

เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าความถี่ได้

A SINUSOIDAL NONLINEAR OSCILLATOR WITH
ADJUSTABLE FREQUENCY

นธิมา หาญเม่ง
NITHIMA HANMENG

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

KMITL-2009-EN-M-080-103

เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าความถี่ได้

A SINUSOIDAL NONLINEAR OSCILLATOR WITH
ADJUSTABLE FREQUENCY



นิธิมา หาญเม่ง

NITHIMA HANMENG

ฉพ.

๙๖๖๔

๒๕๕๒

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 105258
วัน,เดือน,ปี 17 พ.ศ. 2552

b. 12166972
i.....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

KMITL 2009-EN-M-080-103

**A SINUSOIDAL NONLINEAR OSCILLATOR WITH
ADJUSTABLE FREQUENCY**

NITHIMA HANMENG

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN CONTROL ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2009

KMITL 2009-EN-M-080-103

COPYRIGHT 2009

FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าความถี่ได้
Thesis Title A Sinusoidal Nonlinear Oscillator with Adjustable Frequency
นักศึกษา นางสาวนิธิตา หาญเม้ง
รหัสประจำตัว 50060505
ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา วิศวกรรมระบบควบคุม
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.ปรเมษฐ์ ประณายนันทน์
หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2009-EN-M-080-103

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
รศ.ดร.ชนินทร์	บุญลักษณ์ นุสรณ์	
ผศ.ดร.นนทวัฒน์	จุลเดชะ	
ดร.ประจวบ	ปวรังกูร	
รศ.ดร.วันชัย	วีรจจา	
ผศ.ดร.ปรเมษฐ์	ประณายนันทน์	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันอังคารที่ 30 มิถุนายน พ.ศ. 2552 เวลา 15.00-17.00 น.

สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 3 ห้องประชุม 2

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.กอบชัย เดชหาญ)

คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

วันที่ 30 มิถุนายน พ.ศ. 2552

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เครื่องกำเนิดสัญญาณ ไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าความถี่ได้
นักศึกษา	นางสาวนิธิตา หาญเม่ง
รหัสนักศึกษา	50060505
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมระบบควบคุม
พ.ศ.	2552
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ. ดร.ประเมษฐ์ ประณยานันท์

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอเครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นในรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับความถี่ด้วยการปรับที่ความถี่จุดกึ่งกลางของวงจรรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับที่สอง ซึ่งสามารถรักษาค่าตัวประกอบคุณภาพ (Quality factor) ให้คงที่ วิธีเคสโครบิงค์ฟังก์ชันได้ถูกนำมาใช้ในการทำนายลิมิตไซเคิลและวิเคราะห์เสถียรภาพของการสั่น วงจรนี้ประกอบด้วยส่วนที่สำคัญสองส่วนซึ่งเป็นการต่อแบบป้อนกลับ ส่วนแรกคือ โอทีเอ (OTA) ซึ่งเป็นองค์ประกอบแบบไม่เป็นเชิงเส้นอยู่ในส่วนป้อนกลับ และส่วนที่สองคือ วงจรรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านซึ่งเป็นส่วนที่เป็นเชิงเส้นอยู่ในส่วนที่ป้อนไปข้างหน้า ผลที่ได้จากการทดลองเป็นการจำลองโดยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ เช่น MAPLE, ORCAD CAPTURE และ MATLAB ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎี

Thesis Title	A Sinusoidal Nonlinear Oscillator with Adjustable Frequency
Student	Miss. Nithima Hanmeng
Student ID.	50060505
Degree	Master of Engineering
Program	Control Engineering
Year	2009
Thesis Advisor	Assist. Prof. Dr. Poramate Pranayanuntana

ABSTRACT

This thesis presents a sinusoidal nonlinear oscillator with adjustable frequency. The frequency of oscillation is adjusted via the change of the center frequency of the second order bandpass filter while keeping its quality factor constant. The describing function method is used to predict the limit cycles and to analyze the stability of oscillation. The proposed circuit consists of two important parts in the feedback connection configuration, an Operational Transconductance Amplifier (OTA) as a nonlinear element in feedback path and second a bandpass filter in the forward path. The experimental results are simulated by computer programs such as ORCAD CAPTURE, MAPLE and MATLAB.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้ด้วยดีนั้นผู้เขียนรู้สึกทราบบ้างซึ่งเป็นอย่างสูงในความอนุเคราะห์จากการให้คำแนะนำและให้คำปรึกษาของ ผศ.ดร.ปรเมษฐ์ ประณยานันท์ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ผู้เขียนขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุก ๆ ท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับผู้เขียน

ขอขอบคุณพี่แพรว ที่ให้ข้อมูลในเรื่องการเรียนและหนังสือต่างๆที่ใช้ในการวิจัยคำปรึกษาและแนะแนวทางในเรื่องการเรียน พี่น้อยที่ช่วยแนะนำเรื่องเรียนและแนะนำพี่ๆหลายคนให้สอนเรื่องวงจร พี่เพชรที่ช่วยให้ยืมเครื่องมือและชี้แนะทางการใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ ธีร์วิทย์ที่ช่วยสอนด้านการเรียน ให้ความสะดวกสบายในการเดินทาง และให้กำลังใจเสมอมา

ขอขอบคุณบัณฑิตศึกษาและบัณฑิตวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ที่ให้ความช่วยเหลือในเรื่องต่างๆ

สุดท้ายนี้ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจและให้การสนับสนุนในทุกเรื่องๆ ทำให้ผู้เขียนสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมาจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ผู้เขียนขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

นิธิมา หาญเม้ง

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 ขอบเขตการศึกษา.....	2
1.4 ขั้นตอนการศึกษา.....	2
บทที่ 2 วิธีการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน.....	3
2.1 บทนำ.....	3
2.2 พื้นฐานของเดสไครบิงฟังก์ชัน.....	4
2.2.1 ตัวอย่างการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน.....	4
2.2.2 ขอบเขตการใช้งาน.....	7
2.2.3 สมมติฐานพื้นฐาน.....	10
2.2.4 ทฤษฎีบทพื้นฐาน.....	11
2.2.5 การคำนวณหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชัน.....	12
2.3 ตัวอย่างความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่างๆ.....	13
2.4 เดสไครบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั่วไป.....	17
2.4.1 ภาวะอิ่มตัว(Saturation).....	17
2.4.2 จุดบอด (Dead-Zone).....	19
2.4.3 การเกิดระยะคลอน (Backlash).....	21
2.5 บทวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	22
2.5.1 หลักการของไนควิสต์ (Nyquist Criterion) และการนำไปใช้งาน.....	22
2.5.2 การมีอยู่จริงของลิมิตไซเคิล.....	24
2.5.3 เสถียรภาพของลิมิตไซเคิล.....	28

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.5.4 ความน่าเชื่อถือของการวิเคราะห์ด้วยเคสโครบิงฟังก์ชัน.....	30
บทที่ 3 ทฤษฎีและหลักการทำงานของวงจรกรองความถี่.....	32
3.1 บทนำ.....	32
3.2 หลักการทั่วไปของวงจรกรองความถี่.....	32
3.2.1 วงจรกรองความถี่ชนิดความถี่ต่ำผ่าน (Lowpass Filter)	34
3.2.2 วงจรกรองความถี่ชนิดความถี่สูงผ่าน (Highpass Filter)	35
3.2.3 วงจรกรองความถี่ชนิดความถี่แถบผ่าน (Bandpass Filter).....	36
3.2.4 วงจรกรองความถี่ชนิดความถี่แถบหยุด (Bandstop Filter).....	36
บทที่ 4 ทฤษฎีการกำเนิดสัญญาณและหลักการทำงาน.....	38
4.1 บทนำ.....	38
4.2 ทฤษฎีและหลักการเบื้องต้นของการกำเนิดสัญญาณ.....	38
4.2.1 พื้นฐานของวงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ.....	38
4.2.2 ประเภทของวงจรกำเนิดสัญญาณ.....	40
บทที่ 5 วิธีการออกแบบเครื่องกำเนิดสัญญาณ.....	44
5.1 กระบวนการและวิธีการออกแบบ.....	44
5.2 ฟังก์ชันคาบ (Periodic Function).....	44
5.2.1 การนำวิธีการเคสโครบิงฟังก์ชันมาพิจารณา.....	46
5.2.2 การออกแบบวงจรกรองความถี่แถบผ่าน.....	47
5.2.3 ลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของโอทีเอ (OTA).....	48
5.3 การคำนวณค่าพารามิเตอร์ต่างๆของระบบ.....	48
บทที่ 6 ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรม ORCAD CAPTURE และผลการทดลอง.....	50
6.1 บทนำ.....	51
6.2 การทดสอบหาโมเดลทางคณิตศาสตร์ของโอทีเอ.....	51
6.3 การออกแบบระบบ.....	52
6.4 ผลการเขียนแบบระบบด้วยโปรแกรม ORCAD CAPTURE.....	55

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6.5 ผลการทดลอง	57
บทที่ 7 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	59
7.1 บทสรุปและวิจารณ์.....	59
7.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการวิจัยในการพัฒนาต่อ.....	59
บรรณานุกรม.....	60
ภาคผนวก ก ทฤษฎีและหลักการทำงานของวงจรรขยายโอทีเอ (OTA).....	61
ก.1 หลักการทำงานพื้นฐานของวงจรรขยายโอทีเอ.....	62
ก.2 การวิเคราะห์หาค่าอัตราขยาย g_m สำหรับวงจรรขยายแบบคิฟเฟอร์เรนเซียล.....	63
ภาคผนวก ข ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	66
ประวัติผู้เขียน.....	76

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
6.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง ω_0 และ R	54

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 การต่อแบบป้อนกลับ.....	1
2.1 ระบบป้อนกลับของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเดอโพล.....	4
2.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเดอโพล.....	5
2.3 ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	7
2.4 ระบบควบคุมที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น.....	8
2.5 แสดงการเปลี่ยนระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน.....	8
2.6 แสดงส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น และเดสไครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	12
2.7 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุม.....	14
2.8 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว.....	15
2.9 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากระยะคลอน.....	16
2.10 ความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัวและความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต – เอาท์พุทที่เกี่ยวข้อง.....	18
2.11 กราฟเดสไครบิงฟังก์ชันของภาวะอิ่มตัวของความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัว.....	18
2.12 ความไม่เป็นเชิงเส้นและกราฟเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์.....	19
2.13 ลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอด.....	20
2.14 อินพุตและเอาท์พุท ของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอด.....	20
2.15 อินพุตและรูปลิ้นเอาท์พุทของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบการเกิดระยะคลอน.....	22
2.16 ระบบเชิงเส้นวงปิด.....	22
2.17 กราฟของไนควิสต์.....	23
2.18 หลักการของไนควิสต์ของระบบที่มีค่าคงที่.....	24
2.19 ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	25
2.20 กราฟแสดงการเกิดลิมิตไซเคิล.....	25
2.21 การเกิดลิมิตไซเคิลสำหรับเดสไครบิงฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับความถี่.....	26
2.22 บล็อกไดอะแกรมของเครื่องกำเนิดสัญญาณ.....	27
2.23 กราฟเดสไครบิงฟังก์ชัน.....	28
2.24 เสถียรภาพของลิมิตไซเคิล.....	29
3.1 ระบบพื้นฐานของวงจรรองความถี่.....	32
3.2 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบอุดมคติ.....	34
3.3 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรรองความถี่สูงผ่านแบบอุดมคติ.....	35

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.4 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรกรองความถี่แถบผ่านแบบอุดมคติ.....	36
3.5 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรกรองความถี่แถบหยุดแบบอุดมคติ.....	37
4.1 ระบบป้อนกลับแบบลบ.....	38
4.2 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ LC (ก) แบบฮาร์ทลีย์ (Hartley Oscillator) (ข) แบบโคลพิทซ์ (Colpitts Oscillator).....	40
4.3 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ RC (ก) แบบ Wien-Bridge Oscillator (ข) แบบ Wien-Bridge Oscillator โดยใช้ OP-AMP	41
4.4 วงจรสมมูล และสัญลักษณ์โดยใช้ชิ้นผลึก.....	42
4.5 วงจรกำเนิดสัญญาณ โดยชิ้นผลึก.....	42
4.6 วงจรกำเนิดสัญญาณ โดยใช้ไอซีเบอร์ 555.....	43
5.1 การต่อแบบป้อนกลับ (Feedback Connection).....	44
5.2 วงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง [8].....	47
5.3 วงจรสมมูลของโอทีเอ.....	48
6.1 วงจรทดสอบ โอทีเอ.....	50
6.2 การปรับข้อมูล (Data Fitting) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method).....	51
6.3 กราฟแสดงฟังก์ชัน $D(a)$ เมื่อ $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$	53
6.4 กราฟของตัวกรองความถี่แถบผ่าน ณ ค่า ω_0 ต่างๆ	53
6.5 กราฟของ $G(j\omega)$ และ $-1/D(a)$	54
6.6 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ.....	55
6.7 สัญญาณเอาต์พุตที่ความถี่ at $\omega_0 = 120$ rad/s	56
6.8 สัญญาณเอาต์พุตที่ความถี่ at $\omega_0 = 1,200$ rad/s	56
6.9 สัญญาณเอาต์พุตที่ความถี่ at $\omega_0 = 12,000$ rad/s	57
6.10 สัญญาณเอาต์พุตที่แอมพลิจูด = 0.1 และความถี่ = 120 rad/s	57
6.11 สัญญาณเอาต์พุตที่แอมพลิจูด = 0.1 และความถี่ = 1,200 rad/s	58
6.12 สัญญาณเอาต์พุตที่แอมพลิจูด = 0.1 และความถี่ = 12,000 rad/s	58
ก.1 บล็อกไดอะแกรมแสดงโครงสร้างพื้นฐานของวงจรขยายโอทีเอ.....	62
ก.2 วงจรสมมูลทางอุดมคติของวงจรขยายโอทีเอ.....	63
ก.3 สัญลักษณ์แทนวงจรขยายโอทีเอ.....	63
ก.4 วงจรขยายแบบดิฟเฟอเรนเชียล.....	63

1.2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ต้องการที่จะอธิบายระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่สามารถปรับความถี่หรือคาบได้โดยควบคุมค่าแอมพลิจูดไม่ให้เกิดการเปลี่ยนแปลงไปตามความถี่ที่เปลี่ยน จากนั้นได้เสนอวิธีการในการวิเคราะห์ระบบโดยใช้วิธีเคสโครบิงฟังก์ชัน และทำการเขียนแบบผลการทดลองโดยใช้โปรแกรม ORCAD

1.3 ขอบเขตการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะศึกษา ระบบกำเนิดสัญญาณที่ไม่เป็นเชิงเส้นโดยมีการปรับความถี่อย่างอิสระจากแอมพลิจูดซึ่งความถี่จะปรับได้จากการปรับจากความถี่กึ่งกลางของวงจรกรองความถี่แถบผ่าน โดยใช้วิธีเคสโครบิงฟังก์ชันในการคำนวณและหาขีดจำกัดไคเกิด จากนั้นวิเคราะห์ความเสถียรของระบบ

1.4 ขั้นตอนของการศึกษา

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 7 บทด้วยกันคือ

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมาของงานวิจัย จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ ขอบเขตของการ วิจัย และขั้นตอนการศึกษา

บทที่ 2 กล่าวถึงวิธีการพื้นฐานที่ใช้ในการวิจัยคือวิธีเคสโครบิงฟังก์ชันและแสดงตัวอย่างการวิเคราะห์ขีดจำกัดไคเกิดและความเสถียรของระบบ

บทที่ 3 กล่าวถึงทฤษฎีและหลักการทำงานของวงจรกรองความถี่

บทที่ 4 กล่าวถึงทฤษฎีการกำเนิดสัญญาณและหลักการทำงาน

บทที่ 5 กล่าวถึงวิธีการในการออกแบบเครื่องกำเนิดสัญญาณ

บทที่ 6 กล่าวถึงผลการเขียนแบบการทำงานของวงจรโดยใช้โปรแกรม ORCAD CAPTURE และแสดงผลที่ได้จากการทดลองจริง

บทที่ 7 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

บทที่ 2

การวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน

(Describing Function Analysis)

2.1 บทนำ

วิธีการตอบสนองเชิงความถี่ (Frequency Response Method) นั้น เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมเชิงเส้น วิธีการตอบสนองเชิงความถี่ยังเป็นพื้นฐานของการอธิบายระบบเชิงเส้นโดยใช้ค่าฟังก์ชันเชิงซ้อน (Complex Valued Function) แทนการอธิบายด้วยสมการอนุพันธ์ ซึ่งข้อดีของการอธิบายระบบเชิงเส้นด้วยวิธีการตอบสนองเชิงความถี่มีดังนี้ ประการแรกการวิเคราะห์ลักษณะของระบบบางประการ เช่น เสถียรภาพและผลตอบสนองเชิงฟังก์ชันไซน์ เป็นต้น จะถูกลดให้อยู่ในเขตของสมการพีชคณิตอย่างง่ายในโดเมนความถี่ ประการที่สองการนำเสนอในรูปแบบของกราฟจะทำให้การวิเคราะห์และออกแบบระบบนั้นทำได้ง่าย ประการต่อมาฟังก์ชันผลตอบสนองเชิงความถี่ สามารถวิเคราะห์ได้อย่างละเอียดในเชิงกายภาพ (Physical Insight) ประการสุดท้ายความซับซ้อนของกระบวนการผลตอบสนองเชิงความถี่จะขึ้นอยู่กับอันดับของระบบนั้น อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์บนโดเมนความถี่นั้นไม่สามารถใช้กับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้โดยตรงเนื่องจากฟังก์ชันผลตอบสนองเชิงความถี่ไม่ได้ถูกกำหนดมาสำหรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

วิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน (Describing Function Method) เป็นกระบวนการหนึ่งของการตอบสนองเชิงความถี่ ซึ่งใช้ในการวิเคราะห์และทำนายความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างคร่าวๆ ถึงแม้ว่าวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชันเป็นเพียงวิธีการในการหาค่าอย่างคร่าวๆ ก็ตามแต่เนื่องจากมีข้อได้เปรียบว่าการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีการอื่นๆ ทำให้เดสไครบิงฟังก์ชันกลายเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นโดยส่วนใหญ่ถูกใช้เป็นตัวทำนายการเกิดลิมิตไซเคิล (Limit Cycle) และยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อีกหลายทาง

ในบทนี้จะอธิบายถึงพื้นฐานของวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชันและการใช้เดสไครบิงฟังก์ชันในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิล ในหัวข้อ 2.2 ความไม่เป็นเชิงเส้นได้อธิบายแนวความคิดพื้นฐานของวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน หัวข้อ 2.3 ได้พูดถึงตัวอย่าง “ความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างรุนแรง” (Hard Nonlinearities) ในวิศวกรรมระบบควบคุมเพราะว่าเดสไครบิงฟังก์ชันเป็นวิธีการที่มีประโยชน์อย่างยิ่งโดยเฉพาะการพิจารณา ระบบควบคุมที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นประกอบอยู่ด้วย หัวข้อ 2.4 แสดงการหาค่าความไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน หัวข้อ 2.5 อธิบายวิธีการใช้เดสไครบิงฟังก์ชันในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

2.2 พื้นฐานของเดสไครบิงฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอแนวความคิดพื้นฐานบางประการที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน เริ่มด้วยการแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้

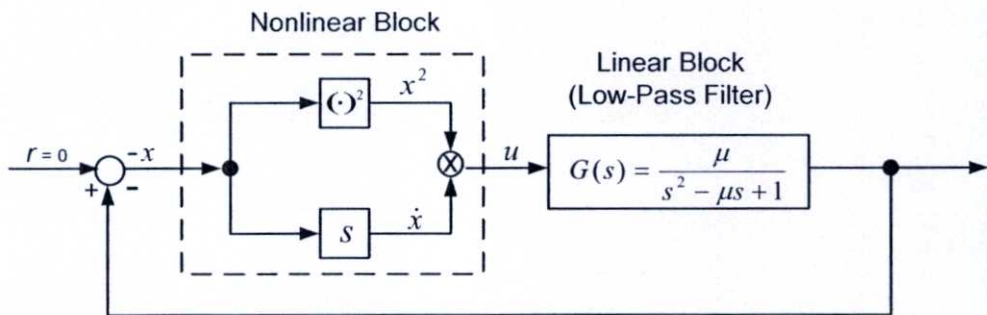
2.2.1 ตัวอย่างการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน

พิจารณาสมการแวนเดอโพล (Vander Pol Equation) ต่อไปนี้

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (2.1)$$

จากระบบในสมการ 2.1 พิจารณาว่าระบบมีลิมิตไซเคิลหรือไม่ถ้ามีจงหาค่าของแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิล นั้นด้วย

ประการแรกสมมติว่าระบบมีลิมิตไซเคิล โดยไม่ได้กำหนดค่าแอมพลิจูดและความถี่ และจากนั้นพิจารณาว่าสมการของระบบสามารถแก้ได้หรือไม่ วิธีการนี้คล้ายกับการสมมติค่าตัวแปร (Assumed - Variable Method) ในทฤษฎีสมการอนุพันธ์ ซึ่งเริ่มด้วยการสมมติวิธีการหาค่าในรูปแบบที่เป็นระบบ จากนั้นแทนค่าตัวแปรลงในสมการอนุพันธ์นั้นออกมา



รูปที่ 2.1 ระบบป้อนกลับของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเดอโพล

ก่อนเริ่มกระบวนการวิเคราะห์ระบบ พิจารณาล็อกไดอะแกรม (Block Diagram) ในรูปที่ 2.1 ซึ่งเป็นระบบป้อนกลับที่ประกอบไปด้วยส่วนที่เป็นเชิงเส้นและส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยส่วนที่เป็นเชิงเส้นคือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรองความถี่ต่ำผ่าน

เริ่มกระบวนการ โดยสมมติว่าระบบมีลิมิตไซเคิลและสัญญาณของการสั่น ซึ่งแทนด้วยตัวแปร x ให้อยู่ในรูปของ

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

โดยที่ A คือ แอมพลิจูด และ ω คือ ความถี่ (rad/sec)

ดังนั้น

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t)$$

โดยเอาที่พหุของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นคือ

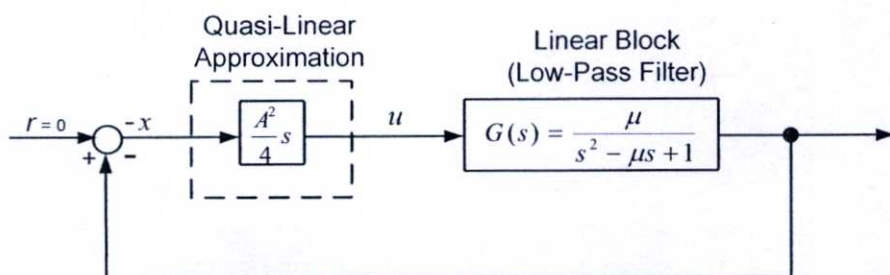
$$\begin{aligned} \mu &= -x^2 \dot{x} = A^2 \sin^2(\omega t) A\omega \cos(\omega t) \\ &= \frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\omega t) = \frac{A^3 \omega}{4} (\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า μ ประกอบด้วยเทอมของฮาร์โมนิกที่สาม แต่ด้วยคุณสมบัติของวงจรรองความถี่ต่ำผ่าน ทำให้ฮาร์โมนิกที่ 3 ถูกจำกัดออกไป นั่นหมายความว่าเราสามารถประมาณค่าของ μ ได้ว่า

$$\mu \approx \frac{A^3}{4} \omega \cos \omega t = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} [A \sin(\omega t)]$$

ดังนั้น ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูป 2.1 สามารถถูกประมาณค่าให้อยู่ในรูปของ “รูปแบบเสมือนเชิงเส้น” (Quasi-Linear) ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 2.2 ส่วนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเสมือนนั้นขึ้นอยู่กับแอมพลิจูด (A) ของสัญญาณ (ไม่เหมือนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับแอมพลิจูดของสัญญาณ) เมื่อพิจารณาในโดเมนความถี่จะได้

$$\mu = D(A, \omega)(-x) \quad (2.2)$$



รูปที่ 2.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเดอโพล

ซึ่ง

$$D(A, \omega) = \frac{A^2}{4} (j\omega)$$

นั่นคือส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะถูกประมาณค่าโดยฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่ (Frequency Response Function) $D(A, \omega)$ โดยสมมติให้ระบบเป็นการสั่นแบบสัญญาณไซน์ที่อยู่
ในรูป

$$x = A \sin(\omega t) = G(j\omega)u = G(j\omega)D(A, \omega)(-x)$$

ซึ่ง $G(j\omega)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของส่วนที่เป็นเชิงเส้น นั้นหมายความว่า

$$1 + \frac{A^2(j\omega)}{4} \cdot \frac{u}{(j\omega)^2 u(j\omega) + 1} = 0$$

ทำการแก้สมการข้างบนจะได้ $A = 2$ และ $\omega = 1$

หมายเหตุ ในเทอมของระบบที่เป็นตัวแปรลาปลาซ (Laplace Variable) s จะได้สมการ
คุณลักษณะวงปิดของระบบเป็น

$$1 + \frac{A^2 s}{4} \cdot \frac{u}{s^2 us + 1} = 0 \quad (2.3)$$

และจากสมการที่ 2.3 สมการหาค่าไอเกน (eigenvalue) ได้เป็น

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{8}u(A^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}u^2(A^2 - 4)^2 - 1} \quad (2.4)$$

จากค่าแอมพลิจูด $A = 2$ จะได้ ค่าไอเกนคือ $\lambda_{1,2} = \pm j$ ดังนั้นระบบมีลิมิตไซเคิลที่แอม
พลิจูดเท่ากับ 2 และความถี่เท่ากับ 1 ซึ่งจะเห็นว่าทั้งค่าแอมพลิจูด A และความถี่ ω ไม่ได้ขึ้นอยู่กับ
ค่า μ ในสมการที่ 2.1

เมื่อนำค่าลิมิตไซเคิล จากตัวอย่างมาเขียนกราฟลงบนแนวระนาบเฟส จะได้เป็นกราฟรูป
วงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 2 หน่วย แต่เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า μ แล้วนำค่าของลิมิตไซเคิลที่ได้มาเขียน
กราฟใหม่ จะพบว่า การประมาณค่าใช้ได้ดีที่ค่า μ น้อยๆ แต่เมื่อใดก็ตามที่ค่า μ มากขึ้นจะทำให้
การประมาณค่ามีความคลาดเคลื่อนมากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นสามารถเข้าใจได้ว่าการที่ค่า μ มีค่า
มากขึ้นทำให้ความไม่เป็นเชิงเส้นมีผลต่อระบบมากขึ้นและส่งผลให้การประมาณค่าเชิงเส้น
(Quasi - Linear Approximation) มีความแม่นยำน้อยลง

กระบวนการวิเคราะห์ ข้างต้นยังสามารถใช้ในการพิจารณาเสถียรภาพของลิมิตไซเคิลได้
ยกตัวอย่างเช่น สมมติว่าแอมพลิจูด (A) ของลิมิตไซเคิลเพิ่มขึ้นมากกว่า 2 หน่วย เมื่อนำค่า
แอมพลิจูดไปแทนในสมการที่ 2.4 แล้วพบว่าโพลวงปิดเป็นค่าจริงลบอยู่ฝั่งซ้าย นั้นหมายความว่า

ระบบมีเสถียรภาพดังนั้นขนาดของสัญญาณจะลดลงและเป็นเช่นเดียวกันเมื่อค่าแอมพลิจูด (A) ของลิมิตไซเคิลมีค่าน้อยกว่า 2 ทำให้สามารถสรุปได้ว่าลิมิตไซเคิลมีเสถียรภาพที่แอมพลิจูดเท่ากับ 2

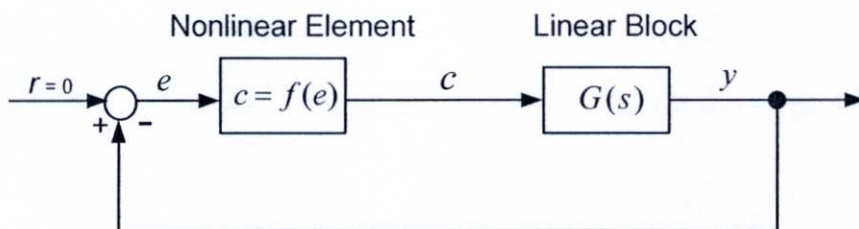
หมายเหตุ จากการวิเคราะห์การประมาณค่าข้างต้น ประเด็นสำคัญคือการแทนค่าตรงส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นด้วย ส่วนประมาณค่าเชิงเส้น (Quasi Linear Block) ซึ่งมีฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่เป็น $(A^2/4)(j\omega)$ หลังจากนั้นแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลสามารถพิจารณาได้จากสมการ $1 + G(j\omega)D(A, \omega) = 0$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน โดยที่ $D(A, \omega)$ ถูกเรียกว่า “เดสไครบิงฟังก์ชัน” ของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น และกระบวนการวิเคราะห์การประมาณค่าข้างต้นยังสามารถใช้ในการทำนายลิมิตไซเคิลของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นระบบอื่นๆ ที่สามารถจำลองระบบให้เหมือนกับบล็อกไดอะแกรมในรูปที่ 2.1 ได้อีกด้วย

2.2.2 ขอบเขตการใช้งาน

ก่อนที่จะพูดถึงการใช้งานของกระบวนการเดสไครบิงฟังก์ชัน จะกล่าวถึงชนิดของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและชนิดของข้อมูลที่สามารถนำมาใช้เกี่ยวกับลักษณะของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นอย่างคร่าวๆ ก่อน

ระบบ (The systems)

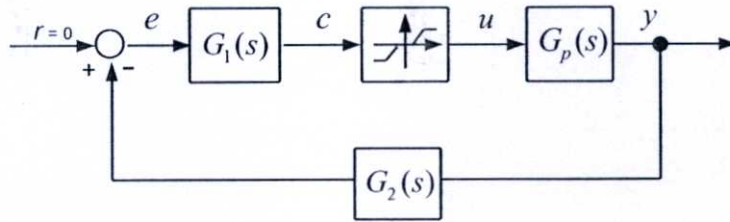
ระบบใดก็ตามที่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบดังรูปที่ 2.3 ได้นั้นสามารถใช้เดสไครบิงฟังก์ชันในการศึกษาวิเคราะห์ระบบได้



รูปที่ 2.3 ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

จากรูปที่ 2.3 ระบบใดๆ จะต้องประกอบไปด้วยระบบย่อยที่สำคัญอย่างน้อย 2 ระบบ ระบบแรกคือ ระบบที่เกือบจะเป็นเชิงเส้น (Almost Linear System) ซึ่งเป็นระบบที่ประกอบไปด้วยส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) อยู่ในคอนโทรลลูป (Control Loop) ตัวอย่างของระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) ได้แก่ ภาวะอิ่มตัวของมอเตอร์ (Motor - Saturation) ในตัวดำเนินการหรือ จุดบอดของตัวเซนเซอร์ (Actuator or Sensor Dead - Zones) ในโรงงาน ตัวอย่างระบบที่เกี่ยวข้องกับความไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) ของตัวดำเนินการแสดงไว้ในรูปที่ 2.4

ตัวอย่างที่ 2.1 ระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นเพียงตัวเดียว



รูปที่ 2.4 ระบบควบคุมที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น

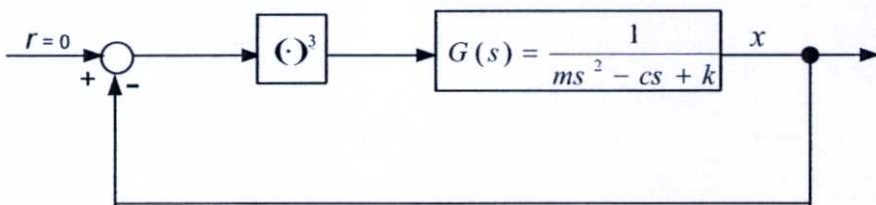
พิจารณาระบบควบคุมที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.4 ซึ่งเป็นระบบที่มีส่วนไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) และสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับรูปที่ 2.3 ได้โดยที่มี G_p , G_1 , G_2 เป็นส่วนที่เป็นส่วนที่เป็นเชิงเส้นซึ่งแทนด้วย G และความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวดำเนินการ เป็นส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ N ระบบที่สองคือระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นอย่างแท้จริง ซึ่งสมการของระบบ (Dynamic Equation) สามารถจัดให้เป็นดังรูปที่ 2.3 ได้ ตัวอย่างสมการระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างแท้จริง แสดงได้ดังนี้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_1x^3 = 0$$

จะได้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -k_1x^3$$

และสามารถนำสมการมาเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรม ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 2.5 ได้ดังนี้



รูปที่ 2.5 แสดงการแปลงระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

การนำเดสไครบิงฟังก์ชันไปใช้งาน

สำหรับระบบต่างๆ ที่มีกจะเกิดลิมิตไซเคิลอันเนื่องมาจากความไม่เป็นเชิงเส้น เช่นระบบในรูปที่ 2.4 นั้น แต่อย่างไรก็ตามการควบคุมเชิงเส้นไม่สามารถทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลได้ แต่เดสไครบิงฟังก์ชันเป็นเครื่องมือที่สามารถค้นหาการมีอยู่ของลิมิตไซเคิลได้ และยังสามารถพิจารณาเสถียรภาพของระบบได้อย่างดีไม่ว่าระบบนั้นจะค่าความไม่เป็นเชิงเส้น “มาก (Hard)”

หรือ “น้อย (Soft)” ก็ตาม โดยส่วนใหญ่แล้วสัญญาณของระบบลิมิตไซเคิล (Limit Cycling System) มักจะเป็นสัญญาณรูปแบบไซน์ ในที่นี้จะนำเคสไครบิงฟังก์ชันมาอธิบายระบบในรูปแบบที่ 2.5 โดยสมมติว่าระบบมีลิมิตไซเคิลซึ่งสัญญาณของระบบจะเป็นสัญญาณที่มีคาบ และจากระบบในรูปแบบที่ 2.5 สัญญาณคาบ (Periodic Signal) ที่เป็นสัญญาณขาเข้าสู่ส่วนที่เป็นเชิงเส้นจะมีหลายฮาร์โมนิก แต่ด้วยคุณสมบัติของส่วนที่เป็นเชิงเส้น (ซึ่งก็คือวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน) จะทำการลดทอนฮาร์โมนิกสูงๆ ของสัญญาณทำให้ได้สัญญาณเอาต์พุต $x(t)$ ที่มีแต่ฮาร์โมนิกต่ำออกมา ดังนั้นสามารถตั้งสมมุติฐานได้ว่าสัญญาณของระบบจะเป็นสัญญาณที่อยู่ในรูปแบบไซน์และอาจกล่าวได้ว่า เคสไครบิงฟังก์ชันยังสามารถใช้ในจุดประสงค์อื่นได้อีกเช่น การทำนายผลตอบสนองวงปิด (Closed – Loop Response) ของระบบต่างๆ ที่เป็นดังรูปที่ 2.3 โดยมี $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ เป็นสัญญาณกระตุ้นจากภายนอก

การทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลเป็นสิ่งสำคัญมากเพราะว่าลิมิตไซเคิลสามารถเกิดขึ้นได้เสมอในระบบทางกายภาพที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Physical Nonlinear System) ตัวอย่างเช่น การพิจารณาลิมิตไซเคิลของเครื่องกำเนิดสัญญาณทางอิเล็กทรอนิกส์ที่ใช้ในห้องทดลอง หรือการทำนายลิมิตไซเคิลซึ่งใช้ในการลดผลกระทบเชิงลบของแรงเสียดทานคูลอมบ์ (Coulomb Friction) ในระบบเชิงกล แต่ในระบบควบคุมส่วนใหญ่ ลิมิตไซเคิลอาจไม่เป็นที่ต้องการอันเนื่องมาจากสาเหตุต่างๆ ดังนี้

1. การเกิดลิมิตไซเคิล (Limit Cycling) มักนำไปสู่สาเหตุที่ทำให้การควบคุมไม่แม่นยำซึ่งทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ
2. การสั่นคงที่ (Constant Oscillation) ที่เกี่ยวข้องกับลิมิตไซเคิลสามารถเป็นเหตุให้เกิดการสึกกร่อนหรือแม้กระทั่งเกิดความเสียหายต่างๆ ขึ้นกับอุปกรณ์ (Hardware) ของระบบควบคุมนั้น
3. การเกิดลิมิตไซเคิล (Limit Cycling) อาจเป็นสาเหตุทำให้เกิดผลกระทบที่ไม่ต้องการ เช่น ระบบขับเครื่องบินเป็นแบบอัตโนมัติ (Autopilot) ทำให้ผู้โดยสารบนเครื่องบินรู้สึกไม่สะดวกสบาย

โดยทั่วไปแล้วถึงแม้ว่าความรู้ที่แท้จริงในเรื่องรูปร่างและการมีอยู่จริงรวมไปถึงขนาดของแอมพลิจูดและความถี่ ของลิมิตไซเคิลเป็นสิ่งที่ไม่ได้เป็นแบบแผนหรือเป็นกฎระเบียบแน่นอนตายตัวแต่วิธีการของเคสไครบิงฟังก์ชันสามารถแก้ปัญหานี้ได้และยังสามารถนำไปสู่การออกแบบตัวชดเชยเพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดลิมิตไซเคิลได้อีกด้วย

2.2.3 สมมติฐานพื้นฐาน

พิจารณาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นดังรูปที่ 2.3 จากพื้นฐานของวิธีเคสไครบิงฟังก์ชัน ระบบจะต้องรองรับสมมติฐานทั้งสี่ข้อดังต่อไปนี้

1. มีส่วนประกอบที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพียงส่วนเดียวเท่านั้น
2. ความไม่เป็นเชิงเส้นนั้นไม่ขึ้นกับเวลา
3. จากอินพุทรูปแบบไซน์ $e = A \sin(\omega t)$ พิจารณาเฉพาะส่วนประกอบที่เป็นความถี่เดียวกับความถี่ของสัญญาณ (Fundamental Component) นั่นคือส่วน $c_1(t)$ ของเอาต์พุต $c(t)$ เท่านั้น
4. ความไม่เป็นเชิงเส้นต้องเป็นฟังก์ชันที่

สมมติฐานข้อแรกหมายความว่า ถ้าในระบบมีส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นตั้งแต่สองส่วนขึ้นไป แต่ละส่วนจะต้องรวมเข้าด้วยกันให้กลายเป็นส่วนเดียว (เช่น สามารถทำได้โดยการนำแต่ละส่วนมาต่อขนานกัน) หรือพิจารณาเฉพาะส่วนที่สำคัญที่สุดเท่านั้น

สมมติฐานข้อที่สองหมายความว่า ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่เป็นอิสระ (Autonomous) หรือไม่ขึ้นกับเวลาเท่านั้นที่นำมาพิจารณาตัวอย่างเช่น สภาวะอิ่มตัวในตัวขยายต่างๆ (Saturation in Amplifiers), ระยะเวลา (Backlash) ในระบบเกียร์ แรงเสียดทานคูลอมบ์ (Coulomb Friction) ระหว่างผิวสัมผัส และฮิสเทอรีซิส (Hysteresis) ในวงจรรีเลย์ (Relay) เหตุผลสำหรับสมมติฐานข้อนี้คือการใช้หลักการของไนควิสต์ (Nyquist criterion) ซึ่งใช้ได้เฉพาะกับระบบที่ไม่ขึ้นกับเวลาเท่านั้น

สมมติฐานข้อที่สาม คือ สมมติฐานหลักของวิธีการเคสไครบิงฟังก์ชัน ซึ่งอธิบายถึงหลักการประมาณค่า เนื่องจากสัญญาณเอาต์พุตของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่มีฮาร์โมนิกอันดับสูงปนอยู่กับสัญญาณพื้นฐาน (Fundamental) ดังนั้นส่วนที่เป็นเชิงเส้นจึงมีหน้าที่ในการลดทอนฮาร์โมนิกอันดับสูงเหล่านี้และทำให้เอาต์พุตของระบบเป็นสัญญาณที่มีแต่สัญญาณเป็นพื้นฐาน (Fundamental Component) จากตัวอย่างที่ผ่านมาส่วนที่เป็นเชิงเส้นคือวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน ดังนั้นจะได้

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)| \quad \text{for } n = 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

ดังนั้นสมมติฐานข้อที่สามหมายถึงสมมติฐานการกรองสัญญาณ (Filtering Hypothesis)

สมมติฐานข้อที่สี่หมายถึงกราฟของความสัมพันธ์ $f(e)$ ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งสมมาตรที่จุดกำเนิด นั่นคือ ส่วนที่คงที่ใน การกระจายแบบฟูเรียร์ (Fourier expansion) ของสัญญาณเอาต์พุตจะถูกลดทอนลงไปเพื่อความง่ายในการพิจารณา (หมายเหตุ : ความไม่เป็นเชิงเส้นที่ได้อภิปรายไปก่อนหน้านี้ล้วนแต่รองรับสมมติฐานข้อนี้ทั้งสิ้น)

อย่างไรก็ตามสมมติฐานทั้งสองที่กล่าวมาเป็นเพียงพื้นฐานเท่านั้น แต่ความเป็นจริงระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะมีความซับซ้อนมากกว่า เช่นมีส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นหลายส่วนในระบบเดียว, ความไม่เป็นเชิงเส้นขึ้นกับเวลาและสัญญาณ ไซน์ในสมมติฐานข้อที่ 3 มีหลายฮาร์โมนิก เป็นต้น

2.2.4 ทฤษฎีบทพื้นฐาน

วิธีเคสไครบิงฟังก์ชันเป็นการนำเสนอส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งคล้ายกับวิธีผลตอบสนองเชิงความถี่ อันดับแรกพิจารณาสัญญาณอินพุตรูปแบบไซน์ที่เข้าไปสู่ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยกำหนดแอมพลิจูดเป็น A และความถี่เป็น ω จะได้ว่า $e(t) = A\sin(\omega t)$ ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.6 ดังนั้นจะได้สัญญาณเอาต์พุต $c(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ (แต่ไม่เป็นสัญญาณรูปแบบไซน์เพราะผ่านส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นมาแล้ว) และจาก $f[A\sin(\omega(t + 2\pi/\omega))] = f[A\sin(\omega t)]$ ทำให้สังเกตได้ว่าความไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าเดียวกับสมมติฐานข้อที่ 1 โดยเอาต์พุต $c(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันคาบสามารถอธิบายได้ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ดังนี้

$$c(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (2.6)$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ a_i และ b_i ของอนุกรมฟูเรียร์เป็นฟังก์ชันของ A และ ω โดย

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(t) d(\omega t) \quad (2.7ก)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.7ข)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.7ค)$$

จากสมมติฐานข้อที่ 4 ข้างต้นจะได้ $a_0 = 0$ และจากสมมติฐานข้อที่ 3 ทำการพิจารณาส่วนประกอบพื้นฐาน (Fundamental Component) $c_1(t)$ ได้ว่า

$$c(t) \approx c_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) = M \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.8)$$

ซึ่ง

$$M(A, \omega_0) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{and} \quad \phi(A, \omega_0) = \arctan(a_1/b_1)$$

สมการข้างบนบ่งบอกว่าส่วนประกอบที่ความถี่เป็นความถี่เดียวกับสัญญาณ (Fundamental Component) ที่เกิดจากสัญญาณอินพุตรูปแบบไซน์นั้นเป็นสัญญาณรูปแบบไซน์ที่มีความถี่เดียวกัน และสามารถนำเสนอในรูปแบบจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$c_1 = Me^{j(\omega_0 t + \phi)} = (b_1 + ja_1)e^{j\omega_0 t}$$

แนวความคิดของฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่คือ อัตราส่วนระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่นำเสนอในรูปแบบสัญญาณไซน์บนโดเมนความถี่ ซึ่งคล้ายกับเดสไครบิงฟังก์ชันที่นำเสนออัตราส่วนของจำนวนเชิงซ้อนรูปแบบไซน์ และเอาต์พุตรูปแบบไซน์ดังนี้



รูปที่ 2.6 แสดงส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น และเดสไครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น

จากรูปที่ 2.6 สามารถเห็นได้ว่าเดสไครบิงฟังก์ชัน เป็นการอธิบายระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยมีอินพุตเป็นสัญญาณรูปแบบไซน์และมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $D(A, \omega)$ อย่างไรก็ตามสำหรับเดสไครบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นขึ้นอยู่กับแอมพลิจูด A ของสัญญาณอินพุต

โดยทั่วไปแล้วเดสไครบิงฟังก์ชันนั้นขึ้นอยู่กับทั้งแอมพลิจูดและความถี่ของสัญญาณอินพุต แต่ในกรณีที่ระบบมีค่าความไม่เป็นเชิงเส้นเพียงค่าเดียว จะทำให้เดสไครบิงฟังก์ชันที่ออกมาเป็นค่าจริงและไม่ขึ้นอยู่กับความถี่ของสัญญาณอินพุต ส่วนจริงของเดสไครบิงฟังก์ชัน D มาจากสมการที่ 2.7x ส่วนการไม่ขึ้นกับความถี่นั้นมาจากสมการที่ 2.7ค

ถึงแม้ว่าสมมติให้ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นแบบคงที่ (Scalar Nonlinear Function) เพื่อสามารถหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชันได้ง่าย แต่การหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชันในระบบจริงนั้นมีความซับซ้อนมากกว่า และต้องอาศัยประสบการณ์ในการพิจารณา

2.2.5 การคำนวณหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชัน

ในการพิจารณาหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่าง ๆ นั้นมีหลายวิธีซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการ 3 วิธีการดังนี้ : การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Calculation, การพิจารณาจากการทดลอง (Experimental Determination) และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) ซึ่งแต่ละวิธีจะพิจารณาถึงความเหมาะสมและค่าใช้จ่ายในการดำเนินการด้วย ส่วนความแม่นยำของการหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชันนั้นไม่ใช่ประเด็นสำคัญเพราะวิธีการเดสไครบิงเป็นเพียงวิธีในการประมาณค่าเท่านั้น

การคำนวณเชิงวิเคราะห์

เมื่อคุณลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้น $c = f(e)$ (โดยที่ e คืออินพุตและ c คือเอาต์พุต) ของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นถูกอธิบายด้วยฟังก์ชัน และการอินทิเกรตในสมการที่ 2.7 สามารถหาค่าได้ ดังนั้นจากสมการที่ 2.7 การหาค่าเคสโครบิงฟังก์ชันด้วยวิธีนี้เป็นสิ่งที่เหมาะสม ฟังก์ชัน $f(e)$ ของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นอาจเป็นการนำเสนอในทางอุดมคติของความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างง่าย เช่น ภาวะอิ่มตัว (Saturation) และ จุดบอด Dead - Zone

การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

สำหรับความไม่เป็นเชิงเส้นต่างๆ ที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต - เอาต์พุต $c = f(e)$ ซึ่งนำเสนอในรูปแบบของกราฟ หรือตาราง การอินทิเกรตเชิงตัวเลขเป็นวิธีการที่เหมาะสมในการหาค่าเคสโครบิงฟังก์ชันซึ่งวิธีการนี้สามารถใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณได้ ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะออกมาในรูปแบบของกราฟเคสโครบิงฟังก์ชันและสามารถนำกราฟไปใช้ทำนายลิมิตไซเคิลได้

การหาค่าจากการทดลอง (Experimental Evaluation)

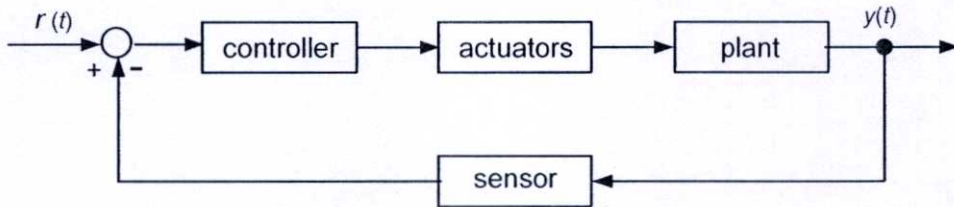
กระบวนการหาค่าจากการทดลอง (Experimental Method) นั้นเหมาะกับความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเชิงซ้อน (Complex) และมีการเปลี่ยนแปลงไปเรื่อยๆ ไม่คงที่ (Dynamic) เมื่อระบบถูกกระตุ้นด้วยอินพุตรูปแบบไซน์ที่รู้ค่าแอมพลิจูดและความถี่ ดังนั้นการพิจารณาค่าเคสโครบิงฟังก์ชันจากการทดลองจะอาศัยตัววิเคราะห์ฮาร์โมนิก (Harmonic Analyzer) ของเอาต์พุตที่มาจากส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น กระบวนการนี้จะคล้ายกับการพิจารณาจากการทดลอง (Experimental Determination) ของฟังก์ชันถ่ายโอนในระบบเชิงเส้น แต่ต่างกันที่แอมพลิจูดและของความถี่อินพุตสามารถปรับค่าได้ ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองเป็นเส้นกราฟ เคสโครบิงฟังก์ชัน $D(A, \omega)$ บนระนาบเชิงซ้อน

2.3 ตัวอย่างความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่างๆ

ในหัวข้อนี้อธิบายถึงความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่างๆ โดยพิจารณาบล็อกไดอะแกรมที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.7 ซึ่งประกอบไปด้วยสี่ส่วน ดังนี้ หนึ่งระบบ (Plant) ที่ควบคุม สองเซนเซอร์ที่ใช้ในการวัดค่าต่างๆ สามตัวดำเนินการ (Actuator) และสี่ตัวควบคุม (Controller) ซึ่งระบบในรูปที่ 2.7 เป็นการทดลองที่เกิดขึ้นโดยใช้คอมพิวเตอร์ ความไม่เป็นเชิงเส้นต่างๆ สามารถเกิดขึ้นได้กับทุกส่วนในระบบ ดังนั้นระบบนี้คือระบบควบคุมแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Control System)

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบต่อเนื่องและแบบไม่ต่อเนื่อง

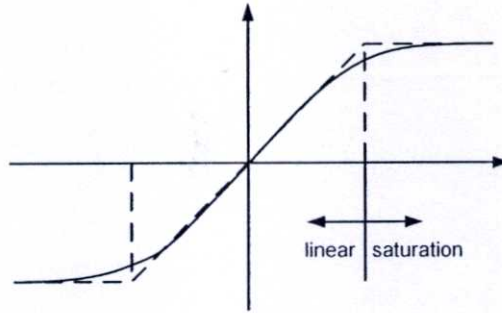
ความไม่เป็นเชิงเส้นนั้นสามารถแบ่งได้เป็นสองประเภท คือ ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบต่อเนื่อง (Continuous Nonlinearities) และความไม่เป็นเชิงเส้นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Nonlinearities) เนื่องจากฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) ไม่สามารถประมาณค่าความไม่เป็นเชิงเส้นแบบไม่ต่อเนื่องได้ ดังนั้นความไม่เป็นเชิงเส้นแบบไม่ต่อเนื่องจะถูกเรียกว่า ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบหยาบ (Hard Nonlinearities) ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบหยาบมักจะถูกพบในระบบควบคุมต่างๆ ทั้งในระบบที่ทำงานในช่วงแคบ (Small Range Operation) และระบบที่ทำงานในช่วงกว้าง (Large Range Operation) โดยเฉพาะระบบที่ทำงานในช่วงแคบระบบจะถูกจัดให้เป็นระบบเชิงเส้นหรือเป็นระบบไม่เป็นเชิงเส้นนั้นขึ้นอยู่กับขนาด (Magnitude) ของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบหยาบและขอบเขตของผลกระทบที่มีต่อประสิทธิภาพของระบบ



รูปที่ 2.7 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุม

ภาวะอิ่มตัว (Saturation)

ภาวะอิ่มตัวเป็นสิ่งที่พบได้มากที่สุดสิ่งหนึ่งในวิศวกรรมระบบควบคุม ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว (Saturation Nonlinearity) มักจะเกิดจากหลายสาเหตุเช่น ข้อจำกัดด้านขนาดของอุปกรณ์, คุณสมบัติของวัสดุและกำลังไฟฟ้าที่ใช้ได้ ภาวะอิ่มตัวที่เกิดขึ้นมักเกี่ยวข้องกับตัวขยายและตัวดำเนินการ (Actuator) ซึ่งเป็นส่วนประกอบสำคัญของระบบควบคุม วงจรขยายของทรานซิสเตอร์ และวงจรขยายทางแม่เหล็ก (Magnetic Amplifier) เอาท์พุทที่แปรตามอินพุทอย่างเป็นเชิงเส้นจะเกิดขึ้นในช่วงที่แอมพลิจูดของอินพุทมีค่าน้อยๆ เมื่อแอมพลิจูดของอินพุทมีขนาดเพิ่มขึ้นจนเกินช่วงที่เป็นเชิงเส้นจะทำให้เอาท์พุทเปลี่ยนแปลงน้อยมากและเข้าสู่ค่าสูงสุดค่าหนึ่ง ตัวอย่างกราฟที่แสดงลักษณะของภาวะอิ่มตัวแสดงไว้ในรูปที่ 2.8 โดยเส้นทึบคือภาวะอิ่มตัวที่เกิดขึ้นจริง และเส้นประคือภาวะอิ่มตัวทางอุดมคติ



รูปที่ 2.8 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว

ตัวดำเนินการ (Actuator) ส่วนใหญ่เป็นตัวแสดงลักษณะภาวะอิ่มตัว (Saturation Characteristic) ยกตัวอย่างเช่น แรงบิดของเซอร์โวมอเตอร์ (Servo Motor) แบบสองเฟสไม่สามารถเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนไม่มีที่สิ้นสุดแต่จะเพิ่มขึ้นไปจนถึงค่าใดค่าหนึ่ง อันเป็นผลมาจากสมบัติของวัสดุที่นำมาผลิตเป็นเซอร์โวมอเตอร์ และไฮดรอลิกเซอร์โวมอเตอร์ (Hydraulic Servo Motor) ที่ควบคุมด้วยวาล์วจะเกิดภาวะอิ่มตัวเมื่ออัตราการไหลถึงจุดสูงสุด

ภาวะอิ่มตัวยังสามารถมีผลกระทบที่ซับซ้อนต่อประสิทธิภาพของระบบควบคุม กล่าวคือภาวะอิ่มตัวส่งผลให้เกนของส่วนประกอบ (เช่น วงจรขยาย) มีค่าลดลงแม้ว่าสัญญาณอินพุตถูกทำให้มีค่ามากขึ้นก็ตาม จากผลลัพธ์ที่ได้ถ้าระบบไม่เสถียรในช่วงที่เป็นเชิงเส้นก็อาจทำให้ระบบเกิดภาวะการสั่นคงที่ด้วยตัวเอง (Self Sustained Oscillation) หรืออีกนัยหนึ่งถ้าระบบที่ความเสถียรภาวะอิ่มตัวจะทำให้ผลตอบสนองของระบบช้าลงเพราะเกนของระบบมีค่าลดลง

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด (On - Off Nonlinearity)

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด หรือความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด (Relay Nonlinearity) เกิดเมื่อช่วงที่เป็นเชิงเส้นน้อยลงเข้าใกล้ศูนย์ และเส้นกราฟในช่วงที่เป็นเชิงเส้นมีความชันในแนวตั้งมากขึ้น ตัวอย่างความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด คือ เอาท์พุท จากแรงขับของแก๊สที่ใช้ในการควบคุมยานอวกาศและวงจรีเลเย์ทางอิเล็กทรอนิกส์ (Electrical Relay) เป็นต้น อย่างไรก็ตามความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด มีผลกระทบต่อระบบที่คล้ายกับความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว

จุดบอด (Dead - Zone)

ในเครื่องมือทางกายภาพหลายๆ อย่าง เอาท์พุทที่ออกมามีค่าเป็นศูนย์จนกระทั่งขนาดของอินพุทมีค่าเกินค่าคงที่ค่าหนึ่งจึงจะทำให้เอาท์พุทไม่เป็นศูนย์ ตัวอย่างเช่น พิจารณามอเตอร์กระแสตรงด้วยการวิเคราะห์แบบระบบเชิงเส้น สมมติว่าจ่ายแรงดันที่มีค่าใดๆ เข้าสู่ขดลวดอาร์เมเจอร์ (Armature Winding) จะทำให้เกิดกระแสอาร์เมเจอร์คงที่เหนี่ยวนำให้ขดลวดหมุน แต่ในสถานการณ์จริงเนื่องจากมีแรงเสียดทานเกิดขึ้นที่แกนของมอเตอร์ ดังนั้นมอเตอร์จะหมุนก็

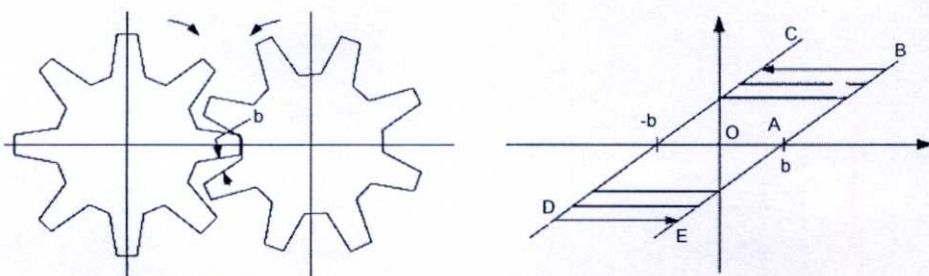
ต่อเมื่อแรงดันที่ป้อนเข้ามอเตอร์มากพอที่จะทำให้เกิดแรงหมุนและเอาชนะแรงเสียดทานที่แกนของมอเตอร์ได้ สิ่งที่เกิดขึ้นกับสัญญาณแรงดันขนาดเล็กนี้เรียกว่า จุดบอด ปรากฏการณ์จุดบอด (Dead-Zone Phenomena) ยังเกิดกับตัวควบคุมวาล์วแบบใช้ลม (Valve Controller Pneumatic Actuator) และอุปกรณ์ไฮดรอลิกต่างๆ

โดยทั่วไปความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอดอาจเกิดขึ้นได้กับอุปกรณ์หลายประเภทในระบบควบคุม เช่น เซนเซอร์, วงจรขยาย และตัวดำเนินการ (Actuator) จุดบอดสามารถทำให้เกิดผลกระทบต่างๆ ในระบบควบคุมได้ ผลกระทบที่พบบ่อยที่สุดอย่างหนึ่งคือความแม่นยำของเอาต์พุตลดลง ซึ่งจะนำไปสู่ภาวะที่ลิมิตไซเคิลหรือระบบไม่เสถียร ในบางกรณีการลดความแม่นยำของเอาต์พุตอาจเป็นการทำให้ระบบมีเสถียรภาพหรือหยุดการสั่น (Self - Oscillation) ของระบบได้ เช่น ถ้าจุดบอด (Dead-zone) ร่วมกับรีเลย์ทางอุดมคติ (Ideal Relay) จะสามารถหลีกเลี่ยงการสั่นที่เกิดขึ้นตรงผิวสัมผัสของรีเลย์นั้นได้เป็นการกำจัดประกายไฟ (Spark) และลดการสึกกร่อนที่จุดสัมผัสได้ด้วย

การเกิดระยะคลอนและปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิส

(Backlash and Hysteretic)

การเกิดระยะคลอน (Backlash) คือ ความไม่เป็นเชิงเส้นที่พบในส่วนประกอบควบคุม (Control Component) โดยส่วนใหญ่เป็นอุปกรณ์ที่เกี่ยวข้องกับเครื่องชนิดกลไกต่างๆ และการเกิดระยะคลอนมักจะเกิดขึ้นจากช่องว่างเล็กๆ ในระบบกลไกต่างๆ เช่น ในระบบเกียร์ จะมีช่องว่างเล็กๆ ระหว่างฟันเฟือง (ดังแสดงในรูปที่ 2.9) เนื่องจากความผิดพลาดที่หลีกเลี่ยงไม่ได้จากการผลิตและการประกอบ พิจารณาจากรูปที่ 2.9 เมื่อเฟืองตัวหนึ่งหมุนไปในองศาที่น้อยกว่าช่องว่าง b เฟืองอีกตัวหนึ่งจะยังไม่หมุนตามซึ่งเป็นลักษณะเดียวกับจุดบอด (ส่วนเส้นตรง OA ในรูปที่ 2.9) เมื่อฟันเฟืองสัมผัสกันและหมุนไปข้างหน้า จะทำให้ระบบเกียร์ทำงานอย่างเป็นเชิงเส้น (ส่วนเส้นตรง AB) ในขณะเดียวกันเมื่อเฟืองหมุนไปในทิศทางตรงข้ามเป็นระยะ $2b$ ระบบเกียร์จะยังไม่ทำงาน (ส่วนเส้นตรง BC ในรูปที่ 2.9) แต่หลังจากฟันเฟืองสัมผัสกันอีกครั้ง ระบบเกียร์ก็จะหมุนไปข้างหลังอย่างเป็นเชิงเส้น (ส่วนเส้นตรง CD) ดังนั้นถ้าระบบเกียร์ทำงานเป็นจังหวะดังกล่าวข้างต้น จะได้รูปแบบการทำงานเป็นไปตามทางโคจร EBCD ในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากระยะคลอน

รูปแบบที่เห็นได้ชัดของการเกิดระยะคลอน คือที่อินพุตค่าหนึ่งอาจให้เอาต์พุตออกมาสองค่า ส่วนจะได้ค่าใดออกมาขึ้นขึ้นอยู่กับความเป็นมาของอินพุต ส่วนความไม่เป็นเชิงเส้นที่มีหลายค่า (Multi-Valued Nonlinearity) ที่คล้ายกับการเกิดระยะคลอน คือ ปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิสซึ่งพบบ่อยในอุปกรณ์ประเภทรีเลย์ การเกิดระยะคลอนและปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิส มักจะนำไปสู่การสะสมพลังงานในระบบ การสะสมพลังงานเป็นสาเหตุของความไม่เสถียรและเกิดการสั่น (Self-Sustained Oscillation) ขึ้นในระบบ

2.4 เดสไครบิงฟังก์ชัน ของความที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั่วไป

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคำนวณเดสไครบิงฟังก์ชันสำหรับความที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั่วไปต่างๆ อีกทั้งยังพูดถึงคุณสมบัติต่างๆ ของความที่ไม่เป็นเชิงเส้นบน โดเมนความถี่และพูดถึงตัวอย่างการคำนวณเดสไครบิงฟังก์ชันสำหรับส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น

2.4.1 ภาวะอิ่มตัว (Saturation)

ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต - เอาต์พุตสำหรับความที่ไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัว (Saturation Nonlinearity) ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.10 โดยที่ a คือ ช่วงของความไม่เป็นเชิงเส้น และ k คือความชันของเส้นกราฟ จากความที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่เป็นค่าเดียว (Single Valued) จะทำให้ได้เดสไครบิงฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real Function) ที่ขึ้นอยู่กับการแอมพลิจูดของอินพุต

พิจารณาอินพุต $e(t) = A\sin(\omega t)$ ถ้า $A \leq a$ ดังนั้นอินพุตจะยังคงอยู่ในช่วงที่เป็นเชิงเส้น และจะได้เอาต์พุตเป็น $y(t) = kA\sin(\omega t)$ เพราะฉะนั้นเดสไครบิงฟังก์ชันเป็นค่าคงที่ k และสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันได้ดังต่อไปนี้

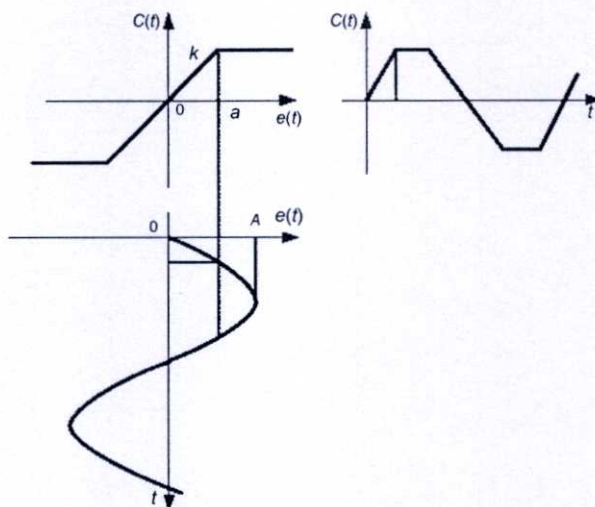
$$c(t) = \begin{cases} kA\sin(\omega t) & 0 \leq \omega t \leq \omega t_1 \\ ka & \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}$$

โดยที่ $\omega t_1 = \sin^{-1}(a/A)$ และเนื่องจาก $c(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นจะทำให้ $a_1 = 0$ และกราฟมีลักษณะสมมาตรทั้งสี่ควอดอร์ทำได้

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} c(t)\sin(\omega t)d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\omega t_1} kA\sin^2(\omega t)d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} kasin(\omega t)d(\omega t) \\ &= \frac{2kA}{\pi} \left[\omega t_1 + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

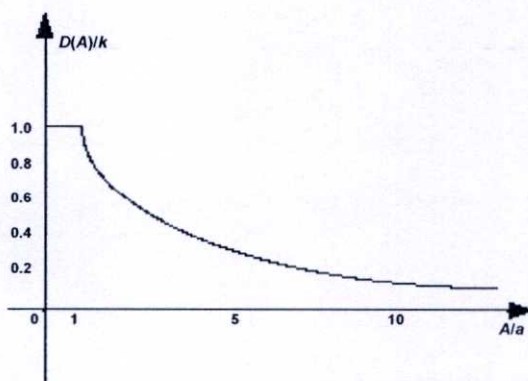
ดังนั้นจะได้เดสไครมิงฟังก์ชันเป็น

$$D(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \quad (2.11)$$



รูปที่ 2.10 ความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัวและความสัมพันธ์ระหว่าง อินพุต-เอาต์พุตที่เกี่ยวข้อง

รูปกราฟของเดสไครมิงฟังก์ชัน $D(A)/k$ ได้ถูกเขียนและแสดงไว้ในรูปที่ 2.11 จากกราฟสามารถบอกได้ว่าภาวะอิ่มตัว (Saturation) สามารถถูกอธิบายได้ด้วยเกณฑ์ที่ขึ้นกับแอมพลิจูด โดยถ้าแอมพลิจูด A ของอินพุตมีค่าน้อยกว่าช่วงที่เป็นเชิงเส้นจะทำให้ $D(A)/k$ มีค่าคงที่ k และ $D(A)/k$ จะมีค่าลดลงเมื่อ A/a มีค่ามากขึ้นความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัวไม่ทำให้เกิดการเลื่อนเฟสเพราะว่า $D(A)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง



รูปที่ 2.11 กราฟเดสไครมิงฟังก์ชันของภาวะอิ่มตัวของความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัว

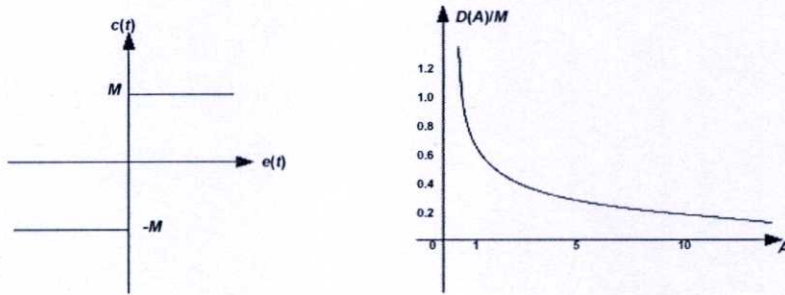
ในกรณีเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นประเภทรีเลย์ (เปิด - ปิด) ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.12 กรณีนี้เกี่ยวข้องกับการลดลงเข้าใกล้ศูนย์ของช่วงที่เป็นเชิงเส้นของฟังก์ชันนั้นคือ $a \rightarrow 0$ หรือ $k \rightarrow \infty$ แต่ $ka = M$ ดังนั้น b_1 จะได้จากลิมิตของสมการที่ 2.10 ดังนี้

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} M \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} M$$

ดังนั้นเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์ คือ

$$D(A) = \frac{4M}{\pi A} \quad (2.12)$$

รูปที่ 2.12 เป็นกราฟเดสไครบิงฟังก์ชัน (D/M) ซึ่งเป็นฟังก์ชันแอมพลิจูดของอินพุต ส่วนของเส้นตรงแนวราบที่เห็นในรูปที่ 2.11 หายไปเพราะความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์อย่างสมบูรณ์ อย่างไรก็ตามกราฟเดสไครบิงฟังก์ชันยังลดลงตามอินพุตที่เพิ่มขึ้นเหมือนเดิม



รูปที่ 2.12 ความไม่เป็นเชิงเส้นและกราฟเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์

2.4.2 จุดบอด (Dead - Zone)

ลักษณะของจุดบอดแสดงไว้ในรูปที่ 2.13 โดยความกว้างของจุดบอดมีค่า 2δ และความชัน k ผลตอบสนองที่ได้จากอินพุตรูปแบบไซน์ $e(t) = A \sin(\omega t)$ ของจุดบอด โดยที่ $A \geq \delta$ และจากคุณลักษณะของฟังก์ชันคือ $a = 0$ ผลตอบสนองที่ได้เป็นลักษณะสมมาตรบนควอดเรอร์ทั้งสี่ เช่น เมื่อ $0 \leq \omega t \leq \pi/2$ จะได้

$$c(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega t \leq \omega t_1 \\ k(A \sin(\omega t) - \delta) & \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases} \quad (2.13)$$

รูปที่ 2.14 อินพุตและเอาต์พุต ของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอด

2.4.3 การเกิดระยะคลอน (Backlash)

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบการเกิดระยะคลอน นำเสนอโดยรูปที่ 2.15 โดยมีความชัน k และความกว้าง 2δ เมื่ออินพุตเป็น $e(t) = A\sin(\omega t)$ โดยที่ $A \geq \delta$ ได้เอาต์พุต $c(t)$ ของความไม่เป็นเชิงเส้นดังกล่าวแสดงในรูป ในหนึ่งรอบฟังก์ชัน $c(t)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} c(t) &= (A - \delta)k & \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \pi - \omega t_1 \\ c(t) &= (A\sin(\omega t) + \delta)k & \pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \frac{3\pi}{2} \\ c(t) &= -(A - \delta)k & \frac{3\pi}{2} \leq \omega t \leq 2\pi - \omega t_1 \\ c(t) &= (A\sin(\omega t) - \delta)k & 2\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

ฟังก์ชัน $c(t)$ ในหัวข้อนี้ไม่เหมือนความไม่เป็นเชิงเส้นก่อนหน้านี้อย่างตรงที่ $c(t)$ ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ดังนั้น a_1 และ b_1 ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่ จากสมการ 2.7ข และ 2.7ค จะได้

$$a_1 = \frac{4k\delta}{\pi} \left(\frac{\delta}{A} - 1 \right) \quad (2.16)$$

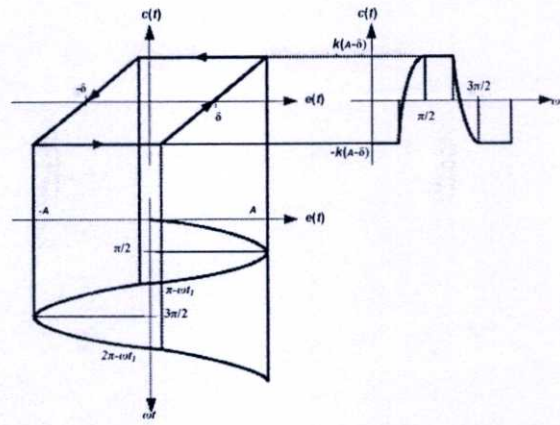
$$b_1 = \frac{Ak}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{2\delta}{A} - 1 \right) - \left(\frac{2\delta}{A} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2\delta}{A} - 1 \right)^2} \right] \quad (2.17)$$

ดังนั้นแอมพลิจูดเฟสของฟังก์ชันของการเกิดระยะคลอน (backlash) คือ

$$|D(A)| = \frac{1}{A} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.18)$$

$$\angle D(A) = \tan^{-1}(a_1 / b_1) \quad (2.19)$$

หมายเหตุ : การเลื่อนเฟส (ไม่เกิน 90°) ทำให้สัญญาณอินพุตใหญ่ขึ้น และภาวะตามเฟส (Phase Lag) อาจก่อปัญหาให้กับเสถียรภาพของระบบควบคุมแบบป้อนกลับได้



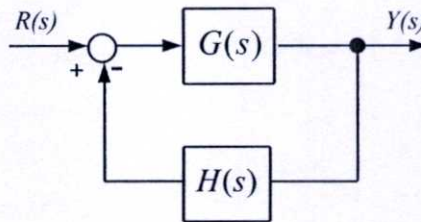
รูปที่ 2.15 อินพุตและรูปคลื่นเอาต์พุตของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบการเกิดระยะคลอน

2.5 บทวิเคราะห์เดสไคริบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำเดสไคริบิงฟังก์ชัน ไปใช้งาน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การนำเสนอเดสไคริบิงฟังก์ชัน ไปทำนายการเกิดลิมิต ไซเคิล และพิจารณาเสถียรภาพของระบบอีกทั้งยังพูดถึงหลักการของไนควิสต์ (Nyquist criterion) ที่ใช้ในระบบควบคุมแบบคลาสสิก (Classical Control)

2.5.1 หลักการของไนควิสต์ (Nyquist Criterion) และการนำไปใช้งาน

จากกระบวนการเดสไคริบิงฟังก์ชันซึ่งเป็นหลักการทั่วไปของการวิเคราะห์ไนควิสต์ ทำให้สามารถใช้ หลักการไนควิสต์มาอธิบายหลักการเดสไคริบิงฟังก์ชันได้เป็นอย่างดี



รูปที่ 2.16 ระบบเชิงเส้นวงปิด

พิจารณาระบบในรูปที่ 2.16 ได้สมการคุณลักษณะของระบบเป็น

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = 1 + G(s)H(s) = 0$$

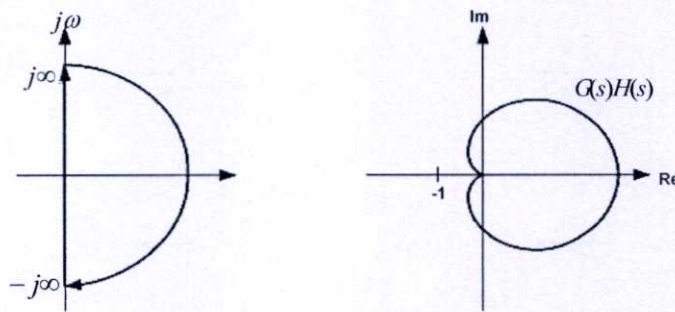
หมายเหตุ : $\frac{Y(s)}{R(s)}$ มักถูกเรียกว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิด (Loop Transfer Function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันอัตราส่วนของตัวแปร s โดยมีซีโร (Zero) เป็นโพลของระบบวงปิด และมีโพล (Pole) เป็นโพลของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบวงเปิด $G(s)H(s)$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการคุณลักษณะใหม่ได้เป็น

$$G(s)H(s) = -1$$

จากสมการข้างต้น หลักการของไนควิสต์ สามารถแจกแจงได้โดยทฤษฎีของ เคาซี (Cauchy) ด้วยการวิเคราะห์แบบเชิงซ้อน ซึ่งมีกระบวนการเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. เขียนกราฟ ของไนควิสต์ ที่ล้อมรอบฝั่งขวา ลงบนระนาบ s
2. ทำการแปลง (Map) กราฟให้ไปอยู่บนระนาบเชิงซ้อนอื่น โดยผ่านทางฟังก์ชัน $G(s)H(s)$
3. พิจารณา N ซึ่งเป็นจำนวนรอบตามเข็มนาฬิกาของกราฟ $G(s)H(s)$ รอบจุด $(-1,0)$
4. กำหนดค่า Z ซึ่งเป็นค่าซีโร ของฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิด $\delta(s)$ ด้านขวาของระนาบ โดย $Z = N + P$ เมื่อ P คือโพลที่ไม่เสถียร $\delta(s)$

ดังนั้น Z คือโพลที่ไม่เสถียรของระบบควบคุมวงปิดตัวอย่างรูปกราฟไนควิสต์ บนระนาบ s และกราฟของ $G(s)H(s)$ บนระนาบ GH แสดงไว้ในรูปที่ 2.17 ซึ่ง $G(s)H(s) = 6/[(s+1)(s+2)]$



รูปที่ 2.17 กราฟของไนควิสต์

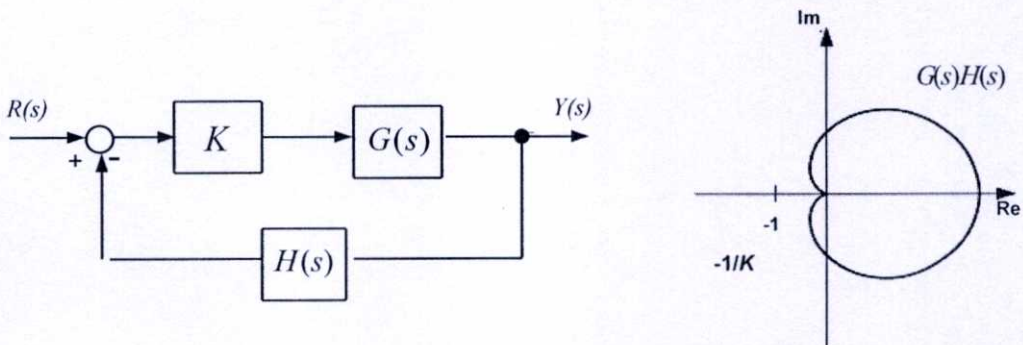
ในกรณีที่มีค่าคงที่ K (หรืออาจเป็นจำนวนเชิงซ้อน) รวมอยู่ในส่วนไปข้างหน้า (Forward Path) ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.18 ก็ยังสามารถใช้หลักการของไนควิสต์ ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของลิมิตไซเคิลโดยใช้กระบวนการเดสไครบิงฟังก์ชันได้ ดังนั้นจากระบบในกรณีข้างต้นจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดเป็น

$$\delta(s) = 1 + KG(s)H(s)$$

และมีสมการคุณลักษณะเป็น

$$G(s)H(s) = -1/K$$

ส่วนกระบวนการพิจารณา หลักการของไนควิสต์ นั้นคล้ายกันต่างกันเพียงเรื่องการคำนวณค่า Z กล่าวคือ ค่า Z ในกรณีนี้เป็นจำนวนรอบตามเข็มนาฬิกาของกราฟ $G(s)H(s)$ รอบจุด $-1/k$ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 หลักการของไนควิสต์ของระบบที่มีค่าคงที่

2.5.2 การมีอยู่จริงของลิมิตไซเคิล

สมมติว่าระบบมีการสั่น (Self – Sustained Oscillation) ด้วย แอมพลิจูด A และความถี่ ω ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.19 ดังนั้นจะได้สมการต่างๆ ของระบบเป็น

$$e = -y$$

$$c = D(a, \omega)e$$

$$y = G(j\omega)c$$

โดยที่ $y = G(j\omega)D(A, \omega)(-y)$ ถ้า $y \neq 0$ จะได้

$$G(j\omega)D(a, \omega) + 1 = 0 \quad (2.20)$$

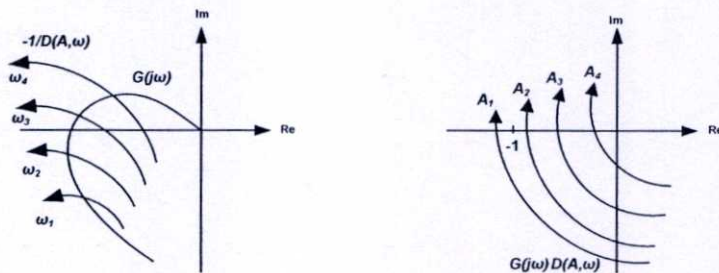
และสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$G(j\omega) = -\frac{1}{D(A, \omega)} \quad (2.21)$$

ถ้ากราฟทั้งสองเส้นตัดกันแสดงว่าเกิดลิมิตไซเคิลขึ้นในระบบ ดังนั้นค่าแอมพลิจูด A และความถี่ ω ที่จุดตัดของกราฟเป็นคำตอบของสมการ 2.22 ถ้ากราฟตัดกัน n จุดแสดงว่ามี n ลิมิตไซเคิลเกิดขึ้นในระบบ ดังนั้นจากรูปที่ 2.20 กราฟทั้งสองเส้นตัดกันที่จุด k เพียงจุดเดียว นั่นแสดงว่าระบบเกิดลิมิตไซเคิลเดียว โดยลิมิตไซเคิลที่ได้มีแอมพลิจูดเป็น A_k ซึ่งก็คือแอมพลิจูดที่จุดตัดของกราฟ $-1/D(A)$ และมีความถี่เป็น ω_k ซึ่งก็คือความถี่ที่จุดตัดของกราฟ $G(j\omega)$ ด้วย เช่นเดียวกัน สำหรับระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นค่าเดียว (Single - Valued Nonlinearity) เกลียวไครบิงฟังก์ชัน D ของระบบจะเป็นค่าจริง และเมื่อนำไปเขียนกราฟก็จะได้กราฟที่อยู่บนแกนจริงเท่านั้น กระบวนการข้างต้นดังกล่าวเป็นเพียงการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลเท่านั้น ส่วนความแม่นยำและความสมบูรณ์แบบของการทำนายอาจใช้การจำลองทางคอมพิวเตอร์มาช่วยได้

เกลียวไครบิงฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับความถี่

โดยทั่วไปเกลียวไครบิงฟังก์ชันจะขึ้นอยู่กับแอมพลิจูดและความถี่ของสัญญาณอินพุต ($D = D(A, \omega)$) ส่วนขวามือของสมการ 2.21 ($-1/D(A, \omega)$) ที่เกี่ยวข้องกับกราฟบนระนาบเชิงซ้อน โดย ω คงที่ในกราฟแต่ละเส้นและเส้นกราฟทั้งหมดวิ่งตาม A ดังแสดงไว้ทางด้านซ้ายมือของรูปที่ 2.21 และจะเห็นได้ว่าจุดตัดระหว่าง $G(j\omega)$ กับ $-1/D(A, \omega)$ มีไม่จำกัด แต่มีค่าความถี่ (ω) ที่เหมาะสมเพียงไม่กี่ค่าเท่านั้นที่บ่งบอกการเกิดลิมิตไซเคิลได้

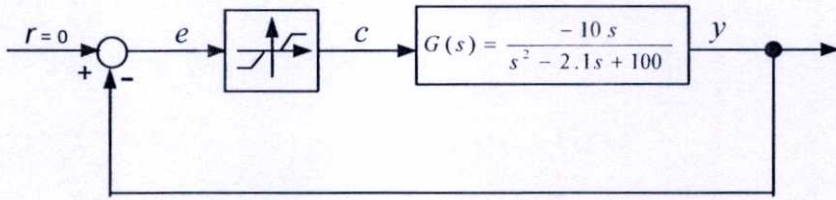


รูปที่ 2.21 การเกิดลิมิตไซเคิลสำหรับเกลียวไครบิงฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับความถี่

เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากในการหาค่าความถี่ที่เหมาะสมตรงจุดตัด พิจารณาคำตอบของสมการ 2.21 ซึ่งสามารถเขียนกราฟ $G(j\omega)D(A, \omega)$ โดยคงค่าแอมพลิจูด A ในกราฟแต่ละเส้นและแปรค่าความถี่จาก 0 ถึง ∞ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.21 ทางด้านขวามือ จากรูปจะเห็นได้ว่ากราฟวิ่งผ่านจุด $(-1, 0)$ บนระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแสดงว่าเกิดลิมิตไซเคิลโดยพิจารณาค่าแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลได้ที่จุด $(-1, 0)$ ซึ่งเทคนิคการเขียนกราฟทางด้านขวามือของรูปที่ 2.21 สามารถทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลได้ดีกว่า เทคนิคการเขียนกราฟในด้านซ้ายมือของรูปที่ 2.21 แต่ต้องอาศัยการคำนวณหา $G(j\omega)$ หลายครั้งซึ่งสามารถทำได้ง่ายในคอมพิวเตอร์ ตัวอย่างที่จะแสดงดังต่อไปนี้เป็นการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลสำหรับระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างรุนแรง (Hard Nonlinearity)

ตัวอย่างที่ 2.3

พิจารณาระบบในรูปที่ 2.22 ซึ่งเป็นระบบของเครื่องกำเนิดสัญญาณแบบอิเล็กทรอนิกส์ที่ใช้ในห้องทดลอง



รูปที่ 2.22 บล็อกไดอะแกรมของเครื่องกำเนิดสัญญาณ

จากบล็อกไดอะแกรมสามารถหาค่าเกินโดยกำหนด $\omega = 10$ เรเดียน/วินาที ได้ดังนี้

$$G(j10) = \frac{-100j}{-100 + 21j + 100} = -4.76$$

และสามารถนำ $G(j10)$ ไปเขียนกราฟดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.23 โดยกราฟของ $G(j10)$ ตัดแกนจริงที่จุด $(-4.76, 0)$ ส่วนเดสไครบิงฟังก์ชันของส่วนอิมิตัว (Saturation Element) เป็นไปตามสมการที่ 2.11 ดังนี้

$$D(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right]$$

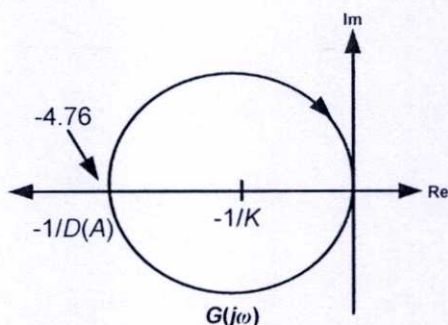
ซึ่งกราฟของ $-1/D(A)$ มีลักษณะเป็นเส้นตรงบนแกนจริงฝั่งลบ โดยมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $(-1/k, 0)$ เพราะ $D(A) < k, \forall A > 0$, ดังนั้นกราฟของ $-1/D(A)$ จะตัดกับกราฟของ $G(j\omega)$ ก็ต่อเมื่อ $1/k < 4.76$ นั่นคือ $k > 0.21$ ดังนั้นกำหนด $k = 0.25$ และหาแอมพลิจูดของลิมิตไซเคิลได้จากจุดตัดดังนี้

$$-\frac{1}{D(A)} = G(j10) = -4.76$$

จากกราฟในรูปที่ 2.11 จะได้ว่า $D(A)/k$ เท่ากับ 0.84 และได้ว่า A ประมาณ 1.36 เมื่อกำหนด $a = 1$ ดังนั้น การวิเคราะห์ระบบด้วยเดสไครบิงฟังก์ชันได้ทำนายให้ระบบมีแอมพลิจูดเป็น 1.36 และมีความถี่เป็น 10 นั่นคือ $e(t) = 1.36 \sin(10t)$

อีกอย่างหนึ่งที่น่าสนใจคือการหาว่าระบบเกิดลิมิตไซเคิลได้อย่างไร สมมติว่าให้ระบบเริ่มทำงานที่สถานะเริ่มต้นน้อยๆ (Small Initial State) นั่นคือ สัญญาณอยู่ในระดับต่ำกว่าระดับอิ่มตัว (Saturation Level) ดังนั้นจะได้สมการวงปิดของระบบเป็น

$$\ddot{y} + (2.1 - 10k)\dot{y} + 100y = 0$$



รูปที่ 2.23 กราฟเดสไครบิงฟังก์ชัน

ถ้า $k > 0.21$ จะทำให้ระบบเป็นแบบการหน่วงเชิงลบ (Negative Damping) นั่นคือ การทำงานในช่วงสัญญาณขนาดเล็กจะไม่เสถียรและส่งผลให้สัญญาณที่เกิดขึ้นลู่ออก (Diverge) อย่างไรก็ตามสัญญาณไม่สามารถลู่ออกได้ตลอดไปเนื่องมาจากการอิ่มตัวของระบบ สัญญาณ $c(t)$ สามารถอยู่ในระดับอิ่มตัวได้หรือไม่ คำตอบคือไม่เพราะว่าเอาท์พุทของส่วนที่เป็นเชิงเส้นจะค่อยๆ ลดลงจนมีเป็นศูนย์ จะเห็นได้จากทฤษฎีค่าสุดท้าย (Final - Value Theorem) หรือจากการสังเกตค่าของตัวดิฟเฟอเรนเชียลเตอร์ (Differentiator) “s” จากจำนวนที่เป็นเศษในตัวเลขเศษส่วน (Numerator) ของ $G(s)$ ดังนั้นสัญญาณของระบบจะไม่เป็นสัญญาณที่มีค่าน้อย (Small Value) เนื่องจากค่า $c(t)$ ลดลงเข้าสู่ศูนย์ ด้วยเหตุนี้ระบบจึงเกิดการสั่นและเกิดลิมิตไซเคิล การวิเคราะห์ระบบด้วยเดสไครบิงฟังก์ชัน (Describing Function Analysis) จึงเป็นสิ่งที่สามารถยืนยันการเกิดวัฏจักรลิมิตไซเคิล (Limit Cycle) ได้

2.5.3 เสถียรภาพของลิมิตไซเคิล

พิจารณากราฟผลตอบสนองเชิงความถี่ และส่วนกลับของเดสไครบิงฟังก์ชัน $(-1/D(A, \omega))$ ในรูปที่ 2.24 จากกราฟจะพบจุดตัดสองจุดดังนั้นสามารถทำนายได้ว่าเกิดลิมิตไซเคิล 2 จุด และค่า A จากจุด P_1 มีค่าน้อยกว่า ค่า A จากจุด P_2 เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาสมมติให้ฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงเส้น $G(j\omega)$ ไม่มีโพลที่ไม่เสถียร

2.5.4 ความน่าเชื่อถือของการวิเคราะห์ด้วยเดสไครบิงฟังก์ชัน

จากหลักฐานที่ได้จากประสบการณ์ หรือการทดลองมากกว่าสามทศวรรษและเหตุผลข้อเท็จจริงทางทฤษฎีชั้นล่าสุดบ่งบอกว่าวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน (Describing Function Method) สามารถแก้ปัญหาการควบคุมเชิงปฏิบัติการ (Practical Control) ที่เกี่ยวกับลิมิตไซเคิลได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามจากเทคนิคที่เป็นเพียงการประมาณค่าทำให้บางครั้งการวิเคราะห์ระบบไม่มีความแม่นยำ ซึ่งอาจเกิดจากสาเหตุสามประการดังนี้

1. ค่าแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลที่ถูกทำนายไว้ไม่มีความแม่นยำ
2. ลิมิตไซเคิลทำนายไว้ไม่ได้เกิดขึ้นจริง
3. ลิมิตไซเคิลที่ไม่ได้ถูกทำนาย

จากข้อที่ 1 ซึ่งเป็นความไม่แม่นยำที่พบบ่อยที่สุด ขนาดแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลที่ได้จากการทำนายมักจะเบี่ยงเบนไปจากค่าจริงเสมอซึ่งค่าที่ได้จากการทำนายจะใกล้เคียงกับค่าจริงแค่ไหนนั้นขึ้นอยู่กับความสอดคล้องกันระหว่างระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับสมมติฐานของเดสไครบิงฟังก์ชัน ในการสังเกตค่าความแม่นยำของลิมิตไซเคิลที่ได้จากการทำงานต้องอาศัยการจำลองของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อให้ได้มาซึ่งค่าลิมิตไซเคิลที่มีความแม่นยำถูกต้องมากที่สุด

ส่วนภาวะความไม่แม่นยำที่เกิดขึ้นในข้อ 2 และข้อ 3 แม้จะเกิดขึ้นไม่บ่อยนักแต่มีผลกระทบโดยตรงต่อระบบ โดยส่วนใหญ่แล้วสิ่งที่เกิดขึ้นจะถูกตรวจพบโดยการทดสอบผลตอบสนองเชิงความถี่ของส่วนที่เป็นเชิงเส้น (Linear Element) และทดสอบตำแหน่งที่เกี่ยวข้อง (Relative Position) ของกราฟ G และกราฟ $-1/D(A)$

การฝ่าฝืนของสมมติฐานการกรองสัญญาณ

การนำไปใช้ได้ (Validity) ของวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชันจะอาศัยสมมติฐานการกรองสัญญาณซึ่งแสดงไว้ในสมการที่ 2.5 ซึ่งในบางระบบส่วนที่เป็นเชิงเส้น (Linear Element) ไม่สอดคล้องกับสมมติฐานทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์ระบบด้วยเดสไครบิงฟังก์ชัน กล่าวคือ ตรงส่วนที่เป็นเชิงเส้นเกิดเรโซแนนซ์สูงสุด (Resonant Peak) ขึ้นภายในผลตอบสนองเชิงความถี่ของ $G(j\omega)$

เงื่อนไขทางด้านกราฟพล็อต

ถ้าเส้นกราฟ $G(j\omega)$ สัมผัสหรือเกือบสัมผัสกับเส้นกราฟ $-1/D$ อาจทำให้ข้อสรุปจากการวิเคราะห์ด้วยเดสไครบิงฟังก์ชันกลายเป็นสิ่งที่ผิดเพราะผลจากการละเลยฮาร์โมนิกอันดับสูง หรือความไม่แน่นอนจากโมเดลของระบบอาจเป็นสาเหตุของการเปลี่ยนแปลงของสภาวะการตัดกันของเส้นกราฟ (Intersection Situation) โดยทั่วไปแล้วเมื่อการกรองของส่วนที่เป็นเชิงเส้นบกพร่องอาจทำให้เกิดความไม่แน่นอนในข้อ 2 และข้อ 3 ดังที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น กรณีศึกษาตัวอย่างเช่น

การศึกษาของนิโคล (Nychols) ในเรื่อง “Second – Order Servo with Backlash” ในขณะที่การวิเคราะห์ด้วยเดสไครบิงฟังก์ชันทำนายว่าเกิดลิมิตไซเคิล 2 จุด (ลิมิตไซเคิลที่มีเสถียรภาพ ณ ความถี่สูง และลิมิตไซเคิลที่ไม่มีเสถียรภาพ ณ ความถี่ต่ำ) และสามารถแสดงได้ว่าลิมิตไซเคิลที่ไม่เสถียร ณ ความถี่ต่ำ ไม่ได้เกิดขึ้น

ในทางกลับกัน ถ้ากราฟ $-1/D$ ตัดกับกราฟ G ในลักษณะเกือบจะตั้งฉากกันจะทำให้ผลที่ได้จากเดสไครบิงฟังก์ชันมีความถูกต้องแม่นยำ และมีประสิทธิภาพในการทำนาย

บทที่ 3

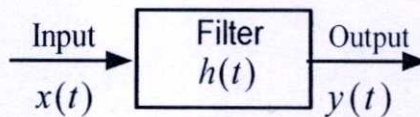
ทฤษฎีและหลักการทํางานของวงจรกรองความถี่

3.1 บทนำ

วงจรกรองความถี่ (Filter) จัดว่าเป็นวงจรประเภทหนึ่งที่มีบทบาทสำคัญในงานด้านต่างๆ เช่น ด้านเครื่องมือวัด และด้านโทรคมนาคมต่างๆ วงจรกรองความถี่สามารถแบ่งได้อีกเป็นประเภทใหญ่ๆ ได้ 2 ประเภท ตามชนิดของสัญญาณ คือวงจรกรองความถี่แบบดิจิทัล (Digital Filter) สำหรับการใช้งานกับสัญญาณชนิดดิจิทัลและวงจรกรองความถี่อนาล็อก (Analog Filter) สำหรับการใช้งานกับสัญญาณชนิดอนาล็อก (Analog Signal) ซึ่งวงจรกรองความถี่อนาล็อกนี้สามารถแบ่งออกเป็นประเภทย่อยๆ ตามประเภทของอุปกรณ์ที่ใช้ในวงจร คือ วงจรกรองความถี่ชนิดพาสซีฟ (Passive Filter) และวงจรกรองความถี่แอคทีฟ (Active Filter) และนอกจากนี้ ทั้งวงจรกรองความถี่แบบดิจิทัล และวงจรกรองความถี่แบบอนาล็อก ยังสามารถแบ่งออกเป็นชนิดย่อยๆ ตามการใช้งานด้านความถี่ คือวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน (Lowpass Filter) วงจรกรองความถี่สูงผ่าน (Highpass Filter) วงจรกรองความถี่แถบผ่าน (Bandpass Filter) วงจรกรองความถี่แบบแถบหยุด (Bandstop Filter) วงจรกรองความถี่แบบแถบผ่านทุกย่านความถี่ (Allpass Filter) ซึ่งมีวิธีการและใช้อุปกรณ์ได้หลากหลายการออกแบบ

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ จะเป็นการกล่าวถึงทฤษฎีและหลักการทํางานพื้นฐานทั่วไปของวงจรกรองความถี่ และจะกล่าวไปถึงรูปแบบสมการฟังก์ชันถ่ายโอนทั่วไป ซึ่งเป็นแบบไบควอดของวงจรกรองความถี่แบบอนาล็อกชนิดต่างๆ

3.2 หลักการทั่วไปของวงจรกรองความถี่



รูปที่ 3.1 ระบบพื้นฐานของวงจรกรองความถี่

พิจารณาล็อกโคอะแกรมระบบพื้นฐานของวงจรกรองความถี่ในรูปที่ 3.1 ประกอบด้วย

$x(t)$ = สัญญาณอินพุตของวงจร (Input Signal)

$y(t)$ = สัญญาณเอาต์พุตของวงจร (Output Signal)

$h(t)$ = สัญญาณตอบสนองต่อสัญญาณอิมพัลส์ของระบบ (Impulse Response)

ซึ่งกำหนดให้วงจรกรองความถี่ที่กำลังพิจารณามีคุณสมบัติเป็นแบบคอซอล (Causall) แบบเชิงเส้นและให้ระบบไม่มีการแปรเปลี่ยนตามเวลา (Time Invariant) ดังนั้นจากบล็อกไดอะแกรมจะสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$y(t) = \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau \quad (3.1)$$

จากสมการที่ (3.1) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปสมการลาปลาซ ได้เป็น

$$y(s) = H(s)X(s) \quad (3.2)$$

และเมื่อพิจารณาบนแกนความถี่ $s=j\omega$ สมการที่ (3.2) จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของขนาดและมุมเฟสได้ตามสมการที่ (3.3) และ (3.4) ตามลำดับ

$$|y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)| \quad (3.3)$$

$$\phi_{y(j\omega)} = \phi_{H(j\omega)} + \phi_{X(j\omega)} \quad (3.4)$$

หลักการทั่วไปของวงจรกรองความถี่ คือ จะทำหน้าที่กำจัดสัญญาณความถี่ที่ไม่ต้องการออก เช่นสัญญาณรบกวนในระบบสื่อสาร และระบบเครื่องมือวัดต่างๆ โดยในสมการที่ (3.3) จะเห็นว่าขนาดของสัญญาณเอาต์พุตนั้น มีค่าเท่ากับผลคูณของขนาดสัญญาณอินพุต กับขนาดของฟังก์ชันตอบสนองความถี่ (Frequency Response Function) ของวงจรกรองความถี่ ซึ่งสามารถอธิบายได้ว่า ถ้าขนาดฟังก์ชันตอบสนองความถี่ที่มีค่าเป็นศูนย์ ณ ช่วงความถี่ระหว่าง ω_{s1} และ ω_{s2} แล้วสัญญาณเอาต์พุตจะมีค่าเป็นศูนย์ด้วย ไม่ว่าสัญญาณอินพุตจะมีค่าเป็นเท่าไรก็ตาม ในช่วงความถี่ระหว่าง ω_{s1} ถึง ω_{s2} ซึ่งช่วงความถี่ระหว่าง ω_{s1} ถึง ω_{s2} นี้จะเรียกว่าช่วงความถี่แถบหยุด (Stopband) ของวงจรสำหรับฟังก์ชันตอบสนองทางความถี่ $H(j\omega)$ และในทำนองเดียวกันนั้น ถ้าขนาดของฟังก์ชันตอบสนองทางความถี่มีค่าไม่เป็นศูนย์ ณ ช่วงความถี่ระหว่าง ω_{p1} และ ω_{p2} แล้วจะทำให้สัญญาณเอาต์พุตมีค่าเป็นไปตามสมการที่ (3.3) ซึ่งช่วงความถี่ระหว่าง ω_{p1} ถึง ω_{p2} นี้จะเรียกว่าช่วงความถี่แถบผ่าน (Bandpass) ของวงจร $H(j\omega)$

ซึ่งโดยทั่วไปแล้วฟังก์ชันตอบสนองทางความถี่ $H(j\omega)$ สามารถทำให้ออกเป็นประเภทย่อยๆ ได้อีก 4 ประเภท ตามคุณลักษณะของการทำงานของแถบความถี่หยุดและแถบความถี่ผ่าน สำหรับเนื้อหาที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นารอธิบายถึงลักษณะการทำงานของ

วงจรรองทั้ง 4 ชนิด โดยกำหนดให้เป็นวงจรรองที่เป็นอุดมคติ คือการตอบสนองทางเฟสเป็นเชิงเส้นและมีค่าการสูญเสียทางขนาดเป็นศูนย์ในช่วงแถบความถี่ผ่าน และการสูญเสียในช่วงแถบความถี่หยุดมีค่าเป็นอนันต์ ($|H(j\omega)| = 0$)

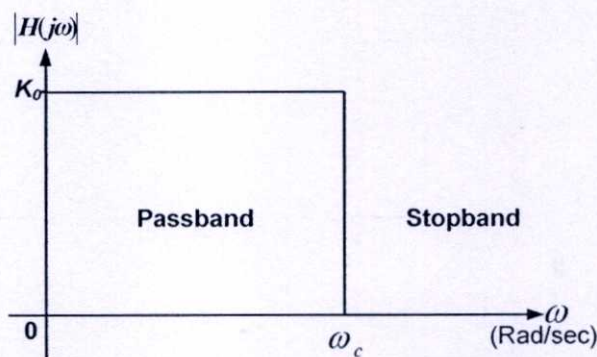
สำหรับรูปแบบสมการฟังก์ชันการถ่ายโอนของวงจรรองความถี่แบบไบควอดนั้นจะมีรูปแบบทั่วไปดังสมการ

$$H(s) = K \frac{(s^2 + \frac{\omega_z}{Q_z} s + \omega_z^2)}{(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2)} \quad (3.5)$$

โดย ω_z , ω_p , Q_z คือพารามิเตอร์แสดงค่าความถี่ขั้ว (Zero), ค่าความถี่โพล (Pole), ค่าควอลิตี้แฟกเตอร์ขั้ว (Quality Factor Zero) และค่าควอลิตี้แฟกเตอร์โพล (Quality Factor Pole) ตามลำดับ ดังนั้นเมื่อค่าพารามิเตอร์ในสมการที่ (3.5) เปลี่ยนไป จะทำให้ได้วงจรรองความถี่ชนิดต่างๆ ดังนี้

3.2.1 วงจรรองความถี่ชนิดความถี่ต่ำผ่าน (Lowpass Filter)

วงจรรองชนิดนี้เป็นวงจรรองให้ความถี่อยู่ในช่วงตั้งแต่ 0 ถึง ค่าความถี่หยุดหรือค่าความถี่คัทออฟ (Cutoff Frequency : ω_c) ในขณะที่ช่วงความถี่สูงกว่าค่าความถี่คัทออฟนี้เป็นช่วงความถี่แถบหยุดของวงจร ในกรณีนี้จะได้แบนด์วิดท์ (Bandwidth) ของวงจรมีค่าเป็น ω_c ซึ่งสามารถแสดงผลตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรรชนิดนี้ได้ดังรูปที่ 3.2



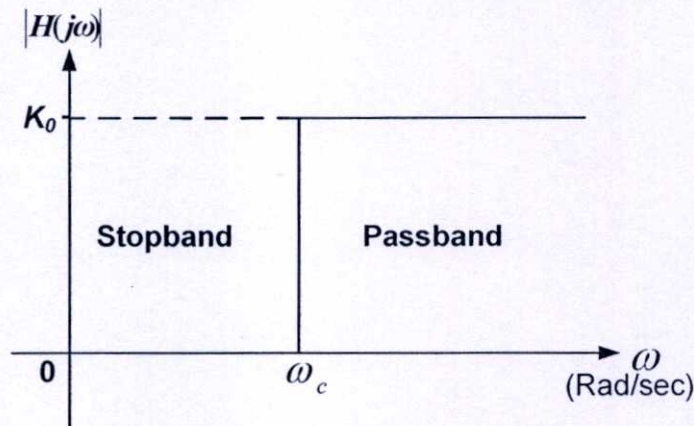
รูปที่ 3.2 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านแบบอุดมคติ

โดยที่วงจรรองความถี่ต่ำผ่านจะมีรูปแบบสมการฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไบควอด แสดงได้ดังสมการ

$$H_{LPF}(s) = K \frac{(\omega_p^2)}{(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2)} \quad (3.6)$$

3.2.2 วงจรรองความถี่ชนิดความถี่สูงผ่าน (Highpass Filter)

วงจรรองชนิดนี้เป็นวงจรรองให้ความถี่ที่มีความถี่ต่ำที่อยู่ในช่วงตั้งแต่ 0 ถึงค่าความถี่หยุด หรือค่าความถี่คัทออฟ ω_c เป็นช่วงความถี่แถบหยุดของวงจร ในขณะที่ยอมให้สัญญาณที่มีช่วงความถี่ที่สูงกว่าค่าความถี่คัทออฟนี้ผ่านไปได้ ซึ่งสามารถแสดงผลตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรรชนิดนี้ได้ดังรูปที่ 3.3



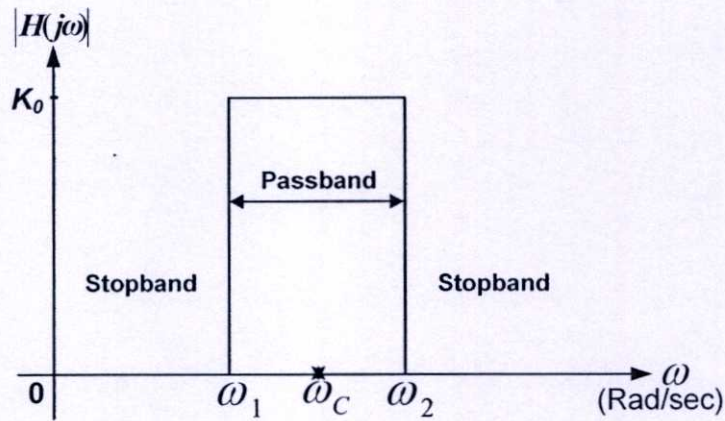
รูปที่ 3.3 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรรองความถี่สูงผ่านแบบอูคมคติ

โดยที่วงจรรองความถี่สูงผ่านจะมีรูปแบบสมการฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไบควอด แสดงได้ดังสมการ

$$H_{HPF}(s) = K \frac{(s^2)}{(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2)} \quad (3.7)$$

3.2.3 วงจรกรองความถี่ชนิดความถี่แถบผ่าน (Bandpass Filter)

วงจรกรองความถี่แถบผ่าน เป็นวงจรกรองความถี่ที่มีความถี่แถบความถี่ผ่านของวงจรอยู่ในช่วงค่าความถี่หยุดสองค่า คือ ω_1 และ ω_2 ในขณะที่แถบความถี่หยุดของวงจรจะมีสองช่วงด้วยกันคือช่วงตั้งแต่ความถี่ 0 ถึง ω_1 และ ช่วงความถี่ที่สูงกว่า ω_2 ขึ้นไป ซึ่งสามารถแสดงผลตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรชนิดนี้ได้ดังรูปที่ 3.4



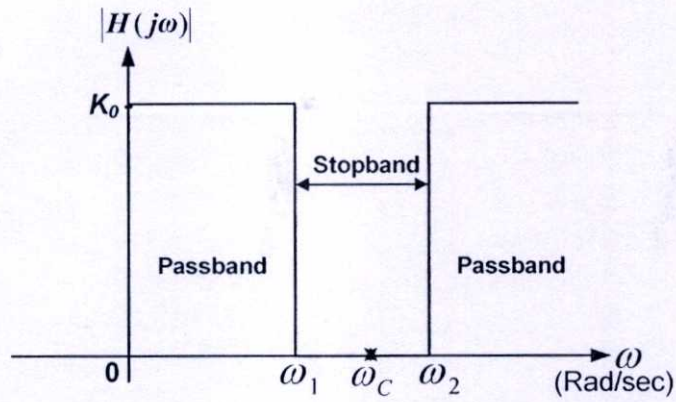
รูปที่ 3.4 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรกรองความถี่แถบผ่านแบบอุดมคติ

โดยที่วงจรกรองความถี่แถบผ่านจะมีรูปแบบสมการที่ฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไบควอดแสดงได้ดังสมการ

$$H_{BPF}(s) = K \frac{\left(s \frac{\omega_p}{Q_p}\right)}{\left(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2\right)} \quad (3.8)$$

3.2.4 วงจรกรองความถี่ชนิดความถี่แถบหยุด (Bandstop Filter)

วงจรกรองความถี่แบบถี่หยุด เป็นวงจรกรองความถี่ที่มีความถี่แถบหยุดอยู่ในช่วงระหว่างความถี่คัทออฟสองความถี่คือ ω_1 และ ω_2 ในขณะที่แถบความถี่ผ่านของวงจร จะมีสองช่วงด้วยกันคือช่วงตั้งแต่ความถี่ 0 ถึง ω_1 และ ช่วงความถี่ที่สูงกว่า ω_2 ขึ้นไป ซึ่งสามารถแสดงผลตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรชนิดนี้ได้ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 การตอบสนองทางขนาดในเชิงความถี่ของวงจรกรองความถี่แถบหยุดแบบอุดมคติ

โดยที่วงจรกรองความถี่แถบหยุดจะมีรูปแบบสมการฟังก์ชันถ่ายโอนแบบไบควอดแสดงได้ดังสมการ

$$H(s) = K \frac{(s^2 + \omega_p^2)}{(s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2)} \quad (3.9)$$

ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว วงจรกรองความถี่ที่มีการตอบสนองความถี่ตามอุดมคตินั้นไม่สามารถสร้างขึ้นได้จริง เพียงแต่ในทางปฏิบัตินั้นจะสามารถสร้างวงจรที่มีผลตอบสนองทางความถี่ที่ประมาณคล้ายกับผลตอบสนองในทางอุดมคติเท่านั้น

บทที่ 4

ทฤษฎีการกำเนิดสัญญาณ และหลักการทํางาน

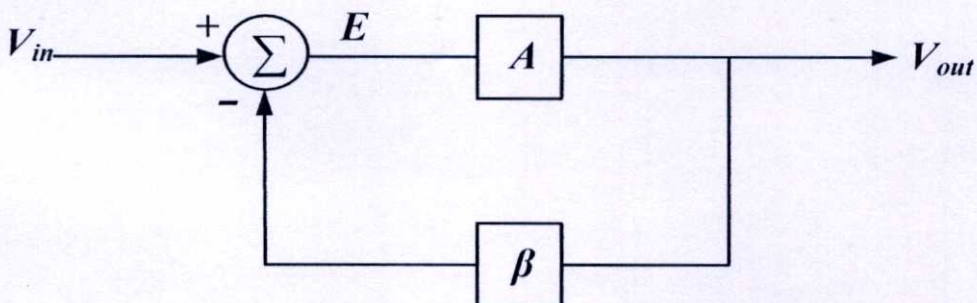
4.1 บทนำ

วงจรกำเนิดสัญญาณ หรือวงจรออสซิลเลเตอร์ (Oscillator Circuit) คือวงจรไฟฟ้าที่สามารถให้กำเนิดสัญญาณได้โดยตัวของวงจรเอง โดยให้กำเนิดสัญญาณด้านขาออก (Output Signal) ที่มีสัญญาณเป็นรายคาบเวลา (Periodic Signal) ที่แน่นอน โดยไม่จำเป็นต้องมีสัญญาณอินพุต (Input Signal) ซึ่งรูปคลื่นของสัญญาณเอาต์พุตที่เกิดจากวงจรออสซิลเลเตอร์ก็มีอยู่ด้วยกันหลายแบบ เช่น อาจเป็นสัญญาณรูปคลื่นไซน์ รูปคลื่นสามเหลี่ยม รูปคลื่นสี่เหลี่ยม หรือรูปคลื่นสัญญาณแบบฟันเลื่อย ดังนั้นวงจรออสซิลเลเตอร์จึงเป็นวงจรพื้นฐานอย่างหนึ่ง ที่มีบทบาทในด้านวิศวกรรม อย่างมากมายเช่น นำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างสัญญาณนาฬิกาอ้างอิงหลัก (Reference Clock Signal) ให้แก่ระบบ, สร้างสัญญาณคลื่นพาห้ (Carrier Signal) เพื่อใช้ในการมอดูเลต (Modulation) สัญญาณ สำหรับระบบสื่อสาร โทรคมนาคม หรือนำไปใช้ในเครื่องมือวัดต่างๆ เป็นต้น

เนื่องจากวงจรออสซิลเลเตอร์มีอยู่ด้วยกันหลายแบบ เช่นวงจรกำเนิดสัญญาณแบบจูนคอลเลคเตอร์ (Tuned Collector Oscillator), วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อนเฟส (Phase shift Oscillator) และวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวียนบริดจ์ (Wien Bridge) เป็นต้น ดังนั้นเนื้อหาในบทนี้จึงเป็นการศึกษาเฉพาะวงจรกำเนิดสัญญาณแบบคลื่นไซน์เท่านั้น ซึ่งมีรายละเอียด หลักการและวิธีการออกแบบวงจรดังต่อไปนี้

4.2 ทฤษฎีและหลักการทํางานเบื้องต้น ของการกำเนิดสัญญาณ

4.2.1 พื้นฐานของวงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ



รูปที่ 4.1 ระบบป้อนกลับแบบลบ

ในรูปที่ 4.1 ซึ่งเป็นการแสดงบล็อกไดอะแกรมของระบบโดยมีอินพุตคือ V_{in} ส่วน V_{out} คือเอาต์พุตของส่วนขยาย (Amplifier) ซึ่งหมายถึงบล็อก (A) และ (B) ถูกเรียกว่า ส่วนป้อนกลับ ซึ่งทำหน้าที่นำสัญญาณเอาต์พุตป้อนกลับเข้าสู่จุดรวม (Summing Junction) และ E คือผลต่างระหว่าง สัญญาณอินพุตและสัญญาณป้อนกลับ

เราสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนของบล็อกไดอะแกรมในรูปที่ 4.1 ได้ดังนี้

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A}{1 + AB} \quad (4.1)$$

วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ โดยทั่วไปไม่ต้องการสัญญาณอินพุตจากภายนอกเพราะสามารถนำส่วนของสัญญาณเอาต์พุตมาป้อนกลับแล้วเปลี่ยนเป็นสัญญาณอินพุตได้ โดยเงื่อนไขของการสั่น (Oscillation) เกิดจากระบบป้อนกลับไม่สามารถมี สภาวะคงตัวที่เสถียรได้เพราะฟังก์ชันถ่ายโอนค่าไม่ได้ ระบบจะเข้าสู่สภาวะไม่เสถียรเมื่อตัวส่วนของสมการที่มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ $1 + AB = 0$ หรือ $AB = -1$ ซึ่งหลักในการออกแบบเครื่องกำเนิดสัญญาณคือการทำให้ $AB = -1$ ซึ่งเรียกว่า “หลักเกณฑ์ของบาร์คฮูเซน (Barkhausen Criterion)” ในการออกแบบระบบให้เป็นไปตามหลักเกณฑ์ของบาร์คฮูเซนนั้น ระบบจะต้องมีขนาดเป็นหนึ่งหน่วยและมีมุมเฟสระหว่าง A และ B ซึ่งเป็นที่มาของเครื่องหมายลบ โดยสามารถเขียนระบบให้อยู่ในรูปเชิงซ้อนได้เป็น $AB = 1 \angle -180^\circ$ สำหรับระบบป้อนกลับแบบบวกสามารถเขียนได้เป็น $AB = 1 \angle 0^\circ$ ซึ่ง AB ในสมการ 2.1 จะกลายเป็นเครื่องหมายลบ

จากกระบวนการเลื่อนเฟส 180° และขนาด $|AB| \rightarrow 1$ ทำให้สัญญาณเอาต์พุตของระบบ (ซึ่งกลายเป็นระบบที่ไม่เสถียร) ถู้อเข้าสู่ค่านันต์ แต่ในความเป็นจริงระบบจะถู้อเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งเนื่องจากข้อจำกัดของ ไฟเลี้ยงที่ป้อนให้กับอุปกรณ์ของระบบและยังสามารถทำให้ค่าเกนของตัวขยาย A เปลี่ยนไป และส่งผลให้ทอมของ AB เปลี่ยนไป จากค่าเอกลักษณ์ $|AB| \neq 1$ และทำให้สัญญาณที่ถู้อเข้าสู่ค่านันต์เกิดภาวะเตือนซ้ำและหยุดลงในที่สุด ในสถานะดังกล่าวอาจเกิดภาวะใดภาวะหนึ่งในสามภาวะนี้

1. ความไม่เป็นเชิงเส้นในภาวะอิ่มตัว (Saturation) หรือภาวะตัด (Cut-Off) เป็นสาเหตุให้ระบบมีเสถียรภาพและเป็นไปตามอย่างที่ต้องการตามระดับของไฟเลี้ยงที่ป้อนให้กับอุปกรณ์ในระบบ
2. สภาวะเริ่มต้นมีการเปลี่ยนแปลงซึ่งเป็นสาเหตุให้ระบบเกิดภาวะอิ่มตัว (ภาวะตัด) และคงตัวอยู่เป็นเวลานานก่อนจะกลายเป็นเชิงเส้นและสัญญาณจะมุ่งไปทางทิศตรงข้ามกับระดับไฟเลี้ยง (Power Rail)
3. ระบบอยู่ในสภาวะเชิงเส้นและเกิดการกลับสัญญาณเข้าสู่ในทิศทางตรงข้ามกับระดับไฟเลี้ยง

ในข้อที่สองทำให้เกิดการสั่นที่มีการลดสัญญาณสูง (สัญญาณที่เกิดขึ้นคล้ายสัญญาณสี่เหลี่ยม) ซึ่งสามารถเรียกเครื่องกำเนิดสัญญาณประเภทนี้ว่า เครื่องกำเนิดสัญญาณแบบรีแลกเซชัน (Relaxation Oscillator) ส่วนในข้อที่สามเป็นเครื่องกำเนิดสัญญาณรูปแบบไซน์

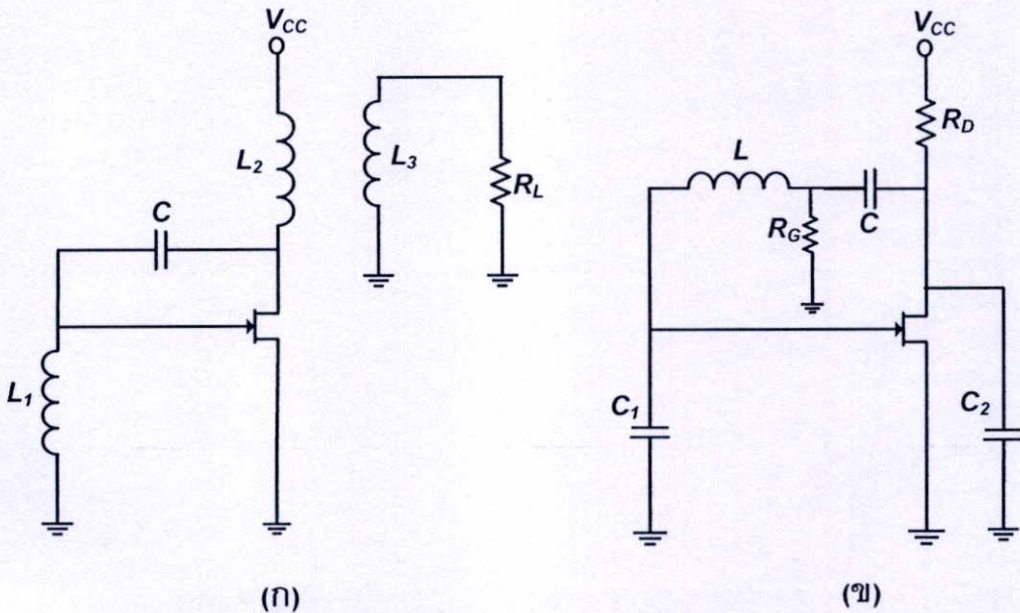
4.2.2 ประเภทของวงจรกำเนิดสัญญาณ

ส่วนประเภทของวงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ หรือวงจรออสซิลเลเตอร์ ที่ให้กำเนิดสัญญาณรูปไซน์โดยแบ่งตามอุปกรณ์ที่ใช้ นั้น สามารถแบ่งได้ออกเป็น 4 ประเภทคือ

1. วงจรกำเนิดสัญญาณหรือวงจรออสซิลเลเตอร์ที่ใช้ L และ C (LC-Oscillators) มีอยู่ด้วยกันหลายแบบ เช่น

- วงจรออสซิลเลเตอร์ LC แบบฮาร์ทเลย์ (Hartley Oscillator)
- วงจรออสซิลเลเตอร์ LC แบบโคลพิทซ์ (Colpitts Oscillator)

ซึ่งวงจรประเภทนี้มีข้อดีคือ สามารถเปลี่ยนแปลงความถี่ได้ง่ายและใช้งานในย่านความถี่สูงได้ดี แต่มีข้อเสียคือเสถียรภาพ ทางความถี่ยังไม่ดีนัก และเนื่องจากการสร้างตัวเหนี่ยวนำ (Inductor) ทำได้ยาก จึงมีปัญหาในการสร้างแบบวงจรรวม ซึ่งสามารถแสดงตัวอย่างของวงจรได้ตามรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ LC (ก) แบบฮาร์ทเลย์ (Hartley Oscillator)

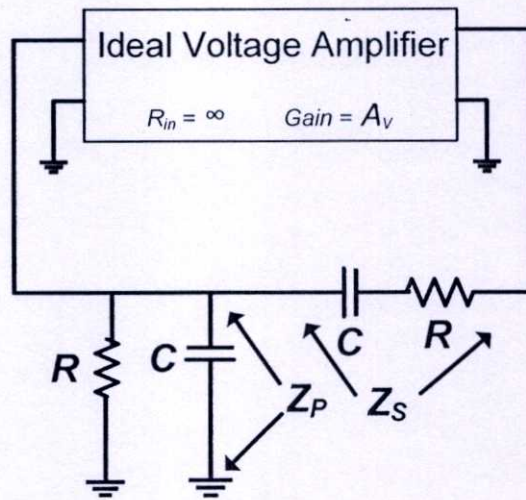
(ข) แบบโคลพิทซ์ (Colpitts Oscillator)

2. วงจรกำเนิดสัญญาณที่ใช้ R และ C (RC-Oscillators) มีอยู่ด้วยกันหลายแบบเช่น

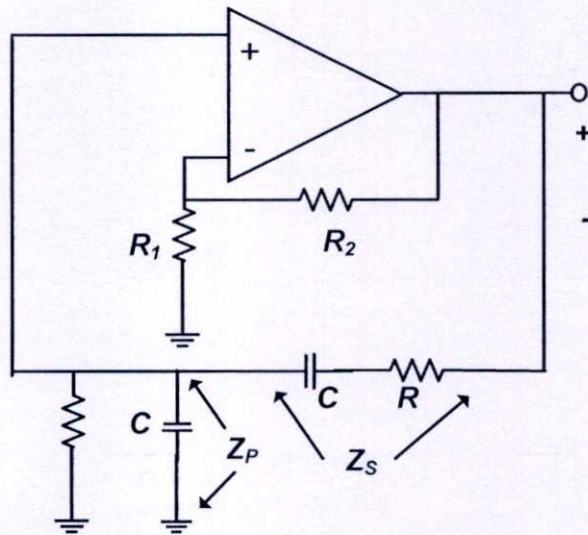
- วงจรออสซิลเลเตอร์ RC แบบ Wien Bridge Oscillators

- วงจรออสซิลเลเตอร์ RC แบบเลื่อนเฟส (Phase Shift Oscillators)

วงจรประเภทนี้มีข้อดีคือ สามารถเปลี่ยนแปลงความถี่ได้ และใช้งานในย่านความถี่สูงได้ แต่มีข้อเสียคือ เสถียรภาพทางความถี่ยังไม่ดีนัก ซึ่งสามารถแสดงตัวอย่างได้ดังรูปที่ 4.3



(ก)

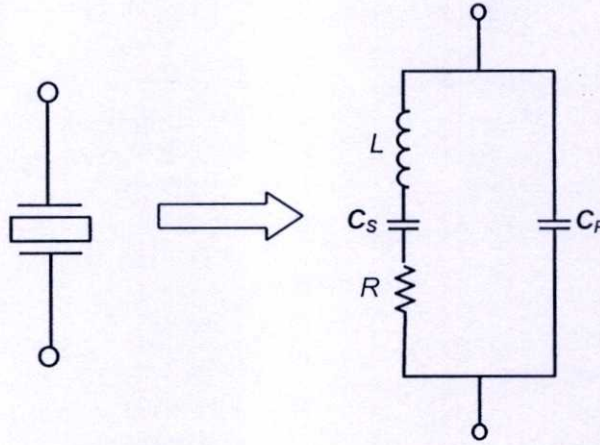


(ข)

รูปที่ 4.3 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ RC (ก) แบบ Wien-Bridge Oscillator

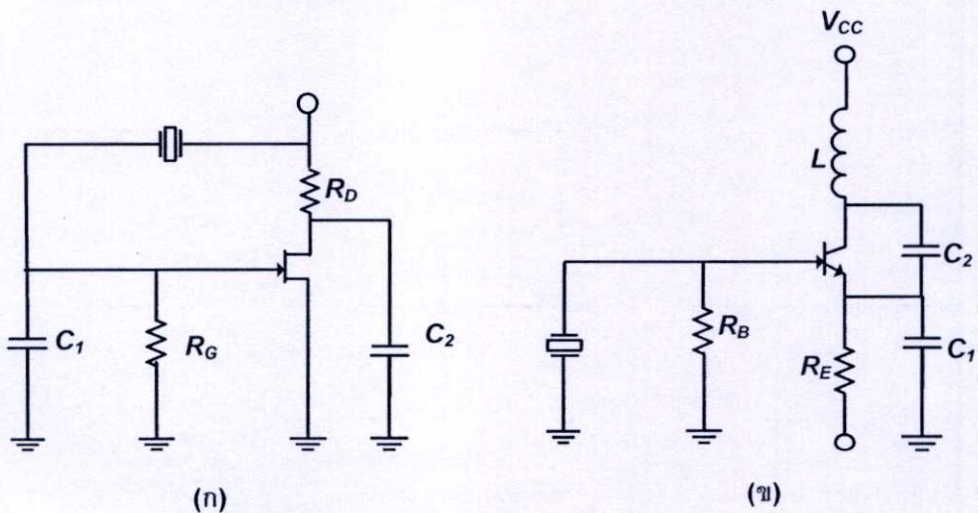
(ข) แบบ Wien-Bridge Oscillator โดยใช้ OP-AMP

3. วงจรกำเนิดสัญญาณที่ใช้ชิ้นผลึก (Crystal Oscillators) วงจรประเภทนี้มีข้อดีคือ เสถียรภาพความถี่ที่ดีมาก และสามารถใช้งานในย่านความถี่สูงได้ แต่มีข้อเสียคือ การเปลี่ยนแปลงความถี่ทำได้ยากมาก ซึ่งอาจต้องใช้วงจรอื่นมาช่วย



รูปที่ 4.4 วงจรสมมูลและสัญลักษณ์โดยใช้ชิ้นผลึก

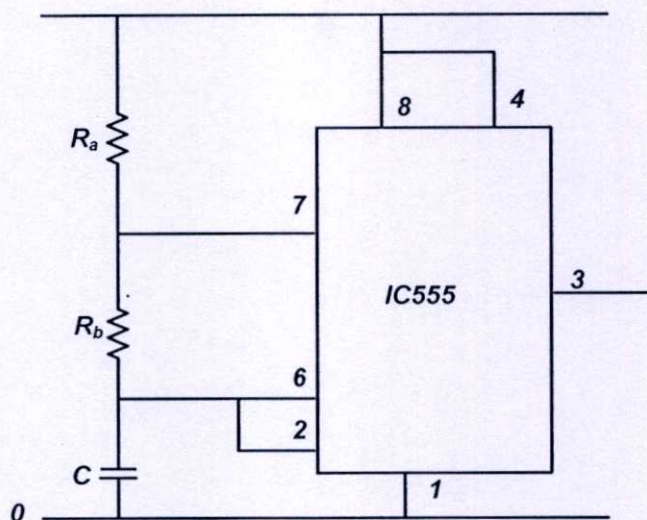
จากวงจรสมมูลของชิ้นผลึกในรูปที่ 4.4 ตัวเหนี่ยวนำ L มีค่าประมาณ 100 H, ตัวเก็บประจุ C_s ก่อนข้างต่ำ โดยมีหน่วยเป็น pF และความต้านทาน R มีค่าน้อยประมาณ 10 โอห์ม โดยที่ C_p เป็นค่าคาปาซิแตนซ์ระหว่างอิเล็กโทรด ซึ่งโดยทั่วไปแล้วมีค่าประมาณ 1-10 pF สำหรับการนำชิ้นผลึก ใช้งานเป็นวงจรมกำเนิดสัญญาณสามารถแสดงตัวอย่างได้ดังรูปที่ 4.5



รูปที่ 4.5 วงจรกำเนิดสัญญาณโดยชิ้นผลึก

4. วงจรกำเนิดสัญญาณที่อยู่ในรูปวงจรรวม สำเร็จรูปหรือ เรียกว่า ไอซีฟังก์ชันเจเนอเรเตอร์ ซึ่งผลิตขึ้นมาเพื่อใช้ในการสร้างสัญญาณโดยเฉพาะ ซึ่งมีข้อดีคือ นำไปใช้งานได้ง่าย

และสามารถปรับความถี่ของการออสซิลเลตสัญญาณได้โดยหลักการของ และนอกจากนี้สามารถเลือกรูปร่างของสัญญาณได้หลายแบบ แต่มีข้อเสียคือใช้ ในย่านความถี่ต่ำเท่านั้น เช่น ไอซีเบอร์ XR-2240, 8038 และ ไอซีเบอร์ 555 โดยมีตัวอย่างการต่อวงจร ไอซีเบอร์ 555 ไปใช้งานดังรูปที่ 4.6



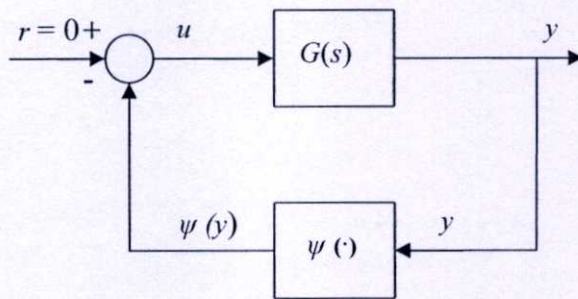
รูปที่ 4.6 วงจรกำเนิดสัญญาณโดยใช้ไอซีเบอร์ 555

บทที่ 5

วิธีการออกแบบเครื่องกำเนิดสัญญาณ

5.1 กระบวนการและวิธีการออกแบบ

พิจารณาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูปที่ 5.1 ประกอบด้วยสองส่วนที่สำคัญโดยส่วนแรกคือ ส่วนที่เป็นเชิงเส้น $G(s)$ ซึ่งเป็นตัวกรองความถี่แถบผ่านอันดับที่สอง และ ส่วนที่สองคือ $\psi(\cdot)$ เป็นส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นและไม่ขึ้นกับเวลา ในการพัฒนารูปแบบพื้นฐานของเคสโครบิงฟังก์ชันระบบจะต้องสอดคล้องกับสมมติฐานทั้งสี่ข้อดังที่ได้แสดงไว้ในบทก่อนหน้า



รูปที่ 5.1 การต่อแบบป้อนกลับ (Feedback Connection)

5.2 ฟังก์ชันคาบ (Periodic Function)

กำหนดให้ V เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert Space) ของฟังก์ชันคาบ โดยมีคาบเป็น $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ และมีเซตเชิงตั้งฉากปกติแบบสมบูรณ์ (Complete Orthonormal Set) ในปริภูมิ V ดังนี้ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots \right\}$ โดยมีหลักผลคูณภายในเป็น

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \frac{2}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t)g(t)dt. \quad \forall f, \forall g \in V$$

ถ้า $\|g(t)\| = 1$ ดังนั้น $|\langle f(t), g(t) \rangle| = \|\text{Proj}_g f\|$ เมื่อ $\text{Proj}_g u := \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$

ประพจน์เกี่ยวกับการกระจายแบบฟูรีเยร์หรือการกระจายเชิงตั้งฉากปกติ

(Fourier Series or Orthonormal Expansion)

กำหนดให้ $\{x_k\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติแบบสมบูรณ์ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้นค่า x แต่ละตัวสามารถเขียนได้เป็น

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Proj}_{x_k} x. \quad (5.1)$$

จากสมการที่ (5.1) ค่า x เทียบได้กับเอาท์พุท $w(t)$ และเรียก $\langle x, x_k \rangle$ ว่าเป็นสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series coefficients) ของ x จาก $\sin(\omega_0 t)$ และ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ นั่นคือ $\sin(\omega_0(t+T)) = \sin(\omega_0 t)$ ดังนั้น

$$w(t) = \psi(A \sin(\omega_0(t+T))) = \psi(A \sin(\omega_0 t)) \quad (5.2)$$

ดังนั้น $w(t) = \psi(A \sin(\omega_0 t))$ จะเป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบคือ T และจากเซตเชิงตั้งฉากปกติแบบสมบูรณ์ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots \right\}$ ดังนั้นสามารถกระจายเอาท์พุทได้เป็น

$$\begin{aligned} w(t) &= \text{Proj}_{x_1} w(t) + \text{Proj}_{x_2} w(t) + \text{Proj}_{x_3} w(t) + \text{Proj}_{x_4} w(t) + \dots \\ &= \text{Proj}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} w(t) + \text{Proj}_{\cos(\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\sin(\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\cos(2\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\sin(2\omega_0 t)} w(t) \dots \end{aligned}$$

ซึ่งสามารถเขียนอธิบายในรูปสมการฟูรีเยร์ได้ดังนี้

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (5.3)$$

$$\text{โดยที่ } \frac{a_0}{2} = \text{Proj}_1 w(t), \quad a_n = \frac{\text{Proj}_{\cos(n\omega_0 t)} w(t)}{\cos(n\omega_0 t)}, \quad b_n = \frac{\text{Proj}_{\sin(n\omega_0 t)} w(t)}{\sin(n\omega_0 t)}.$$

นอกจากนั้นแล้ว $G(s)$ ยังเป็นตัวกรองความถี่แถบผ่านที่มีค่า Q สูง นั้นหมายความว่ามีส่วนประกอบที่ความถี่เป็นความถี่เดียวกับความถี่ของสัญญาณ (Fundamental Component) $w_1(t)$ เท่านั้นที่จะถูกนำมาพิจารณา ซึ่งสามารถเขียนสมการได้ว่า

$$\begin{aligned} w(t) &\approx w_1(t) = \text{Proj}_{\cos(\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\sin(\omega_0 t)} w(t) \\ &= M \sin(\omega_0 t + \phi) \end{aligned} \quad (5.4)$$

ซึ่ง

$$M(A, \omega_0) = \sqrt{\|Proj_{\cos(\omega_0 t)} w(t)\|^2 + \|Proj_{\sin(\omega_0 t)} w(t)\|^2} = \sqrt{\langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle^2 + \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle^2}$$

$$\phi(A, \omega_0) = \tan^{-1}(\langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle / \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle)$$

และสามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$w_r(t) = Me^{j(\omega_0 t + \phi)} = (\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle + j \langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle) e^{j(\omega_0 t)} = (b + j a_1) e^{j(\omega_0 t)}$$

5.2.1 การนำวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชันมาพิจารณา

เดสไครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ถูกนำเสนอในรูปแบบอัตราส่วนเชิงซ้อนของส่วนประกอบที่ความถี่เป็นความถี่เดียวกับความถี่ของสัญญาณ ระหว่างเอาต์พุตของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับอินพุตในรูปแบบไซน์ นั่นคือ

$$D(A, \omega_0) = \frac{Me^{j(\omega_0 t + \phi)}}{Ae^{j(\omega_0 t)}} = \frac{(b + ja_1)e^{j(\omega_0 t)}}{Ae^{j(\omega_0 t)}} = \frac{1}{A}(b + ja_1) \quad (5.5)$$

เนื่องจาก $w(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่และจากสมมติฐานในข้อที่ 4 ค่าของ $a_n = \frac{Proj_{\cos(n\omega_0 t)} w(t)}{\cos(n\omega_0 t)}$ จะได้ว่า

$$a_1 = \frac{\langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle \cos(\omega_0 t)}{\cos(\omega_0 t) \langle \cos(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t) \rangle}$$

เนื่องจาก $\langle \cos(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t) \rangle = 1$

จะได้

$$a_1 = \langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = 0$$

ดังนั้น

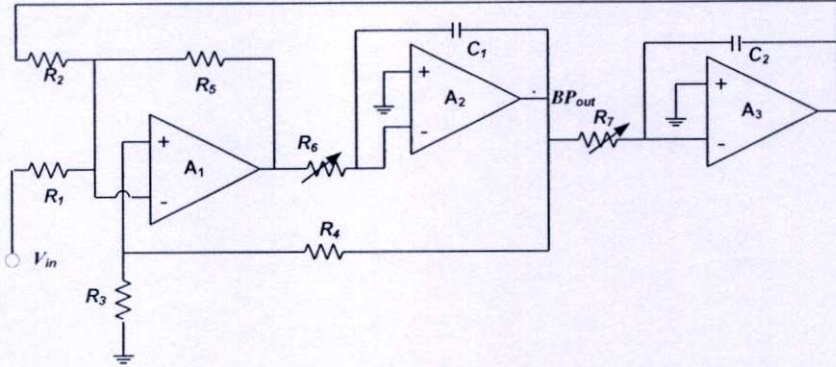
$$D(A, \omega_0) = \frac{b_r}{A} = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle}{A} \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{A\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t)$$

สำหรับกรณีของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบค่าเดียว ค่าเฉลี่ยไครบิงฟังก์ชัน D จะเป็นฟังก์ชันของค่า A ตัวเดียว นั่นคือ $D(A, \omega_0) = D(A)$ โดยที่

$$D(A) = \frac{1}{A\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin(\theta) d(\theta); \quad \theta = \omega_0 t$$

5.2.2 การออกแบบวงจรกรองความถี่แถบผ่าน



รูปที่ 5.2 วงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง [8]

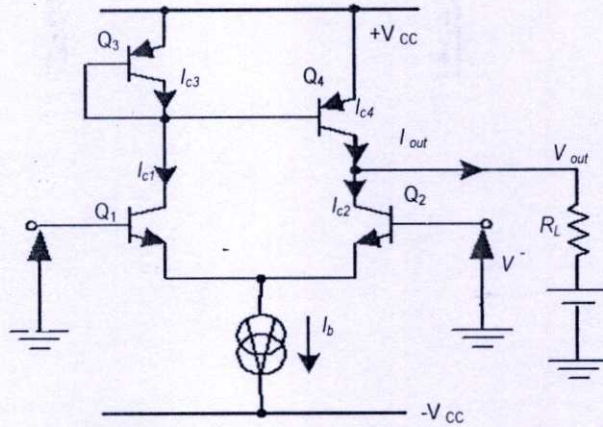
สมการคุณลักษณะของวงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับที่สองในรูปที่ 5.2 แสดงได้ดังนี้

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \quad (5.7)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad (5.8)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{R_3 + R_4}{R_3} \right) \quad (5.9)$$

5.2.3 ลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของโอทีเอ(OTA)



รูปที่ 5.3 วงจรสมมูลของโอทีเอ

จากรูปที่ 5.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตได้ดังนี้

$$i_{out} = I_b \frac{\exp\left(\frac{qv}{kT}\right) - 1}{\exp\left(\frac{qv}{kT}\right) + 1} = I_b \tanh\left(\frac{v}{2V_T}\right) \quad (5.10)$$

ซึ่ง $v = v^+ - v^-$ and $V_T = \frac{kT}{q}$ (เมื่อ V_T คือค่าแรงดันความร้อนที่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ)

5.3 การคำนวณค่าพารามิเตอร์ต่างๆของระบบ

สำหรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูปที่ 5.1 ซึ่งมีคุณลักษณะของตัวกรองความถี่แถบผ่านอันดับสองเป็นดังนี้

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

ซึ่งค่า ω_0 คือค่าความถี่เรโซแนนซ์ (Resonant Frequency) และค่า 2α เป็นช่วงความถี่ (Bandwidth) ที่มีหน่วยเป็น เรเดียน/วินาที (rad/sec) ของตัวกรองความถี่แถบผ่าน ถ้าการสั่นแบบกระตุ้นตัวเอง (Self-Excited Oscillation) โดยมีความถี่ $\omega = \omega_0$ ดังนั้นเงื่อนไขของการสั่นหรือเงื่อนไขของลิมิตไซเคิลคือ

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} = -\frac{1}{G(j\omega_0)} = D(A) \quad (5.11)$$

โดย Q เป็นตัวประกอบคุณภาพ (Quality Factor) ของตัวกรองความถี่แถบผ่าน จากสมการที่ 5.11 $D(A)$ คือ เดสไครบิงฟังก์ชันของฟังก์ชัน $w(\cdot)$ และขึ้นอยู่กับขนาดของการสั่นเพียงอย่างเดียวโดยแสดงได้ดังนี้

$$D(A) = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle}{A} = \frac{2}{A\pi} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d(\theta) \quad (5.12)$$

สำหรับค่า a และ ω_0 ที่รู้ค่าแน่นอนนั้น จะมีเพียงค่า A ตัวเดียวเท่านั้นในสมการ $D(A)$ ที่ไม่รู้ค่า และด้วยความสามารถของคอมพิวเตอร์เราสามารถคำนวณหาค่าลิมิตไซเคิลหรือสามารถเขียนกราฟระหว่าง $D(A)$ และ A ได้ ในบทความนี้จะแสดงถึงตัวอย่างการออกแบบเครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าความถี่ได้ พร้อมทั้งแสดงผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงและผลจากการจำลองด้วยโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์

บทที่ 6

ผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรมีโอทีเอ

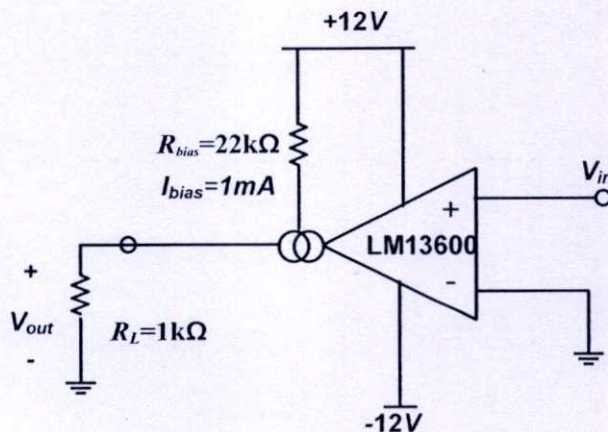
ORCAD CAPTURE และผลการทดลอง

6.1 บทนำ

ในบทนี้แสดงถึงผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองและผลลัพธ์จากการต่อวงจรจริงของเครื่องกำเนิดสัญญาณรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าความถี่ได้โดยมีโอทีเอ (Operational Transconductance Amplifier: OTA) เป็นส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นของวงจร ส่วนความถี่ของเอาต์พุตสามารถปรับได้โดยการปรับค่ากึ่งกลางความถี่ (Center of Frequency) ของตัวกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง โดยที่ค่าตัวประกอบคุณภาพ (Q) ของตัวกรองความถี่ไม่เปลี่ยนแปลง ในส่วนของวิธีเคสไครบิงฟังก์ชันนั้น ได้ถูกใช้ในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิล และวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ ผลการทดลองที่ได้นั้นถูกจำลองจากโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์และการต่อวงจรจริง

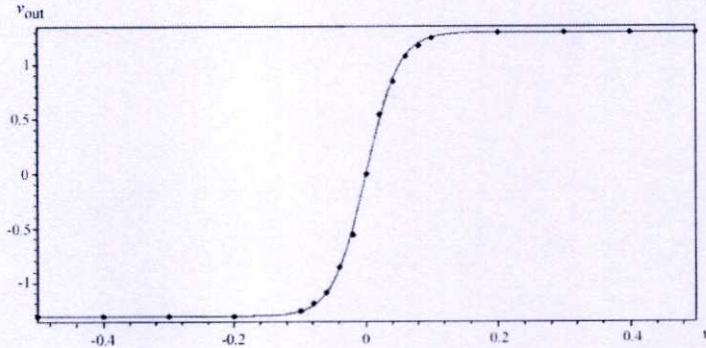
6.2 การทดสอบหาโมเดลทางคณิตศาสตร์ของโอทีเอ

ในการทดลองผู้เขียนได้ทดลองโดยใช้โอทีเอเป็นไอซีสำเร็จรูป LM13600 โดยทำหน้าที่เป็นส่วนไม่เชิงเส้นภายในระบบดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 5.1 โดยผู้เขียนได้ทำการทดสอบโอทีเอเพื่อหาคุณลักษณะระหว่างอินพุตและเอาต์พุตโดยการป้อนสัญญาณอินพุตเข้าสู่โอทีเอและทำการวัดเอาต์พุตจากวงจรดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 วงจรทดสอบโอทีเอ

จากนั้นทำการเขียนกราฟระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่วัดได้ดังแสดงไว้ในรูปที่ 6.2 โดยแกน x แทน V_{in} และแกน y แทน V_{out}



รูปที่ 6.2 การปรับข้อมูล (Data Fitting) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method)

ข้อมูลที่ได้ในรูปที่ 6.2 สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 & -0.3 & -0.2 & -0.1 & -0.08 & -0.06 & -0.04 & -0.02 & 0 \\ -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.25 & -1.18 & -1.08 & -0.85 & -0.55 & 0 \\ 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.08 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.55 & 0.85 & 1.08 & 1.18 & 1.25 & 1.3 & 1.3 & 1.3 & 1.3 \end{bmatrix}$$

ทำการปรับข้อมูลโดยการใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุดดังนี้

$$\min_x \sum_{i=1}^m (v_{out(i)} - f(v_{in(i)}, x))^2 \quad (6.1)$$

โดย $x = (a, b)$ เมื่อ x คือฟังก์ชันของการปรับค่าข้อมูล a เทียบได้กับค่าของกระแสไบอัส (I_b) และ b เทียบได้กับค่าเกน ที่ได้จากการปรับค่าแล้วของโอทีเอ

$$\begin{aligned} f(v_{in}, a, b) &= a \tanh(b v_{in}); \quad a = 1.3 \text{ mA} \\ f(v_{in}, b) &= 1.3 \tanh(b v_{in}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

จากข้อมูลในเมทริกซ์ข้างต้นและสมการที่ 6.1 สามารถกระจายได้เป็น

$$\begin{aligned} S &= (v_{out(1)} - f(v_{in(1)}, b))^2 + (v_{out(2)} - f(v_{in(2)}, b))^2 + \dots + (v_{out(19)} - f(v_{in(19)}, b))^2 \\ &= (-1.3 - f(-0.5, b))^2 + (-1.3 - f(-0.4, b))^2 + \dots + (1.3 - f(0.5, b))^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

จากสมการ 6.3 ทำการหาอนุพันธ์ครั้งที่หนึ่งเพื่อหาจุดต่ำสุด โดยใช้โปรแกรม MAPLE

$$\frac{dS(b)}{db} = 0 \Rightarrow b \approx 20$$

และหาอนุพันธ์ครั้งที่ 2 เพื่อทดสอบว่าที่ $b = 20$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

$$\frac{d^2S(b)}{d^2b} = 0.008308718086 > 0$$

จากการปรับค่าให้เป็นกราฟของฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิกและการหาอนุพันธ์ข้างต้น เราสามารถเขียนสมการคุณลักษณะของโอทีเอได้เป็น

$$v_{out} = 0.0013 \tanh(20v) \quad (6.4)$$

ดังนั้นเราสามารถหาฟังก์ชันถ่ายโอนที่ต้องการ $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ โดยการต่อโอทีเอด้วยเกน 50

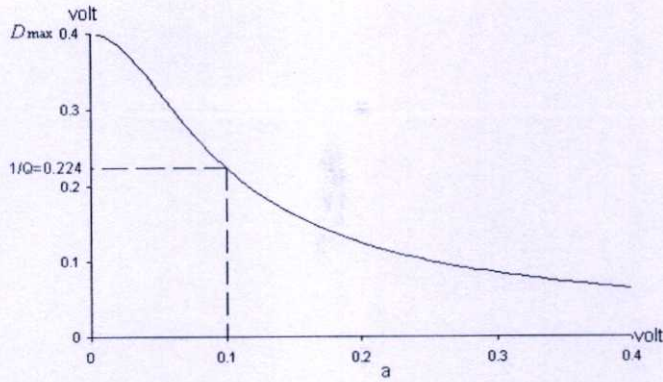
6.3 การออกแบบระบบ

จากแผนภาพการป้อนกลับในรูปที่ 5.1 ทำการออกแบบเครื่องกำเนิดสัญญาณรูปแบบไซน์โดยกำหนด แอมพลิจูดของสัญญาณเป็น 0.1 V และปรับค่าความถี่ให้อยู่ในช่วง 120 ถึง 12,000 rad/sec

ขั้นที่ 1 พิจารณาคุณลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของโอทีเอจากสมการที่ 5.1 โดยการป้อนกระแสไบอัส (I_b) เท่ากับ 1 mA จะได้สมการเอาต์พุตเป็น $i_{out} = 0.001 \tanh(20v)$ แต่จากการทดสอบวงจรโอทีเอในรูปที่ 6.1 และจากสมการที่ 6.4 จะได้เอาต์พุตเป็น $I_{out} = 0.0013 \tanh(20v)$ โดยที่ $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ และมีเกนเป็น 15.385 ถ้าไม่มีสิ่งรบกวนใดๆ จากรูปที่ 5.3 จะได้เอาต์พุต $i_{out} = 0.001 \tanh(20v)$ โดยที่ $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ และมีเกนเป็น 20

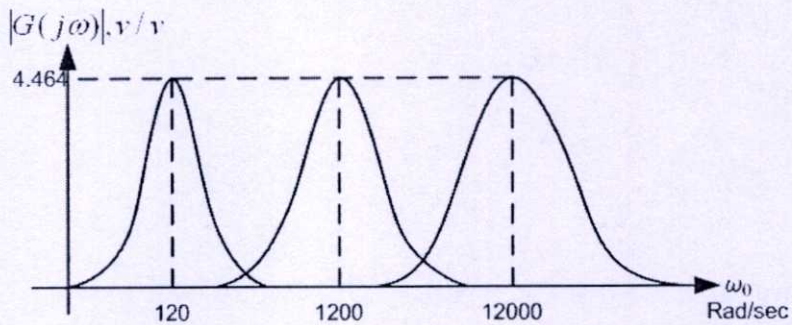
ขั้นที่ 2 กราฟระหว่าง $D(A)$ และ A โดย $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ ได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 6.3 โดยมีเงื่อนไขของการเกิดลิมิตไซเคิลคือ

$$0 < \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} < D_{max} = D(0) \quad (6.5)$$



รูปที่ 6.3 กราฟแสดงฟังก์ชัน $D(A)$ เมื่อ $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$

ขั้นที่ 3 จากกราฟเราสามารถหาค่า $D(0.1) = 0.224$ ได้โดยใช้โปรแกรม MAPLE และจากสมการที่ 5.11 จะได้ $Q = \frac{1}{D(0.1)} = \frac{1}{0.224} = 4.464$ ดังนั้นที่แอมพลิจูด 0.1 โวลต์จะได้ค่า $Q = 4.464$ และสามารถปรับค่าความถี่เอาท์พุทได้จากการปรับค่ากึ่งกลางความถี่ในสมการที่ 5.8 ดังแสดงไว้ในรูปที่ 6.4



รูปที่ 6.4 กราฟของตัวกรองความถี่แถบผ่าน ณ ค่า ω_0 ต่างๆ

ขั้นที่ 4 พิจารณาวงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับสองที่มีค่า Q สูง และมีช่วงความถี่ต่ำ โดยจากวงจรในรูปที่ 5.2 ซึ่งมีสมการคุณลักษณะเป็น

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

กำหนดค่าอุปกรณ์ดังนี้ $C = C_1 = C_2 = 4.7 \mu\text{F}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$ ดังนั้นผลที่ได้จากขั้นที่ 3 และจากสมการที่ 5.9 สามารถหาค่า R_4 ได้ดังนี้

$$Q = 4.464 = \frac{1(1+R_4)}{3 \cdot 1} \quad (6.6)$$

$$R_4 = 12.39 \text{ k}\Omega$$

จากสมการที่ (5.8) สามารถสำหรับการปรับค่าความถี่กึ่งกลางทำได้โดยปรับค่าความต้านทานซึ่งกำหนดให้ $R_6 = R_7 = R$ เมื่อ $C = C_1 = C_2 = 4.7 \mu\text{F}$ ดังนั้นสามารถเขียนความสัมพันธ์ระหว่าง ω_0 และ R ได้ดังนี้

$$\omega_0 = \frac{1}{CR}$$

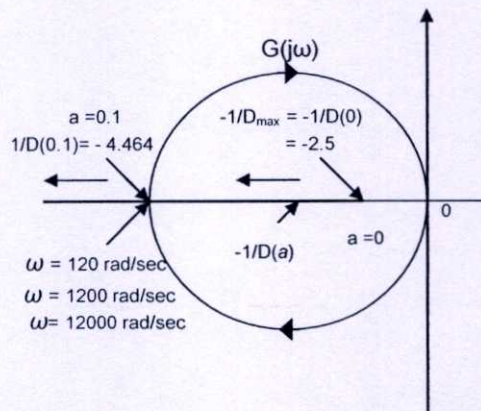
$$\omega_0 = \frac{1}{4.7 \cdot 10^{-6} R} \quad (6.7)$$

ω_0 (rad/s)	R
120	1773.0496 Ω
1200	177.30496 Ω
12000	17.730496 Ω

ตารางที่ 6.1 ความสัมพันธ์ระหว่าง ω_0 และ R

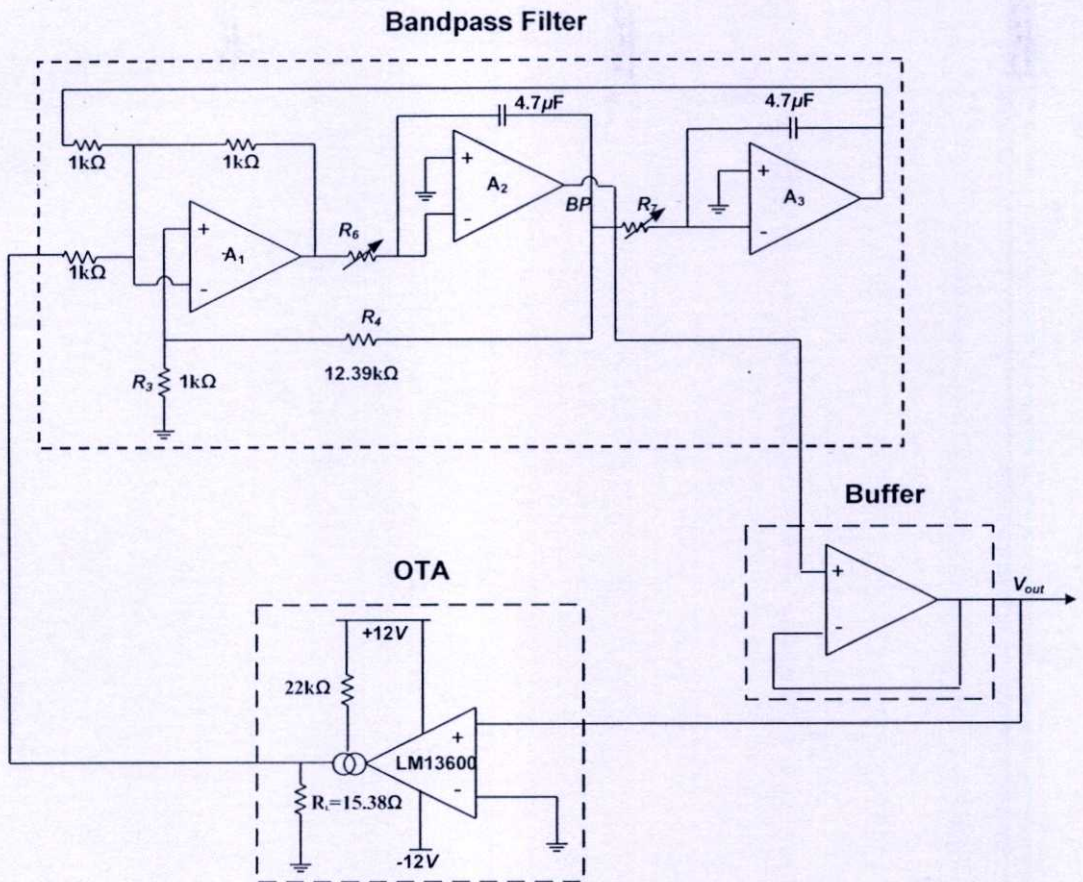
ขั้นที่ 5 จากรูปที่ 6.5 ประกอบด้วยกราฟสองกราฟโดยกราฟแรกคือ $-1/D(A)$ ที่มีจุดเริ่มต้นของกราฟคือ $-1/D(0) = -2.5$ และกราฟที่สองคือ $G(j\omega)$ ซึ่งกราฟทั้งสองตัดกันที่ ω มีค่าแตกต่างกันและแอมพลิจูดมีค่าเท่ากับ 0.1 นั่นคือค่า $-1/D(0.1) = -4.464$

ผลที่ได้จากการตัดกันของกราฟทั้งสองที่ความถี่แตกต่างกันนั้นจะเห็นว่าเกิดลิมิตไซเคิลขึ้น โดยพิจารณาจากจุดที่อยู่ใกล้จุดตัดนั้นจุดที่ไม่ถูกล้อมรอบด้วย $G(j\omega)$ และมีการเคลื่อนตัวไปทางด้าน $-a$ จากจุดที่พิจารณานั้นทำให้สามารถสรุปได้ว่าระบบมีเสถียรภาพ



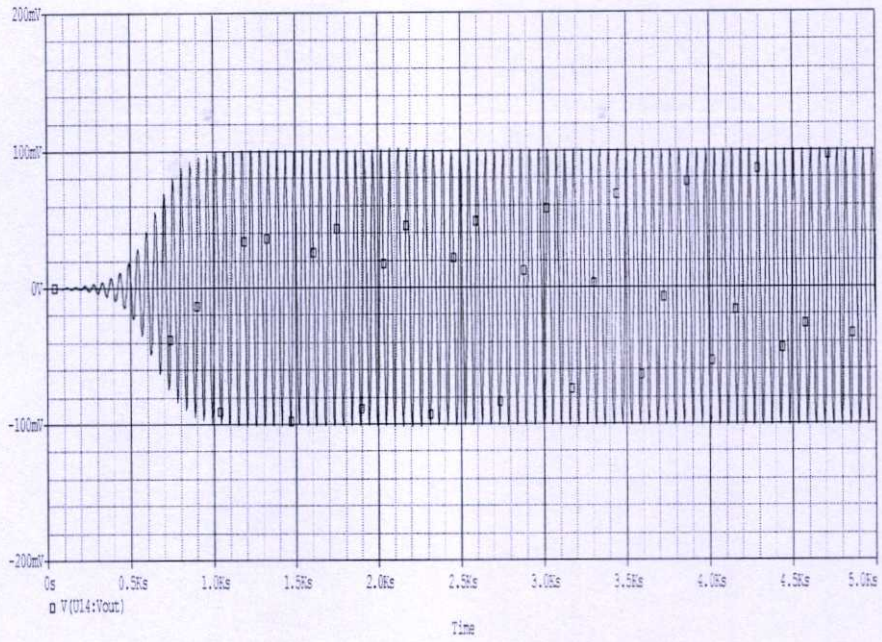
รูปที่ 6.5 กราฟของ $G(j\omega)$ และ $-1/D(A)$

6.4 ผลการเลียนแบบระบบด้วยโปรแกรม ORCAD CAPTURE

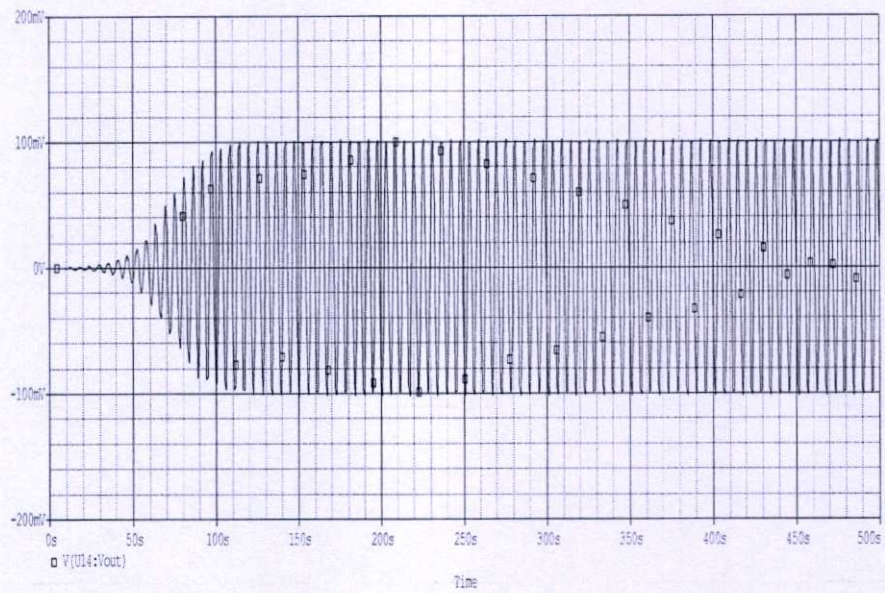


รูปที่ 6.6 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ

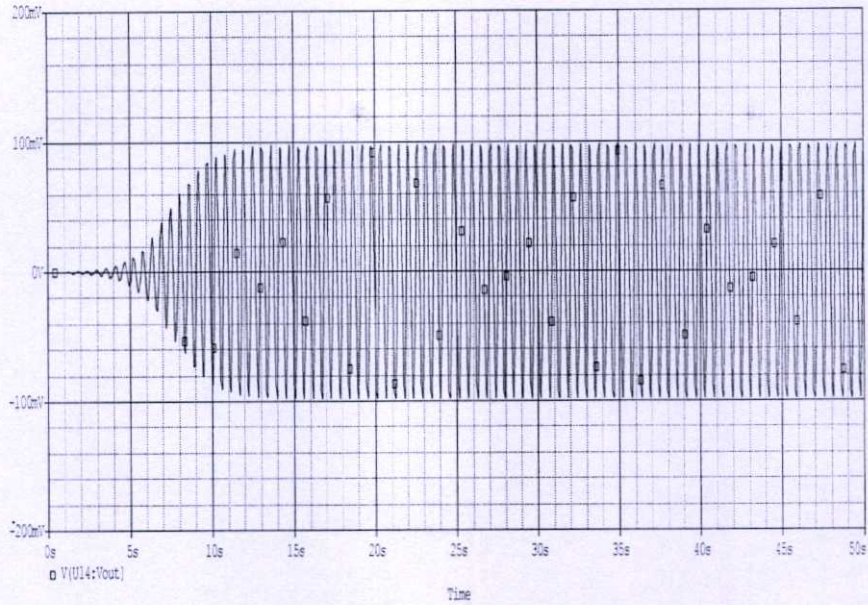
จากรูปที่ 6.6 วงจรประกอบด้วยสองส่วนที่นำมาต่อกันแบบป้อนกลับ ส่วนแรกคือวงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง ส่วนที่สองคือโอทีเอทำหน้าที่เป็นส่วนประกอบที่ไม่เป็นเชิงเส้น จากนั้นทำการจำลองระบบด้วยโปรแกรม ORCAD CAPTURE เอาท์พุทที่ได้เป็นสัญญาณรูปแบบไซน์ที่มีค่าความถี่ของการสั่นต่างๆกันและแสดงไว้ในรูปที่ 6.7 ถึง 6.9



รูปที่ 6.7 สัญญาณเอาต์พุตที่มีความถี่ 120 rad/sec



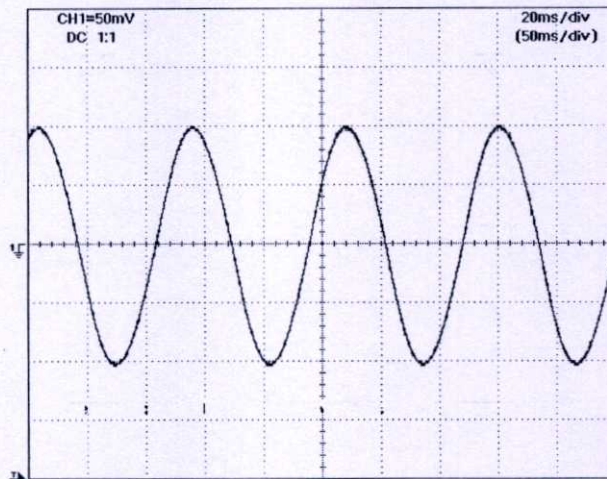
รูปที่ 6.8 สัญญาณเอาต์พุตที่มีความถี่ 1,200 rad/sec



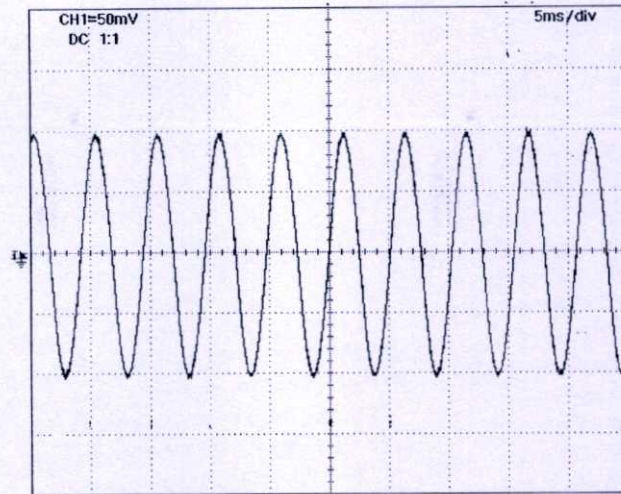
รูปที่ 6.9 สัญญาณเอาต์พุตที่ความถี่ 12,000 rad/sec

6.5 ผลการทดลอง

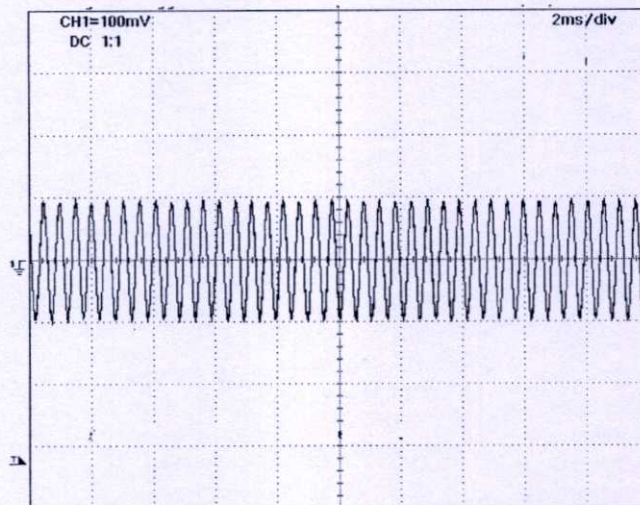
การกำเนิดสัญญาณเกิดขึ้นเมื่อป้อนไฟเลี้ยงให้กับระบบในรูปที่ 6.6 โดยมีค่าอินพุตเป็นศูนย์นั้น จะได้สัญญาณเอาต์พุตเป็นสัญญาณรูปแบบไซน์ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 6.10 ถึง 6.12



รูปที่ 6.10 สัญญาณเอาต์พุตที่แอมพลิจูด 0.1 V และความถี่ 120 rad/sec



รูปที่ 6.11 สัญญาณเอาต์พุตที่แอมพลิจูด 0.1 V และความถี่ 1200 rad/sec



รูปที่ 6.12 สัญญาณเอาต์พุตที่แอมพลิจูด 0.1 V และความถี่ 12,000 rad/sec

จากสัญญาณเอาต์พุตแสดงให้เห็นว่าแอมพลิจูดของการสั่นคงที่ที่ 0.1 V และสามารถปรับความถี่ได้ในช่วง 19.23 Hz หรือ 120 rad/sec ถึง 1923.3 Hz หรือ 12,000 rad/sec ได้จริงโดยการปรับค่าตัวต้านทานจากวงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง

บทที่ 7

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

7.1 บทสรุปและวิจารณ์

ในการออกแบบวงจรออสซิลเลเตอร์ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นั้น เป็นอีกแนวทางหนึ่งที่ได้ทำการวิจัยและพัฒนาขึ้น โดยใช้วงจรโอทีเอ (OTA) เป็นอุปกรณ์ไม่เป็นเชิงเส้นชนิดแอกทีฟ ต่อร่วมอยู่กับอุปกรณ์ที่เป็นเชิงเส้นนั้นคือวงจรกรองความถี่แถบผ่าน โดยข้อดีของวงจรมี้ออกแบบให้วงจรมีแอมพลิจูดตามที่ต้องการได้ซึ่งปรับจากค่าตัวประกอบคุณภาพ โดยแอมพลิจูดนั้นไม่ได้ขึ้นอยู่กับสถานะเริ่มต้นของระบบ และเราได้แสดงให้เห็นว่าความถี่ของการสั่นนั้นสามารถปรับได้อิสระจากแอมพลิจูดของการสั่นซึ่งสามารถปรับค่าความถี่ได้จากตัวต้านทาน

ในส่วนของวิธีการเคสโครบิงฟังก์ชันนั้น สามารถทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลและสามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบได้ นอกจากนี้ผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรมานั้นได้มาจากโปรแกรม ORCAD CAPTURE และยังมีโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่ช่วยในการทดลองได้แก่ MAPLE และ MATLAB

7.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการวิจัยในการพัฒนาต่อ

ในวงจรที่ออกแบบไว้นั้น ได้ศึกษาที่อุณหภูมิห้องและควบคุมแรงดันที่ค่าหนึ่งเท่านั้น ดังนั้นแนวทางเพื่อศึกษาต่อคือ ออกแบบวงจรและทดสอบวงจรที่อุณหภูมิแตกต่างกันหรือทดสอบที่แรงดันแตกต่างกัน โดยจากวงจรสามารถปรับค่าความถี่ได้จากการปรับตัวต้านทานครั้งละสองตัวซึ่งมีการปรับทีละตัว ดังนั้นแนวทางพัฒนาต่อคือการปรับค่าตัวต้านทานสองตัวพร้อมๆ กัน และจากวงจรรวมทั้งหมดยังสามารถปรับค่าแอมพลิจูดและความถี่ได้อย่างอิสระต่อกัน

นอกจากนั้น สัญญาณเอาต์พุตที่ได้ออกมาจากเครื่องกำเนิดสัญญาณในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นเพียงสัญญาณต้นแบบ เพื่อความถูกต้องควรนำสัญญาณเอาต์พุตที่ได้ไปเปรียบเทียบกับสัญญาณมาตรฐานด้วย

บรรณานุกรม

- [1] นงลักษณ์ เอี่ยมจรัส. “การออกแบบวงจรความถี่และวงจรควบคุมเครื่องอัดซิเลเตอร์โดยใช้กระแสควบคุม.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2545.
- [2] ยืน ภู่วรรณ. **ทฤษฎีและการใช้งานอิเล็กทรอนิกส์**. กรุงเทพฯ : ซีเอ็ดดูเคชั่น, 2538.
- [3] ถักรีชา ชิตวงศ์ “วิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์.” ภาควิชาวิศวกรรมวัดคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2544.
- [4] Slotine J.J.E., Li W. **Applied Nonlinear Control**. New Jersey : Prentice Hall, Inc., 1991.
- [5] A.J. Peyton, V. Walsh. **Analog electronics with Op Amps : a source book of practical circuits**. New York : Cambridge University Press, Inc., 1993
- [6] Pranayanuntana P., Kaewsaiha P. “Design of sinusoidal oscillator with controllable amplitude using describing function method.” Masterthesis ControlEngineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. School of Graduate Studies. 2008.
- [7] Schilling and Hua Lee, **Engineering Analysis: A Vector Space Approach**, New York : John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [8] Kevin St , **Electric circuits**, [Online]. Available : www.electronics.dit.ie/staff/ptobin/chapter2a.pdf.2000.
- [9] Seidman, Arthur H. **Integrated circuits applications handbook**. New York : John Wiley & Sons, Inc. 1983
- [10] National Semiconductor. **LM13600 Dual Operational Transconductance Amplifiers with Linearizing Diodes and Buffers**. [Online]. Available : [http:// www.datasheet-catalog.com](http://www.datasheet-catalog.com). 1995.
- [11] Khalil, H. K. **Nonlinear Systems**. New Jersey : Prentice-Hall, Inc., 2002.
- [12] Richard A. Honeycutt, **Op-Amps and linear integrated circuits**, New York : Delmar Publishers, Inc. 1988.
- [13] Jefferson C.B. **Operational amplifiers and linear integrated circuits**. Boston : PWS-KENT, Inc., 1988
- [14] Mancini, R. and Palmer, R. Mancini, R. and Palmer, R. **Sine-Wave Oscillator**. [online]. Available : <http://www.calvin.edu/~pribeiro/courses/engr332/Handouts/oscillators.pdf>. 2001.

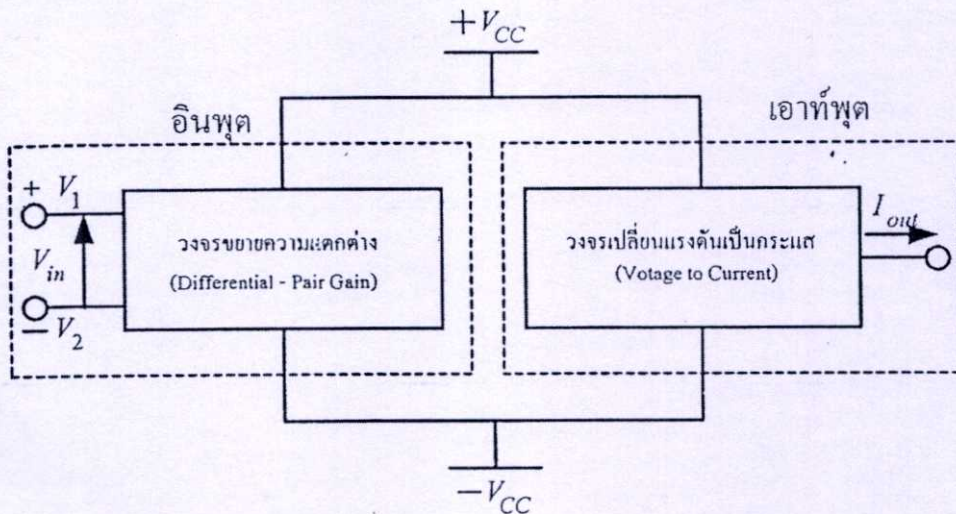
ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

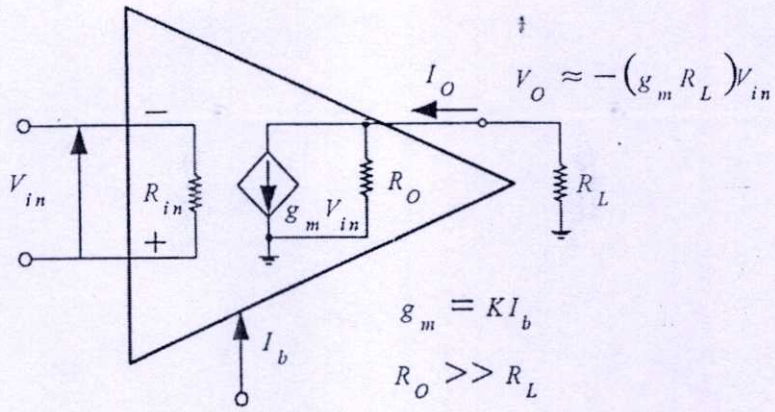
ทฤษฎีและหลักการทำงานของวงจรมายโอทีเอ(OTA)

ก.1 หลักการทำงานพื้นฐานของวงจรมายโอทีเอ

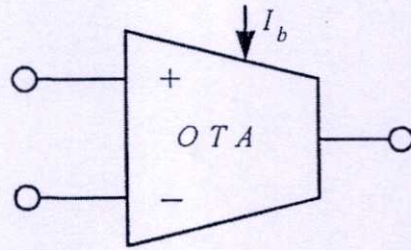
วงจรมายโอทีเอจัดเป็นวงจรมายแบบแอกทีฟประเภทหนึ่ง ที่ให้กำเนิดสัญญาณกระแสที่ด้านเอาต์พุตของวงจรมาย นั้นคือวงจรมายโอทีเอจะมีลักษณะเป็นแหล่งจ่ายกระแส ที่ควบคุมด้วยแรงดัน(Voltage Control Current Source : VCCS) โดยที่ค่ากระแสเอาต์พุตของวงจรมาย(Output Current : I_o) ของวงจรมายมีค่าขึ้นอยู่กับผลต่างของแรงดันอินพุต (Input Voltage : V_{in}) และมีค่าอัตราขยายความนำหรือค่าอัตราขยายทรานส์คอนดักแตนซ์ (Transconductance Gain : g_m) ของวงจรมาย เป็นค่าอัตราส่วนระหว่างกระแสเอาต์พุต ต่อค่าผลต่างของแรงดันอินพุต ซึ่งอัตราขยายทรานส์คอนดักแตนซ์ ของวงจรมายโอทีเอสามารถควบคุมได้ด้วยกระแสจากภายนอก จึงทำให้เกิดการพัฒนาไปสู่วงจรมายที่สามารถควบคุมได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ (Electronic Tunable) โดยสามารถเขียนบล็อกโคอะแกรมได้ดังโครงสร้างพื้นฐานของวงจรมายโอทีเอ วงจรมายสมมูลทางอุดมคติของวงจรมายโอทีเอ และสัญลักษณ์แทนวงจรมายโอทีเอ ได้ดังรูปที่ ก.1 ก.2 ก.3 ตามลำดับ



รูปที่ ก.1 บล็อกโคอะแกรมแสดงโครงสร้างพื้นฐานของวงจรมายโอทีเอ

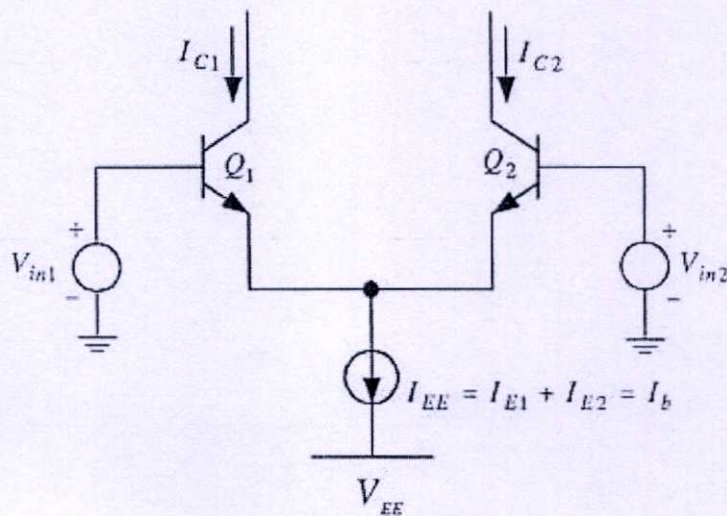


รูปที่ ก.2 วงจรสมมูลทางอุดมคติของวงจรรขยายโอทีเอ



รูปที่ ก.3 สัญลักษณ์แทนวงจรรขยายโอทีเอ

ก.2 การวิเคราะห์หาค่าอัตราขยาย g_m สำหรับวงจรรขยายแบบดิฟเฟอเรนเชียล



รูปที่ ก.4 วงจรรขยายแบบดิฟเฟอเรนเชียล

สมมติให้ I_{EE} เป็นแหล่งจ่ายกระแสไปอัสทางอุดมคติ จ่ายเข้าที่ขาคอมมอนขิมิเตอร์ของ วงจร(Common-Emitter) ซึ่งสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของกระแสไปอัส I_b ได้ดังนี้

$$I_{E1} + I_{E2} = \frac{I_{C1}}{\alpha_F} + \frac{I_{C2}}{\alpha_F} = I_b \quad (ก.1)$$

และเนื่องจาก

$$I_C = I_s e^{\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right)}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$I_C = I_s e^{\left(\frac{qV_{BE1}}{kT}\right)} \quad (ก.2)$$

$$I_C = I_s e^{\left(\frac{qV_{BE2}}{kT}\right)} \quad (ก.3)$$

เมื่อวิเคราะห์รูปแรงดันที่ขาเบส-อิมิเตอร์ของทรานส์ซิสเตอร์ Q_1 และ Q_2 จะได้ว่า

$$-V_{in1} + V_{BE1} - V_{BE2} + V_{in2} = 0 \quad (ก.4)$$

$$V_{BE1} - V_{BE2} = V_{in1} - V_{in2} = V_{in} \quad (ก.5)$$

โดยที่ V_{in} เป็นค่าผลต่างของแรงดันอินพุต

และจากสมการที่ (ก.2) และ (ก.3) จะได้สมการแสดงอัตราส่วนระหว่างกระแส I_{C1} และ I_{C2} ดังนี้

$$I_{E1} + I_{E2} = \frac{I_{C1}}{I_{C2}} = e^{q(V_{BE1} - V_{BE2})/kT} = e^{qV_{in}/kT} \quad (ก.6)$$

จากสมการ(ก.1)จะได้ว่า

$$I_{C1} = \frac{\alpha_F I_{EE}}{1 + e^{-qV_{in}/kT}} \quad \text{และ} \quad I_{C2} = \frac{\alpha_F I_{EE}}{1 + e^{qV_{in}/kT}}$$

ดังนั้น I_O สามารถหาค่ากระแสเอาต์พุตซึ่งมีค่าเท่ากับผลต่างของกระแสคอลเลกเตอร์ I_{C1} และ I_{C2} นั่นคือ $I_O = I_{C1} - I_{C2}$ ได้จากสมการ

$$I_O = \alpha_F I_{EE} \left(\frac{1}{1 + e^{-qV_{in}/kT}} - \frac{1}{1 + e^{qV_{in}/kT}} \right) \quad (ก.7)$$

$$I_O = \alpha_F I_{EE} \tanh\left(\frac{qV_{in}}{kT}\right) \quad (\text{ก.8})$$

เนื่องจาก $\alpha_F \approx 1$

$$I_O \approx I_{EE} \tanh\left(\frac{V_{in}}{2V_T}\right) \quad (\text{ก.9})$$

เนื่องจาก

$$g_m = \frac{dI_o}{dV_{in}} = \frac{I_{EE}}{2V_T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{V_{in}}{2V_T}\right) \quad (\text{ก.10})$$

$$g_m = \left. \frac{dI_o}{dV_{in}} \right|_{V_{in}=0} = \frac{I_{EE}}{2V_T} \quad (\text{ก.11})$$

และกำหนดให้เป็นกระแสไบอัสที่ป้อนเข้าสู่วงจรตั้งนั้นจากสมการที่ (ก.11) จะได้สมการแสดงค่าอัตราขยายทรานส์คอนดักแตนซ์ของวงจรโอทีเอเป็น

$$g_m = \left. \frac{dI_o}{dV_{in}} \right|_{V_{in}=0} = \frac{I_{bias}}{2V_T} \quad (\text{ก.12})$$

ภาคผนวก ข
ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

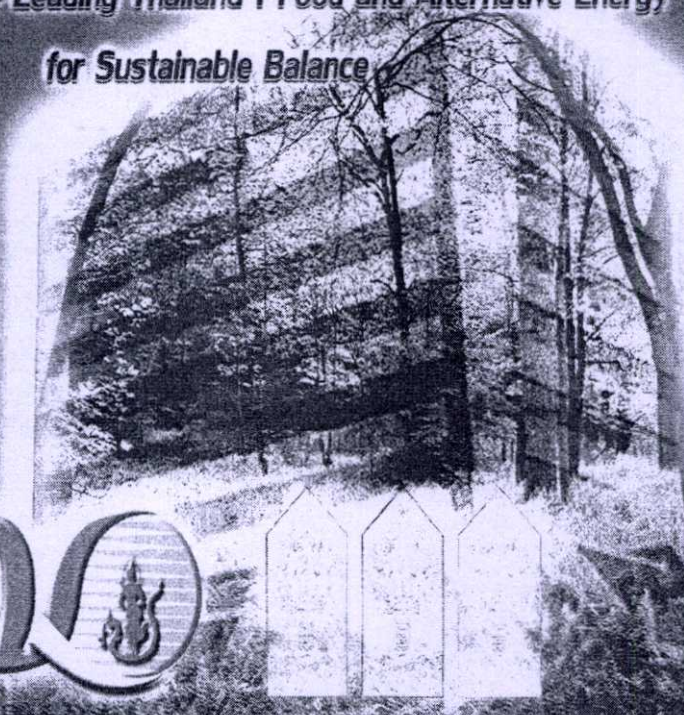


เรื่องเต็มการประชุมทางวิชาการ ครั้งที่ ๔๗ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

The Proceeding of 47th Kasetsart University Annual Conference

เล่มที่ 7 สาขาสถาปัตยกรรมศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์
(Subject: Architecture and Engineering)

เกษตรนำไทย : อาหารและพลังงานทดแทนสู่สมดุลอย่างยั่งยืน
*Agricultural Science Leading Thailand : Food and Alternative Energy
for Sustainable Balance*



เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับความถี่ได้

A Sinusoidal Nonlinear Oscillator with Adjustable Frequency

นธิมา หาญเม่ง¹ และประเมษฐ์ ประณยานันท์¹

Nithima Hanmeng¹ and Poramate Pranayanuntana¹

บทคัดย่อ

บทความนี้เสนอ เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นในรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับความถี่ได้ด้วยการปรับความถี่จุดศูนย์กลางของวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับสองซึ่งสามารถรักษาค่าตัวประกอบคุณภาพให้คงที่ วิธีเคสโคโรบิงค์ฟังก์ชันได้ถูกนำมาใช้ในการทำนายลิมิตไซเคิลและวิเคราะห์ เสถียรภาพของการสั่นวงจรถูกประกอบด้วยสองส่วนที่สำคัญในการต่อแบบป้อนกลับอย่างแรกคือ โอทีเอซึ่งเป็นองค์ประกอบแบบไม่เป็นเชิงเส้นในส่วนป้อนกลับและวงจรกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านในส่วนป้อนไปหน้าผลที่ได้จากการทดลองเป็นก่าจำลองโดยโปรแกรมคอมพิวเตอร์เช่น MAPLE, ORCAD CAPTURE และ MATLAB

Abstract

This paper presents a sinusoidal nonlinear oscillator with adjustable frequency. The frequency of oscillation is adjusted via the change of the center frequency of the second order band-pass filter while keeping its quality factor constant. The describing function method is used to predict the limit cycles and to analyze the stability of oscillation. The proposed circuit consists of two important parts in the feedback connection configuration, an operational transconductance amplifier (OTA) as a nonlinear element in feedback path and second a bandpass filter in the feedforward path. The experimental results are simulated by computer programs such as ORCAD CAPTURE and MATLAB.

Keyword : OTA, describing function, nonlinear oscillator, frequency adjustment

e-mail address: nithima_hanmeng@hotmail.com

Introduction

A feedback connection configuration in Figure 1 consists of two parts, $G(s)$ in the upper block is a second order high- Q bandpass filter element and $\psi(\cdot)$ in the lower block is a nonlinear element in which we use operational transconductance amplifier (OTA).

An interesting method to analyze the nonlinear systems which oscillates is the describing function method. The describing function method approximates nonlinear element by a linear one as a ratio of the fundamental component to the complex excitation input. This method is also usable for analyzing the magnitude stabilization phenomena in oscillators.

The Nyquist plot is a useful graphical method when used together with the plot of $-1/D(a)$ in the complex plane they provide an efficient way to find the existence of limit cycles and to check the stabilities of these limit cycles. MAPLE and MATLAB are used in finding the numerical integration of the describing function.

¹ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

Department of Control Engineering, Faculty of Engineer, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

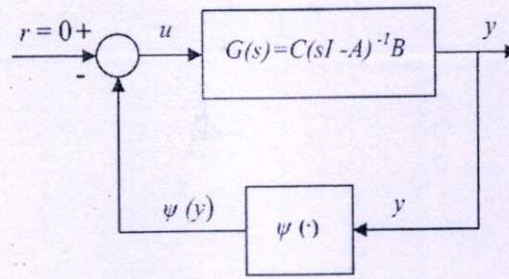


Figure 1. Feedback Connection

Approach and Methods

Consider a nonlinear system in the general form of Figure 1. In order to develop the basic version of the describing function method, the system has to satisfy the following four conditions:

1. There is only a single nonlinear component.
2. The nonlinear component is time-invariant.
3. Corresponding to a sinusoidal input $y = a \sin(\omega_0 t)$ only the fundamental component $w_1(t)$ in the output $w(t) = \psi(a \sin(\omega_0 t))$ has to be considered.
4. The nonlinearity is odd.

1. Periodic Function

Let V be a Hilbert space of periodic functions with period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. The set $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$ is a complete orthonormal set in V with the inner product defined as

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \frac{2}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t)g(t)dt. \quad \text{for all } f, g \in V. \quad (1)$$

If $\|g(t)\| = 1$, then $|\langle f(t), g(t) \rangle| = \|\text{Proj}_g f\|$, when $\text{Proj}_v u := \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$.

Proposition (Fourier or orthonormal expansion)

Let $\{x_k\}$ be a complete orthonormal set in the Hilbert space V above. Then each x in V can be expressed as

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Proj}_{x_k} x. \quad (2)$$

where the equality in (2) is in l_2 sense. We call $\langle x, x_k \rangle$ the Fourier series coefficients of x . Since $\sin(\omega_0 t)$ has period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, that is $\sin(\omega_0(t+T)) = \sin(\omega_0 t)$, then

$$\psi(a \sin(\omega_0(t+T))) = \psi(a \sin(\omega_0 t)) \quad (3)$$

Therefore, $w(t) = \psi(a \sin(\omega_0 t))$ is a periodic function with period T , and with the set $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots\}$ being complete orthonormal, we can write

$$\begin{aligned} w(t) &= \text{Proj}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} w(t) + \text{Proj}_{\cos(\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\sin(\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\cos(2\omega_0 t)} w(t) + \dots \\ &= \text{Proj}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} w(t) + \text{Proj}_{\cos(\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\sin(\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\cos(2\omega_0 t)} w(t) + \text{Proj}_{\sin(2\omega_0 t)} w(t) \dots \end{aligned} \quad (4)$$

or
$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (5)$$

where $\frac{a_0}{2} = Proj_{w(t)}$, $a_n = Proj_{\cos(n\omega_0 t)} w(t)$, $b_n = Proj_{\sin(n\omega_0 t)} w(t)$

Furthermore, since $G(s)$ used has high- Q bandpass characteristics, this implies that only the fundamental component $w_1(t)$ is needed to be considered, namely

$$w(t) \approx w_1(t) = Proj_{\cos(\omega_0 t)} w(t) + Proj_{\sin(\omega_0 t)} w(t) \quad (6)$$

$$= M \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (7)$$

where

$$M(a, \omega_0) = \sqrt{\|Proj_{\cos(\omega_0 t)} w(t)\|^2 + \|Proj_{\sin(\omega_0 t)} w(t)\|^2} = \sqrt{\langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle + \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle} \quad (8)$$

$$\phi(a, \omega_0) = \tan^{-1}(\langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle / \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle) \quad (9)$$

This sinusoidal can be written in complex form as

$$w_1(t) = M e^{j(\omega_0 t + \phi)} = (\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle + j \langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle) e^{j(\omega_0 t)} \quad (10)$$

2. Describing Function Method

The describing function of the nonlinear element is defined to be the complex ratio of the fundamental component of the output of the nonlinear element to the input sinusoidal, i.e.,

$$D(a, \omega_0) = M e^{j(\omega_0 t + \phi)} = \frac{(b_1 + j a_1) e^{j(\omega_0 t)}}{a e^{j(\omega_0 t)}} \quad (11)$$

For the case of single-valued nonlinearity as

$$D(a) = \frac{b_1}{a} = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle}{a} \quad (12)$$

since $w(t)$ is an odd function, a_1 is zero.

In order for a self-sustained oscillation of amplitude a and frequency ω_0 in the system of Figure 1 to exist the variables in the loop must satisfy the following relations:

$$\begin{aligned} w &= D(a)y \\ y &= -G(j\omega_0)w \end{aligned}$$

Therefore, we have $y = -G(j\omega_0)D(a)y$. Because $y \neq 0$, this implies

$$G(j\omega_0)D(a) + 1 = 0 \quad (13)$$

which can be written as

$$G(j\omega_0) = \frac{-1}{D(a)} \quad (14)$$

Equation (14) is the condition of oscillation or so called the condition for existence of limit cycles.

Plots of both the frequency response function $G(j\omega)$ (varying ω) and the negative inverse describing function $(-1/D(a))$ (varying a) in the complex plane are investigated. If the two curves intersect, then there exist limit cycles.

Each intersection point of the curve $G(j\omega)$ and the curve $(-1/D(a))$ corresponds to a limit cycle. If points near the intersection and along the increasing- a side of the curve $(-1/D(a))$ are not encircled by the curve $G(j\omega)$ then the corresponding limit cycle is stable. Otherwise, the limit cycle is unstable. For

example in Figure 2, there exist two limit cycles. Points P_1 and P_2 correspond to the existing limit cycles of a system. P_1 corresponds to the unstable limit cycle, while P_2 refers to the stable one.

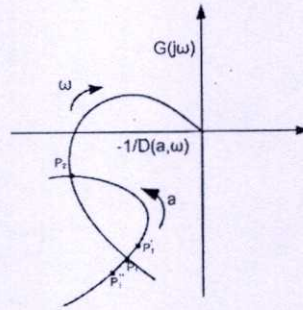


Figure 2. Detection of limit cycles

3. OTA Nonlinear Behavior

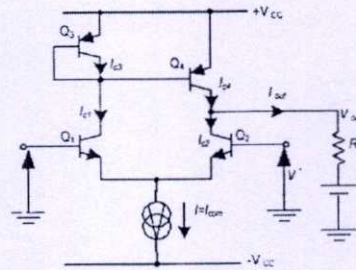


Figure 3. OTA equivalent circuit

The simplified equivalent circuit diagram of an OTA is given in Figure 3. The input-output relation with

$$i_{out} = I \frac{\exp\left(\frac{qv}{kT}\right) - 1}{\exp\left(\frac{qv}{kT}\right) + 1} = I \tanh\left(\frac{v}{2V_T}\right) \quad (15)$$

where $v = v^+ - v^-$, and $V_T = \frac{kT}{q}$.

4. Obtaining a Mathematical Model of an OTA from an Experiment.

The OTA IC LM13600 is used as a nonlinear element for a nonlinear oscillator system in Figure 1. An OTA is tested for its input-output characteristic by applying a triangular signal to the input of the OTA and measuring its output as shown in Figure 4.

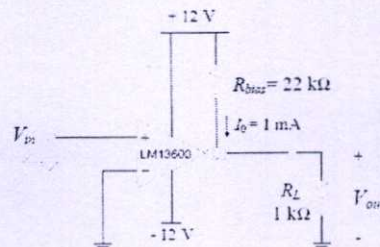


Figure 4. OTA test circuit.

The input-output relationship obtained as an xy -graph shown in Figure 5, where x -axis and y -axis represents V_{in} and V_{out} respectively. Measured data from the graph of Figure 5 are shown as follows.

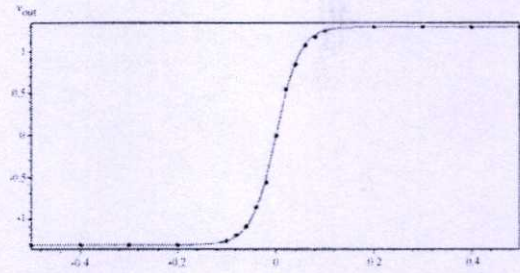


Figure 5. Data fitting using a least squares method.

$$\begin{bmatrix} t_i \\ y_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 & -0.3 & -0.2 & -0.1 & -0.08 & -0.06 & -0.04 & -0.02 & 0 & 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.08 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.25 & -1.18 & -1.08 & -0.85 & -0.55 & 0 & 0.55 & 0.85 & 1.08 & 1.18 & 1.25 & 1.3 & 1.3 & 1.3 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Fitting data by using least squares method

$$\min_x \sum_{i=1}^m (y_i - f(t_i, x))^2 \quad (16)$$

where $x = (a, b)$ and

$$\begin{aligned} f(t, a, b) &= a \tanh(bt); \quad a = 1.3 \\ f(t, b) &= 1.3 \tanh(bt) . \end{aligned} \quad (17)$$

With the data from matrix above, summation in (16) can be expanded as

$$\begin{aligned} S &= (y_1 - f(t_1, b))^2 + (y_2 - f(t_2, b))^2 + \dots + (y_{19} - f(t_{19}, b))^2 \\ &= (-1.3 - f(-0.5b))^2 + (-1.3 - f(-0.4b))^2 + \dots + (1.3 - f(0.5b))^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Then differentiate (18) to find a minimum point (Solution by MAPLE)

$$\begin{aligned} \frac{dS(b)}{db} &= 0 \quad \Rightarrow \quad b \approx 20 \\ \frac{d^2S(b)}{d^2b} &= 0.008308718086 > 0 . \end{aligned}$$

Note that the second derivative test above confirms that $b = 20$ is the minimum point.

By fitting the data to a graph of \tanh function, and from the derivation above, we obtain a practical OTA characteristic as

$$v_{out} = 1.3 \tanh(20v) \quad (19)$$

So we can obtain our desired transfer function of $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ by cascading the OTA with amplifier with gain 15.385 V/A.

5. Bandpass Filter Design

The second order bandpass filter in Figure 6, has bandpass filter characteristics of the form

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \quad (20)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad (21)$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{1}{3} \left(\frac{R_3 + R_4}{R_3} \right) \quad (22)$$

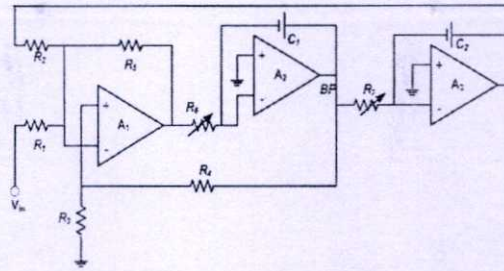


Figure 6. Second order bandpass filter circuit [5]

The passive component values are chosen as $R_1 = R_2 = R_5 = 100 \text{ k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 4.7 \mu\text{F}$, $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 34.76 \text{ k}\Omega$ (fixed $Q = 4.464$) and the center of frequency can be adjusted by varying the value of $R_6 = R_7 = R$

6. Design Procedure

For the linear system in Figure 1 having bandpass filter characteristics of the for $G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$, where ω_0 is the resonant frequency and 2α is the bandwidth. If a self-excited oscillation exists with the frequency of oscillation at $\omega = \omega_0$, then

$$G(j\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2\alpha} = -Q \quad (23)$$

Therefore the condition of oscillation, or condition for existence of limit cycle of equation (14) becomes

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} = -\frac{1}{G(j\omega_0)} = D(a) \quad (24)$$

where Q is the quality factor of the bandpass filter. The far right-hand side of (24) is the describing function of the function $\psi(\cdot)$, and for a fixed $\psi(\cdot)$, it depends only on the magnitude of oscillation as follows:

$$D(a) = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle}{a} = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d(\theta) \quad (25)$$

For known values of α and ω_0 , $D(a)$ is an equation in only one unknown variable, a , and with the aid of modern computers, one can solve numerically for a given the condition for existence of limit cycle or one can plot $D(a)$ against a . From (24), in order for the limit cycle to exist it is required that

$$0 < \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} < D_{\max} = D(0) \quad (26)$$

as can be seen in Figure 7.

Example

Let us try to design an OTA-based sinusoidal nonlinear oscillator of constant amplitude 0.1volts and adjust the frequency of oscillation between 120 rad/s to 12,000 rad/s.

Step1. For an OTA circuit in Figure 3, with $I = 1 \text{ mA}$, we have $i_{out} = 0.0013 \tanh(20v)$. Then $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ can be obtained with an additional amplifier of gain 15.385 V/A at the output of the OTA.

Step2. The plot $D(a)$ with respect to a , for $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$, is shown in Figure 7.

Step3. With $a = 0.1$ volt, we have $Q = \frac{1}{D(0.1)} = \frac{1}{0.224} = 4.464$, $D(0.1)$ was evaluated numerically by a mathematical software such as MAPLE. By the way from equation (22), we can set $Q = 4.464$ by setting $R_3 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_4 = 12.392 \text{ k}\Omega$. We can vary the frequency of oscillation by changing the center frequency in (21), as shown in Figure 8 and Table 1, to achieve the desire specification.

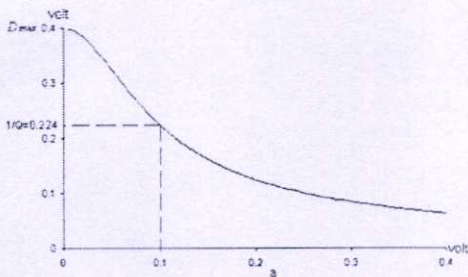


Figure7. $D(a)$ for $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$

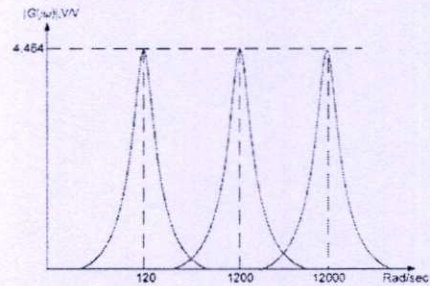


Figure 8. Bandpass Filter with different ω_0

ω_0 (rad/s)	R
120	1773.0496 Ω
1200	177.30496 Ω
12000	17.730496 Ω

Table1. Value of center frequency ω_0 and R_4 .

Step4. From Figure 9, the starting point of $-1/D(a)$ is $-1/D(0) = -2.5$ and the locus of $-1/D(0.1)$ intersects with the locus of $G(j\omega)$ with $\omega=120 \text{ rad/s}$ when $R = 1773.0496 \Omega$, $\omega=1200 \text{ rad/s}$ when $R = 177.30496 \Omega$, $\omega=12000 \text{ rad/s}$ when $R=17.730496 \Omega$ at the point $(-4.464, 0)$, therefore there exist a limit cycle. The point near the intersection and along the increasing $-a$ side of the curve $-1/D(a)$ are not encircled by the curve $G(j\omega)$. This implies that the limit cycle is stable.

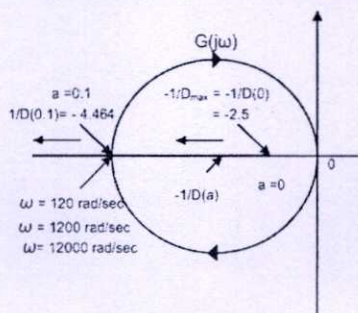
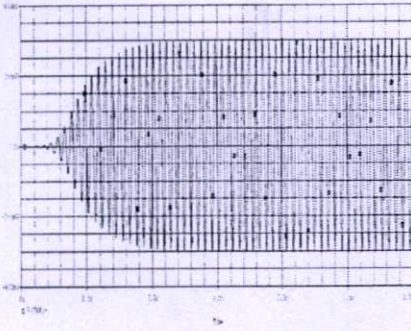


Figure 9. Plots of $G(j\omega)$ and $-1/D(a)$

Experimental Result

The output of sinusoidal signals with different frequencies of oscillation are shown in Figures 10-



12.

Figure 10. The signal at $\omega_0 = 120$ rad/s

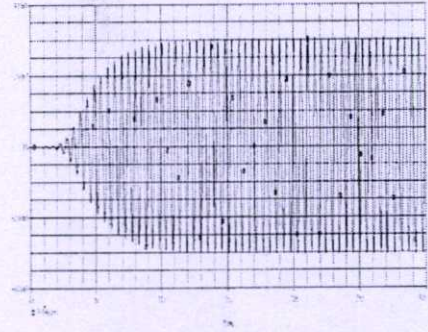


Figure 11. The signal at $\omega_0 = 1,200$ rad/s

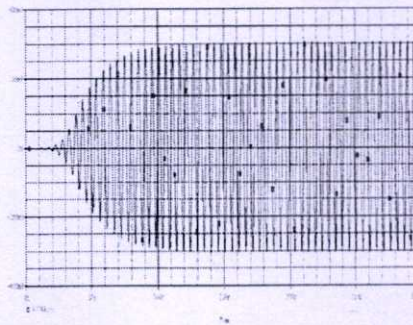


Figure 12. The signal at $\omega_0 = 12,000$ rad/s

Conclusion

The presented OTA-based sinusoidal nonlinear oscillator with independently adjustable frequency of oscillation has confirmed the theoretical result. ORCAD CAPTURE, MAPLE and MATLAB are the helpful computer softwares that can help us in circuit simulation, numerical integration and graphical plots, etc. The describing function method is a very useful method to forecast the existence of limit cycles and to determine the stability of the limit cycles.

Reference

- [1] J.-J. E. Slotine, W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice-Hall, Inc. 1991
- [2] H.K. Khalil, Nonlinear System, New Jersey : Prentice- Hall, Inc. 2002
- [3] P. Pranayanuntana, P. Kaewsaiha, "A design of an OTA-based Sinusoidal Nonlinear Oscillator " The Proceedings of the 29th Electrical Engineering Conference, Chonburi, November 9-10, 2006
- [4] M. Stoll, Introduction to Real Analysis, Addison Wesley Longman, Inc. 2001.
- [5] Kevin St, Electric circuits, www.electronics.dit.ie/staff/ptobin/chapter2a.pdf

ประวัติผู้เขียน

นางสาวนิธิมา หาญเม่ง เกิดเมื่อวันศุกร์ที่ 21 กันยายน พ.ศ.2527 ที่จังหวัดภูเก็ต จบปริญญาตรี คณะวิทยาศาสตร์ สาขาสถิติประยุกต์ ณ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปี 2550 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโท หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ในปีการศึกษา 2550