u}^2 + (R + \rho \sin u)^2 \dot{v}^2}} = 0 \quad (3.26)$$

จากสมการทั้งสองสมการ จะสังเกตได้ว่า สมการที่ (3.26) สามารถนำไปหาความยาวของเส้นโค้งได้ ดังนั้น จึงสามารถนำมาเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{d}{dt} \frac{(R + \rho \sin u)^2 \dot{v}}{\sqrt{\rho^2 \dot{u}^2 + (R + \rho \sin u)^2 \dot{v}^2}} = 0$$

เมื่อ $\frac{du}{dt} = u$ ดังนั้น $du = u dt$ ในทำนองเดียวกัน $dv = v dt$ ทำให้

$$\frac{d}{du} \frac{(R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{(R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} = c$$

$$(R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right) = c \sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$

ยกกำลังสองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$(R + \rho \sin u)^4 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = c^2 \left(\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \right)$$

$$(R + \rho \sin u)^4 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = c^2 \rho^2 + c^2 (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

$$\left((R + \rho \sin u)^4 - c^2 (R + \rho \sin u)^2 \right) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = c^2 \rho^2$$

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \frac{c^2 \rho^2}{(R + \rho \sin u)^4 - c^2 (R + \rho \sin u)^2}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{c \rho}{\sqrt{(R + \rho \sin u)^4 - c^2 (R + \rho \sin u)^2}}$$

$$dv = \frac{c \rho}{\sqrt{(R + \rho \sin u)^4 - c^2 (R + \rho \sin u)^2}} du$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\int 1 dv = \int \frac{c \rho}{\sqrt{(R + \rho \sin u)^4 - c^2 (R + \rho \sin u)^2}} du$$

$$v = \int \frac{c \rho}{\sqrt{(R + \rho \sin u)^4 - c^2 (R + \rho \sin u)^2}} du \quad (3.27)$$

จากสมการที่ (3.27) จะสังเกตได้ว่า ในพจน์ของสมการทางขวามือนั้นยังติดอยู่ในรูปของปริพันธ์ที่ไม่สามารถหาปริพันธ์ในรูปแบบพื้นฐานได้ง่าย

ดังนั้นจากรูปแบบทางเลือกของสมการออยเลอร์ในบทแทรก 2.1.6 จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2} - \left(\frac{dv}{du}\right) \left[\frac{\partial}{\partial v'} \sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2} \right] &= c \\ \sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2} - \left(\frac{dv}{du}\right) \left(\frac{2(R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)}{2\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} \right) &= c \\ \sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2} - \left(\frac{(R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} \right) &= c \\ \frac{\left(\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2} \right)^2 - (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} &= c \\ \frac{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 - (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}{\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} &= c \\ \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}} &= c \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\rho^2 = c \sqrt{\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2}$$

ยกกำลังสองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\begin{aligned} \rho^4 &= c^2 \left(\rho^2 + (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \right) \\ \rho^4 &= c^2 \rho^2 + c^2 (R + \rho \sin u)^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \left(\frac{dv}{du}\right)^2 &= \frac{\rho^4 - c^2 \rho^2}{c^2 (R + \rho \sin u)^2} \end{aligned}$$

หารากที่สองตลอดทั้งสมการ จะได้

$$dv = \frac{\rho^4 - c^2 \rho^2}{c(R + \rho \sin u)} du$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\int 1 dv = \int \frac{\rho^4 - c^2 \rho^2}{c(R + \rho \sin u)} du$$

เพราะฉะนั้น

$$v = \frac{2 \arctan \left(\frac{2R \tan \left(\frac{1}{2} u \right) + 2\rho}{2\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) \rho^4}{c\sqrt{R^2 - \rho^2}} - \frac{2 \arctan \left(\frac{2R \tan \left(\frac{1}{2} u \right) + 2\rho}{2\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) \rho^2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \quad (3.28)$$

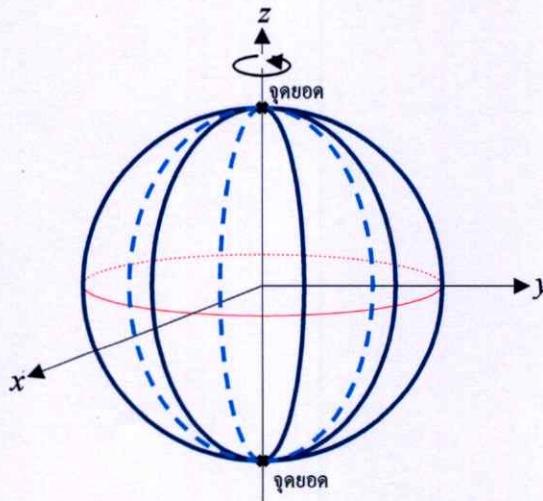
จากสมการที่ (3.28) จะพบว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนทรงพวงยางไม่ได้มีเพียงสมการเดียว ถึงแม้ว่าจะสามารถหาปริพันธ์ได้ง่ายกว่าสมการที่ (3.27) อย่างไรก็ตามจีโอเดสิกจะมีอยู่จริงได้ก็ต่อเมื่อค่าของตัวแปร $u \neq \pi$

3.3 กรณีที่เป็นไปได้สำหรับการมีเส้นโค้งจีโอเดสิก

หลังจากที่ได้ศึกษาการประยุกต์ของสมการออยเลอร์ในการหาจีโอเดสิกในหัวข้อ 3.2 แล้ว ทำให้ได้เส้นโค้งจีโอเดสิกสำหรับในแต่ละกรณีดังต่อไปนี้

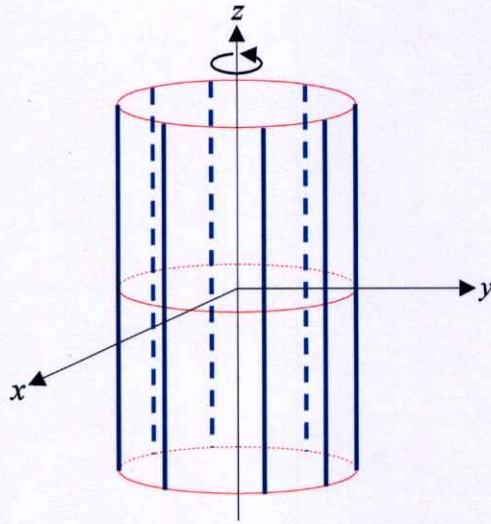
3.3.1 เส้นโค้งเมอร์เคียน

ถ้ากำหนดจุดสองจุดใดๆ อยู่บนเส้นโค้งเมอร์เคียน แล้วทุกเส้นโค้งเมอร์เคียนเป็นจีโอเดสิกในกรณีของทรงกลม จะพบว่า วงกลมใหญ่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกลม แสดงดังรูปที่ 3.9



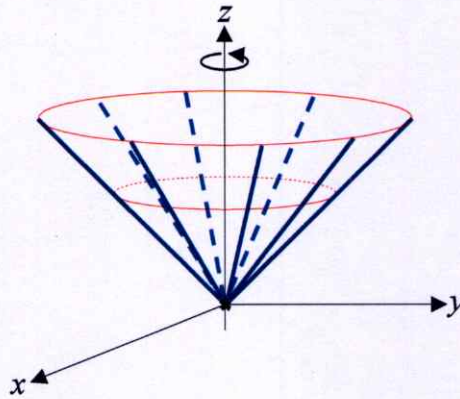
รูปที่ 3.9 เส้นโค้งเมอร์เคียนที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกลม

ในกรณีของทรงกระบอก จะพบว่า เส้นตรงบนพื้นผิวที่ขนานกับแกนของการหมุนรอบเป็น จีออเดสิกบนทรงกระบอก แสดงดังรูปที่ 3.10



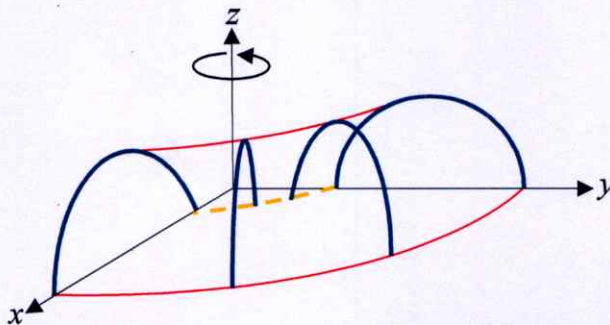
รูปที่ 3.10 เส้นโค้งเมอร์เคียนที่เป็นจีออเดสิกบนทรงกระบอก

ในกรณีของทรงกรวย จะพบว่า เส้นตรงที่ลากจากจุดใดๆ บนพื้นผิวไปยังจุดยอดเป็นจีออเดสิกบน ทรงกรวย แสดงดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 เส้นโค้งเมอร์เคียนที่เป็นจีออเดสิกบนทรงกรวย

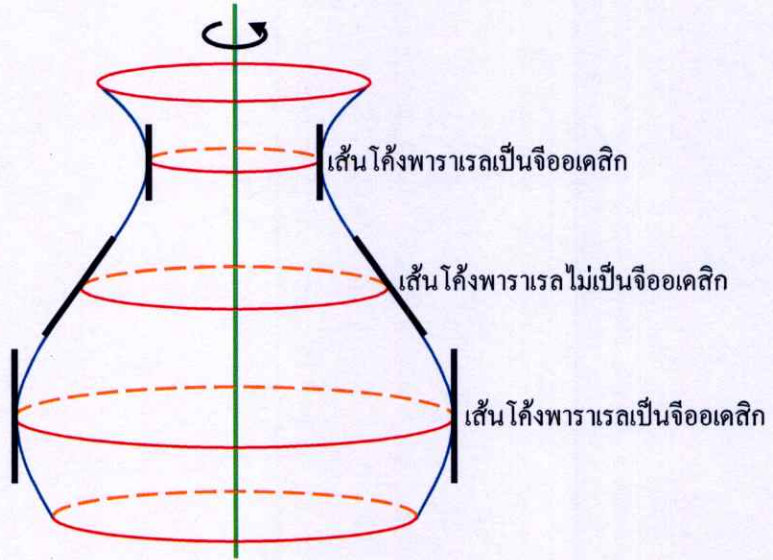
และในกรณีของทรงห้วงยาง จะพบว่า วงกลมเป็นจีออเดสิกบนทรงห้วงยาง แสดงดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 เส้นโค้งเมอร์เคียนที่เป็นจีออเดสิกบนทรงห้วงยาง

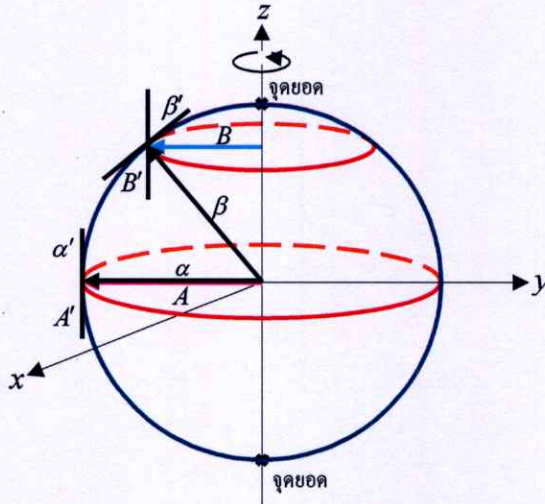
3.3.2 เส้นโค้งพาราเรล

จากนิยาม 2.1.20 นั้น ถ้า α เป็นจีโอเดสิก แล้ว α'' ตั้งฉากกับระนาบสัมผัส เนื่องจาก α' อยู่ในระนาบสัมผัส ดังนั้น $\alpha' \cdot \alpha'' = 0$ ก็ต่อเมื่อ α เป็นจีโอเดสิก แสดงดังรูปที่ 3.13



รูปที่ 3.13 เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นจีโอเดสิก

ในกรณีของทรงกลม จากสมการออยเลอร์จะได้ว่า วงกลมใหญ่เป็นจีโอเดสิก ทำให้ปัญหาที่ตามมาคือ วงกลมเล็กเป็นจีโอเดสิกหรือไม่

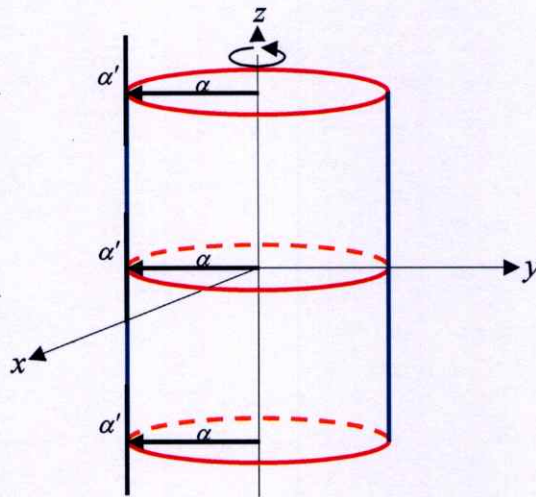


รูปที่ 3.14 เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นและไม่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกลม

ถ้าพิจารณาจากรูปที่ 3.14 ให้ α และ β เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งที่ออกมาจากจุดศูนย์กลางของทรงกลม โดยกำหนดให้ α และ β อยู่ ณ จุดที่ $u = \frac{\pi}{2}$ และ $u \neq \frac{\pi}{2}$ ตามลำดับ ดังนั้น α' และ β' เป็นเวกเตอร์สัมผัสกับพื้นผิวทรงกลม

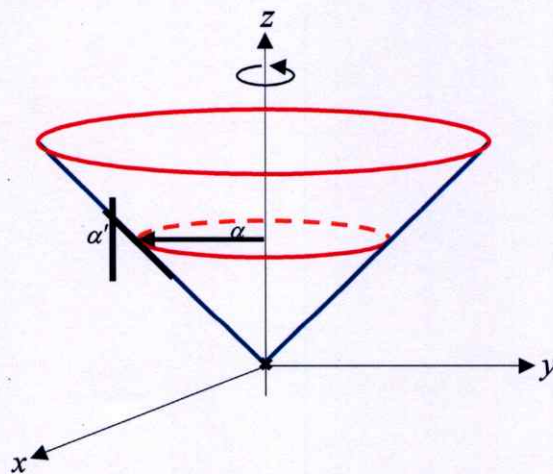
ให้ A และ B เป็นเวกเตอร์รัศมีของวงกลมใหญ่และวงกลมเล็กของทรงกลมตามลำดับ เนื่องจากวงกลมใหญ่เป็นจีโอเดสิก อีกทั้ง α และ A ขนานกัน โดยที่ α' และ A' ตั้งฉากกับ α และ A ตามลำดับ ดังนั้นจึงทำให้ α' และ A' ขนานกัน และขนานกับแกนของการหมุน เพราะฉะนั้น ในกรณีนี้ เส้นโค้งพาราเรล α เป็นจีโอเดสิก

ในขณะที่ β และ B ไม่ขนานกัน โดยที่ β' และ B' ตั้งฉากกับ β และ B ตามลำดับ ดังนั้น β' และ B' ไม่ขนานกัน และไม่ขนานกับแกนของการหมุน เพราะฉะนั้นวงกลมเล็กบนทรงกลมจึงไม่เป็นจีโอเดสิกหรือเส้นโค้งพาราเรลไม่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกลม แต่ในกรณีของทรงกระบอกนั้น จะพบว่า ทุกเส้นโค้งพาราเรลเป็นจีโอเดสิก แสดงดังรูปที่ 3.15



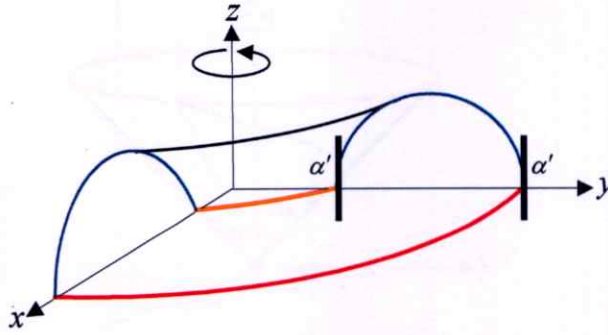
รูปที่ 3.15 เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกระบอก

ในกรณีของทรงกรวยนั้น จะพบว่า เส้นโค้งพาราเรลไม่เป็นจีโอเดสิก เนื่องจากเป็นกรณีเดียวกับ β และ B ในกรณีของทรงกลม แสดงดังรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 เส้นโค้งพาราเรลที่ไม่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกรวย

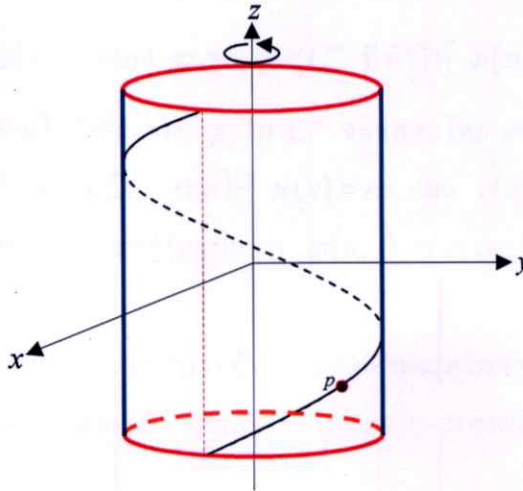
ในกรณีของทรงห่วงยางนั้น จะพบว่า เส้นโค้งพาราเรลเป็นจีโอเดสิกก็ต่อเมื่อเป็นวงกลมรัศมีวงใน และรัศมีวงนอกของทรงห่วงยาง แสดงดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 เส้นโค้งพาราเรลที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงห่วงยาง

3.3.3 เส้นเกลียวหรือเส้นเวียนก้นหอย

สำหรับกรณีของทรงกระบอกนั้น จะพบว่า ถ้ากำหนดจุดสองจุดใดๆ อยู่บนทรงกระบอก แล้วเส้นโค้งเกลียวหรือฮีลิกซ์ (helix) เป็นจีโอเดสิก แสดงดังรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 เส้นโค้งเกลียวที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกระบอก

เส้นโค้งเกลียวที่ได้ พิจารณาจากสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ของเส้นโค้งเกลียวในรูปแบบ

$$\varphi(u, v) = (a \cos v, a \sin v, bv)$$

ของทรงกระบอก ณ จุด $p \in C^\infty$ ที่ทำให้ $\varphi(0, 0) = p$ ในสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ดังกล่าว ย่านใกล้เคียงของ p ใน C^∞ จะแสดงโดย $\varphi(u(s), v(s))$ เมื่อ s เป็นความยาวส่วนโค้งของ C^∞ เพราะฉะนั้น ถ้ากำหนดให้ $u(s) = as$ และ $v(s) = bs$ โดยที่ $a^2 + b^2 = 1$ แล้วจะได้จีโอเดสิกของทรงกระบอกจะอยู่ในรูปแบบ $\varphi(u, v) = (\cos as, \sin as, bs)$ นั่นคือ เส้นโค้งเกลียว

สำหรับเส้นเวียนก้นหอยรูปห้วงยางที่ได้ พิจารณาจากสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ของเส้นเวียนก้นหอยรูปห้วงยางในรูปแบบ

$$\varphi(u, v) = ((R + a \sin u) \cos v, (R + a \sin u) \sin v, a \cos u)$$

โดยที่

$$v = \left(2 \arctan \left(\frac{2R \tan \left(\frac{1}{2} u \right) + 2\rho}{2\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) \rho' / c\sqrt{R^2 - \rho^2} \right) - \left(2 \arctan \left(\frac{2R \tan \left(\frac{1}{2} u \right) + 2\rho}{2\sqrt{R^2 - \rho^2}} \right) \rho^2 / \sqrt{R^2 - \rho^2} \right)$$

ณ จุด $p \in C^\infty$ ที่ทำให้ $\varphi(0, 0) = p$ ในสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ดังกล่าว ย่านใกล้เคียงของ p ใน C^∞ จะแสดงโดย $\varphi(u(s), v(s))$ เมื่อ s เป็นความยาวส่วนโค้งของ C^∞ เพราะฉะนั้น จะได้ จีออเดสิกของทรงห้วงยางอยู่ในรูปแบบเส้นเวียนก้นหอยรูปห้วงยาง

3.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองสำหรับการวิเคราะห์จีออเดสิก

การประยุกต์ของสมการออยเลอร์ในการหาจีออเดสิกในหัวข้อ 3.2 นั้น ผลเฉลยของสมการดังกล่าวจะอยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ทั้งนี้ถ้าต้องการที่จะหาจีออเดสิกโดยจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง แล้วต้องเป็นสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ซ้ำด้วย เพราะฉะนั้นจากรูปแบบหลักมูลที่หนึ่งตามนิยาม 2.1.18 เมื่อ $F = 0$ จะได้

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2 \quad \text{หรือ} \quad \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$$

จาก $du/dt = \dot{u}$ และ $dv/dt = \dot{v}$ ทำให้

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2$$

ดังนั้น

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}$$

เนื่องจาก $u' = \frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{u}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}$ จะได้ $\dot{u} = u' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}$

ในทำนองเดียวกัน $v' = \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{v}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}$ จะได้ $\dot{v} = v' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}$

นำค่า u' และ v' แทนในสมการที่ (3.9) จัดสมการใหม่ จะได้

$$\frac{E_u \left(u' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2} \right)^2 + G_u \left(v' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2} \right)^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{ds} \cdot \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2} \frac{Eu' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} = 0$$

$$\frac{E_u u'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2) + G_u v'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{ds} Eu' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2} = 0$$

นำ $\frac{1}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}$ คูณตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{E_u u'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2) + G_u v'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)}{2(E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)} - \frac{d}{ds} Eu' = 0$$

$$\frac{E_u u'^2 + G_u v'^2}{2} - \frac{d}{ds} Eu' = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{E_u}{2} u'^2 + \frac{G_u}{2} v'^2 - \frac{d}{ds} Eu' = 0 \quad (3.29)$$

ในทำนองเดียวกัน นำค่า u' และ v' แทนในสมการที่ (3.10) จัดอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{E_v (u' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2})^2 + G_v (v' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2})^2}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{ds} \cdot \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2} \frac{Gv' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} = 0$$

$$\frac{E_v u'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2) + G_v v'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)}{2\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}} - \frac{d}{ds} Gv' \sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2} = 0$$

นำ $\frac{1}{\sqrt{E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2}}$ คูณตลอดทั้งสมการ จะได้

$$\frac{E_v u'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2) + G_v v'^2 (E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)}{2(E\dot{u}^2 + G\dot{v}^2)} - \frac{d}{ds} Gv' = 0$$

$$\frac{E_v u'^2 + G_v v'^2}{2} - \frac{d}{ds} Gv' = 0$$

ดังนั้น

$$\frac{E_v}{2} u'^2 + \frac{G_v}{2} v'^2 - \frac{d}{ds} Gv' = 0 \quad (3.30)$$

จาก $\frac{d}{ds}(Eu') = E \frac{du'}{ds} + u' \frac{dE}{ds}$

$$= Eu'' + u'(E_u u' + E_v v') = Eu'' + E_u u'^2 + E_v u'v'$$

นำค่า $\frac{d}{ds}(Eu')$ แทนในสมการที่ (3.29) จะได้

$$\frac{E_u}{2} u'^2 + \frac{G_u}{2} v'^2 - (Eu'' + E_u u'^2 + E_v u'v') = 0$$

$$\frac{E_u}{2} u'^2 + \frac{G_u}{2} v'^2 - Eu'' - E_u u'^2 - E_v u'v' = 0$$

$$\left(\frac{E_u}{2} - E_u\right) u'^2 - E_v u'v' + \frac{G_u}{2} v'^2 = Eu''$$

$$-\frac{E_u}{2E} u'^2 - \frac{E_v}{E} u'v' + \frac{G_u}{2E} v'^2 = u''$$

เพราะฉะนั้น

$$u'' + \frac{E_u}{2E} u'^2 + \frac{E_v}{E} u'v' - \frac{G_u}{2E} v'^2 = 0 \quad (3.31)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} \text{จาก } \frac{d}{ds}(Gv') &= G \frac{dv'}{ds} + v' \frac{dG}{ds} \\ &= Gv'' + v'(G_u u' + G_v v') = Gv'' + G_u u'v' + G_v v'^2 \end{aligned}$$

นำค่า $\frac{d}{ds}(Gv')$ แทนในสมการที่ (3.30) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{E_v}{2} u'^2 + \frac{G_v}{2} v'^2 - (Gv'' + G_u u'v' + G_v v'^2) &= 0 \\ \frac{E_v}{2} u'^2 + \frac{G_v}{2} v'^2 - Gv'' - G_u u'v' - G_v v'^2 &= 0 \\ \frac{E_v}{2} u'^2 - G_u u'v' + \left(\frac{G_v}{2} - G_v\right) v'^2 &= Gv'' \\ \frac{E_v}{2G} u'^2 - \frac{G_u}{G} u'v' - \frac{G_v}{2G} v'^2 &= v'' \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$v'' - \frac{E_v}{2G} u'^2 + \frac{G_u}{G} u'v' + \frac{G_v}{2G} v'^2 = 0 \quad (3.32)$$

ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า จีออเดสิก $\alpha(s) = \varphi(u(s), v(s))$ บนพื้นผิวของการหมุนรอบ S นั้นจะเป็นไปตามระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$u'' + \frac{E_u}{2E} u'^2 + \frac{E_v}{E} u'v' - \frac{G_u}{2E} v'^2 = 0 \quad (3.31)$$

$$v'' - \frac{E_v}{2G} u'^2 + \frac{G_u}{G} u'v' + \frac{G_v}{2G} v'^2 = 0 \quad (3.32)$$

3.4.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีออเดสิกบนทรงกลม

นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v จากหัวข้อย่อย 3.2.1 แทนในสมการที่ (3.31) จะได้

$$\begin{aligned} u'' - \frac{2a^2 \sin u \cos u}{2a^2} v'^2 &= 0 \\ u'' - \sin u \cos u v'^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

ในทำนองเดียวกัน นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v แทนในสมการที่ (3.32) จะได้

$$\begin{aligned} v'' + \frac{2a^2 \sin u \cos u}{a^2 \sin^2 u} u'v' &= 0 \\ v'' + 2 \cot u u'v' &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

3.4.2 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีออเดสิกบนทรงกระบอก

นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v จากหัวข้อย่อย 3.2.2 แทนในสมการที่ (3.31) จะได้

$$u'' = 0 \quad (3.35)$$

ในทำนองเดียวกัน นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v แทนในสมการที่ (3.32) จะได้

$$v'' = 0 \quad (3.36)$$

3.4.3 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงกรวย

นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v จากหัวข้อย่อย 3.2.3 แทนในสมการที่ (3.31) จะได้

$$\begin{aligned}u'' - \frac{2u}{2 \times 2} v'^2 &= 0 \\u'' - \frac{u}{2} v'^2 &= 0\end{aligned}\tag{3.37}$$

ในทำนองเดียวกัน นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v แทนในสมการที่ (3.32) จะได้

$$\begin{aligned}v'' + \frac{2u}{u^2} u'v' &= 0 \\v'' + \frac{2}{u} u'v' &= 0\end{aligned}\tag{3.38}$$

3.4.4 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เป็นจีโอเดสิกบนทรงห้วขยง

นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v จากหัวข้อย่อย 3.2.4 แทนในสมการที่ (3.31) จะได้

$$\begin{aligned}u'' - \frac{2R\rho \cos u + 2\rho^2 \cos u \sin u}{2\rho^2} v'^2 &= 0 \\u'' - \frac{(R + \rho \sin u) \cos u}{\rho} v'^2 &= 0\end{aligned}\tag{3.39}$$

ในทำนองเดียวกัน นำค่า E, E_u, E_v, G, G_u และ G_v แทนในสมการที่ (3.32) จะได้

$$\begin{aligned}v'' + \frac{2R\rho \cos u + 2\rho^2 \cos u \sin u}{(R + \rho \sin u)^2} u'v' &= 0 \\v'' + \frac{2\rho \cos u (R + \rho \sin u)}{(R + \rho \sin u)^2} u'v' &= 0 \\v'' + \frac{2\rho \cos u}{R + \rho \sin u} u'v' &= 0\end{aligned}\tag{3.40}$$

หลังจากที่หาระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองบนพื้นผิวที่ศึกษา จะนำไปวิเคราะห์ในรูปแบบของระบบสมการเชิงสองมิติซึ่งจะกล่าวในบทที่ 4 ต่อไป

ตารางที่ 3.1 สรุประบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองบนพื้นผิวที่ศึกษา

พื้นผิวของการหมุน	ระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง	
ทรงกลม	$u'' - \sin u \cos u v'^2 = 0$	$v'' + 2 \cot u u'v' = 0$
ทรงกระบอก	$u'' = 0$	$v'' = 0$
ทรงกรวย	$u'' - \frac{u}{2} v'^2 = 0$	$v'' + \frac{2}{u} u'v' = 0$
ทรงห้วขยง	$u'' - \frac{(R + \rho \sin u) \cos u}{\rho} v'^2 = 0$	$v'' + \frac{2\rho \cos u}{R + \rho \sin u} u'v' = 0$

บทที่ 4

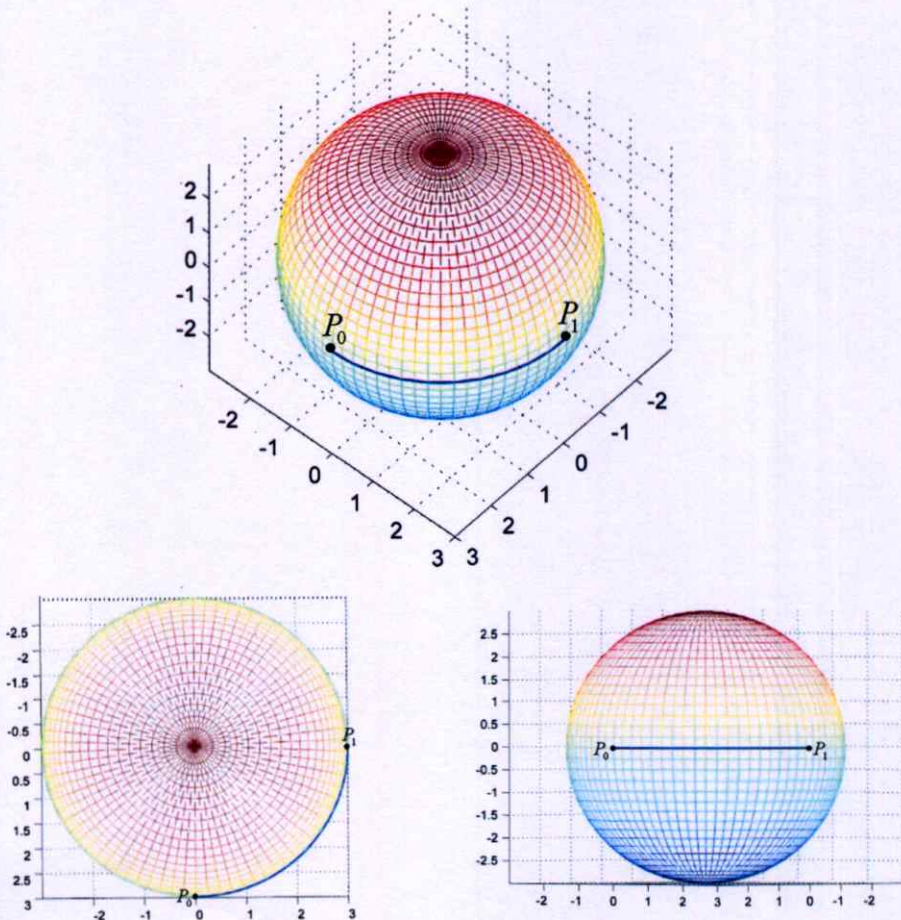
การวิเคราะห์การวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงการนำผลที่ได้จากบทที่ 3 มาทำการวิเคราะห์ผลเฉลยเชิงตัวเลขทั้งในรูปแบบของกราฟที่เป็นไปได้สำหรับการมีเส้นโค้งจีโอเดสิก และในรูปแบบปรกติของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง นอกจากนี้ยังได้เสนอแนวคิดในการนำงานวิจัยในวิทยานิพนธ์นี้ไปประยุกต์ใช้ในทางการแพทย์

4.1 กราฟที่เป็นไปได้สำหรับการมีเส้นโค้งจีโอเดสิก

เมื่อนำสมการภาวะอิงพารามิเตอร์ไปประยุกต์กับสมการออยเลอร์ แล้วได้ผลเฉลยที่เป็นสมการความยาวของส่วนโค้งที่สั้นที่สุดแล้วนั้น ในบทนี้จะนำผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ที่ได้มาทำการพล็อตกราฟ ดังนี้

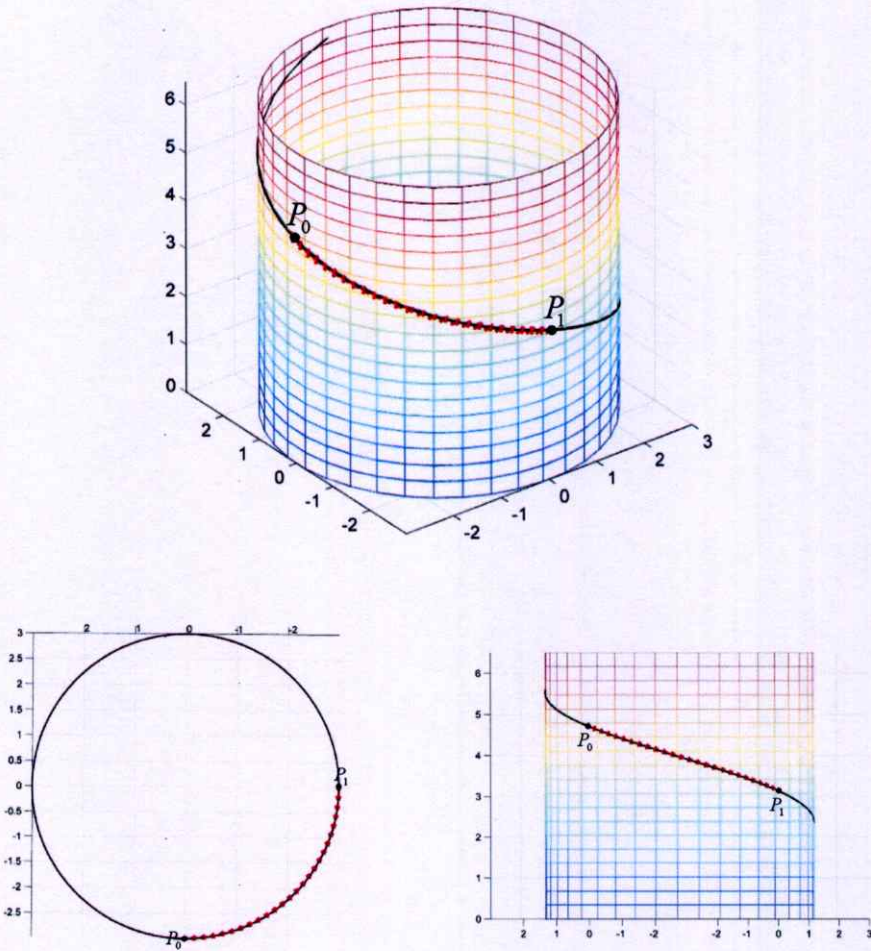
ในกรณีของทรงกลม เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ บนทรงกลม แล้วจีโอเดสิกจะเป็นส่วนของวงกลมใหญ่ แสดงดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 กราฟของส่วนของวงกลมใหญ่บนทรงกลม

กรณีของทรงกระบอกนั้น พิจารณาได้ 3 กรณีดังนี้

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ v คงที่แต่ u ไม่คงที่นั้น จะได้จีโอเดสิกเป็นส่วนของเส้นโค้งพาราเรลในการวิจัยของ [2]
2. เมื่อค่าพารามิเตอร์ u คงที่แต่ v ไม่คงที่นั้น จะได้จีโอเดสิกบนเส้นโค้งเมริเดียนคือ ส่วนของเส้นตรงบนทรงกระบอกในการวิจัยของ [2]
3. เมื่อทั้งค่าพารามิเตอร์ u และ v ไม่คงที่ เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ บนทรงกระบอก แล้วจีโอเดสิกเป็นส่วนของเส้นเกลียว แสดงดังรูปที่ 4.2

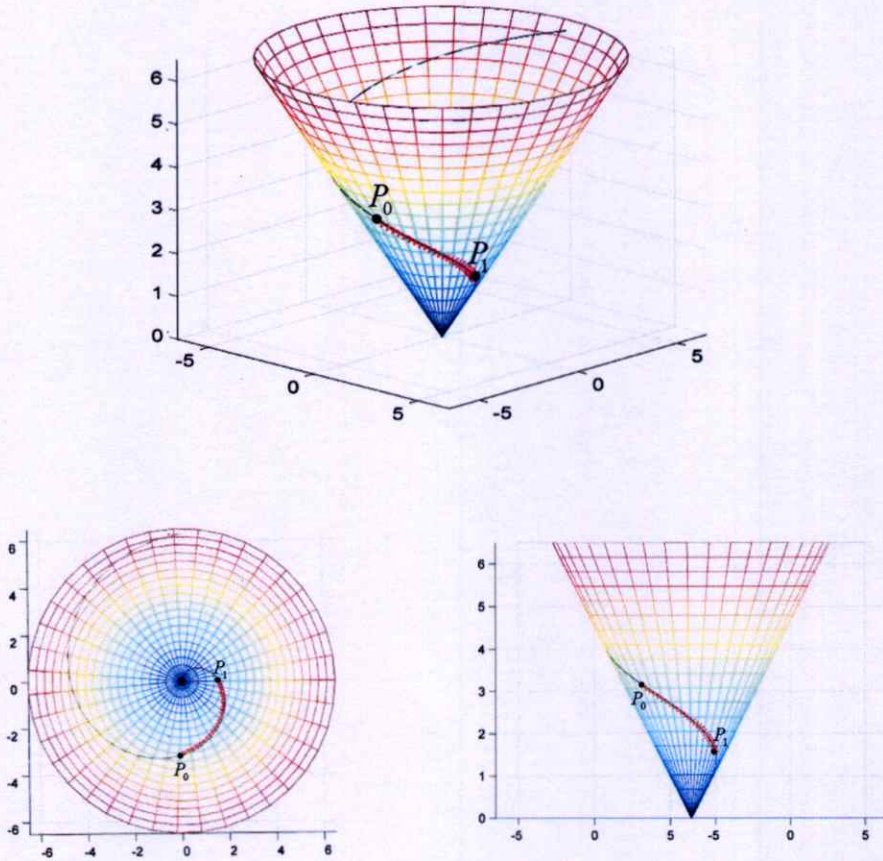


รูปที่ 4.2 กราฟของส่วนของเส้นเกลียวบนทรงกระบอก

กรณีของทรงกรวยนั้น พิจารณาได้ 2 กรณีดังนี้

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ u คงที่แต่ v ไม่คงที่นั้น จะได้จีโอเดสิกบนเส้นโค้งเมริเดียนคือ ส่วนของเส้นตรงบนทรงกรวยในการวิจัยของ [2]

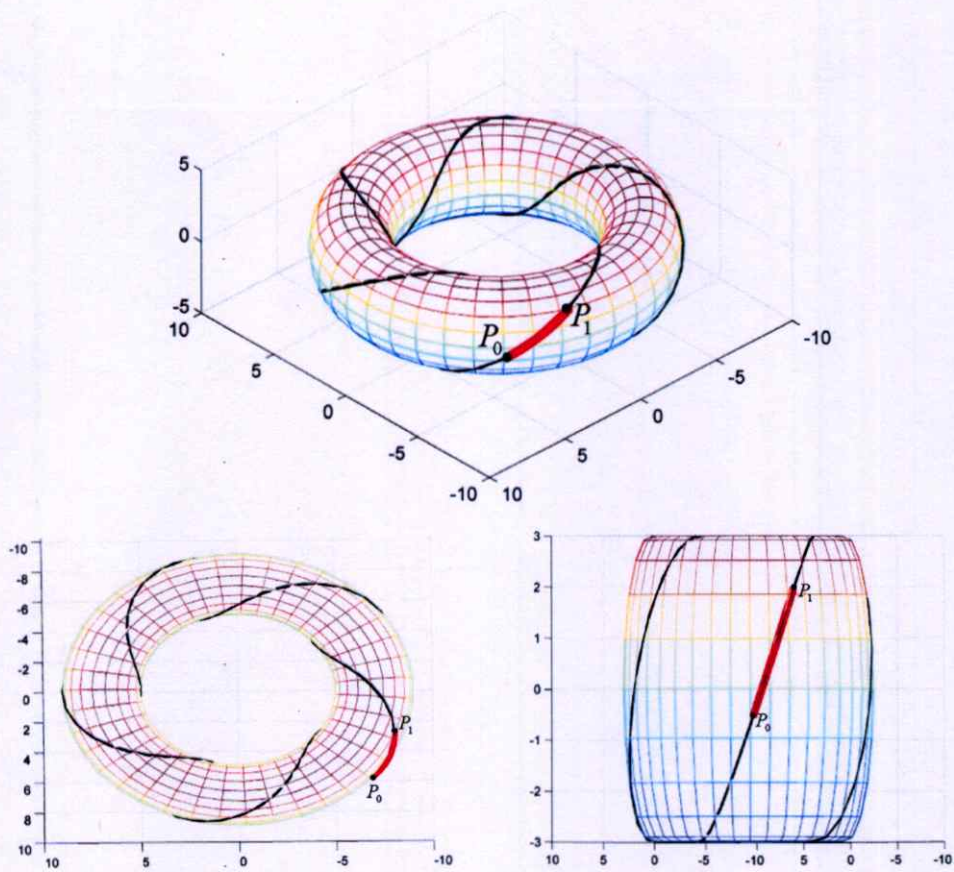
2. เมื่อทั้งค่าพารามิเตอร์ u และ v ไม่คงที่ เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ บนทรงกรวย แล้วจีโอเดสิกเป็นส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปกรวย แสดงดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.3 กราฟของส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปกรวยบนทรงกรวย

และกรณีของทรงห่วยางนั้น พิจารณาได้ 3 กรณีดังนี้

1. เมื่อค่าพารามิเตอร์ v คงที่แต่ u ไม่คงที่นั้น จะได้จีโอเดสิกบนเส้นโค้งพาราเรลเป็นส่วนของเส้นโค้งพาราเรลที่มีลักษณะเป็นวงกลมในการวิจัยของ [3]
2. เมื่อค่าพารามิเตอร์ u คงที่แต่ v ไม่คงที่นั้น จะได้จีโอเดสิกบนเส้นโค้งเมริเดียนคือส่วนของวงกลมรัศมีวงในและรัศมีวงนอกของทรงห่วยางในการวิจัยของ [3]
3. เมื่อทั้งค่าพารามิเตอร์ u และ v ไม่คงที่ เมื่อกำหนดจุดสองจุดใดๆ $P_0(u_0, v_0)$ และ $P_1(u_1, v_1)$ บนทรงห่วยาง แล้วจีโอเดสิกเป็นส่วนของเส้นเวียนก้นหอยรูปห่วยาง แสดงดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 กราฟของเส้นเวียนก้นหอยรูปห่วงยางบนทรงห่วงยาง

4.2 ระบบสมการเชิงสองมิติในรูปแบบปกติของระบบเอกพันธ์

จากสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สองในนิยาม 2.1.30 โดยกำหนดให้

$$u' = m \Rightarrow u'' = m' \quad \text{และ} \quad v' = n \Rightarrow v'' = n'$$

จะได้ระบบสมการเชิงสองมิติ

$$m' = F_1(m, n, u, v)$$

$$n' = F_2(m, n, u, v)$$

$$u' = F_3(m, n, u, v)$$

$$v' = F_4(m, n, u, v)$$

จากนั้นนำระบบสมการที่ได้ ไปสร้างกราฟในโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB โดยกราฟที่ได้จะแยกเป็น 4 กรณี ได้แก่

- ก. กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง m กับ t
- ข. กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง n กับ t
- ค. กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง u กับ t
- ง. กราฟความสัมพันธ์ระหว่าง v กับ t

ดังนั้น จึงทำการศึกษานบนพื้นผิวที่ศึกษาในหัวข้อ 3.3 ได้ดังต่อไปนี้

4.2.1 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม

จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง (3.33) และ (3.34)

$$u'' - \sin u \cos u v'^2 = 0 \quad \text{และ} \quad v'' + 2 \cot u u' v' = 0$$

ถ้ากำหนดให้ $u' = m \Rightarrow u'' = m'$ และ $v' = n \Rightarrow v'' = n'$ จะได้ระบบสมการจัดอยู่ในรูปแบบ

$$\left. \begin{aligned} m' &= \sin u \cos u (n^2) \\ n' &= -2 \cot u (mn) \\ u' &= m \\ v' &= n \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

จากนั้นนำระบบสมการที่ได้ ไปสร้างกราฟในโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

$$\text{โดยกำหนดให้ } m_i = \frac{U_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}} \quad \text{และ} \quad n_i = \frac{V_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}}$$

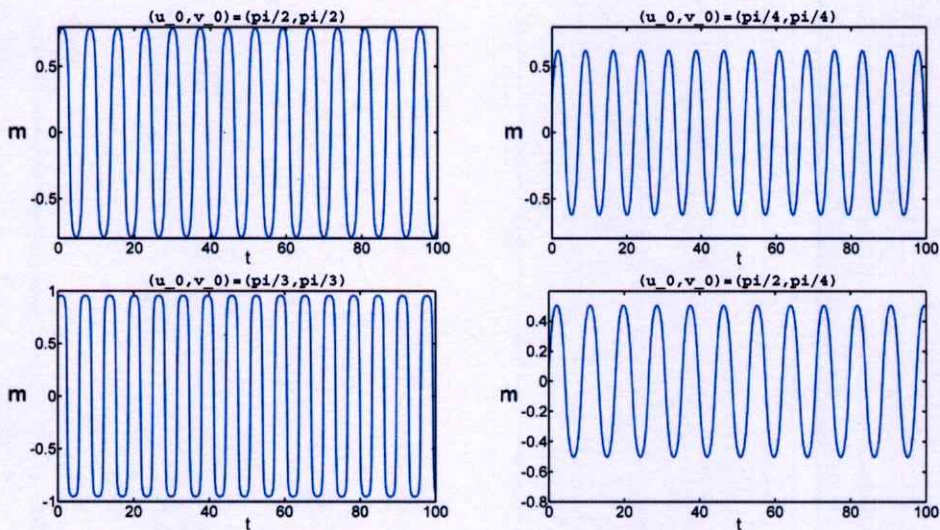
$$\text{โดยที่ } U_1 = u_0^1 = \sin(u_0)(\sin(v_0) - \cos(v_0))$$

$$V_1 = v_0^1 = (\cos(u_0)\cos(v_0)) + (\cos(u_0)\sin(v_0)) - \sin(u_0)$$

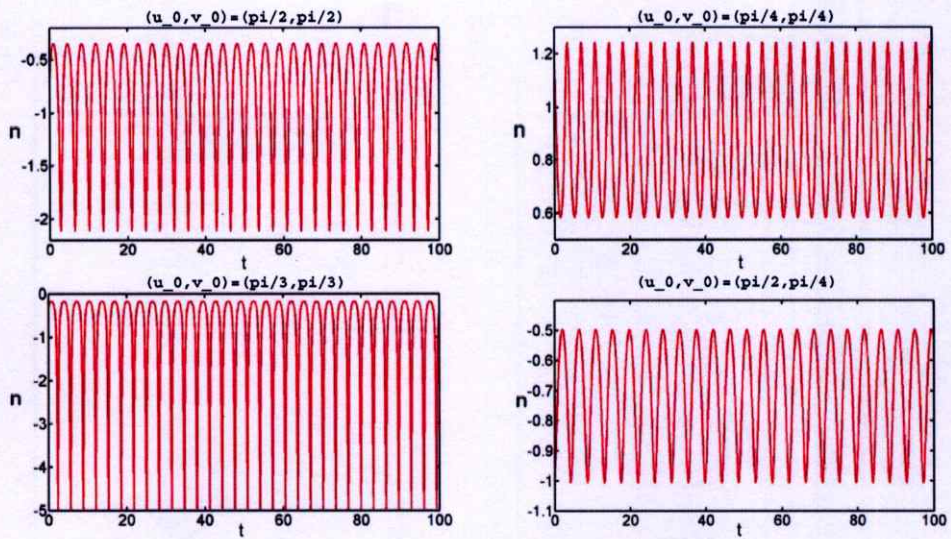
และ รัศมีของทรงกลม $a = 1$

ดังนั้น เมื่อนำไปสร้างกราฟด้วยกำหนดค่าเริ่มต้น $(u(0), v(0))$ ที่ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

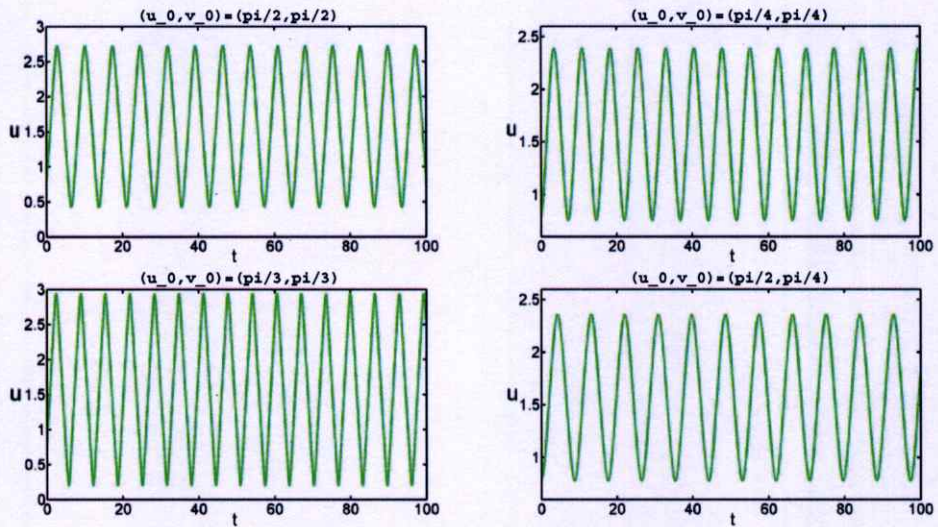
และ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ตามลำดับ จะได้กราฟที่มีความสัมพันธ์กับ t ดังนี้



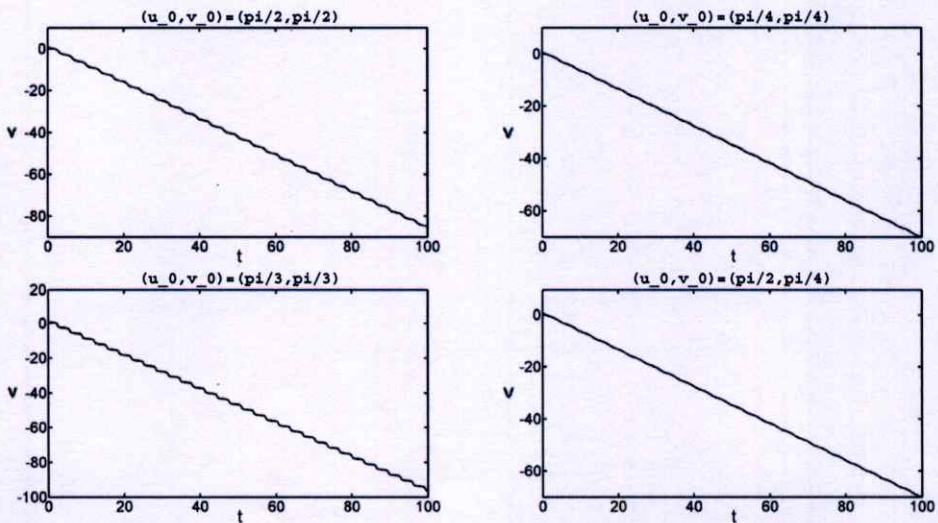
รูปที่ 4.5 (ก) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม



รูปที่ 4.5 (ข) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม



รูปที่ 4.5 (ค) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม



รูปที่ 4.5 (ง) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกลม

จากกราฟในรูปที่ 4.5 (ก) (ข) และ (ค) จะสังเกตเห็นได้ว่าเป็นกราฟที่มาจากรูปแบบผลคูณของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของออยเลอร์ สำหรับกราฟในรูปที่ 4.5 (ง) นั้น กราฟที่ได้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันโคเทนเจนต์ แต่เนื่องจากในช่วงขอบเขตของการแสดงกราฟ ทำให้ลักษณะของกราฟที่ได้นั้นคล้ายเส้นตรง นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาค่าเริ่มต้นที่ต่างกัน ทำให้ได้ลักษณะแนวโน้มของกราฟเหมือนกัน แต่แอมพลิจูดและคาบของกราฟต่างกัน

4.2.2 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก

จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง (3.35) และ (3.36)

$$u'' = 0 \quad \text{และ} \quad v'' = 0$$

ถ้ากำหนดให้ $u' = m \Rightarrow u'' = m'$ และ $v' = n \Rightarrow v'' = n'$ จะได้ระบบสมการอยู่ในรูปแบบ

$$\left. \begin{aligned} m' &= 0 \\ n' &= 0 \\ u' &= m \\ v' &= n \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

จากนั้นนำระบบสมการที่ได้ ไปสร้างกราฟในโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

$$\text{โดยกำหนดให้ } m_i = \frac{U_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}} \quad \text{และ} \quad n_i = \frac{V_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}}$$

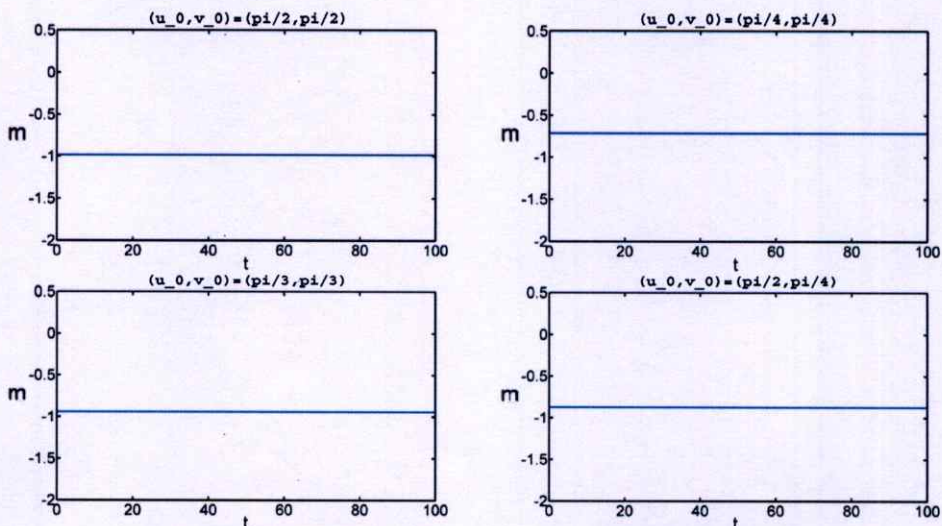
$$\text{โดยที่ } U_1 = u_0^1 = a \cos(v_0) - a \sin(v_0) + u_0$$

$$V_1 = v_0^1 = 1$$

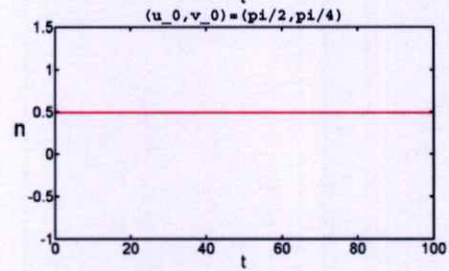
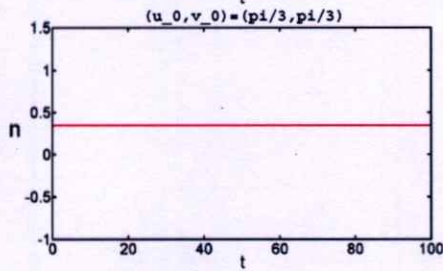
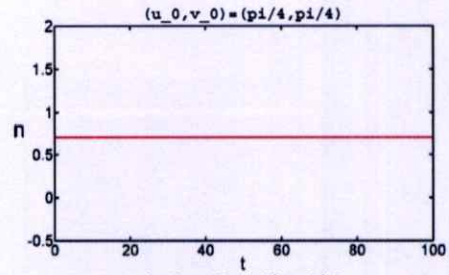
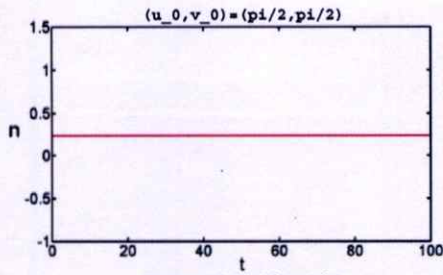
และ รัศมีของทรงกระบอก $a = 1$

ดังนั้น เมื่อนำไปสร้างกราฟด้วยกำหนดค่าเริ่มต้น $(u(0), v(0))$ ที่ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

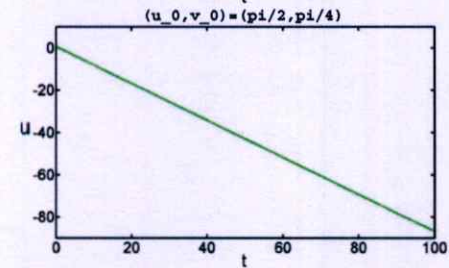
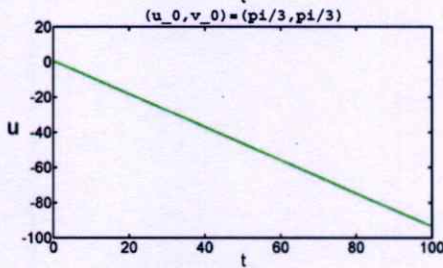
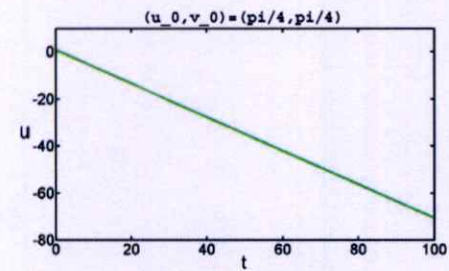
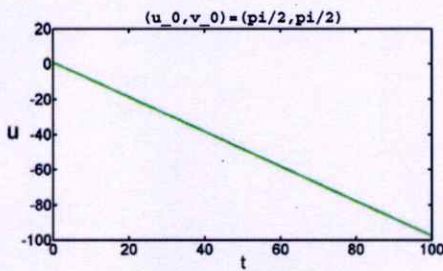
และ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ตามลำดับ จะได้กราฟที่มีความสัมพันธ์กับ t ดังนี้



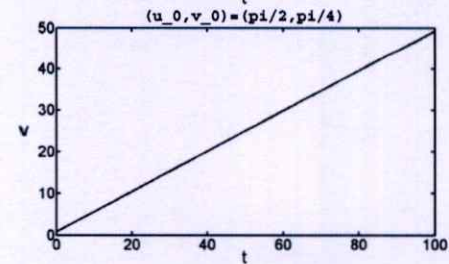
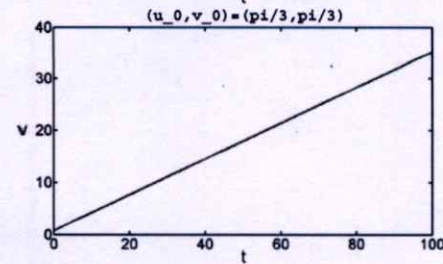
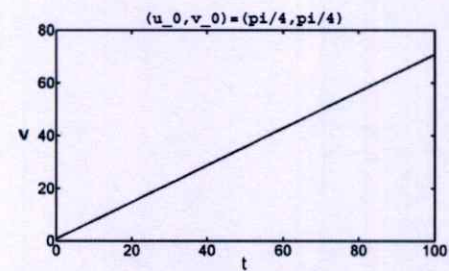
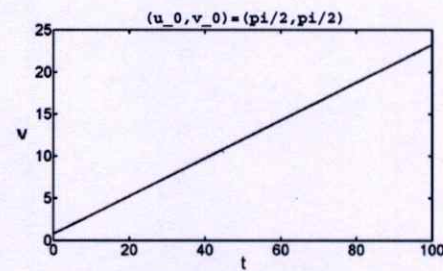
รูปที่ 4.6 (ก) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก



รูปที่ 4.6 (ข) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก



รูปที่ 4.6 (ค) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก



รูปที่ 4.6 (ง) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกระบอก

จากกราฟในรูปที่ 4.6 (ก) (ข) (ค) และ (ง) จะสังเกตได้ว่า เป็นกราฟที่มีลักษณะเป็นเส้นตรง ในทุกกรณี ถึงแม้ว่าจะกำหนดค่าเริ่มต้นที่ต่างกันก็ตาม เนื่องจากระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองมีค่าเป็นศูนย์ทั้งสองสมการ ทำให้กราฟที่ได้ไม่เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของออยเลอร์ กราฟที่ได้ไม่แสดงลักษณะของจีโอเดสิก

4.2.3 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย

จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง (3.37) และ (3.38)

$$u'' - \frac{u}{2}v'^2 = 0 \quad \text{และ} \quad v'' + \frac{2}{u}u'v' = 0$$

ถ้ากำหนดให้ $u' = m \Rightarrow u'' = m'$ และ $v' = n \Rightarrow v'' = n'$ จะได้ระบบสมการอยู่ในรูปแบบ

$$\left. \begin{aligned} m' &= \frac{u}{2}n^2 \\ n' &= -\frac{2}{u}mn \\ u' &= m \\ v' &= n \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

จากนั้นนำระบบสมการที่ได้ ไปสร้างกราฟในโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

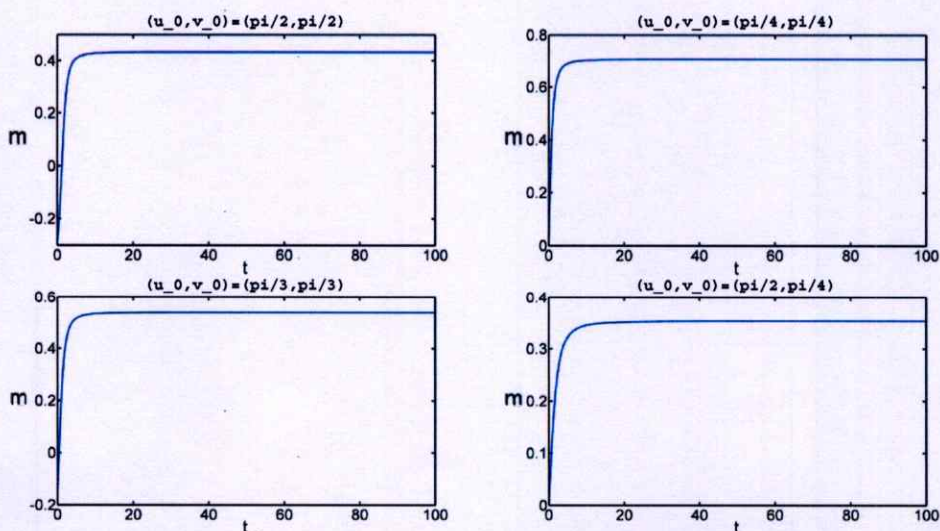
โดยกำหนดให้ $m_i = \frac{U_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}}$ และ $n_i = \frac{V_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}}$

โดยที่ $U_1 = u_0^1 = \cos(v_0) - \sin(v_0)$

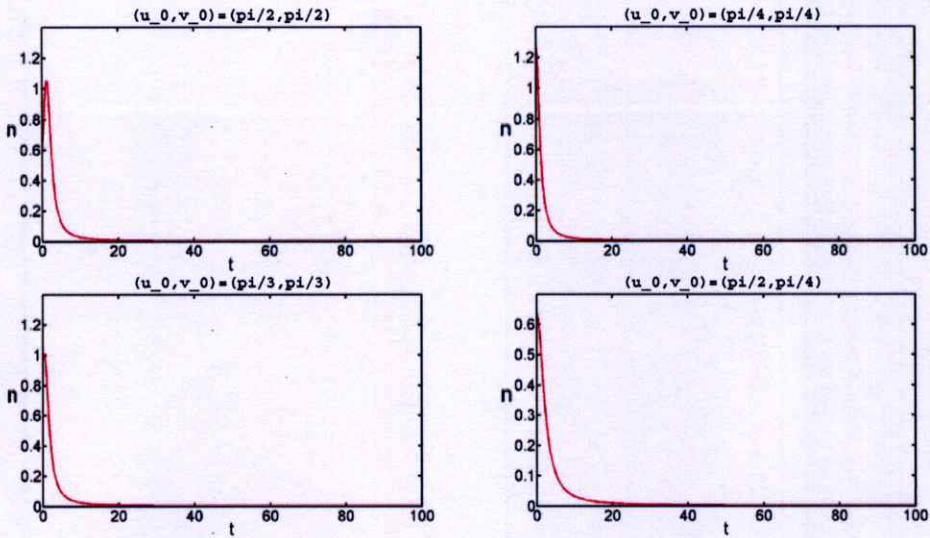
$V_1 = v_0^1 = \cos(v_0) + \sin(v_0) + 1$

ดังนั้น เมื่อนำไปสร้างกราฟด้วยกำหนดค่าเริ่มต้น $(u(0), v(0))$ ที่ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

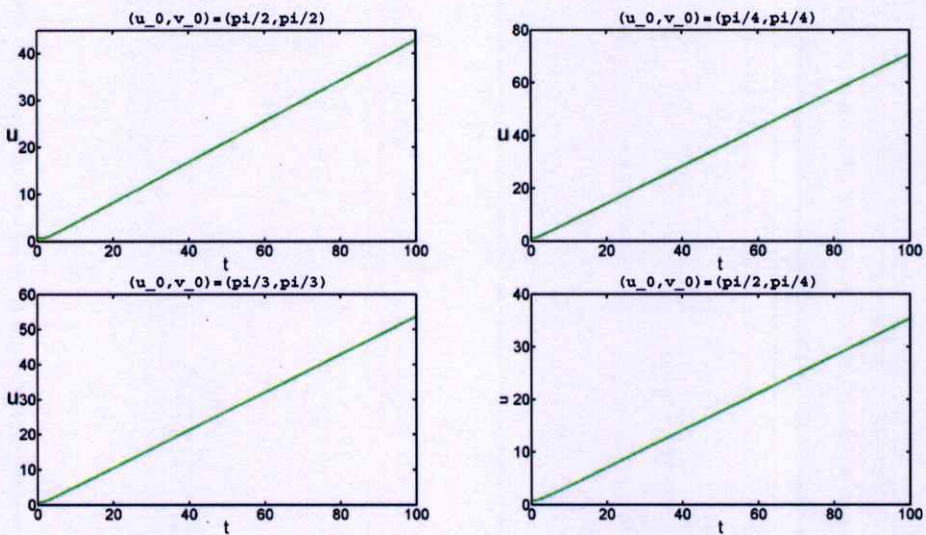
และ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ตามลำดับ จะได้กราฟที่มีความสัมพันธ์กับ t ดังนี้



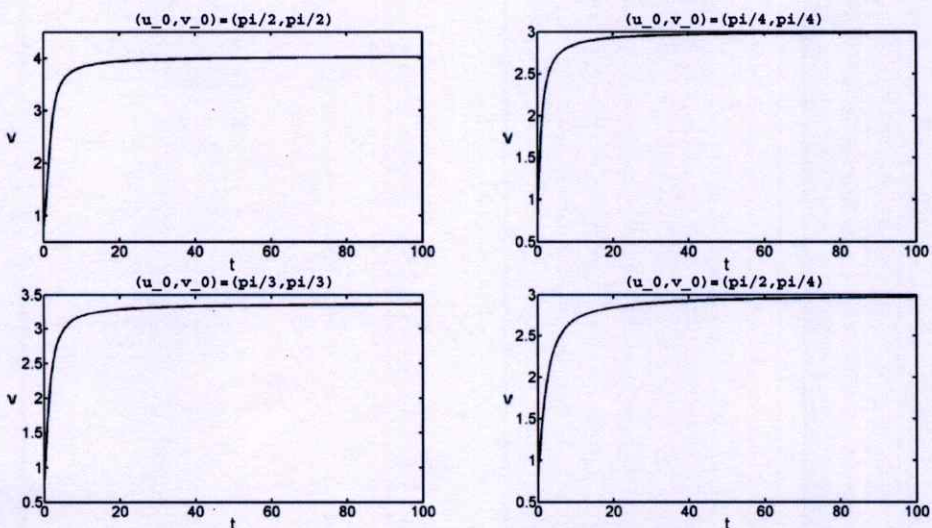
รูปที่ 4.7 (ก) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย



รูปที่ 4.7 (ข) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย



รูปที่ 4.7 (ค) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย



รูปที่ 4.7 (ง) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงกรวย

จากกราฟในรูปที่ 4.7 (ก) (ข) และ (ง) จะสังเกตได้ว่า เป็นกราฟที่มาจากรูปแบบลอการิทึมที่เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของออยเลอร์ สำหรับกราฟในรูปที่ 4.7 (ค) นั้น กราฟที่ได้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันเส้นตรงที่อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น

4.2.4 ระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วงยาง

จากระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง (3.39) และ (3.40)

$$u'' - \frac{(R + \rho \sin u) \cos u}{\rho} v'^2 = 0 \quad \text{และ} \quad v'' + \frac{2\rho \cos u}{R + \rho \sin u} u'v' = 0$$

ถ้ากำหนดให้ $u' = m \Rightarrow u'' = m'$ และ $v' = n \Rightarrow v'' = n'$ จะได้ระบบสมการอยู่ในรูปแบบ

$$\left. \begin{aligned} m' &= \frac{(R + \rho \sin u) \cos u}{\rho} n^2 \\ n' &= -\frac{2\rho \cos u}{R + \rho \sin u} mn \\ u' &= m \\ v' &= n \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

จากนั้นนำระบบสมการที่ได้ ไปสร้างกราฟในโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

โดยกำหนดให้ $m_i = \frac{U_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}}$ และ $n_i = \frac{V_1}{\sqrt{EU_1^2 + GV_1^2}}$

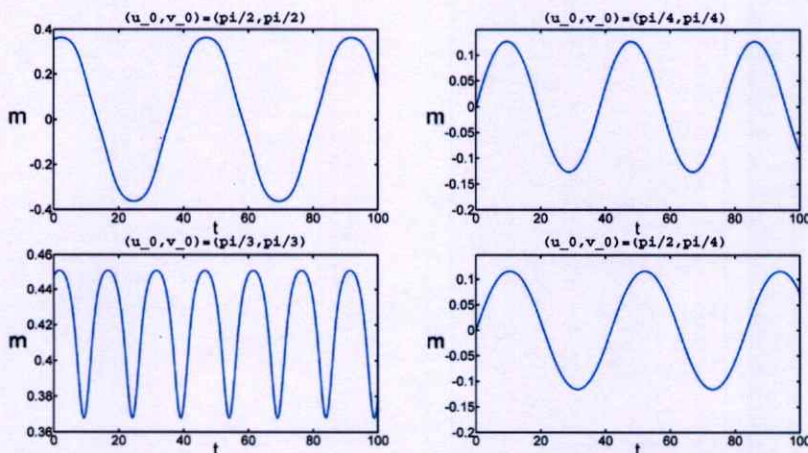
โดยที่ $U_1 = u_0^1 = (R + a \sin(u_0))(\sin(v_0) - \cos(v_0))$

$V_1 = v_0^1 = a(\cos(v_0) + \sin(v_0)) - a \sin(u_0)$

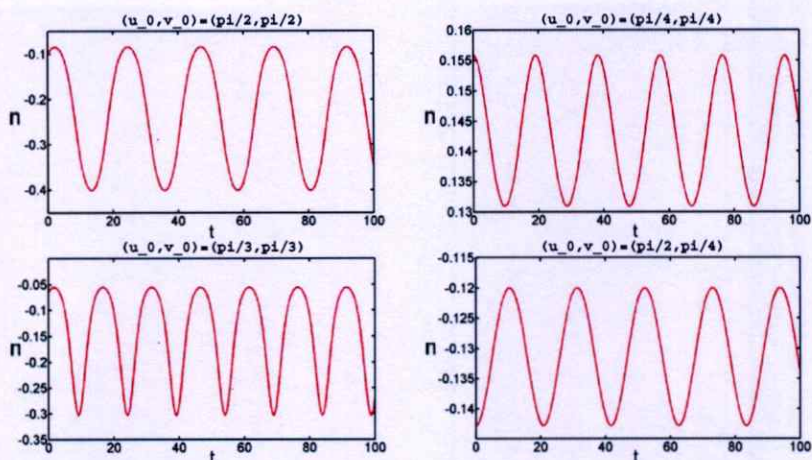
และ รัศมีวงกลมใหญ่และวงกลมเล็กของทรงกลมมีค่า $R = 5$ และ $a = 2$ ตามลำดับ

ดังนั้น เมื่อนำไปสร้างกราฟด้วยกำหนดค่าเริ่มต้น $(u(0), v(0))$ ที่ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$

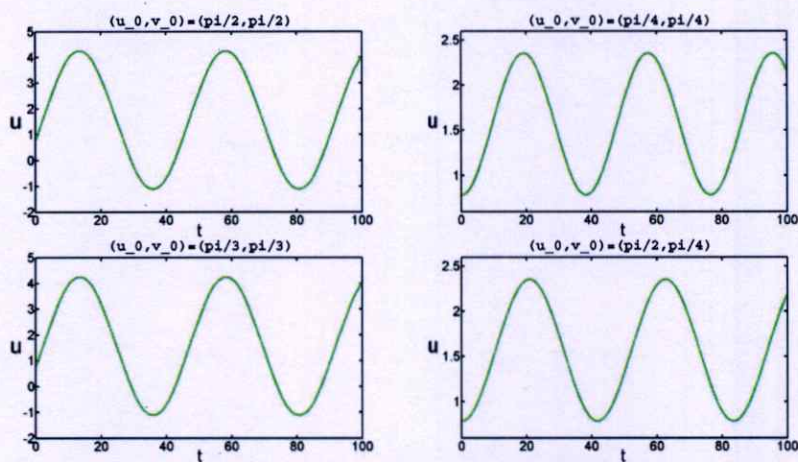
และ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ ตามลำดับ จะได้กราฟที่มีความสัมพันธ์กับ t ดังนี้



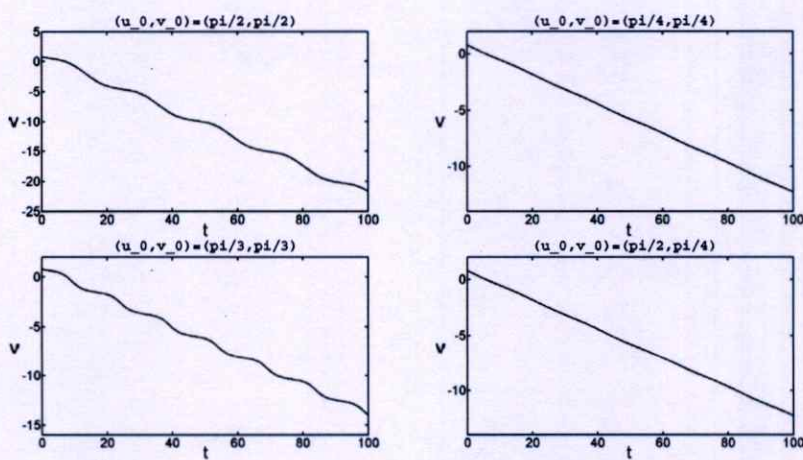
รูปที่ 4.8 (ก) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วงยาง



รูปที่ 4.8 (ข) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วงยาง



รูปที่ 4.8 (ค) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วงยาง



รูปที่ 4.8 (ง) กราฟของระบบสมการเชิงสองมิติของทรงห่วงยาง

จากกราฟในรูปที่ 4.8 (ก) (ข) และ (ค) จะสังเกตได้ว่า เป็นกราฟที่มาจากรูปแบบผลคูณของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ที่เป็นไปตามสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของออยเลอร์ สำหรับกราฟในรูปที่ 4.8 (ง) นั้น กราฟที่ได้มีลักษณะเป็นฟังก์ชันโคเทนเจนต์ แต่เนื่องจากในช่วงขอบเขตของการแสดงกราฟ ทำให้ลักษณะของกราฟที่ได้นั้นคล้ายเส้นตรง นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาค่าเริ่มต้นที่ต่างกัน ทำให้ได้ลักษณะแนวโน้มของกราฟเหมือนกัน แต่แอมพลิจูดและคาบของกราฟต่างกัน

4.3 แนวทางการประยุกต์ของงานวิจัยในทางการแพทย์



รูปที่ 4.8 เส้นทางการบินจากประเทศหนึ่งไปยังอีกประเทศหนึ่ง

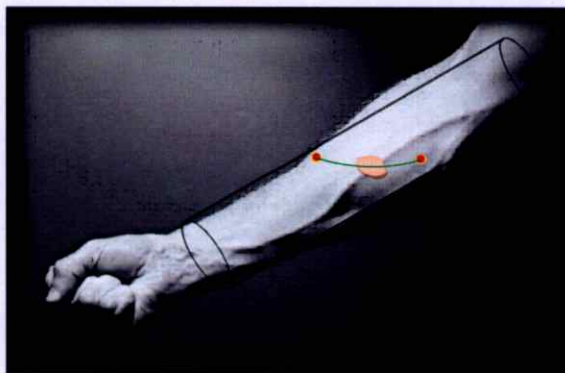
ปัญหาทางจิวเคมีกเป็นการประยุกต์ของปัญหาที่เก่าแก่ที่สุดในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุด และเป็นที่ยอมรับกันมากที่สุดของการถือกำเนิดงานวิจัยทางด้านนี้ นอกจากนี้ การที่ผู้วิจัยได้ศึกษาทั้งปัญหาการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกระบอก ทรงกรวย และทรงห่วยขยงนั้น ประกอบกับเทคโนโลยีทางด้านต่างๆ มีความก้าวหน้ามากยิ่งขึ้น โดยเฉพาะอย่างยิ่งการศึกษา คั่นคว่า และวิจัยทางด้านเทคโนโลยีทางการแพทย์

แสงเลเซอร์ (LASER) ย่อมาจากคำว่า Light Amplification by Stimulate Emission of Radiation เป็นแสงที่ผลิตขึ้นโดยไปกระตุ้นอะตอมของธาตุ หรือสารประกอบบางชนิดด้วยพลังงานแสง เช่น อะตอมของโครเมียมในผลึกทับทิม อะตอมของแก๊สฮีเลียม เป็นต้น



รูปที่ 4.9 การผ่าตัดโดยใช้แสงเลเซอร์

แสงเลเซอร์เป็นแสงที่มีความถี่เดียวลำแสงจะพุ่งเป็นเส้นตรง ไม่มีการเบี่ยงเบนหรือหักเห ออกเมื่อผ่านสิ่งกีดขวาง ผิดกับแสงธรรมดาจะมีการแพร่กระจาย แต่แสงเลเซอร์เป็นลำแสงขนาน ไม่กระจาย แม้จะผ่านปริซึมก็จะไม่เกิดการกระจายเช่นกัน ทำให้ในปัจจุบันนี้เลเซอร์กำลังทวีบทบาทความสำคัญมากขึ้นทุกขณะสำหรับวงการแพทย์ ยิ่งไปกว่านั้นวิธีการผ่าตัดส่องกล้องยังมีข้อจำกัดอยู่ นั่นคือ ตัวผู้ป่วยต้องไม่เคยผ่าตัดช่องท้องมาก่อน ถ้าผู้ป่วยมีปัญหาทางด้านสุขภาพรุนแรงก็ไม่สามารถผ่าตัดได้ หรือมาจากตัวโรค เช่น ก้อนมะเร็งที่ลูกกลมหรือมีภาวะอวัยวะรุนแรงในช่องท้องก่อนผ่าตัด ซึ่งขึ้นอยู่กับดุลยพินิจของศัลยแพทย์เป็นผู้ตัดสินใจว่าควรเปลี่ยนจากผ่าตัดส่องกล้องมาเป็นเปิดหน้าท้องแทนดีหรือไม่ ซึ่งนับเป็นผลประโยชน์ของแสงเลเซอร์ต่อมนุษย์ทั่วไปโดยตรงมากที่สุดเมื่อเปรียบเทียบกับบทบาทของเลเซอร์ในวงการต่างๆ ข้อดีของแสงเลเซอร์สำหรับวงการแพทย์ คือ แสงเลเซอร์เป็นลำแสงที่เล็ก และมีความเข้มหรือพลังงานความร้อนสูง ซึ่งหมายความว่านายแพทย์สามารถใช้แสงเลเซอร์เป็นมีดผ่าตัดที่คมมากเป็นพิเศษ และต่อไปจะเป็นอุปกรณ์ทางการแพทย์ที่มีความสะดวกในการใช้อย่างที่สุดในบรรดาอุปกรณ์การแพทย์ทั้งหมด ตลอดจนกระทั่งการใช้แสงเลเซอร์แทนสายตาในการตรวจดูสภาพภายในของร่างกายที่ไม่สามารถจะมองเห็นได้โดยวิธีอื่น



รูปที่ 4.10 ลักษณะของแขนเชิงเรขาคณิตคล้ายกับทรงกระบอก

ถ้าสมมติให้แขนของมนุษย์นั้นมีลักษณะทางเรขาคณิตคล้ายทรงกระบอกแสดงดังรูปที่ 4.10 แสดงว่า การหาจีโอเดสิกในงานวิจัยนี้ สามารถที่จะกำหนดจุดสองจุดแล้วใช้แสงเลเซอร์ในการผ่าตัดได้ นั่นหมายถึง อวัยวะส่วนต่างๆ ของร่างกายนั้น ถ้าสามารถจำลองภาพในรูปแบบที่มีลักษณะทางเรขาคณิตได้ แล้วจะสามารถนำการประยุกต์ดังกล่าวไปใช้ในทางการแพทย์ได้ จึงถือเป็นนวัตกรรมที่น่าจะทำให้มีผู้สนใจทำการวิจัยดังกล่าวให้กว้างขวางมากยิ่งขึ้น ซึ่งในอนาคตก็จะยิ่งทำให้ชีวิตของมนุษย์ยาวนานขึ้น

นอกจากการประยุกต์ทางการแพทย์ที่ได้กล่าวมาข้างต้นนั้น ปัญหาจีโอเดสิกถือเป็นปัญหาหลักในทางวิศวกรรมที่สามารถนำไปประยุกต์โดยการระบุพารามิเตอร์สำหรับพื้นผิวใดๆ ที่กำหนดค่าความโค้งไว้ ณ ทุกจุดบนพื้นผิวได้

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและแนวทางการพัฒนา

ในบทนี้จะกล่าวถึงสรุปผลการวิจัยทั้งหมด รวมทั้งข้อจำกัดของการวิจัย และแนวทางการพัฒนาวิจัยในอนาคตสำหรับผู้ที่มีความสนใจที่จะศึกษาทางด้านเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ต่อไป

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการนำสมการออยเลอร์และสมการทางเลือกของออยเลอร์มาทำการหาผลเฉลยของสมการภาวะอิงพารามิเตอร์เพื่อหาจีโอเดสิกบนพื้นผิวที่ศึกษานั้น พบว่า ถ้ากำหนดจุดสองจุดใดๆ อยู่บนเส้นโค้งเมอร์เคียน แล้วทุกๆ เส้นโค้งจะเป็นจีโอเดสิก แต่สำหรับการกำหนดจุดสองจุดใดๆ อยู่บนเส้นโค้งพาราเรลนั้น ทุกๆ เส้นโค้งไม่ได้เป็นจีโอเดสิกเสมอไป สำหรับในส่วนที่แตกต่างออกไปของเส้นโค้งนั้น สรุปดังตารางที่ 5.1

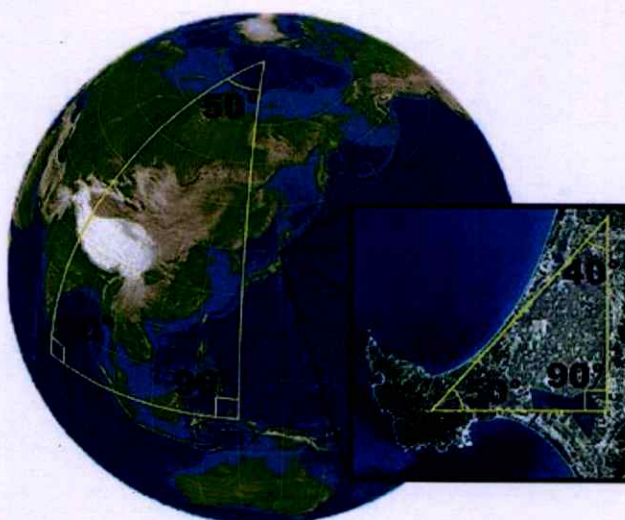
ตารางที่ 5.1 การมีจีโอเดสิกบนพื้นผิวที่ศึกษา

พื้นผิวของการหมุน	เมอร์เคียน	พาราเรล	รูปแบบอื่นๆ
ทรงกลม	มีจีโอเดสิก ทุกๆ เส้นโค้ง	มีจีโอเดสิกเฉพาะเส้น โค้งที่เป็นวงกลมใหญ่	-
ทรงกระบอก	มีจีโอเดสิก ทุกๆ เส้นโค้ง	มีจีโอเดสิก ทุกๆ เส้นโค้ง	มีจีโอเดสิกเป็นเส้นโค้งเกลียวรูปแบบ $\varphi(u, v) = (a \cos v, a \sin v, bv)$
ทรงกรวย	มีจีโอเดสิก ทุกๆ เส้นโค้ง	-	มีจีโอเดสิก เป็นเส้นเวียนก้นหอยรูปกรวยรูปแบบ $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$
ทรงห้วงยาง	มีจีโอเดสิก ทุกๆ เส้นโค้ง	มีจีโอเดสิกเฉพาะเส้น โค้งที่เป็นวงกลมรัศมี วงในและรัศมีวงนอก	มีจีโอเดสิก เป็นเส้นเวียนก้นหอยรูปห้วงยางรูปแบบ $\varphi(u, v) = (w \cos v, w \sin v, a \cos u)$ โดยที่ $w = R + a \sin u$

5.2 ข้อจำกัดของการวิจัย

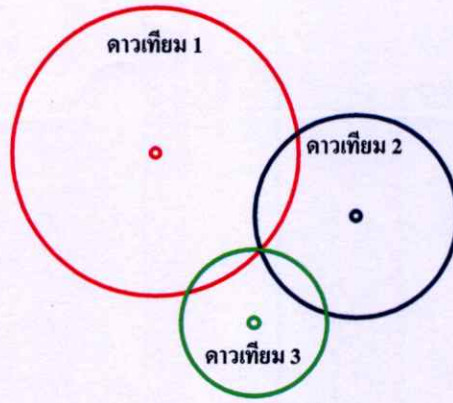
สำหรับจีโอเดสิกบนพื้นผิวของการหมุนรอบในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาสมการจีโอเดสิกที่อยู่ในรูปแบบการประยุกต์ของสมการออยเลอร์ในการหาระยะทางที่สั้นที่สุด และนำเสนอเฉพาะรูปแบบของพื้นผิวที่มีค่าความโค้ง (curvature) $\kappa = 0$ (ในกรณีของทรงกระบอกและทรงกรวย) และค่าความโค้ง $\kappa =$ ค่าคงที่ (ในกรณีของทรงกลมและทรงห่วย่าง) เท่านั้น ถ้าค่าความโค้งบนพื้นผิวของการหมุนระบุเป็นพารามิเตอร์ แล้วจะต้องศึกษาเพิ่มเติมในส่วน of ค่าความโค้งในรูปแบบต่างๆ ของจีโอเดสิกควบคู่ไปกับสมการจีโอเดสิกด้วย

5.3 แนวทางการพัฒนางานวิจัยในอนาคต



รูปที่ 5.1 ผลรวมของมุมภายในสามเหลี่ยมบนทรงกลมนั้นมากกว่า 180 องศา แต่ถ้าในสามเหลี่ยมเล็กนั้น มุมภายในสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากับ 180 องศา
ที่มา http://en.wikipedia.org/wiki/Spherical_geometry

การวัดระยะทางไปยังดาวเทียม ซึ่งการคำนวณตำแหน่งต้องวัดระยะทางไปยังดาวเทียมอย่างน้อย 3 ดวง พร้อมๆ กัน และระยะทางทั้ง 3 ต้องไม่เป็นเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ระยะทางจากดาวเทียมแต่ละดวง คือวงกลมแต่ละวงนั่นเอง ถ้าหากมีวงกลมแค่เพียง 2 วง ก็ยังไม่สามารถหาตำแหน่งที่แน่นอนได้ เพราะจุดตัดของวงกลมมี 2 จุด จุดตัดก็คือเส้นรอบวงของวงกลมหรือตำแหน่งของตัวรับสัญญาณนั่นเอง แต่เมื่อมีวงกลมตั้งแต่ 3 วงขึ้นไป จะรู้ตำแหน่งที่แน่นอน เพราะจุดตัดจะมีจุดเดียว เมื่อได้ระยะทางอย่างน้อย 3 ระยะทางจากดาวเทียม 3 ดวงก็จะสามารถหาตำแหน่งได้ แต่ถ้ามีจำนวนดาวเทียมมากก็จะได้ตำแหน่งที่ถูกต้องมากสามารถหาค่าของเวลาและความสูงได้ด้วย



รูปที่ 5.2 หลักการทำงานของ GPS

การวัดระยะทางไปยังดาวเทียม 3 ดวง และรู้ตำแหน่งของดาวเทียมที่วัดระยะไปนั้น สามารถสร้างสมการได้ 3 สมการ และมีตัวไม่รู้ค่า 3 ตัว ซึ่งสามารถแก้สมการหาตัวไม่รู้ค่านั้นได้ โดยจะทราบตำแหน่งแบบ 3 มิติ คือทราบค่า X, Y, Z เมื่อวัดระยะทางจากดาวเทียม 4 ดวงขึ้นไปก็จะได้ตำแหน่งที่ถูกต้องมากขึ้น โดยทราบสมการเพิ่มขึ้นอีก 1 ตัว คือ เวลา (T) ตำแหน่งของดาวเทียมเทียบกับจุดที่วางเครื่องรับจะมีผลต่อความถูกต้องของตำแหน่งที่เครื่องรับคำนวณได้ ซึ่งเรียกว่า เรขาคณิตดาวเทียม ดังนั้นการรังวัดต้องเลือกเวลาให้เหมาะสม เพื่อให้ดาวเทียมมีตำแหน่งที่เหมาะสม และมีจำนวนดาวเทียมที่เพียงพอ ซึ่งในเครื่องรับ GPS จะแสดงค่า GDOP (Geometric Dilution of Precision) เป็นค่าที่ใช้ในการบ่งชี้ว่าความถูกต้องของตำแหน่งว่าจะมีมากน้อยเพียงใด ซึ่งค่าต่ำแสดงว่ามีความถูกต้องตามตำแหน่งสูง จึงต้องใช้ทฤษฎีในเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ขั้นสูงต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] การ์นต์ เรื่องมัจฉา, ธนกร ตั้งพิทักษ์ธรรม, พรชัย หอประเสริฐวงศ์, “ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้ง”, ปัญหาพิเศษ, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2548.
- [2] ฉัฐพล บุญนำ, เดชาวุฒิ เวฬุวนารักษ์, วาสนา ว่องไว, “ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง”, ปัญหาพิเศษ, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, 2550.
- [3] กำพลศักดิ์ บุญโคย, ธนดล บัลลังก์โพธิ์, วิทวัส เหล่ามะลอ, “โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนบางพื้นผิว”, ปัญหาพิเศษ, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2553.
- [4] รศ.ภักคินี ชิตสกุล, “เอกสารประกอบการเรียน รายวิชา Differential Geometry”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2550.
- [5] รศ.ภักคินี ชิตสกุล, “เอกสารประกอบการเรียน รายวิชา Mathematical Modeling”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2548.
- [6] ระบบบอกตำแหน่งบนพื้นโลก (Global Positioning System GPS)
http://202.143.156.4/edplaza/index.php?option=com_content&view=article&id=62:-global-positioning-system-gps&catid=29:2010-05-16-09-38-11&Itemid=53
- [7] F. Talay Akyildiz, “A numerical study for computation of geodesic curves”, Applied Mathematics and Computation 171, pp.1206-1213, 2005.
- [8] J. Opera, “Differential geometry and its applications”, Prentice-Hall, Inc. 1997.
- [9] M.P. do Carmo, “Differential Geometry of Curves and Surfaces”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [10] M. Tanaka, “Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution”, Department of Mathematics, Tokai University, 2000.
- [11] M. Tanaka, “Differential Geometry”, Tokai University, 2007.
- [12] M. Guo-liang, “Numerical solution of geodesic through two given points on a simple surface”, Journal of Zhejiang University SCIENCE A, pp.187-192, 2006.

ภาคผนวก ก
ผลงานที่นำไปเสนอสู่การประชุมเชิงวิชาการ

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ – นามสกุล	นายณัฐพล บุญนำ
วัน เดือน ปีเกิด	15 กรกฎาคม 2528
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลจุฬาลงกรณ์ เขตปทุมวัน กรุงเทพมหานคร
ที่อยู่ปัจจุบัน	เลขที่ 5 ซอยอุดมสุข 50 แยก 2-14 ถนนสุขุมวิท 103 แขวงบางนา เขตบางนา กรุงเทพมหานคร 10260
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีที่สำเร็จการศึกษา	2550
อีเมล	nut4297nb@gmail.com

ระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางผิวโค้ง Shortest Path on Some Surface

ณัฐพล บุญนำ¹ และภคินี ชิตสกุล¹

Nathaphon Boonnam¹ and Pakkinee Chitsakul¹

บทคัดย่อ

ปัญหาหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางผิวโค้งที่ศึกษาในงานวิจัยนี้ ประกอบด้วยผิวทรงกลม ทรงกระบอกกลม และทรงกรวยกลม โดยการหาระยะทางที่สั้นที่สุดจะประยุกต์จากสมการอนุพันธ์ออยเลอร์ จากการวิจัยนี้ได้พบว่า เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวทรงกลมคือ ส่วนของวงกลมใหญ่ของทรงกลม สำหรับทรงกระบอกกลม เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านทรงกระบอกกลมคือ ส่วนของเกลียวหรือฮีลิคซ์ และในกรณีของกรวยกลม ส่วนของเส้นโค้งมีลักษณะเป็นเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล

คำสำคัญ : ระยะทางที่สั้นที่สุด สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ ส่วนของวงกลมใหญ่ ส่วนของเกลียว เส้นเวียนก้นหอย

ABSTRACT

In this paper, the shortest path problem on some surface that we studied includes sphere, circular cylinder, and circular cone by using the application of Euler differential equation. From the research, we find the shortest curve on surface of sphere is great circle of sphere. On the behalf of circular cylinder, the shortest curve on surface is helix. In the case of circular cone, the part of curve has aspect like spiral.

Keywords : shortest path, Euler differential equation, great circle, helix, spiral

E-mail : nut4297nb@gmail.com

บทนำ

ในทางคณิตศาสตร์ ปัญหาทาง Geodesic คือ ปัญหาที่เกี่ยวกับระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวนั้นโดยพิจารณาจากระยะทางเป็นส่วนที่น้อยที่สุดที่ไม่มีวันเพิ่มขึ้น นอกจากนี้แล้ว Geodesic จะทำให้เกิดทิศทางบนผิวได้อีกด้วย ในกรณีที่ผิวเป็นระนาบ ระยะทางที่สั้นที่สุดคือเส้นตรง ทำให้เกิดปัญหาที่ตามมาคือ ในกรณีที่ผิวของเราเป็นผิวโค้ง ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้งนั้นคืออะไร ตัวอย่างที่ง่ายที่สุดของผิวโค้งคือทรงกลม และตัวอย่างทรงกลมที่รู้จักกันดีคือโลกซึ่งมีพื้นฐานเป็นทรงกลม เมื่อเราพูดถึงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวโลก และพิจารณาเฉพาะ ในบริเวณที่จำกัด ในความรู้สึกของเรานั้น จะรู้สึกว่าระยะทางที่พูดถึงนั้นเป็นเส้นตรง แต่เมื่อ

¹ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ 10520

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520

พิจารณาดูโลกทั้งใบ โลกเป็นผิวโค้งไม่ใช่พื้นราบ เพราะฉะนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลมจะมีกราฟลักษณะอย่างไร

เป็นที่ทราบกันดีอยู่แล้วว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม คือส่วนของวงกลมที่เรียกว่า วงกลมใหญ่ของทรงกลม (Great Circle) ปัญหาที่ตามมาคือ ลักษณะของโลกมีแกนตั้งและแกนนอนไม่เท่ากัน ทำให้โลกมีลักษณะคล้ายผลส้ม การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวที่ไม่ใช่ระนาบและทรงกลมจะมีวิธีการหาอย่างไร สำหรับการศึกษาในงานวิจัยนี้ จะพิสูจน์ถึงการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนบางผิวกำลังสอง โดยใช้แคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of Variation) และเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry)

ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

กราฟของสมการอันดับที่สองสำหรับตัวแปรสามตัวแปร x, y และ z ในรูปสมการทั่วไปคือ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1)$$

เมื่อ $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ เป็นค่าคงที่ โดยไม่พิจารณาการหมุนและการย้ายแกนผิวกำลังสอง (1) จะอยู่ในรูปอย่างง่ายแบบใดแบบหนึ่งตาม (2) หรือ (3) คือ

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + J = 0 \quad (2)$$

หรือ $Ax^2 + By^2 + Iz + J = 0 \quad (3)$

ในงานวิจัยนี้จะศึกษาเฉพาะสมการมาตรฐานสำหรับผิวกำลังสองในสามมิติซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (4)$$

โดยจะศึกษาผิวของทรงกลมที่มีศูนย์กลางที่จุดกำเนิด $(0, 0, 0)$ ทรงกระบอกกลม และครึ่งบนของทรงกรวยกลม

ชื่อผิวกำลังสอง	ทรงกลม (Sphere)	ทรงกระบอกกลม (Circular Cylinder)	ทรงกรวยกลม (Circular Cone)
รูปแบบสมการ	$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$	$x^2 + y^2 = \rho^2$	$x^2 + y^2 = z^2$
สมการพารามิเตอร์	$x = \rho \cos \phi \cos \theta$ $y = \rho \cos \phi \sin \theta$ $z = \rho \sin \phi$	$x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$ $z = z$	$x = \rho \sin \phi \cos \theta$ $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ $z = \rho \cos \phi$

เมื่อ ρ คือ รัศมีของวงกลมที่เป็นภาพฉายบนระนาบ xy

ϕ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน z บวก โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

และ θ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy โดยที่ $-\pi \leq \theta \leq \pi$

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ (Euler Differential Equation)

ให้ $f(x, y, y')$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องอันดับที่สอง เมื่อเทียบกับอาร์กิวเมนต์ทั้งหมด โดย $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต $y(a) = A, y(b) = B$ ซึ่งทำให้เชิงฟังก์ชัน

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (5)$$

มีค่าสุดขีด (Extremum) หรืออาจกล่าวได้ว่า ต้องการที่จะหาเชิงฟังก์ชันซึ่งให้ค่าปลายสุดในรูปแบบ (5) บนเซตของเส้นโค้งเรียบทั้งหมดที่เชื่อมระหว่างจุดที่กำหนด $P_1 = (a, A)$ และ $P_2 = (b, B)$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขขอบเขตจากกฎของลิวนิซ (Leibniz's Rule) จะได้ว่า

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y dx \quad (6)$$

ถ้า $y(a) = A, y(b) = B$ เป็นเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า $\delta y|_a = 0, \delta y|_b = 0$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (7)$$

ถ้า $\delta J[y(x)] = 0$ แล้ว $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด และ $\delta J = 0$ ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (8)$$

ดังนั้นสำหรับเชิงฟังก์ชันในสมการที่ (5) ที่นิยามบนเซตของฟังก์ชัน $y = y(x)$ ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งต่อเนื่องและเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต มีค่าสุดขีดบนฟังก์ชันที่กำหนด $y(x)$ แล้ว เชิงฟังก์ชันต้องเป็นไปตามสมการของออยเลอร์ซึ่งกล่าวไว้ว่า

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \quad (9)$$

การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดบนผิว

ให้ $x = x(u, v), y = y(u, v)$ และ $z = z(u, v)$ เป็นรูปแบบอิงพารามิเตอร์ของผิวกำลังสอง โดยที่ $u = u(t)$ และ $v = v(t)$ จะได้ระยะทางระหว่างจุดสองจุด $(u(t_0), v(t_0))$ และ $(u(t_1), v(t_1))$ บนผิวคือ

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt = J[u, v]$$

(10)

เมื่อ
$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2$$

(11)

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}$$

(12)

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2$$

(13)

นั่นคือ เราต้องการหา u และ v ที่ให้ค่าปริพันธ์ต่ำสุด ซึ่งขณะนี้ ถือว่าเป็นวิธีการหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุด เมื่อกำหนดจุดสองจุดบนผิวกำลังสอง ผิวนี้จะกำหนดตัวแปรตามค่าพารามิเตอร์ x, y, z ทำให้สามารถหาเส้นโค้งได้โดยประยุกต์กับสมการออยเลอร์

$$(14) \quad \frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2Eu' + 2Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0$$

$$(15) \quad \frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2Eu' + 2Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0$$

ปัญหาหระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม

ในระบบพิกัดทรงกลม จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกลมจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ ϕ และ θ เมื่อ ϕ คือองศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน z บวก และ θ คือองศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy โดยที่ ρ คือรัศมีของทรงกลม สำหรับพิกัด (x, y, z) ของจุด P บนผิวทรงกลม โดยสมมติให้ $\vec{r}(\phi, \theta)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวทรงกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้เป็นคือ การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกลม จาก (11), (12) และ (13) จะได้

$$(16) \quad E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \rho^2 \sin^2 \phi$$

$$(17) \quad F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \phi} = 0$$

$$(18) \quad G = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 = \rho^2$$

เมื่อนำ (16), (17) และ (18) แทนค่าในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด (10) จะได้

$$(19) \quad L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\theta')^2 + \rho^2 (\phi')^2} dt$$

โดยประยุกต์สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ จะได้

$$(20) \quad 0 - \frac{d}{d\phi} \frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi (\theta')^2}} = 0$$

หรือ
$$(21) \quad \frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi (\theta')^2}} = c_1$$

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ จากนั้นจัดสมการใหม่ จะได้

$$(22) \quad \theta(\phi) = \cos^{-1}(c_2 \cot \phi) + c_2$$

เมื่อ $c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{1 - c_1^2}}$ จากสมการที่ (22) เมื่อนำมาปรับรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้

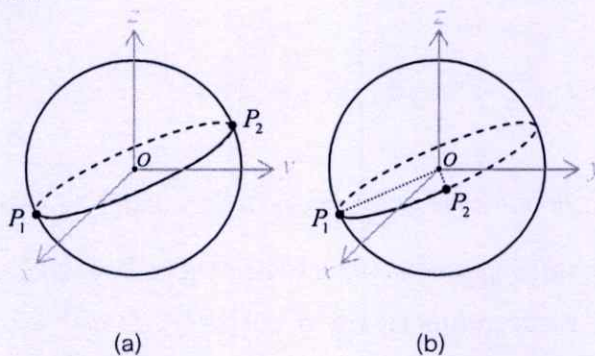
$$(23) \quad z = Ax + By$$

เมื่อ $A = \frac{\cos c_2}{c}$ และ $B = \frac{\sin c_2}{c}$ เป็นสมการระนาบที่ตัดทรงกลม และผ่านจุดศูนย์กลางโดยมีรอยตัดระหว่างระนาบและทรงกลมดังกล่าวเป็นวงกลมที่ใหญ่ที่สุด หรือส่วนของวงกลมใหญ่ที่เชื่อมจุดสองจุดเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม ในกรณีที่จุดทั้งสองเป็นจุดคู่เล็งยัน ส่วนของวงกลมใหญ่จะยาว $\pi\rho$ ซึ่งเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดคู่เล็งยันดังรูป 1.1 (ก) ส่วนของวงกลมใหญ่ที่เป็นฐานของสามเหลี่ยมฐานโค้งที่มีเวกเตอร์ \overline{OP}_1 และ \overline{OP}_2 เป็นด้านดังรูป 1.1 (ข) นั้น ความยาวของเส้นโค้ง ณ จุดคู่เล็งยันคือ

$$S = \theta\rho \tag{24}$$

เมื่อ $\theta = \arccos\left(\frac{\overline{OP}_1 \cdot \overline{OP}_2}{\rho^2}\right)$ จาก $\overline{OP}_1 \cdot \overline{OP}_2 = |\overline{OP}_1||\overline{OP}_2| \cos \theta$ และ $\overline{OP}_1 = \overline{OP}_2 = \rho$ จะได้

$$\rho = \sqrt{\cos \theta} \tag{25}$$



รูปที่ 1.1 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกลมทั้ง 2 กรณี

ปัญหาหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกระบอกกลม

ในระบบพิกัดทรงกระบอกกลม จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกระบอกกลมนั้นจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ θ และ z เมื่อ θ คือองศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บนกบนระนาบ xy และ z คือความยาวของทรงกระบอกกลม โดยที่ ρ คือรัศมีของทรงกระบอกกลมบนระนาบ xy สำหรับพิกัด (x, y, z) ของจุด P บนผิวทรงกระบอกกลม โดยสมมติให้ $\vec{r}(\theta, z)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวทรงกระบอกกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้เป็น การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกระบอกกลม จาก (11), (12) และ (13) จะได้

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \rho^2 \tag{26}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial z} = 0 \tag{27}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1 \tag{28}$$

เมื่อนำ (26), (27) และ (28) แทนค่าในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด (10) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 (\theta')^2 + 1} dt \tag{29}$$

โดยประยุกต์สมการอนุพันธ์ย่อยเลอร์ จะได้

$$0 - \frac{d}{dz} \frac{\rho^2 (\theta')}{\sqrt{1 + \rho^2 (\theta')^2}} = 0 \tag{30}$$

หรือ
$$\frac{\rho^2 (\theta')}{\sqrt{1 + \rho^2 (\theta')^2}} = c_1 \tag{31}$$

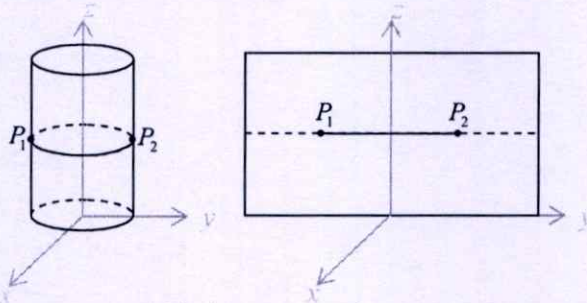
เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ จากนั้นจัดสมการใหม่ จะได้

$$\theta(z) = \left(\frac{\frac{c_1}{\rho^2}}{\rho \sqrt{\rho^2 - c_1^2}} \right) z + c_2 \tag{32}$$

จากสมการที่ (32) เมื่อนำมาปรับรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้

$$\theta(z) = mz + c_2 \tag{33}$$

เมื่อ $m = \left(\frac{c_1}{\rho^2} \right) / \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{\rho} \right)^2}$ เป็นสมการระนาบที่ตัดทรงกระบอกกลม และผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกระบอกกลมโดยมีรอยตัดระหว่างระนาบและทรงกระบอกกลมดังกล่าวดังรูป 1.2



รูปที่ 1.2 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดทั้งสองบนผิวทรงกระบอกกลม

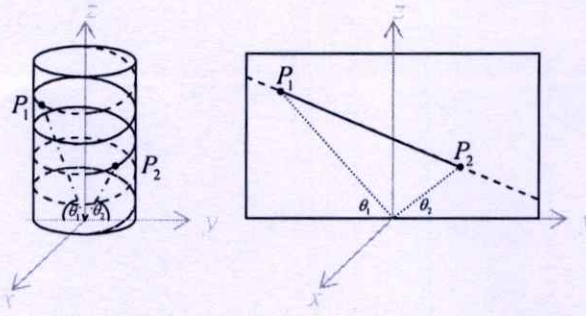
ในกรณีที่ต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่อยู่ขึ้นอยู่กับ $f(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \theta)$ และเมื่อแทนค่าลงในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด จะได้

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[-\rho \sin \theta]^2 + [\rho \cos \theta]^2 + [1]^2} d\theta$$

(34)

$$L = \sqrt{\rho^2 + 1} (\theta_2 - \theta_1) \tag{35}$$

เมื่อ θ_1 และ θ_2 เป็นมุมที่เกิดขึ้นระหว่างจุดศูนย์กลางไปยังจุดสองจุดกับแกน y ดังรูป 1.3 นั้น โดยที่ความยาวของเส้นโค้ง ณ จุดสองจุดจึงเป็นส่วนของเกลียวหรือฮีลิกซ์ (Helix)



รูปที่ 1.3 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดที่อยู่บนส่วนของเกลียวระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกระบอกกลม

ปัญหาหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกรวยกลม

ในระบบพิกัดทรงกรวยกลม จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกรวยกลม จะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ θ และ ρ เมื่อ θ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ xy และ ρ คือ รัศมีของทรงกรวยกลม โดยที่ ϕ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน z บวก ซึ่งเป็นค่าคงที่ สำหรับพิกัด (x, y, z) ของจุด P บนผิวทรงกรวยกลม โดยสมมติให้ $\vec{r}(\rho, \theta)$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวทรงกรวยกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้เป็น การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกรวยกลม จาก (11), (12) และ (13) จะได้

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \rho^2 \sin^2 \phi \tag{36}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \rho} = 0 \tag{37}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = 1 \tag{38}$$

เมื่อนำ (36), (37) และ (38) แทนค่าในสมการการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด (10) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\theta')^2 + (\rho')^2} dt \tag{39}$$

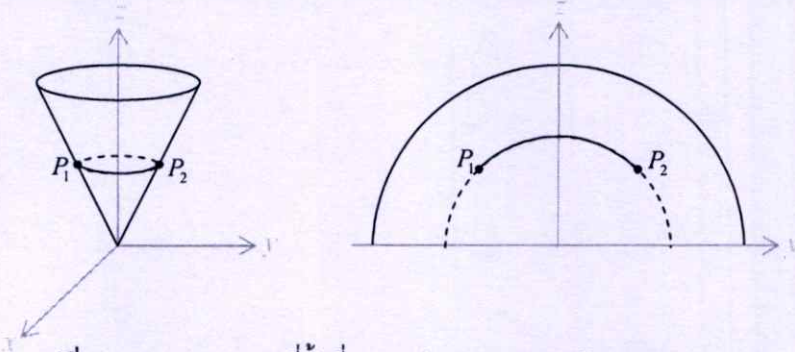
โดยประยุกต์สมการอนุพันธ์ออยเลอร์ จะได้

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2} - \frac{\left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2}} = c_1 \tag{40}$$

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงที่ จากนั้นจัดสมการใหม่ จะได้

$$\rho(\theta) = Ae^{(B \sin \phi)\theta} \tag{41}$$

เมื่อ $A = e^{\ln c_2}$ และ $B = \sqrt{\frac{1}{c_1^2} - 1}$ เป็นสมการเส้นโค้งซึ่งกำหนดค่า ϕ ของทรงกรวยกลม โดยที่ $0 < \phi < \pi$ และผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกรวยกลมโดยมีรอยตัดระหว่างระนาบและทรงกรวยกลมดังกล่าวดังรูป 1.4



รูปที่ 1.4 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกรวยกลม

ในกรณีที่ต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่ขึ้นอยู่กับ $f(\theta) = (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta, \theta)$ และเมื่อแทนค่าลงในสมการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุด จะได้

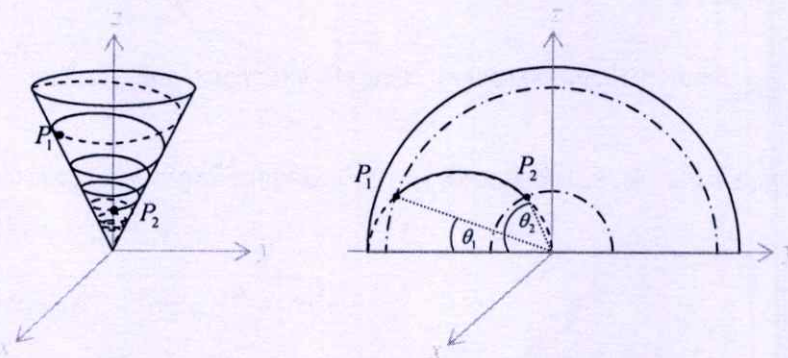
$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[\theta \cos \theta]^2 + [\theta \sin \theta]^2 + [\theta]^2} d\theta$$

(42)

$$L = \frac{\sqrt{2}}{3} (\theta_2^3 - \theta_1^3)$$

(43)

เมื่อ θ_1 และ θ_2 เป็นมุมที่เกิดขึ้นระหว่างจุดศูนย์กลางไปยังจุดสองจุดกับแกน y ดังรูป 1.5 นั้น โดยที่ความยาวของเส้นโค้ง ณ จุดสองจุดจึงเป็นส่วนของเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล (Spiral)



รูปที่ 1.5 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดที่อยู่บนส่วนของเส้นเวียนก้นหอยระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกรวยกลม

สรุปผลการวิจัย

ในการหาสมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนบางผิวกำลังสองด้วยวิธีการประยุกต์จากสมการอนุพันธ์ออยเลอร์ หลังจากได้ทำการศึกษาลแล้วพบว่า เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนผิวของทรงกลมนั้น คือ ส่วนของวงกลมใหญ่ สำหรับทรงกระบอกกลม เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนผิวของทรงกระบอกกลมนั้น คือ ส่วนของเส้นโค้งที่มี

ลักษณะเป็นเกลียวหรือฮีลิกซ์ (Helix) สำหรับทรงกรวยกลมนั้น เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนผิวของทรงกรวยกลมนั้น คือส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล (Spiral) ซึ่งจากการศึกษาดังกล่าวพบว่าวิธีการประยุกต์จากสมการอนุพันธ์ออยเลอร์นั้นสามารถใช้ได้กับผิวกำลังสองที่อยู่ในรูปเชิงวงกลมเท่านั้น ดังนั้นสำหรับผู้ที่ต้องการศึกษาวิจัยต่อ ควรศึกษาในเรื่องของเราคณิตเชิงอนุพันธ์ด้วยอีกทางหนึ่ง เพื่อเป็นเครื่องมือที่ช่วยในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดได้อีกทางหนึ่ง

เอกสารอ้างอิง

- I.M. Gelfand and S.V. Fomin. Calculus of Variations, Dover Publications, Inc. 1963.
- John Opera. Differential geometry and its applications, Prentice-Hall, Inc. 1997.
- Jürgen Jost and Xianqing Li-Jost. Calculus of Variations, Cambridge University Press. 1998.
- Minoru TANAKA. Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution, Department of Mathematics, Tokai University, 2000.
- Minoru TANAKA. Differential Geometry, Tokai University, 2007.
- ภคินี ชิตสกุล. เอกสารประกอบการเรียน วิชา Mathematical Modeling, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2006.

The shortest path between two points on some surface by using the application of Euler equation

Nathaphon Boonnam¹ and Pakkinee Chitsakul²

^{1,2}Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology
 Ladkrabang, Bangkok, Thailand.

¹nut4297nb@gmail.com

²kcpakkin@kmitl.ac.th

Abstract. It is well-known that the shortest curve on surface of sphere is great circle. However, finding of the shortest curve on other surface is not much studied. Currently, many researchers are more interested in studying about this field. A curve which is called geodesic is a curve that accelerates to surface. The definition of geodesic is $\dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha} = 0$ and orthogonal to the tangent space. In this paper, we offered the shortest path on some surfaces of revolution. Then, we analyzed the parametric equation to determine the shortest curve by using the application of Euler equation. Finally, the given examples can be used to apply in clinical application and other.

1 Introduction

The Geodesic problem is the problem about the shortest distance on arbitrary surfaces by considering from distance that minimizes non-increasing. In addition, geodesic generate directions on surface as well. It can be found by generalizing the equation for the length of a curve, and then minimizing this length using the calculus of variations. This has some minor technical problems, because there is different ways to parameterize the shortest path. It is simpler to demand not only that the curve locally minimize length but also that it is parameterized with constant, meaning that the distance between two points along the geodesic is proportional to their points.

While the case of finding the shortest path between two points in a plane is straight line. In many methods exist for making this generalization, such as using isometric maps to surfaces with known geodesics, one of the most useful methods in finding analytical solution by using the Euler equation. A geodesic can be represented by the solution of a second-order ordinary differential equation. Traditionally, with a given point and its tangent direction being the initial condition, the numerical solution of a geodesic can be obtained. But this method cannot ensure the requirement that the obtained geodesic pass through another fixed terminal point with this requirement being essential in practical winding.

2 Preliminary

2.1 Euler equation

The Euler equation is an equation whose solution extremizes a functional

$$L[y(x)] = \int_{\beta}^{\alpha} f(x, y, y') dx. \quad (1)$$

It is given by the ordinary differential equation,

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y, y') - \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} f(x, y, y') = 0. \quad (2)$$

When comparing with almost argument, by y is a continuous differential function and satisfies certain boundary conditions (if the shortest path between points a and b such that $g(\alpha) = a$ and $g(\beta) = b$) which a functional extremizes.

2.2 The shortest path on parametrized surfaces

A general solution can be given for finding the shortest path on surfaces which can be parametrized in the form $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ and $z = z(u, v)$. The shortest path that is the minimum arc length is given by

$$L = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (3)$$

Note that dx is given by

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv.$$

Thus, dx^2 is given by

$$dx^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 dv^2.$$

Similarly, we have

$$dy^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 dv^2$$

and

$$dz^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 dv^2.$$

Substituting these equations into (3), we get

$$L = \int_{\beta}^{\alpha} \sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2} du \quad (4)$$

where

$$E \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F \equiv \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v},$$

and

$$G \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Taking derivatives of integrand into (4), we find

$$\frac{df}{dv} = \frac{1}{2} (E + 2Fv' + Gv'^2)^{-1/2} \left(\frac{\partial E}{\partial v} + 2 \frac{\partial F}{\partial v} v' + \frac{\partial G}{\partial v} v'^2 \right)$$

and

$$\frac{df}{dv'} = \frac{1}{2} (E + 2Fv' + Gv'^2)^{-1/2} (2F + 2Gv').$$

The Euler equation (2) then becomes

$$\frac{\frac{\partial E}{\partial v} + 2 \frac{\partial F}{\partial v} v' + \frac{\partial G}{\partial v} v'^2}{2\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} - \frac{d}{du} \left(\frac{F + Gv'}{\sqrt{E + 2Fv' + Gv'^2}} \right) = 0. \quad (5)$$

3 The Shortest Path

In the plane, the Riemannian metric is given by $ds^2 = dx^2 + dy^2$ where ds is an infinitesimal length. Therefore, the arc-length of curve in the plane between two points, meaning the shortest path, is a straight line.

The Euler equation can also be solved to find the shortest path on the surface of a unit sphere. It well known that the shortest path between two points on a sphere is on a plane that contains the origin of the sphere. Thus, pick any two points on the sphere and then solve for the plane which contains the two points and the origin; the shortest path is the intersection of the plane and the sphere, the great circle.

In addition, we find the shortest path on other surfaces that consists of cylinder, cone, paraboloid, hyperboloid, and torus to the following.

3.1 The Shortest Path on a Cylinder

The Euler equation can also be solved to find the shortest path on the surface of z-axis positively. The metric on a cylinder is $ds = \sqrt{R^2 d\theta^2 + dz^2}$. Thus,

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{R^2 d\theta^2 + dz^2} = \int_a^b \sqrt{R^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 1} dz.$$

The Euler equation becomes

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\partial}{\partial \frac{d\theta}{dz}} \sqrt{R^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 1} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \sqrt{R^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 1} = 0$$

which can be written

$$\frac{d}{dz} \left[R^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right) / \sqrt{R^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 1} \right] = 0.$$

Integrating this gives

$$R^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right) / \sqrt{R^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 1} = c.$$

Therefore,

$$\theta = \frac{c}{R\sqrt{R^2 - c^2}} z + \text{constant}.$$

This equation means that the points which are on the shortest path between two points on a cylinder. The geodesic is the intersection of cylinder and plane. That is so because the principle normal to any of its points is parallel to the normal to the surface at this point.

To verify the existence of other geodesics on the cylinder C , we shall consider a parametrization

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

of the cylinder in a point $p \in C$, with $\mathbf{x}(0, 0) = p$. In this parametrization, a neighborhood of p in C is expressed by $\mathbf{x}(u(s), v(s))$, where s is the arc length of C . Therefore, excluding the cases already obtained,

$$u(s) := as, \quad v(s) := bs, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

A geodesic of the cylinder is locally of the form $(\cos as, \sin as, bs)$, and thus it is helix as shown in Fig. 1.

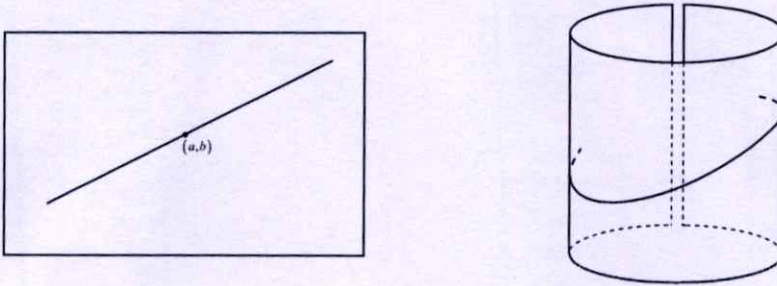


Fig. 1. The shortest path on a cylinder.

3.2 The Shortest Path on a Cone

The Euler equation can also be solved to find the shortest path on the surface of z-axis positively. The metric on a cylinder is $ds = \sqrt{u^2 dv^2 + 2du^2}$. Thus,

$$L = \int ds = \int_a^b \sqrt{u^2 dv^2 + 2du^2} = \int_a^b \sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} du.$$

The Euler equation becomes

$$\frac{d}{du} \left[\frac{\partial}{\partial \frac{dv}{du}} \sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} = 0$$

which can be written

$$\frac{d}{du} \left[u^2 \left(\frac{dv}{du}\right) / \sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} \right] = 0.$$

Therefore,

$$v = \left(\sqrt{c^2 - u^2} \ln \left[2 \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - u^2}}{u} \right) \right] \right) / (\sqrt{u^2 - c^2}).$$

This solution aforementioned that have the variable greatly. By the alternative form of Euler equation becomes,

$$\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} - \left(\frac{dv}{du}\right) \left[\frac{\partial}{\partial \frac{dv}{du}} \sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2} \right] = c$$

which can be written

$$\frac{2}{\sqrt{u^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2}} = c.$$

Therefore,

$$v = \frac{\sqrt{4-2c^2}}{c} \ln|u| + \text{constant}.$$

Although this equation can be find solution easier than above. However, both of solutions exist if and only if the value of u be non-zero, that is, this equation depend on every point except apex of cone. This is not always so can be seen by considering slices of cone, parallel to its base.

Since the area of a slice varies as the square of its distance from the cone's vertex, the area function obtained looks like a piece of the curve $y = x$, which is certainly not concave. However, it is reasonable to assume that the cone is frustum, since it is only just a convex body: its curved surface is made up of straight lines.

Note that the points that are on the shortest path between two points on a cone have a solution above that except the apex as shown in Fig. 2.

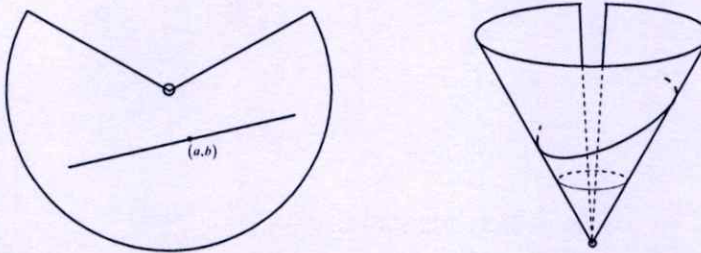


Fig. 2. The shortest path on a cone.

4 Application in the Clinical field

The traditional method of finding the shortest path between two points is routes of one airline from the city to another. This is well-known that the most obvious about the application in Geodesic problem. Furthermore, we find the shortest path between two points on cylinder and cone. Modern technology can be applied today as well.

The Clinical technique of effective operation is small surgical scar and rapid because it allows recovery of the body relieve or prevent complication that may arise with patients. Nevertheless, surgeon is necessary in planning the surgery. If the above theory in this paper application can be applied, it considered to be more beneficial to the operation.

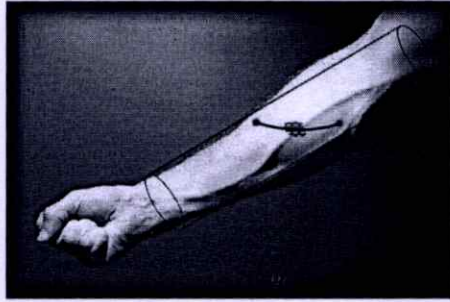


Fig. 3. The arm-shaped geometry similar to the cylinder.

Another important factor in the case of operation cannot surgery with human individually. Therefore, the usage of technology is called “Laser knife” to help alleviate the burden on surgeon more effectively. In Fig. 3, if we look at arm-shaped geometry similar to the cylinder, we will be able to find the shortest path to the surgery. Accordingly, the application of Geodesic problem is useful of clinical field a lot. It is also an alternative that will facilitate the surgeon in operation.

5 Conclusion

Using the application of Euler equation which is on the shortest path between two points on a cylinder is locally of the form $(\cos as, \sin as, bs)$, and thus it is helix. In the case of cone, this equation can be find solution depend on every point except apex of cone. It means that the points that are on the shortest path between two points on a cone have a solution above that except the apex.

6 Future work

The further process, we will take results to construct the algorithm with program to simulate. After all the preparation is complete, we will make contact for actual trial of surgery at the hospital in Thailand.

After that if we will take the both of cylinder and cone to stick together and find the shortest path on this surface, it would be applied as shown in Fig. 4.

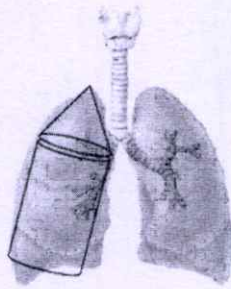


Fig. 4. The lung-shaped geometry similar to cylinder-stick-cone together.

References

1. A.S. Gupta: *Calculus of variations with Applications*. Prentice-Hall. New Delhi. (1997)
2. M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs. New Jersey. (1976)
3. V.A. Toponogov: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Birkhauser. Boston. Massachusetts. (2006)