

การศึกษาปรากฏการณ์ออสซิลเลเตอร์โดยอาศัยแบบจำลอง
การออสซิลเลตแบบถูกบังคับด้วยตัวแปรเวลาหลายตัว

A STUDYING OSCILLATOR PHENOMENA BASED ON MULTI-TIME
FORCED OSCILLATION CIRCUIT MODEL

ธงชัย มณีชูเกตุ

THONGCHAI MANEECHUKATE

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

KMITL-2009-EN-D-018-123

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษาปรากฏการณ์ออสซิลเลเตอร์โดยอาศัยแบบจำลอง
การออสซิลเลตแบบถูกบังคับด้วยตัวแปรเวลาหลายตัว

A STUDYING OSCILLATOR PHENOMENA BASED ON MULTI-TIME
FORCED OSCILLATION CIRCUIT MODEL



ธงชัย มณีชูเกตุ

THONGCHAI MANEECHUKATE

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน **105416**
วัน,เดือน,ปี. 23 พ.ย. 2552



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

KMITL-2009-EN-D-018-123

**A STUDYING OSCILLATOR PHENOMENA BASED ON MULTI-TIME
FORCED OSCILLATION CIRCUIT MODEL**

THONGCHAI MANEECHUKATE

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
DOCTOR OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

2009

KMITL-2009-EN-D-018-123

COPYRIGHT 2009

FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การศึกษาปรากฏการณ์ออสซิลเลเตอร์โดยอาศัยแบบจำลองการออสซิลเลตแบบถูกบังคับด้วยตัวแปรเวลาหลายตัว

Thesis Title A Studying Oscillator Phenomena Based on Multi-Time Forced Oscillation Circuit Model

นักศึกษา นายธงชัย มณีชูเกตุ

รหัสประจำตัว 47060057

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน

หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2009-EN-D-018-123

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
รศ.ดร.วันชัย	ริ้วรุจา	
ผศ.ดร.พิพัฒน์	พรหมมี	
ดร.มนตรี	คำเงิน	
ผศ.ดร.พูลศักดิ์	โกษิยาภรณ์	
รศ.ดร.ปราโมทย์	วาดเขียน	

วัน/เดือน/ปี ที่สอบ วันศุกร์ที่ 21 สิงหาคม พ.ศ. 2552 เวลา 10.00-12.00 น.

สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 3 ห้องประชุม 2

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร.กอบชัย เดชหาญ)

คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

วันที่ 21 สิงหาคม พ.ศ. 2552

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การศึกษาปรากฏการณ์ออสซิลเลเตอร์โดยอาศัยแบบจำลอง การออสซิลเลตแบบถูกบังคับด้วยตัวแปรเวลาหลายตัว
นักศึกษา	นายธงชัย มณีชูเกตุ
รหัสนักศึกษา	47060057
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรคุณวุฒิบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	2552
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รองศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ นำเสนอแบบจำลองคณิตศาสตร์แบบใหม่กับการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์ ของวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 บนพื้นฐานแนวคิดการใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลา เพื่อศึกษาปรากฏการณ์ออสซิลเลเตอร์ภายใต้สภาวะอินพุตบังคับ ผลการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ของผลตอบสนองธรรมชาติ มีผลเฉลยที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบปิด ซึ่งจะทำให้ง่ายและสะดวกต่อการได้มาของผลตอบสนองบริบูรณ์ และยังส่งผลต่อผลตอบสนองบริบูรณ์จัดให้อยู่ในรูปแบบปิดได้อีกด้วย จากผลเฉลยที่ได้จะพบว่าค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะไม่ใช้ค่าคงที่ แต่จะแปรเปลี่ยนไปตามผลตอบสนองบังคับของระบบ สำหรับฟังก์ชันบังคับอินพุตของระบบที่เป็นค่าคงที่ วิธีการวิเคราะห์แบบใหม่ที่นำเสนอจะให้ผลเฉลยตรงกันกับวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิมทุกประการ ในกรณีของฟังก์ชันบังคับที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลานั้น จะให้ผลที่แตกต่างจากวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม นั่นคือ ผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดที่ได้จากการวิเคราะห์ สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตของออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ได้ และสามารถควบคุมได้โดยง่ายจากผลตอบสนองบังคับของระบบ และยังสามารถประยุกต์ใช้งานออสซิลเลเตอร์ไปเป็นตัวมอดูเลตเชิงขนาดได้อีกด้วย ด้วยเหตุที่การมอดูเลตสัญญาณกับตัวให้กำเนิดสัญญาณคลื่นพาห์ เป็นวงจรออสซิลเลเตอร์ตัวเดียวกัน จึงทำให้วงจรมีขนาดเล็ก กะทัดรัด นอกจากนี้แล้ว วิทยานิพนธ์นี้ ยังได้นำเสนอการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์สำหรับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เพื่อศึกษาโครงสร้างคู่ว่า เพราะเหตุใด ออสซิลเลเตอร์ชนิดนี้จึงสามารถให้ความถี่ย่านกว้างได้ ผลการทดลองควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณ ไซน์ซอซคอลลออสซิลเลตเอาต์พุต ด้วยการเพิ่มและลดค่าแรงดันและกระแสไฟตรงอินพุต จะพบว่าแอมพลิจูดของสัญญาณ ไซน์ซอซคอลลออสซิลเลตเอาต์พุตจะมีการเพิ่มและลดในทิศทางตรงกันข้ามกับอินพุตไฟตรงที่ป้อนให้กับวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ สอดคล้อง

ตรงกัน ซึ่งให้ผลเป็นไปตามความสัมพันธ์ของผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดที่วิเคราะห์ได้ และเมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณในลักษณะเชิงพลวัต ค่าแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ชอยคอลลเอาต์พุตจะมีการเปลี่ยนแปลงตามลักษณะฟังก์ชันของสัญญาณอินพุต โดยมีเฟสตรงกันข้ามกับสัญญาณอินพุต ผลการประยุกต์ใช้งานผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดกับการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดจะพบว่า ค่าองค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณเอเอ็มที่มอดูเลตได้ มีองค์ประกอบสเปกตรัมความถี่ถูกต้องตามสัญญาณข่าวสารอินพุตแต่ละรูปคลื่นที่ป้อนให้กับวงจร และผลการทดลองโดยใช้ออป-แอมป์ $\mu A741$ และ $LF351$ ในวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ โดยโครงสร้างทางความถี่ของอุปกรณ์แอกทิฟที่นำมาใช้จะมีผลต่อความถี่ย่านกว้างของวงจรชนิดนี้ ที่ซึ่งวงจรที่ใช้ออป-แอมป์ $\mu A741$ จะให้สัญญาณออสซิลเลตในย่านความถี่ 306.8 Hz - 99.6 kHz สำหรับออป-แอมป์ $LF351$ จะอยู่ในย่านความถี่ 310.6 Hz - 303.5 kHz ทั้งนี้ ผลการคำนวณเชิงตัวเลข ผลการเขียนแบบวงจร และผลการทดลองจากการปฏิบัติจริง ให้ผลสอดคล้องตรงกันกับทฤษฎี ซึ่งยืนยันผลการวิเคราะห์ที่นำเสนอได้เป็นอย่างดี

Thesis Title	A Studying Oscillator Phenomena Based on Multi-Time Forced Oscillation Circuit Model
Student	Mr. Thongchai Maneechukate
Student ID.	47060057
Degree	Doctor of Engineering
Program	Electrical Engineering
Year	2009
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Dr. Paramote Wardkein

ABSTRACT

This doctoral thesis proposes a new mathematical model for analysis the complete response analysis of a second-order oscillator which is based on a multi-time technique for separating time-scale to observe phenomenon of the oscillator under forcing input condition. The proposed mathematical analysis results in coefficient of natural response provide in closed form solution. The obtained closed-form solution not only simplifies the determination of the complete response but also the closed-form solution of the complete response. It is found from the obtain closed-form solution that amplitude of the natural response is not constant but varies with the force response of the system. In addition, the proposed analysis provides the identical solution to that of the conventional analysis for a constant forcing input but provides the different solution for a time-varying forcing input. The derived closed-form solution can be applied for controlling amplitude of a second-order oscillator. Moreover, with the proposed technique, an oscillator can be applied to amplitude modulator. In this application, a compact amplitude modulator is achieved since modulating and carrier generating is accomplished in one circuit. Moreover, the proposed mathematical analysis can be used to explain wide-band characteristic of the quadrature oscillator. It is found from the experiments to control amplitude of the oscillator outputs that amplitude of the oscillator outputs are oppositely changed to the amplitude of voltage or current inputs. The obtained experimental results agree well with the analytical closed-form solutions. In addition, when the input signal is time-varying, amplitude of the oscillator output is changed according to the input function with opposite phase. The application of the closed-form complete response with amplitude modulation shows that the AM outputs occupy the spectrums of the information inputs.

For the quadrature oscillator using Op-Amps $\mu A741$ and $LF351$ to confirm wide band of the circuit, it is found that wide band characteristic depends on the active device. The circuits that employ Op-Amps $\mu A741$ and $LF351$ will provide 306.8 Hz – 99.6 kHz and 310.6 Hz – 303.5 kHz frequency range of usage, respectively. The numerical results, the simulation results and the experiment results provide the results that agree well with the proposed theoretical analysis.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำ และคำปรึกษาจาก รศ.ดร. ปราโมทย์ วาดเขียน ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์ ข้าพเจ้ารู้สึกซาบซึ้งในความเมตตากรุณา ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ต่อข้าพเจ้า และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ ทุก ๆ ท่านทุกสถาบันการศึกษา และผู้แต่ง หนังสือ-ตำรา บทความ งานวิจัยทั้งหลาย ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ให้กับข้าพเจ้า

ขอขอบพระคุณ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวรเป็นอย่างยิ่งที่ได้ให้การสนับสนุนทุนการศึกษาค่าลงทะเบียนเรียนแก่ข้าพเจ้าเป็นระยะเวลา 3 ปีการศึกษา

ขอขอบคุณภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร ที่ให้ความกรุณาเอื้อเฟื้อสถานที่ อุปกรณ์ สำหรับงานวิจัยจนสำเร็จลุล่วงเป็นอย่างดี

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา และครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจ และให้การสนับสนุนในทุก ๆ เรื่อง ทำให้ข้าพเจ้าสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

ธงชัย มณีชูเกตุ

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	III
กิตติกรรมประกาศ.....	V
สารบัญ.....	VI
สารบัญตาราง.....	IX
สารบัญรูป.....	X
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ในการทำวิทยานิพนธ์.....	3
1.3 สมมติฐานของการศึกษา.....	3
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์.....	4
1.5 ขอบเขตของการทำวิทยานิพนธ์.....	4
1.6 รายละเอียดของวิทยานิพนธ์.....	5
บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในการวิจัย และวงจรที่เกี่ยวข้อง.....	7
2.1 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากับวงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2	7
2.1.1 รูปแบบต่างๆของความถี่ธรรมชาติ.....	11
2.1.2 สมการออสซิลเลตอรี กับการให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลต ไซนูซอยคอลลเอาต์พุต.....	14
2.1.3 ผลตอบสนองบังคับ.....	18
2.1.4 ผลตอบสนองบริบูรณ์.....	20
2.2 แบบจำลองอินพุต-เอาต์พุต สำหรับผลตอบสนองวงจรไฟฟ้า.....	21
2.2.1 ผลเฉลยเอกพันธ์ หรือผลตอบสนองธรรมชาติ.....	22
2.2.2 ฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลตอบสนองบังคับไซนูซอยคอลล.....	24
2.2.3 ขอบเขตเงื่อนไข.....	28
2.2.4 ความถี่ธรรมชาติที่มีค่าซ้ำๆกัน.....	28
2.2.5 แบบจำลองฟังก์ชันถ่ายโอน (s - model) ของวงจรไฟฟ้า.....	29
2.2.6 รูปแบบของโพล-ซีโร.....	31
2.2.7 ฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลตอบสนองธรรมชาติ.....	31

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.3 วงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ	33
2.3.1 วงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์.....	33
2.3.2 จรเลื่อน – เฟสออสซิลเลเตอร์.....	37
2.3.3 วงจรทวิน-ทือออสซิลเลเตอร์.....	44
2.3.4 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส.....	48
2.4 ออป-แอมป์เชิงอุมคติ.....	53
2.5 ออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุมคติ.....	55
2.6 เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลา.....	57
บทที่ 3 ทฤษฎี การวิเคราะห์และวงจรที่นำเสนอ.....	60
3.1 การวิเคราะห์ห้วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลเฉลยแบบปิด (closed – form) ในรูปทั่วไปของการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม.....	60
3.2 การออสซิลเลตของสัญญาณไซน์ชวยคอลเอาต์พุตขณะที่ระบบออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ถูกป้อนด้วยฟังก์ชันบังคับอินพุตแบบพลวัตต์เมื่อวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม.....	68
3.3 วิธีวิเคราะห์ห้วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลเฉลยแบบปิด (closed – form) ในรูปทั่วไปโดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา.....	72
3.4 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้ระหว่างวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมกับวิธีวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอในหัวข้อที่ 3.3.....	77
3.5 ค่าแอมพลิจูด และเฟสของผลตอบสนองธรรมชาติระหว่างวิธีการวิเคราะห์ทั้ง 2 ในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อน เมื่อต้องการให้เอาต์พุตเป็นฟังก์ชัน โคไซน์.....	79
3.6 ผลการวิเคราะห์กับสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณไฟตรงหรือค่าคงที่.....	81
3.7 การประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดในวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่างๆบนพื้นฐานของการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคใหม่ที่ได้นำเสนอ.....	83
3.7.1 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์.....	83
3.7.2 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์.....	87
3.7.3 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรทวิน-ทือออสซิลเลเตอร์.....	95
3.7.4 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส.....	99

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.8 การประยุกต์ใช้งานวงจรออสซิลเลเตอร์กับการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด (AM) บนพื้นฐานของการใช้เทคนิคการแยกสเกลเวลา.....	104
3.9 การวิเคราะห์โครงสร้างควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ความถี่ย่านกว้าง.....	113
บทที่ 4 ผลการเลียนแบบวงจรและผลการทดลอง.....	121
4.1 ผลการทดลองจากการประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุต(ผลตอบสนองธรรมชาติ) ของวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ	121
4.1.1 ผลการควบคุมแอมพลิจูดกับสัญญาณไฟตรงอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$	121
4.1.1.1 วงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์.....	122
4.1.1.2 วงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์.....	126
4.1.1.3 วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์.....	129
4.1.1.4 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส.....	133
4.1.2 ผลการควบคุมแอมพลิจูดกับสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ที่มีลักษณะแปรเปลี่ยนไปตามเวลา หรือ แบบพลวัต.....	137
4.2 ผลการทดลองจากการประยุกต์ใช้งานวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ กับการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดบนพื้นฐานของการใช้เทคนิคการแยกสเกลเวลา.....	153
4.3 ผลการทดลองวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ความถี่ย่านกว้าง.....	157
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	160
บรรณานุกรม.....	163
ภาคผนวก.....	165
ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.....	166
ประวัติผู้เขียน.....	186

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 แนวทางในการสมมุติค่าผลตอบแทนบังคับ	19

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ระบบที่กระตุ้นด้วยสัญญาณอินพุต $f(t)$	8
2.2 ไขนุชอยคอลลเอาต์พุตของออสซิลเลเตอร์เมื่อ $\sigma > 0$	15
2.3 ไขนุชอยคอลลเอาต์พุตของออสซิลเลเตอร์เมื่อ $\sigma < 0$	16
2.4 ระบบให้กำเนิดสัญญาณไขนุชอยคอลลบริสุทธ์เมื่อ $\sigma = 0$	16
2.5 ระบบอันดับที่สอง จะให้กำเนิดสัญญาณไขนุชอยคอลลบริสุทธ์เมื่อ $a_1 = 0$	17
2.6 วงจรเวนบริจ้ออสซิลเลเตอร์.....	33
2.7 วงจรเลื่อน – เฟสออสซิลเลเตอร์	37
2.8 วงจรเลื่อน - เฟสออสซิลเลเตอร์ให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตไขนุชอยคอลลเอาต์พุต.....	44
2.9 วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์.....	44
2.10 สัญลักษณ์และวงจรสมมูลของ $CCII$	48
2.11 วงจรควอควาเจอร์ออสซิลเลเตอร์ใน โหมคกระแส.....	50
2.12 สัญลักษณ์ของออป-แอมป์	53
2.13 ออป-แอมป์เชิงอุมคคิ.....	54
2.14 วงจรสมมูลหรือแบบจำลองออป-แอมป์เชิงอุมคคิ.....	55
2.15 คุณสมบัติของออป-แอมป์ 1 โพล.....	56
2.16 แบบจำลองของออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุมคคิ.....	56
2.17 สัญญาณรายคาบควอซีสองความถี่ $y(t)$ แบบง่าย.....	57
3.1 ระบบอันดับที่ 2 ที่มีอินพุตป้อนเข้าสู่ระบบ.....	60
3.2 ผลตอบสนองธรรมชาติที่ออสซิลเลตจะค่อยๆ จางหายไปตามอิทธิพลของ $e^{\sigma t}$ เมื่อ $\sigma < 0$	67
3.3 ระบบออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เมื่อถูกป้อนด้วยอินพุต $x_{in}(\tau)$ ที่เวลา τ ใดๆ.....	72
3.4 วงจรเวนบริจ้ออสซิลเลเตอร์ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$	83
3.5 วงจรเลื่อน – เฟสออสซิลเลเตอร์กับการป้อนสัญญาณอินพุตด้วย $v_i(\tau)$	87
3.6 วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ขณะป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$	95
3.7 วงจรควอควาเจอร์ออสซิลเลเตอร์ ใน โหมคกระแสเมื่อป้อนสัญญาณกระแสอินพุต $i_i(\tau)$	99
3.8 วงจรควอควาเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่มีอินพุต $v_i(\tau)$	106
3.9 โครงสร้างวงจรควอควาเจอร์ออสซิลเลเตอร์.....	113
3.10 โครงสร้างวงจรอินทิเกรเตอร์ที่แทนแบบจำลองออป-แอมป์ไม่เป็นอุมคคิ.....	116

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.11 วงจรสมมูลควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่แทนแบบจำลองอป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติ.....	118
3.12 ระบบที่สมมูลกับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ หนึ่งให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลต.....	120
4.1 วงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$	122
4.2 ผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ของวงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์	124
4.3 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์.....	124
4.4 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดวงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์.....	125
4.5 วงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$	126
4.6 ผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ของวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์	127
4.7 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์.....	128
4.8 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์.....	129
4.9 วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$	129
4.10 ผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ของวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์.....	131
4.11 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์.....	131
4.12 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์.....	132
4.13 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแสที่มีสัญญาณอินพุต $i_i(\tau) = I_{DC}$	133
4.14 ผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์.....	134
4.15 ผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์.....	135
4.16 ผลการทดลองจากการต่อวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์โหมดกระแสอินพุตบวก.....	135
4.17 ผลการทดลองจากการต่อวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์โหมดกระแสอินพุตลบ.....	136
4.18 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์.....	136
4.19 วงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ กับสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ที่มีลักษณะแบบพลวัตต์.....	138
4.20 บล็อกไดอะแกรมวงจรที่ใช้แสดงผลตอบสนองบริบูรณ์และผลตอบสนองธรรมชาติ.....	138
4.21 วงจรที่ใช้ในการกำจัดสัญญาณที่เป็นผลตอบสนองบังคับ	138
4.22 ผลการคำนวณเชิงตัวเลขบนพื้นฐานของวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิมอินพุตคลื่นรูปไซน์.....	143
4.23 ผลการคำนวณเชิงตัวเลข บนพื้นฐานของวิธีการวิเคราะห์แบบใหม่อินพุตคลื่นรูปไซน์.....	144
4.24 ผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์อินพุตคลื่นรูปไซน์.....	145
4.25 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปไซน์ 1 kHz.....	145
4.26 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปไซน์ 5 kHz.....	146

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.27 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปไซน์ 10 kHz.....	146
4.28 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปไซน์ 15 kHz.....	147
4.29 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปไซน์ 20 kHz.....	147
4.30 ผลการคำนวณเชิงตัวเลขบนพื้นฐานของวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิมอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย.....	148
4.31 ผลการคำนวณเชิงตัวเลข บนพื้นฐานของวิธีการวิเคราะห์แบบใหม่อินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย..	149
4.32 ผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรวอร์มบริดจ์ออสซิลเลเตอร์อินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย.....	150
4.33 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย 1 kHz.....	150
4.34 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย 5 kHz.....	151
4.35 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย 10 kHz.....	151
4.36 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย 15 kHz.....	152
4.37 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย 20 kHz.....	152
4.38 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่มีอินพุต $v_i(\tau)$ เป็นสัญญาณขาواسาร.....	153
4.39 วงจรกำจัดสัญญาณในส่วนของผลตอบสนองบังคับ.....	154
4.40 ผลการทดลองการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดอินพุตเป็นไซน์ซอซอดอล.....	155
4.41 ผลการทดลองการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดอินพุตเป็นสัญญาณฟันเลื่อย.....	155
4.42 ผลการทดลองการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดอินพุตเป็นสัญญาณสี่เหลี่ยม.....	156
4.43 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่ใช้ในการทดลอง.....	157
4.44 สัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอดอลเอาต์พุตจากวงจรที่ใช้ ออป-แอมป์ $\mu A741$	158
4.45 สัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอดอลเอาต์พุตจากวงจรที่ใช้ ออป-แอมป์ $LF351$	158
4.46 ผลการทดลองผลตอบสนองความถี่ของวงจรควอดราเจอร์.....	159

ได้ว่าทั้งสองแนวทางดังกล่าวส่วนใหญ่แล้ว เมื่อนำมาใช้วิเคราะห์กับไขนุชอยคอลลอสซิลเลเตอร์ จะเป็นการวิเคราะห์ในกรณีที่ ระบบมีสัญญาณอินพุตเป็นศูนย์และให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลต ขึ้นมาเองได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในแนวทางที่หนึ่งนั้นแทบไม่มีการกล่าวถึงเลยว่า ถ้าระบบได้ออสซิลเลตขึ้นแล้วตาม *Barkhausen criterion* และต่อมาปรากฏว่ามีสัญญาณอินพุตที่ไม่เป็นศูนย์ (nonzero) แต่มีลักษณะเป็นพลวัตค์(dynamic) ป้อนให้กับระบบ เช่น สัญญาณไขนุชอยคอลลอสซิลเลต สัญญาณฟันเลื่อย เป็นต้น แล้วสัญญาณเอาต์พุตของระบบออสซิลเลเตอร์จะเป็นอย่างไร สำหรับแนวทางที่สองนั้นยังพอมีการกล่าวถึงบ้างเหมือนกัน [12-15] แต่จำเพาะเจาะจงลงไปกับกรณีที่ฟังก์ชันบังคับอินพุต(สัญญาณอินพุต) เป็นค่าคงที่หรือสัญญาณไฟตรงไว้เพียงเท่านั้น แต่สำหรับกรณีที่สัญญาณอินพุตหรือฟังก์ชันบังคับ ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา(time – varying forcing function) นั้นยังไม่มีการวิเคราะห์และอธิบายให้ความกระจ่างชัดเกี่ยวกับกรณีนี้เลย

เมื่อเร็ว ๆ นี้ ได้มีการนำเสนอวิธีการวิเคราะห์หาผลเฉลยของออสซิลเลเตอร์อันดับที่สอง ด้วยการใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว[16] ซึ่งได้พบว่าในกระบวนการวิเคราะห์หาผลเฉลยของออสซิลเลเตอร์อันดับที่สอง ที่ใช้วิธีการแก้สมการอนุพันธ์อันดับที่สองด้วยวิธีการแบบดั้งเดิมนั้น จะมีผลเฉลยที่ให้ค่าแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลต หรือผลตอบสนองของธรรมชาติมีความแตกต่างจากผลการทดลองที่ปฏิบัติได้จริง จึงได้มีการนำเสนอเทคนิคใหม่ในการวิเคราะห์หาแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตนี้ โดยอาศัยการแยกสเกลเวลาซึ่งเป็นการใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัว [17] มาใช้กับการแก้สมการหาค่าแอมพลิจูดดังกล่าว แต่ผลเฉลยที่ได้ใน[16] นั้นยังไม่ได้อยู่ในรูปสมการทั่วไป และยังไม่ได้จัดให้อยู่ในลักษณะของรูปแบบปิด(closed-form) ที่ให้ค่าผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปสมการทั่วไปด้วย

ในวิทยานิพนธ์นี้ จึงได้นำเสนอการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์ของไขนุชอยคอลลอสซิลเลเตอร์อันดับที่สอง โดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวช่วยในการวิเคราะห์ ซึ่งการวิเคราะห์นี้ จะให้ผลของการหาค่าสัมประสิทธิ์หรือแอมพลิจูดของผลตอบสนองของธรรมชาติในลักษณะของรูปแบบปิด ซึ่งพบว่าสามารถอธิบายได้ครอบคลุมถึงระบบออสซิลเลตที่มีสัญญาณอินพุตเป็นฟังก์ชันบังคับแบบพลวัตค์ ซึ่งมีลักษณะที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลาได้อีกด้วย และนำผลของการวิเคราะห์ดังกล่าวไปประยุกต์ใช้กับการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไขนุชอยคอลลอสซิลเลตของวงจรออสซิลเลเตอร์แบบต่าง ๆ ซึ่งประกอบไปด้วย วงจรออสซิลเลเตอร์ในโหมดแรงดันไฟฟ้า(voltage mode) เช่น วงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์(Wein bridge oscillator) วงจรเลื่อน - เฟสออสซิลเลเตอร์(phase-shift oscillator) วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์(twin-T oscillator) และวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์(quadrature oscillator) ทั้งในโหมดแรงดันและโหมดกระแสไฟฟ้า(current mode) อีกทั้งหลักการดังกล่าว ยังสามารถนำเอาไขนุชอยคอลลอสซิลเลเตอร์นี้ไปประยุกต์ใช้งานเป็นตัวมอดูเลตสัญญาณทางขนาด(amplitude modulator, AM) ได้อีกด้วย

สุดท้ายจะเป็นการวิเคราะห์ถึงโครงสร้างของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์

ว่าเพราะเหตุใดจึงสามารถผลิตไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตความถี่ในย่านกว้าง(wide-band) ได้โดยแอมพลิจูดไม่เปลี่ยนแปลง

1.2 วัตถุประสงค์ในการทำวิทยานิพนธ์

- 1.2.1 นำเสนอการวิเคราะห์สมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของวงจรรอสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลตอบสนองบริบูรณ์แบบปิด(closed-form) ที่มีผลเฉลยอยู่ในรูปทั่วไป โดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา(multi-time variable with separate time scale technique)
- 1.2.2 นำผลการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอในวัตถุประสงค์ข้อ 1.2.1 มาประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดของสัญญาณอสซิลเลตไซน์ซอซอคอลเอาต์พุต หรือก็คือผลตอบสนองธรรมชาติของวงจรรอสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ชนิดต่าง ๆ และนำเอาอสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ไปประยุกต์ใช้งานเป็นตัวมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด (amplitude modulator, AM) โดยอาศัยหลักการดังกล่าว
- 1.2.3 นำเสนอการวิเคราะห์โครงสร้างวงจรรวอคราเจอร์อสซิลเลเตอร์เพื่อหาสาเหตุว่าเพราะเหตุใด ออสซิลเลเตอร์ชนิดนี้ จึงสามารถผลิตความถี่ในย่านกว้างได้โดยที่แอมพลิจูดของสัญญาณอสซิลเลตเอาต์พุตยังมีขนาดคงที่

1.3 สมมติฐานของการศึกษา

การวิเคราะห์สมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งเป็นสมการความสัมพันธ์ของวงจรรอสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 โดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลาสามารถนำไปเป็นเครื่องมือเพื่อหาผลเฉลยบริบูรณ์ในรูปแบบปิด (closed-form) ของวงจรรอสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 และสามารถอธิบายได้ว่าค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติ หรือสัญญาณอสซิลเลตเอาต์พุตของระบบจะขึ้นอยู่กับลักษณะ และรูปแบบของสัญญาณอินพุตที่เป็นพลวัตที่ป้อนให้กับระบบ ที่ซึ่งสัญญาณอินพุตนี้จะเป็นฟังก์ชันบังคับอินพุต(forced function input) ที่ไปกระตุ้นระบบ ระบบจะให้ผลตอบสนองเอาต์พุตออกมาเป็นผลตอบสนองบังคับตามฟังก์ชันบังคับอินพุต แล้วผลตอบสนองบังคับนี้จะไปมีผลต่อค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตของระบบอีกทีหนึ่ง ซึ่งสามารถอธิบายได้อย่างถูกต้องและแม่นยำกว่าวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม นั่นก็หมายความว่าเราสามารถที่จะนำไปประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดของสัญญาณอสซิลเลตเอาต์พุตได้ และนำไปประยุกต์เป็นตัวมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด(AM) ได้อีกด้วย นอกจากนี้แล้วการวิเคราะห์โครงสร้างของวงจรรวอคราเจอร์

ออสซิลเลเตอร์จะทำให้เราทราบว่า เพราะเหตุใดวงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์จึงสามารถผลิตความถี่ในย่านกว้างได้โดยที่แอมพลิจูดไม่เปลี่ยนแปลง

1.4 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์

ผลการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิด จากสมการความสัมพันธ์ที่เป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของระบบออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 โดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา สามารถอธิบายได้ว่า เพราะเหตุใดแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติไชนูซอยคอลลเอาต์พุตจึงเปลี่ยนแปลงตามสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา (time – varying) เมื่อถูกป้อนเข้าสู่ระบบของออสซิลเลเตอร์ และผลการวิเคราะห์วงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ โดยการวิเคราะห์กับแบบจำลองออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติ จะสามารถอธิบายได้ว่าโครงสร้างของออสซิลเลเตอร์ชนิดนี้ทำไมจึงสามารถให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตไชนูซอยคอลลเอาต์พุตในย่านความถี่กว้างได้โดยที่แอมพลิจูดไม่เปลี่ยนแปลง

1.5 ขอบเขตของการทำวิทยานิพนธ์

นำเสนอการวิเคราะห์สมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลเฉลยบริบูรณ์ในรูปแบบปิด ซึ่งเป็นสมการอยู่ในรูปทั่วไป โดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา แล้วนำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปอธิบายว่า เพราะเหตุใดสัญญาณอินพุตที่ป้อนให้กับวงจรออสซิลเลเตอร์ ไม่ว่าจะอยู่ในรูปลักษณะของสัญญาณค่าคงที่(DC) หรือเป็นสัญญาณเชิงพลวัตก็ จึงสามารถไปควบคุมให้แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติของระบบเปลี่ยนแปลงตามสัญญาณอินพุตได้ ต่อจากนั้นนำเอาผลการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอ ไปประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดของสัญญาณไชนูซอยคอลลเอาต์พุตกับวงจรออสซิลเลเตอร์ต่อไปนี้ วงจรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ วงจรเล็อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ วงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์โหมคกระแส และนำไปประยุกต์ใช้กับวงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เพื่อพัฒนาเป็นตัวมอดูเลตสัญญาณทางขนาด(AM)ได้ สุดท้ายเป็นการนำเสนอผลการวิเคราะห์โครงสร้างวงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ด้วยการแทนแบบจำลองออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติลงไปในวงจร แล้ววิเคราะห์หาสาเหตุว่า เพราะเหตุใดวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดนี้จึงสามารถผลิตสัญญาณออสซิลเลตไชนูซอยคอลลเอาต์พุตในความถี่ย่านกว้างได้

1.6 รายละเอียดของวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น 5 บท และภาคผนวก จำนวน 1 ภาคผนวก ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

- บทที่ 1** คือบทนำ ซึ่งเป็นการกล่าวถึงความจำเป็นและความสำคัญของปัญหา วัตถุประสงค์ในการทำวิทยานิพนธ์ สมมุติฐานของการศึกษา ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในการทำวิทยานิพนธ์ ขอบเขตของการทำวิทยานิพนธ์ และรายละเอียดของวิทยานิพนธ์ในแต่ละบท
- บทที่ 2** กล่าวถึงทฤษฎี และวงจรที่เกี่ยวข้อง โดยจะกล่าวถึงการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2 แบบดั้งเดิม ซึ่งได้ใช้วิธีนี้วิเคราะห์กันทุกๆ ไป รูปแบบต่าง ๆ ของความถี่ธรรมชาติ ต่อจากนั้นจะเป็นการกล่าวถึงสมการออสซิลเลตอรี (oscillatory equation) ที่ระบบสามารถให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลต ไซน์ซอชอยคอลลเอาต์พุตได้โดยไม่จำเป็นต้องป้อนสัญญาณอินพุตให้กับระบบว่าเป็นอย่างไร กล่าวถึงผลตอบสนองบังคับ ผลตอบสนองบริบูรณ์ แบบจำลองอินพุต-เอาต์พุตสำหรับผลตอบสนองจร ไฟฟ้า ผลเฉลยเอกพันธ์ ฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลตอบสนองบังคับ ไซน์ซอชอยคอลล ขอบเขตเงื่อนไข ความถี่ธรรมชาติ ที่มีค่าซ้ำ ๆ กัน แบบจำลองฟังก์ชันถ่ายโอน (s-model) ของวงจรไฟฟ้า รูปแบบของโพล-ซีโร ฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลตอบสนองธรรมชาติ กล่าวถึงความรู้พื้นฐานของวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ ที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ ทฤษฎีของออป-แอมป์เชิงอุดมคติ และที่ไม่เป็นอุดมคติ สุดท้ายจะเป็นการกล่าวถึงเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา เพื่อใช้เป็นความรู้พื้นฐานกับการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอในบทต่อไป
- บทที่ 3** กล่าวถึงทฤษฎี การวิเคราะห์ และวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ที่นำเสนอใหม่ ในบทนี้จะเป็นการวิเคราะห์วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลเฉลยในรูปแบบปิด ซึ่งเป็นสมการที่อยู่ในรูปทั่วไป แต่ยังคงอาศัยทฤษฎีแบบดั้งเดิมในการวิเคราะห์ และกล่าวถึงการออสซิลเลตของสัญญาณ ไซน์ซอชอยคอลลเอาต์พุตขณะที่ระบบออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ที่ถูกป้อนด้วยฟังก์ชันบังคับอินพุตแบบพลวัตต์เมื่อวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมแล้วผลตอบสนองเอาต์พุตของระบบจะมีพฤติกรรมเป็นอย่างไร ต่อจากนั้นจะเป็นการวิเคราะห์วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลเฉลยในรูปแบบแบบปิดซึ่งเป็นสมการที่อยู่ในรูปทั่วไป โดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา แล้วนำผลการวิเคราะห์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมว่าให้ผลเป็นอย่างไร และพิจารณาในรายละเอียดของค่าแอมพลิจูด และเฟสของผลตอบสนอง

ธรรมชาติระหว่างวิธีการวิเคราะห์ทั้ง 2 ในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ของผลตอบสนองธรรมชาติ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อน เมื่อต้องการระบุให้เอาต์พุตเป็นฟังก์ชันโคซายน์โดยเฉพาะ รวมทั้งผลการวิเคราะห์กับสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณไฟตรงหรือค่าคงที่เพื่อดูว่ามีความแตกต่างกันหรือไม่ ต่อจากนั้นจะเป็นการยืนยันผลการวิเคราะห์ที่ได้จากเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลาที่ได้นำเสนอ ด้วยการประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิฟิเคชันสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตในวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่างๆ และนำไปวิเคราะห์กับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์เพื่อนำไปประยุกต์ใช้เป็นตัวมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด(AM) หัวข้อสุดท้ายจะเป็นการนำเสนอการวิเคราะห์โครงสร้างวงจร ควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ความถี่ย่านกว้าง

บทที่ 4 กล่าวถึงผลการทดลอง และการวิเคราะห์ผลการทดลอง โดยจะแสดงผลการจำลองด้วยโปรแกรมพี-สไปซ์(P-spice) ผลการจำลองเชิงตัวเลข และผลการปฏิบัติจริงกับการควบคุมแอมพลิฟิเคชันของสัญญาณไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตของวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ ผลการทดลองจากการอาศัยหลักการที่นำเสนอในบทที่ 3 นำมาประยุกต์ใช้งานกับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์เพื่อพัฒนาให้เป็นตัวมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด และผลการทดลองใช้ออป-แอมป์ คนละชนิดที่ต่อเป็นวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เพื่อทดสอบสัญญาณออสซิลเลต ไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตความถี่ย่านกว้างเปรียบเทียบกับว่าสอดคล้องกับผลการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอไว้หรือไม่ อย่างไร

บทที่ 5 เป็นบทสุดท้ายซึ่งจะเป็นการสรุปผลงานและข้อเสนอแนะภายในวิทยานิพนธ์ว่าเป็นอย่างไร

ในส่วนท้ายของวิทยานิพนธ์จะเป็นรายการของเอกสารอ้างอิงทั้งหมดที่ใช้ในวิทยานิพนธ์นี้ และภาคผนวก ซึ่งจะรวบรวมรายละเอียดของบทความวิจัยที่ได้รับการเผยแพร่ และเอกสารอื่นๆ โดยมีรายละเอียด ดังนี้

ภาคผนวก ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่
ประวัติผู้เขียน

บทที่ 2

ทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในการวิจัย และวงจรที่เกี่ยวข้อง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานต่างๆ ที่ใช้ในการวิจัย และพื้นฐานของวงจรที่เกี่ยวข้อง ซึ่งเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าโดยการหาผลเฉลยจากสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ซึ่งเป็นสมการความสัมพันธ์ ระหว่างอินพุตกับเอาต์พุตของระบบอันดับที่สองที่ใช้กันอยู่ทั่วไป ซึ่งวิทยานิพนธ์นี้จะเรียกวิธีการวิเคราะห์ดังกล่าวว่าเป็นแบบดั้งเดิม ต่อจากนั้นจะเป็นการทำความเข้าใจกับสมการออสซิลเลตอรี (oscillatory equation) ผลตอบสนองบังคับกับผลตอบสนองบริบูรณ์ แบบจำลองอินพุต-เอาต์พุตสำหรับผลตอบสนองวงจรไฟฟ้า ตลอดจนฟังก์ชันถ่ายโอน และหัวข้อถัดไปจะได้กล่าวถึง รายละเอียดของวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่างๆ ออป-แอมป์ และจะกล่าวถึงเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลาเพื่อเป็นความรู้พื้นฐานที่จะนำไปใช้กับวิธีการวิเคราะห์ระบบอันดับที่ 2 ที่ได้นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ ซึ่งจะได้กล่าวถึงในบทต่อไป เนื้อหาทั้งหมดนี้จำเป็นสำหรับการศึกษา และการนำไปประยุกต์ใช้งานทั้งในเชิงทฤษฎีและเชิงปฏิบัติ

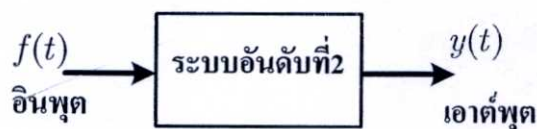
2.1 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากับวงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2 [12-15]

โดยทั่วไปแล้วแบบจำลองคณิตศาสตร์ได้ถูกนำมาใช้เป็นเครื่องมือช่วยในการอธิบายถึงปรากฏการณ์ต่าง ๆ ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์นับตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน และเป็นที่ทราบกันดีแล้วว่าสมการอนุพันธ์(differential equation) เป็นเทคนิคหนึ่งของคณิตศาสตร์ที่ถูกนำมาใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง นำมาใช้ในการแสดงหรืออธิบายถึงคุณลักษณะของระบบ เช่น ระบบเชิงกลที่เกี่ยวข้องกับการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิกอย่างง่าย(simple harmonic motion) ความสัมพันธ์ของระบบจะเป็น $m \frac{d^2x}{dt^2} + k(x) = 0$ เมื่อ m คือมวลของวัตถุ หรือในเรื่องของเพนดูลัมอย่างง่าย(simple pendulum) $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$ สำหรับในระบบเชิงไฟฟ้าที่พบกันอยู่บ่อย ๆ ก็คือ การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า (electric circuit analysis) $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + a_1 \frac{di(t)}{dt} + a_0 i(t) = f(t)$ และระบบเชิงกลของของไหล (velocities profile in fluid flow) $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta x}$ เป็นต้น

โดยส่วนใหญ่แล้วสมการความสัมพันธ์ของระบบเหล่านี้สามารถอธิบายได้ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ในขณะที่สมการอนุพันธ์สามัญนั้น(ordinary differential equation, ODE)

เป็นองค์ความรู้พื้นฐานที่นำมาใช้ในการอธิบายถึงเงื่อนไขและกระบวนการทำงานของระบบและก็มีหลากหลายเทคนิคที่นำมาใช้ในการพิสูจน์หาผลเฉลย(solution) ของสมการอนุพันธ์ แต่ทั้งหมดนั้นก็ยังคงอยู่บนพื้นฐานของผลเฉลยที่เป็นผลเฉลยบริบูรณ์(complete solution) $y_c(t)$ ซึ่งประกอบด้วยผลเฉลยเอกพันธ์(homogenous solution) $y_h(t)$ และผลเฉลยจำเพาะ(particular solution) $y_p(t)$ นั่นคือ $y_c(t) = y_h(t) + y_p(t)$ สำหรับกรณีของการทำงานในระบบเชิงไฟฟ้าของทั้งวงจรแพสซีฟและแอคทีฟ (passive and active element circuits) นั้น ผลเฉลยของระบบที่อธิบายด้วยสมการอนุพันธ์ ยังคงได้เป็นผลเฉลยบริบูรณ์ $y(t)$ แต่มักจะเรียกกันว่าเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบที่ได้ ในทำนองเดียวกันผลตอบสนองบริบูรณ์นี้ยังคงประกอบไปด้วยผลตอบสนอง 2 ส่วนด้วยกันคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นผลตอบสนองธรรมชาติ(natural response) $y_n(t)$ ซึ่งเป็นผลตอบสนองที่ได้จากพลังงานเริ่มต้นและอาศัยพลังงานสะสมที่มีอยู่ภายในของระบบเอง ขณะที่ยังไม่มีการรับพลังงานจากภายนอกมากระตุ้น หรือกล่าวได้ว่ายังไม่มีฟังก์ชันบังคับ(forcing function) $f(t)$ จากภายนอกมาบังคับระบบ และส่วนที่สองคือผลตอบสนองบังคับ(force response) $y_f(t)$ ซึ่งเป็นผลตอบสนองของระบบที่ได้จากการป้อนหรือกระตุ้นระบบด้วยพลังงานจากภายนอกในรูปของฟังก์ชัน $f(t)$ ใด ๆ เมื่อเวลาผ่านไป ทั้งนี้ผลตอบสนองทั้งสองนั้นเทียบเคียงได้กับ $y_h(t)$ และ $y_p(t)$ ตามลำดับนั่นเอง

เพื่อให้เข้าใจถึงผลตอบสนองของระบบอันดับที่ 2 ดังนั้นจะเริ่มพิจารณาและวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2 โดยพิจารณาระบบฯหนึ่งที่ถูกกระตุ้นด้วยฟังก์ชันบังคับอินพุต(forcing function input) หรือสัญญาณอินพุต $f(t)$ และระบบได้ให้ผลตอบสนองเอาต์พุตในโดเมนเวลาเป็น $y(t)$ แสดงดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 ระบบที่กระตุ้นด้วยสัญญาณอินพุต $f(t)$ และให้ผลตอบสนองเอาต์พุต $y(t)$

ถ้าสมมุติให้ระบบที่กำลังพิจารณาดังรูปที่ 2.1 เป็นระบบที่มีสมการความสัมพันธ์เป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 และมีพลังงานสะสมเริ่มต้น ณ เวลาเริ่มต้น $t = t_0 = 0$ มีค่า $y(t_0) = y(0) = Y_0$ เมื่อ Y_0 เป็นค่าคงที่ ที่ซึ่งซ้ายมือของสมการที่ (2.1) เป็นผลตอบสนองเอาต์พุตของระบบ และขวามือคืออินพุตที่ป้อนเข้าสู่ระบบ ซึ่งสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 เขียนในรูปทั่วไปได้เป็น

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (2.1)$$

เมื่อ (') และ (") แสดงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและอันดับที่สองตามลำดับ นอกจากนี้แล้ว a_0 และ a_1 เป็นพารามิเตอร์ที่เราทราบค่า ในขณะที่ $f(t)$ คือฟังก์ชันบังคับอินพุตที่ป้อนให้กับระบบ จากผลเฉลยปริภูมิหรือผลตอบสนองปริภูมิของสมการที่(2.1) ก็คือการรวมกันของผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ และผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ แต่ละ $y_n(t)$ และ $y_f(t)$ สามารถใช้หลักการการทับซ้อน (superposition principle) ช่วยในการหาผลตอบสนองของทั้งสองได้ ซึ่งนิยามได้เป็น $y(t) = y_n(t) + y_f(t)$ โดยที่ผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ สามารถหาได้จากการแก้สมการอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous differential equation) หรือกล่าวได้ว่ากำลังพิจารณาระบบอันดับที่ 2 ขณะที่ยังไม่ได้ป้อนฟังก์ชันบังคับ $f(t)$ นั่นก็คือให้ $f(t) = 0$ นั่นเอง แล้วสมการที่(2.1) จะเป็น

$$y_n''(t) + a_1 y_n'(t) + a_0 y_n(t) = 0 \quad (2.2)$$

จากสมการที่(2.1) และ(2.2) จะเห็นได้ชัดว่าผลตอบสนองธรรมชาติ $y(t) = y_n(t)$ จะต้องเป็นฟังก์ชันที่ไม่เปลี่ยนรูปเมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์(differentiate) ไม่ว่าจะป้อนอันดับที่เท่าไรก็ตาม ไม่เช่นนั้นแล้วการรวมกันทางซ้ายมือของสมการที่(2.2) จะไม่เท่ากับศูนย์ ถ้าเรากำหนดให้ $y_n(t) = Ae^{st}$ ด้วยเหตุผลที่ว่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล(exponential function) ไม่เปลี่ยนรูปแบบฟังก์ชันเมื่อทำการหาค่าอนุพันธ์ โดยที่ค่า A และ s คือค่าที่ต้องทำการหาค่า และต่อจากนั้นทำการแทนค่า $y_n(t) = Ae^{st}$ ลงในสมการที่(2.2) เป็นผลให้

$$\begin{aligned} s^2 Ae^{st} + sa_1 Ae^{st} + a_0 Ae^{st} &= 0 \\ (s^2 + a_1 s + a_0) Ae^{st} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

จะเห็นได้ว่า Ae^{st} จะต้องไม่เท่ากับศูนย์ เพราะว่าถ้าเท่ากับศูนย์ $y_n(t) = Ae^{st}$ จะต้องเท่ากับศูนย์ด้วย ซึ่งไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขของพลังงานสะสมเริ่มต้น ณ ที่เวลาเริ่มต้น $t = 0$ ดังนั้น

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.4)$$

เรียกสมการที่(2.4) นี้ว่า **สมการคุณลักษณะเฉพาะ(characteristic equation)** เนื่องจากเป็นสมการที่แสดงคุณลักษณะของสมการอนุพันธ์(2.2) ผลเฉลยของสมการควอดราติก (quadratic equation) ของสมการที่(2.4) คือค่ารากสมการสองค่า s_1 และ s_2 เขียนได้เป็น

$$s_{1,2} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right) / 2 \quad (2.5)$$

ฉะนั้นผลตอบสนองธรรมชาติจะมีส่วนประกอบ 2 ส่วนคือ

$$y_{n1}(t) = A_1 e^{s_1 t} \quad (2.6)$$

และ

$$y_{n2}(t) = A_2 e^{s_2 t}$$

จากความจริงที่ว่าสมการที่(2.2) เป็นสมการเชิงเส้นดังนั้นผลรวมของผลเฉลย $y_{n1}(t)$ และ $y_{n2}(t)$ ก็ย่อมเป็นผลเฉลยของสมการที่(2.2) ด้วย

$$y_n(t) = y_{n1}(t) + y_{n2}(t) \quad (2.7)$$

จากสมการที่(2.6) และสมการที่(2.7) จะได้ผลเฉลยของสมการที่(2.2) คือผลตอบสนองธรรมชาติของระบบและมีผลเฉลยในรูปทั่วไปเป็น

$$y_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (2.8)$$

เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของผลตอบสนองธรรมชาติที่ยังไม่ทราบค่าและต้องการหาค่าจากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ณ ที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0 = 0$ จากสมการที่(2.8) ด้วยเหตุที่สมการที่(2.8) คือผลตอบสนองธรรมชาติ ค่ารากสมการ s_1 และ s_2 ของสมการคุณลักษณะเฉพาะจะถูกเรียกว่า **ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency)** หรือ **คุณลักษณะความถี่ (characteristic frequency) ของวงจรไฟฟ้า** แต่อย่างไรก็ตามในการใช้พจน์ความถี่ธรรมดานั้นไม่ได้หมายความว่า ผลตอบสนองธรรมชาติจะเป็นไซน์ซอชอยคอลล หรือค่าของ s จะเป็นความถี่ของไซน์ซอชอยด์ แต่ทั้งนี้อาจเป็นไปได้ในบางกรณีแต่ไม่เสมอไป

ความถี่ธรรมชาติของวงจรมีหน่วยเป็น เรเดียน / วินาที ผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ ของระบบจะมีผลเฉลยขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของพารามิเตอร์ a_0 และ a_1 ซึ่งจะให้ค่ารากสมการ s_1 และ s_2 ดังต่อไปนี้

2.1.1 รูปแบบต่างๆของความถี่ธรรมชาติ

ด้วยเหตุที่ความถี่ธรรมชาติของวงจรอันดับที่ 2 คือรากของสมการคุณลักษณะเฉพาะ ซึ่งเป็นสมการควอดราติก ดังนั้นจึงอาจจะเป็นจำนวนจริง จำนวนจินตภาพ หรือ จำนวนเชิงซ้อนก็ได้ ซึ่งขึ้นอยู่กับว่า $(a_1^2 - 4a_0)$ ในสมการที่(2.5) จะเป็นบวก ลบ หรือ ศูนย์

เงื่อนไขที่ 1

ถ้า $a_1^2 > 4a_0$ จากค่ารากสมการควอดราติกในสมการที่(2.4) เราจะได้ว่า

$s_{1,2} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right) / 2$ ที่ซึ่ง $\sqrt{a_1^2 - 4a_0}$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอและกำหนดให้ $k = \sqrt{a_1^2 - 4a_0}$ ฉะนั้น $s_{1,2} = (-a_1 \pm k) / 2$ ซึ่งจะให้ค่ารากสมการ $s_{1,2}$ เป็นจำนวนจริงทั้งคู่ที่ไม่เท่ากัน (two real and distinct roots) $s_1 \neq s_2$ ระบบ

นี้กล่าวได้ว่ามีผลตอบสนองธรรมชาติเป็น *overdamped* ซึ่งจะให้ค่าผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ ในรูปทั่วไปเหมือนกับสมการที่ (2.8) กล่าวคือ

$y_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ ดังนั้น ณ ที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0 = 0$ สมการที่(2.8)

และค่าอนุพันธ์ของสมการที่(2.8) จะมีค่าเป็น $y_n(0) = A_1 + A_2$ และ $y'_n(0) = s_1 A_1 + s_2 A_2$ ซึ่งเป็นค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในกรณีที่ระบบยังไม่มีภาระกระตุ้นหรือป้อนฟังก์ชันบังคับให้กับระบบนั่นเอง [15]

เงื่อนไขที่ 2

ถ้า $a_1^2 = 4a_0$ เมื่อพิจารณาสมการที่ (2.5) แล้วจะเห็นได้ว่า $s_{1,2} = -a_1 / 2$ ค่ารากสมการที่ได้จะให้ค่าจริงที่เท่ากันสองค่า (real equal) $s_1 = s_2 = s$ กล่าวได้ว่าระบบนี้จะให้ผลตอบสนองธรรมชาติเป็น *critically damped* มีผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ เป็น

$$y_n(t) = (A_1 + A_2 t) e^{st} \quad (2.9)$$

ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นขณะระบบมีสัญญาณอินพุตเป็นศูนย์ ณ เวลา $t = 0$ จะได้ $y_n(0) = A_1$ และ $y'_n(0) = s_1 A_1 + A_2$

เงื่อนไขที่ 3

ถ้า $a_1^2 < 4a_0$ จากสมการที่(2.5) จะเห็นได้ว่าค่า $a_1^2 - 4a_0$ จะให้ค่าเป็นลบเสมอ แล้วค่ารากสมการควอดราติกจะเขียนได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}(-1) \right) / 2 \\ &= \left(-a_1 \pm j\sqrt{a_1^2 - 4a_0} \right) / 2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

ถ้ากำหนดให้ $\sigma = -a_1 / 2$ และ $\omega = \sqrt{a_1^2 - 4a_0} / 2$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของการหน่วง (damping coefficient) และความถี่เรเดียนธรรมชาติ(natural radian frequency) ตามลำดับ ดังนั้นเราจะมีรากสมการเป็น ค่าสังยุคเชิงซ้อน(complex conjugate) $s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$ ของกันและกัน ระบบนี้กล่าวได้ว่ามีผลตอบสนองธรรมชาติเป็น **underdamped** และเมื่อแทนค่ารากสมการ s_1 และ s_2 ลงในสมการที่(2.8) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_n(t) &= A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} \\ &= e^{\sigma t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

สมการที่(2.11) ที่ได้นั้นเป็นสมการเชิงซ้อน หากต้องการให้ผลตอบสนองธรรมชาติที่ได้นั้นเป็นค่าจริง ค่าของ A_1 และ A_2 จะเป็นไปได้ 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ถ้า A_1 และ A_2 ต้องเป็นค่าสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน ดังนั้น ถ้าสมมุติให้ $A_1 = a + jb$ และ $A_2 = a - jb$ เมื่อแทนค่าทั้งสองลงในสมการที่(2.11) จะได้

$$y_n(t) = e^{\sigma t} ((a + jb)e^{j\omega t} + (a - jb)e^{-j\omega t})$$

เนื่องจาก $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$ ดังนั้น

$$y_n(t) = e^{\sigma t} (2a \cos \omega t - 2b \sin \omega t)$$

กำหนดให้ $B_1 = 2a$ และ $B_2 = -2b$ จะได้

$$y_n(t) = e^{\sigma t} (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \quad (2.12)$$

ซึ่งเมื่อใช้ความสัมพันธ์ทางเอกลักษณ์ของตรีโกณที่ว่า

$$B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\omega t - \tan^{-1}(B_2/B_1))$$

จากสมการที่(2.12) เพราะฉะนั้นผลตอบสนองธรรมชาติสำหรับกรณีนี้จะได้เป็น

$$y_n(t) = e^{\sigma t} \left(\sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\omega t + \phi) \right) \quad (2.13)$$

เมื่อ $\phi = -\tan^{-1}(B_2/B_1)$

จากการพิจารณาสมการที่(2.13) จะเห็นได้ว่า $e^{\sigma t} \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ คือแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติไซนูซอยดอล ω และ ϕ คือค่าความถี่เรเดียนธรรมชาติ และค่าเฟสของไซนูซอยดอลเอาต์พุต ตามลำดับ ซึ่งค่าเริ่มต้นที่เวลา $t = 0$ ก็คือ

$$y_n(0) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\phi) \quad (2.14)$$

และ

$$y_n'(0) = \sigma \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\phi) - \omega \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \sin(\phi)$$

โดยค่าเริ่มต้นทั้งสองนี้ จะเป็นค่าที่จะทำให้ผลตอบสนองธรรมชาติไซนูซอยดอลมีแอมพลิจูดและเฟสเริ่มต้นตามต้องการซึ่งจะขึ้นอยู่กับค่า B_1 และ B_2 เป็นสำคัญ กล่าวคือจะต้องแก้สมการเพื่อหาค่า B_1 และ B_2 จากค่าเงื่อนไขเริ่มต้นนี้นั่นเอง

กรณีที่ 2 ค่า A_1 และ A_2 เป็นค่าจริงที่มีค่าเท่ากัน จากสมการที่(2.11) และกำหนดให้ $A_1 = A_2 = A$ เมื่อ A เป็นค่าจริงคงที่

$$\begin{aligned} y_n(t) &= e^{\sigma t} (Ae^{j\omega t} + Ae^{-j\omega t}) \\ &= 2Ae^{\sigma t} \left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \right) \\ &= e^{\sigma t} (2A \cos \omega t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ในกรณีนี้จะเห็นได้ว่า ผลตอบสนองธรรมชาติไขนุชอยคอลลเอาต์พุต มีค่าแอมพลิจูดเป็น $2Ae^{\sigma t}$ และมีค่าเฟสเท่ากับศูนย์ เพื่อความสะดวก และง่ายต่อการพิจารณา จะกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ผลตอบสนองธรรมชาติ A_1 และ A_2 มีค่าเป็น $A_1 = A_2 = A/2$ แล้วจะทำให้เฉพาะพจน์ที่เป็นสัญญาณไขนุชอยคอลลมีค่าเป็น $A \cos \omega t$ ซึ่งจะให้ค่าแอมพลิจูดไขนุชอยคอลลเอาต์พุตเป็น A และผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ จะกลายเป็น

$$y_n(t) = e^{\sigma t} (A \cos \omega t) \quad (2.16)$$

โดยค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของกรณีที่สอง คือ

$$y_n(0) = A \quad (2.17)$$

และ

$$y'_n(0) = \sigma A$$

เนื่องจากในวิทยานิพนธ์นี้ ให้ความสนใจและให้ความสำคัญกับเงื่อนไขของระบบที่มีผลตอบสนองธรรมชาติที่เป็นชนิด underdamped เป็นพิเศษ ซึ่งจะเห็นได้ว่าระบบนี้จะให้กำเนิดสัญญาณไขนุชอยคอลลที่เอาต์พุตได้ โดยที่ไม่จำเป็นต้องมีสัญญาณอินพุตหรือฟังก์ชันบังคับป้อนให้กับระบบอันดับที่สองเลย ดังสมการที่(2.13) และ (2.16) ตามลำดับ ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการกล่าวถึงเนื้อหาที่มีรายละเอียดในลักษณะของออสซิลเลเตอร์ดังนี้

2.1.2 สมการออสซิลเลตอรี (oscillatory equation) กับการให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตไขนุชอยคอลลเอาต์พุต

จากผลการวิเคราะห์หาผลตอบสนองธรรมชาติของระบบอันดับที่สองแบบดั้งเดิม ในหัวข้อที่ 2.1.1 เมื่อพิจารณาระบบที่ให้ผลตอบสนองเป็น underdamped จะพบว่าระบบสามารถออสซิลเลตให้สัญญาณไขนุชอยคอลลออกมาได้ โดยไม่จำเป็นต้องมีสัญญาณอินพุตป้อนให้กับระบบ ดังสมการที่(2.12) และ(2.16) เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ผลตอบสนองธรรมชาติเป็นสังยุคเชิงซ้อนและค่าจริงที่เท่ากันตามลำดับ กล่าวคือ

ถ้า $A_1, A_2 = a \pm jb$ และ $\phi = -\tan^{-1}(B_2/B_1)$ แล้ว

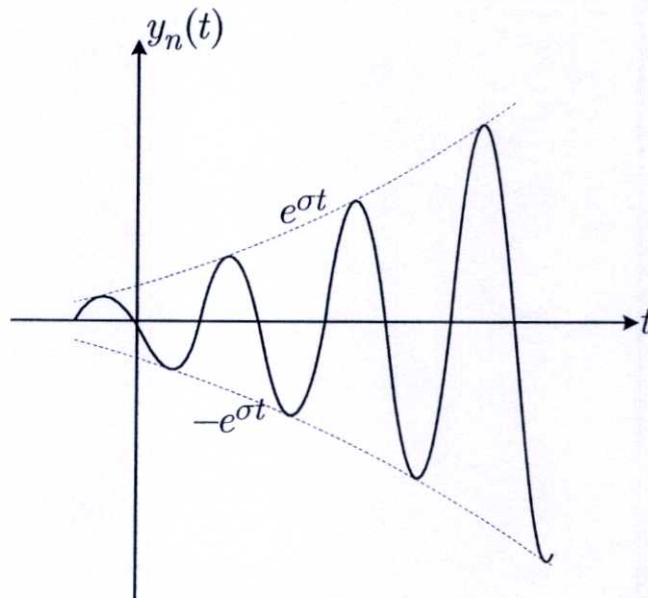
$$y_n(t) = e^{\sigma t} (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \quad (2.12)$$

ถ้า $A_1 = A_2 = A/2$ และ $\phi = 0$ แล้ว

$$y_n(t) = e^{\sigma t} (A \cos \omega t) \quad (2.16)$$

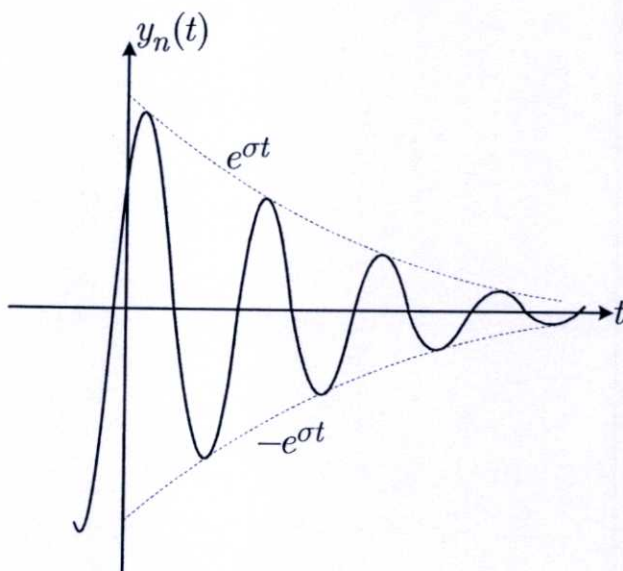
จากสมการทั้ง 2 จะเห็นได้ว่าตัวแปรที่สำคัญตัวหนึ่ง คือ ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง σ จะมีผลทำให้รูปร่างของสัญญาณไซน์ซอซอดอลเอตต์พุดนั้นเป็นไปได้อยู่ 3 รูปแบบด้วยกันคือ

รูปแบบที่ 1 ถ้า $\sigma > 0$ และเป็นค่าจริงจะทำให้ $e^{\sigma t}$ ค่อยๆขยายขึ้น (growth) ทำให้แอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ซอซอดอลเอตต์พุดมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆเข้าสู่ค่าอนันต์ ดังรูปที่ 2.2 แต่ในทางปฏิบัติค่าแอมพลิจูดจะมีขนาดสูงสุดได้ไม่เกินระดับแรงดันไฟเลี้ยงของวงจร



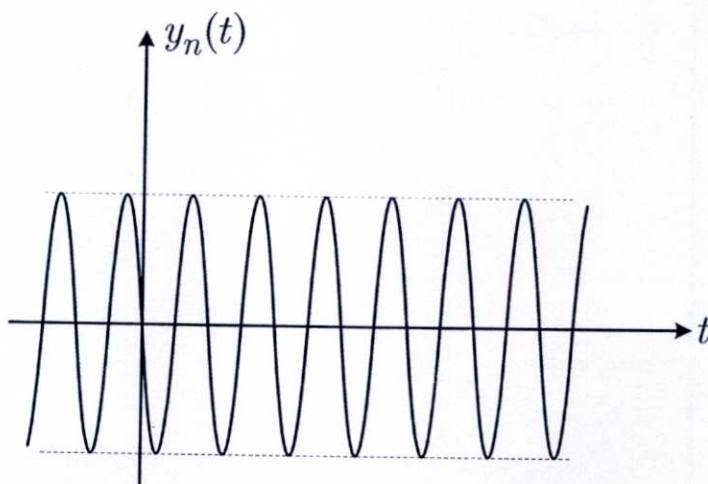
รูปที่ 2.2 ไซน์ซอซอดอลเอตต์พุดของออสซิลเลเตอร์เมื่อ $\sigma > 0$

รูปแบบที่ 2 ถ้า $\sigma < 0$ และเป็นค่าจริง จะทำให้ $e^{\sigma t}$ มีค่าค่อยๆลดลง(decay) ทำให้แอมพลิจูดของไซนูซอยดอลเฮาต์พุดมีค่าลดลงเข้าสู่ศูนย์



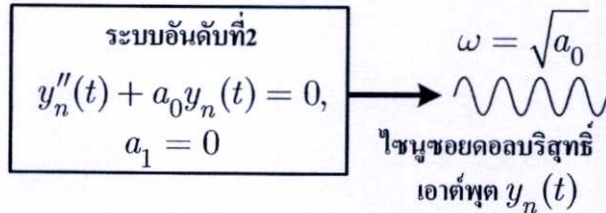
รูปที่ 2.3 ไซนูซอยดอลเฮาต์พุดของออสซิลเลเตอร์เมื่อ $\sigma < 0$

รูปแบบที่ 3 ถ้า $\sigma = 0$ จะทำให้ $e^{\sigma t}$ เป็นค่าคงที่และเท่ากับ 1 ส่งผลให้แอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตไซนูซอยดอลเฮาต์พุด มีขนาดคงที่ตลอดเวลาดังรูปที่ 2.4 เนื่องจากในหัวข้อที่แล้วเราทราบแล้วว่า ค่าสัมประสิทธิ์ของการหน่วง $\sigma = -a_1/2$ และค่าความถี่เรเดียนธรรมชาติ $\omega = \sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}/2$ ถ้า $\sigma = 0$ นั่นก็หมายความว่า $\sigma = -a_1/2 = 0$ แสดงว่าพารามิเตอร์ $a_1 = 0$ เป็นผลให้ $\omega = \sqrt{a_0}$



รูปที่ 2.4 ระบบให้กำเนิดสัญญาณไซนูซอยดอลบริสุทธิ์เมื่อ $\sigma = 0$

จะเห็นได้ว่าสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอชอยคอลลเอาต์พุตจะปราศจากการหน่วง ซึ่งระบบอันดับที่สองจะให้กำเนิดสัญญาณไซน์ซอชอยคอลลบริสุทธ์ความถี่เดียว ω ที่ความถี่เรเดียน $\omega = \sqrt{a_0}$ เมื่อค่าพารามิเตอร์ $a_1 = 0$



รูปที่ 2.5 ระบบอันดับที่สอง จะให้กำเนิดสัญญาณไซน์ซอชอยคอลลบริสุทธ์เมื่อ $a_1 = 0$

ในขณะที่เดียวกันถ้ากลับไปพิจารณาสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 เอกพันธ์(2.2) ของระบบและสมมติให้ $a_1 = 0$ ซึ่งจะทำให้พจน์ที่ 2 หายไป เราจะเขียนสมการของระบบที่ให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอชอยคอลลบริสุทธ์ได้ใหม่เป็น

$$y_n''(t) + a_0 y_n(t) = 0 \tag{2.18}$$

และจากสมการที่(2.12) และ (2.16) เมื่อ $\sigma = 0$ สัญญาณไซน์ซอชอยคอลลบริสุทธ์เอาต์พุตที่มีแอมพลิจูดคงที่ จะเป็นดังสมการที่(2.19) และ (2.21) เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อนและค่าจริงที่เท่ากัน $A_1 = A_2 = A/2$ ตามลำดับ

$$y_n(t) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\omega t + \phi) \tag{2.19}$$

และจากสมการที่(2.13) และ (2.14) ที่ซึ่งค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ณ ที่เวลา $t = 0$ ก็คือ

$$y_n(0) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\phi) \tag{2.20}$$

และ
$$y_n'(0) = -\omega \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \sin(\phi)$$

ถ้า $A_1 = A_2 = A/2$ แล้ว

$$y_n(t) = A \cos \omega t \tag{2.21}$$

ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นจากสมการที่ (2.17) จะเป็น

$$y_n(0) = A \quad (2.22)$$

และ
$$y'_n(0) = 0$$

สมการอนุพันธ์อันดับที่สอง ที่เป็นสมการเอกพันธ์และมีพจน์ที่สองหรือพจน์กลางหายไป ดังเช่น สมการที่ (2.18) นั้น จะเห็นได้ว่าสมการในลักษณะหรือรูปแบบนี้จะให้ผลเฉลยเป็นสัญญาณไซน์ซอชอยคอลลบริสุทริ์ความถี่เดียว สมการในลักษณะนี้จะเรียกว่าเป็น **สมการที่มีลักษณะแบบออสซิลเลตอรี** หรือเรียกสั้นๆว่า **สมการออสซิลเลตอรี (oscillatory equation)** หรืออาจจะกล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าระบบอันดับที่ 2 ใด ๆ ที่มีความสัมพันธ์ของระบบสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 อยู่ในรูปแบบของ $y''_n(t) + a_0 y_n(t) = 0$ แสดงว่าระบบดังกล่าว สามารถระบุได้ว่าเป็นระบบออสซิลเลตอรีระบบหนึ่งและเป็นระบบออสซิลเลตอรีที่ปราศจากการหน่วง (undamping) ซึ่ง ณ ที่นี้ก็คือ **ระบบไขนุซอชอยคอลลออสซิลเลตอรีอันดับที่ 2 (sinusoidal second-order oscillator system)** นั่นเอง

2.1.3 ผลตอบสนองบังคับ

จากการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2 ในหัวข้อที่ 2.1.1 และ 2.1.2 ซึ่งได้ทำการวิเคราะห์และพิจารณาเฉพาะในส่วนของผลตอบสนองธรรมชาติที่มีผลต่อระบบอันดับที่ 2 ในขณะที่ยังไม่ได้ป้อนระบบด้วยฟังก์ชันบังคับอินพุตหรือกล่าวได้ว่ามีสัญญาณอินพุตเป็นศูนย์สำหรับกรณีที่ระบบอันดับที่ 2 ถูกป้อนด้วยสัญญาณอินพุตจากภายนอกด้วยฟังก์ชันบังคับอินพุต $f(t)$ นั้น ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบังคับของระบบอันดับที่ 2 ในกรณีที่มีสัญญาณอินพุตจากภายนอกซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันบังคับอินพุต $f(t)$ ป้อนเข้าสู่ระบบ โดยจะพิจารณาระบบอันดับที่ 2 ที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.1 หัวข้อที่ 2.1 ที่ซึ่งสมการความสัมพันธ์ของระบบในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ที่อยู่ในรูปทั่วไป ขณะมีฟังก์ชันบังคับอินพุต $f(t)$ แสดงได้ดังสมการที่ (2.1) กล่าวคือ

$$y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t) \quad (2.1)$$

เนื่องจากผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบประกอบด้วยผลตอบสนองธรรมชาติรวมอยู่กับผลตอบสนองบังคับ

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t) \quad (2.23)$$

และจากสมการอนุพันธ์เอกพันธ์ในสมการที่(2.2) เราจะได้ผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ ของระบบในรูปทั่วไปแสดงดังสมการที่(2.8) กล่าวคือ

$$y_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

แทนค่า $y(t) = y_f(t)$ ในสมการที่(2.1) เพื่อหาผลตอบสนองบังคับ เมื่อ $y_f(t)$ คือ ผลตอบสนองบังคับของระบบ

$$y_f''(t) + a_1 y_f'(t) + a_0 y_f(t) = f(t) \quad (2.24)$$

วิธีการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ วิธีการหนึ่งที่นิยมใช้กันคือวิธีการคาดเดาคำตอบ ซึ่งเป็นวิธีการเดียวกันกับวิธีการเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์พจน์ต่อพจน์ วิธีการนี้จะอาศัยการคาดเดาคำตอบด้วยการทดลองสมมุติให้ผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ มีรูปฟังก์ชันในรูปลักษณะเดียวกันกับฟังก์ชันบังคับอินพุตและแทนค่าลงในสมการที่(2.24) แล้วแก้สมการหาค่า $y_f(t)$ ออกมา แนวทางในการสมมุติค่าผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ ในการหาผลเฉลยจากสมการอนุพันธ์ที่มีต่อฟังก์ชันบังคับอินพุต $f(t)$ ที่พบเห็นและมีการใช้ฟังก์ชันเหล่านี้กันอยู่บ่อย ๆ ได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แนวทางในการสมมุติค่าผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ [12]

$f(t)$	$y_f(t)$
k	A
t	$At + B$
t^2	$At^2 + Bt + C$
e^{at}	Ae^{at}
$\sin(bt), \cos(bt)$	$A\sin(bt) + B\cos(bt)$
$e^{at} \sin(bt), e^{at} \cos(bt)$	$e^{at}(A\sin(bt) + B\cos(bt))$

จากสมการที่ (2.8) และ (2.23) จะเขียนผลตอบสนองบริบูรณ์ได้เป็น

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + y_f(t) \quad (2.25)$$

2.1.4 ผลตอบสนองบริบูรณ์

ตามที่ได้กล่าวไว้ในหัวข้อก่อนหน้านี้แล้วว่า ผลตอบสนองรวมทั้งหมดหรือผลตอบสนองบริบูรณ์ของวงจรไฟฟ้าอันดับที่สอง คือผลรวมของผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ กับผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ ในส่วนของผลตอบสนองธรรมชาติจะมีค่าคงที่ไม่ใช่จะคง A_1 และ A_2 ปรากฏอยู่ ดังนั้น ผลตอบสนองบริบูรณ์ก็จะมีค่าคงที่ไม่ใช่จะคงนั้นปรากฏอยู่เช่นกัน ซึ่งสามารถหาค่าได้จากเงื่อนไขการสะสมพลังงานเริ่มต้นของผลตอบสนองบริบูรณ์ จากสมการที่(2.25) เมื่อ $y(t)$ คือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตของวงจรอันดับที่ 2 ณ ที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0$ ด้วยการแทนค่าคงที่ $y(t_0) = Y_0$ ลงในสมการที่ (2.25) และ $y'(t_0) = Y'_0$ ลงในสมการที่(2.26) ซึ่งเป็นสมการอนุพันธ์ของสมการที่(2.25) ทำการหาค่าอนุพันธ์ของสมการที่ (2.25)

$$y'(t) = s_1 A_1 e^{s_1 t} + s_2 A_2 e^{s_2 t} + y'_f(t) \quad (2.26)$$

ณ ที่เวลาเริ่มต้นจะให้เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ แทนค่า $y(0) = Y_0$ และ $y'(0) = Y'_0$ ลงในสมการที่(2.25) และ (2.26) ตามลำดับจะได้

$$y(0) = Y_0 = A_1 + A_2 + y_f(0) \quad (2.27)$$

$$y'(0) = Y'_0 = s_1 A_1 + s_2 A_2 + y'_f(0) \quad (2.28)$$

ทำการแก้สมการจากสมการที่ (2.27) และ (2.28) หาค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เมื่อได้แล้วให้แทนค่ากลับเข้าไปในสมการที่ (2.25) อีกครั้งหนึ่งซึ่งจะทำให้ได้ผลตอบสนองบริบูรณ์ $y(t)$ ในท้ายที่สุด

2.2 แบบจำลองอินพุต-เอาต์พุต สำหรับผลตอบสนองวงจรไฟฟ้า

วงจรไฟฟ้าไม่ได้มีเพียงแค่วงจรไฟฟ้าอันดับที่สองเท่านั้น วงจรไฟฟ้าที่มีอันดับสูงกว่าอันดับที่สองก็มีให้พบเห็นกันอยู่บ่อยๆ ในการออกแบบและวิเคราะห์ห้วงจรไฟฟ้านั้นวงจรไฟฟ้าที่มีอันดับสูงกว่าอันดับที่สอง ก็ต้องมีการหาผลเฉลยที่มีต่อสมการความสัมพันธ์ของวงจรเหมือนกันกับสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 เช่นกัน ในที่ซึ่งได้มีการบรรยายละเอียดเกี่ยวกับสัญญาณอินพุตและเงื่อนไขเริ่มต้นที่จำเป็นของอุปกรณ์สะสมพลังงานที่อยู่ภายในวงจรไว้แล้ว

โดยทั่วไปแล้วสมการความสัมพันธ์ระหว่าง แหล่งกำเนิดอินพุต (input source) และแรงดันหรือกระแสไฟฟ้าเอาต์พุตจะอธิบายได้ด้วยสมการอนุพันธ์ ซึ่งจัดอยู่ในรูปทั่วไปเป็น

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \quad (2.29)$$

สมการที่ (2.29) นี้เป็นการแสดงแบบจำลองคณิตศาสตร์ของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญอันดับที่ n ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ เป็นค่าคงที่ ซึ่งให้ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณเอาต์พุต $y(t)$ และสัญญาณอินพุต $x(t)$ สมการที่ (2.29) บางครั้งจะเรียกว่าเป็น **สมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต** และสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุตนี้ สามารถสร้างขึ้นมาได้จากการใช้วิธีการวิเคราะห์ห้วงจรไฟฟ้าด้วยการอาศัยกฎแรงดันของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's Voltage Law, KVL) และ/หรือกฎกระแสของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's Current Law, KCL) และยังขึ้นอยู่กับชนิดของอุปกรณ์แต่ละประเภทที่ประกอบกันเป็นวงจรไฟฟ้านั้นๆ ด้วย

โครงสร้างของผลเฉลยเอาต์พุต $y(t)$ ในสมการที่ (2.29) จะอยู่ในรูปของผลเฉลยบริบูรณ์ ซึ่งหาได้จากแบบจำลองสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต และจะประกอบไปด้วย 2 ส่วนสำคัญด้วยกัน คือ

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (2.30)$$

เมื่อ $y_h(t)$ และ $y_p(t)$ คือ ผลเฉลยเอกพันธ์และผลเฉลยจำเพาะตามลำดับ ในขณะที่ผลเฉลย $y_h(t)$ และ $y_p(t)$ ในรูปของการวิเคราะห์ห้วงจรไฟฟ้าส่วนใหญ่แล้วจะให้ผลเฉลยทั้งสอง

เป็นผลตอบสนองเอาต์พุตที่เรียกว่า *ผลตอบสนองธรรมชาติ* $y_n(t)$ และ *ผลตอบสนองบังคับ* $y_f(t)$ ตามลำดับ ผลเฉลยเอกพันธ์จะหาได้จากสมการอนุพันธ์เอกพันธ์ (homogeneous differential equation) ด้วยการกำหนดให้ค่าทางด้านขวามือของสมการที่ (2.29) เป็นศูนย์ ในหัวข้อนี้จะเขียนผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ แทนด้วย $y_h(t)$ แต่ให้เข้าใจตรงกันว่า $y_h(t) = y_n(t)$ เพื่อไม่ให้ n ที่เป็นผลตอบสนองธรรมชาติไปซ้ำกับ อันดับที่ n ของสมการอนุพันธ์

$$a_n \frac{d^n y_h(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_h(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_h(t)}{dt} + a_0 y_h(t) = 0 \quad (2.31)$$

นั่นก็หมายความว่า ผลเฉลยเอกพันธ์ตามแบบจำลองสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุตดังสมการที่(2.29) นั้น จะหาได้ด้วยวิธีการหยุดการป้อนแหล่งกำเนิดอินพุตให้กับวงจร ไฟฟ้านั้นเอง

สำหรับผลเฉลยจำเพาะ $y_p(t)$ หรือผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ ที่เป็นไปตามสมการที่ (2.29) และจะถูกรวมเข้าไปกับผลตอบสนองธรรมชาติ ดังสมการที่(2.30) ทั้งนี้ผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ ที่ได้จะได้รับอิทธิพลจากสัญญาณอินพุต $x(t)$ ที่มีลักษณะจำเพาะเจาะจงลงไป และบางครั้งเราจะเรียกลักษณะของสัญญาณอินพุตนี้ว่า *ฟังก์ชันบังคับ(forcing function)* นั่นก็คือ $y_f(t)$ ซึ่งจะขึ้นอยู่กับ $x(t)$ แต่ $y_h(t)$ ไม่ได้ขึ้นอยู่กับอินพุต $x(t)$

2.2.1 ผลเฉลยเอกพันธ์ หรือผลตอบสนองธรรมชาติ

สมการอนุพันธ์เอกพันธ์(2.31) จะมีผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y_n(t) = Ae^{st} \quad (2.32)$$

เมื่อ A และ s เป็นค่าพารามิเตอร์ที่ถูกกำหนดขึ้น โดยการแทนค่า $y_n(t)$ จากสมการที่ (2.32) ลงในสมการที่(2.31) ด้วยเหตุที่ว่า $\frac{d^n Ae^{st}}{dt^n} = As^n e^{st}$ เป็นผลให้สมการที่(2.31) สามารถเขียนได้เป็น

$$a_n s^n Ae^{st} + a_{n-1} s^{n-1} Ae^{st} + \dots + a_1 s Ae^{st} + a_0 Ae^{st} = 0$$

หรือ
$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right) A e^{st} = 0 \quad (2.33)$$

จากสมการที่ (2.33) พารามิเตอร์ A และค่าเอกซ์โพเนนเชียล e^{st} มีค่าไม่เท่ากับศูนย์ เนื่องจากเป็นค่าที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของ $y_n(t)$ ดังนั้นจึงเหลือแต่เพียงสมการพีชคณิตที่แสดงดังสมการที่(2.34) เท่านั้นที่เท่ากับศูนย์ จึงจะทำให้สมการที่(2.33) เป็นจริง ดังนั้น

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (2.34)$$

สมการที่ (2.34) ก็คือ สมการคุณลักษณะเฉพาะของสมการอนุพันธ์หรือวงจรไฟฟ้า เหมือนกันกับสมการ(2.4) ในวงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2

จะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ของสมการคุณลักษณะเฉพาะจะเหมือนกันกับค่าสัมประสิทธิ์ของสมการอนุพันธ์เอกพันธ์ และค่า s ยกกำลัง จะมีอันดับที่สอดคล้องและตรงกันกับแต่ละพจน์ของอนุพันธ์ในสมการอนุพันธ์เอกพันธ์

$$\begin{array}{ccccccc} a_n \frac{d^n y_n(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_n(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_n(t)}{dt} + a_0 y_n(t) = 0 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ a_n s^n & + & a_{n-1} s^{n-1} & + \dots + & a_1 s & + & a_0 = 0 \end{array}$$

นั่นคือสมการคุณลักษณะเฉพาะสามารถเขียนในรูปพีชคณิตได้โดยตรงจากสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต ที่ซึ่งพจน์ของผลตอบสนองเอาต์พุตจะอยู่ด้านซ้ายมือ และพจน์ของอินพุตจะอยู่ด้านขวามือของสมการ

โดยทั่วไปแล้วสมการคุณลักษณะเฉพาะจะเป็นสมการพีชคณิตที่มีอันดับที่ n ซึ่งมีค่ารากสมการอยู่ n ราก กำหนดได้เป็น $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ สำหรับในรูปแบบของการแยกตัวประกอบ (Factored form) สมการคุณลักษณะเฉพาะ คือ

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \quad (2.35)$$

เมื่อค่ารากสมการ s ของสมการคุณลักษณะเฉพาะก็คือ ความถี่ธรรมชาตินั่นเอง สมการคุณลักษณะเฉพาะอันดับที่ n จะมีค่ารากสมการจำนวน n รากถ้าค่ารากสมการเหล่านี้เป็นค่าที่ไม่เท่ากันเลย แล้วผลรวมของผลเฉลยจะให้ได้เป็น

$$y_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t} \quad (2.36)$$

เมื่อ A_1, A_2, \dots, A_n เป็นค่าคงที่ที่ไม่เจาะจง ในความจริงแล้ว แต่ละความถี่ธรรมชาติ s จะกำหนดให้เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลที่ทำให้สมการที่ (2.31) เป็นจริง ที่ซึ่งสมการที่ (2.36) จะเป็นผลเฉลยเอกพันธ์ หรือผลตอบสนองธรรมชาติที่จัดอยู่ในรูปทั่วไป

2.2.2 ฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลตอบสนองบังคับไขนุชอยคอลล

ผลเฉลยบริบูรณ์ของแบบจำลองอินพุต-เอาต์พุต ที่อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ของวงจรไฟฟ้าที่แสดงดังสมการที่(2.29) คือ ผลรวมของผลเฉลยเอกพันธ์และผลเฉลยจำเพาะ ซึ่งในหัวข้อนี้เป็นการกล่าวถึงการหาผลตอบสนองบังคับ ที่ซึ่งได้ตอบสนองต่อสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณไขนุชอยคอลล จากแนวคิดที่ว่าถ้าสัญญาณอินพุตเป็นไขนุชอยคอลลแล้ว ผลตอบสนองเอาต์พุตก็จะอยู่ในรูปของไขนุชอยคอลลเช่นเดียวกันด้วย จากสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต (2.29) ในหัวข้อที่2.2.1 เราได้ผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งได้แสดงไว้ในสมการที่ (2.36) และผลตอบสนองบริบูรณ์จะเขียนได้เป็น

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t} + y_f(t) \quad (2.37)$$

หาผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$

สมมติให้สัญญาณอินพุตเป็นจำนวนเชิงซ้อน กำหนดให้

$$x(t) = e^{j\omega t}$$

ในที่นี้ $e^{j\omega t}$ ก็คือ สัญญาณไขนุชอยคอลลที่กระตุ้นระบบนั่นเองทั้งนี้เพราะว่า

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

แล้วสมการที่ (2.29) เขียนใหม่ได้เป็น

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \left(b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0 \right) e^{j\omega t}$$

กำหนดให้ $s = j\omega$ ดังนั้น

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \right) e^{st} \quad (2.38)$$

ใช้วิธีหาผลเฉลยจำเพาะด้วยวิธีการคาดเดา โดยผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ จะมีผลตอบสนองเอาต์พุตสอดคล้องกับฟังก์ชัน $e^{j\omega t}$ ที่ป้อนให้กับระบบ นั่นคือ

$$y_f(t) = A e^{j\omega t}$$

แทนค่า $y(t) = y_f(t)$ ลงในสมการที่ (2.38) แล้วจะได้

$$a_n \frac{d^n y_f(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y_f(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy_f(t)}{dt} + a_0 y_f(t) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \right) e^{st}$$

ภายหลังจากแทนค่า $y_f(t) = A e^{j\omega t}$ และ $s = j\omega$ แล้ว

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \right) A e^{st} = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0 \right) e^{st}$$

$$A = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

แทนค่า A ลงใน $y_f(t) = Ae^{j\omega t}$ จะได้

$$y_f(t) = \left(\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right) e^{j\omega t} \quad (2.39)$$

ผลตอบสนองรวมมีรูปแบบเป็น

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t)$$

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t} + \left(\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right) e^{j\omega t} \quad (2.40)$$

ในขณะที่ ค่าคงที่ A_1, A_2, \dots, A_n สามารถหาได้จากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ทั้งหมดที่กล่าวมานี้ก็คือความสัมพันธ์ของระบบระหว่างอินพุตกับผลตอบสนอง เอาต์พุตในโดเมน-เวลานั่นเอง

ถ้าเรานำสมการที่ (2.29) ไปทำการแปลงฟูเรียร์ซึ่งจะได้เป็น

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \right) e^{-j\omega t} dt \quad (2.41)$$

กำหนดให้ $Y(\omega)$ คือการแปลงฟูเรียร์ของเอาต์พุต $y(t)$ และ $X(\omega)$ คือการแปลงฟูเรียร์ของอินพุต $x(t)$ โดยอาศัยการแปลงฟูเรียร์

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \longleftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$$

จากสมการที่ (2.41) เมื่อ $s = j\omega$ แล้วจะได้

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) Y(\omega) = \\ (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0) X(\omega) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.42)$$

เปรียบเทียบระหว่างสมการที่ (2.40) กับสมการที่ (2.42) จะพบว่า

$$\left(\frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \right) \text{ จะอยู่ในส่วนของผลตอบสนองบังคับ นั่นก็คือ ผล}$$

การแปลงฟูเรียร์ของระบบ จะเป็นการพิจารณาเฉพาะในส่วนของผลตอบสนองบังคับเท่านั้น และอัตราส่วนของเอาต์พุตต่ออินพุต $Y(\omega)/X(\omega)$ จะเรียกว่า ฟังก์ชันถ่ายโอน (transfer function) ของระบบ และให้มีสัญลักษณ์เป็น $H(\omega)$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

จากสมการที่ (2.40) จะเขียนผลตอบสนองบริบูรณ์ $y(t)$ ใหม่ได้เป็น

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \dots + A_n e^{s_n t} + H(\omega) e^{j\omega t} \quad (2.43)$$

$$\text{เมื่อ } H(\omega) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

ซึ่งจะเป็นไปตามสมการที่ (2.43) ได้ก็ต่อเมื่ออินพุต $x(t) = e^{j\omega t}$ สำหรับในกรณีนี้จะใช้ได้กับอินพุตที่เป็นสัญญาณไซน์ชื่อยอดคอลเท่านั้น ณ ที่นี้ผลตอบสนองบังคับก็คือผลตอบสนองในขณะที่เป็นสถานะอยู่ตัวไฟสลับ (AC-steady-state response) และเรายังพบอีกว่าพจน์แรกขวามือของสมการที่ (2.43) ก็คือช่วงสภาวะชั่วคราว (transient) และจะเห็นได้ว่าค่าฟังก์ชันถ่ายโอน

$H(\omega)$ ของระบบจะมีอิทธิพลของผลตอบสนองบังคับ ดังนั้น ในการหาผลตอบสนองบังคับของระบบที่มีอินพุตเป็นไซน์ชอยคอลล จะสามารถหาผลตอบสนองบังคับได้โดยการหาฟังก์ชันถ่ายโอน $H(\omega)$ แล้วนำ $H(\omega)$ มาคูณกับไซน์ชอยคอลล ($e^{j\omega t}$) ผลที่ได้จะเป็นผลตอบสนองบังคับของระบบนั่นเอง

2.2.3 ขอบเขตเงื่อนไข

ผลเฉลยปริภูมิที่มีต่อสมการอนุพันธ์อันดับสูง-เอชต์พุด จะอยู่ในรูปทั่วไป ด้วยความเข้าใจที่ว่าค่าสัมประสิทธิ์ A_1, A_2, \dots, A_n เป็นค่าคงที่ที่ไม่เจาะจง ค่าคงที่เหล่านี้จะสามารถกำหนดได้ถ้าได้มีการเพิ่มข้อบังคับ หรือเงื่อนไขเข้าไปในผลเฉลยที่ได้จากสมการที่(2.29) ซึ่งเรียกว่า *ขอบเขตเงื่อนไข (boundary condition)* ในความเป็นจริงแล้ว ถ้าให้เงื่อนไขจำนวน n เงื่อนไข และเป็นอิสระต่อกัน แล้วค่าสัมประสิทธิ์ของแต่ละตัวจะสามารถหาออกมาได้เพียงตัวละหนึ่งค่า

ขอบเขตเงื่อนไขของแบบจำลองสมการอนุพันธ์อันดับสูง-เอชต์พุด ของวงจรไฟฟ้าจะถูกใช้ในขอบเขตของช่วงเวลา ตัวอย่างเช่น ถ้าวางจรถูกกระตุ้นด้วยแหล่งกำเนิดในเวลา $t \geq 0$ ขอบเขตเงื่อนไขจะให้เวลาเริ่มต้น ณ ที่เวลา $t = 0$ แล้วในช่วงเวลาที่เป็นอดีตของวงจรจะมีเวลา ณ ที่เวลา $t < 0$

2.2.4 ความถี่ธรรมชาติที่มีค่าซ้ำๆกัน

ในการหาผลเฉลยเอกพันธ์(ผลตอบสนองธรรมชาติ) ของสมการอนุพันธ์อันดับสูง-เอชต์พุด จะเป็นการแก้สมการเพื่อหาค่ารากสมการจากสมการคุณลักษณะเฉพาะ ซึ่งก็คือการหาความถี่ธรรมชาติของวงจรมันเอง อย่างไรก็ตาม ถ้าวางจรคุณลักษณะเฉพาะประกอบไปด้วยค่ารากสมการที่ซ้ำๆ กัน แล้วผลคูณของตัวประกอบที่ได้จะเขียนอยู่ในรูป $(s - s_j)^r$ เมื่อ $s - s_j$ คือค่าจากการแยกตัวประกอบที่ซ้ำๆ กัน r ครั้ง ในกรณีนี้ผลตอบสนองธรรมชาติจะมีพจน์ที่เป็นเอกซ์โพเนนเชียลเป็นจำนวน r พจน์ ซึ่งจะสัมพันธ์กันกับ s_j ในกรณีนี้เวลา t จะถูกตัดแปลงด้วยการนำเวลา t เข้าไปรวมอยู่กับตัวประกอบโพลิโนเมียลที่เป็นผลตอบสนองธรรมชาติด้วย นั่นคือ

$$y_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + \dots + A_{j1} e^{s_j t} + A_{j2} t e^{s_j t} + \dots + A_{jr} t^{r-1} e^{s_j t}$$

ถึงแม้ว่าสมการคุณลักษณะเฉพาะ จะมีค่ารากที่ไม่เหมือนกัน หรือ อาจจะเป็นค่าที่ซ้ำๆ กันก็ตาม ผลตอบสนองธรรมชาติก็ยังคงจะมีค่าสัมประสิทธิ์ที่ถูกต้องอยู่ n สัมประสิทธิ์ ซึ่งสัมประสิทธิ์แต่ละตัวจะมีเพียงตัวละค่าเท่านั้น ถ้าหากให้ขอบเขตเงื่อนไขมี n ค่าที่เป็นอิสระต่อกัน

2.2.5 แบบจำลองฟังก์ชันถ่ายโอน (s - model) ของวงจรไฟฟ้า

ในหัวข้อนี้ จะทำการหาค่าฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรไฟฟ้าในรูปของ s - model โดยอาศัยผลการแปลงลาปลาซ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วสมการที่เราใช้แทนระบบในโดเมน-เวลาจะเป็นไปดังสมการอนุพันธ์ของอินพุต-เอาต์พุตที่ (2.29) กล่าวคือ

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

ซึ่งเราทราบว่าผลการแปลงลาปลาซของค่าอนุพันธ์อันดับที่ n จะมีค่าเป็น

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) \dots - s^0 f^{(n-1)}(0)$$

ในการหาผลการแปลงลาปลาซของค่าอนุพันธ์ เราจะได้ $s^n F(s)$ และมีค่าคงที่หรือค่าเงื่อนไขเริ่มต้นรวมอยู่ด้วยจำนวน n พจน์ $(-s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s^0 f^{(n-1)}(0))$ ดังนั้นถ้าเราให้พจน์ที่เป็นค่าเงื่อนไขเริ่มต้นให้เริ่มต้นเป็นศูนย์ทั้งหมดแล้วจะได้

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = s^n F(s)$$

ทำการหาผลการแปลงลาปลาซในสมการที่ (2.29) จะ ได้

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0\right) X(s)$$

เมื่อ $Y(s)$ คือผลการแปลงลาปลาซของเอาต์พุต $y(t)$ และ $X(s)$ คือผลการแปลงลาปลาซของอินพุต $x(t)$ แล้วฟังก์ชันถ่ายโอนในรูปของ s - model จะเขียนได้เป็น

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.44)$$

สมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุตดั้งที่เคยให้ไว้ เราสามารถจัดให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอน $H(s)$ ได้ โดยการหาผลการแปลงลาปลาซจากสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต และสามารถแปลงกลับมาให้อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุตจากฟังก์ชันถ่ายโอนได้ เช่นเดียวกัน ตัวอย่างเช่น วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$H(s) = \frac{s+2}{4s^3 + s+1}$$

สามารถเขียนสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุตโดยการเปรียบเทียบโดยตรงได้เลย เนื่องจากเราทราบว่า ตัวส่วน และตัวเศษของ $H(s)$ เป็นเอาต์พุต และอินพุตของวงจรตามลำดับ ดังนั้นสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต จะเขียนได้เป็น

$$4 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนคือ แบบจำลองที่สมมูลกับวงจรไฟฟ้า แต่จะกระชับกว่าแบบจำลองสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต ซึ่งประกอบไปด้วยทุกๆ ข่าวสารที่ต้องการจะหา ไม่ว่าจะเป็นปริมาณที่ธรรมชาติ ผลตอบสนองธรรมชาติ และผลตอบสนองบังคับ เพราะฉะนั้นแบบจำลองวงจรไฟฟ้าในรูปของสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต จึงเรียกว่า เป็นแบบจำลองในโดเมน-เวลา (*time-domain*) และแบบจำลองฟังก์ชันถ่ายโอนจะเรียกว่า เป็นแบบจำลองในโดเมน-เอส (*s-domain*)

2.2.6 รูปแบบของ โพล – ซีโร

จากตัวเศษและตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนที่อยู่ในรูปของ s - model ดังสมการที่(2.44) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการแยกตัวประกอบกำลังที่แสดงอยู่ในลักษณะของลำดับรากสมการได้เป็น

$$H(s) = \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} \quad (2.45)$$

รากสมการของตัวเศษ $z_1 \dots z_m$ จะเรียกว่า **ซีโร(zeros)** ของฟังก์ชันถ่ายโอน รากสมการของตัวส่วน $p_1 \dots p_n$ ซึ่งเป็นความถี่ธรรมชาติจะเรียกว่า **โพล(pole)** ของ $H(s)$ โดยทั่วไปแล้วค่าโพล และซีโร จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน และฟังก์ชันถ่ายโอนจะถูกนิยามลงบนระนาบเชิงซ้อน(complex plane) กราฟที่แสดงจุดโพล และซีโร ของ $H(s)$ ในระนาบเชิงซ้อนจะถูกเรียกว่า **แบบแผนโพล-ซีโร (pole-zero pattern)** ของวงจร แบบแผนโพล-ซีโรจะถูกใช้ในการทำนายผลตอบสนองของวงจร ตำแหน่งโพลของ $H(s)$ จะสัมพันธ์กันกับตำแหน่งของความถี่ธรรมชาติ และตำแหน่งของซีโรจะสัมพันธ์ต่อความถี่ที่ซึ่งผลตอบสนองบังคับเป็นศูนย์

2.2.7 ฟังก์ชันถ่ายโอนกับผลตอบสนองธรรมชาติ

จากฟังก์ชันถ่ายโอนตามสมการที่(2.42) และ (2.44) ในหัวข้อที่2.2.2 และ2.2.5 ตามลำดับ เมื่อพิจารณาตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอนจะพบว่า มีรูปแบบอยู่ในรูปเดียวกันกับสมการคุณลักษณะเฉพาะ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนผลตอบสนองธรรมชาติออกมาได้โดยตรงจากตัวส่วนของฟังก์ชันถ่ายโอน กล่าวคือ

พิจารณาตัวส่วนของ $H(s)$ ซึ่งคือ $(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)$ เราสามารถเขียนผลเฉลยของสมการอนุพันธ์ได้ทันทีนั่นคือ

$$y_n(t) = y_h(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}$$

แสดงว่าเราสามารถหาผลตอบสนองธรรมชาติของระบบได้ทันทีจากค่าโพลของระบบที่เราทราบ ต่อไปพิจารณาตัวอย่างของระบบๆ หนึ่งที่มีความสัมพันธ์ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่สองเป็นสมการออสซิลเลตอรีดังนี้

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_0y(t) = x(t)$$

ผลของการแปลงลาปลาซของสมการออสซิลเลตอรี จะได้

$$s^2Y(s) + a_0Y(s) = X(s)$$

แล้วฟังก์ชันถ่ายโอนจะเป็น

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + a_0} \\ &= \frac{1}{(s - j\sqrt{a_0})(s + j\sqrt{a_0})} \end{aligned}$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอน $H(s)$ จะมีโพลอยู่ 2 ตัวคือ $p_1, p_2 = \pm j\sqrt{a_0}$ เพราะฉะนั้น ผลตอบสนองธรรมชาติจะได้เป็น

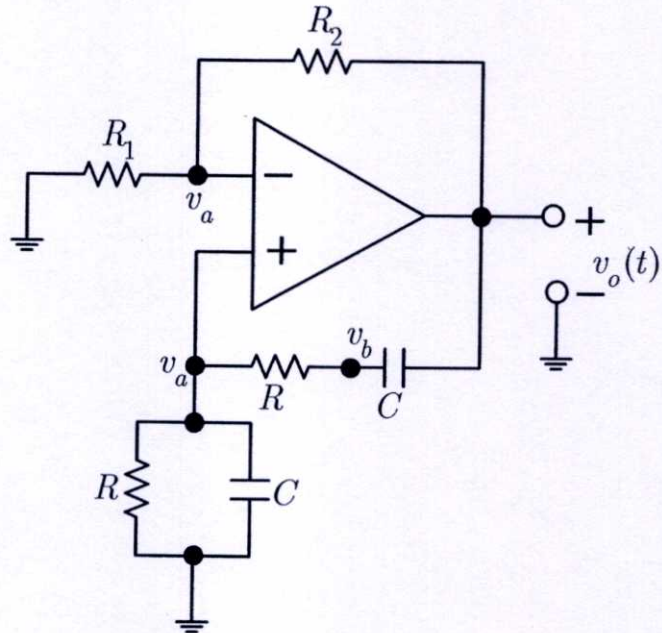
$$\begin{aligned} y_n(t) &= A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} \\ y_n(t) &= A_1e^{(j\sqrt{a_0})t} + A_2e^{-(j\sqrt{a_0})t} \end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้ $A_1 = A_2 = A/2$ แล้ว

$$y_n(t) = A \cos(\sqrt{a_0}t)$$

2.3 วงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่างๆ

2.3.1 วงจรเวเนบริคซ์ออสซิลเลเตอร์



รูปที่ 2.6 วงจรเวเนบริคซ์ออสซิลเลเตอร์

ใช้สมการจตุรรมที่ขาลบของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_a - \frac{v_o(t)}{R_2} = 0$$

$$v_a = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) v_o(t)$$

กำหนดให้ $k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ จะได้

$$v_a = kv_o(t)$$

(2.46)

ใช้สมการจตุรรมที่ขาบวกของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)v_a + C \frac{d(v_a - 0)}{dt} - \frac{v_b}{R} = 0$$

$$v_b = RC \frac{dv_a}{dt} + 2v_a \quad (2.47)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม v_b

$$\frac{v_b}{R} + C \frac{d(v_b - v_o(t))}{dt} - \frac{v_a}{R} = 0$$

$$RC \frac{dv_b}{dt} - RC \frac{dv_o(t)}{dt} + v_b - v_a = 0 \quad (2.48)$$

แทนค่า v_a จากสมการที่ (2.46) ลงในสมการที่ (2.47)

$$v_b = kRC \frac{dv_o(t)}{dt} + 2kv_o(t) \quad (2.49)$$

แทนค่า v_a จากสมการที่ (2.46) และ v_b จากสมการที่ (2.49) ลงในสมการที่ (2.48)

$$kR^2C^2 \frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + (3k - 1)RC \frac{dv_o(t)}{dt} + kv_o(t) = 0 \quad (2.50)$$

นำ $1/kR^2C^2$ คูณตลอดสมการที่ (2.50)

$$\frac{d^2v_o(t)}{dt^2} + \frac{(3k - 1)}{kRC} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t)}{R^2C^2} = 0 \quad (2.51)$$

แทนค่า $k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ ลงในสมการที่(2.51)จะได้

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{v_o(t)}{R^2 C^2} = 0$$

หรือ

$$v_o''(t) + \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) v_o'(t) + \frac{v_o(t)}{R^2 C^2} = 0 \quad (2.52)$$

เปรียบเทียบกับสมการอนุพันธ์เอกพันธ์อันดับที่ 2 จากสมการที่(2.2) ในหัวข้อที่ 2.1 กล่าวคือ

$$y_n''(t) + a_1 y_n'(t) + a_0 y_n(t) = 0 \quad (2.2)$$

จากการพิจารณาจะพบว่าค่าพารามิเตอร์ $a_1 = \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right)$ และ $a_0 = 1/R^2 C^2$

และผลตอบสนองเอาต์พุตจะเป็นผลตอบสนองธรรมชาติ และถ้าต้องการให้วงจรแอมพลิฟายเออร์เกิด การออสซิลเลตเป็นสัญญาณไซน์ชวยคอลที่ปราศจากการหน่วงแล้วละก็ จะต้องจัดสมการ ที่(2.52) ให้อยู่ในรูปของสมการออสซิลลาตอร์ดังสมการที่(2.18) ในหัวข้อที่ 2.1.2

$$y_n''(t) + a_0 y_n(t) = 0 \quad (2.18)$$

นั่นก็คือค่าพารามิเตอร์ a_1 จะต้องเท่ากับศูนย์ จากสมการที่(2.52) จะได้เงื่อนไขของการ ออสซิลเลตเป็น

$$a_1 = \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) = 0$$

ถ้าเรากำหนดให้ $R_2 / R_1 = 2$ หรืออีกความหมายหนึ่งก็คือ $R_2 = 2R_1$ แล้วจะทำให้สมการที่(2.52) กลายเป็นสมการออสซิลลาตอร์แสดงได้ดังสมการที่(2.53)

$$v_o''(t) + \frac{v_o(t)}{R^2 C^2} = 0 \quad (2.53)$$

สมการคุณลักษณะเฉพาะจะเขียนได้เป็น

$$s^2 + \frac{1}{R^2C^2} = 0$$

$$s = \sigma \pm j\omega = 0 \pm j(1/RC) \quad (2.54)$$

ผลตอบสนองธรรมชาติเอาต์พุตคือ

$$v_o(t) = A_1 e^{j(t/RC)} + A_2 e^{-j(t/RC)} \quad (2.55)$$

กำหนดให้ $A_1 = A_2 = A/2$ เป็นค่าจริงและจากสมการที่ (2.16) ในหัวข้อที่ 2.1.2 จะได้

$$v_o(t) = e^{\sigma t} (A \cos \omega t)$$

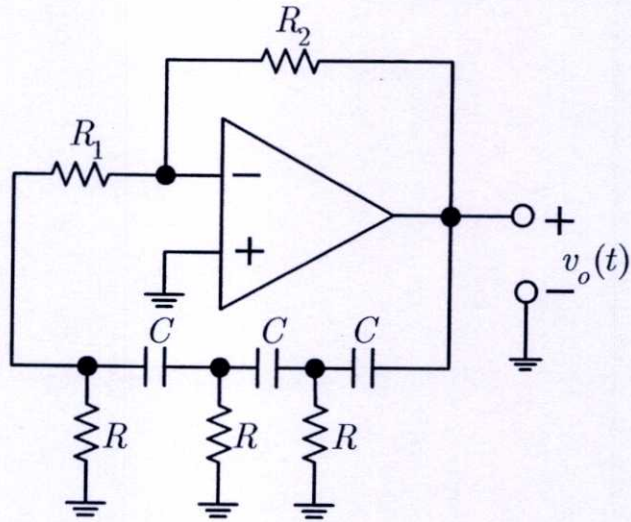
$$= e^{(0)t} (A \cos(t/RC))$$

เป็นผลให้

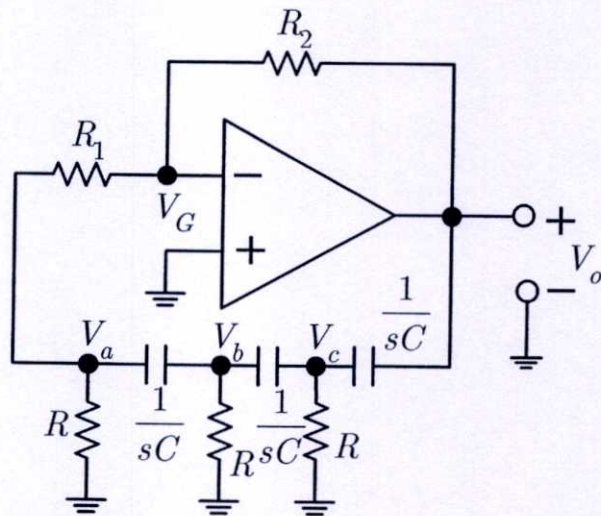
$$v_o(t) = A \cos(t/RC) \quad (2.56)$$

จะเห็นได้ว่าวงจรเรโซแนนซ์ออสซิลเลเตอร์จะสามารถให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ฮาร์มอนิกบริสุทธิ์ที่เอาต์พุตได้ โดยไม่จำเป็นต้องมีสัญญาณอินพุตป้อนให้กับวงจร ทั้งนี้วงจรจะออสซิลเลตที่เงื่อนไข R_2 ต้องมีค่าเป็นสองเท่าของค่าความต้านทาน R_1 และมีค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = -a_1/2 = 0$ โดยที่สัญญาณออสซิลเลตจะออสซิลเลตที่ความถี่ธรรมชาติ $\omega = \sqrt{a_0} = 1/RC$ เรเดียน/วินาที หรือที่ความถี่ $f_{osc} = 1/2\pi RC$ เฮิรตซ์ (Hz)

2.3.2 วงจรเลื่อน - เฟสออสซิลเลเตอร์



(a)



(b)

รูปที่ 2.7 วงจรเลื่อน - เฟสออสซิลเลเตอร์ (a) ในโดเมน - เวลา
(b) ในโดเมน - เอส

จากการสังเกตวงจรจะเห็นได้ว่าแรงดันไฟฟ้าที่จุดรวม V_G เป็นกราวด์เสมือน (virtual ground) นั่นคือ

$$V_G = 0 \quad (2.57)$$

ใช้สมการจตุรรมที่ขาลบของออป - แอมป์

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_G - \frac{V_a}{R_1} - \frac{V_o}{R_2} = 0 \quad (2.58)$$

กำหนดให้ $k = R_1 / R_2$ และแทน $V_G = 0$ ลงในสมการที่(2.58)

$$V_a = -kV_o \quad (2.59)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม V_a

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} + sC\right)V_a - \frac{V_G}{R_1} - sCV_b = 0 \quad (2.60)$$

พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ ในพจน์แรกของสมการที่(2.60) และจากรูปวงจรที่แสดงในรูปที่ 2.7 (b) จะเห็นได้ว่าตัวต้านทาน R_1 ที่ปลายขาต้านหนึ่งจะถูกต่อลงกราวนด์เสมือน จึงทำให้ตัวต้านทาน R_1 และ R ณ ตำแหน่งจตุรรม V_a ต่อกันแบบขนาน นั่นคือ [18]

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \quad (2.61)$$

เมื่อ R_p เป็นค่าความต้านทานสมมูลของการต่อแบบขนาน (equivalent parallel resistance) ในทางปฏิบัติแล้วจะให้ $R_1 \gg R$ ดังนั้น R_1 ที่ต่อขนานกับ R อยู่那儿จะมีค่าประมาณ R แล้วจะเป็นผลให้

$$\frac{1}{R_p} = \frac{R + R_1}{RR_1} \simeq \frac{1}{R} \quad (2.62)$$

ดังนั้นสมการที่(2.60) จึงสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$\left(\frac{1}{R} + sC\right)V_a - sCV_b = 0 \quad (2.63)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม V_b และ V_c ตามลำดับจะได้

$$\left(\frac{1}{R} + 2sC\right)V_b - sCV_a - sCV_c = 0 \quad (2.64)$$

$$\left(\frac{1}{R} + 2sC\right)V_c - sCV_b - sCV_o = 0 \quad (2.65)$$

แทนค่า V_a จากสมการที่ (2.59) ลงในสมการที่ (2.63) แล้วจัดสมการใหม่ทำให้ได้

$$V_b = -\frac{k(1 + RCs)}{RCs}V_o \quad (2.66)$$

จากสมการที่ (2.64) แก้สมการหาค่า V_c

$$V_c = \frac{(1 + 2RCs)}{RCs}V_b - V_a \quad (2.67)$$

แทนค่า V_c จากสมการที่ (2.67) ลงในสมการที่ (2.65)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + 2RCs}{R}\right)\left(\left(\frac{1 + 2RCs}{RCs}\right)V_b - V_a\right) - sCV_b - sCV_o &= 0 \\ \left(\frac{3R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}{R^2Cs}\right)V_b - \left(\frac{1 + 2RCs}{R}\right)V_a - sCV_o &= 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

แทนค่า V_a และ V_b จากสมการที่ (2.59) และ (2.66) ลงในสมการที่ (2.68) ตามลำดับแล้วจะได้

$$\left(\frac{3R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}{R^2Cs}\right)\left(-\frac{k(1 + RCs)}{RCs}\right)V_o$$

$$-\left(\frac{1+2RCs}{R}\right)(-kV_o) - sCV_o = 0$$

$$\left(\frac{k(R^3C^3s^3 + 6R^2C^2s^2 + 5RCs + 1) - R^3C^3s^3}{R^3C^2s^2}\right)V_o = 0 \quad (2.69)$$

นำ $-R^3C^2s^2 / k$ คูณตลอดสมการที่(2.69) และจัดสมการใหม่จะได้

$$\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3s^3 + 6R^2C^2s^2 + 5RCs + 1\right)V_o = 0 \quad (2.70)$$

ทำการแปลงลาปลาซกลับในสมการที่(2.70) เพื่อทำการวิเคราะห์หา $v_o(t)$ ในโดเมน - เวลา

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3v_o'''(t) + 6R^2C^2v_o''(t) + 5RCv_o'(t) + v_o(t) = 0 \quad (2.71)$$

จากสมการที่(2.71) จะเห็นได้ว่าเป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่ 3 ที่ซึ่งสมการอนุพันธ์อันดับที่ 3 เขียนอยู่ในรูปทั่วไปแสดงได้ดังสมการ

$$a_3v_o'''(t) + a_2v_o''(t) + a_1v_o'(t) + a_0v_o(t) = 0 \quad (2.72)$$

สมการคุณลักษณะเฉพาะของสมการที่(2.72)จะเป็น

$$a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0 \quad (2.73)$$

จากแบบจำลองสมการอนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต ในหัวข้อที่ 2.2 และอาศัยสมการที่(2.36) ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เอกพันธ์ในหัวข้อที่ 2.2.1 ดังนั้นผลตอบสนองธรรมชาติ ของสมการอนุพันธ์อันดับที่ 3 จะสามารถให้ได้เป็น

$$v_o(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} + A_3e^{s_3t} \quad (2.74)$$

และถ้าหากต้องการให้ผลเฉลยของสมการที่(2.72) มีเอาต์พุตเป็นสัญญาณออสซิลเลต ไซนูซอยดอลแล้วละก็ ค่ารากสมการ หรือความถี่ธรรมชาติจะต้องอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}
 s_1 &= j\omega \\
 s_2 &= -j\omega \\
 \text{และ} \quad s_3 &= -k_1
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

เมื่อ k_1 เป็นค่าจริงคงที่ เพราะฉะนั้นสมการคุณลักษณะเฉพาะที่แสดงไว้ในสมการที่(2.73) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของการแยกตัวประกอบได้เป็น

$$\begin{aligned}
 (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) &= 0 \\
 (s - j\omega)(s + j\omega)(s - k_1) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

นั่นคือ

$$s^3 + k_1 s^2 + \omega^2 s + k_1 \omega^2 = 0 \tag{2.77}$$

จากสมการคุณลักษณะเฉพาะ(2.73) นำเอา $1 / a_3$ คูณตลอดสมการจะได้

$$s^3 + (a_2 / a_3)s^2 + (a_1 / a_3)s + (a_0 / a_3) = 0 \tag{2.78}$$

เปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ระหว่างสมการที่(2.77) กับ(2.78) พจน์ต่อพจน์แล้วจะพบว่า

$$\begin{aligned}
 k_1 &= a_2 / a_3 \\
 \omega^2 &= a_1 / a_3 \\
 \text{และ} \quad k_1 \omega^2 &= a_0 / a_3
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อทำการเปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ของวงจรถือ - เฟสพจน์ต่อพจน์ระหว่างสมการความสัมพันธ์อินพุต-เอาต์พุต(2.71) ของวงจรถือ กับสมการที่(2.79) จะแสดงได้เป็น

$$k_1 = 6R^2C^2 / (1 + (1/k))R^3C^3 \tag{2.80}$$

$$\omega^2 = 5RC / (1 + (1/k))R^3C^3 \tag{2.81}$$

$$\text{และ } k_1 \omega^2 = \left(\frac{6R^2C^2}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3} \right) \left(\frac{5RC}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3} \right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3} \quad (2.82)$$

แก้สมการที่(2.82) เพื่อหาเงื่อนไขของการออสซิลเลตจากค่า k เพราะฉะนั้นจากสมการที่ (2.82) เราจะได้

$$\left(\frac{6}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \right) \left(\frac{5}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3} \right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3}$$

$$30 = 1 + \frac{1}{k}$$

$$k = 1/29 \quad (2.83)$$

เนื่องจาก $k = R_1 / R_2 = 1/29$ หรือมีอัตราส่วนระหว่าง $R_2 / R_1 = 29$ หรือ $R_2 = 29R_1$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่ทำให้วงจรได้ผลตอบสนองธรรมชาติเป็นดังสมการที่(2.74) นั่นคือ

$$v_o(t) = A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} + A_3 e^{-k_1 t} \quad (2.84)$$

ทำการแทนค่า $k = 1/29$ ลงในสมการที่ (2.80) และ (2.81) เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ ω และ k_1 ตามลำดับ เป็นผลให้

$$k_1 = 1/5RC \quad (2.85)$$

และ

$$\omega^2 = 1/6R^2C^2$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{6}RC} \quad (2.86)$$

จากสมการที่(2.84) ผลตอบสนองธรรมชาติจะเขียนได้เป็น

$$v_o(t) = A_1 e^{jt/\sqrt{6RC}} + A_2 e^{-jt/\sqrt{6RC}} + A_3 e^{-t/5RC} \quad (2.87)$$

พิจารณาผลตอบสนองธรรมชาติกับพจน์ที่ 1 และพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการที่(2.87) จะเห็นได้ว่าทั้งสองพจน์นี้จะเหมือนกันกับผลตอบสนองธรรมชาติในรูปแบบของ underdamped ของวงจรอันดับที่สองดังที่ได้กล่าวมาแล้วในหัวข้อก่อนหน้านี้นั้นคือ

$$A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} = A_1 e^{jt/\sqrt{6RC}} + A_2 e^{-jt/\sqrt{6RC}}$$

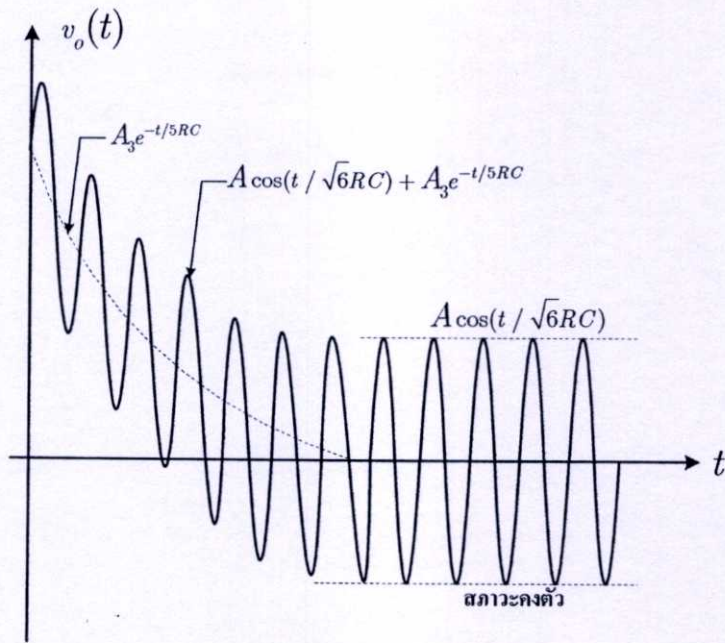
จะเห็นได้ว่าในกรณีนี้ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = 0$ และ $\omega = 1/\sqrt{6RC}$ ซึ่งผลรวมของทั้งสองพจน์นี้จะให้ผลลัพธ์ออกมาเป็นสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอด เพราะฉะนั้นถ้ากำหนดให้ $A_1 = A_2 = A/2$ เป็นค่าจริงแล้วจะได้ผลตอบสนองธรรมชาติของวงจรเล็อน-เฟสออสซิลเลเตอร์แสดงได้เป็น

$$v_o(t) = A \cos(t / \sqrt{6RC}) + A_3 e^{-t/5RC} \quad (2.88)$$

สำหรับพจน์ที่ 3 ของผลตอบสนองธรรมชาติจะเป็นกรณีของการหน่วงในลักษณะค่อยๆ ลดลงเข้าสู่ศูนย์ เมื่อเวลาผ่านไปชั่วครู่ตามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล สำหรับความถี่ในการออสซิลเลตจะมีค่าเป็น

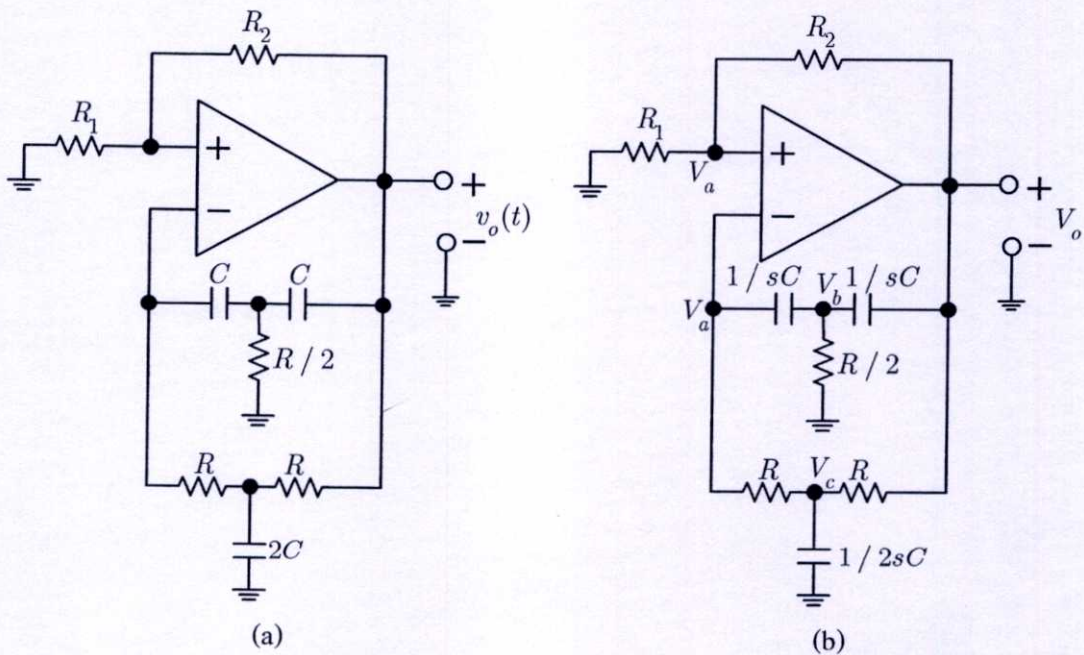
$$f_{osc} = 1 / 2\pi\sqrt{6RC} \quad \text{Hz} \quad (2.89)$$

รูปสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตตามสมการที่(2.88) แสดงได้ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 วงจรเลื่อน - เฟสออสซิลเลเตอร์ให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ชวยคอลเลกต์ฟุต

2.3.3 วงจรทวิน-ทือออสซิลเลเตอร์



รูปที่ 2.9 (a) วงจรทวินทือออสซิลเลเตอร์ในโดเมน-เวลา
(b) วงจรทวินทือออสซิลเลเตอร์ในโดเมน-ความถี่

จากวงจรในรูปที่ 2.9 (b) วิเคราะห์หาสมการความสัมพันธ์ของวงจรโดยใช้สมการจตุรรมที่ขาบวกของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_a - \frac{V_o}{R_2} = 0$$

$$V_a = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)V_o$$

กำหนดให้ $k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ ทำให้ได้

$$V_a = kV_o \quad (2.90)$$

สมการจตุรรมที่ขาลบของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R} + sC\right)V_a - sCV_b - \frac{V_c}{R} = 0 \quad (2.91)$$

นำเอา R คูณตลอดสมการที่ (2.91)

$$(1 + RCs)V_a - RCsV_b - V_c = 0 \quad (2.92)$$

สมการจตุรรมที่จตุรรม V_b

$$\left(\frac{2}{R} + 2Cs\right)V_b - CsV_a - CsV_o = 0$$

$$(2 + 2RCs)V_b - RCsV_a - RCsV_o = 0 \quad (2.93)$$

สมการจตุรรมที่จตุรรม V_c

$$\left(\frac{2}{R} + 2Cs\right)V_c - \frac{V_a}{R} - \frac{V_o}{R} = 0$$

$$(2 + 2RCs)V_c - V_a - V_o = 0 \quad (2.94)$$

แทนค่า V_a จากสมการที่ (2.90) ลงในสมการที่ (2.93) และ (2.94) ตามลำดับจะได้

$$\begin{aligned} (2 + 2RCs)V_b - kRCsV_o - RCsV_o &= 0 \\ (2 + 2RCs)V_b - (k + 1)RCsV_o &= 0 \\ V_b &= \left(\frac{(k + 1)RCs}{2 + 2RCs} \right) V_o \end{aligned} \quad (2.95)$$

และ

$$\begin{aligned} (2 + 2RCs)V_c - kV_o - V_o &= 0 \\ V_c &= \left(\frac{k + 1}{2 + 2RCs} \right) V_o \end{aligned} \quad (2.96)$$

แทนค่า V_a , V_b และ V_c จากสมการที่ (2.90), (2.95) และ (2.96) ลงในสมการที่ (2.92) นั่นคือ

$$\begin{aligned} k(1 + RCs)V_o - RCs \left(\frac{(k + 1)RCs}{2 + 2RCs} \right) V_o - \left(\frac{(k + 1)}{2 + 2RCs} \right) V_o &= 0 \\ \left[k(1 + RCs) - (k + 1) \left(\frac{1 + R^2C^2s^2}{2 + 2RCs} \right) \right] V_o &= 0 \end{aligned} \quad (2.97)$$

นำเอา $2 + 2RCs$ คูณตลอดสมการที่ (2.97) และจัดสมการใหม่ทำให้ได้

$$\begin{aligned} \left[k(1 + RCs)(2 + 2RCs) - (k + 1)(1 + R^2C^2s^2) \right] V_o &= 0 \\ \left[(k - 1)R^2C^2s^2 + 4kRCs + (k - 1) \right] V_o &= 0 \end{aligned} \quad (2.98)$$

นำ $1 / (k - 1)R^2C^2$ คูณตลอดสมการที่ (2.98) จะได้

$$\left[s^2 + \left(\frac{4k}{(k - 1)RC} \right) s + \frac{1}{R^2C^2} \right] V_o = 0$$

ทำการแปลงลาปลาซกลับ เพื่อวิเคราะห์หาแรงดันเอาต์พุต $v_o(t)$ ในโดเมน-เวลา จะทำให้ได้

$$v_o''(t) + \left(\frac{4k}{(k-1)RC} \right) v_o'(t) + \frac{v_o(t)}{R^2C^2} = 0 \quad (2.99)$$

ถ้าต้องการให้วงจรนี้ออสซิลเลตได้สัญญาณไซน์ชอยคอลบรีสุทท์ที่เอาต์พุตแล้วละก็ พจน์กลางของสมการที่ (2.99) จะต้องเป็นศูนย์ พิจารณาเงื่อนไขของการออสซิลเลตจะได้ว่า

$$\frac{4k}{(k-1)RC} = 0 \quad (2.100)$$

จะเห็นได้ว่า $(k-1)$ และผลคูณ RC เป็นศูนย์ไม่ได้ ดังนั้น k จึงต้องเท่ากับศูนย์ จึงจะทำให้สมการที่ (2.100) เป็นจริง

$$k = 0$$

$$\text{เนื่องจาก } k = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0$$

เพราะฉะนั้น $R_1 = 0$ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือตัวต้านทาน R_1 จะต้องลัดวงจร จึงจะทำให้สมการที่ (2.99) กลายเป็นสมการออสซิลลาตอรี กล่าวคือ

$$v_o''(t) + \frac{v_o(t)}{R^2C^2} = 0 \quad (2.101)$$

ในทางปฏิบัติตัวต้านทาน R_1 จะเป็นตัวต้านทานชนิดปรับค่าได้เมื่อทำการปรับค่าให้มีค่าความต้านทานลดลงจนกระทั่งวงจรให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตและจากหัวข้อที่ 2.1.2 เรื่องสมการออสซิลลาตอรี เราทราบแล้วว่าสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ที่มีรูปแบบเป็นสมการออสซิลลาตอรี ดังสมการที่ (2.101) จะให้กำเนิดสัญญาณเอาต์พุตออกมาเป็นสัญญาณไซน์ชอยคอลบรีสุทท์ ในทำนองเดียวกันถ้าเรากำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ $A_1 = A_2 = A/2$ เป็นค่าจริง แล้วจะเป็นผลให้

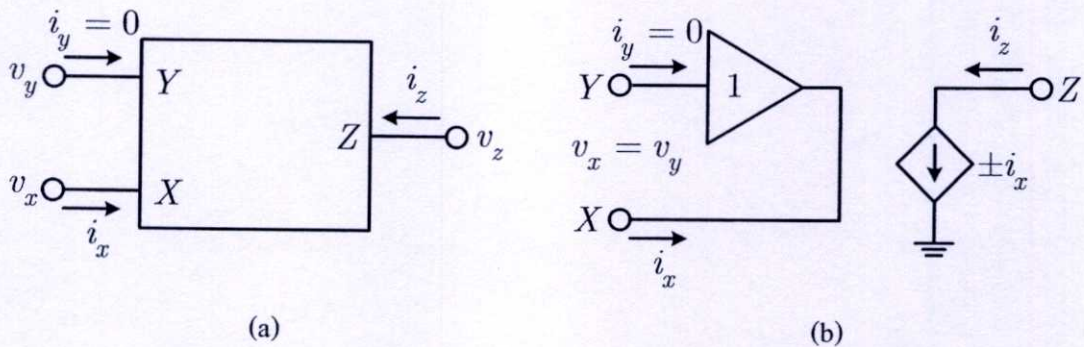
$$v_o(t) = A \cos(\omega t) = A \cos(t / RC) \quad (2.102)$$

ที่ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = -a_1 / 2 = 0$ และความถี่เรเดียนธรรมชาติ $\omega = \sqrt{a_0} = \sqrt{1 / R^2 C^2} = 1 / RC$ เรเดียน/วินาที หรือในหน่วยของเฮิร์ตซ์จะให้ความถี่ในการออสซิลเลตเป็น

$$f_{osc} = 1 / 2\pi RC \quad \text{Hz} \quad (2.103)$$

2.3.4 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส

วงจรสายพานกระแสรุ่นที่ 2 (second generation current conveyor, *CCII*) เป็นอุปกรณ์ชนิด 3 ขั้ว สัญลักษณ์ของวงจรแสดงดังรูปที่ 2.10 (a) ในขณะที่วงจรมูลของวงจรสายพานกระแสรุ่นที่ 2 ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.10 (b)



รูปที่ 2.10 (a) สัญลักษณ์ของ *CCII* (b) วงจรมูลของ *CCII*

ทั้งนี้ความสัมพันธ์ของตัวแปรทางไฟฟ้าต่างๆภายใน *CCII* สามารถเขียนความสัมพันธ์ให้อยู่ในรูปของความสัมพันธ์เชิงเมตริกซ์ ได้ดังนี้ [19]

$$\begin{pmatrix} i_y \\ v_x \\ i_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_y \\ i_x \\ v_z \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

จากสมการที่(2.104) อธิบายการทำงานของ *CCII* ได้ว่าที่อินพุตขั้ว *X* จะมีค่าความต้านทานอินพุตต่ำ ในขณะที่อินพุตขั้ว *Y* มีค่าความต้านทานอินพุตสูง ดังนั้นกระแสไฟฟ้าที่ไหลเข้าขั้ว *Y* จึงมีค่าเท่ากับศูนย์

$$i_y = 0 \quad (2.105)$$

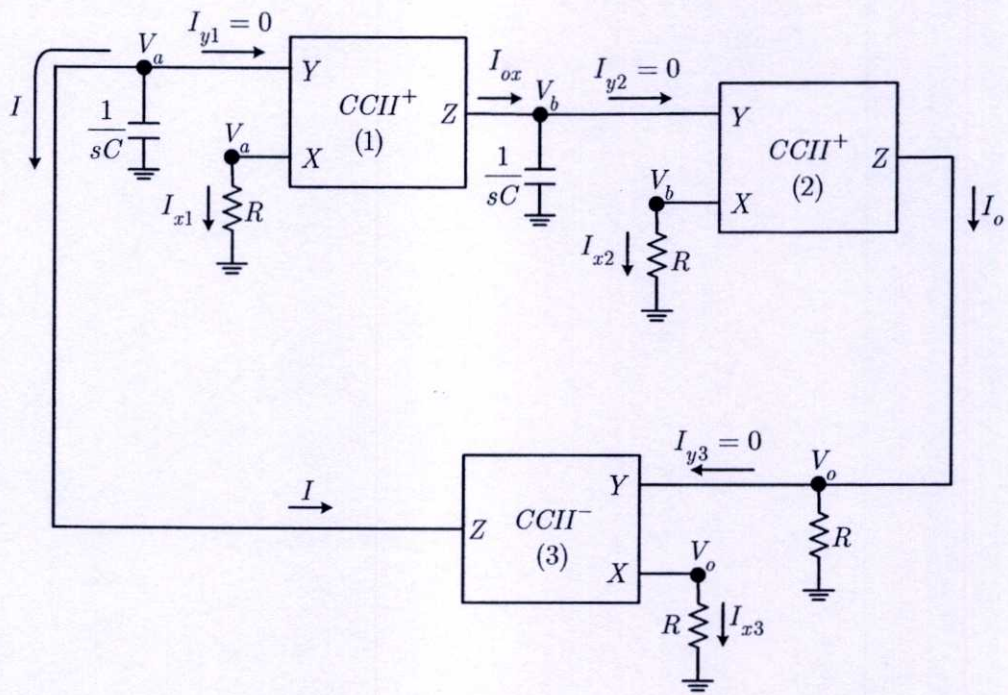
พร้อมกันนั้น แรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมขั้ว *Y* จะมีค่าเท่ากับแรงดันไฟฟ้าที่ตกคร่อมขั้ว *X*

$$v_x = v_y \quad (2.106)$$

สำหรับค่ากระแสอินพุตที่ขั้ว *X* กระแส i_x จะถูกสะท้อนหรือนำพากระแส(convey) i_x ให้ไปปรากฏที่เอาต์พุตขั้ว *Z* ด้วยปริมาณที่เท่ากัน ที่ซึ่งเอาต์พุตขั้ว *Z* จะมีค่าความต้านทานเอาต์พุตสูง

$$i_z = \pm i_x \quad (2.107)$$

โดยเครื่องหมาย \pm แสดงถึงทิศทางการไหลของกระแสเอาต์พุตที่ขั้ว *Z* เมื่อเปรียบเทียบกับทิศการไหลของกระแสอินพุตที่ขั้ว *X* ถ้ากระแสเอาต์พุตและกระแสอินพุตมีทิศทางการไหลเหมือนกัน กล่าวคือไหลเข้าทั้งคู่ หรือไหลออกทั้งคู่ จะแทนด้วยเครื่องหมาย $+$ เรียกว่า วงจรสายพานกระแสรุ่นที่ 2 แบบบวก เขียนแทนด้วย $CCII^+$ และเมื่อทิศทางของกระแสไหลในทิศตรงกันข้ามกันจะแทนด้วยเครื่องหมาย $-$ เรียกว่า วงจรสายพานกระแสรุ่นที่ 2 แบบลบ และเขียนแทนด้วย $CCII^-$



รูปที่ 2.11 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส

จากความสัมพันธ์ของวงจรสายพานกระแสรุ่นที่ 2 และวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแสที่แสดงดังรูปที่ 2.11 ทำการวิเคราะห์หาผลตอบสนองเอาต์พุต $i_o(t)$ ได้ดังต่อไปนี้

ใช้ KCL ที่จุดรวมแรงดัน V_a อินพุตเข้า Y ของ CCI^+ ตัวที่ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} I + sCV_a &= 0 \\ V_a &= -I / sC \end{aligned} \quad (2.108)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (2.106) ที่ว่าแรงดันอินพุตเข้า Y จะเท่ากับเข้า X และจากกฎของโอห์มที่อินพุตเข้า X ของ CCI^+ ตัวที่ (1)

$$\begin{aligned} V_a &= RI_{x1} \\ I_{x1} &= V_a / R = -I / RCs \end{aligned} \quad (2.109)$$

จาก CCI^+ ตัวที่ (1) เราจะได้ว่า

$$I_{ox} = I_{x1} = -I / RCs \quad (2.110)$$

ใช้ KCL ที่จุดรวมแรงดัน อินพุตขั้ว Y ของ $CCII^+$ ตัวที่(2) จะได้

$$\begin{aligned} I_{ox} - sCV_b &= 0 \\ V_b &= I_{ox} / sC = -I / RC^2s^2 \end{aligned} \quad (2.111)$$

จากกฎของโอห์มที่จุดรวมแรงดัน V_b อินพุตขั้ว X ของ $CCII^+$ ตัวที่(2)

$$\begin{aligned} V_b &= RI_{x2} \\ I_{x2} &= V_b / R = -I / R^2C^2s^2 \end{aligned} \quad (2.112)$$

จาก $CCII^+$ ตัวที่(2) จะได้ว่า

$$I_o = I_{x2} = -I / R^2C^2s^2 \quad (2.113)$$

ใช้ KCL ที่จุดรวมแรงดัน V_o อินพุตขั้ว Y ของ $CCII^-$

$$\begin{aligned} I_o &= V_o / R \\ V_o &= RI_o \end{aligned} \quad (2.114)$$

ใช้กฎของโอห์มที่อินพุตขั้ว X ของ $CCII^-$ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} V_o &= RI_{x3} \\ I_{x3} &= V_o / R = I_o \end{aligned} \quad (2.115)$$

จาก $CCII^-$ ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตกับเอาต์พุตจะเป็น

$$I = I_{x3} = I_o \quad (2.116)$$

แทนค่ากระแส I จากสมการที่ (2.116) ลงในสมการที่ (2.113) แล้วจัดสมการใหม่จะได้สมการความสัมพันธ์เป็น

$$R^2C^2s^2I_o + I_o = 0 \quad (2.117)$$

นำเอา $1/R^2C^2$ คูณตลอดสมการที่ (2.117)

$$\left(s^2 + \frac{1}{R^2C^2}\right)I_o = 0 \quad (2.118)$$

ทำการแปลงลาปลาซกลับในสมการที่ (2.117) เพื่อหากระแส $i_o(t)$ ในโดเมน-เวลา จะได้เป็น

$$i_o''(t) + \frac{i_o(t)}{R^2C^2} = 0 \quad (2.119)$$

จะเห็นว่าสมการที่(2.119) อยู่ในรูปของสมการออสซิลเลตอรี ซึ่งจะทำการกำหนดกระแสเอาต์พุต $i_o(t)$ ออกมาเป็นสัญญาณไซน์ซอซโคลบริสุทธิ กล่าวคือถ้ากำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ $A_1 = A_2 = A/2$ และเป็นค่าจริง แล้วผลตอบสนองธรรมชาติเอาต์พุตของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ จะให้ผลออกมาเป็น

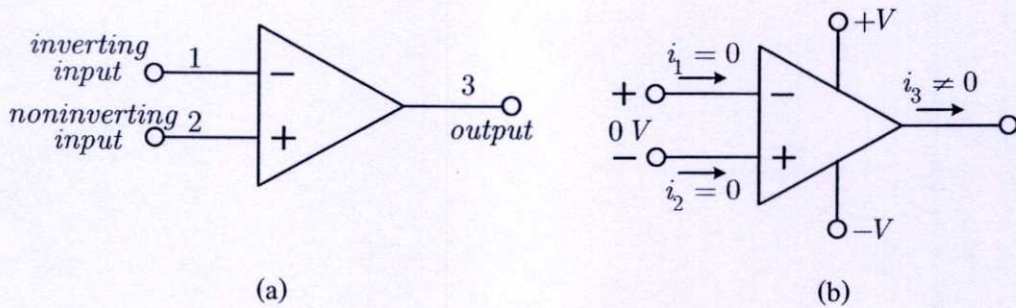
$$i_o(t) = A \cos(t / RC) \quad (2.120)$$

เมื่อความถี่เรเดียธรรมชาติ $\omega = \sqrt{a_0} = \sqrt{1/R^2C^2} = 1/RC$ เรเดีย/วินาที ที่ซึ่งวงจรจะให้กำเนิดสัญญาณไซน์ซอซโคลที่มีความถี่ในหน่วยของเฮิรตซ์เป็น

$$f_{osc} = 1/2\pi RC \quad \text{Hz} \quad (2.121)$$

2.4 ออป – แอมป์เชิงอุดมคติ

สัญลักษณ์แทนออป – แอมป์แสดงดังรูปที่ 2.12 ออป – แอมป์เป็นอุปกรณ์ที่มีขั้วมาก แต่เพื่อความสะดวกจะแสดงขั้วต่างๆในสัญลักษณ์เพียง 3 ขั้ว ได้แก่ขั้วที่ 1(-) คือขั้วอินพุตผกผัน (inverting input) หรืออินพุตขั้วลบ ขั้วที่ 2(+) คือขั้วอินพุตไม่ผกผัน (noninverting input) หรืออินพุตขั้วบวก สำหรับขั้วที่ไม่ได้แสดงไว้ได้แก่ ขั้วต่อแหล่งจ่ายกำลังไฟตรง ขั้วการชดเชย ความถี่ และศูนย์ออฟเซตเป็นต้น [12]



รูปที่ 2.12 (a) สัญลักษณ์ของออป-แอมป์ (b) ออป-แอมป์ต่อกับแหล่งจ่ายกำลัง

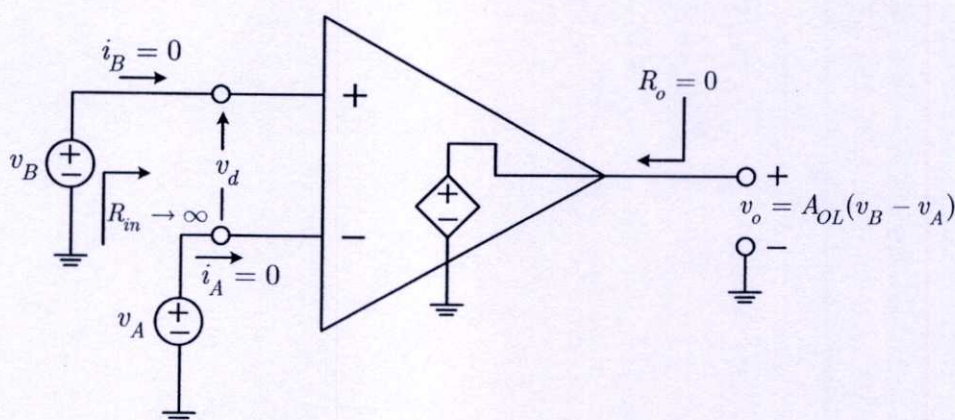
ลักษณะสมบัติของออป-แอมป์ที่สำคัญในการออกแบบมีอยู่มาก แต่สำหรับออป – แอมป์ในอุดมคติแล้วมีเพียง 2 ลักษณะสมบัติที่จำเป็นคือ กระแสที่ไหลเข้าขั้วอินพุตทั้ง 2 มีค่าเท่ากับศูนย์ และแรงดันตกคร่อมอินพุตทั้ง 2 เท่ากับศูนย์ด้วย

จะพบว่าเมื่อทำการวิเคราะห์วงจรออป – แอมป์โดยใช้ *KCL* ในการหาเอาต์พุตขั้วที่ 3 ในรูปที่ 2.12 (b) ว่ามีกระแสเป็นศูนย์นั้นไม่ได้ เพราะว่ายังมีขั้วที่ไม่ได้แสดงไว้อีกจำนวนหนึ่ง ซึ่งไม่สามารถทราบค่ากระแสได้

อย่างไรก็ตามออป – แอมป์เชิงอุดมคดียังมีลักษณะสมบัติเชิงกายภาพที่จำเป็นอื่นๆอีก นอกเหนือจากที่กล่าวไว้แล้วแต่ตอนต้นดังนี้ [15], [20]

1. มีอัตราขยายรูปเปิด A_{OL} (open loop gain) เป็นอนันต์
2. ค่าอิมพีแดนซ์อินพุต R_{in} เป็นอนันต์
3. ค่าอิมพีแดนซ์เอาต์พุต R_o เป็นศูนย์
4. อัตราขยายจะไม่เป็นฟังก์ชันของความถี่ นั่นคือไม่มีโพลหรือซีโร โดยอัตราขยายเอาต์พุตต่ออินพุตมีแบนด์วิดท์กว้างถึงอนันต์

5. ไม่มีกระแสอินพุตไหลเข้าในออป - แอมป์ ในทางกลับกันเอาต์พุตของออป - แอมป์จะทำตัวเป็นแหล่งจ่ายกระแสให้กับโหลดได้อย่างไม่จำกัด
6. ค่าอัตราการกำจัดโหมดร่วม (common - mode rejection ratio, CMRR) และการจ่ายกำลังงานไฟตรงให้กับออป-แอมป์ สามารถมีได้มากถึงอนันต์ ในสถานะนี้จะหมายความว่า กำลังงานที่เอาต์พุตจะไม่เปลี่ยนแปลงถึงแม้ว่าแหล่งจ่ายกำลังงานไฟตรงที่จ่ายไฟเลี้ยงให้กับออป-แอมป์มีการเปลี่ยนแปลงไปจากเดิม และออป-แอมป์ จะทำหน้าที่ขยายเฉพาะสัญญาณค่าผลต่างที่ปรากฏระหว่างอินพุตทั้ง 2 เท่านั้น และมีอัตราขยายของโหมดร่วมเป็นศูนย์

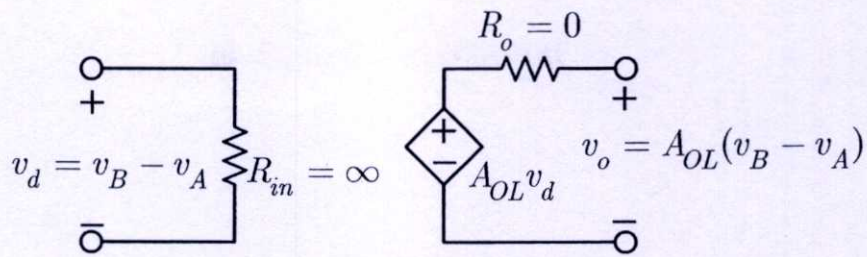


รูปที่ 2.13 ออป-แอมป์เชิงอุดมคติ

เมื่อสัญญาณอินพุต v_A และ v_B ถูกป้อนเข้าที่ขาอินพุตทั้งสอง แล้วแรงดันไฟฟ้าเอาต์พุตจะเป็น

$$v_o = A_{OL}(v_B - v_A) \quad (2.122)$$

ด้วยเหตุที่ A_{OL} มีค่าเป็นอนันต์ สมการที่(2.122) ก็น่าที่จะมีสถานะของแรงดันเอาต์พุตเป็นอนันต์ด้วย อย่างไรก็ตามหลักการที่สำคัญ 2 ประการ ที่สามารถจำกัดสัญญาณเอาต์พุตไม่ให้มีค่าสูงถึงอนันต์ได้ก็คือ ประการแรก วงจรออป-แอมป์เชิงเส้น มักจะใช้การควบคุมอัตราขยายด้วยการป้อนกลับแบบลบ ประการที่สอง ในขณะที่อัตราขยายเปิด A_{OL} มีค่าสูงมากๆ แล้วสัญญาณค่าผลต่าง $v_d (= v_B - v_A)$ มักจะมีค่าเกือบจะเป็นศูนย์



รูปที่ 2.14 วงจรสมมูลหรือแบบจำลองออป-แอมป์เชิงอุดมคติ

2.5 ออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติ [20]

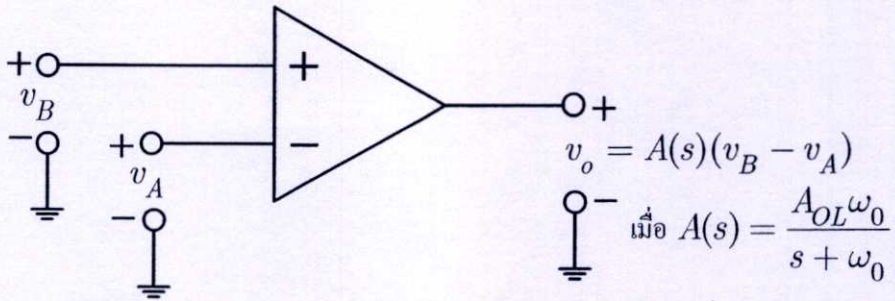
ส่วนใหญ่แล้วออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติจะมีเงื่อนไขที่เบี่ยงเบนไปจากออป-แอมป์เชิงอุดมคติ ที่ปรากฏให้เห็นเป็นสำคัญ คือ คุณลักษณะทางความถี่ ทั้งนี้ออป-แอมป์เชิงอุดมคติจะสมมติให้อัตราขยายไม่เป็นฟังก์ชันของความถี่ ในทางกลับกันนั้นเป็นไปได้ในทางปฏิบัติในการสร้างออป-แอมป์ให้มีความใกล้เคียงกับคุณสมบัติหลายๆประการของออป-แอมป์อุดมคติแล้วจะพบว่าในทางปฏิบัติอย่างน้อยที่สุดจะมีโพลปรากฏอยู่ในผลตอบสนองขณะรูปเปิดอยู่ 1 โพล ซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.15 (a) โดยนิยามให้อัตราขยายรูปเปิด A_{OL} เป็นอัตราขยายรูปเปิดไฟตรง (dc open - loop gain) ดังนั้น แรงดันเอาต์พุต ณ ขณะที่เป็นฟังก์ชันของความถี่ คือ

$$v_o(s) = A(s)(v_B - v_A) \quad (2.123)$$

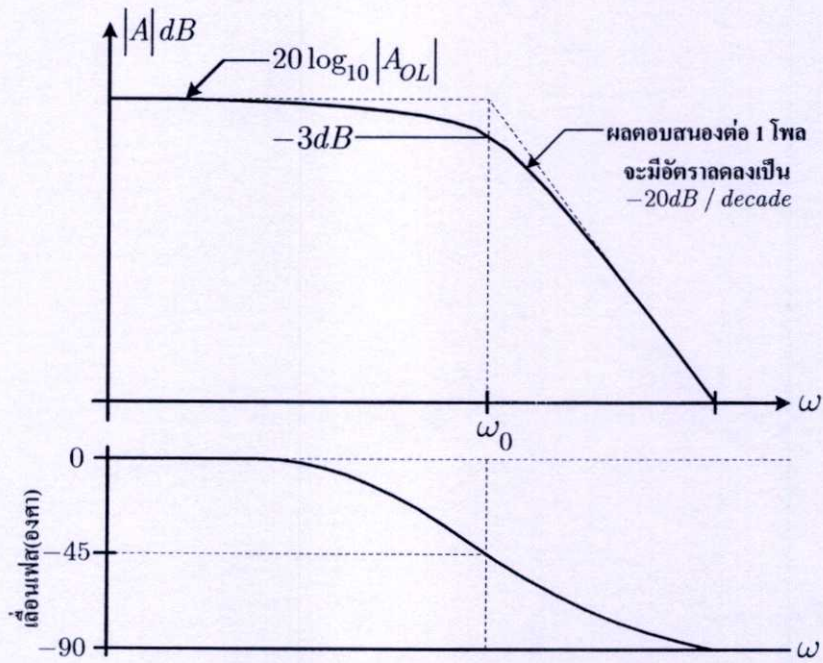
สำหรับสมการอัตราขยายของ 1 โพล แสดงได้เป็น

$$A(s) = \frac{A_{OL}\omega_0}{s + \omega_0} = \frac{A_{OL}}{1 + s/\omega_0} \quad (2.124)$$

เมื่อ ω_0 คือความถี่ที่มีอัตราขยายลดลงมา ณ ที่ตำแหน่งของ $-3dB$ รูปที่ 2.15 (b) เป็นผลตอบสนองทางเฟส ซึ่งเฟสจะเปลี่ยนแปลงจาก 0° ถึง -90° ในขณะที่ความถี่ $\omega = \omega_0$ เฟสจะเป็น -45° พอดี



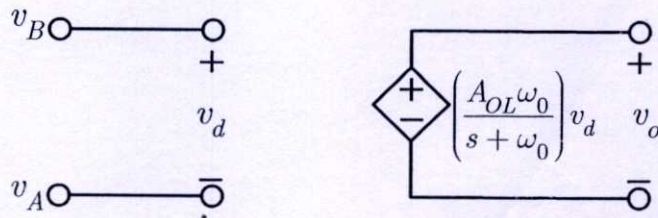
(a)



(b)

รูปที่ 2.15 คุณลักษณะของออป-แอมป์ 1 โพล

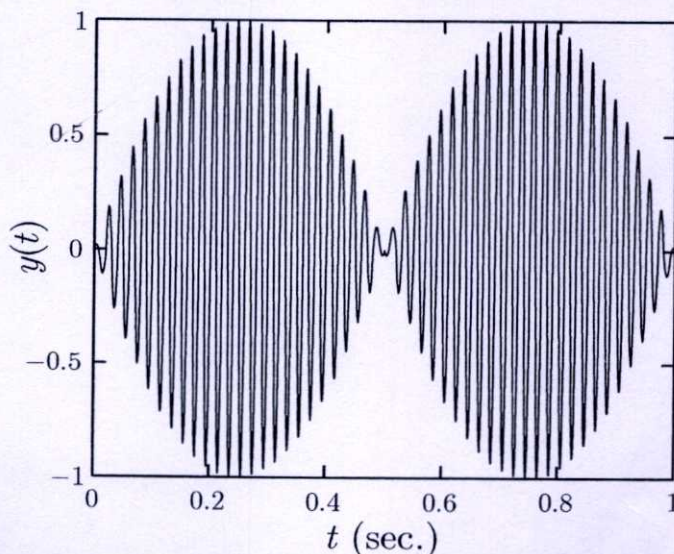
วงจรสมมูลหรือแบบจำลองของออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติแสดงไว้ดังรูปที่ 2.16



รูปที่ 2.16 แบบจำลองของออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติ

2.6 เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลา

ข้อสังเกตที่น่าสนใจเป็นอย่างยิ่งของผลตอบสนองบริบูรณ์ที่ได้จากสมการความสัมพันธ์อนุพันธ์อินพุต-เอาต์พุต นั่นคือ ความเป็นอิสระต่อกันในพจน์ของฟังก์ชัน ระหว่างผลตอบสนองธรรมชาติ และฟังก์ชันบังคับอินพุต กล่าวคือ ไม่ว่าฟังก์ชันบังคับอินพุต $f(t)$ จะอยู่ในรูปแบบลักษณะใดก็ตาม ฟังก์ชันบังคับนี้จะไม่สามารถไปเปลี่ยนแปลงลักษณะธรรมชาติฟังก์ชันที่เป็นอยู่ของผลตอบสนองธรรมชาตินั้นได้ อย่างไรก็ตามในวงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2 สัญญาณอินพุตที่เป็นฟังก์ชันบังคับที่ป้อนเข้าสู่ระบบ เมื่อพิจารณาในช่วงของเวลาแล้วในความจริงจะพบว่าการทำงานของระบบจะไม่สามารถให้ผลตอบสนองต่อฟังก์ชันบังคับอินพุตทันทีได้เลยเมื่อได้เริ่มจ่ายพลังงานที่อยู่ในรูปของไฟเลี้ยงวงจรให้กับระบบ ระบบจะต้องใช้เวลาชั่วครู่หนึ่ง เพื่อให้ได้รับพลังงานเข้าสู่ระบบจนเพียงพอที่จะทำงานให้ผลตอบสนองต่างๆ ได้นั่นเอง ซึ่งส่วนใหญ่แล้วระบบที่เริ่มทำงาน เมื่อเริ่มให้พลังงานกับระบบพร้อมๆ กันกับป้อนฟังก์ชันบังคับอินพุตให้กับระบบ ณ เวลาเริ่มต้นเราจะกำหนดให้เริ่มเวลาเป็น $t = t_0 = 0$ หรือในกรณีที่ระบบได้ทำงานไปชั่วขณะหนึ่งผ่านมาระยะเวลาหนึ่งแล้ว และต้องการที่จะป้อนฟังก์ชันบังคับอินพุตให้กับระบบในช่วงเวลาต่อมา ดังนั้นอาจจะพิจารณาลำดับเวลาด้วยการแบ่งแยกสเกลเวลาจากเวลา t ปกติออกเป็นสเกลเวลาตัวแปรตัวใหม่ สำหรับฟังก์ชันบังคับ $f(t)$ ใดๆ อย่างไรก็ตามเมื่อเร็วๆ นี้ได้มีผู้นำเสนอการแยกสเกลตัวแปรเวลา (separated time scale) ด้วยตัวแปรเวลาหลายตัว (multi-time) [17] ซึ่งในบทที่ 3 ได้อาศัยสมมติฐานตามแนวความคิดนี้มาใช้ในการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบอันดับที่ 2 ซึ่งจะได้แนะนำเสนอต่อไป แนวความคิดของการแยกสเกลตัวแปรเวลาดังกล่าว ได้ใช้ตัวอย่างด้วยการนำเอาสัญญาณรายคาบควอซีสองความถี่ (two-tone quasi-periodic signal) มาเป็นตัวอย่างในการพิจารณา และช่วยให้เห็นแนวความคิดของเทคนิคดังกล่าวได้ดียิ่งขึ้น พิจารณาสัญญาณรายคาบควอซีสองความถี่ $y(t)$ ดังรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 สัญญาณรายคาบควอซีสองความถี่ $y(t)$ แบบง่าย

สัญญาณรบกวนคาบควอดซ์สองความถี่ที่เกิดจากสัญญาณไซน์ซอซอดอล 2 สัญญาณที่มีความถี่ f_1 และ f_2 ที่ซึ่งความถี่ทั้งสองมีความแตกต่างกันมาก และเขียนได้ดังสมการที่ (2.125)

$$y(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t\right) \quad (2.125)$$

เมื่อสมมุติให้ $T_1 = 1$ วินาที และ $T_2 = 0.02$ วินาที เพราะฉะนั้น จะเห็นได้ว่า สัญญาณควอดซ์ $y(t)$ นี้ จะมีองค์ประกอบทางความถี่สองความถี่ด้วยกันคือ $f_1 = 1/T_1 = 1 \text{ Hz}$ และ $f_2 = 1/T_2 = 50 \text{ Hz}$ ซึ่งจะพบว่าสัญญาณที่มีคาบเวลา $T_2 = 0.02$ วินาที จะมีไซน์ซอซอดจำนวน 50 ลูกคลื่นที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงอย่างรวดเร็ว (fast-varying) ถูกมอดูเลตด้วยไซน์ซอซอดที่มีลักษณะการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ (slowly-varying) ของสัญญาณที่มีคาบ $T_1 = 1$ วินาที ดังนั้นสัญญาณควอดซ์นี้จึงมีรูปคลื่นในหลายอัตราเวลา (multirate wave forms) นั่นคือ จะประกอบไปด้วยองค์ประกอบที่มีการผันแปรทางเวลาอยู่สองหรือมากกว่าสองเวลาเมื่อได้ทำการแยกอัตราเวลาต่างๆออกมาพิจารณาในหลายๆ เหตุการณ์ ณ ที่สถานการณ์เวลาเดียวกัน

พิจารณาการแยกตัวแปรเวลาหลายตัวของสัญญาณ $y(t)$ ทั้งนี้สัญญาณ $y(t)$ ในขณะแยกสเกลเวลาจะมีโครงสร้างตัวแปรเวลาดังนี้

ในส่วนของสัญญาณที่เป็น fast-varying ของสัญญาณ $y(t)$ เวลา t จะถูกแทนด้วยตัวแปรเวลาตัวใหม่เป็น t_1 ในทำนองเดียวกันสำหรับในส่วนของสัญญาณที่เป็น slowly-varying จะถูกแทนด้วยเวลา t_2 เป็นผลให้ฟังก์ชันของตัวแปรใหม่ทั้งสอง ซึ่งจะนิยามให้เป็น $\hat{y}(t_1, t_2)$

$$\hat{y}(t_1, t_2) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_1}t_1\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T_2}t_2\right) \quad (2.126)$$

ข้อสังเกตสัญญาณ $\hat{y}(t_1, t_2)$ จะเป็นสัญญาณรบกวนที่มีความสัมพันธ์ทั้งเวลา t_1 และ t_2 กล่าวคือ $\hat{y}(t_1, t_2)$ ยังมีคุณสมบัติของสัญญาณรบกวนคาบอยู่เหมือนเดิม ซึ่งสามารถแยกพิจารณาไซน์ซอซอดแต่ละตัวตามสเกลเวลาของตัวเองได้ นั่นคือ

$$\hat{y}(t_1 + T_1, t_2 + T_2) = \hat{y}(t_1, t_2) \quad (2.127)$$

จากสมการที่ (2.126) จะเห็นได้ว่าตัวแปรเวลา t จะถูกแยกออกเป็นสเกลตัวแปรเวลา t_1 และ t_2 ตามลำดับ โดยที่ไม่เกี่ยวข้องกันนั้นหมายความว่าสามารถแยกพิจารณาพฤติกรรมเนื่องจากโซลูชอยด์ทั้งสองได้ที่ละสัญญาณคล้ายๆกับหลักการของการทับซ้อน (superposition principle)

บทที่ 3

ทฤษฎี การวิเคราะห์และวงจรที่นำเสนอ

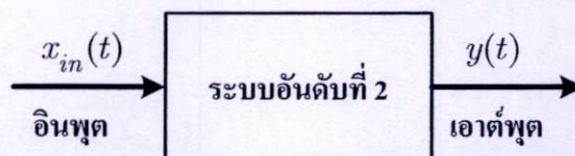
บทนี้จะได้กล่าวถึงการเปรียบเทียบวิธีการวิเคราะห์วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ระหว่างผลการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดที่อยู่ในรูปผลเฉลยทั่วไปของการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมกับผลการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่ด้วยการอาศัยเทคนิคการแยกสเกลเวลา ตลอดจนการนำผลการวิเคราะห์ที่ได้นำไปประยุกต์ใช้งานกับวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ ทั้งในโหมดแรงดันและกระแสไฟฟ้า รวมทั้งนำไปประยุกต์ใช้งานกับวงจรควอดราเจอร์ ออสซิลเลเตอร์ เพื่อสร้างเป็นตัวมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด (AM) และในหัวข้อสุดท้ายจะเป็นการวิเคราะห์โครงสร้างความถี่ย่านกว้างของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์

3.1 การวิเคราะห์วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลเฉลยแบบปิด (closed – form) ในรูปทั่วไปของการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม

ในหัวข้อที่ 2.1 ของบทที่ 2 ได้กล่าวถึงหลักการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้าอันดับที่ 2 เพื่อหาผลตอบสนองบริบูรณ์ทั้งส่วนที่เป็นผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับรวมทั้งขั้นตอนการหาค่าพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติมาแล้ว สำหรับในหัวข้อนี้จะได้ทำการวิเคราะห์หาผลเฉลยที่เป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดและอยู่ในรูปทั่วไป สมมติว่า วงจรอันดับที่ 2 มีฟังก์ชันบังคับอยู่ในระบบอันดับที่ 2 นี้ และความสัมพันธ์ของระบบอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับสองเชิงเส้น ดังสมการที่ (3.1)

$$y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = f(t) \quad (3.1)$$

โดยที่ฟังก์ชันบังคับ $f(t)$ ของระบบอันดับที่สองในรูปทั่วไปจะอยู่ในรูปของโพลีโนเมียลของสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ถ้าระบบมีอินพุต เช่น $x_{in}(t)$ เป็นต้น



รูปที่ 3.1 ระบบอันดับที่ 2 ที่มีอินพุตป้อนเข้าสู่ระบบ

$$f(t) = x_{in}''(t) + b_1 x_{in}'(t) + b_0 x_{in}(t) \quad (3.2)$$

$f(t)$ ของระบบดังสมการที่ (3.1) และ (3.2) นี้เราจะเรียกว่าเป็น *forcing function* สำหรับสัญญาณอินพุต $x_{in}(t)$ นั้น เราจะเรียกว่า *forced function input* ของระบบ

ผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบ ประกอบด้วยผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ และผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n(t) + y_f(t) \\ &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + y_f(t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ด้วยการกำหนดให้ $f(t) = 0$ ในสมการที่ (3.1) จะได้สมการอนุพันธ์เอกพันธ์แสดงดังสมการที่ (3.4) ที่ให้ผลสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ ในสมการที่ (3.5)

$$y_n''(t) + a_1 y_n'(t) + a_0 y_n(t) = 0 \quad (3.4)$$

สมการคุณลักษณะเฉพาะคือ

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

ให้ผลของ $y_n(t)$ เป็น

$$y_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (3.5)$$

ที่ซึ่ง

$$s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad (3.6)$$

เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นค่าสัมประสิทธิ์คงที่ของผลตอบสนองธรรมชาติ

นอกจากนั้นแล้ว ถ้าค่าพารามิเตอร์คงที่ $a_1^2 < 4a_0$ แล้ว ค่ารากสมการทั้ง 2 ค่า s_1 และ s_2 ที่ได้ จะอยู่ในรูปของค่าสังยุคเชิงซ้อน ($s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$) ที่ซึ่งผลตอบสนองธรรมชาติของระบบนี้กล่าวได้ว่าเป็น *underdamped* ซึ่งแสดงได้เป็น

$$y_n(t) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} \quad (3.7)$$

เมื่อ $\sigma = -a_1 / 2$ และ $\omega = \sqrt{|a_1^2 - 4a_0|} / 2$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงและความถี่เรขาคณิตตามลำดับ จากหัวข้อที่ 2.1 ของบทที่ 2 ทั้งนี้ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 สามารถแยกพิจารณาได้ดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าสังยุคเชิงซ้อนแล้วผลเฉลยที่เป็นผลตอบสนองธรรมชาติจะเป็น

$$\begin{aligned} y_n(t) &= e^{\sigma t} (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) \\ &= e^{\sigma t} \left(\sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} (B_2/B_1) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

เมื่อค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 คือ ค่าแอมพลิจูดที่หามาได้จากค่าสัมประสิทธิ์คงที่ A_1 และ A_2

กรณีที่ 2 ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริง และ $A_1 = A_2 = A/2$ ผลตอบสนองธรรมชาติจะหาได้เป็น

$$y_n(t) = e^{\sigma t} A \cos \omega t \quad (3.9)$$

ในขณะเดียวกัน เมื่อแทนค่า $y(t) = y_f(t)$ ลงในสมการที่ (3.1) แล้ว ผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ ของระบบสามารถหาได้จาก

$$y_f''(t) + a_1 y_f'(t) + a_0 y_f(t) = f(t) \quad (3.10)$$

จากผลตอบสนองบริบูรณ์ในสมการที่ (3.3) ถ้าเราทราบค่ารากสมการควอดราติกของสมการคุณลักษณะเฉพาะ s_1 และ s_2 ในผลเฉลยที่เป็นผลตอบสนองธรรมชาติ สำหรับการหาค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ในพจน์ของผลตอบสนองธรรมชาตินั้น สามารถหาได้จากการแทนค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น $y(t_0) = Y_0$ ลงในสมการที่ (3.3) และ $y'(t_0) = Y_0'$ ลงในสมการอนุพันธ์ของสมการที่ (3.3) ซึ่งได้แสดงไว้ในสมการที่ (3.11) ณ ที่เวลา $t = t_0$ และหากสมมติให้เวลาเริ่มต้น $t_0 = 0$ ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 สามารถจัดรูปให้อยู่ในลักษณะของรูปแบบปิด (closed - form) ได้ดังสมการที่ (3.15) และ (3.17) ตามลำดับ

ทำการหาค่าอนุพันธ์ของสมการที่ (3.3)

$$y'(t) = s_1 A_1 e^{s_1 t} + s_2 A_2 e^{s_2 t} + y'_f(t) \quad (3.11)$$

ณ ที่เวลา $t = t_0 = 0$ แทนค่า $y(0) = Y_0$ และ $y'(0) = Y'_0$ ลงในสมการที่ (3.3) และ(3.11) ตามลำดับ จะได้

$$Y_0 = A_1 + A_2 + y_f(0) \quad (3.12)$$

$$Y'_0 = s_1 A_1 + s_2 A_2 + y'_f(0) \quad (3.13)$$

จัดรูปค่าสัมประสิทธิ์ A_2 ใหม่ จากสมการที่(3.13) จะได้

$$A_2 = \frac{Y'_0 - y'_f(0) - s_1 A_1}{s_2} \quad (3.14)$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ A_2 จาก สมการที่ (3.14) ลงในสมการที่ (3.12)

$$Y_0 = A_1 + \left(\frac{Y'_0 - y'_f(0) - s_1 A_1}{s_2} \right) + y_f(0)$$

$$Y_0 = A_1 - \frac{s_1 A_1}{s_2} + \frac{Y'_0 - y'_f(0)}{s_2} + y_f(0)$$

จัดรูปสมการใหม่เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ A_1 ในรูปแบบปิด

$$\left(\frac{s_2 - s_1}{s_2} \right) A_1 = (Y_0 - y_f(0)) - \left(\frac{Y'_0 - y'_f(0)}{s_2} \right)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 ในรูปแบบปิด จะเขียนได้เป็น

$$A_1 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(s_2 (Y_0 - y_f(0)) - (Y'_0 - y'_f(0)) \right) \quad (3.15)$$

จากสมการที่ (3.12) ค่าสัมประสิทธิ์ A_2 เขียนใหม่ได้เป็น

$$A_2 = Y_0 - A_1 - y_f(0) \quad (3.16)$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ A_1 จากสมการที่ (3.15) ลงในสมการที่ (3.16)

$$\begin{aligned} A_2 &= Y_0 - \left[\frac{1}{s_2 - s_1} (s_2(Y_0 - y_f(0)) - (Y_0' - y_f'(0))) \right] - y_f(0) \\ &= \left(1 - \frac{s_2}{s_2 - s_1} \right) Y_0 + \left(\frac{s_2}{s_2 - s_1} - 1 \right) y_f(0) + \left(\frac{Y_0' - y_f'(0)}{s_2 - s_1} \right) \\ &= \frac{-s_1 Y_0}{s_2 - s_1} + \frac{s_1 y_f(0)}{s_2 - s_1} + \frac{(Y_0' - y_f'(0))}{s_2 - s_1} \\ &= \frac{-s_1(Y_0 - y_f(0))}{s_2 - s_1} + \frac{(Y_0' - y_f'(0))}{s_2 - s_1} \end{aligned}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ A_2 ในรูปแบบปิดจะได้เป็น

$$A_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(-s_1(Y_0 - y_f(0)) + (Y_0' - y_f'(0)) \right) \quad (3.17)$$

จากการพิจารณาสมการที่ (3.15) และ (3.17) จะเห็นได้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 จะเป็นค่าคงที่เสมอ ในขณะที่ค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น Y_0 และ Y_0' และผลตอบสนองบังคับ ณ ที่เวลา $t_0 = 0$ ซึ่งคือ $y_f(0)$ และ $y_f'(0)$ จะมีอิทธิพลต่อค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติในสมการที่ (3.3) ซึ่งเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบอันดับที่ 2 แต่ยังคงให้แอมพลิจูดออกมาเป็นค่าคงที่ นอกจากนี้ ถ้าเรากำหนดให้ฟังก์ชันบังคับ $f(t)$ เป็นค่าคงที่หรือไฟตรง ที่ป้อนให้กับระบบแล้ว เราจะพบว่าค่า $y_f'(0) = 0$ เสมอ ดังนั้นสำหรับในกรณีนี้ค่า $y_f'(0)$ ของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ในสมการที่ (3.15) และ (3.17) จะถูกตัดทิ้งไป และเขียนได้เป็น

$$A_1 = \frac{1}{s_2 - s_1} (s_2(Y_0 - y_f(0)) - Y_0') \quad (3.18)$$

$$A_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} (-s_1(Y_0 - y_f(0)) + Y_0') \quad (3.19)$$

เมื่อพิจารณาระบบอันดับที่ 2 ที่ระบบเป็นออสซิลเลเตอร์นั้น ก็หมายความว่า ผลตอบสนองธรรมชาติของระบบจะเป็นไปตามเงื่อนไขของ underdamped

เมื่อค่าคงที่พารามิเตอร์ $a_1^2 < 4a_0$ ค่ารากสมการทั้งสองของ s_1 และ s_2 จะเป็นค่าสังยุคเชิงซ้อน

$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega$$

เป็นผลให้ผลตอบสนองธรรมชาติของระบบในรูปทั่วไปเป็น

$$\begin{aligned} y_n(t) &= A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} \\ &= e^{\sigma t} (A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

จากสูตรของออยเลอร์ (Euler's formular)

$$\begin{aligned} e^{\pm j\omega t} &= \cos \omega t \pm j \sin \omega t \\ y_n(t) &= e^{\sigma t} (A_1 (\cos \omega t + j \sin \omega t) + A_2 (\cos \omega t - j \sin \omega t)) \\ &= e^{\sigma t} ((A_1 + A_2) \cos \omega t + j(A_1 - A_2) \sin \omega t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการที่ (3.21) กับสมการที่ (2.8) ในบทที่ 2 ซึ่งเป็นผลตอบสนองธรรมชาติในกรณีที่สัมพันธ์ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อน กล่าวคือ

$$y_n(t) = e^{\sigma t} (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t)$$

จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 ที่อยู่ในรูปของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็น

$$B_1 = A_1 + A_2 \quad (3.22)$$

$$B_2 = j(A_1 - A_2) \quad (3.23)$$

ด้วยการแทนค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ที่อยู่ในรูปแบบปิดจากสมการที่ (3.15) และ (3.17) ลงในสมการที่ (3.22) และ (3.23) ตามลำดับดังนี้

$$\begin{aligned}
B_1 &= \left[\frac{1}{s_2 - s_1} (s_2(Y_0 - y_f(0)) - (Y'_0 - y'_f(0))) \right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{s_2 - s_1} (-s_1(Y_0 - y_f(0)) + (Y'_0 - y'_f(0))) \right] \\
&= \frac{1}{s_2 - s_1} (s_2 Y_0 - s_2 y_f(0) - s_1 Y_0 + s_1 y_f(0)) \\
&= \frac{1}{s_2 - s_1} ((s_2 - s_1) Y_0 - (s_2 - s_1) y_f(0))
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลตอบสนองธรรมชาติที่ออสซิลเลตจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ B_1 เมื่อ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อน โดยมีรูปแบบปิดในรูปของสมการทั่วไปเป็น

$$B_1 = Y_0 - y_f(0) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= j \left\{ \left[\frac{1}{s_2 - s_1} (s_2(Y_0 - y_f(0)) - (Y'_0 - y'_f(0))) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{1}{s_2 - s_1} (-s_1(Y_0 - y_f(0)) + (Y'_0 - y'_f(0))) \right] \right\} \\
&= \frac{j}{s_2 - s_1} ((s_2 + s_1) Y_0 - (s_2 + s_1) y_f(0) - 2Y'_0 + 2y'_f(0)) \\
&= \frac{j}{s_2 - s_1} ((s_2 + s_1)(Y_0 - y_f(0)) - 2(Y'_0 - y'_f(0))) \quad (3.25)
\end{aligned}$$

เนื่องจากระบบมีผลตอบสนองธรรมชาติเป็น underdamped ที่ซึ่งค่ารากสมการควอดราติก s_1 และ s_2 จะเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน กล่าวคือ $s_1 = \sigma + j\omega$ และ $s_2 = \sigma - j\omega$ ดังนั้น

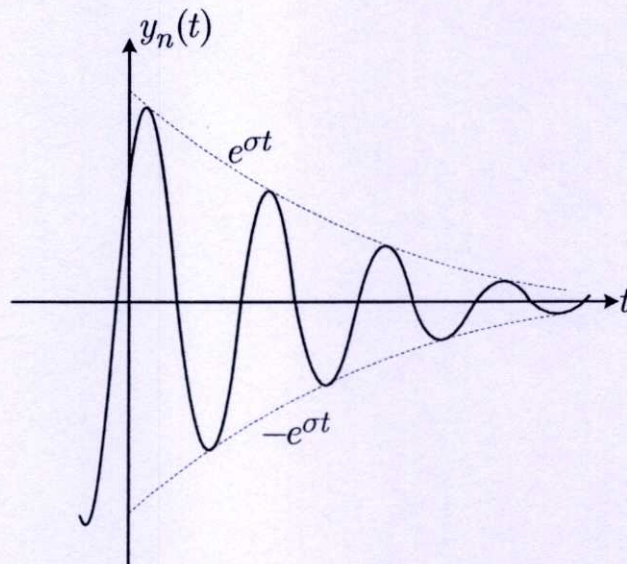
$$s_2 + s_1 = (\sigma - j\omega) + (\sigma + j\omega) = 2\sigma \quad (3.26)$$

$$s_2 - s_1 = (\sigma - j\omega) - (\sigma + j\omega) = -j2\omega$$

เมื่อแทนค่า $s_2 + s_1$ และ $s_2 - s_1$ ลงในสมการที่ (3.25) แล้วจะได้สัมประสิทธิ์ B_2 ในลักษณะรูปแบบปิดซึ่งอยู่ในรูปของสมการทั่วไปเป็น

$$B_2 = \frac{(Y_0' - y_f'(0)) - \sigma(Y_0 - y_f(0))}{\omega} \quad (3.27)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 จะให้ค่าเป็นค่าคงที่ โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์ B_1 จะขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น Y_0 และค่าผลตอบสนองบังคับ $y_f(0)$ ณ เวลา $t_0 = 0$ เวลาเดียวกันนั้น ในขณะที่ B_2 จะมีอิทธิพลของค่าเงื่อนไขเริ่มต้น Y_0 และ Y_0' ค่าผลตอบสนองบังคับ ณ เวลา $t_0 = 0$, $y_f(0)$ และ $y_f'(0)$ ค่าความถี่ของการออสซิลเลต ω และค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง σ แต่อย่างไรก็ตามผลตอบสนองธรรมชาติโดยรวมเมื่อเข้าสู่สภาวะคงตัวแล้ว $y_n(t)$ จะเข้าสู่ศูนย์เนื่องจากอิทธิพลของ $e^{\sigma t}$ เมื่อ $\sigma < 0$ ซึ่งจะมองไม่เห็นสัญญาณการออสซิลเลตนั้น ตามสมการที่ (3.8) และ (3.21)



รูปที่ 3.2 ผลตอบสนองธรรมชาติที่ออสซิลเลตจะค่อยๆ จางหายไปตามอิทธิพลของ $e^{\sigma t}$ เมื่อ $\sigma < 0$

ซึ่งถ้าต้องการให้กรณีนี้ปราศจากอิทธิพลของการหน่วง (damping) นั่นก็คือ กรณีของระบบอันดับที่สอง ที่มีสมการความสัมพันธ์อยู่ในรูปของสมการออสซิลลาตอรี โดยพจน์กลางของสมการอนุพันธ์อันดับที่สองเป็นศูนย์ $y_n''(t) + a_0 y_n(t) = 0$ ที่ซึ่ง $\sigma = -a_1/2 = 0$ จะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ B_1 จะไม่เปลี่ยนแปลง และค่าสัมประสิทธิ์ B_2 จะเหลือเพียง

$$B_2 = (Y_0' - y_f'(0)) / \omega \quad (3.28)$$

ในกรณีนี้ ผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ ที่ให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลตไซนูซอยดอล แสดงได้เป็น

$$y_n(t) = (Y_0 - y_f(0)) \cos \omega t + \frac{(Y'_0 - y'_f(0))}{\omega} \sin \omega t$$

$$y_n(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (3.29)$$

เมื่อ $A = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + \left(\frac{(Y'_0 - y'_f(0))}{\omega}\right)^2} \quad (3.30)$

$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{(Y'_0 - y'_f(0))}{\omega (Y_0 - y_f(0))} \right) \quad (3.31)$$

A และ ϕ เป็นค่าแอมพลิจูดและเฟสเริ่มต้นของไซนูซอยดอลออสซิลเลตในส่วนของผลตอบสนองธรรมชาติตามลำดับ

3.2 การออสซิลเลตของสัญญาณไซนูซอยดอลเอาต์พุตขณะที่ระบบออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ถูกป้อนด้วยฟังก์ชันบังคับอินพุตแบบพลวัตต์เมื่อวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม

จากหัวข้อ ที่ 3.1 ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์หาผลเฉลยของระบบอันดับที่ 2 มีค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ของผลตอบสนองธรรมชาติในลักษณะของรูปแบบปิดที่อยู่ในรูปทั่วไปดังสมการที่ (3.15) และ (3.17) ตามลำดับ และในกรณีที่ระบบนั้นเป็นออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 ที่ได้จากความสัมพันธ์ระหว่าง A_1 กับ A_2 ในสมการที่ (3.22) และ (3.23) และจัดให้อยู่ในรูปแบบปิด ดังที่แสดงไว้ในสมการที่ (3.24) และ (3.27) ตามลำดับ ทั้งนี้ ออสซิลเลเตอร์ประเภทนี้พบว่าจะยังมีอิทธิพลของค่าสัมประสิทธิ์ของการหน่วงอยู่โดยที่ $\sigma \neq 0$

สำหรับออสซิลเลเตอร์ที่ปราศจากการหน่วง $\sigma = 0$ ค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 ของผลตอบสนองธรรมชาติที่ออสซิลเลตจะเป็นไปตามสมการที่ (3.24) และ (3.28) ตามลำดับ ที่ซึ่งผลตอบสนองธรรมชาติจะได้ดังสมการที่ (3.29)

อย่างไรก็ตามระบบของออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ที่มีฟังก์ชันบังคับ $f(t)$ เป็นความสัมพันธ์อินพุตของสมการความสัมพันธ์อนุพันธ์อันดับที่ 2 อินพุต-เอาต์พุต โดยอาศัย

ความสัมพันธ์ $y(t) = y_n(t) + y_f(t)$ และสมการที่ (3.29) จะเขียนผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบดังกล่าวได้เป็น

ถ้าออสซิลเลเตอร์มีค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงที่ไม่เป็นศูนย์ ($\sigma \neq 0$)

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\sigma t} \left(\sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\omega t + \theta) \right) + y_f(t) \\ &= e^{\sigma t} (C \cos(\omega t + \theta)) + y_f(t) \end{aligned} \quad (3.32)$$

เมื่อ
$$C = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + \left(\frac{(Y'_0 - y'_f(0)) - \sigma(Y_0 - y_f(0))}{\omega} \right)^2}$$

และ
$$\theta = -\tan^{-1} \left(\frac{(Y'_0 - y'_f(0)) - \sigma(Y_0 - y_f(0))}{\omega(Y_0 - y_f(0))} \right)$$

C และ θ เป็นแอมพลิจูดและเฟสเริ่มต้นของผลตอบสนองธรรมชาติตามลำดับ

ถ้าออสซิลเลเตอร์มีค่าสัมประสิทธิ์การหน่วงเป็นศูนย์ ($\sigma = 0$) แล้วผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบจะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\omega t + \phi) \right) + y_f(t) \\ &= D \cos(\omega t + \phi) + y_f(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

เมื่อ
$$D = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + \left((Y'_0 - y'_f(0)) / \omega \right)^2} \quad (3.34)$$

และ
$$\phi = -\tan^{-1} \left((Y'_0 - y'_f(0)) / \omega (Y_0 - y_f(0)) \right) \quad (3.35)$$

D และ ϕ เป็นแอมพลิจูดและเฟสเริ่มต้นของสัญญาณไซน์ชอยคอลที่ถูกออสซิลเลตตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน สำหรับกรณีที่ระบบอันดับที่ 2 เป็นออสซิลเลเตอร์และมีสมการ

ความสัมพันธ์เป็นสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 เป็นสมการในลักษณะออสซิลเลตอรี (มีพจน์กลางเป็นศูนย์ ซึ่งจะให้ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = -a_1/2 = 0$) และถ้ากำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริงและมีค่า $A_1 = A_2 = A/2$ เมื่อ A เป็นค่าคงที่ไม่เท่ากับศูนย์ โดยการแทนค่า A_1 และ A_2 ที่อยู่ในรูปแบบปิดจากสมการที่ (3.15) และ (3.17) ลงในสมการที่ (3.22) และ (3.23) ตามลำดับ เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 + A_2 \\ &= A/2 + A/2 = A \\ A_1 + A_2 &= \left(\frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left[s_2 (Y_0 - y_f(0)) - (Y'_0 - y'_f(0)) \right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left[-s_1 (Y_0 - y_f(0)) + (Y'_0 - y'_f(0)) \right] \\ &= \left(\frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left[(s_2 - s_1)(Y_0 - y_f(0)) \right. \\ &\quad \left. - (Y'_0 - y'_f(0)) + (Y'_0 - y'_f(0)) \right] \\ B_1 &= (Y_0 - y_f(0)) \\ B_2 &= j(A_1 - A_2) = j(A/2 - A/2) = 0 \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าสัมประสิทธิ์ B_1 , B_2 และ $\sigma = 0$ กลับลงไปในสมการที่ (3.8) ผลตอบสนองธรรมชาติ $y_n(t)$ ดังสมการที่ (3.8) และ (3.21) สำหรับกรณีนี้จะเขียนได้เป็น

$$y_n(t) = A \cos(\omega t) = (Y_0 - y_f(0)) \cos \omega t \quad (3.36)$$

ซึ่งให้ผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตของระบบนี้ เป็น

$$y(t) = (Y_0 - y_f(0)) \cos \omega t + y_f(t) \quad (3.37)$$

จากผลตอบสนองบริบูรณ์ เมื่อพิจารณากรณีของการสมมุติให้ออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 มีค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริง ซึ่งกรณีนี้เราต้องการวิเคราะห์ว่า ถ้าต้องการให้ระบบนั้นให้สัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตออกมาเป็นสัญญาณไซน์ชอยคอลบริสุทธ์ และจำเพาะเจาะจงให้เป็นฟังก์ชัน โคไซน์ที่มีเฟสเริ่มต้นเป็นศูนย์ จะเห็นได้ว่าค่าแอมพลิจูด A ของผลตอบสนอง

ธรรมชาติในสมการที่ (3.37) จะขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ $y(0) = Y_0$ รวมกับค่าผลตอบสนองบังคับ ณ ที่เวลา $t_0 = 0$ ซึ่งคือ $y_f(0)$

เมื่อทำการเปรียบเทียบผลการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมระหว่างการให้ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าสังยุคเชิงซ้อนกับค่าจริงจะเห็นว่าค่าแอมพลิจูดและเฟสเริ่มต้นจะให้ผลที่แตกต่างกัน กล่าวคือ กรณีของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อนจะให้ค่าแอมพลิจูด D เป็นดังสมการที่ (3.34) และมีเฟสเริ่มต้นไม่เท่ากับศูนย์ดังสมการที่ (3.35) สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริง $A_1 = A_2 = A/2$ จะให้ค่าแอมพลิจูด $A = Y_0 - y_f(0)$ และเฟสเริ่มต้นเป็นศูนย์ ($\phi = 0$)

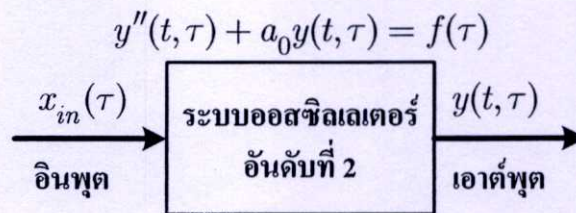
จากการสังเกตสมการที่ (3.33) จะเห็นได้ว่าระบบจะให้ผลตอบสนองธรรมชาติออกมาเป็นสัญญาณไซน์ชอยคอลบรีสุทธ์เฮาต์พุด โดยมีแอมพลิจูดเท่ากับ D เมื่อทำการพิจารณาสมการที่ (3.33) และ (3.34) จะพบว่าค่าแอมพลิจูดนี้จะขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (ซึ่งคือ Y_0 และ Y_0') และยังขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับที่เวลา $t_0 = 0$ ($y_f(0)$ และ $y_f'(0)$) อีกด้วย ซึ่งทั้งหมดนี้จะมีค่าเป็นค่าคงที่ เป็นผลให้ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติมีค่าเป็นค่าคงที่ตามไปด้วย ผลตอบสนองบริบูรณ์ของระบบแสดงดังสมการที่ (3.33)

ในทำนองเดียวกันค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติในกรณีของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ที่เป็นค่าจริงซึ่งให้ผลตอบสนองบริบูรณ์ดังสมการที่ (3.37) ก็จะทำให้ค่าออกมาเป็นค่าคงที่ด้วยเช่นกัน โดยที่ทั้งสองกรณีนั้นได้มาจากการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม (Conventional Analysis) นั่นก็หมายความว่า ถึงแม้ผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ เป็นค่าที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลา (time - varying) หรือมีลักษณะเป็นพลวัตต์ (dynamic) ก็ตาม ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติก็จะยังคงให้ค่าเป็นค่าคงที่ตลอดเวลา ทั้งนี้ก็เพราะว่าค่าแอมพลิจูดจะขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ และ $y_f'(t)$ เฉพาะ ณ ที่เวลา $t_0 = 0$ เวลาเดียวเท่านั้น ซึ่งความหมายอีกนัยหนึ่งก็คือเป็นค่าคงที่นั่นเองจึงทำให้ไม่มีผลกระทบต่อค่าแอมพลิจูด ณ ที่เวลาอื่น ๆ

ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการนำเสนอวิธีวิเคราะห์แบบใหม่กับออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 โดยที่ผลตอบสนองบริบูรณ์จะแสดงให้เห็นว่าในส่วน of ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับทุก ๆ เวลาไม่ใช่จะมีแต่เพียงเฉพาะ ณ ที่เวลา $t_0 = 0$ เท่านั้น

3.3 วิเคราะห์วงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เพื่อหาผลเฉลยแบบปิด (closed – form) ในรูปทั่วไปโดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา

ในหัวข้อนี้จะได้ทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการที่นำเสนอเพื่อให้ได้ผลการตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดของระบบออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ดังที่ได้กล่าวนำมาก่อนหน้านี้แล้วว่า หลักการที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์นี้ได้ใช้แนวคิดเทคนิคตัวแปรทางเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลา [17] ในการวิเคราะห์ โดยในที่นี้จะกำหนดให้ τ เป็นตัวแปรเวลาอีกตัวหนึ่งและจะกำหนดให้ว่า $f(\tau)$ คือ ฟังก์ชันบังคับที่ปรากฏอยู่ในระบบหลังจากถูกป้อนด้วยสัญญาณอินพุตจากภายนอกให้กับระบบที่เวลา τ ใด ๆ



รูปที่ 3.3 ระบบออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เมื่อถูกป้อนด้วยอินพุต $x_{in}(\tau)$ ที่เวลา τ ใด ๆ

ดังนั้นสมการที่ (3.1) เขียนได้ใหม่เป็น

$$y''(t, \tau) + a_1 y'(t, \tau) + a_0 y(t, \tau) = f(\tau) \quad (3.38)$$

ที่ซึ่งฟังก์ชันบังคับ $f(\tau)$ จะอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ของสัญญาณอินพุตที่ป้อนให้กับระบบและเขียนอยู่ในรูปทั่วไปเป็น

$$f(\tau) = x''_{in}(\tau) + b_1 x'_{in}(\tau) + b_0 x_{in}(\tau) \quad (3.39)$$

เมื่อ $x_{in}(\tau)$ คือ สัญญาณอินพุตที่ป้อนให้กับระบบ ณ ที่เวลา τ ใด ๆ ในขณะที่ผลตอบสนองบังคับ $y_f(\tau)$ สามารถหาได้จาก

$$y''_f(\tau) + a_1 y'_f(\tau) + a_0 y_f(\tau) = f(\tau) \quad (3.40)$$

เพราะฉะนั้นผลตอบสนองบริบูรณ์จะเขียนได้เป็น

$$y(t, \tau) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + y_f(\tau) \quad (3.41)$$

เมื่อ $y(t, \tau)$ คือ ผลตอบสนองบริบูรณ์ที่อยู่ในลักษณะของการแยกสเกลเวลา ซึ่งในที่นี้ ตัวแปรเวลา τ จะถูกแยกออกจากเวลา t ใด ๆ เพื่อนำมาใช้พิจารณากับระบบออสซิลเลเตอร์ในขณะที่ถูกป้อนด้วยสัญญาณอินพุตจากภายนอก

ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 สามารถหาได้ด้วยการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ณ ที่เวลา $t = t_0 = 0$, $y(t_0, \tau) = y(0, \tau) = Y_0$ ลงในสมการที่ (3.41)

$$y(0, \tau) = Y_0 = A_1 + A_2 + y_f(\tau) \quad (3.42)$$

ทำการหาค่าอนุพันธ์เทียบกับเวลา t ในสมการที่ (3.41) จะได้

$$y'(t, \tau) = s_1 A_1 e^{s_1 t} + s_2 A_2 e^{s_2 t} \quad (3.43)$$

แทน $t = 0$ และ $y'(0, \tau) = Y'_0$ ลงในสมการที่ (3.43)

$$\begin{aligned} Y'_0 &= s_1 A_1 + s_2 A_2 \\ A_2 &= (Y'_0 - s_1 A_1) / s_2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

แทน A_2 จากสมการที่ (3.44) ลงในสมการที่ (3.42)

$$\begin{aligned} Y_0 &= A_1 + (Y'_0 - s_1 A_1) / s_2 + y_f(\tau) \\ \frac{(s_2 - s_1)}{s_2} A_1 &= (Y_0 - y_f(\tau)) - Y'_0 / s_2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 ในรูปแบบปิดซึ่งอยู่ในรูปทั่วไปเป็น

$$A_1 = \frac{1}{s_2 - s_1} (s_2 (Y_0 - y_f(\tau)) - Y'_0) \quad (3.45)$$

จัดสมการที่ (3.42) ใหม่จะได้

$$A_2 = Y_0 - A_1 - y_f(\tau) \quad (3.46)$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ A_1 จากสมการที่ (3.45) ลงในสมการที่ (3.46)

$$\begin{aligned} A_2 &= Y_0 - \left[\frac{1}{s_2 - s_1} (s_2 (Y_0 - y_f(\tau)) - Y_0') \right] - y_f(\tau) \\ &= \left(1 - \frac{s_2}{s_2 - s_1} \right) Y_0 + \left(\frac{s_2}{s_2 - s_1} - 1 \right) y_f(\tau) + \frac{Y_0'}{s_2 - s_1} \\ &= \left(\frac{-s_1}{s_2 - s_1} \right) Y_0 + \left(\frac{s_1}{s_2 - s_1} \right) y_f(\tau) + \frac{Y_0'}{s_2 - s_1} \end{aligned}$$

ทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ A_2 ในรูปแบบปิดซึ่งแสดงได้เป็น

$$A_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(-s_1 (Y_0 - y_f(\tau)) + Y_0' \right) \quad (3.47)$$

ในการทำงานเดียวกันกับวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม เมื่อทำการแยกพิจารณาผลตอบสนอง
บริบูรณ์ตามค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 จะแยกพิจารณาได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน

$$\begin{aligned} \text{จาก } y(t, \tau) &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + y_f(\tau) \\ &= A_1 e^{(\sigma + j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma - j\omega)t} + y_f(\tau) \\ &= e^{\sigma t} \left((A_1 + A_2) \cos \omega t + j(A_1 - A_2) \sin \omega t \right) + y_f(\tau) \end{aligned}$$

ทำให้ได้

$$y(t, \tau) = e^{\sigma t} (B_1 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t) + y_f(\tau) \quad (3.48)$$

เมื่อ

$$B_1 = A_1 + A_2 \quad (3.49)$$

$$B_2 = j(A_1 - A_2) \quad (3.50)$$

แทนค่า A_1 และ A_2 จากสมการที่ (3.45) และ (3.47) ในรูปแบบปิดทั่วไปลงในสมการที่ (3.49) และ (3.50) ข้างต้น เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2

$$\begin{aligned} B_1 &= \left(\frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left(s_2 (Y_0 - y_f(\tau)) - Y_0' \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left(-s_1 (Y_0 - y_f(\tau)) + Y_0' \right) \\ &= \frac{1}{s_2 - s_1} \left((s_2 - s_1) (Y_0 - y_f(\tau)) \right) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$B_1 = Y_0 - y_f(\tau) \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= j \left[\left(\frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left(s_2 (Y_0 - y_f(\tau)) - Y_0' \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{s_2 - s_1} \right) \left(-s_1 (Y_0 - y_f(\tau)) + Y_0' \right) \right] \\ &= j \left[\frac{1}{s_2 - s_1} \left((s_2 + s_1) (Y_0 - y_f(\tau)) - 2Y_0' \right) \right] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $s_2 + s_1 = 2\sigma$ และ $s_2 - s_1 = -j2\omega$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} B_2 &= j \left[\frac{1}{(-j2\omega)} \left((2\sigma) (Y_0 - y_f(\tau)) - 2Y_0' \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\omega} \left[\sigma (Y_0 - y_f(\tau)) - Y_0' \right] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจะได้

$$B_2 = \frac{Y_0' - \sigma (Y_0 - y_f(\tau))}{\omega} \tag{3.52}$$

ทั้งนี้ ถ้าต้องการผลตอบแทนของบริษัท สำหรับในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = 0$ ซึ่งเป็นกรณีที่ระบบให้ผลตอบแทนธรรมชาติคือออสซิลเลตเป็นสัญญาณไซน์ชอยดอล

บริสุทธ์ที่ปราศจากการหน่วง จากสมการที่ (3.48), (3.51) และ (3.52) จะหาผลตอบสนองบริบูรณ์
ได้เป็น

$$y(t, \tau) = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} \cos(\omega t + \beta) + y_f(\tau)$$

เมื่อ
$$\beta = -\tan^{-1}\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$$

แล้วผลตอบสนองบริบูรณ์จะหาได้เป็น

$$y(t, \tau) = E \cos(\omega t + \beta) + y_f(\tau) \quad (3.53)$$

เมื่อ
$$E = \sqrt{(Y_0 - y_f(\tau))^2 + (Y'_0/\omega)^2} \quad (3.54)$$

และ
$$\beta = -\tan^{-1}\left(Y'_0/\omega(Y_0 - y_f(\tau))\right) \quad (3.55)$$

E และ β เป็นแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติไขว้ชอยคอลลและเฟสเริ่มต้น
ตามลำดับ

กรณีที่ 2 ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริง $A_1 = A_2 = A/2$ แล้ว

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 + A_2 = A \\ A_1 + A_2 &= \frac{1}{s_2 - s_1} \left(s_2 (Y_0 - y_f(\tau)) - Y'_0 \right) \\ &\quad + \frac{1}{s_2 - s_1} \left(-s_1 (Y_0 - y_f(\tau)) + Y'_0 \right) \\ &= Y_0 - y_f(\tau) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$B_1 = A = Y_0 - y_f(\tau) \quad (3.56)$$

ข้อสังเกตที่น่าสนใจก็คือ จะเห็นได้ว่าไม่ว่าค่าอนุพันธ์ของเงื่อนไขเริ่มต้น Y'_0 จะมีค่าเป็นเท่าไรก็ตาม ค่า Y'_0 นี้ จะถูกหักล้างกันเองจนหมด แสดงว่าค่าอนุพันธ์เงื่อนไขเริ่มต้น Y'_0 นี้ จะไม่มีผลต่อค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองของธรรมชาติสำหรับกรณีนี้นั่นเอง

และ
$$B_2 = j(A_1 - A_2) = 0$$

ผลตอบสนองบริบูรณ์ ในกรณีที่ระบบปราศจากการหน่วงที่ซึ่ง $\sigma = 0$ จะหาได้เป็น

$$y(t, \tau) = A \cos \omega t + y_f(\tau)$$

เพราะฉะนั้นผลตอบสนองบริบูรณ์จะแสดงได้เป็น

$$y(t, \tau) = (Y_0 - y_f(\tau)) \cos \omega t + y_f(\tau) \quad (3.57)$$

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอไว้ จะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ดังสมการที่ (3.45) และ (3.47) ตามลำดับ ซึ่งอยู่ในรูปทั่วไปและเป็นแอมพลิจูดของผลตอบสนองของธรรมชาติ ไซนูซอยคอลลทั้งของกรณีที่เป็นสังยุคเชิงซ้อน และค่าจริงดังที่แสดงไว้ในสมการที่ (3.53) - (3.55) และสมการที่ (3.57) ตามลำดับ ค่าแอมพลิจูดจะมีขนาดขึ้นอยู่กับค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น Y_0 และ Y'_0 นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับ $y_f(\tau)$ ที่ทุกๆเวลา τ ที่ได้ป้อนสัญญาณอินพุตให้กับออสซิลเลเตอร์อีกด้วย

3.4 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ที่ได้ระหว่างวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมกับวิธีวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอในหัวข้อที่ 3.3

ผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดซึ่งอยู่ในรูปทั่วไปที่ได้ทั้งจากวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมและที่ได้นำเสนอใหม่ และพิจารณาเฉพาะกรณีที่ $\sigma = 0$ เมื่อนำมาเปรียบเทียบกันแล้วจะมีความแตกต่างกันดังนี้

กรณีที่ 1 กรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน และหาผลตอบสนองบริบูรณ์ได้ออกมาเป็น

วิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม (สมการที่ (3.33)-(3.35))

$$y(t) = D \cos(\omega t + \phi) + y_f(t)$$

$$D = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + \left(\frac{Y'_0 - y'_f(0)}{\omega}\right)^2}$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{Y'_0 - y'_f(0)}{\omega(Y_0 - y_f(0))}\right)$$

วิธีวิเคราะห์ที่นำเสนอใหม่ (สมการที่ (3.53)-(3.55))

$$y(t, \tau) = E \cos(\omega t + \beta) + y_f(\tau)$$

$$E = \sqrt{(Y_0 - y_f(\tau))^2 + (Y'_0/\omega)^2}$$

$$\beta = -\tan^{-1}\left(\frac{Y'_0/\omega}{Y_0 - y_f(\tau)}\right)$$

กรณีที่ 2 กรณีค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริง ที่ซึ่ง $A_1 = A_2 = A/2$

วิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม (สมการที่ (3.37))

$$y(t) = (Y_0 - y_f(0)) \cos \omega t + y_f(t)$$

วิธีวิเคราะห์ที่นำเสนอใหม่ (สมการที่ (3.57))

$$y(t, \tau) = (Y_0 - y_f(\tau)) \cos \omega t + y_f(\tau)$$

จากการเปรียบเทียบผลตอบสนองบริบูรณ์ที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์ทั้ง 2 และทั้ง 2 กรณี โดยการพิจารณาที่ค่าแอมพลิจูดเฉพาะในส่วนของผลตอบสนองธรรมชาติไซนูซoidalแล้วจะพบว่า ค่าแอมพลิจูดจะให้ค่าออกมาเป็นค่าคงที่เสมอและตลอดเวลาเมื่อได้ทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม ทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ณ ที่เวลา $t = 0$ ซึ่งก็คือค่าคงที่ Y_0 และ Y'_0 นอกจากนี้ยังขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับเฉพาะ ณ ที่เวลา $t = 0$ และเป็นค่าคงที่นั่นคือ $y_f(0)$ และ $y'_f(0)$ สำหรับวิธีการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลา จะพบว่าค่าแอมพลิจูดนอกจากจะขึ้นอยู่กับค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น Y_0 และ Y'_0 แล้วยังขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับ $y_f(\tau)$ ที่ทุกๆเวลา τ นั่นก็หมายความว่าค่าแอมพลิจูดของ

ผลตอบสนองธรรมชาติไขว้ชอยคอลล ซึ่งเป็นสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตของออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 จะแปรเปลี่ยนไปตามเวลา ถ้าสัญญาณอินพุตที่ป้อนเข้าสู่ออสซิลเลเตอร์ ณ เวลา τ ใดๆ เป็นสัญญาณที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลาหรือเป็นพลวัตต์ ทั้งนี้ก็เพราะว่าสัญญาณอินพุตที่มีลักษณะเป็นพลวัตต์ เมื่อได้ป้อนเข้าสู่ออสซิลเลเตอร์ ฟังก์ชันอินพุตนั้นจะเป็นผลให้ไปปรากฏเป็นผลตอบสนองบังคับเอาต์พุต $y_f(\tau)$ และ ในขณะเดียวกัน $y_f(\tau)$ นี้ยังจะไปปรากฏเป็นค่าแอมพลิจูดในส่วนของผลตอบสนองธรรมชาติอีกด้วย จึงทำให้ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติหรือสัญญาณออสซิลเลตของออสซิลเลเตอร์แปรเปลี่ยนไปตามสัญญาณอินพุตที่มีลักษณะเป็นพลวัตต์นั้นๆ ซึ่งจะแตกต่างจากวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมที่จะให้ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติออกมาเป็นค่าคงที่เสมอ ถึงแม้ว่าสัญญาณอินพุตที่ป้อนเข้าสู่ระบบจะเป็นสัญญาณในลักษณะของพลวัตต์ก็ตาม

3.5 ค่าแอมพลิจูด และเฟสของผลตอบสนองธรรมชาติระหว่างวิธีการวิเคราะห์ทั้ง 2 ในกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อน เมื่อต้องการให้เอาต์พุตเป็นฟังก์ชันโคไซน์

จากวิธีการวิเคราะห์ทั้ง 2 ที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าหากต้องการให้ออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ให้ผลตอบสนองธรรมชาติออกมาเป็นสัญญาณไขว้ชอยคอลลบริสุทธ์ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันโคไซน์เท่านั้น นั่นก็หมายความว่าค่าเงื่อนไขเริ่มต้นจะมีเพียงเฉพาะค่า $y(0) = Y_0$ เมื่อเป็นการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมและ $y(0, \tau) = Y_0$ เมื่อเป็นการวิเคราะห์ด้วยวิธีการใหม่ที่ได้นำเสนอ ทั้งนี้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นอีกค่าหนึ่ง ซึ่งเป็นค่าอนุพันธ์นั้นจะมีค่าเท่ากับศูนย์เนื่องจาก ณ เวลาเริ่มต้น $t = 0$ ค่าความชันของฟังก์ชันโคไซน์ ณ เวลา $t = 0$ จะให้ความชันเป็นศูนย์ (จุดยอด ณ ที่ $t = 0$) นั่นคือ $y'(0) = Y'_0 = 0$ และ $y'(0, \tau) = Y'_0 = 0$ โดยทดลองทำการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นเหล่านี้ลงในผลตอบสนองบริบูรณ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ทั้ง 2 เฉพาะกรณีของ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อน ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

วิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม จากสมการที่ (3.33) - (3.35) จะได้

$$y(t) = D \cos(\omega t + \phi) + y_f(t)$$

$$D = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + ((Y'_0 - y'_f(0))/\omega)^2}$$

เมื่อ $Y'_0 = 0$ แล้วค่าแอมพลิจูดจะได้เป็น

$$D = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + (-y'_f(0)/\omega)^2} \quad (3.58)$$

ในขณะที่ $\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{(Y'_0 - y'_f(0))/\omega}{(Y_0 - y_f(0))}\right)$

แล้วเฟสเริ่มต้นจะได้เป็น

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{-y'_f(0)/\omega}{(Y_0 - y_f(0))}\right) \quad (3.59)$$

วิธีวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่ จากสมการที่ (3.53) - (3.55) จะแสดงได้เป็น

$$y(t, \tau) = E \cos(\omega t + \beta) + y_f(\tau)$$

$$E = \sqrt{(Y_0 - y_f(\tau))^2 + (Y'_0/\omega)^2}$$

ณ ขณะที่ $Y'_0 = 0$ ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองของธรรมชาติจะเขียนได้เป็น

$$E = \sqrt{(Y_0 - y_f(\tau))^2} = Y_0 - y_f(\tau) \quad (3.60)$$

และค่าเฟสเริ่มต้น

$$\beta = -\tan^{-1}\left(\frac{Y'_0/\omega}{(Y_0 - y_f(\tau))}\right)$$

ในทำนองเดียวกันแทนค่า $Y'_0 = 0$ จะได้

$$\beta = 0 \quad (3.61)$$

แทนค่า E และ β จากสมการที่ (3.60) และ (3.61) ลงในสมการที่ (3.53) ทำให้ได้

$$y(t, \tau) = (Y_0 - y_f(\tau)) \cos \omega t + y_f(\tau) \quad (3.62)$$

เพราะฉะนั้นจะเห็นได้ว่าเมื่อใช้วิธีการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลาในขณะที่ต้องการให้ผลตอบสนองธรรมชาติเป็นฟังก์ชันโคไซน์กับกรณีของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นสังยุคเชิงซ้อนจะให้ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติมีค่าเป็น $Y_0 - y_f(\tau)$ และมีเฟสเริ่มต้นที่ศูนย์ ซึ่งจะไปตรงกันกับผลที่ได้จากกรณีของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริง $A_1 = A_2 = A/2$ ดังสมการที่ (3.57) และ (3.62) นั่นคือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตที่ได้ออกมาจะเหมือนกันทุกประการทั้ง 2 กรณี

สำหรับวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมนั้นจะให้ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติของโคไซน์ออกมาเป็น $\sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + (-y'_f(0)/\omega)^2}$ ดังสมการที่ (3.58) และมีเฟสเริ่มต้นที่ไม่ได้เริ่มต้นจากศูนย์ กล่าวคือ จะเริ่มต้นที่ $-\tan^{-1}(-y'_f(0)/\omega(Y_0 - y_f(0)))$ ซึ่งได้แสดงไว้ในสมการที่ (3.59) จะเห็นได้ว่าโดยเงื่อนไขดังที่ได้กล่าวมาแล้วนี้ การวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมจะต้องแยกพิจารณาที่ละกรณี ถ้าหากค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ไม่ใช่จำนวนจริง ทั้งนี้ค่าความคลาดเคลื่อนของแอมพลิจูดจะเป็นพจน์ที่ 2 ของสมการที่ (3.58) ซึ่งคือ $(-y'_f(0)/\omega)^2$ และเฟสจะเป็นพจน์ $-y'_f(0)/\omega(Y_0 - y_f(0))$ ดังสมการที่ (3.59)

3.6 ผลการวิเคราะห์กับสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณไฟตรงหรือค่าคงที่

ในกรณีที่สัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณไฟตรง(DC) หรือเป็นค่าคงที่ ซึ่งได้ถูกป้อนเข้าสู่ออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 แล้วระบบจะตอบสนองให้ผลตอบสนองบังคับกับเอาต์พุตทั้งวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิม $y_f(t)$ และที่ได้นำเสนอใหม่ $y_f(\tau)$ นั้นจะให้ค่าออกมาเป็นค่าคงที่ด้วยเช่นกัน ซึ่งเป็นผลให้ค่าอนุพันธ์ของผลตอบสนองบังคับมีค่าเป็นศูนย์ทันที ($y'_f(t) = 0$) ซึ่งพิจารณาผลที่ได้ดังต่อไปนี้

วิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม พิจารณาผลตอบสนองบริบูรณ์ในสมการที่ (3.33) - (3.35) จะพบว่า

$$y(t) = D \cos(\omega t + \phi) + y_f(t)$$

$$D = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + \left(\frac{Y_0' - y_f'(0)}{\omega}\right)^2}$$

และ
$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{Y_0' - y_f'(0)}{\omega(Y_0 - y_f(0))}\right)$$

เนื่องจากผลตอบสนองบังคับ $y_f(t)$ เป็นค่าคงที่ดังนั้น $y_f'(t) = y_f'(0) = 0$ แทนค่าดังกล่าวลงในสมการที่ (3.34) และ (3.35) จะได้

$$D = \sqrt{(Y_0 - y_f(0))^2 + (Y_0'/\omega)^2} \quad (3.63)$$

และ
$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{Y_0'/\omega}{Y_0 - y_f(0)}\right) \quad (3.64)$$

วิธีวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่ จากสมการที่ (3.53) - (3.55) จะเห็นได้ว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้ทั้งค่าแอมพลิจูดและเฟสในส่วนของผลตอบสนองธรรมชาตินั้น โดยปกติแล้วจะไม่มีพจน์ที่เป็นค่าอนุพันธ์ของผลตอบสนองบังคับ $y_f'(\tau)$ มาเกี่ยวข้อง ด้วยเหตุที่ค่า $y_f'(\tau)$ ได้ถูกกำจัดทิ้งไปแล้วตั้งแต่ขั้นตอนการวิเคราะห์ขณะแทนค่าอนุพันธ์ของค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $y'(0, \tau) = Y_0'$ ผลตอบสนองบริบูรณ์ที่ได้แสดงดังสมการที่ (3.53) - (3.55) กล่าวคือ

$$y(t, \tau) = E \cos(\omega t + \beta) + y_f(\tau)$$

$$E = \sqrt{(Y_0 - y_f(\tau))^2 + (Y_0'/\omega)^2}$$

$$\beta = -\tan^{-1}\left(\frac{Y_0'/\omega}{Y_0 - y_f(\tau)}\right)$$

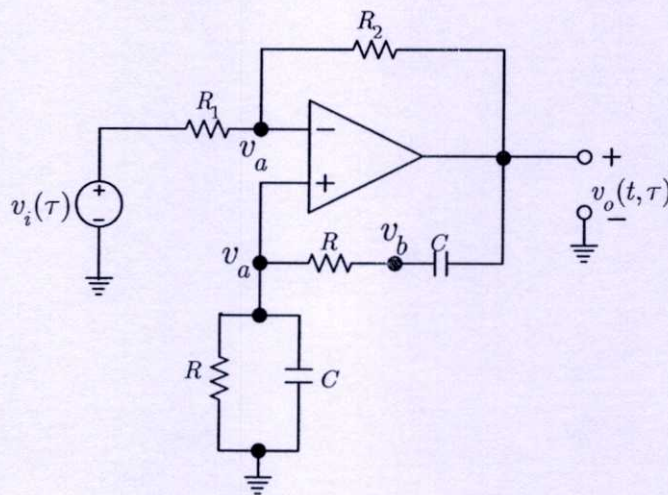
ด้วยเหตุที่ผลตอบสนองบังคับเป็นค่าคงที่ตลอดเวลาซึ่งไม่ได้แปรเปลี่ยนไปตามเวลาดังนั้น $y_f(t) = y_f(0) = y_f(\tau)$ แล้วจะพบว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคใหม่นี้จะให้ค่าแอมพลิจูดและเฟสเริ่มต้นของผลตอบสนองธรรมชาติตรงกันกับการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมทุกประการ (สมการที่ (3.63) และ (3.64) จะเหมือนกันกับสมการที่ 3.54) และ (3.55) ตามลำดับ)

จากการวิเคราะห์ในหัวข้อที่ 3.1 - 3.6 จะเห็นได้ว่าวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมสามารถอธิบายได้ในกรณีของสัญญาณฟังก์ชันบังคับอินพุตที่เป็นค่าคงที่ ในขณะที่วิธีวิเคราะห์ที่นำเสนอ นั้นสามารถอธิบายสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตของออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ได้ครอบคลุมทั้งสัญญาณฟังก์ชันบังคับอินพุตที่เป็นค่าคงที่ และที่มีลักษณะเป็นพลวัตต์

3.7 การประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดในวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่างๆบนพื้นฐานของการวิเคราะห์ด้วยเทคนิคใหม่ที่ได้นำเสนอ

บนพื้นฐานของการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอ เพื่อเป็นการยืนยันในทางปฏิบัติจะได้นำมาประยุกต์ใช้กับวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่สองชนิดต่างๆทั้งในโหมดแรงดันและกระแส ด้วยการป้อนสัญญาณอินพุต ณ เวลา τ ใดๆ เป็น $v_i(\tau)$ และได้สัญญาณเอาต์พุตของวงจรจากการแยกตัวแปรสเกลเวลา τ ออกจากเวลา t เป็น $v_o(t, \tau)$ ดังวงจรต่อไปนี้

3.7.1 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรเวเนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์



รูปที่ 3.4 วงจรเวเนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$

ใช้สมการจตุรรวมที่จตุรรวม v_a ขาลบของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) v_a - \frac{v_i(\tau)}{R_1} - \frac{v_o(t, \tau)}{R_2} = 0$$

$$v_a = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) v_o(t, \tau) + \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) v_i(\tau)$$

กำหนดให้ $k_1 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right)$ และ $k_2 = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)$ จะได้

$$v_a = k_1 v_o(t, \tau) + k_2 v_i(\tau) \quad (3.65)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม v_a ขาววกของออป-แอมป์

$$\begin{aligned} \frac{2v_a}{R} + Cv'_a - \frac{v_b}{R} &= 0 \\ v_b &= RCv'_a + 2v_a \end{aligned} \quad (3.66)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม v_b

$$\begin{aligned} \frac{v_b}{R} + C(v'_b - v'_o(t, \tau)) - \frac{v_a}{R} &= 0 \\ RCv'_b - RCv'_o(t, \tau) + v_b - v_a &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

แทนค่า v_a จากสมการที่ (3.65) ลงในสมการที่ (3.66) จะได้

$$v_b = k_1 RCv'_o(t, \tau) + k_2 RCv'_i(\tau) + 2k_1 v_o(t, \tau) + 2k_2 v_i(\tau) \quad (3.68)$$

แทนค่า v_a จากสมการที่ (3.65) และ v_b จากสมการที่ (3.68) ลงในสมการที่ (3.67) แล้วจัดสมการใหม่จะได้

$$\begin{aligned} v''_o(t, \tau) + \frac{1}{RC} \left(3 - \frac{1}{k_1} \right) v'_o(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2 C^2} \\ = -\frac{k_2}{k_1} \left(v''_i(\tau) + \frac{3}{RC} v'_i(\tau) + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \end{aligned}$$

แทนค่า $k_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ และ $\frac{k_2}{k_1} = \frac{R_2}{R_1}$ จะได้

$$\begin{aligned}
 v_o''(t, \tau) + \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) v_o'(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2 C^2} \\
 = -\frac{R_2}{R_1} \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

โดยการเปรียบเทียบสมการที่ (3.69) กับสมการความสัมพัทธ์ของระบบอันดับที่ 2 ในรูปทั่วไปดังสมการที่ (3.38) และ (3.39) จะได้ค่าพารามิเตอร์

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{RC} \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \\
 \text{และ} \quad a_0 &= 1/R^2 C^2
 \end{aligned}$$

จากสมการที่ (3.39) จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันบังคับของวงจรจะมีค่าเป็น

$$f(\tau) = -\frac{R_2}{R_1} \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \tag{3.70}$$

ถ้าต้องการให้วงจรออสซิลเลตสัญญาณไซน์ชอยคอลบริสุทธ์ ค่าพารามิเตอร์ a_1 ต้องมีค่าเท่ากับศูนย์ ซึ่งสามารถกระทำได้โดยกำหนดให้ $R_2/R_1 = 2$ หรือให้ $R_2 = 2R_1$ แล้วจะทำให้พจน์กลางทางด้านซ้ายมือของสมการที่ (3.69) หายไปแล้วสมการออสซิลลาตอรีของวงจรเวนบริจ้อออสซิลเลเตอร์จะเขียนได้เป็น

$$v_o''(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2 C^2} = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \tag{3.71}$$

ในกรณีนี้จะเห็นได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = -a_1/2 = 0$ ค่าความถี่เรเดียนธรรมชาติ $\omega = \sqrt{a_0} = 1/RC$ และฟังก์ชันบังคับของวงจรคือ

$$f(\tau) = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \tag{3.72}$$

แล้วผลตอบสนองบริบูรณจะเขียนเป็น

$$\begin{aligned} v_o(t, \tau) &= A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} + v_{of}(\tau) \\ &= A_1 e^{jt/RC} + A_2 e^{-jt/RC} + v_{of}(\tau) \end{aligned} \quad (3.73)$$

เมื่อ $v_{of}(\tau)$ คือ ผลการตอบสนองบังคับที่ได้จากการป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ณ เวลา τ ใดๆ ให้กับวงจร

ในทางปฏิบัติแล้วค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 จะต้องเป็นค่าจริง ดังนั้นจากค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ในรูปแบบปิดของหัวข้อที่ 3.3 ดังสมการที่ (3.45) และ (3.47) ตามลำดับ และอาศัยผลตอบสนองบริบูรณ์ของกรณีที่ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริงจากสมการที่ (3.57) ซึ่งในกรณีนี้ค่าอนุพันธ์ของเงื่อนไขเริ่มต้น Y_0' จะถูกหักล้างกันเองจนหมดซึ่งจะไม่มีปรากฏอยู่ในสมการของผลตอบสนองบริบูรณ์ (สามารถดูได้จากขั้นตอนการพิสูจน์หาค่า B_1 ในสมการที่ (3.56)) ดังนั้นจากสมการที่ (3.57) ผลการตอบสนองบริบูรณ์ของวงจรเวเนบริดจ์ ออสซิลเลเตอร์จึงเขียนได้เป็น

$$v_o(t, \tau) = (Y_0 - v_{of}(\tau)) \cos(t / RC) + v_{of}(\tau) \quad (3.74)$$

ณ ที่เวลาเริ่มต้น $t = t_0 = 0$ ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของวงจร $v_o(0, \tau) = Y_0 = \pm V_{SAT}$ เมื่อ V_{SAT} คือค่าแรงดันไฟฟ้าอิ่มตัวของออป - แอมป์ และแทนลงไปในสมการที่ (3.74) จะได้

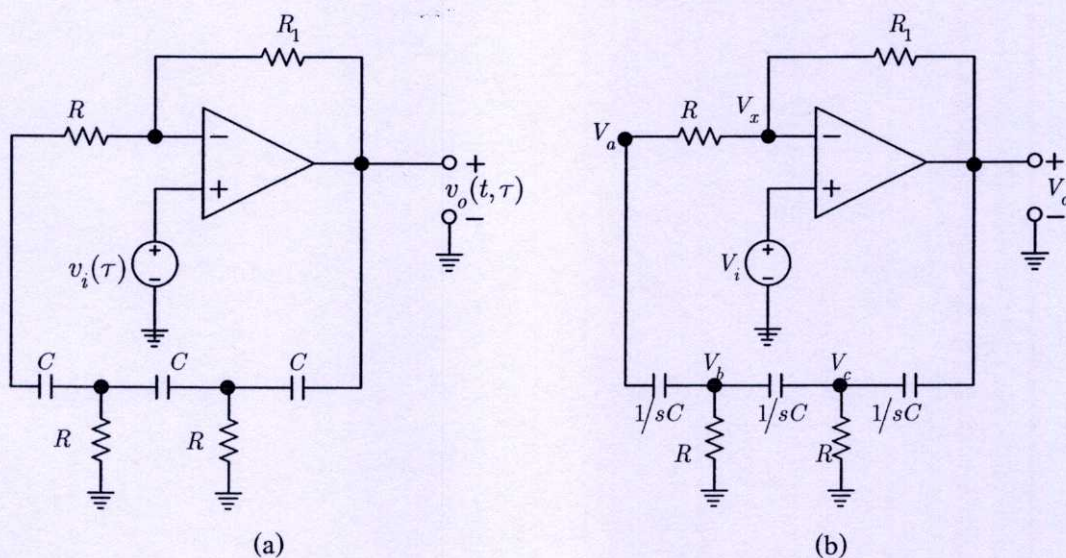
$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos(t / RC) + v_{of}(\tau) \quad (3.75)$$

จากสมการที่ (3.75) จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ จะไปปรากฏเป็นส่วนหนึ่งของค่าแอมพลิจูดในพจน์ของผลตอบสนองธรรมชาติหรือสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอดอล ดังนั้นถ้าสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ที่ป้อนเข้าสู่วงจรเวเนบริดจ์ ณ ที่เวลา τ ใดๆ เป็นสัญญาณที่แปรเปลี่ยนไปตามเวลาหรือมีลักษณะเป็นพัลส์ผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ ก็จะแปรเปลี่ยนไปตามสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ซึ่ง $v_{of}(\tau)$ จะมีอิทธิพลต่อค่าแอมพลิจูดของการตอบสนองธรรมชาติไซน์ซอซอดอล และแปรเปลี่ยนไปตามการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ อีกทีหนึ่ง ดังนั้น จึงทำให้เราสามารถควบคุมแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ซอซอดอลเอาต์พุตได้อีกวิธี

หนึ่ง สำหรับวงจรเวเนบริจจ์นี้จะให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลต ในส่วนของผลตอบสนอง
ธรรมชาติโดยมีความถี่ในหน่วยของเฮิรตซ์เป็น

$$f_{osc} = 1/2\pi RC \quad \text{Hz} \quad (3.76)$$

3.7.2 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรเลื่อน - เฟสออสซิลเลเตอร์



รูป 3.5 วงจรเลื่อน - เฟสออสซิลเลเตอร์กับการป้อนสัญญาณอินพุตด้วย $v_i(\tau)$ ณ ที่
เวลา τ ใดๆ (a) วงจรในโดเมน-เวลา และ (b) คือวงจรในโดเมน-เอส

จากวงจรในรูปที่ 3.5 (b) จากการสังเกตจะเห็นได้ว่า

$$V_x = V_i \quad (3.77)$$

ใช้สมการจตุรรวมที่ขาลบ ของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) V_i - \frac{V_a}{R} - \frac{V_o}{R_1} = 0$$

$$V_a = \left(1 + \frac{R}{R_1} \right) V_i - \frac{R}{R_1} V_o$$

กำหนดให้ $k = R / R_1$

$$V_a = (1 + k)V_i - kV_o \quad (3.78)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม V_a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R} + sC\right)V_a - \frac{V_i}{R} - sCV_b &= 0 \\ (1 + RCs)V_a - V_i - RCsV_b &= 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม V_b

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R} + 2sC\right)V_b - sCV_a - sCV_c &= 0 \\ (1 + 2RCs)V_b - RCsV_a - RCsV_c &= 0 \\ V_c &= \left(\frac{1 + 2RCs}{RCs}\right)V_b - V_a \end{aligned} \quad (3.80)$$

ใช้สมการจตุรรมที่ V_c

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{R} + 2sC\right)V_c - sCV_b - sCV_o &= 0 \\ (1 + 2RCs)V_c - RCsV_b - RCsV_o &= 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

แทนค่า V_a จากสมการที่ (3.78) ลงในสมการที่ (3.79)

$$\begin{aligned} (1 + RCs)((1 + k)V_i - kV_o) - V_i - RCsV_b &= 0 \\ ((1 + k)(1 + RCs) - 1)V_i - k(1 + RCs)V_o - RCsV_b &= 0 \\ V_b &= \left(\frac{(1 + k)(1 + RCs) - 1}{RCs}\right)V_i - \left(\frac{k(1 + RCs)}{RCs}\right)V_o \end{aligned} \quad (3.82)$$

แทนค่า V_c จากสมการที่ (3.80) ลงในสมการที่ (3.81)

$$\begin{aligned}
& (1 + 2RCs) \left[\left(\frac{1 + 2RCs}{RCs} \right) V_b - V_a \right] - RCsV_b - RCsV_o = 0 \\
& \left(\frac{4R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}{RCs} - RCs \right) V_b - (1 + 2RCs)V_a - RCsV_o = 0 \\
& \left(\frac{3R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}{RCs} \right) V_b - (1 + 2RCs)V_a - RCsV_o = 0 \quad (3.83)
\end{aligned}$$

แทนค่า V_a และ V_b จากสมการที่ (3.78) และ (3.82) ลงในสมการที่ (3.83) ตามลำดับ

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{3R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}{RCs} \right) \left[\left(\frac{(1+k)(1+RCs) - 1}{RCs} \right) V_i \right. \\
& \left. - \left(\frac{k(1+RCs)}{RCs} \right) V_o \right] - (1 + 2RCs)[(1+k)V_i - kV_o] - RCsV_o = 0 \\
& \left[\left(\frac{3R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}{RCs} \right) \left(\frac{(1+k)(1+RCs) - 1}{RCs} \right) \right. \\
& \left. - (1 + 2RCs)(1+k) \right] V_i + \left[- \left(\frac{3R^2C^2s^2 + 4RCs + 1}{RCs} \right) \left(\frac{k(1+RCs)}{RCs} \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + k(1 + 2RCs) - RCs \right] V_o = 0 \\
& \left[\frac{(k+1)R^3C^3s^3 + 6kR^2C^2s^2 + 5kRCs + k}{R^2C^2s^2} \right] V_o \\
& = \left[\frac{(k+1)R^3C^3s^3 + (6k+3)R^2C^2s^2 + (5k+1)RCs + k}{R^2C^2s^2} \right] V_i
\end{aligned}$$

นำเอา $R^2C^2s^2/k$ คูณตลอดจะได้

$$\begin{aligned}
& \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right) R^3C^3s^3 + 6R^2C^2s^2 + 5RCs + 1 \right] V_o \\
& = \left[\left(1 + \frac{1}{k} \right) R^3C^3s^3 + \left(6 + \frac{3}{k} \right) R^2C^2s^2 + \left(5 + \frac{1}{k} \right) RCs + 1 \right] V_i \quad (3.84)
\end{aligned}$$

ทำการแปลงลาปลาซกลับในสมการที่ (3.84) จะ ได้

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{k}\right) R^3 C^3 v_o'''(t) + 6R^2 C^2 v_o''(t) + 5RCv_o'(t) + v_o(t) \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) R^3 C^3 v_i'''(t) + \left(6 + \frac{3}{k}\right) R^2 C^2 v_i''(t) + \left(5 + \frac{1}{k}\right) RCv_i'(t) + v_i(t) \end{aligned} \quad (3.85)$$

โดยอาศัยเทคนิคการแยกสเกลเวลา ทั้งนี้กำหนดให้ตัวแปรเวลา τ เป็นเวลาที่ได้แยกออกจากเวลา t คือเวลาขณะที่ป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ณ ที่เวลา τ ใดๆ ให้กับวงจร ดังนั้นสมการความสัมพันธ์ของวงจรในรูปของการแยกสเกลเวลาจะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{k}\right) R^3 C^3 v_o'''(t, \tau) + 6R^2 C^2 v_o''(t, \tau) + 5RCv_o'(t, \tau) + v_o(t, \tau) \\ &= \left(1 + \frac{1}{k}\right) R^3 C^3 v_i'''(\tau) + \left(6 + \frac{3}{k}\right) R^2 C^2 v_i''(\tau) \\ & \quad + \left(5 + \frac{1}{k}\right) RCv_i'(\tau) + v_i(\tau) \end{aligned} \quad (3.86)$$

สมการความสัมพันธ์ของวงจрдังสมการที่ (3.86) ทางด้านขวามือของสมการคือฟังก์ชันบังคับ $f(\tau)$ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} f(\tau) = & \left(1 + \frac{1}{k}\right) R^3 C^3 v_i'''(\tau) + \left(6 + \frac{3}{k}\right) R^2 C^2 v_i''(\tau) \\ & + \left(5 + \frac{1}{k}\right) RCv_i'(\tau) + v_i(\tau) \end{aligned} \quad (3.87)$$

กำหนดให้ฟังก์ชันบังคับ $f(\tau) = 0$ เพื่อหาผลตอบสนองธรรมชาติ ณ ที่สเกลเวลา t ใดๆ จากสมการอนุพันธ์เอกพันธ์จะได้

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{k}\right) R^3 C^3 v_{on}'''(t, \tau) + 6R^2 C^2 v_{on}''(t, \tau) + 5RCv_{on}'(t, \tau) \\ & \quad + v_{on}(t, \tau) = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

สมการคุณลักษณะเฉพาะจะเป็น

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3s^3 + 6R^2C^2s^2 + 5RCs + 1 = 0 \quad (3.89)$$

ผลตอบสนองธรรมชาติในรูปทั่วไปจะได้เป็น

$$v_{on}(t) = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t} + A_3e^{s_3t} \quad (3.90)$$

ด้วยเหตุที่ต้องการให้ผลตอบสนองธรรมชาติจากสมการที่ (3.90) มีเอาต์พุตเป็นสัญญาณไขว้ขอยคอด ณ ที่เวลา t ใดๆ ดังนั้นค่ารากสมการหรือความถี่ธรรมชาติ s_1 , s_2 และ s_3 จะต้องมีรากสมการเป็นคู่สังยุคเชิงซ้อน ซึ่งกันและกันคู่หนึ่งและค่ารากอีกรากหนึ่งให้เป็นค่าคงที่ นั่นคือ

$$s_1, s_2 = \sigma \pm j\omega$$

และถ้าต้องการให้สัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตของวงจรถาจากกรหน่วงแล้วค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = 0$ ค่ารากสมการที่ต้องการจะได้เป็น

$$\begin{aligned} s_1 &= j\omega \\ s_2 &= -j\omega \\ s_3 &= -k_1 \end{aligned} \quad (3.91)$$

เมื่อ k_1 เป็นค่าจริงคงที่ที่ไม่เท่ากับศูนย์ จากสมการคุณลักษณะเฉพาะที่แสดงไว้ในสมการที่ (3.89) เขียนให้อยู่ในรูปของการแยกตัวประกอบในรูปทั่วไปได้เป็น

$$\begin{aligned} (s - s_1)(s - s_2)(s - s_3) &= 0 \\ (s - j\omega)(s + j\omega)(s + k_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

เพราะฉะนั้นสมการคุณลักษณะเฉพาะในรูปทั่วไปของกรณีนี้ก็คือ

$$s^3 + k_1s^2 + \omega^2s + k_1\omega^2 = 0 \quad (3.93)$$

นำเอา $1/\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3$ คูณตลอดสมการที่ (3.89) จะได้

$$s^3 + \frac{6s^2}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)RC} + \frac{5s}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^2C^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3} = 0 \quad (3.94)$$

เปรียบเทียบค่าพารามิเตอร์ระหว่างสมการที่ (3.93) กับ (3.94) พจน์ต่อพจน์จะพบว่า

$$k_1 = 6/\left(1 + \frac{1}{k}\right)RC \quad (3.95)$$

$$\omega^2 = 5/\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^2C^2 \quad (3.96)$$

$$k_1\omega^2 = \left(\frac{6}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)RC}\right)\left(\frac{5}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^2C^2}\right) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3} \quad (3.97)$$

แก้สมการที่ (3.97) หาค่า k

$$\begin{aligned} \left(\frac{6}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)}\right)\left(\frac{5}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3}\right) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)R^3C^3} \\ \frac{30}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)} &= 1 \\ 30 &= 1 + \frac{1}{k} \\ k &= \frac{1}{29} \end{aligned} \quad (3.98)$$

เนื่องจากเราทราบว่า $k = R/R_1 = 1/29$ หรืออัตราส่วน $R_1/R = 29$ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ $R_1 = 29R$ จะทำให้ผลตอบสนองของระบบชาติมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} v_{on}(t) &= A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + A_3 e^{s_3 t} \\ &= A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} + A_3 e^{-k_1 t} \end{aligned} \quad (3.99)$$

โดยการแทนค่า $k = 1/29$ ลงในสมการที่ (3.95) และ (3.96) เพื่อหาค่าความถี่ธรรมชาติ ω และ k_1 ตามลำดับ จะทำให้ได้เป็น

$$k_1 = 1/5RC \quad (3.100)$$

และ

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 1/6R^2C^2 \\ \omega &= 1/\sqrt{6RC} \end{aligned} \quad (3.101)$$

อาศัยสมการที่ (3.99) - (3.101) ผลตอบสนองธรรมชาติที่เป็นสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตไขว้ขอยคอลลจะเขียนสมการเป็น

$$v_{on}(t) = A_1 e^{jt/\sqrt{6RC}} + A_2 e^{-jt/\sqrt{6RC}} + A_3 e^{-t/5RC} \quad (3.102)$$

ที่ซึ่งสองพจน์แรกด้านขวามือของสมการที่ (3.102) จะให้กำเนิดเป็นสัญญาณไขว้ขอยคอลลเอาต์พุตที่มี $\sigma = 0$ และความถี่เรเดียนธรรมชาติ $\omega = 1/\sqrt{6RC}$ สำหรับพจน์ $A_3 e^{-t/5RC}$ เป็นพจน์ของการหน่วงตามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $e^{-t/5RC}$ เมื่อเวลาผ่านไปชั่วขณะพจน์นี้มีค่าเข้าสู่ศูนย์ เมื่อ $t > 0$ และเมื่ออยู่ในสภาวะคงตัว (steady-state) แล้วผลตอบสนองธรรมชาติของวงจรเลื่อน- เฟสจะเหลือเพียง

$$v_{on}(t) = A_1 e^{jt/\sqrt{6RC}} + A_2 e^{-jt/\sqrt{6RC}}, t > 0 \quad (3.103)$$

ในทำนองเดียวกันจากสมการความสัมพันธ์ของวงจรที่อยู่ในรูปของการแยกสเกลเวลาที่แสดงไว้ในสมการ (3.86) เมื่อแทนค่า $v_o(t, \tau) = v_{of}(\tau)$ และสามารถหาผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ อันเนื่องจากสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ที่ป้อนเข้าสู่วงจรที่เวลา τ ใดๆ ได้จากสมการที่ (3.104) และแทนค่า $k = 1/29$ ลงในสมการ (3.86) จะได้

$$30R^3C^3 v_{of}'''(\tau) + 6R^2C^2 v_{of}''(\tau) + 5RC v_{of}'(\tau) + v_{of}(\tau) = f(\tau) \quad (3.104)$$

$$\text{และ } f(\tau) = 30R^3C^3v_i'''(\tau) + 93R^2C^2v_i''(\tau) + 34RCv_i'(\tau) + v_i(\tau) \quad (3.105)$$

เมื่อวงจรเข้าสู่สถานะคงตัว ดังนั้นผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ จึงเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} v_o(t, \tau) &= v_{on}(t) + v_{of}(\tau) \\ &= A_1 e^{jt/\sqrt{6RC}} + A_2 e^{-jt/\sqrt{6RC}} + v_{of}(\tau) \end{aligned} \quad (3.106)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ของผลตอบสนองธรรมชาติสามารถหาได้จากสมการที่ (3.45) และ (3.47) และใช้กรณีค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริงในทางปฏิบัติโดยอาศัยสมการที่ (3.57) เป็นผลให้

$$v_o(t, \tau) = (Y_0 - v_{of}(\tau)) \cos\left(t/\sqrt{6RC}\right) + v_{of}(\tau) \quad (3.107)$$

ณ ที่เวลา $t = 0$ ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $v_o(0, \tau)$ ของวงจรจะมีค่าเป็น

$$v_o(0, \tau) = Y_0 = \pm V_{SAT}$$

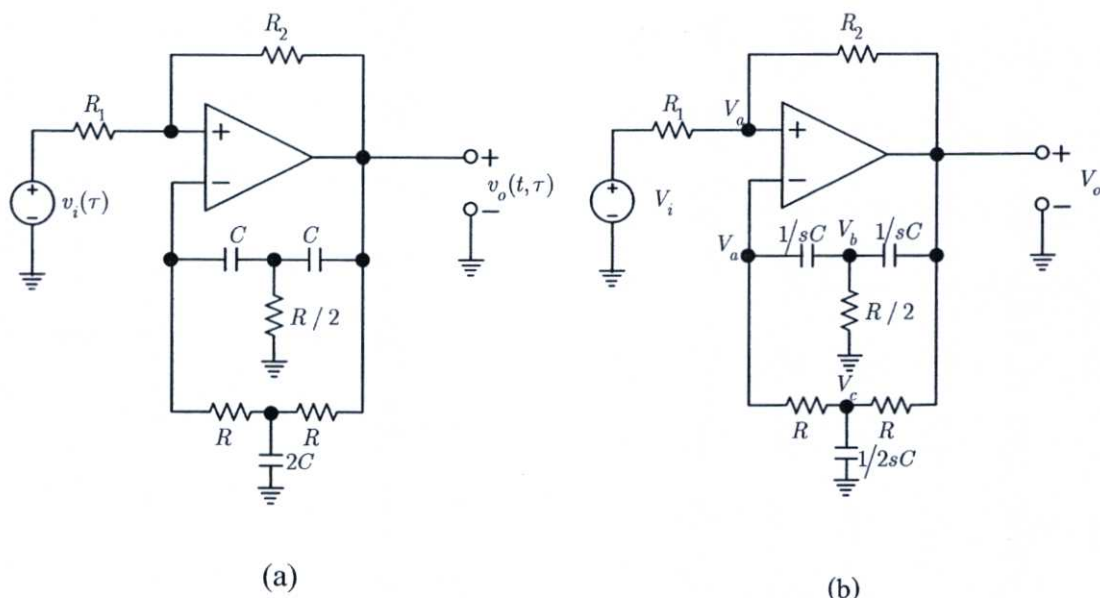
เพราะฉะนั้น

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos\left(t/\sqrt{6RC}\right) + v_{of}(\tau) \quad (3.108)$$

ความถี่ของสัญญาณออสซิลเลตในหน่วยของเฮิรตซ์ จะมีค่าเป็น

$$f_{osc} = 1/2\pi\sqrt{6RC} \quad Hz \quad (3.109)$$

3.7.3 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรวิน-ทีออกซิลเลเตอร์



รูปที่ 3.6 วงจรวิน-ทีออกซิลเลเตอร์ขณะเปลี่ยนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ณ ที่เวลา τ ใดๆ
 (a) วงจรในโดเมน-เวลา (b) วงจรในโดเมน-เฮส

จากวงจรในรูปที่ 3.6 (b) วิเคราะห์หาสมการความสัมพันธ์ของวงจร โดยใช้สมการจตุรรวมที่ขาบวกของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_a - \frac{V_i}{R_1} - \frac{V_o}{R_2} = 0$$

$$V_a = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)V_i + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)V_o$$

กำหนดให้ $k_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ และ $k_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

$$V_a = k_2 V_i + k_1 V_o \tag{3.110}$$

ใช้สมการจตุรรวมที่ขาลบของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R} + sC\right)V_a - sCV_b - \frac{V_c}{R} = 0$$

$$(1 + RCs)V_a - RCsV_b - V_c = 0 \quad (3.111)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม V_b

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{R} + 2sC\right)V_b - sCV_a - sCV_o &= 0 \\ (2 + 2RCs)V_b - RCsV_a - RCsV_o &= 0 \end{aligned} \quad (3.112)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม V_c

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{R} + 2sC\right)V_c - \frac{V_a}{R} - \frac{V_o}{R} &= 0 \\ (2 + 2RCs)V_c - V_a - V_o &= 0 \end{aligned} \quad (3.113)$$

แทนค่า V_a จากสมการที่ (3.110) ลงในสมการที่ (3.112) และ (3.113) ตามลำดับ จะได้

$$\begin{aligned} (2 + 2RCs)V_b - RCs(k_2V_i + k_1V_o) - RCsV_o &= 0 \\ V_b = \left(\frac{k_2RCs}{2 + 2RCs}\right)V_i + \left(\frac{(k_1 + 1)RCs}{2 + 2RCs}\right)V_o & \end{aligned} \quad (3.114)$$

และ

$$\begin{aligned} (2 + 2RCs)V_c - (k_2V_i + k_1V_o) - V_o &= 0 \\ V_c = \left(\frac{k_2}{2 + 2RCs}\right)V_i + \left(\frac{(k_1 + 1)}{2 + 2RCs}\right)V_o & \end{aligned} \quad (3.115)$$

แทนค่า V_a , V_b และ V_c จากสมการที่ (3.110), (3.114) และ (3.115) ลงในสมการที่ (3.111)

$$\begin{aligned} (1 + RCs)(k_2V_i + k_1V_o) - RCs \left[\left(\frac{k_2RCs}{2 + 2RCs}\right)V_i + \right. \\ \left. \left(\frac{(k_1 + 1)RCs}{2 + 2RCs}\right)V_o \right] - \left[\left(\frac{k_2}{2 + 2RCs}\right)V_i - \left(\frac{k_1 + 1}{2 + 2RCs}\right)V_o \right] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[k_1(1 + RCs) - RCs \left(\frac{(k_1 + 1)RCs}{2 + 2RCs} \right) - \left(\frac{(k_1 + 1)}{2 + 2RCs} \right) \right] V_o \\ & = - \left[k_2(1 + RCs) - RCs \left(\frac{k_2RCs}{2 + 2RCs} \right) - \left(\frac{k_2}{2 + 2RCs} \right) \right] V_i \end{aligned} \quad (3.116)$$

นำเอา $(2 + 2RCs)$ คูณตลอดสมการที่ (3.116) แล้วจัดสมการใหม่จะได้

$$\begin{aligned} & \left[(k_1 - 1)R^2C^2s^2 + 4k_1RCs + (k_1 - 1) \right] V_o \\ & = -k_2 \left[R^2C^2s^2 + 4RCs + 1 \right] V_i \end{aligned} \quad (3.117)$$

นำเอา $1/(k_1 - 1)R^2C^2$ คูณตลอดสมการที่ (3.117)

$$\begin{aligned} & \left[s^2 + \left(\frac{4k_1}{(k_1 - 1)RC} \right) s + \frac{1}{R^2C^2} \right] V_o \\ & = \frac{-k_2}{(k_1 - 1)} \left[s^2 + \left(\frac{4}{RC} \right) s + \frac{1}{R^2C^2} \right] V_i \end{aligned} \quad (3.118)$$

ทำการแปลงลาปลาซกลับในสมการที่ (3.118)

$$\begin{aligned} & v_o''(t) + \left(\frac{4k_1}{(k_1 - 1)RC} \right) v_o'(t) + \frac{v_o(t)}{R^2C^2} \\ & = \frac{-k_2}{(k_1 - 1)} \left[v_i''(t) + \left(\frac{4}{RC} \right) v_i'(t) + \frac{v_i(t)}{R^2C^2} \right] \end{aligned} \quad (3.119)$$

ใช้เทคนิคการแยกสเกลเวลาในสมการที่ (3.119) โดยกำหนดให้เวลา τ ใดๆ เป็นตัวแปรเวลาที่แยกพิจารณาออกมาจากเวลา t และให้เป็นเวลาสำหรับการป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ให้กับวงจร ณ ที่เวลา τ ใดๆ ด้วยวิธีการนี้ สมการที่ (3.119) จึงเขียนในรูปของการแยกสเกลเวลาได้เป็น

$$\begin{aligned} & v_o''(t, \tau) + \left(\frac{4k_1}{(k_1 - 1)RC} \right) v_o'(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2C^2} \\ & = \frac{-k_2}{(k_1 - 1)} \left[v_i''(\tau) + \left(\frac{4}{RC} \right) v_i'(\tau) + \frac{v_i(\tau)}{R^2C^2} \right] \end{aligned} \quad (3.120)$$

และกำหนดให้ $k_1 = 0$ จะทำให้สมการด้านซ้ายมือของสมการที่ (3.120) อยู่ในรูปของสมการออสซิลเลตอรี โดยมีพจน์กลางเป็นศูนย์ ซึ่งจะให้ผลตอบสนองธรรมชาติออกมาเป็นสัญญาณไซน์ซอชยดอลบริสุทธ์ ดังนั้นเงื่อนไขของการออสซิลเลตก็คือ $k_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0$ นั้นหมายความว่าค่าความต้านทาน $R_1 = 0$ หรือลัควงจรนั่นเอง แล้วสมการที่ (3.120) จะกลายเป็น

$$v_o''(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2 C^2} = k_2 \left[v_i''(\tau) + \left(\frac{4}{RC} \right) v_i'(\tau) + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right] \quad (3.121)$$

ด้วยการให้ด้านขวามือของสมการที่ (3.121) เท่ากับศูนย์ เราจะหาผลตอบสนองธรรมชาติที่เวลา t ใดๆ จากสมการอนุพันธ์เอกพันธ์ได้จาก

$$v_{on}''(t) + \frac{v_{on}(t)}{R^2 C^2} = 0 \quad (3.122)$$

จากสมการออสซิลเลตอรีดังสมการที่ (3.122) จะมีค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = 0$ และความถี่เรเดียนธรรมชาติ $\omega = \sqrt{a_0} = 1/\sqrt{R^2 C^2} = 1/RC$ ดังนั้นผลตอบสนองธรรมชาติที่ปรากฏจะอยู่ในรูปของสัญญาณไซน์ซอชยดอลที่มีความถี่ของการออสซิลเลตเท่ากับ $1/RC$ เรเดียนวินาที

ในขณะเดียวกัน ถ้าป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ให้กับวงจรดังรูปที่ 3.6 (a) ที่เวลา τ ใดๆ แล้วผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ จะหาได้จากสมการ

$$v_{of}''(\tau) + \frac{v_{of}(\tau)}{R^2 C^2} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \left[v_i''(\tau) + \left(\frac{4}{RC} \right) v_i'(\tau) + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right] \quad (3.123)$$

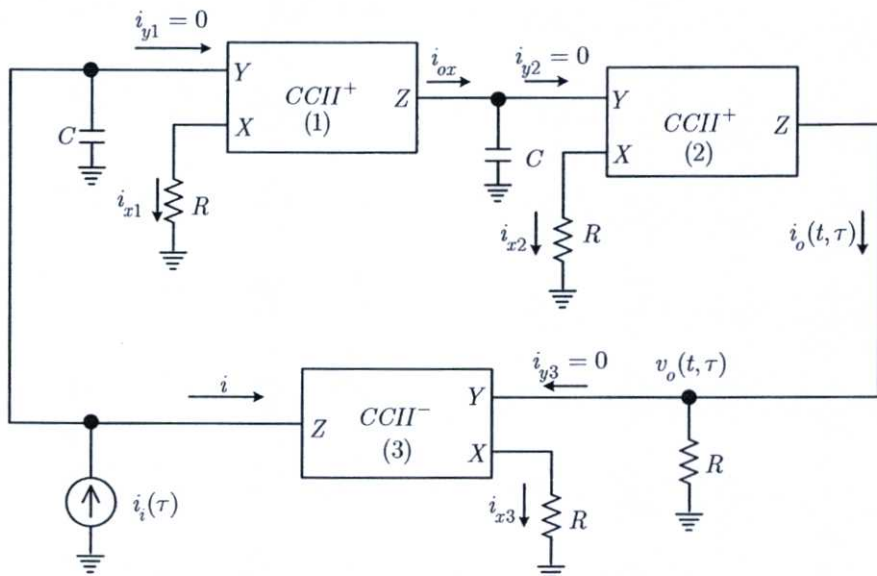
โดยอาศัยสมการที่ (3.45) และ (3.47) และใช้กรณีของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริงในทางปฏิบัติและจากผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดของสมการที่ (3.57) ด้วยการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ณ เวลา $t = 0$ ที่ซึ่ง $v_o(0, \tau) = Y_0 = \pm V_{SAT}$ ผลตอบสนองบริบูรณ์ของวงจรจะเขียนได้เป็น

$$v_o(t, \tau) = \left(\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau) \right) \cos(t/RC) + v_{of}(\tau) \quad (3.124)$$

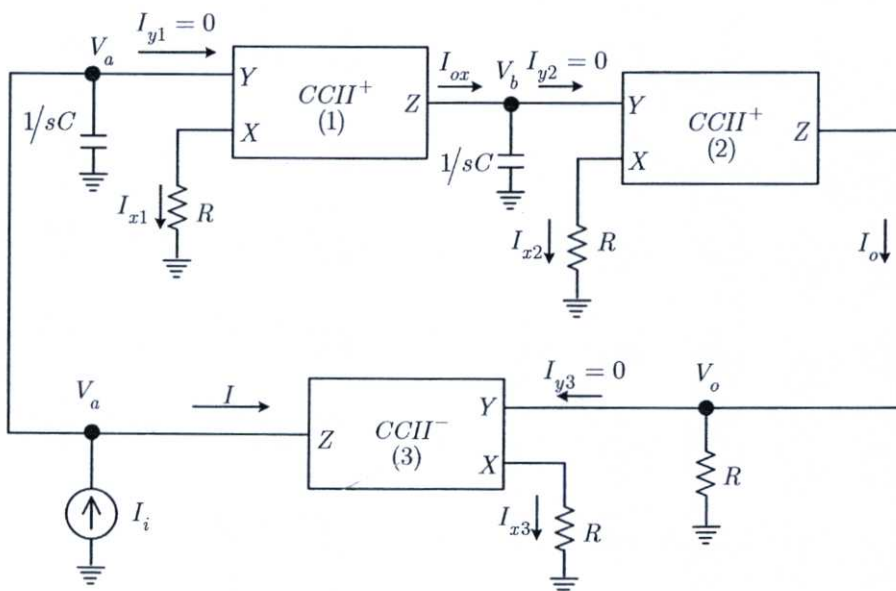
และความถี่ของสัญญาณออสซิลเลตในหน่วยของเฮิรตซ์ จะมีค่าเป็น

$$f_{osc} = 1 / 2\pi RC \quad \text{Hz}$$

3.7.4 การประยุกต์ใช้งานกับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส



(a)



(b)

รูปที่ 3.7 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ ในโหมดกระแสเมื่อป้อนสัญญาณกระแส อินพุต $i_i(\tau)$ (a) วงจรในโดเมน-เวลา (b) วงจรในโดเมน-เฮต

จากวงจรในรูปที่ 3.6 (b) ใช้ *KCL* ที่จุดรวมแรงดัน V_a อินพุตขั้ว Y ของ $CCII^+$ ตัวที่ (1)

$$\begin{aligned} I + sCV_a &= I_i \\ V_a &= (I_i - I)/sC \end{aligned} \quad (3.125)$$

เนื่องจากแรงดันที่อินพุตขั้ว Y จะเท่ากับขั้ว X และจากกฎของโอห์มที่อินพุตขั้ว X ของ $CCII^+$ ตัวที่ (1) จะได้

$$\begin{aligned} V_a &= RI_{x1} \\ I_{x1} &= V_a/R = (I_i - I)/RCs \end{aligned} \quad (3.126)$$

จาก $CCII^+$ ตัวที่ (1) เราทราบว่า ค่ากระแสเอาต์พุตที่ขั้ว Z จะมีค่าเท่ากับกระแสอินพุตที่ขั้ว X ดังนั้น

$$I_{ox} = I_{x1} = (I_i - I)/RCs \quad (3.127)$$

ใช้ *KCL* ที่จุดรวม V_b อินพุตขั้ว Y ของ $CCII^+$ ตัวที่ (2)

$$\begin{aligned} I_{ox} - sCV_b &= 0 \\ V_b &= I_{ox}/sC = (I_i - I)/R^2C^2s^2 \end{aligned} \quad (3.128)$$

ใช้กฎของโอห์มที่จุดรวม V_b อินพุตขั้ว X ของ $CCII^+$ ตัวที่ (2)

$$\begin{aligned} V_b &= RI_{x2} \\ I_{x2} &= V_b/R = (I_i - I)/R^2C^2s^2 \end{aligned} \quad (3.129)$$

จาก $CCII^+$ ตัวที่ (2) เราจะได้

$$I_o = I_{x2} = (I_i - I)/R^2C^2s^2 \quad (3.130)$$

ใช้ KCL ที่จุดรวม V_o อินพุตชั่ว Y ของ $CCII^-$ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} I_o &= V_o/R \\ V_o &= RI_o \end{aligned} \quad (3.131)$$

จากกฎของโอห์ม แรงดันที่ขาอินพุตชั่ว X ของ $CCII^-$ จะมีค่าเป็น

$$\begin{aligned} V_o &= RI_{x3} \\ I_{x3} &= V_o/R = I_o \end{aligned} \quad (3.132)$$

จาก $CCII^-$ ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตกับเอาต์พุตจะเป็น

$$I = I_{x3} = I_o \quad (3.133)$$

แทนค่า I จากสมการที่ (3.133) ลงในสมการที่ (3.130) แล้วจัดสมการใหม่จะได้สมการความสัมพันธ์เป็น

$$\begin{aligned} I_o &= (I_i - I_o)/R^2C^2s^2 \\ R^2C^2s^2I_o + I_o &= I_i \end{aligned} \quad (3.134)$$

นำเอา $1/R^2C^2$ คูณตลอดสมการที่ (3.134)

$$(s^2 + 1/R^2C^2)I_o = I_i/R^2C^2 \quad (3.135)$$

ทำการแปลงลาปลาซกลับในสมการที่ (3.135) เป็นผลให้

$$i_o''(t) + i_o(t)/R^2C^2 = i_i(t)/R^2C^2 \quad (3.136)$$

อาศัยการแยกตัวแปรสเกลเวลา τ ออกจากเวลา t และในช่วงเวลา τ ใดๆ กำหนดให้เป็นเวลาขณะที่ทำการป้อนสัญญาณกระแสอินพุต $i_i(\tau)$ ให้กับวงจร ดังนั้นสมการที่ (3.136) จึงเขียนอยู่ในรูปของการแยกตัวแปรสเกลเวลาได้เป็น

$$i_o''(t, \tau) + i_o(t, \tau)/R^2C^2 = i_i(\tau)/R^2C^2 \quad (3.137)$$

จากสมการที่ (3.137) ฟังก์ชันบังคับของวงจรคือ

$$f(\tau) = i_i(\tau)/R^2C^2 \quad (3.138)$$

ข้อสังเกต จากสมการที่ (3.138) จะเห็นได้ว่าฟังก์ชันบังคับ $f(\tau)$ ของวงจรควอดราเจอร์ ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแสสั้น จะให้ค่าที่ตรงกันกับค่าสัญญาณกระแสอินพุต $i_i(\tau)/R^2C^2$ โดยปราศจากพจน์ของค่าอนุพันธ์กระแสอินพุตทั้งอันดับที่ 2 และอันดับที่ 1

กำหนดให้ฟังก์ชันบังคับ $f(\tau) = 0$ เพื่อหาค่าผลตอบสนองธรรมชาติของวงจร ที่เวลา t ใด ๆ ดังนั้นสมการอนุพันธ์เอกพันธ์ จะเขียนได้เป็น

$$i_{on}''(t) + i_{on}(t)/R^2C^2 = 0 \quad (3.139)$$

สมการออสซิลเลตอรีที่แสดงดังสมการที่ (3.139) จะสามารถให้กำเนิดสัญญาณกระแสเอาต์พุต (ผลตอบสนองธรรมชาติ) ออกมาเป็นสัญญาณไซน์ชอยดอลบริสุทธ์ความถี่เดียว ซึ่งแสดงดังสมการที่ (3.141)

$$\begin{aligned} i_{on}(t) &= A_1 e^{j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t} \\ &= A_1 e^{jt/RC} + A_2 e^{-jt/RC} \end{aligned} \quad (3.140)$$

ในทางปฏิบัติแล้วค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ต้องเป็นค่าจริง ในกรณีนี้ถ้ากำหนดให้ $A_1 = A_2 = A/2$ แล้วผลตอบสนองธรรมชาติในสมการที่ (3.140) จะเขียนได้เป็น

$$i_{on}(t) = A \cos(t/RC) \quad (3.141)$$

สำหรับผลตอบสนองบังคับ $i_{of}(\tau)$ ที่เกิดจากการป้อนสัญญาณกระแสอินพุต $i_i(\tau)$ เข้าสู่วงจร ณ เวลา τ ใดๆ สามารถหาได้จาก

$$i_{of}''(\tau) + i_{of}(\tau)/RC = i_i(\tau)/R^2C^2 \quad (3.142)$$

อาศัยสมการค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ในรูปแบบปิด ดังสมการที่ (3.45) และ (3.47) ตามลำดับ และจากกรณีของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ในทางปฏิบัติเป็นค่าจริง และอาศัยผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดของสมการที่ (3.57) ด้วยการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ณ เวลา $t = 0$ ที่ซึ่ง $i_o(0, \tau) = Y_0 = \pm I_{SAT}$ เมื่อ I_{SAT} คือกระแสอิ่มตัวของ CCH แล้วผลตอบสนองบริบูรณ์ของวงจรจะแสดงได้เป็น

$$i_o(t, \tau) = (\pm I_{SAT} - i_{of}(\tau)) \cos(t/RC) + i_{of}(\tau) \quad (3.143)$$

และมี
$$f_{osc} = 1/2\pi RC \quad Hz \quad (3.144)$$

จากผลตอบสนองบริบูรณ์ของวงจรเวเนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ วงจรเลื่อน-เฟส ออสซิลเลเตอร์ วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ และวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส จะเห็นได้ว่าผลตอบสนองบริบูรณ์จะอยู่ในรูปลักษณะเดียวกัน ดังสมการที่ (3.75), (3.108), (3.124) และ (3.143) ตามลำดับ นั่นก็หมายความว่า ค่าแอมพลิจูดของฟังก์ชันโคไซน์ หรือสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอดอลของวงจรออสซิลเลเตอร์เหล่านี้ สามารถควบคุมได้โดยง่าย ด้วยการปรับเปลี่ยนสัญญาณอินพุตที่ป้อนเข้าวงจรออสซิลเลเตอร์ ที่ซึ่งสัญญาณอินพุตดังกล่าวจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันบังคับ $f(\tau)$ ในสมการความสัมพันธ์ของวงจร และจะไปเป็นผลให้เกิดผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ หรือ $i_{of}(\tau)$ แล้ว จึงไปปรากฏเป็นส่วนหนึ่งของค่าแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอดอลอีกทีหนึ่ง ซึ่งเสมือนกับว่าเราสามารถปรับเปลี่ยนแอมพลิจูดของไซน์ซอซอดอลเอาต์พุตด้วยสัญญาณอินพุตจากภายนอกได้โดยตรง

3.8 การประยุกต์ใช้งานวงจรออสซิลเลเตอร์กับการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด (AM) บนพื้นฐานของการใช้เทคนิคการแยกสเกลเวลา

ในเวลาหลายสิบปีที่ผ่านมา การมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด (amplitude modulation, AM) นั้นได้เข้ามามีบทบาทสำคัญในระบบของการสื่อสาร ทั้งนี้ก็เพราะว่าระบบดังกล่าวได้ให้สัญญาณที่มีรูปร่างไม่ซับซ้อน และใช้แบนด์วิดท์ที่ไม่กว้างมากนัก ดังนั้นจึงยังคงได้รับความนิยมต่อการใช้งานในกลุ่มของนักวิทยุสมัครเล่นกันอย่างกว้างขวาง โดยส่วนใหญ่แล้วจะใช้กันอยู่ในช่วงคลื่นวิทยุย่านซีทีซีบี (citizens band radio) โดยหลักการทั่วไปแล้ว สัญญาณคลื่นพาห้ (carrier signal) จะถูกมอดูเลตเป็นสัดส่วนกันกับความแรงของสัญญาณข่าวสาร ในระบบเอ-เอ็ม ทั่วๆ ไปแล้วจะประกอบไปด้วยวงจรตัวมอดูเลต (modulator circuit) ซึ่งจะทำให้การมอดูเลตกับสัญญาณการมอดูเลต (modulating signal) ในขณะที่สัญญาณคลื่นพาห้ จะได้มาจากวงจรออสซิลเลเตอร์ที่ให้กำเนิดสัญญาณไซน์ซอซอคอลบริสุทรี

จากหัวข้อที่ 3.3 ในเรื่องของการหาผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดของออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ได้อาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวด้วยการแยกสเกลเวลามาช่วยในการหาผลเฉลย เมื่อออสซิลเลเตอร์ดังกล่าวได้ถูกป้อนสัญญาณอินพุตที่มีลักษณะแปรเปลี่ยนไปตามเวลาจากภายนอก และได้พบว่า เมื่อได้ป้อนสัญญาณอินพุต หรือฟังก์ชันบังคับที่เป็นพลวัตให้กับออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 แล้วค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับ $y_f(\tau)$ ไม่ใช่เฉพาะผลตอบสนองบังคับ ณ เวลาเริ่มต้นเท่านั้น ($y_f(0)$) แต่ขึ้นอยู่กับเวลา τ ใดๆ อีกด้วย นั่นก็หมายความว่า แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติไซน์ซอซอคอลจะแปรเปลี่ยนเป็นสัดส่วนกับผลตอบสนองบังคับ $y_f(\tau)$ ดังนั้นสำหรับเงื่อนไขที่ผลตอบสนองบังคับ $y_f(\tau)$ ได้ถูกประมาณให้มีค่าเท่ากับฟังก์ชันบังคับ $f(\tau)$ ที่มีลักษณะแปรเปลี่ยนไปตามเวลา เพราะฉะนั้นออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 จึงสามารถนำมาประยุกต์ใช้งานกับการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดได้ ซึ่งจะได้กล่าวในรายละเอียดต่อไปในหัวข้อนี้ ในที่นี้ผลตอบสนองธรรมชาติคือ สัญญาณคลื่นพาห้ไซน์ซอซอคอล และผลตอบสนองบังคับคือ สัญญาณการมอดูเลตอินพุต (modulating input signal)

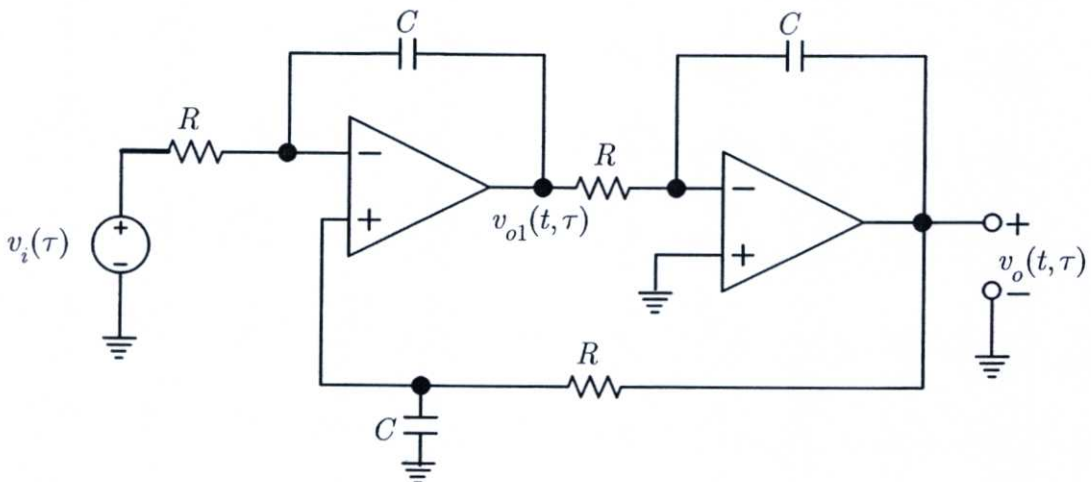
จากสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิด (3.57) ที่ได้จากขั้นตอนการพิสูจน์ผ่านการแทนค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ซึ่งอยู่ในรูปแบบปิดเช่นกัน (ซึ่งคือสมการที่ (3.45) และ (3.47) ตามลำดับ) ในหัวข้อที่ 3.3 กล่าวคือ

$$y(t, \tau) = (Y_0 - y_f(\tau)) \cos \omega t + y_f(\tau)$$

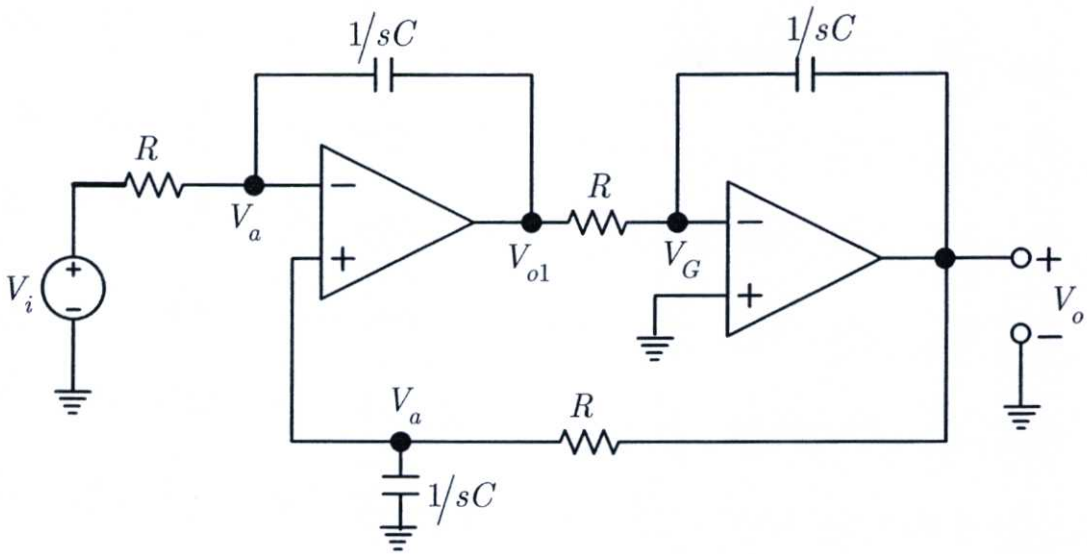
ถ้าเราประมาณให้ $f(\tau) \simeq y_f(\tau)$ แล้วสมการที่ (3.57) จะกลายเป็น

$$y(t, \tau) = (Y_0 - f(\tau)) \cos \omega t + f(\tau) \quad (3.145)$$

ดังนั้น ถ้าฟังก์ชันบังคับ $f(\tau)$ เป็นสัญญาณการมอดูเลต แล้วพจน์แรกทางขวามือของสมการที่ (3.145) ก็คือ สัญญาณการมอดูเลตเชิงขนาด แสดงว่าระบบที่เป็นออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 เมื่อถูกป้อนด้วยฟังก์ชันบังคับอินพุตที่มีลักษณะเป็นพลวัตต์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ให้เป็นตัวมอดูเลตสัญญาณ เอ-เอ็ม (AM modulator) ได้นั่นเอง อย่างไรก็ตามสำหรับเงื่อนไขดังเช่นที่ผลตอบสนองบังคับ $y_f(\tau)$ ที่เราประมาณว่าให้เป็นฟังก์ชันเดียวกันกับ หรือเหมือนกันทุกประการกับฟังก์ชันบังคับ $f(\tau)$ นี้จะเกิดขึ้นกับระบบอันดับที่ 2 ที่จำเพาะเจาะจงลงไปเป็นการเฉพาะ เช่น วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ โดยรูปที่ 3.8 แสดงวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่มีอินพุตเป็น $v_i(\tau)$ และความสัมพันธ์ของวงจรจะหาได้จากการวิเคราะห์ห้วงจรดังต่อไปนี้



(a)



(b)

รูปที่ 3.8 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่มีอินพุต $v_i(\tau)$

(a) โดเมน-เวลา (b) โดเมน-เฮส

จากรูปที่ 3.8 (b) ใช้สมการจตุรรวมที่จตุรรวม V_a ขาลบของ ออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R} + sC\right)V_a - V_i/R - sCV_{o1} = 0$$

นำเอา R คูณตลอดสมการจะได้

$$(1 + RCs)V_a - RCsV_{o1} = V_i \quad (3.146)$$

สมการจตุรรวมที่จตุรรวม V_a ขาบวกของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R} + sC\right)V_a - V_o/R = 0$$

นำเอา R คูณตลอดสมการ

$$\begin{aligned}(1 + RCs)V_a &= V_o \\ V_a &= V_o/(1 + RCs)\end{aligned}\quad (3.147)$$

สมการจตุรรมที่จตุรรม V_G ขาลบของออป-แอมป์

$$\left(\frac{1}{R} + sC\right)V_G - sCV_o - V_{o1}/R = 0$$

เนื่องจากแรงดัน $V_G = 0$ (กราวนด์สั้นเสมือน) เพราะฉะนั้น

$$V_{o1} = -RCsV_o \quad (3.148)$$

แทนค่า V_a และ V_{o1} จากสมการที่ (3.147) และ (3.148) ลงในสมการที่ (3.146) ตามลำดับ ทำให้ได้

$$\begin{aligned}(1 + RCs)\left(V_o/(1 + RCs)\right) - RCs(-RCsV_o) &= V_i \\ R^2C^2s^2V_o + V_o &= V_i\end{aligned}\quad (3.149)$$

นำเอา $(1/R^2C^2)$ คูณตลอดสมการที่ (3.149) จะได้

$$(s^2 + 1/R^2C^2)V_o = V_i/R^2C^2 \quad (3.150)$$

ทำการแปลงลาปลาซกลับในสมการที่ (3.148) และ (3.150) ตามลำดับจะได้

$$v_{o1}(t) = -RCv'_o(t) \quad (3.151)$$

และ
$$v''_o(t) + v_o(t)/R^2C^2 = v_i(t)/R^2C^2 \quad (3.152)$$

ด้วยการกำหนดให้ตัวแปรเวลา τ เป็นสเกลเวลาที่แยกออกจากเวลา t ใดๆ ในขณะที่ได้ทำการป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ในช่วงเวลา τ ใดๆ ให้กับวงจรดังรูปที่ 3.8 (a) ดังนั้นสมการที่ (3.151) และ (3.152) เขียนสมการความสัมพันธ์ในรูปของการแยกสเกลเวลาตามลำดับได้เป็น

$$v_{o1}(t, \tau) = -RCv'_o(t, \tau) \quad (3.153)$$

และ
$$v''_o(t, \tau) + v_o(t, \tau)/R^2C^2 = v_i(\tau)/R^2C^2 \quad (3.154)$$

จากสมการที่ (3.154) จะพบว่าฟังก์ชันบังคับคือ

$$f(\tau) = v_i(\tau)/R^2C^2 \quad (3.155)$$

กำหนดให้ $f(\tau) = 0$ และสามารถหาผลตอบสนองธรรมชาติ ณ เวลา t ใดๆ จากสมการอนุพันธ์เอกพันธ์(3.156) กล่าวคือ

$$v''_{on}(t) + v_o(t)/R^2C^2 = 0 \quad (3.156)$$

สมการที่ (3.156) เป็นสมการออสซิลเลตอรี ผลตอบสนองธรรมชาติจะอยู่ในรูป

$$v_{on}(t) = A_1e^{jt/RC} + A_2e^{-jt/RC} \quad (3.157)$$

เมื่อ $\sigma = 0$ และ $\omega = 1/\sqrt{R^2C^2} = 1/RC$ ในทางปฏิบัติจะให้ค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริง โดยที่ $A_1 = A_2 = A/2$ เพราะฉะนั้นผลตอบสนองธรรมชาติ จะได้เป็น

$$v_{on}(t) = A\cos(t/RC) \quad (3.158)$$

ในขณะเดียวกันผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ ที่เกิดจากการป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ณ เวลา τ ใดๆ สามารถหาได้จาก

$$v''_{of}(\tau) + v_{of}(\tau)/R^2C^2 = v_i(\tau)/R^2C^2 \quad (3.159)$$

อาศัยสมการค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ในรูปแบบปิด ดังสมการที่ (3.45) และ (3.47) ตามลำดับ และจากกรณีค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นค่าจริงในทางปฏิบัติ และจากสมการที่ (3.57) ซึ่งเป็นผลตอบสนองสมบูรณ์ในรูปแบบปิด แล้วผลตอบสนองบริบูรณ์ของวงจรถอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ จะเขียนได้เป็น

$$v_o(t, \tau) = v_{on}(t) + v_{of}(\tau) = A \cos(t/RC) + v_{of}(\tau) \quad (3.160)$$

จากผลตอบสนองบริบูรณ์ในสมการที่ (3.57) กล่าวคือ

$$y(t, \tau) = (Y_0 - y_f(\tau)) \cos \omega t + y_f(\tau)$$

ทำการแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ณ เวลา $t = 0$ เมื่อ $v_o(0, \tau) = Y_0 = \pm V_{SAT}$ และ $y_f(\tau) = v_{of}(\tau)$ ลงในสมการที่ (3.57) จะได้ผลตอบสนองบริบูรณ์จากสมการที่ (3.160) คือ

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos(t/RC) + v_{of}(\tau) \quad (3.161)$$

กำหนดให้ $\omega_n = 1/RC$ แล้วสมการที่ (3.161) จะกลายเป็น

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos \omega_n t + v_{of}(\tau) \quad (3.162)$$

พจน์แรกทางด้านขวามือของสมการที่ (3.162) ถ้าพิจารณาในลักษณะของสัญญาณการมอดูเลตเชิงขนาดแล้วจะเห็นได้ว่า ω_n ก็คือความถี่ของสัญญาณคลื่นพหุนั่นเอง

ทำการพิจารณา ด้วยการสมมุติให้สัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ เป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ โดยสัญญาณคลื่นรูปไซน์อินพุตที่อยู่ในรูปทั่วไปและป้อนเข้าวงจร ณ เวลา τ ใดๆ ดังรูปที่ 3.8 (a) เขียนได้เป็น

$$v_i(\tau) = V_p \cos \omega_m \tau \quad (3.163)$$

V_p และ ω_m เป็นค่าแอมพลิจูดและความถี่ของสัญญาณอินพุตคลื่นรูปไซน์ หรืออีกนัยหนึ่ง ถ้าพิจารณากันในลักษณะของการมอดูเลตสัญญาณ ความถี่ ω_m ก็คือความถี่ของสัญญาณการมอดูเลต และจากสมการที่ (3.159) ทำการหาค่าผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ โดยอาศัยวิธีการคาดเดาคำตอบ ทั้งนี้จะสมมติให้

$$v_{of}(\tau) = A \cos \omega_m \tau + B \sin \omega_m \tau \quad (3.164)$$

ทำการหาค่าอนุพันธ์ของ $v_{of}(\tau)$ ดังนี้

$$v'_{of}(\tau) = -\omega_m A \sin \omega_m \tau + \omega_m B \cos \omega_m \tau$$

และ
$$v''_{of}(\tau) = -\omega_m^2 A \cos \omega_m \tau - \omega_m^2 B \sin \omega_m \tau$$

แทนค่า $v_{of}(\tau)$, $v''_{of}(\tau)$ และ $v_i(\tau)$ ลงในสมการที่ (3.159) แล้วจัดสมการใหม่จะได้

$$\begin{aligned} (1 - R^2 C^2 \omega_m^2) A \cos \omega_m \tau + (1 - R^2 C^2 \omega_m^2) B \sin \omega_m \tau \\ = V_p \cos \omega_m \tau \end{aligned} \quad (3.165)$$

เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์พจน์ต่อพจน์ระหว่างสมการด้านซ้ายมือกับด้านขวามือของสมการที่ (3.165) จะได้

$$\begin{aligned} (1 - R^2 C^2 \omega_m^2) A &= V_p \\ A &= V_p / (1 - R^2 C^2 \omega_m^2) \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} (1 - R^2 C^2 \omega_m^2) B &= 0 \\ B &= 0 \end{aligned}$$

ทำการแทนค่า A และ B กลับลงไปในสมการที่ (3.164) แล้วผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ จะมีค่าเป็น

$$v_{of}(\tau) = \left(\frac{V_p}{1 - R^2 C^2 \omega_m^2} \right) \cos \omega_m \tau \quad (3.166)$$

ตัวส่วนของสมการที่ (3.166) สามารถแสดงให้อยู่ในอีกรูปแบบหนึ่งได้ คือ

$$1 - R^2 C^2 \omega_m^2 = 1 - \frac{\omega_m^2}{(1/RC)^2} = 1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_n^2}$$

ดังนั้นถ้าให้ $\omega_n \gg \omega_m$ แล้วจะเห็นได้ว่าค่าอัตราส่วนของ $\frac{\omega_m^2}{\omega_n^2} \ll 1$ จะเป็นผลให้

พจน์ของ $1 - R^2 C^2 \omega_m^2$ มีค่าเป็น

$$1 - R^2 C^2 \omega_m^2 = 1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_n^2} \simeq 1 \quad (3.167)$$

เพราะฉะนั้น ผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ จากสมการที่ (3.166) เขียนใหม่ได้เป็น

$$v_{of}(\tau) = V_p \cos \omega_m \tau = v_i(\tau) \quad (3.168)$$

จากสมการที่ (3.168) จะเห็นได้ว่าสำหรับเงื่อนไขที่ว่าค่าความถี่ของสัญญาณคลื่นพาห์ ω_n มีค่ามากกว่าความถี่ของสัญญาณการมอดูเลต ω_m มาก ๆ ($\omega_n \gg \omega_m$) ซึ่งโดยปกติแล้ว ความถี่คลื่นพาห์ ω_n จะมีค่าสูงกว่าค่าความถี่ที่เป็นองค์ประกอบสูงสุดของสัญญาณข่าวสาร $v_i(\tau)$ มาก ดังนั้นผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ จึงประมาณได้ว่าเท่ากับสัญญาณการมอดูเลตอินพุต $v_i(\tau)$ โดยการแทนสมการที่ (3.168) ลงในสมการที่ (3.162) ซึ่งเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ของวงจร แล้วผลตอบสนองบริบูรณ์จะเขียนได้ใหม่เป็น

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_i(\tau)) \cos \omega_n t + v_i(\tau) \quad (3.169)$$

จากสมการที่ (3.169) จะพบว่าพจน์แรกด้านขวามือของสมการจะเป็นการมอดูเลตเชิงแอมพลิจูด โดยที่สัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ หรือผลตอบสนองบังคับ หรือก็คือฟังก์ชันบังคับอินพุต ซึ่งสำหรับสถานการณ์นี้ก็คือสัญญาณตัวเดียวกัน แต่ที่จริงแล้วก็คือ สัญญาณข่าวสาร

(information signal) ในขณะที่ผลตอบสนองธรรมชาติไขนุชอยคอด $\cos(\omega_n t)$ ก็คือ สัญญาณคลื่นพาห้

ในทางปฏิบัติสำหรับการมอดูเลตเชิงขนาดของสถานการณนี้ พจน์ที่ 2 ด้านขวามือของสมการที่ (3.169) จะถูกกำจัดหรือกรองออกไปเพื่อให้เหลือแต่เอาต์พุตที่เป็นการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดเท่านั้น

นอกจากนี้แล้วความสามารถในการกู้เอาสัญญาณข่าวสารกลับคืนมาด้วยตัวตรวจจับกรอบสัญญาณ (envelope detector) เราจะพบว่า $|v_o(0, \tau) - v_i(\tau)| = |\pm V_{SAT} - v_i(\tau)|$ จะต้องมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอ สำหรับในกรณีค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $v_o(0, \tau)$ นั้นจะขึ้นอยู่กับสถานะเริ่มต้นของวงจรทำให้เราควบคุมได้ไม่ถ่วงนั้ แต่อย่างไรก็ตาม $|v_o(0, \tau)| = |V_{SAT}|$ ซึ่งจะมีค่ามากกว่า $|v_i(\tau)|$ เสมอ ซึ่งในเชิงความหมายของค่าดัชนีการมอดูเลต (modulation index) เราสามารถปรับค่าดัชนีการมอดูเลตได้จากค่าแอมพลิจูดสูงสุดของสัญญาณข่าวสาร $v_i(\tau)$ เช่น ถ้าเรากำหนดให้สัญญาณการมอดูเลต $v_i(\tau)$ เป็นสัญญาณคลื่นไซน์ดังสมการที่ (3.163) แล้วละก็สัญญาณเอาต์พุตที่ได้จะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} v_o(t, \tau) &= (\pm V_{SAT} - V_p \cos \omega_m \tau) \cos \omega_n t + V_p \cos \omega_m \tau \\ &= \pm V_{SAT} \left[1 - \frac{V_p}{(\pm V_{SAT})} \cos \omega_m \tau \right] \cos \omega_n t + V_p \cos \omega_m \tau \end{aligned} \quad (3.170)$$

กำหนดให้

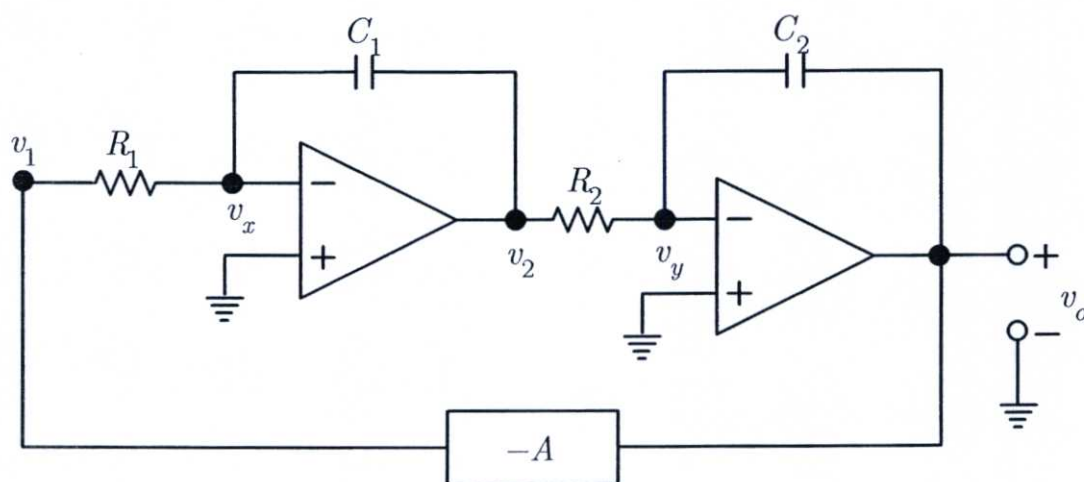
$$\mu = V_p / \pm V_{SAT} \quad (3.171)$$

μ คือ ค่าดัชนีการมอดูเลต ซึ่งเราจะเห็นได้ว่าสัญญาณข่าวสาร $v_i(\tau)$ จะมีค่าแอมพลิจูด V_p สูงสุดได้ไม่เกินค่าแรงดันไฟฟ้าอิมตัว ($\pm V_{SAT}$) ของออป-แอมป์ในวงจร ดังนั้นค่าดัชนีการมอดูเลตจึงมีค่า $\mu \leq 1$ และจะมีค่ามากหรือน้อยก็ขึ้นอยู่กับค่าแอมพลิจูดสูงสุดของสัญญาณข่าวสาร $v_i(\tau)$

3.9 การวิเคราะห์โครงสร้างควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ความถี่ย่านกว้าง

ควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เป็นวงจรไขว่ขอยคอลลออสซิลเลเตอร์ชนิดหนึ่งที่นิยมใช้กันมาก และก็เป็นที่ยอมรับมานานแล้วว่าออสซิลเลเตอร์ชนิดนี้สามารถให้ความถี่เอาต์พุตย่านกว้างได้ดี แต่ยังไม่มียุคความงานวิจัยไหนเลยที่จะพยายามอธิบายว่า เพราะเหตุใดควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์จึงสามารถผลิตความถี่ย่านกว้างได้โดยแอมพลิฟิเคชันไม่เปลี่ยนแปลง สำหรับในหัวข้อนี้จะได้ทำการวิเคราะห์เพื่อพิจารณาโครงสร้างของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ว่าเพราะเหตุใดจึงมีคุณสมบัติเช่นนั้น

สำหรับหัวข้อนี้จะใช้แบบจำลองสมการอนุพันธ์อธิบายพฤติกรรมของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ โดยวงจรมีบล็อกไดอะแกรมอย่างง่าย ๆ แสดงดังรูปที่ 3.9



รูปที่ 3.9 โครงสร้างวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์

จากการสังเกตวงจรในรูปที่ 3.9 ระหว่างแรงดันไฟฟ้าที่จุดรวม v_1 และ v_0 จะได้ความสัมพันธ์ของตัวขยายเป็น

$$v_1 = -A v_0 \quad (3.172)$$

ใช้สมการจุดรวมที่จุดรวม v_x

$$\frac{v_x}{R_1} + C_1 \frac{d(v_x - v_2)}{dt} - \frac{v_1}{R} = 0$$

เนื่องจาก $v_x = 0$ (กราวนด์เสมือน) จะได้

$$C_1 \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_1}{R_1} = 0 \quad (3.173)$$

ใช้สมการจตุรรวมที่จตุรรวม v_y

$$\frac{v_y}{R_2} + C_2 \frac{d(v_y - v_o)}{dt} - \frac{v_2}{R_2} = 0$$

และ v_y เป็นกราวนด์เสมือน $v_y = 0$ จะได้

$$C_2 \frac{dv_o}{dt} + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

$$v_2 = -R_2 C_2 \frac{dv_o}{dt} \quad (3.174)$$

แทนสมการที่ (3.174) ลงในสมการที่ (3.173) จะได้

$$-R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} + \frac{v_1}{R_1} = 0$$

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} - v_1 = 0 \quad (3.175)$$

ทำการแทนค่า v_1 จากสมการที่ (3.172) ลงในสมการที่ (3.175)

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_o}{dt^2} + A v_o = 0 \quad (3.176)$$

สมการคุณลักษณะเฉพาะของสมการที่ (3.176) จะเขียนได้เป็น

$$R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + A = 0$$

กำหนดให้ $R_o = R_1 R_2$ และ $C_o = C_1 C_2$

$$s^2 + A/R_o C_o = 0$$

จะได้ค่ารากสมการ s_1 และ s_2 เป็น

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \sigma \pm j\omega \\ &= 0 \pm j\sqrt{\frac{A}{R_o C_o}} \end{aligned}$$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า ค่าสัมประสิทธิ์การหน่วง $\sigma = 0$ และความถี่เรเดียนธรรมชาติ $\omega = \sqrt{\frac{A}{R_o C_o}}$ ดังนั้นจะได้ผลเฉลยจากสมการอนุพันธ์เอกพันธ์ (3.175) ซึ่งอยู่ในรูปของผลตอบสนองธรรมชาติ $v_{on}(t)$ คือ

$$v_{on}(t) = B_1 e^{j(\sqrt{A/R_o C_o})t} + B_2 e^{-j(\sqrt{A/R_o C_o})t} \quad (3.177)$$

โดยอาศัยกรณีที่ค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 เป็นค่าจริงที่เท่ากันคือ $B_1 = B_2 = B$ ซึ่งในทางปฏิบัติและในโลกของความเป็นจริงแล้วค่าสัมประสิทธิ์ B_1 และ B_2 เป็นค่าที่เกิดจากเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งถ้าค่า B_1 และ B_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แสดงว่าค่าเงื่อนไขเริ่มต้นจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย และถ้าค่า $B_1 = B_2 = B$ เป็นค่าจริง ก็จะเกิดจากเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นจำนวนจริง ซึ่งในทางปฏิบัติเราพบว่าค่าเงื่อนไขเริ่มต้นจะเป็นค่าจำนวนจริงเท่านั้น ดังนั้น

$$\begin{aligned} v_{on}(t) &= B e^{j(\sqrt{A/R_o C_o})t} + B e^{-j(\sqrt{A/R_o C_o})t} \\ &= B(e^{j(\sqrt{A/R_o C_o})t} + e^{-j(\sqrt{A/R_o C_o})t}) \end{aligned}$$

นำเอา 2 คูณทั้งเศษและส่วนจะได้

$$v_{on}(t) = 2B \left(\frac{e^{j(\sqrt{A/R_o C_o})t} + e^{-j(\sqrt{A/R_o C_o})t}}{2} \right)$$

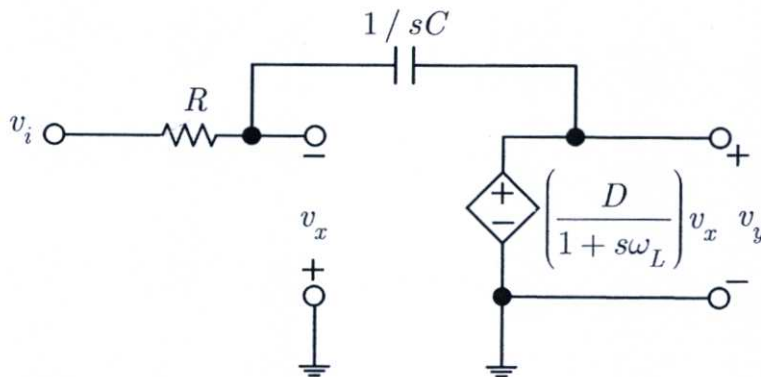
เพราะฉะนั้น

$$v_{on}(t) = 2B \cos(\sqrt{A/R_o C_o} t) \quad (3.178)$$

จากผลเฉลยดังกล่าวสามารถสรุปได้ว่า ถ้าอุปกรณ์แอกทีฟในวงจรเป็นออป-แอมป์เชิงอุดมคติแล้วจะพบว่า ความถี่ของสัญญาณเอาต์พุต $v_{on}(t)$ จะเท่ากับ $\sqrt{A/R_o C_o}$ ซึ่งสามารถปรับเปลี่ยนค่าความถี่ได้โดย เปลี่ยนค่า A หรือ $R_o C_o$ โดยที่จะไม่ส่งผลกระทบต่อเงื่อนไขของการออสซิลเลต ทำให้ออสซิลเลเตอร์ชนิดนี้สามารถผลิตสัญญาณที่มีความถี่ในย่านกว้างได้โดยไม่ต้องปรับเปลี่ยนเงื่อนไขของการออสซิลเลต และมีแอมพลิจูดคงที่ ถ้าอุปกรณ์แอกทีฟเป็นอุดมคติ ดังนั้นข้อจำกัดของออสซิลเลเตอร์แบบนี้ จึงขึ้นอยู่กับคุณสมบัติของอุปกรณ์แอกทีฟ

การวิเคราะห์ย่านความถี่

จากหัวข้อที่ 2.5 เรื่องออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติ ในหัวข้อนี้จะได้วิเคราะห์ห้วงจรเพื่อคุณูปการทางความถี่ ด้วยการแทนแบบจำลองออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติลงไปในวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ ที่ซึ่งแบบจำลองมีอัตราขยายรูปเปิดเป็น $\frac{A_{OL}}{1 + s/\omega_0} = \frac{D}{1 + \omega_L s}$ โดยที่ $D = A_{OL}$ คือ อัตราขยายรูปเปิดไฟตรง และ $\omega_L = 1/\omega_0$ คือ ส่วนกลับของความถี่ตัดผ่าน (inverse cut-off frequency) และวิเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรอินทิเกรเตอร์ ซึ่งวงจรอินทิเกรเตอร์ ที่ถูกแทนด้วยแบบจำลองออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติแสดงดังในรูปที่ 3.10 [20]



รูปที่ 3.10 โครงสร้างวงจรอินทิเกรเตอร์ที่แทนแบบจำลองออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติ

จากวงจรในรูปที่ 3.10 จะได้ว่า

$$v_y = \left(\frac{D}{1 + \omega_L s} \right) v_x$$

แล้ว

$$v_x = \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) v_y \quad (3.179)$$

ใช้สมการจตุรรมที่จตุรรม v_x

$$-\left(\frac{1}{R} + sC \right) v_x - \frac{v_i}{R} - sC v_y = 0 \quad (3.180)$$

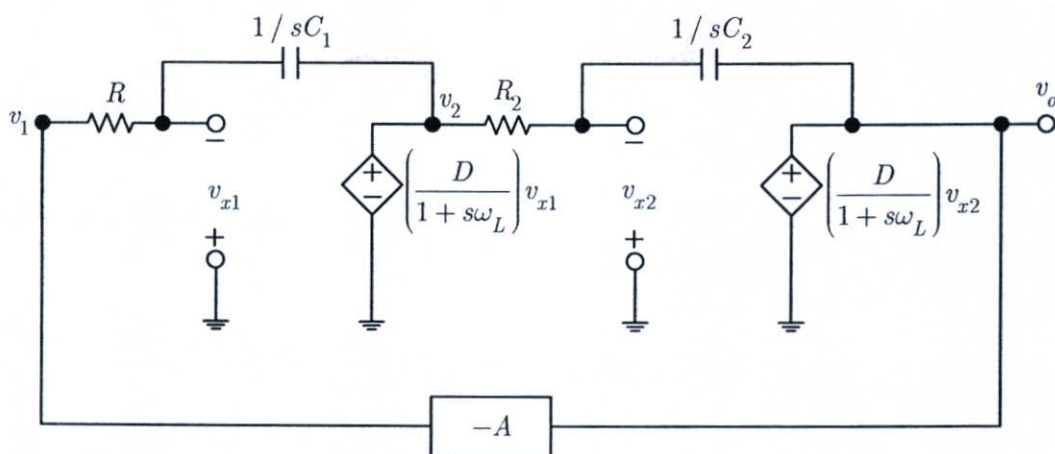
แทนค่า v_x จากสมการที่ (3.179) ลงในสมการที่ (3.180)

$$\left[-\left(\frac{1 + RCs}{R} \right) \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) - sC \right] v_y - \frac{v_i}{R} = 0$$

จัดสมการใหม่ จะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น

$$\frac{v_i}{v_y} = -R \left[\left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left(\frac{1 + RCs}{R} \right) + sC \right] \quad (3.181)$$

สมการที่ (3.181) เป็นค่าฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวอินทิเกรเตอร์ ดังนั้นเมื่อแทนแบบจำลองของออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติลงไปในรูปที่ 3.9 จะได้วงจรถอควอราเจอร์ ออสซิลเลเตอร์แสดงดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 วงจรสมมูลทอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่แทนแบบจำลองออป-แอมป์ที่ไม่เป็นอุดมคติ

และทำการวิเคราะห์หาฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรทอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ ด้วยการแทนฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวอินทิเกรเตอร์ลงไปและจากรูปที่ 3.11 จะได้ว่า

$$v_1 = -R_1 \left[\left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left(\frac{1 + sR_1 C_1}{R_1} \right) + sC_1 \right] v_2 \quad (3.182)$$

$$v_2 = -R_2 \left[\left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left(\frac{1 + sR_2 C_2}{R_2} \right) + sC_2 \right] v_o \quad (3.183)$$

$$v_1 = -A v_o \quad (3.184)$$

แทนสมการที่ (3.183) และ (3.184) ลงในสมการที่ (3.182) จะได้

$$-A = R_1 R_2 \left[\left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left(\frac{1 + R_1 C_1 s}{R_1} \right) + C_1 s \right] \left[\left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left(\frac{1 + R_2 C_2 s}{R_2} \right) + C_2 s \right]$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$-\frac{A}{R_1 R_2} = C_1 C_2 s^2 + \left[C_1 \left(\frac{1 + R_2 C_2 s}{R_2} \right) + C_2 \left(\frac{1 + R_1 C_1 s}{R_1} \right) \right] \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) s + \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right)^2 \left(\frac{1 + R_1 C_1 s}{R_1} \right) \left(\frac{1 + R_2 C_2 s}{R_2} \right) \quad (3.185)$$

ถ้า D ซึ่งเป็นอัตราขยายรูปเปิดไฟตรงมีค่ามากแล้ว ค่า D^2 ยิ่งมีค่ามาก ๆ ยิ่งขึ้น พิจารณาพจน์สุดท้ายด้านขวามือของสมการที่ (3.185) จึงประมาณได้ว่ามีค่าน้อยมาก ๆ จึงลดรูปสมการที่ (3.185) ได้เป็น

$$-\frac{A}{R_1 R_2} = C_1 C_2 s^2 + \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left[C_1 \left(\frac{1}{R_2} + C_2 s \right) + C_2 \left(\frac{1}{R_1} + C_1 s \right) \right] s \quad (3.186)$$

จากสมการที่ (3.186) ในกรณีที่ R_1, R_2 และ $\omega_L s$ มีค่ามากกว่าหนึ่งมาก ๆ แล้ว $1/R_1, 1/R_2$ จะประมาณได้ว่ามีค่าเท่ากับศูนย์ และ $(1 + \omega_L s) \approx \omega_L s$ ทำให้ได้

$$-\frac{A}{R_1 R_2} = C_1 C_2 s^2 + (\omega_L s / D)(C_1 C_2 s + C_1 C_2 s)s$$

นำเอา $1 / C_1 C_2$ คูณตลอดสมการ

$$-\frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} = s^2 + \frac{2\omega_L s^3}{D}$$

$$\frac{2\omega_L}{D} s^3 + s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0$$

นำเอา $\frac{D}{2\omega_L}$ คูณตลอดสมการจะได้

$$s^3 + \frac{D}{2\omega_L} s^2 + \frac{AD}{2R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_L} = 0 \quad (3.187)$$

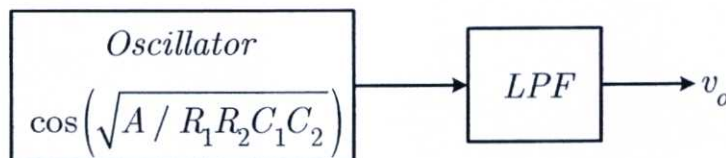
สมการที่ (3.187) เขียนในอีกรูปแบบหนึ่งได้ดังสมการที่ (3.188)

$$s^3 + \frac{D}{2\omega_L} s^2 + \frac{AD}{2R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_L} = \left(s + \frac{D}{2\omega_L} \right) \left(s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) - s \left(\frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) = 0 \quad (3.188)$$

พิจารณาสมการที่ (3.188) จะเห็นได้ว่า ทางด้านขวามือของสมการ ผลคูณของ 2 พจน์แรก จะมีค่ามากกว่าพจน์หลัง ในกรณีนี้พจน์หลังจึงสามารถตัดออกไปจากสมการนี้ได้ดังนั้น

$$s^3 + \frac{D}{2\omega_L} s^2 + \frac{AD}{2R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_L} \simeq \left(s + \frac{D}{2\omega_L} \right) \left(s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) \quad (3.189)$$

พิจารณาสมการที่ (3.189) จะพบว่าพจน์ $\left(s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right)$ คือ พจน์ในลักษณะของสมการออสซิลเลตอรี ซึ่งมีพฤติกรรมทางความถี่เป็นไปในลักษณะของตัวกรองความถี่เฉพาะย่านผ่าน (BPF) และ $\left(s + \frac{D}{2\omega_L} \right)$ เป็นพจน์ที่ให้ผลตอบสนองในลักษณะของการค่อย ๆ ลดลงตามฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล หรือก็คือ decay term ซึ่งมีพฤติกรรมทางความถี่เป็นไปในลักษณะของตัวกรองความถี่ต่ำผ่าน (LPF) ดังนั้น เมื่อพจน์ที่เป็นออสซิลเลตอรี ถูกกระตุ้นให้เกิดเอาต์พุตเป็นสัญญาณ ไซน์ซอชคอลลด้วยเงื่อนไขเริ่มต้นแล้ว ระบบจะมีพฤติกรรมเหมือนกันกับแหล่งกำเนิดคลื่นไซน์ต่อกับ LPF ดังรูปที่ 3.12 และจากพจน์ $s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2}$ จะพบว่าสัญญาณออสซิลเลตที่เอาต์พุตจะมีความถี่เรเดียนธรรมชาติ $\omega = \sqrt{A / R_1 R_2 C_1 C_2}$ เรเดียน/วินาที



รูปที่ 3.12 ระบบที่สมมูลกับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ ขณะให้กำเนิดสัญญาณออสซิลเลต

ในขณะที่ย่านความกว้างของความถี่ที่ออสซิลเลตนั้น (range of oscillated frequency) จะถูกจำกัดด้วยพฤติกรรมทางความถี่ของระบบที่เป็น LPF สำหรับระบบที่เป็นแอกทีฟ LPF ที่ซึ่งมีโครงสร้างอุปกรณ์เป็นแอกทีฟ เช่น ออป-แอมป์ที่ไม่ได้เป็นอุดมคติ นั้น ขณะที่อัตราขยายของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เป็นอัตราขยายลูบปิดนั้นก็หมายความว่าออป-แอมป์ที่ไม่ได้เป็นอุดมคติทำงานในลักษณะลูบปิด ซึ่งจะมี อัตราขยายน้อยกว่าอัตราขยายลูบเปิด ดังนั้น gain bandwidth product ของออป-แอมป์ ที่มีค่าความถี่ที่ให้อัตราขยายเท่ากับ 1 (unity gain frequency) สูง ๆ ก็จะส่งผลให้วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์สามารถให้กำเนิดสัญญาณ ไซน์ซอชคอลลเอาต์พุตได้ความถี่สูงมากขึ้นตามไปด้วย

บทที่ 4

ผลการเลียนแบบวงจรและผลการทดลอง

ในบทนี้จะเป็นการยืนยันผลการวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่จากการอาศัยแนวคิดการใช้เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลามาช่วยในการวิเคราะห์ เพื่อหาผลตอบสนองของบริบูรณ์ในรูปแบบปิดที่อยู่ในรูปทั่วไปของวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ด้วยการแสดงผลของการทดลองจากการปฏิบัติจริง ผลการทดลองจากการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ (PSPICE) และผลจากการคำนวณเชิงตัวเลขโดยโปรแกรม Matlab ของวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ ดังที่ได้ทำการวิเคราะห์หาผลตอบสนองของบริบูรณ์ไว้ในบทที่ 3 หัวข้อการประยุกต์ใช้งาน

4.1 ผลการทดลองจากการประยุกต์ใช้งานกับการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุต(ผลตอบสนองธรรมชาติ) ของวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ

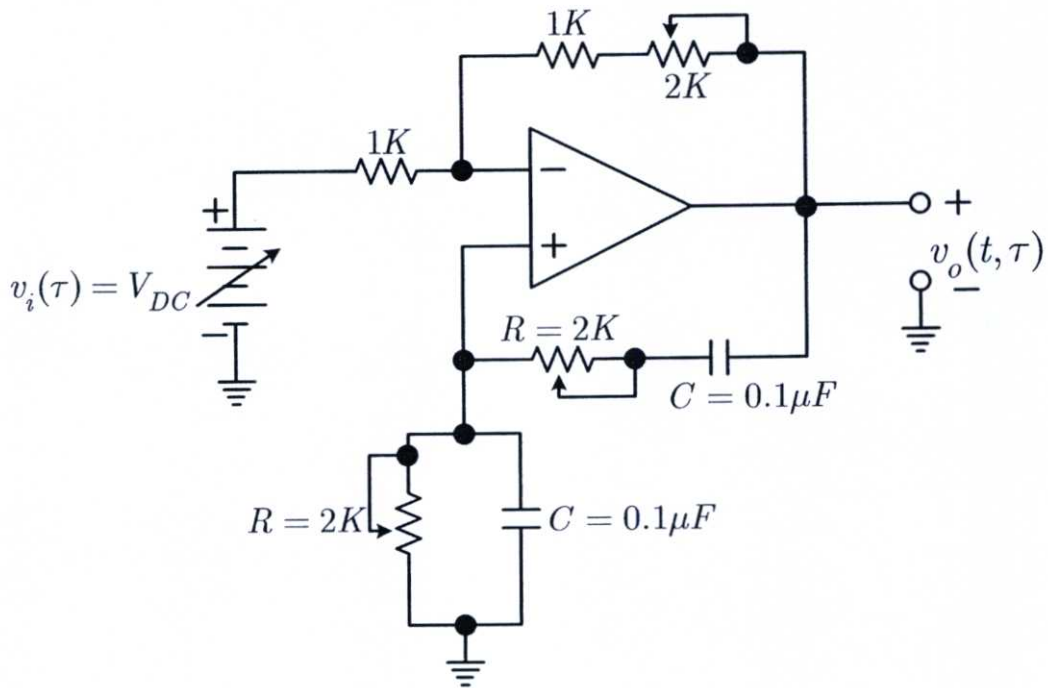
การทดลองการประยุกต์ใช้งานการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตด้วยผลตอบสนองบังคับเพื่อยืนยันผลการวิเคราะห์ที่นำเสนอใหม่ที่ทำให้ผลตอบสนองของบริบูรณ์ในรูปแบบปิดนั้นให้ผลในทางปฏิบัติสอดคล้องตรงกันกับทฤษฎี ซึ่งได้ทำการทดลองแบ่งออกเป็น 2 การทดลองคือ การควบคุมแอมพลิจูดกับสัญญาณไฟตรงอินพุต และการควบคุมแอมพลิจูดกับสัญญาณอินพุตที่มีลักษณะเป็นพลวัตต์

4.1.1 ผลการควบคุมแอมพลิจูดกับสัญญาณไฟตรงอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$

ในหัวข้อนี้จะเป็นการทดลองควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตกับสัญญาณไฟตรงอินพุตเพื่อตรวจสอบลักษณะความเป็นเชิงเส้นของการควบคุมแอมพลิจูด ในการทดลองได้ทำการต่อวงจรออสซิลเลเตอร์ชนิดต่าง ๆ คือ วงจรในโหมดแรงดันไฟฟ้าได้แก่ วงจรเวนบริดจ์ ออสซิลเลเตอร์ วงจรเล็อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ และวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ สำหรับวงจรในโหมดกระแสจะเป็นวงจรควอควาเจอร์ออสซิลเลเตอร์ ทั้งนี้ได้ทำการป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ เป็นสัญญาณไฟตรง V_{DC} โดยปรับเปลี่ยนค่าสัญญาณไฟตรง V_{DC} เป็นค่าต่าง ๆ ซึ่งผลการทดลองที่แสดงจะประกอบไปด้วย ผลการทดลองจากการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ และผลการทดลองจากการต่อวงจรจริง ที่ซึ่งได้ออกแบบให้วงจรทั้งหมดออสซิลเลตที่

ความถี่ 1 kHz ด้วยการใช้ออป-แอมป์ LF351 และได้ป้อนไฟเลี้ยงให้กับวงจรจากแหล่งจ่ายแรงดันไฟฟ้าที่ ± 9 โวลต์ สัญญาณเอาต์พุตที่แสดงในผลการทดลองจะเป็นการวัดสัญญาณที่เป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ ของวงจร

4.1.1.1 วงจรแวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์



รูปที่ 4.1 วงจรแวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$

จากวิธีการวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดด้วยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลาที่ได้นำเสนอในบทที่ 3 และได้ผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ ในรูปทั่วไปของวงจรแวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ เป็นดังสมการที่ (3.75)

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos(t / RC) + v_{of}(\tau)$$

และจากสมการความสัมพันธ์ของวงจรแวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ ในสมการที่ (3.71) กล่าวคือ

$$v_o''(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2C^2} = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2C^2} \right)$$

ด้วยเหตุที่สัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณไฟตรง $v_i(\tau) = V_{DC}$ เมื่อแทนค่าลงในสมการที่ (3.71) จะได้เป็น

$$v_o''(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2 C^2} = -2 \left(\frac{V_{DC}}{R^2 C^2} \right) \quad (4.1)$$

ทำการหาค่าผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ ด้วยการแทน $v_o(t, \tau) = v_{of}(\tau)$ ลงในสมการที่ (4.1)

$$v_{of}''(\tau) + \frac{v_{of}(\tau)}{R^2 C^2} = -2 \left(\frac{V_{DC}}{R^2 C^2} \right) \quad (4.2)$$

และสมมติให้ $v_{of}(\tau) = K$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ แล้วแทนลงไปในสมการที่ (4.2) จะได้

$$K = -2V_{DC}$$

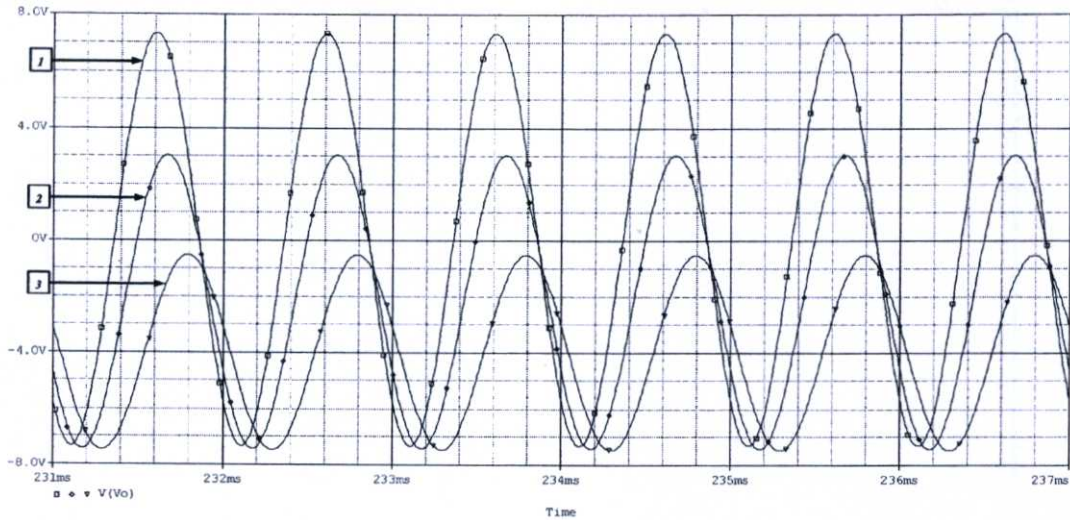
เพราะฉะนั้น

$$v_{of}(\tau) = K = -2V_{DC}$$

แทนค่า $v_{of}(\tau)$ กลับลงไปในสมการที่ (3.75) เป็นผลให้ผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ ของ วงจรเวเนบรีคัจออสซิลเลเตอร์เป็น

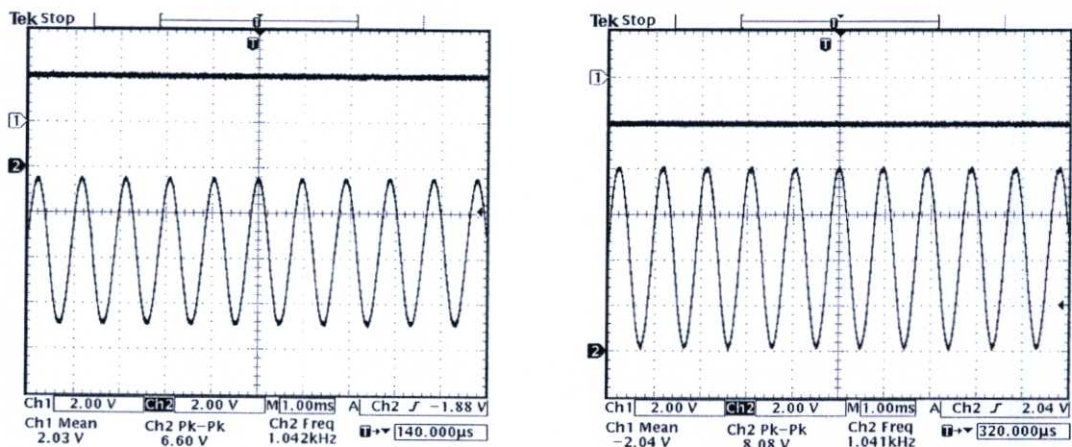
$$\begin{aligned} v_o(t, \tau) &= (\pm V_{SAT} + 2V_{DC}) \cos(t / RC) - 2V_{DC} \\ &= \begin{cases} (2V_{DC} + V_{SAT}) \cos(t / RC) - 2V_{DC}, & V_{DC} < 0 \\ (2V_{DC} - V_{SAT}) \cos(t / RC) - 2V_{DC}, & V_{DC} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3)$$

ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีซีแสดงดังรูปที่ 4.2 ทั้งนี้ได้ทำการป้อนสัญญาณไฟตรงอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ ให้กับวงจรเวเนบรีคัจออสซิลเลเตอร์จำนวน 3 ค่าด้วยกันคือ ที่ 0, 1 และ 2 โวลต์ตามลำดับ

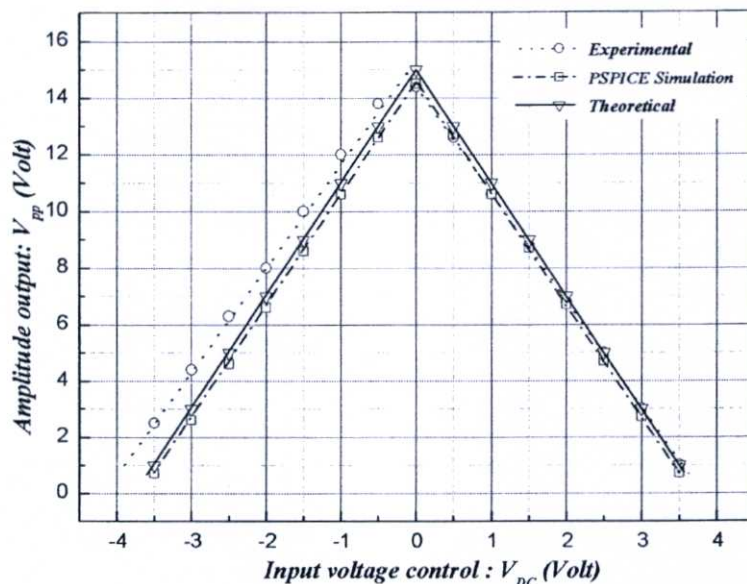


รูปที่ 4.2 ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีซีไปรษของวงจรเวเนบริดจ้ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นที่ 1, 2 และ 3 คือ ผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ ด้วยการป้อนสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ เป็น 0, 1 และ 2 โวลต์ $v_o(t, \tau)$ มีแอมพลิจูด V_{pp} เป็น 14.5, 10.5 และ 7 โวลต์ ตามลำดับ

ผลการทดลองจากการปฏิบัติด้วยการป้อนสัญญาณไฟตรงอินพุตเป็น ± 2 โวลต์ ให้กับวงจรตามลำดับ แสดงดังรูปที่ 4.3



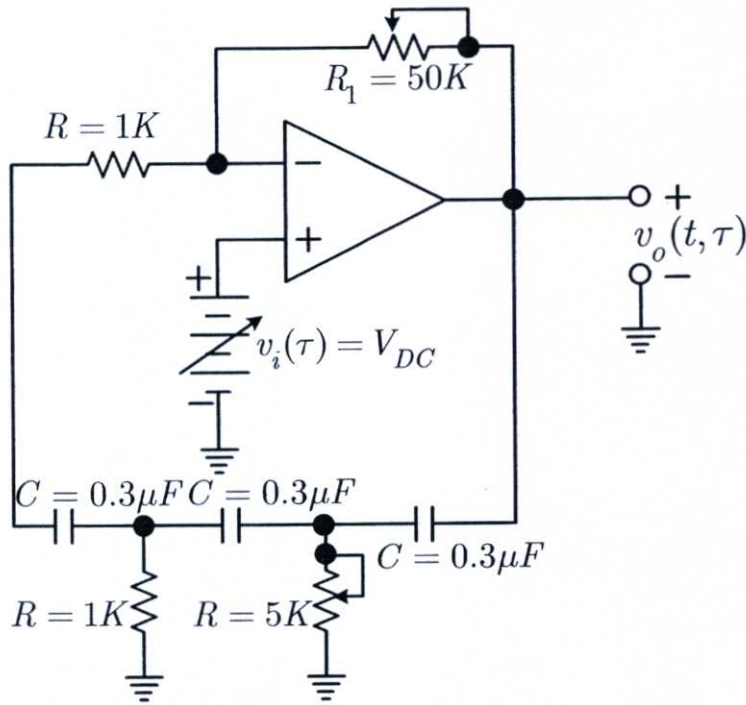
รูปที่ 4.3 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรเวเนบริดจ้ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นบน คือสัญญาณไฟตรงอินพุตขนาด ± 2 โวลต์ ตามลำดับ $Volt/Div. = 2 V$ และสัญญาณเส้นล่าง คือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ มีแอมพลิจูด V_{pp} เป็น 6.6 และ 8 โวลต์ ตามลำดับ $Volt/Div. = 2 V$ และ $Time/Div. = 1 ms$



รูปที่ 4.4 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตที่ได้จากผลการปฏิบัติจริง ผลการเลียนแบบ และผลจากทฤษฎี เมื่อได้ทำการปรับเปลี่ยนสัญญาณไฟตรงอินพุตเป็นค่าต่าง ๆ ที่ป้อนให้กับวงจรแอมพลิจูดออสซิลเลเตอร์ แกนแนวนอนเป็นแรงดันอินพุต มีหน่วยเป็น โวลต์ แกนแนวตั้งคือค่าแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตวัดเป็นแรงดันพีค-พีค มีหน่วยเป็น โวลต์

จากผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ และผลการทดลอง ดังรูปที่ 4.2 และ 4.3 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อได้ทำการเพิ่มค่าแรงดันไฟตรงอินพุตให้กับวงจร จะพบว่าแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตจะมีขนาดลดลง และจากกราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดดังรูปที่ 4.4 จะพบว่าค่าแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตให้ผลสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกันเป็นอย่างดีเมื่อได้ทำการเพิ่มและลดค่าแรงดันไฟตรงอินพุต ระหว่างผลการเลียนแบบวงจร ผลการทดลองจากการปฏิบัติจริง และผลจากทฤษฎี โดยมีลักษณะสอดคล้องและเป็นไปตามสมการผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตของวงจรแอมพลิจูดออสซิลเลเตอร์ (สมการที่ (4.3))

4.1.1.2 วงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์

รูปที่ 4.5 วงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$

จากสมการความสัมพันธ์ของวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ ซึ่งได้แสดงไว้ในสมการที่ (3.104) - (3.105) ของบทที่ 3 เมื่อแทนค่า $v_o(t, \tau) = v_{of}(\tau)$ เพื่อทำการหาค่าผลตอบสนอง บังคับ $v_{of}(\tau)$ อันเนื่องจากสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ ที่ป้อนเข้าสู่วงจรที่เวลา τ ใดๆ

$$30R^3C^3v_{of}'''(\tau) + 6R^2C^2v_{of}''(\tau) + 5RCv_{of}'(\tau) + v_{of}(\tau) = f(\tau)$$

$$\text{โดยที่ } f(\tau) = 30R^3C^3v_i'''(\tau) + 93R^2C^2v_i''(\tau) + 34RCv_i'(\tau) + v_i(\tau)$$

ด้วยเหตุที่ค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะให้ผลเป็นศูนย์ เมื่อได้แทนค่าสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ ลงไปในสมการที่ (3.105) แล้วสมการที่ (3.104) จะกลายเป็น

$$30R^3C^3v_{of}'''(\tau) + 6R^2C^2v_{of}''(\tau) + 5RCv_{of}'(\tau) + v_{of}(\tau) = V_{DC} \quad (4.4)$$

สมมติให้ $v_{of}(\tau) = K$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ ทำการแทนค่า $v_{of}(\tau)$ ลงไปในสมการที่ (4.4) แล้วผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ จะมีค่าเป็น

$$v_{of}(\tau) = K = V_{DC} \quad (4.5)$$

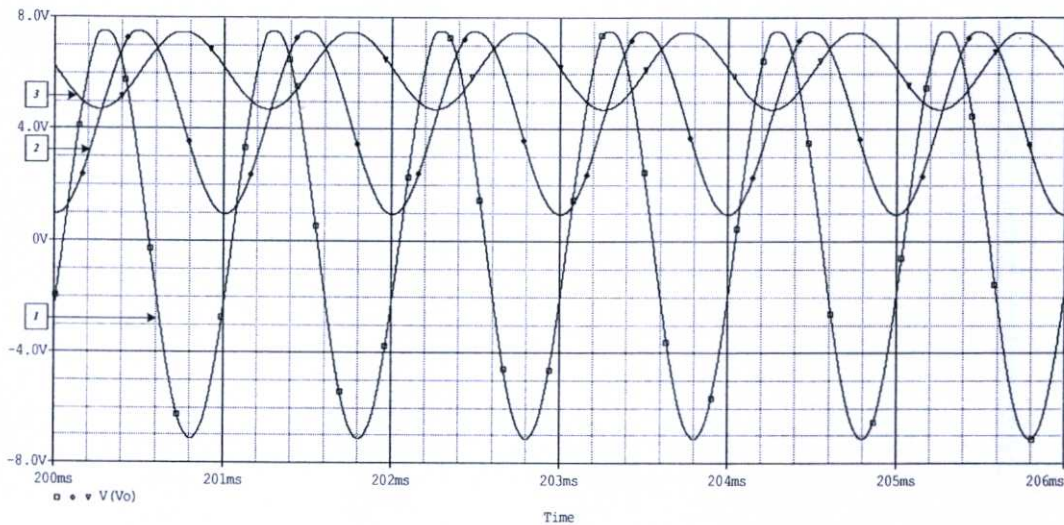
และจากสมการผลตอบสนองของบริบูรณ์ของวงจรเมื่อวงจรเข้าสู่สถานะคงตัว ณ ที่เวลา $t > 0$ ผลตอบสนองของบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ จะแสดงได้ดังสมการที่ (3.108) ของบทที่ 3 กล่าวคือ

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos(t/\sqrt{6RC}) + v_{of}(\tau)$$

เมื่อแทนค่า $v_{of}(\tau) = V_{DC}$ ลงในสมการที่ (3.108) เป็นผลให้ผลตอบสนองของบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ มีค่าเป็น

$$\begin{aligned} v_o(t, \tau) &= (\pm V_{SAT} - V_{DC}) \cos(t/\sqrt{6RC}) + V_{DC} \\ &= \begin{cases} (V_{DC} + V_{SAT}) \cos(t/\sqrt{6RC}) + V_{DC}, & V_{DC} < 0 \\ (V_{DC} - V_{SAT}) \cos(t/\sqrt{6RC}) + V_{DC}, & V_{DC} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

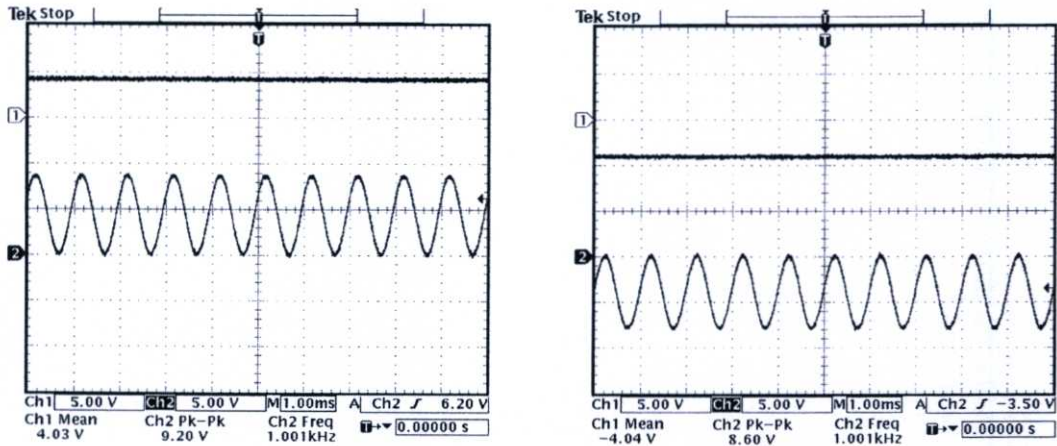
ผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีสไปซ์แสดงดังรูปที่ 4.6 ทั้งนี้ได้ทำการป้อนสัญญาณไฟตรงอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ ให้กับวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์จำนวน 3 ค่าด้วยกันคือ ที่ 0, 4 และ 6 โวลต์ตามลำดับ



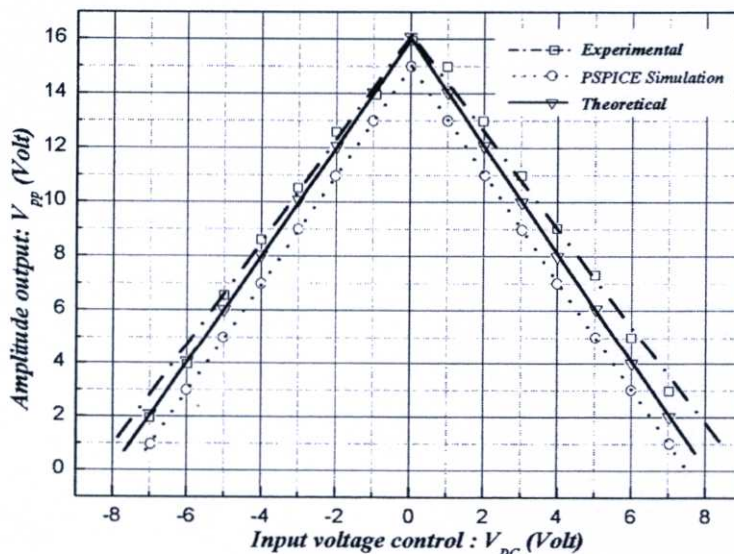
รูปที่ 4.6 ผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีสไปซ์ของวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นที่ 1, 2 และ 3 คือ ผลตอบสนองของบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ ด้วยการป้อน สัญญาณ

อินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ เป็น 0, 4 และ 6 โวลต์ $v_o(t, \tau)$ มีแอมพลิจูด V_{pp} เป็น 14.5, 6.5 และ 3 โวลต์ ตามลำดับ

ผลการทดลองจากการปฏิบัติด้วยการป้อนสัญญาณไฟตรงอินพุตเป็น ± 4 โวลต์ ให้กับ วงจรตามลำดับ แสดงดังรูปที่ 4.7



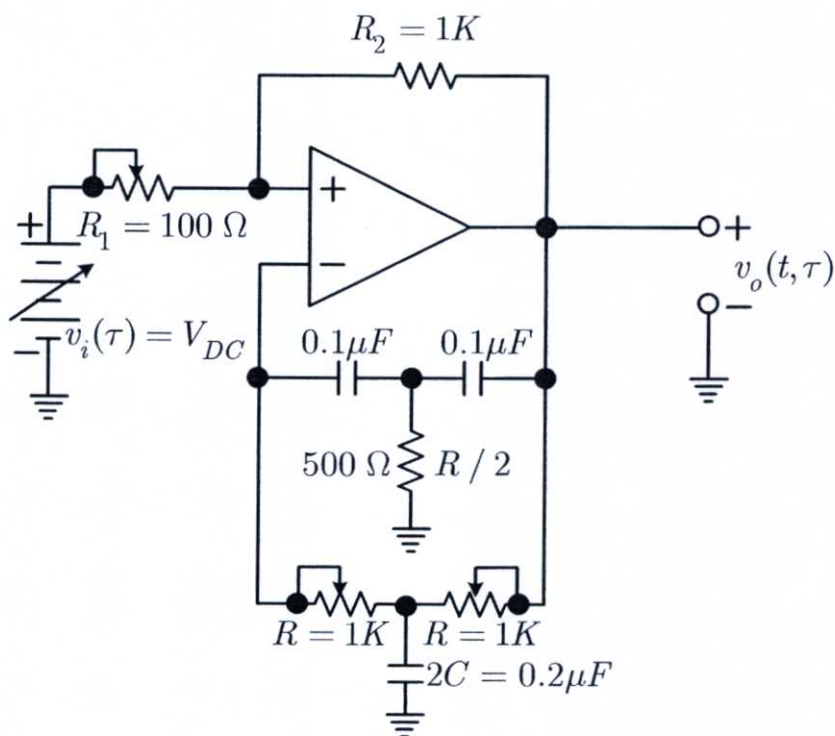
รูปที่ 4.7 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรถ่วงเฟสออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นบน คือสัญญาณไฟตรงอินพุตขนาด ± 4 โวลต์ ตามลำดับ $Volt/Div. = 5 V$ และสัญญาณเส้นล่าง คือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ มีแอมพลิจูด V_{pp} เป็น 9 และ 8 โวลต์ ตามลำดับ $Volt/Div. = 5 V$ และ $Time/Div. = 1 ms$



รูปที่ 4.8 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซนูซอยดอลเอาต์พุตที่ได้จากผลการปฏิบัติจริง ผลการเลียนแบบ และผลจากทฤษฎี เมื่อได้ทำการปรับเปลี่ยนสัญญาณไฟตรงอินพุตเป็นค่าต่าง ๆ ที่ป้อนให้กับวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ แกนแนวนอนเป็นแรงดันอินพุต มีหน่วยเป็น โวลต์ แกนแนวตั้งคือค่าแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซนูซอยดอลเอาต์พุตวัดเป็นแรงดันพีค-พีค มีหน่วยเป็น โวลต์

จากผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ และผลการทดลอง ดังรูปที่ 4.6 และ 4.7 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อได้ทำการเพิ่มค่าแรงดันไฟตรงอินพุตให้กับวงจร จะพบว่าแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตจะมีขนาดลดลง และจากกราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดดังรูปที่ 4.8 จะพบว่าค่าแอมพลิจูดของสัญญาณไซนูซอยดอลเอาต์พุตให้ผลสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกันเป็นอย่างดีเมื่อได้ทำการเพิ่มและลดค่าแรงดันไฟตรงอินพุต ระหว่างผลการเลียนแบบวงจร ผลการทดลองจากการปฏิบัติจริง และผลจากทฤษฎี โดยมีลักษณะสอดคล้องและเป็นไปตามสมการผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตของวงจรเลื่อน-เฟสออสซิลเลเตอร์ (สมการที่ (4.6))

4.1.1.3 วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์



รูปที่ 4.9 วงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$

จากสมการความสัมพันธ์ของวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ ที่แสดงไว้ในสมการที่ (3.121) คือ

$$v_o''(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2 C^2} = k_2 \left[v_i''(\tau) + \left(\frac{4}{RC} \right) v_i'(\tau) + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right]$$

แทนค่า $v_i(\tau) = V_{DC}$ และ $v_o(t, \tau) = v_{of}(\tau)$ ลงในสมการที่ (3.121) เพื่อหาผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ เมื่อ $k_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ และ $R_1 \simeq 0$ วงจรจึงจะออกสวิตลิตเลต ดังนั้น $k_2 = 1$ แล้วสมการที่ (3.121) จะกลายเป็น

$$v_{of}''(\tau) + \frac{v_{of}(\tau)}{R^2 C^2} = \frac{V_{DC}}{R^2 C^2} \quad (4.7)$$

สมมติให้ $v_{of}(\tau) = K$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ ทำการแทนค่า $v_{of}(\tau)$ ลงไปในสมการที่ (4.7) แล้วผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ จะมีค่าเป็น

$$v_{of}(\tau) = K = V_{DC} \quad (4.8)$$

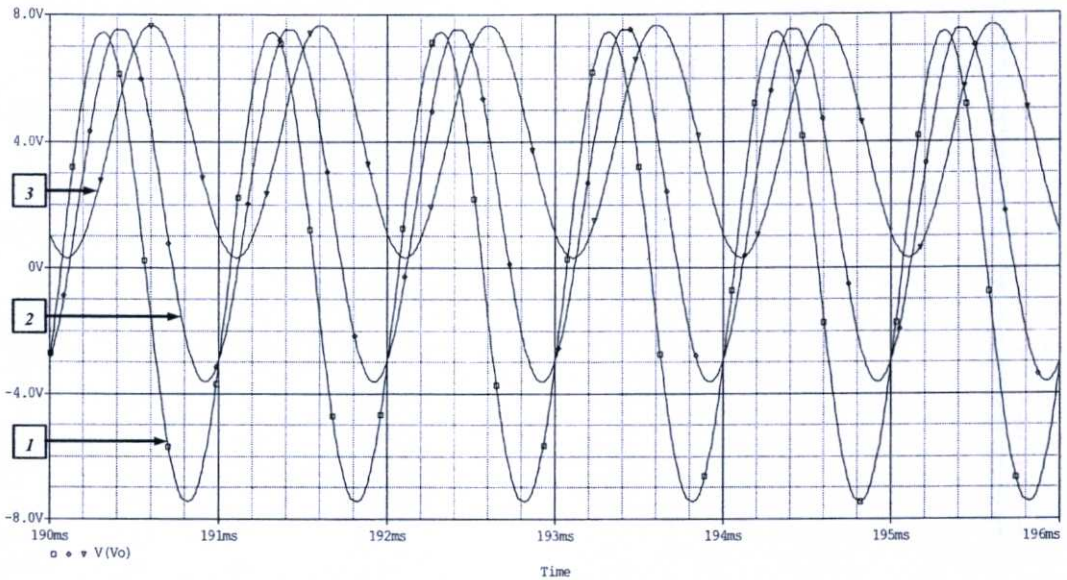
เนื่องจากผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ ของวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ในบทที่ 3 มีค่าเป็น

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos(t/RC) + v_{of}(\tau)$$

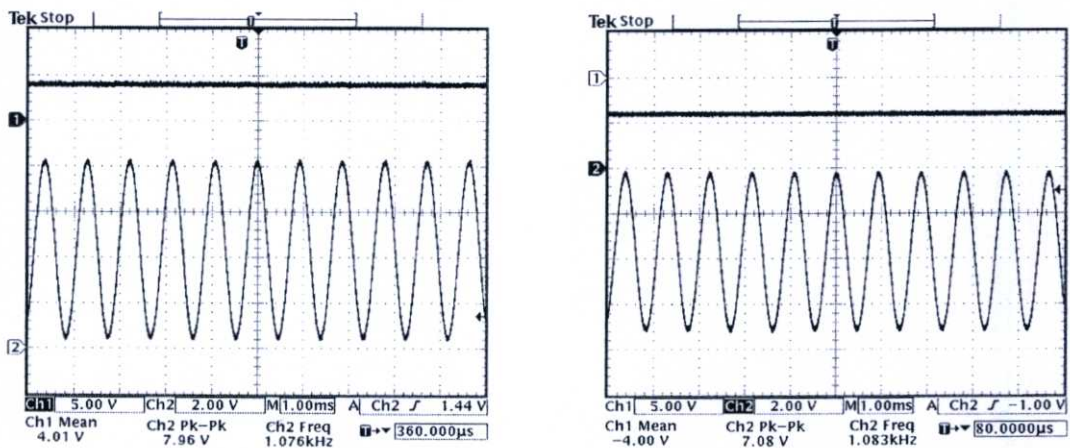
หลังจากแทนค่า $v_{of}(\tau)$ จากสมการที่ (4.8) ลงในสมการที่ (3.124) เป็นผลให้

$$\begin{aligned} v_o(t, \tau) &= (\pm V_{SAT} - V_{DC}) \cos(t/RC) + V_{DC} \\ &= \begin{cases} (V_{DC} + V_{SAT}) \cos(t/RC) + V_{DC}, & V_{DC} < 0 \\ (V_{DC} - V_{SAT}) \cos(t/RC) + V_{DC}, & V_{DC} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.9)$$

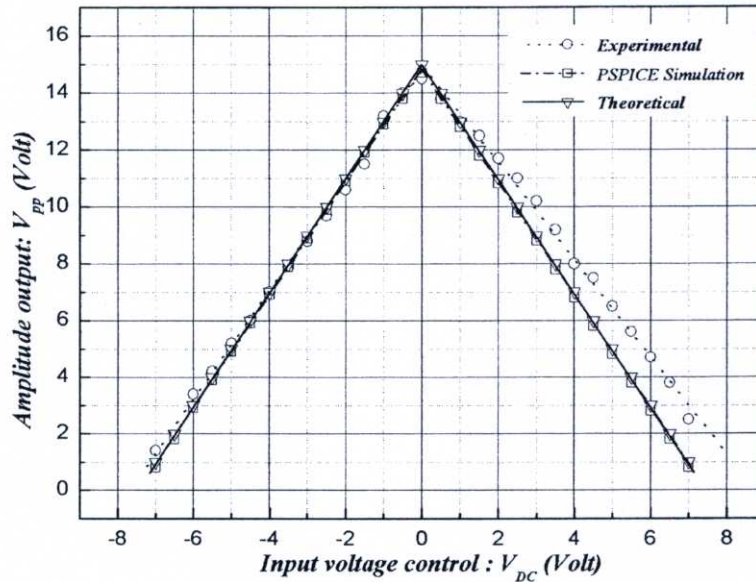
ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีซีแสดงดังรูปที่ 4.10 ทั้งนี้ได้ทำการป้อนสัญญาณไฟตรงอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ ให้กับวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์จำนวน 3 ค่าด้วยกันคือ ที่ 0, 2 และ 4 โวลต์ตามลำดับ



รูปที่ 4.10 ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีซีไปรษ์ของวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นที่ 1, 2 และ 3 คือ ผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ ด้วยการป้อน สัญญาณอินพุต $v_i(\tau) = V_{DC}$ เป็น 0, 2 และ 4 โวลต์ $v_o(t, \tau)$ มีแอมพลิจูด V_{pp} เป็น 14.5, 11 และ 7 โวลต์ ตามลำดับ



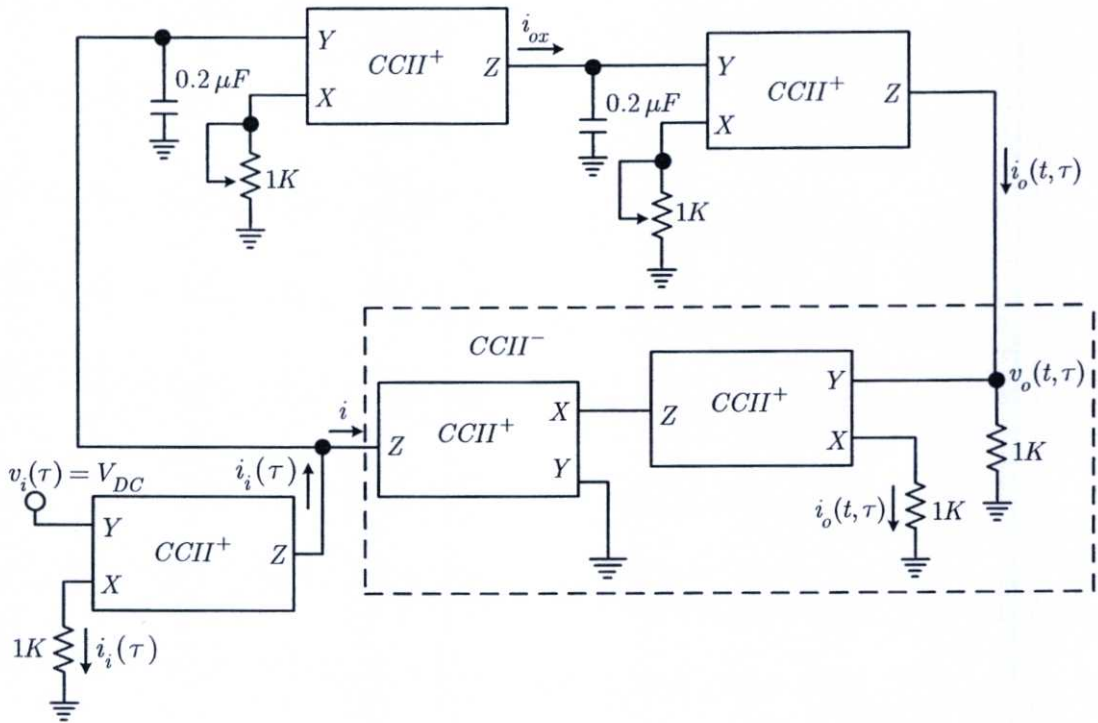
รูปที่ 4.11 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นบน คือสัญญาณไฟตรงอินพุตขนาด ± 4 โวลต์ ตามลำดับ $Volt/Div. = 5 V$ และสัญญาณเส้นล่างคือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ มีแอมพลิจูด V_{pp} เป็น 8 และ 7 โวลต์ ตามลำดับ $Volt/Div. = 2 V$ และ $Time/Div. = 1 ms$



รูปที่ 4.12 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตที่ได้จากการปฏิบัติจริง ผลการเลียนแบบ และผลจากทฤษฎี เมื่อได้ทำการปรับเปลี่ยนสัญญาณไฟตรงอินพุตเป็นค่าต่าง ๆ ที่ป้อนให้กับวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ แกนแนวนอนเป็นแรงดันอินพุต มีหน่วยเป็น โวลต์ แกนแนวตั้งคือค่าแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตวัดเป็นแรงดันพีค-พีค มีหน่วยเป็น โวลต์

จากผลการเลียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีสไปซ์ และผลการทดลอง ดังรูปที่ 4.10 และ 4.11 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อได้ทำการเพิ่มค่าแรงดันไฟตรงอินพุตให้กับวงจร จะพบว่าแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตจะมีขนาดลดลง และจากกราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดดังรูปที่ 4.12 จะพบว่าค่าแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตให้ผลสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกันเป็นอย่างดีเมื่อได้ทำการเพิ่มและลดค่าแรงดันไฟตรงอินพุตระหว่างผลการเลียนแบบวงจร ผลการทดลองจากการปฏิบัติจริง และผลจากทฤษฎี โดยมีลักษณะสอดคล้องและเป็นไปตามสมการผลตอบแทนของบริบูรณ์เอาต์พุตของวงจรทวิน-ทีออสซิลเลเตอร์ (สมการที่ (4.9))

4.1.1.4 วงจรควอดร่าเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส



รูปที่ 4.13 วงจรควอดร่าเจอร์ออสซิลเลเตอร์ใน โหมดกระแสที่มีสัญญาณอินพุต $i_i(\tau) = I_{DC}$

จากสมการความสัมพันธ์(3.137) ของวงจรควอดร่าเจอร์ออสซิลเลเตอร์ใน โหมดกระแสของบทที่ 3 ซึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตกับเอาต์พุตเป็น

$$i_o''(t, \tau) + i_o(t, \tau) / R^2 C^2 = i_i(\tau) / R^2 C^2$$

เมื่อแทนค่ากระแสอินพุต $i_i(\tau) = I_{DC}$ และ $i_o(t, \tau) = i_{of}(\tau)$ ลงในสมการที่ (3.137) เพื่อหาผลตอบสนองบังคับ $i_{of}(\tau)$ แล้วจะได้สมการความสัมพันธ์เป็น

$$i_{of}''(\tau) + i_{of}(\tau) / R^2 C^2 = I_{DC} / R^2 C^2 \quad (4.10)$$

สมมติให้ $i_{of}(\tau) = K$ เมื่อ K เป็นค่าคงที่ ทำการแทนค่า $i_{of}(\tau)$ ลงไปในสมการที่ (4.10) แล้วผลตอบสนองบังคับ $i_{of}(\tau)$ จะมีค่าเป็น

$$i_{of}(\tau) = K = I_{DC} \quad (4.11)$$

เนื่องจากผลตอบสนองบริบูรณ์ $i_o(t, \tau)$ ของวงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในบทที่ 3 มีสมการที่(3.143) เป็น

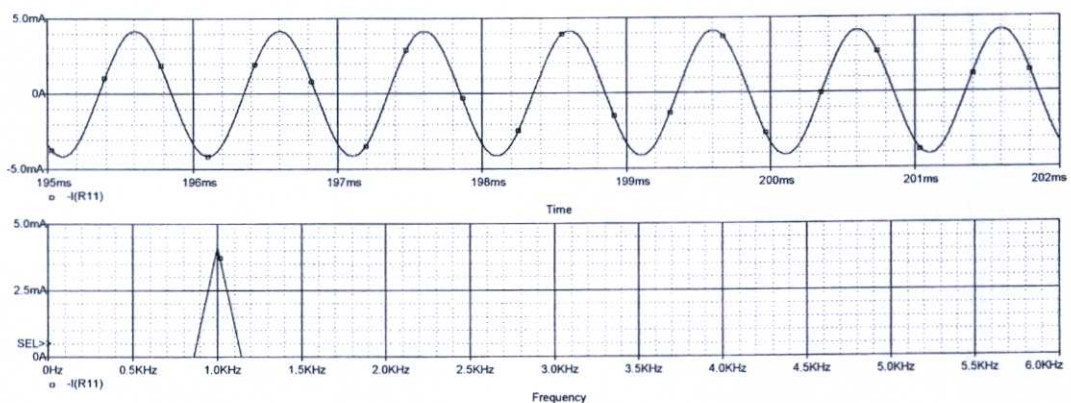
$$i_o(t, \tau) = (\pm I_{SAT} - i_{of}(\tau)) \cos(t/RC) + i_{of}(\tau)$$

หลังจากแทนค่า $i_{of}(\tau)$ จากสมการที่ (4.11) ลงในสมการที่ (3.143) เป็นผลให้

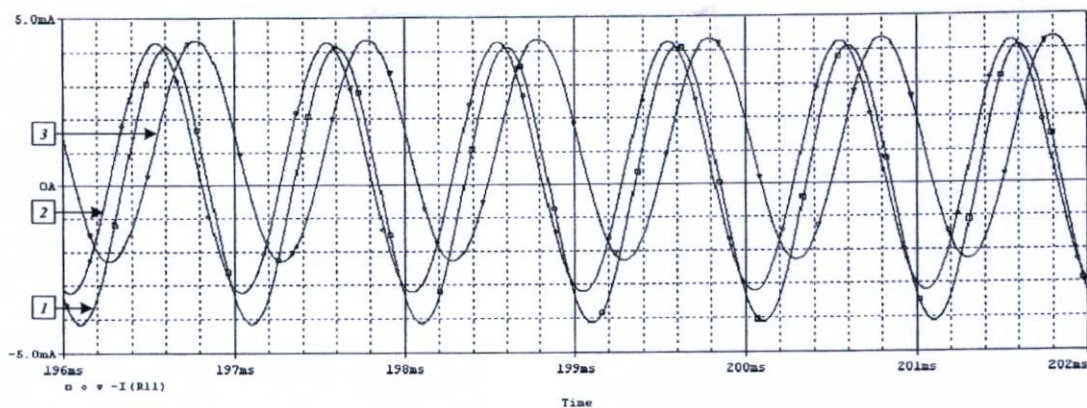
$$\begin{aligned} i_o(t, \tau) &= (\pm I_{SAT} - I_{DC}) \cos(t/RC) + I_{DC} \\ &= \begin{cases} (I_{DC} + I_{SAT}) \cos(t/RC) + I_{DC}, & I_{DC} < 0 \\ (I_{DC} - I_{SAT}) \cos(t/RC) + I_{DC}, & I_{DC} > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

ในการทดลองต่อวงจรจริง ได้ใช้ *CCII* ทุกตัวเบอร์ AD 844 ตามวงจรในรูปที่ 4.13 จ่ายไฟเลี้ยงวงจรไว้ที่ $\pm 9 V$ และออกแบบให้วงจรออสซิลเลตที่ความถี่เอาต์พุต $1 kHz$ ทั้งนี้ค่ากระแสอินพุต $i_i(\tau)$ และกระแสเอาต์พุต $i_o(t, \tau)$ ได้วัดจาก $i_i(\tau) = v_i(\tau) / 1 \times 10^3 A$ และ $i_o(t, \tau) = v_o(t, \tau) / 1 \times 10^3 A$ ตามลำดับ

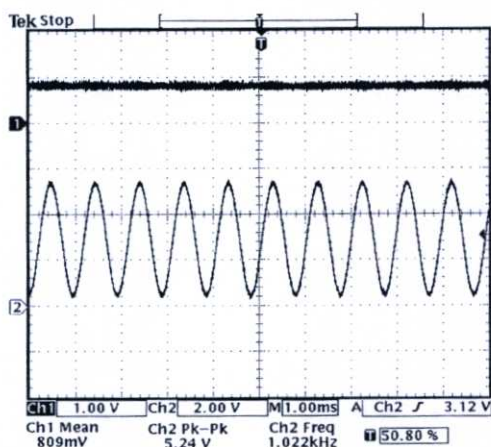
ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์แสดงคังรูปที่ 4.14 - 4.15 ทั้งนี้ได้ทำการป้อนสัญญาณกระแสไฟตรงอินพุต $i_i(\tau) = I_{DC} = v_i(\tau) / 1 \times 10^3$ ให้กับวงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์จำนวน 3 ค่าด้วยกันคือ ที่ 0, 0.5 และ 1.0 มิลลิแอมป์ตามลำดับ



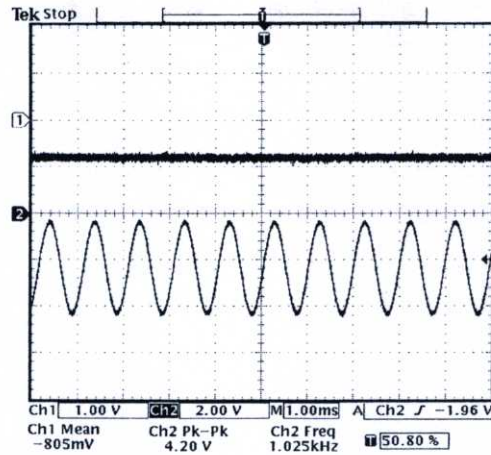
รูปที่ 4.14 ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ของวงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ โหมมกระแส เมื่อสัญญาณเส้นบนคือสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตผลตอบสนองบริบูรณ์ $i_o(t, \tau)$ ในขณะที่ยังไม่ได้ป้อนสัญญาณกระแสอินพุต ($i_i(\tau) = 0$) มีค่าแอมพลิจูด $I_{pp} = 8 mA$ สำหรับสัญญาณเส้นล่างคือสเปกตรัมองค์ประกอบความถี่ของสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตเส้นบนโดยสัญญาณออสซิลเลตที่ความถี่ $1 kHz$



รูปที่ 4.15 ผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีซีไปซ์ของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์เมื่อสัญญาณเส้นที่ 1, 2 และ 3 คือ ผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $i_o(t, \tau)$ ด้วยการป้อนสัญญาณกระแสอินพุต $i_i(\tau) = I_{DC}$ เป็น 0, 0.5 และ 1.0 มิลลิแอมป์ โดยมีแอมพลิจูด I_{pp} เป็น 8, 7.5 และ 6.5 มิลลิแอมป์ตามลำดับ



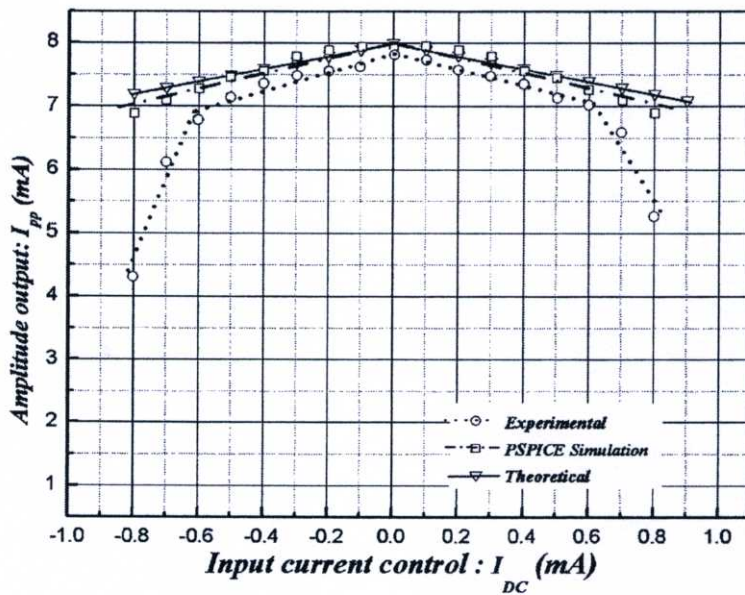
รูปที่ 4.16 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นบนคือสัญญาณไฟตรงอินพุตขนาด 0.8 V (กระแสไฟตรงอินพุต $i_i(\tau) = 0.8 \text{ mA}$) $\text{Volt/Div.} = 1 \text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างคือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ ที่ซึ่ง $i_o(t, \tau) = \frac{v_o(t, \tau)}{1 \times 10^3} \text{ A}$ โดยมีแอมพลิจูดแรงดันพีค-พีค 5.2 โวลต์ $\text{Volt/Div.} = 2 \text{ V}$ และ $\text{Time/Div.} = 1 \text{ ms}$



รูปที่ 4.17 ผลการทดลองจากการต่อวงจรจริงของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณเส้นบนคือสัญญาณไฟตรงอินพุตขนาด -0.8 V ($i_i(\tau) = -0.8 \text{ mA}$) $\text{Volt/Div.} = 1 \text{ V}$

และสัญญาณเส้นล่างคือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต $v_o(t, \tau)$ ที่ซึ่ง $i_o(t, \tau) = \frac{v_o(t, \tau)}{1 \times 10^3} \text{ A}$

โดยมีแอมพลิจูดแรงดันพิก-พิก 4.2 โวลต์ $\text{Volt/Div.} = 2 \text{ V}$ และ $\text{Time/Div.} = 1 \text{ ms}$



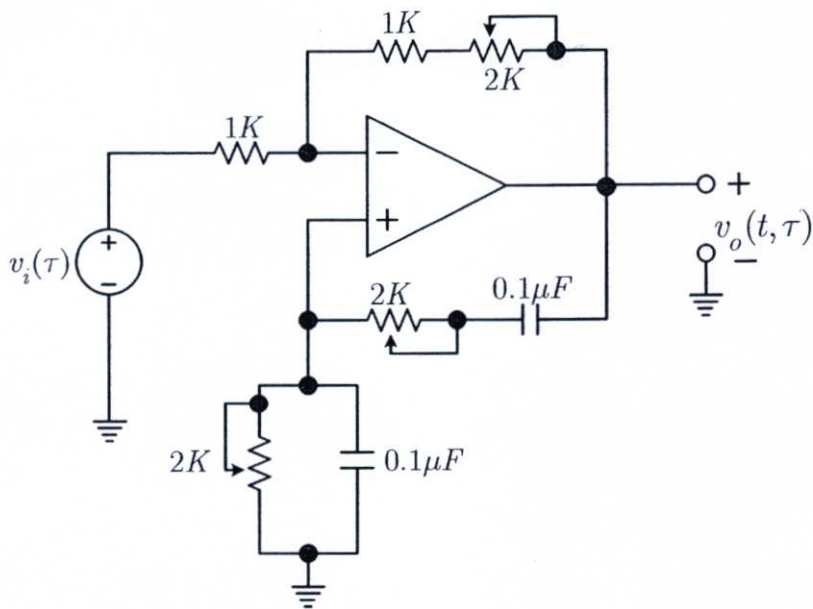
รูปที่ 4.18 กราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ชอยคอลลเอาต์พุต ที่ได้จากการปฏิบัติจริง ผลการเลียนแบบ และผลจากทฤษฎี เมื่อได้ทำการปรับเปลี่ยนสัญญาณกระแสไฟตรงอินพุตเป็นค่าต่าง ๆ ที่ป้อนให้กับวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ แกนแนวนอนเป็นกระแสอินพุต มีหน่วยเป็นมิลลิแอมป์ แกนแนวตั้งคือค่าแอมพลิจูดสัญญาณออสซิลเลตไซน์ชอยคอลลเอาต์พุตวัดเป็นกระแสพิก-พิก มีหน่วยเป็นมิลลิแอมป์

จากผลการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ และผลการทดลอง ดังรูปที่ 4.15 และ 4.16 – 4.17 ตามลำดับ จะเห็นได้ว่าเมื่อได้ทำการเพิ่มค่ากระแสไฟตรงอินพุตให้กับวงจร จะพบว่าแอมพลิจูดของสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตจะมีขนาดลดลง และจากกราฟแสดงผลการควบคุมแอมพลิจูดรูปที่ 4.18 จะพบว่าค่าแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ซอซอคอลเอาต์พุตระหว่างผลการเขียนแบบวงจรกับทฤษฎีให้ผลสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกัน สำหรับผลการทดลองจากการปฏิบัติจริงจะพบว่าเมื่อกระแสไฟตรงอินพุตอยู่ระหว่าง -6 mA ถึง $+6 \text{ mA}$ มีลักษณะสอดคล้องไปในทิศทางเดียวกันกับผลการเขียนแบบวงจรและทฤษฎีและเป็นไปตามสมการผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ในโหมดกระแส ในขณะที่กระแสไฟตรงอินพุตที่มีขนาดมากกว่าระยะดังกล่าวทั้งด้านกระแสบวกและกระแสลบ จะให้ค่าแอมพลิจูดมีค่าผิดพลาดจากผลการเขียนแบบวงจรและทฤษฎีมาก

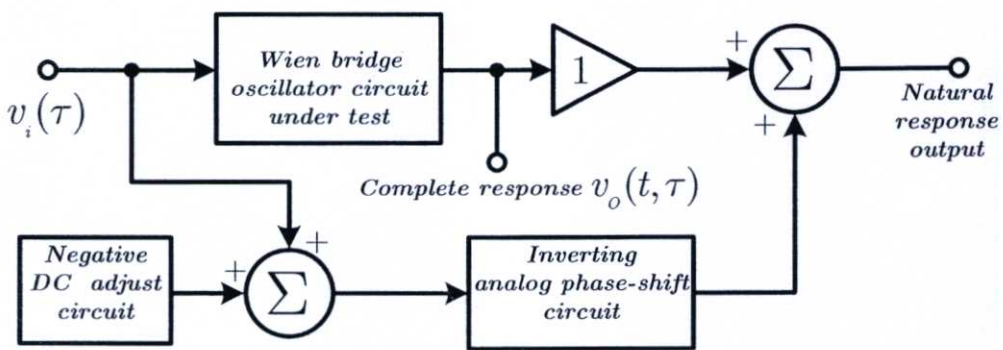
4.1.2 ผลการควบคุมแอมพลิจูดกับสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ที่มีลักษณะแปรเปลี่ยนไปตามเวลา หรือ แบบพลวัตต์

ผลการทดลองการควบคุมแอมพลิจูดของวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ที่มีสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ เป็นแบบพลวัตต์ในหัวข้อนี้ได้ทำการทดลอง โดยใช้วงจรเวเนบริคซ์ ออสซิลเลเตอร์เป็นวงจรทดลองกับสัญญาณอินพุตรูปคลื่นไซน์ และสัญญาณรูปฟันเลื่อย เพื่อตรวจสอบอิทธิพลของผลตอบสนองบังคับที่มีต่อแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติ ในที่นี้ได้ต่อวงจรตามรูปที่ 4.19 และได้ทดสอบที่ความถี่ของผลตอบสนองธรรมชาติ 1, 5, 10, 15 และ 20 kHz ตามลำดับ ใช้ออปแอมป์เบอร์ LM741 แหล่งจ่ายไฟเลี้ยงวงจรเท่ากับ $\pm 9 \text{ V}$ ทั้งนี้ได้เพิ่มวงจรที่ทำหน้าที่กำจัดสัญญาณที่เป็นผลตอบสนองบังคับ (พจน์ที่สองด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$) แสดงบล็อกไดอะแกรม และวงจรดังรูปที่ 4.20 และ 4.21 ตามลำดับ เพื่อให้เห็นถึงผลตอบสนองธรรมชาติ(สัญญาณเส้นล่างสุด)

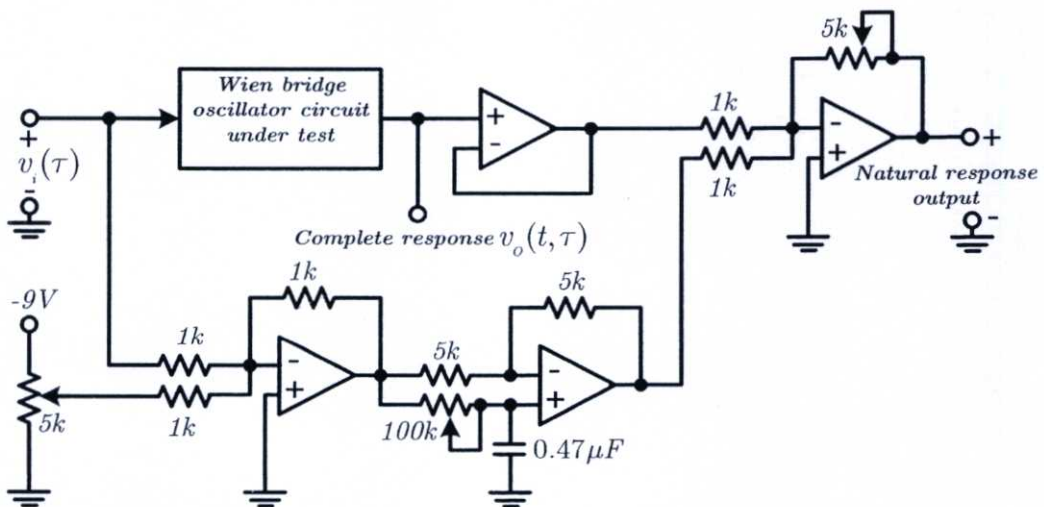
วิธีการทดลอง ในลำดับแรกเป็นการทดลองเปรียบเทียบผลการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม Matlab ระหว่างวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมกับวิธีวิเคราะห์ที่นำเสนอ เพื่อตรวจสอบลักษณะของสัญญาณผลตอบสนองบริบูรณ์ และผลตอบสนองธรรมชาติเมื่อได้ป้อนสัญญาณอินพุตที่มีลักษณะเป็นพลวัตต์ การทดลองตอนที่สองเป็นการทดลองการเขียนแบบวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ และจากวงจรจริง โดยป้อนสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปคลื่นไซน์ และสัญญาณรูปฟันเลื่อยตามลำดับ



รูปที่ 4.19 วงจรแอมพลิฟายเออร์ออสซิลเลเตอร์ กับสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ ที่มีลักษณะแบบพลวัต



รูปที่ 4.20 บล็อกไดอะแกรมวงจรที่ใช้แสดงผลตอบสนองบริบูรณ์และผลตอบสนองธรรมชาติ



รูปที่ 4.21 วงจรที่ใช้ในการกำจัดสัญญาณที่เป็นผลตอบสนองบังคับ พจน์ที่สองด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$

จากสมการความสัมพันธ์ของวงจรวจรเวทริกซ์ออสซิลเลเตอร์ ในสมการที่ (3.71) กล่าวคือ

$$v_o''(t, \tau) + \frac{v_o(t, \tau)}{R^2 C^2} = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right)$$

จากสมการที่ (3.72) ฟังก์ชันบังคับอินพุต $f(\tau)$ ของสมการความสัมพันธ์อินพุต-เอาต์พุต คือ

$$f(\tau) = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right)$$

พิจารณากรณีของสัญญาณอินพุต $v_i(\tau)$ เป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ $v_{i1}(\tau) = V_p \cos(\omega_m \tau)$ และสัญญาณรูปฟันเลื่อย $v_{i2}(\tau) = (2f_{ramp} V_p) \tau$ ตามลำดับ ทำการแทนค่าสัญญาณอินพุตของแต่ละสัญญาณลงในสมการที่ (3.72) ทำให้ได้ฟังก์ชันบังคับของแต่ละสัญญาณ ตามลำดับดังนี้

กรณีที่ 1 $v_{i1}(\tau) = V_p \cos(\omega_m \tau)$

$$v_{i1}'(\tau) = -\omega_m V_p \sin(\omega_m \tau)$$

$$v_{i1}''(\tau) = -\omega_m^2 V_p \cos(\omega_m \tau)$$

$$f_1(\tau) = -2 \left(-\omega_m^2 V_p \cos(\omega_m \tau) + \frac{3}{RC} (-\omega_m V_p \sin(\omega_m \tau)) + \frac{1}{R^2 C^2} V_p \cos(\omega_m \tau) \right)$$

$$f_1(\tau) = -2V_p \left(\left(\frac{1 - \omega_m^2 R^2 C^2}{R^2 C^2} \right) \cos(\omega_m \tau) - \frac{3\omega_m}{RC} \sin(\omega_m \tau) \right)$$

$$f_1(\tau) = -2 \left(\frac{V_p}{R^2 C^2} \sqrt{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)^2 + (3\omega_m RC)^2} \cos(\omega_m \tau + \alpha) \right) \quad (4.13)$$

เมื่อ $\alpha = -\tan^{-1} \left(-3\omega_m RC / 1 - \omega_m^2 R^2 C^2 \right)$

กรณีนี้ $v_{i2}(\tau) = (2f_{ramp} V_p)\tau$

$$v'_{i2}(\tau) = 2f_{ramp} V_p$$

$$v''_{i2}(\tau) = 0$$

$$f_2(\tau) = -2 \left(\frac{6f_{ramp} V_p}{RC} + \frac{(2f_{ramp} V_p)\tau}{R^2 C^2} \right) \quad (4.14)$$

และจากวิธีการวิเคราะห์หาผลตอบสนองของบริบูรณ์ในรูปแบบปิดด้วยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลาที่ได้นำเสนอในบทที่ 3 และได้ผลตอบสนองของบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ ของวงจรเวเนบรีจ้ออสซิลเลเตอร์ในรูปแบบทั่วไปเป็นดังสมการที่ (3.75)

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_{of}(\tau)) \cos(t / RC) + v_{of}(\tau)$$

ทำการหาผลตอบสนองบังคับ $v_{of}(\tau)$ ของแต่ละสัญญาณซึ่งสามารถหาได้เป็น

กรณีนี้ $v_{i1}(\tau) = V_p \cos(\omega_m \tau)$

$$v''_{of_1}(\tau) + \frac{v_{of_1}(\tau)}{R^2 C^2} = -2V_p \left(\left(\frac{1 - \omega_m^2 R^2 C^2}{R^2 C^2} \right) \cos(\omega_m \tau) - \frac{3\omega_m}{RC} \sin(\omega_m \tau) \right)$$

สมมติให้ $v_{of_1}(\tau) = A \cos(\omega_m \tau) + B \sin(\omega_m \tau)$ (4.15)

แล้ว $v'_{of_1}(\tau) = -\omega_m A \sin(\omega_m \tau) + \omega_m B \cos(\omega_m \tau)$

$$v''_{of_1}(\tau) = -\omega_m^2 A \cos(\omega_m \tau) - \omega_m^2 B \sin(\omega_m \tau)$$

แทนค่า $v_{of_1}(\tau)$ และ $v''_{of_1}(\tau)$ เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ A และ B จะได้

$$\left(-\omega_m^2 A \cos(\omega_m \tau) - \omega_m^2 B \sin(\omega_m \tau) \right) + \frac{A \cos(\omega_m \tau) + B \sin(\omega_m \tau)}{R^2 C^2}$$

$$\begin{aligned}
&= -2V_p \left(\left(\frac{1 - \omega_m^2 R^2 C^2}{R^2 C^2} \right) \cos(\omega_m \tau) - \frac{3\omega_m}{RC} \sin(\omega_m \tau) \right) \\
&\left(\frac{1 - \omega_m^2 R^2 C^2}{R^2 C^2} \right) A \cos(\omega_m \tau) + \left(\frac{1 - \omega_m^2 R^2 C^2}{R^2 C^2} \right) B \sin(\omega_m \tau) \\
&= \left(\frac{-2V_p (1 - \omega_m^2 R^2 C^2)}{R^2 C^2} \right) \cos(\omega_m \tau) + \frac{6\omega_m V_p}{RC} \sin(\omega_m \tau)
\end{aligned}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์พจน์ต่อพจน์จะได้

$$\begin{aligned}
A &= -2V_p \\
B &= \frac{6\omega_m R C V_p}{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)}
\end{aligned}$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ A และ B กลับลงในสมการที่ (4.15) จะได้

$$\begin{aligned}
v_{of_1}(\tau) &= -2V_p \cos(\omega_m \tau) + \left(\frac{6\omega_m R C V_p}{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)} \right) \sin(\omega_m \tau) \\
&= M \cos(\omega_m \tau + \gamma)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

เมื่อ
$$M = \frac{-2V_p}{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)} \sqrt{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)^2 + (3\omega_m R C)^2}$$

และ
$$\gamma = -\tan^{-1} \left(\frac{-3\omega_m R C}{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)} \right)$$

จากสมการที่(3.75) ผลตอบสนองบริบูรณ์จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
v_{o1}(t, \tau) &= (\pm V_{SAT} - M \cos(\omega_m \tau + \gamma)) \cos(t / RC) + \\
&M \cos(\omega_m \tau + \gamma)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

กรณีที่ $v_{i2}(\tau) = (2f_{ramp} V_p)\tau$

$$v''_{of_2}(\tau) + \frac{v_{of_2}(\tau)}{R^2C^2} = -2 \left(\frac{6f_{ramp} V_p}{RC} + \frac{(2f_{ramp} V_p)\tau}{R^2C^2} \right)$$

สมมติให้ $v_{of_2}(\tau) = K_1\tau + K_2$ (4.18)

แล้ว $v'_{of_2}(\tau) = K_1$
 $v''_{of_2}(\tau) = 0$

แทนค่า $v_{of_2}(\tau)$ และ $v''_{of_2}(\tau)$ เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ K_1 และ K_2 จะได้

$$\frac{K_1\tau + K_2}{R^2C^2} = -2 \left(\frac{6f_{ramp} V_p}{RC} + \frac{(2f_{ramp} V_p)\tau}{R^2C^2} \right)$$

$$\frac{K_1\tau}{R^2C^2} + \frac{K_2}{R^2C^2} = -\frac{(4f_{ramp} V_p)\tau}{R^2C^2} - \frac{12f_{ramp} V_p}{RC}$$

เปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์พจน์ต่อพจน์จะได้

$$K_1 = -4f_{ramp} V_p$$

$$K_2 = -12f_{ramp} R C V_p$$

แทนค่าสัมประสิทธิ์ K_1 และ K_2 กลับลงในสมการที่ (4.18) จะได้

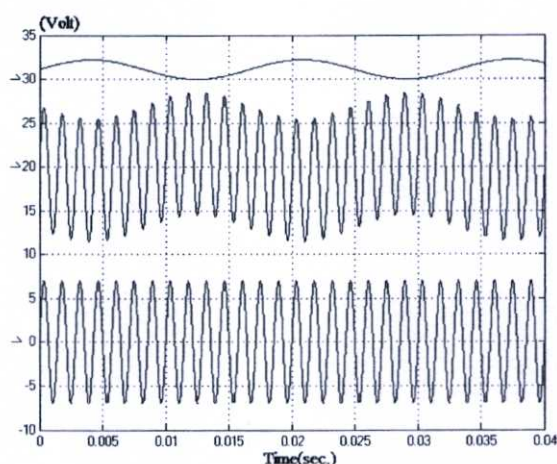
$$v_{of_2}(\tau) = -(4f_{ramp} V_p)\tau - 12f_{ramp} R C V_p \quad (4.19)$$

จากสมการที่(3.75) ผลตอบสนองของบริบูรณ์จะได้เป็น

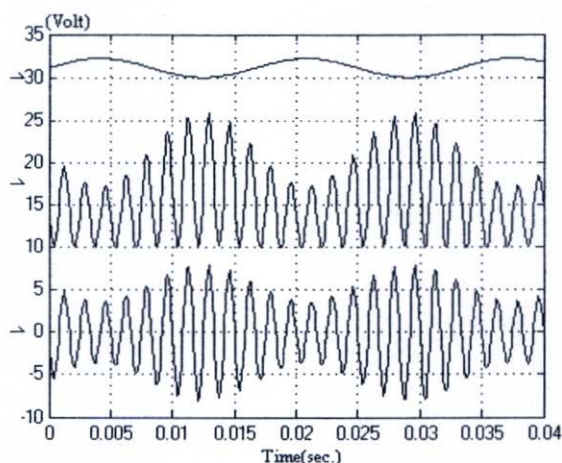
$$v_{o2}(t, \tau) = \left(\pm V_{SAT} + \left((4f_{ramp} V_p)\tau + 12f_{ramp} R C V_p \right) \right) \cos(t / RC) - \quad (4.20)$$

$$(4f_{ramp} V_p)\tau - 12f_{ramp} R C V_p$$

ในรูปที่ 4.22 - 4.29 แสดงผลการทดลองจากการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม Matlab เปรียบเทียบกันระหว่างวิธีวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์แบบดั้งเดิม กับวิธีวิเคราะห์แบบใหม่ที่ได้นำเสนอ ผลการเขียนแบบการทำงานของวงจรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ และผลการทดลองจากการต่อวงจรจริง เมื่อได้ป้อนสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ โดยที่ สัญญาณเส้นบนสุดคือสัญญาณคลื่นรูปไซน์อินพุต สัญญาณเส้นกลางคือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต และสัญญาณเส้นล่างสุดคือผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งก็คือผลตอบสนองบริบูรณ์ของสัญญาณเส้นกลาง ที่ได้ทำการกำจัดผลตอบสนองบังคับในพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ทิ้งไปและจะเหลือเฉพาะผลตอบสนองธรรมชาติเท่านั้น

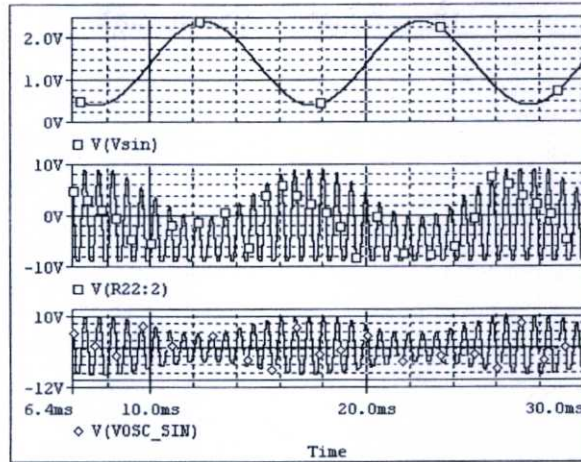


รูปที่ 4.22 ผลการคำนวณเชิงตัวเลขบนพื้นฐานของวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม สัญญาณเส้นบนสุดคือสัญญาณอินพุต $v_{i1}(t) = V_p \cos(\omega_m t)$ แอมพลิจูด $V_p = 1 V$ แรงดันออฟเซต $1 V$ สเกล $Volt/Div. = 5 V$ และ ผลตอบสนองบริบูรณ์ที่เอาต์พุตของวงจรเรเวนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์เป็น $v_{o1}(t) = (\pm V_{SAT} - M \cos(0 + \gamma)) \cos(t / RC) + M \cos(\omega_m t + \gamma)$ แสดงดังสัญญาณเส้นกลาง มีสเกล $Volt/Div. = 5 V$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งได้มาจากการกำจัดผลตอบสนองบังคับในพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ออกไป มีสเกล $Volt/Div. = 5 V$

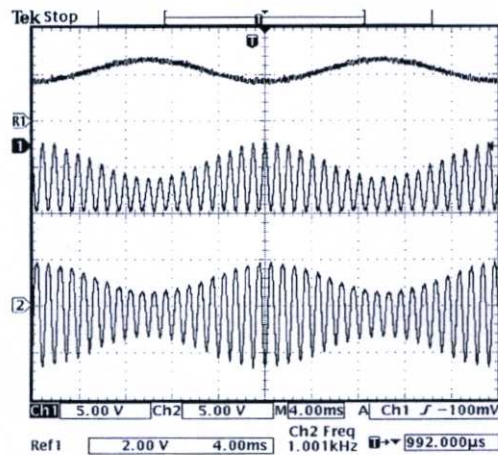


รูปที่ 4.23 ผลการคำนวณเชิงตัวเลข บนพื้นฐานของวิธีการวิเคราะห์แบบใหม่ที่นำเสนอสัญญาณเส้นบนสุดคือสัญญาณอินพุต $v_{i1}(t) = V_p \cos(\omega_m t)$ แอมพลิจูด $V_p = 1 V$ แรงดันออฟเซต $1 V$ มีสเกล $Volt/Div. = 5 V$ และ ผลตอบสนองบริบูรณ์ที่เอาต์พุตของวงจรเวเนบรีคซ์ ออสซิลเลเตอร์เป็น $v_{o1}(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - M \cos(\omega_m \tau + \gamma)) \cos(t / RC) + M \cos(\omega_m \tau + \gamma)$ แสดงดังสัญญาณเส้นกลาง มีสเกล $Volt/Div. = 5 V$ และสัญญาณเส้นล่างสุดแสดงผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งได้มาจากการกำจัดผลตอบสนองบังคับในพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ออกไป มีสเกล $Volt/Div. = 5 V$

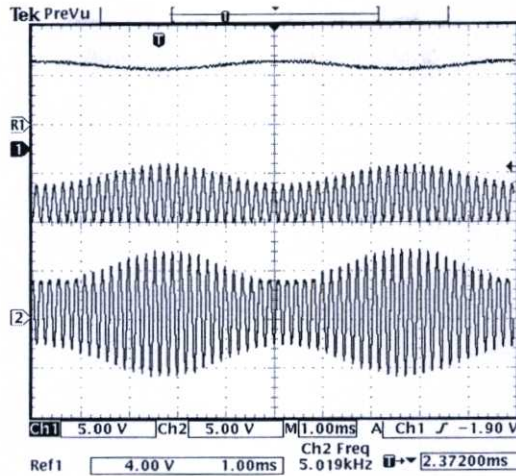
จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขจะเห็นได้ว่า แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติ (ดังสัญญาณเส้นล่างสุด) ของวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมในรูปที่ 4.22 จะมีขนาดคงที่ตลอดเวลา และจะไม่เปลี่ยนแปลงตามสัญญาณคลื่นรูปไซน์อินพุตที่ป้อนเข้าไป ซึ่งจะแตกต่างอย่างชัดเจนกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีการที่ได้นำเสนอใหม่ดังรูปที่ 4.23 ที่ซึ่งค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติ จะมีขนาดแปรเปลี่ยนไปตามสัญญาณอินพุตคลื่นรูปไซน์ที่ป้อนให้กับวงจร



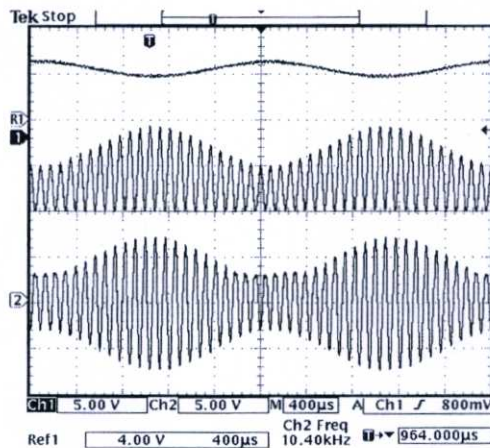
รูปที่ 4.24 ผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรเรกต์ไฟเออร์ด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ ขณะที่ป้อนสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ สัญญาณเส้นบนสุดเป็นสัญญาณอินพุต สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นผลตอบสนองธรรมชาติ



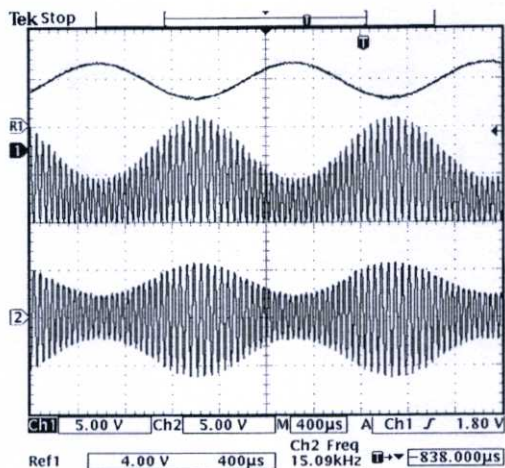
รูปที่ 4.25 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรเรกต์ไฟเออร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตออสซิลเลตที่มีความถี่ 1 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ $V_{pp} = 1.5 \text{ V}$ แรงดันออฟเซต 2.2 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 2 \text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสเกล $\text{Time/Div.} = 4 \text{ ms}$



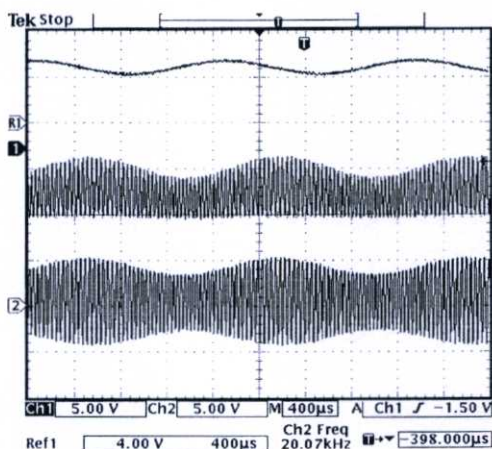
รูปที่ 4.26 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรเวเนบรีดจ์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตออสซิลเลตที่ความถี่ 5 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ $V_{pp} = 0.8 \text{ V}$ แรงดันออฟเซต 4.8 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4 \text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสเกล $\text{Time / Div.} = 1 \text{ ms}$



รูปที่ 4.27 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรเวเนบรีดจ์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตออสซิลเลตที่ความถี่ 10 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ $V_{pp} = 1 \text{ V}$ แรงดันออฟเซต 4.4 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4 \text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสเกล $\text{Time / Div.} = 400 \mu\text{s}$



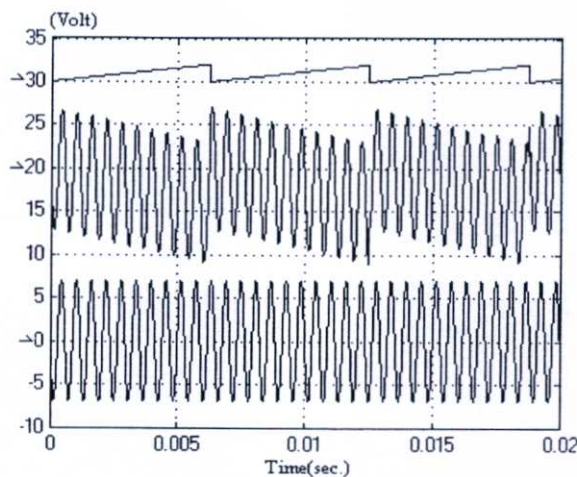
รูปที่ 4.28 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรวอร์เรนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลเตอร์เอาต์พุตออสซิลเลเตอร์ที่มีความถี่ 15 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ $V_{pp} = 3.2\text{ V}$ แรงดันออฟเซต 4 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4\text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสเกล $\text{Time / Div.} = 400\text{ }\mu\text{s}$



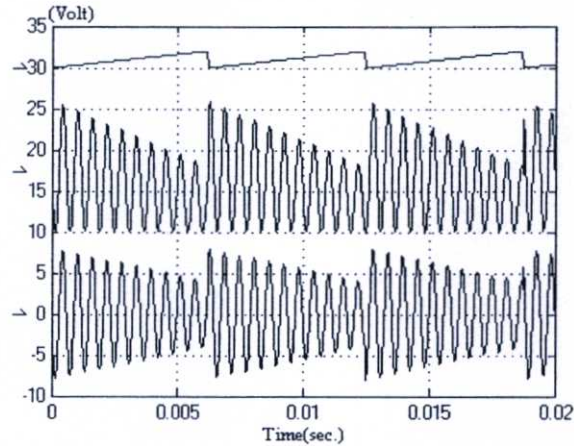
รูปที่ 4.29 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรวอร์เรนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลเตอร์เอาต์พุตออสซิลเลเตอร์ที่มีความถี่ 20 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์ $V_{pp} = 1.5\text{ V}$ แรงดันออฟเซต 4.8 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4\text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสเกล $\text{Time / Div.} = 400\text{ }\mu\text{s}$

จากผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรวอร์เรนบริคจ้ออสซิลเลเตอร์ด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ ดังรูปที่ 4.24 และผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริง ดังรูปที่ 4.25 - 4.29 เมื่อได้ทำการป้อน สัญญาณคลื่นรูปไซน์เป็นสัญญาณอินพุต จะเห็นได้ว่าค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติ ให้ผลสอดคล้องไปในทางเดียวกันและตรงกันกับผลการคำนวณเชิงตัวเลข ที่ได้จากวิธีวิเคราะห์ที่ ได้นำเสนอใหม่ โดยที่แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะแปรเปลี่ยนไปตามสัญญาณ อินพุตคลื่นรูปไซน์ ซึ่งเป็นสัญญาณที่มีลักษณะแปรเปลี่ยนไปตามเวลา

ในรูปที่ 4.30 - 4.35 แสดงผลการทดลองจากการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม Matlab เปรียบเทียบกันระหว่างวิธีวิเคราะห์หาผลตอบสนองบริบูรณ์แบบดั้งเดิม กับวิธีวิเคราะห์ แบบใหม่ที่ได้นำเสนอ ผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรรด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ และผลการ ทดลองจากการต่อวงจรจริง เมื่อได้ป้อนสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย โดยที่ สัญญาณ เส้นบนสุดคือสัญญาณรูปฟันเลื่อยอินพุต สัญญาณเส้นกลางคือผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต และสัญญาณเส้นล่างสุดคือผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งก็คือผลตอบสนองบริบูรณ์สัญญาณเส้น กลาง ที่ได้ทำการกำจัดผลตอบสนองบังคับในพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนอง บริบูรณ์ทิ้งไปและจะเหลือเฉพาะผลตอบสนองธรรมชาติเท่านั้น

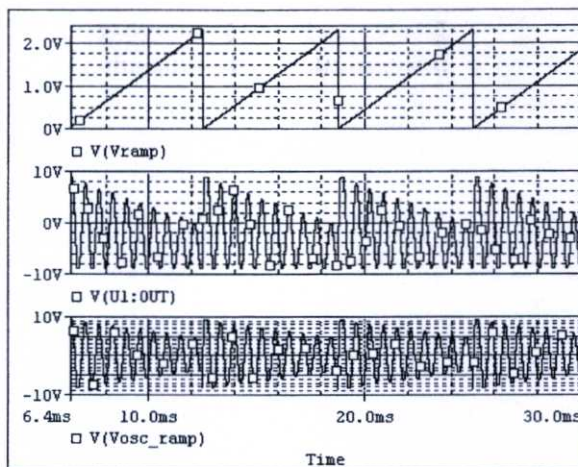


รูปที่ 4.30 ผลการคำนวณเชิงตัวเลขบนพื้นฐานของวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม สัญญาณเส้นบนสุด คือสัญญาณอินพุต $v_{i2}(t) = (2f_{ramp} V_p)t$ แอมพลิจูด $V_p = 1.5V$ แรงดันออฟเซต $1.5V$ สเกล $Volt/Div. = 5V$ และผลตอบสนองบริบูรณ์ที่เอาต์พุตของวงจรวอร์เรนบริคจ้ออสซิลเลเตอร์เป็น $v_{o2}(t) = (\pm V_{SAT} + (4f_{ramp} V_p)(0) + 12f_{ramp} RCV_p) \cos(t/RC) - (4f_{ramp} V_p)t - 12f_{ramp} RCV_p$ แสดงดังสัญญาณเส้นกลาง สเกล $Volt/Div. = 5V$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งได้มาจากการกำจัดผลตอบสนองบังคับ ในพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ออกไปมีสเกล $Volt/Div. = 5V$

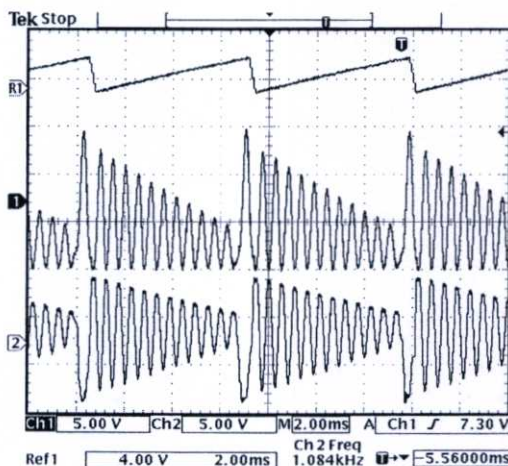


รูปที่ 4.31 ผลการคำนวณเชิงตัวเลข บนพื้นฐานของวิธีการวิเคราะห์แบบใหม่ที่น่าเสนอ สัญญาณเส้นบนสุดคือสัญญาณอินพุต $v_{i2}(\tau) = (2f_{ramp} V_p)\tau$ แอมพลิจูด $V_p = 1.5 V$ แรงดันออฟเซต $1.5 V$ สเกล $Volt/Div. = 5 V$ และ ผลตอบสนองบริบูรณ์ของวงจรวินดิจ้ออสซิลเลเตอร์เป็น $v_{o2}(t, \tau) = (\pm V_{SAT} + ((4f_{ramp} V_p)\tau + 12f_{ramp} RCV_p)) \cos(t / RC) - ((4f_{ramp} V_p)\tau - 12f_{ramp} RCV_p)$ แสดงคังสัญญาณเส้นกลาง สเกล $Volt/Div. = 5 V$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นผลตอบสนองธรรมชาติ ซึ่งได้มาจากการกำจัดผลตอบสนองบังคับในพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ออกไป สเกล $Volt/Div. = 5 V$

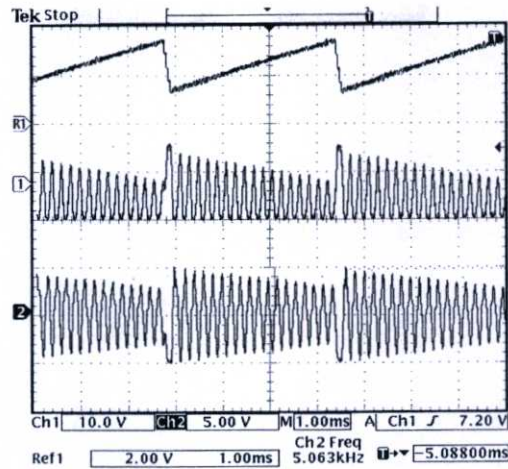
จากผลการคำนวณเชิงตัวเลขจะเห็นได้ว่า แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติ (สัญญาณเส้นล่างสุด) ของวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิมในรูปที่ 4.30 จะมีขนาดคงที่ตลอดเวลา และจะไม่เปลี่ยนแปลงตามสัญญาณคลื่นรูปฟันเลื่อยอินพุตที่ป้อนเข้าไป ซึ่งจะแตกต่างอย่างชัดเจนกับผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่ดังรูปที่ 4.31 ที่ซึ่งค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติ จะมีขนาดแปรเปลี่ยนไปตามสัญญาณอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อยของวงจรวินดิจ้อ



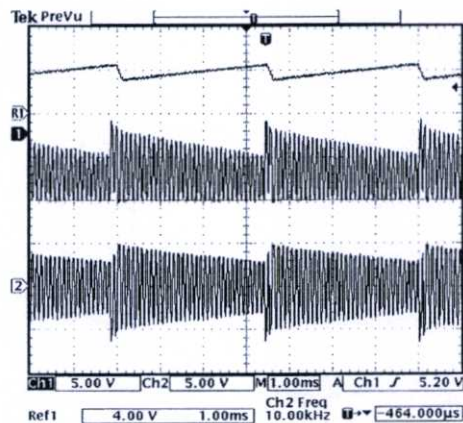
รูปที่ 4.32 ผลการเลียนแบบการทำงานของวงจรแอมป์ออสซิลเลเตอร์ด้วยโปรแกรมพีเอสพีซี ขณะที่ป้อนสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย สัญญาณเส้นบนสุดเป็นสัญญาณอินพุต สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นผลตอบสนองธรรมชาติ



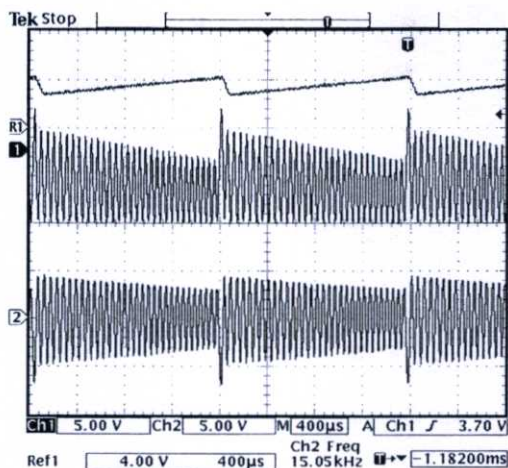
รูปที่ 4.33 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรแอมป์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลเตอร์เอาต์พุตออสซิลเลเตอร์ที่ความถี่ 1 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย $V_{pp} = 2.5 \text{ V}$ แรงดันออฟเซต 4.4 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4 \text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5 \text{ V}$ และสเกล $\text{Time/Div.} = 2 \text{ ms}$



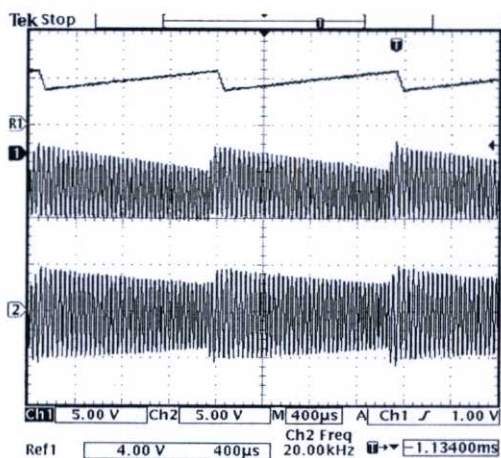
รูปที่ 4.34 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรแอมพลิฟายเออร์สัญญาณ เมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย $V_{pp} = 2\text{ V}$ แรงดันออฟเซต 2.4 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 2\text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 10\text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสเกล $\text{Time/Div.} = 1\text{ ms}$



รูปที่ 4.35 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรแอมพลิฟายเออร์สัญญาณ เมื่อสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย $V_{pp} = 2\text{ V}$ แรงดันออฟเซต 3.6 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4\text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสเกล $\text{Time/Div.} = 1\text{ ms}$



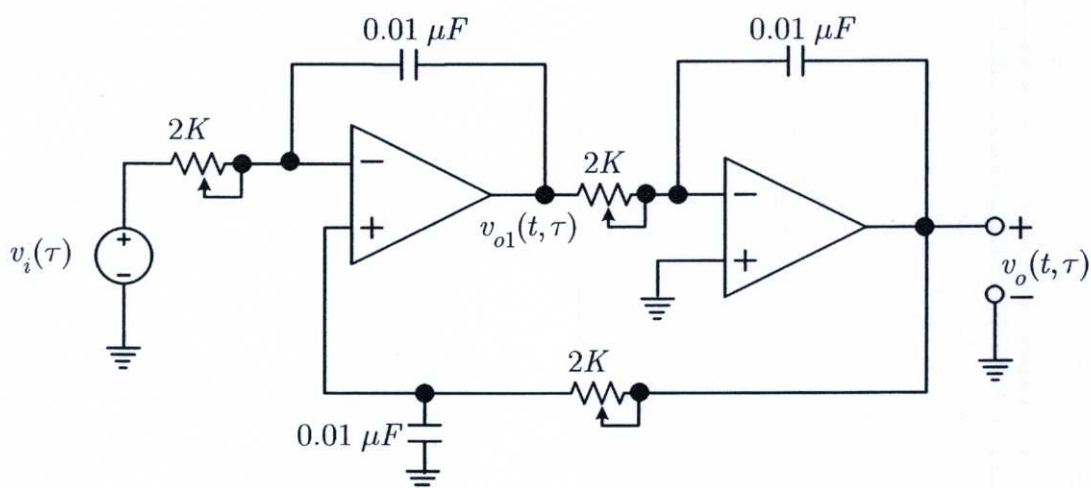
รูปที่ 4.36 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรวอร์เรนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตออสซิลเลตที่มีความถี่ 15 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย $V_{pp} = 1.5\text{ V}$ แรงดันออฟเซต 3.6 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4\text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสเกล $\text{Time / Div.} = 400\text{ }\mu\text{s}$



รูปที่ 4.37 ผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริงของวงจรวอร์เรนบริดจ์ออสซิลเลเตอร์ เมื่อสัญญาณออสซิลเลตเอาต์พุตออสซิลเลตที่มีความถี่ 20 kHz สัญญาณเส้นบนสุดแสดงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณรูปฟันเลื่อย $V_{pp} = 1.5\text{ V}$ แรงดันออฟเซต 3.6 V สเกล $\text{Volt/Div.} = 4\text{ V}$ สัญญาณเส้นกลางเป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสัญญาณผลตอบสนองธรรมชาติ สเกล $\text{Volt/Div.} = 5\text{ V}$ และสเกล $\text{Time / Div.} = 400\text{ }\mu\text{s}$

จากผลการเขียนแบบการทำงานของวงจรวอร์มบริคจ้ออสซิลเลเตอร์ด้วยโปรแกรมพีเอสไปซ์ ดังรูปที่ 4.32 และผลการทดลองที่ได้จากการต่อวงจรจริง ดังรูปที่ 4.33 - 4.37 เมื่อได้ทำการป้อน สัญญาณคลื่นรูปฟันเลื่อยเป็นสัญญาณอินพุต จะเห็นได้ว่าค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนอง ธรรมชาติให้ผลสอดคล้องไปในทางเดียวกันและตรงกันกับผลการคำนวณเชิงตัวเลข ที่ได้จากวิธี วิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่ โดยที่แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะแปรเปลี่ยนไปตาม สัญญาณอินพุตคลื่นรูปฟันเลื่อย ซึ่งเป็นสัญญาณที่มีลักษณะแปรเปลี่ยนไปตามเวลา

4.2 ผลการทดลองจากการประยุกต์ใช้งานวงจรวอร์มบริคจ้ออสซิลเลเตอร์ กับการ มอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดบนพื้นฐานของการใช้เทคนิคการแยกสเกลเวลา



รูปที่ 4.38 วงจรวอร์มบริคจ้ออสซิลเลเตอร์ที่มีอินพุต $v_i(\tau)$ เป็นสัญญาณข่าวสาร

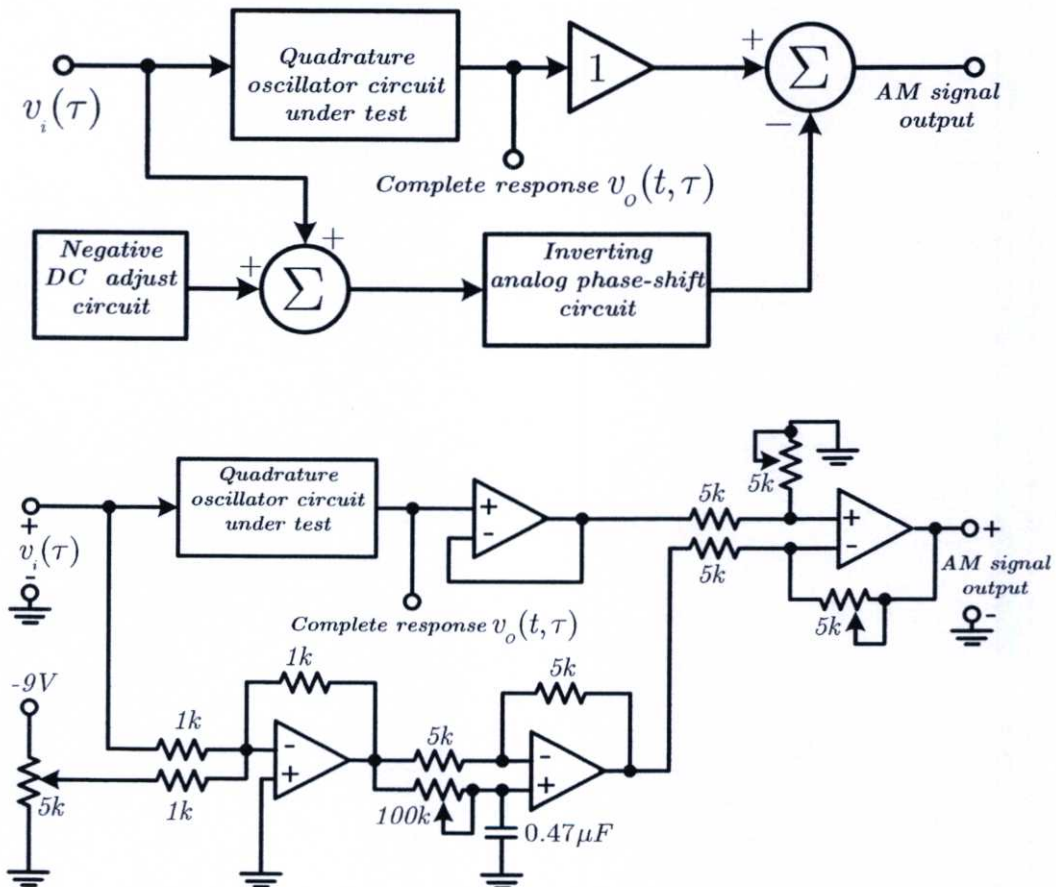
สมการผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ ที่แสดงดังสมการที่ (3.169) ซึ่งอยู่ในรูปแบบของการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด ของวงจรวอร์มบริคจ้ออสซิลเลเตอร์ ตามที่ได้ทำการวิเคราะห์ไว้ในบทที่ 3 หัวข้อ 3.8 แสดงได้เป็น

$$v_o(t, \tau) = (\pm V_{SAT} - v_i(\tau)) \cos \omega_n t + v_i(\tau)$$

เมื่อ $\cos \omega_n t$ และ ω_n คือสัญญาณคลื่นพาห์และความถี่ของคลื่นพาห์ ตามลำดับ

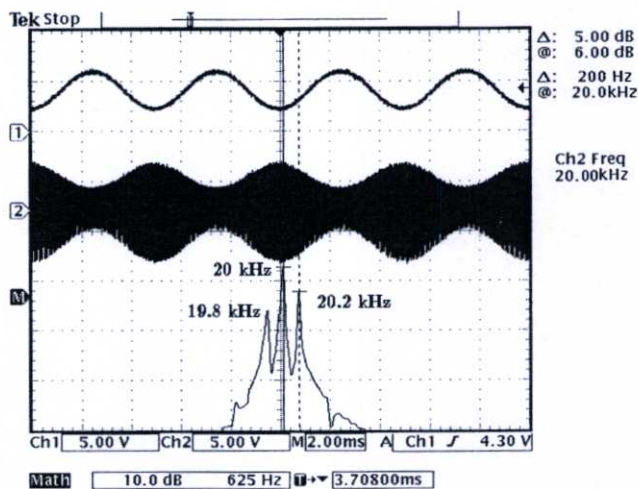
ได้ทำการต่อวงจรทดลองตามวงจรในรูปที่ 4.38 โดยใช้อป - แอมป์ LM741 แหล่งจ่ายไฟเลี้ยงวงจรใช้ที่ $\pm 9V$ และออกแบบให้วงจรมีผลตอบสนองธรรมชาติไขนุชอยคอลลเอาต์พุตความถี่เท่ากับ 20 kHz ในทำนองเดียวกันเพื่อให้เห็นผลเฉพาะสัญญาณเอเอ็ม(ผลตอบสนองธรรมชาติ) จึงได้ต่อวงจรส่วนหลังของเอาต์พุตของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เพื่อกำจัดสัญญาณในส่วนของผลตอบสนองบังคับซึ่งคือ พจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$ ออกไปแสดงดังรูปที่ 4.39 ที่ซึ่งในการทดลองนี้ได้ทำการป้อนสัญญาณข่าวสารอินพุต $v_i(\tau)$ ที่แตกต่างกัน 3 สัญญาณเป็นตัวอย่าง ดังนี้

- สัญญาณข่าวสารอินพุตไขนุชอยคอลล แอมพลิจูด 4 V_{pp} ความถี่เท่ากับ 200 Hz
- สัญญาณข่าวสารอินพุตรูปฟันเลื่อย แอมพลิจูด 2 V_{pp} ความถี่เท่ากับ 200 Hz
- สัญญาณข่าวสารอินพุตรูปสี่เหลี่ยม แอมพลิจูด 3 V_{pp} ความถี่เท่ากับ 200 Hz



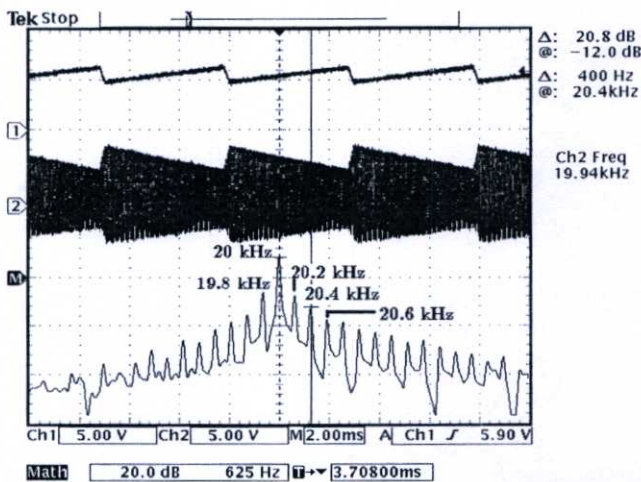
รูปที่ 4.39 วงจรกำจัดสัญญาณในส่วนของผลตอบสนองบังคับพจน์ที่ 2 ทางด้านขวามือของสมการผลตอบสนองบริบูรณ์ $v_o(t, \tau)$

ผลการทดลองแสดงดังรูปที่ 4.40 - 4.42 โดยที่ สัญญาณเส้นบนสุด คือสัญญาณข่าวสารที่ป้อนให้กับวงจร สัญญาณเส้นกลาง คือสัญญาณเอเอ็ม และสัญญาณเส้นล่างสุด คือองค์ประกอบทางความถี่(สเปกตรัม) ของสัญญาณเอเอ็มเอาต์พุต(ซึ่งคือสัญญาณเส้นกลางนั่นเอง)



รูปที่ 4.40 ผลการทดลองการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด สัญญาณเส้นบนสุดเป็นสัญญาณข่าวสาร ไซน์ซอชยคอด แอมพลิจูด $4 V_{pp}$ แรงดันออฟเซต $4 V$ ความถี่ $200 Hz$ $Volt/Div. = 5 V$ สัญญาณเส้นกลางเป็นสัญญาณเอเอ็ม $Volt/Div. = 5 V$ โดยมี $Time/Div. = 2 ms$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสเปกตรัมสัญญาณเอเอ็ม

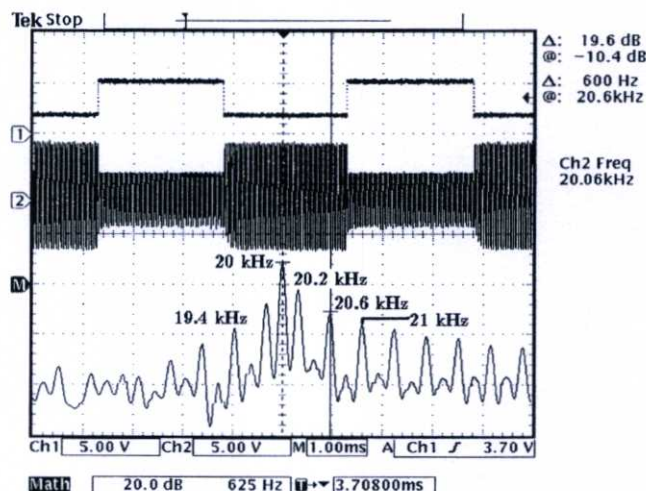
จากผลการทดลองในรูปที่ 4.40 จะเห็นได้ว่า องค์ประกอบสเปกตรัมของสัญญาณเอเอ็มเอาต์พุตที่แสดงไว้ในสัญญาณเส้นล่างสุด จะมีความถี่ศูนย์กลางอยู่ที่ $20 kHz$ มีสเปกตรัมด้านซ้ายมือ และด้านขวามือ ของความถี่ศูนย์กลางเป็น $19.8 kHz$ และ $20.2 kHz$ ตามลำดับ



รูปที่ 4.41 ผลการทดลองการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด สัญญาณเส้นบนสุดเป็นสัญญาณข่าวสาร รูปฟันเลื่อย แอมพลิจูด $2 V_{pp}$ แรงดันออฟเซต $5.5 V$ ความถี่ $200 Hz$ $Volt/Div. = 5$

V สัญญาณเส้นกลางเป็นสัญญาณเอเอ็ม $Volt/Div. = 5 V$ โดยมี $Time/Div. = 2 ms$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสเปกตรัมสัญญาณเอเอ็ม

จากผลการทดลองในรูปที่ 4.41 จะเห็นได้ว่า สเปกตรัมของสัญญาณเอเอ็มเอาต์พุต จะมีความถี่ศูนย์กลางอยู่ที่ $20 kHz$ โดยมีฮาร์โมนิกส์ที่ 1, 2 และ 3 เป็น $20.2 kHz$, $20.4 kHz$ และ $20.6 kHz$ ตามลำดับ

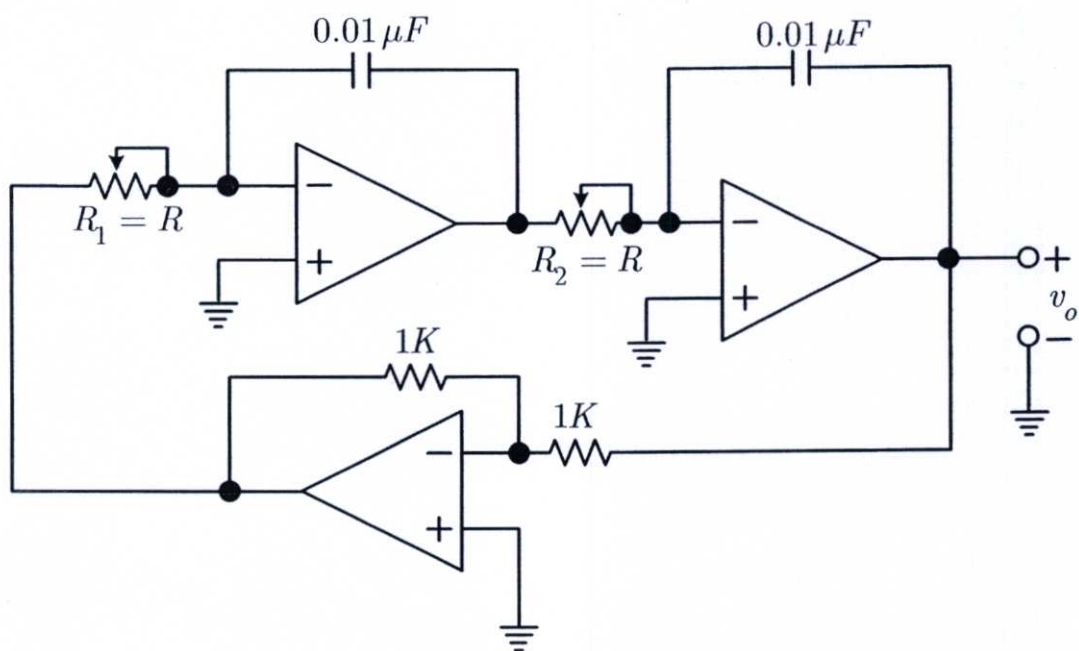


รูปที่ 4.42 ผลการทดลองการมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาด สัญญาณเส้นบนสุดเป็นสัญญาณข่าวสาร รูปคลื่นสี่เหลี่ยม แอมพลิจูด $3 V_{pp}$ แรงดันออฟเซต $3.5 V$ ความถี่ $200 Hz$ $Volt/Div. = 5 V$ สัญญาณเส้นกลางเป็นสัญญาณเอเอ็ม $Volt/Div. = 5 V$ โดยมี $Time/Div. = 1 ms$ และสัญญาณเส้นล่างสุดเป็นสเปกตรัมสัญญาณเอเอ็ม

จากผลการทดลองในรูปที่ 4.42 จะเห็นได้ว่า สเปกตรัมของสัญญาณเอเอ็มเอาต์พุต จะมีความถี่ศูนย์กลางอยู่ที่ $20 kHz$ และมีสเปกตรัมความถี่ $20.2 kHz$ $20.6 kHz$ และ $21 kHz$ เป็นฮาร์โมนิกส์ที่ 1, 3 และ 5 ตามลำดับ

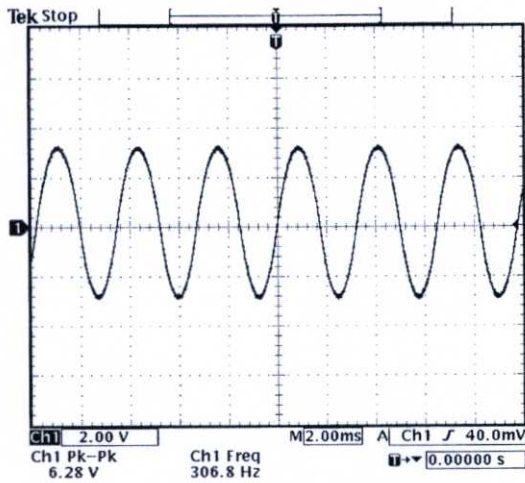
จากผลการทดลองด้วยการนำผลตอบสนองบริบูรณ์ในรูปแบบปิดของออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 มาประยุกต์ใช้งานเป็นตัวมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดกับวงจรควอดราเจอร์ ออสซิลเลเตอร์ และได้ทำการป้อนสัญญาณข่าวสารอินพุตที่มีลักษณะแปรเปลี่ยนตามเวลา รูปคลื่นไซน์ รูปคลื่นฟันเลื่อย และรูปคลื่นสี่เหลี่ยม จะเห็นได้ว่า สัญญาณเอเอ็มที่ได้จากการมอดูเลตของแต่ละสัญญาณข่าวสารอินพุต จะมีองค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณเอเอ็มเป็นไปอย่างถูกต้องตามสัญญาณข่าวสารอินพุตที่ป้อนให้กับวงจร และสอดคล้องตรงกันกับทฤษฎีที่ได้วิเคราะห์ไว้ดังสมการที่ (3.169)

4.3 ผลการทดลองวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ความถี่ย่านกว้าง

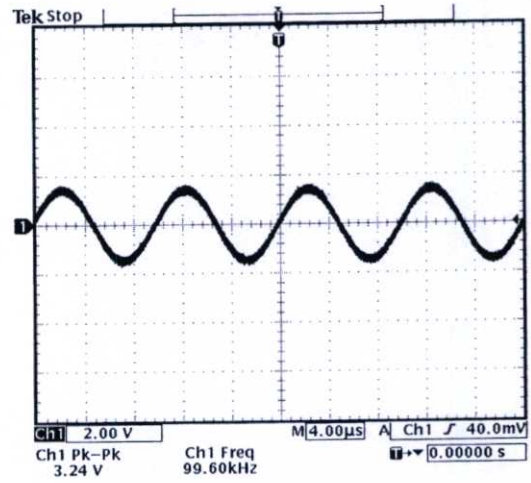


รูปที่ 4.43 วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ที่ใช้ในการทดลอง ในขณะที่ออป-แอมป์ตัวล่างสุดจะทำหน้าที่เป็นวงจรขยายแบบกลับเฟสโดยมีอัตราขยาย $A = 1K / 1K = 1$

เพื่อเป็นการยืนยันแนวคิดที่ได้นำเสนอ ในหัวข้อนี้จึงได้ทำการต่อวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ทดลองโดยใช้ออปแอมป์เป็นอุปกรณ์แอกทีฟ ดังแสดงในรูปที่ 4.43 โดยใช้ตัวเก็บประจุ $C_1 = C_2 = 0.01 \mu F$ และเปลี่ยนค่า $R_1 = R_2 = R$ เพื่อให้วงจรให้กำเนิดความถี่ค่าต่าง ๆ กัน โดยทำการทดลองสองตอน ตอนแรกใช้ออปแอมป์เบอร์ $\mu A741$ และตอนที่สองใช้ออปแอมป์เบอร์ $LF351$ ได้ผลการทดลองดังแสดงในรูปที่ 4.44 – 4.46



(a)

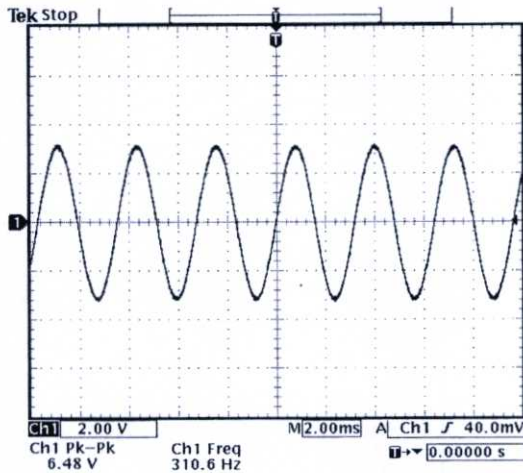


(b)

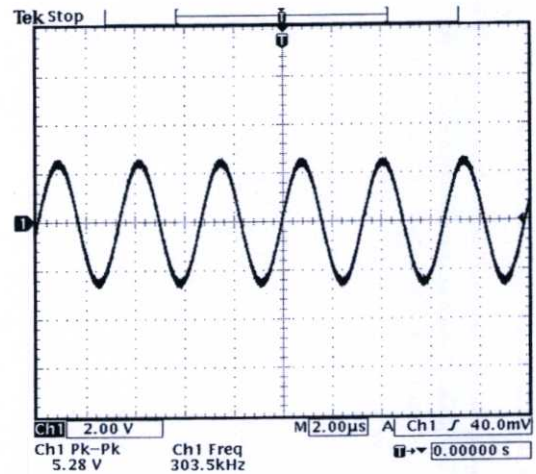
รูปที่ 4.44 สัญญาณออสซิลเลตไซน์ของขอลเอาต์พุตจากวงจรที่ใช้ ออป-แอมป์ $\mu A741$

(a) ขณะออสซิลเลตที่ความถี่ต่ำ 306.8 Hz $Volt/Div. = 2 V$ และ $Time/Div. = 2 ms$

(b) ขณะออสซิลเลตที่ความถี่สูง 99.6 kHz $Volt/Div. = 2 V$ และ $Time/Div. = 4 \mu s$



(a)

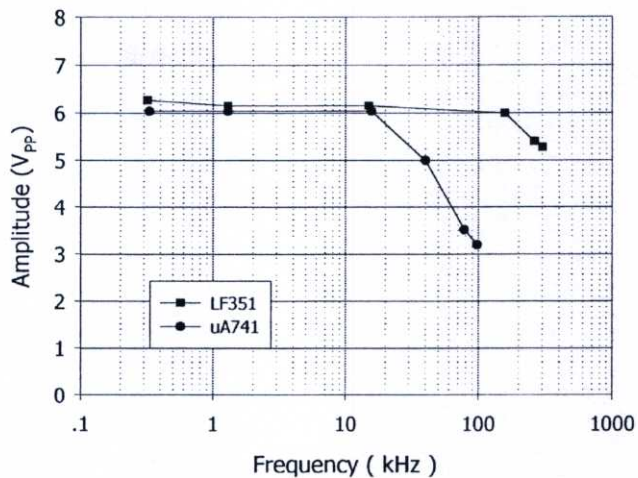


(b)

รูปที่ 4.45 สัญญาณออสซิลเลตไซน์ของขอลเอาต์พุตจากวงจรที่ใช้ ออป-แอมป์ $LF351$

(a) ขณะออสซิลเลตที่ความถี่ต่ำ 310.6 Hz $Volt/Div. = 2 V$ และ $Time/Div. = 2 ms$

(b) ขณะออสซิลเลตที่ความถี่สูง 303.5 kHz $Volt/Div. = 2 V$ และ $Time/Div. = 2 \mu s$



รูปที่ 4.46 ผลการทดลองแสดงผลตอบสนองทางความถี่ของการทดลองวงจรควอคราเจอร์ ออสซิลเลเตอร์โดยใช้ออปแอมป์เบอร์ $\mu A741$ และ $LF351$

จากผลการทดลองโดยใช้อุปกรณ์แอกทิฟออป-แอมป์เบอร์ $\mu A741$ และ $LF351$ จะเห็นว่าออป-แอมป์เบอร์ $LF351$ จะให้สัญญาณออสซิลเลตไซน์ชวยคอลเอาต์พุตในย่านความถี่ที่กว้างกว่า ออป-แอมป์เบอร์ $\mu A741$ นั่นคือวงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ จะให้ความกว้างของย่านความถี่มากเท่าใดนั้นจะขึ้นอยู่กับคุณสมบัติทางความถี่ของอุปกรณ์แอกทิฟที่นำมาใช้ ที่ซึ่ง gain bandwidth product ของออป-แอมป์ ที่มีค่าความถี่ที่ให้อัตราขยายเท่ากับ 1 (unity gain frequency) สูง ๆ ก็จะส่งผลให้วงจรควอคราเจอร์ออสซิลเลเตอร์สามารถให้กำเนิดสัญญาณไซน์ชวยคอลเอาต์พุตได้ความถี่สูงมากขึ้นตามไปด้วย

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

ในวิทยานิพนธ์นี้ ได้นำเสนอแบบจำลองคณิตศาสตร์กับการวิเคราะห์หาผลตอบสนอง
บริบูรณ์ของวงจรออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ด้วยวิธีวิเคราะห์แบบใหม่ บนพื้นฐานของการใช้
เทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลา ด้วยวิธีวิเคราะห์ที่นำเสนอใหม่นี้ทำให้ได้ ค่า
สัมประสิทธิ์ของผลตอบสนองธรรมชาติมีผลเฉลยที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบปิด และเป็น
สมการในรูปทั่วไป ที่ซึ่งค่าสัมประสิทธิ์ในรูปแบบปิดที่ได้นี้ จะทำให้ง่ายและสะดวกต่อการ
ได้มาของผลตอบสนองบริบูรณ์ และยังส่งผลต่อผลตอบสนองบริบูรณ์ในผลสำเร็จสุดท้าย ซึ่ง
สามารถจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบปิดได้อีกด้วย ในกรณีที่โซลูชอยคอลลอสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2
มีฟังก์ชันบังคับอินพุตเป็นศูนย์ นั่นคือ ออสซิลเลเตอร์สามารถให้สัญญาณโซลูชอยคอลลอสซิล-
เลตออกมาเองได้โดยปราศจากสัญญาณอินพุต สำหรับกรณีนี้ เพียงแค่เราทราบค่ารากสมการ หรือ
ความถี่ธรรมชาติ s_1, s_2 และ ค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น แล้วแทนค่าลงไป ในสมการรูปแบบปิดที่ได้
จากการวิเคราะห์ ก็จะสามารถหาผลเฉลยเอาต์พุตที่เป็นผลตอบสนองบริบูรณ์ได้โดยตรง

นอกจากนี้แล้ววิธีวิเคราะห์ด้วยเทคนิคใหม่นี้ ยังสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจน
ครอบคลุมถึง ผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุต ที่เกิดจากการป้อนสัญญาณฟังก์ชันบังคับอินพุต
ให้กับออสซิลเลเตอร์ทั้งที่เป็น สัญญาณค่าคงที่ไฟตรง และสัญญาณที่มีลักษณะแปรเปลี่ยน ไปตาม
เวลา หรือแบบพลวัตต์ ตลอดเวลาที่ได้มีการป้อนสัญญาณอินพุต บนพื้นฐานของการวิเคราะห์ที่
ได้นำเสนอจะพบว่า ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติจะขึ้นอยู่กับ ค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น
และค่าผลตอบสนองบังคับ \mathcal{U} ที่ทุกเวลา t ใด ๆ อันเนื่องมาจากการป้อนสัญญาณฟังก์ชันบังคับ
อินพุตจากภายนอกให้กับวงจร ในขณะที่วิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม ผลการวิเคราะห์จะให้ค่า
แอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติขึ้นอยู่กับ ค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น และค่าผลตอบสนอง
บังคับ \mathcal{U} ที่เฉพาะเวลา $t = 0$ นั่นก็หมายความว่าวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิมสามารถอธิบาย
ผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตที่เกิดจากการป้อนสัญญาณอินพุตที่เป็นค่าคงที่ให้กับระบบ
ออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ได้เพียงเท่านั้น อย่างไรก็ตามสำหรับการป้อนสัญญาณฟังก์ชันบังคับ
อินพุตให้กับออสซิลเลเตอร์ที่เป็นสัญญาณค่าคงที่ไฟตรงจะพบว่าทั้งวิธีวิเคราะห์แบบดั้งเดิม และ
วิธีวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่ จะให้ผลตอบสนองบริบูรณ์เอาต์พุตของออสซิลเลเตอร์ออกมา
ตรงกันทุกประการ แต่ในกรณีที่เรสมมติให้ออสซิลเลเตอร์ออสซิลเลตให้สัญญาณเอาต์พุต
เป็นฟังก์ชันโคไซน์ และมีเฟสเริ่มต้นเป็นศูนย์ จะพบว่าสำหรับวิธีวิเคราะห์ที่ได้นำเสนอใหม่ ค่า
สัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ของผลตอบสนองธรรมชาติที่เป็นสังยุคเชิงซ้อน จะมีค่าแอมพลิจูด

ของผลตอบสนองธรรมชาติ และมีเฟสเริ่มต้นที่ศูนย์ ซึ่งจะตรงกันกับผลที่ได้จากกรณีของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 เป็นจำนวนจริง ในขณะที่วิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมนั้น ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ของผลตอบสนองธรรมชาติเป็นสังยุคเชิงซ้อน จะให้ค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติของโคไซน์ มีพจน์มากกว่าค่าแอมพลิจูดของผลตอบสนองธรรมชาติของค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ที่เป็นค่าจริงอยู่ 1 พจน์ ซึ่งพจน์ที่เกินมานี้ก็คือค่าผิดพลาดจากการใช้วิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมนั้นเอง รวมทั้งให้ค่าเฟสเริ่มต้นที่ไม่ได้เริ่มต้นจากศูนย์ตามที่ต้องการอีกด้วย ด้วยเหตุนี้การวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบดั้งเดิมจึงต้องแยกพิจารณาทีละกรณี ถ้าหากค่าสัมประสิทธิ์ A_1 และ A_2 ไม่ใช่ค่าจริง

จากผลการวิเคราะห์ที่ได้ด้วยวิธีการวิเคราะห์ที่นำเสนอโดยอาศัยเทคนิคตัวแปรเวลาหลายตัวกับการแยกสเกลเวลา สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานวงจรออสซิลเลเตอร์ต่าง ๆ ได้ คือ สามารถนำไปควบคุมแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ชอยคอลออสซิลเลเตอร์เอาต์พุตได้ด้วยผลตอบสนองบังคับทั้งในโหมดแรงดัน และกระแสไฟฟ้า ทั้งนี้เพราะเหตุที่ค่าแอมพลิจูดของไซน์ชอยคอลออสซิลเลเตอร์เอาต์พุต (ผลตอบสนองธรรมชาติ) จะขึ้นอยู่กับค่าผลตอบสนองบังคับ ณ ที่ทุกเวลา τ ใด ๆ รวมอยู่กับค่าคงที่เงื่อนไขเริ่มต้น อันเนื่องมาจากการป้อนสัญญาณฟังก์ชันบังคับอินพุตให้กับวงจรออสซิลเลเตอร์ ซึ่งสัญญาณฟังก์ชันบังคับอินพุตจะทำให้ ออสซิลเลเตอร์ตอบสนองออกมาเป็นผลตอบสนองบังคับ แล้วผลตอบสนองบังคับนี้ ไปปรากฏอยู่เป็นองค์ประกอบหนึ่งของค่าแอมพลิจูดผลตอบสนองธรรมชาติอีกทีหนึ่ง เสมือนว่าสามารถควบคุมแอมพลิจูดของสัญญาณไซน์ชอยคอลออสซิลเลเตอร์เอาต์พุตได้โดยตรงจากสัญญาณอินพุตภายนอก

จากผลตอบสนองบริบูรณ์ของออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 ในรูปแบบปิดที่ได้ สามารถนำเอาออสซิลเลเตอร์อันดับที่ 2 มาประยุกต์ใช้เป็นตัวมอดูเลตสัญญาณเชิงขนาดได้ ซึ่งในวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเอาวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์มาประยุกต์ใช้เป็นตัวอย่าง ในที่นี้ผลตอบสนองธรรมชาติในส่วนของไซน์ชอยคอล $\cos(\omega_n t)$ จะแสดงตัวเป็นสัญญาณไซน์ชอยคอลคลื่นพาห์ ที่มีความถี่ธรรมชาติเป็น ω_n และสัญญาณฟังก์ชันบังคับอินพุตจะเป็นสัญญาณข่าวสาร โดยมีความถี่เป็น ω_m ทั้งนี้ผลตอบสนองธรรมชาติ จะปรากฏเป็นสัญญาณเอเอ็มได้ก็ต่อเมื่อ มีการป้อนสัญญาณข่าวสารเข้าทางด้านอินพุตของออสซิลเลเตอร์ ด้วยค่าเงื่อนไข $\omega_n \gg \omega_m$ และด้วยเหตุที่ส่วนสร้างสัญญาณคลื่นพาห์ และส่วนมอดูเลตสัญญาณ อยู่ในวงจรเดียวกัน ไม่จำเป็นต้องต่อวงจรจากภายนอกเพิ่ม จึงทำให้วงจรมอดูเลตเชิงขนาดชนิดนี้มีขนาดเล็ก และกะทัดรัด

นอกจากนี้แล้ว ในวิทยานิพนธ์นี้ยังได้ทำการวิเคราะห์โครงสร้างของวงจรควอดราเจอร์ ออสซิลเลเตอร์ อันเนื่องมาจากออสซิลเลเตอร์ชนิดนี้ สามารถให้สัญญาณไซน์ชอยดอล ออสซิลเลตเอาต์พุตได้ในความถี่ย่านกว้าง ซึ่งจะพบว่า ควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์เป็นวงจรให้ กำเนิดสัญญาณในย่านความถี่กว้างได้ นั่นก็เพราะว่าค่าความต้านทานไฟฟ้า R และค่าความจุ ไฟฟ้า C ที่ควบคุมความถี่ของการออสซิลเลตนั้น เป็นอิสระจากเงื่อนไขของการออสซิลเลต ขณะที่อัตราขยายของวงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์ เป็นอัตราขยายรูปปิดนั้นก็หมายความว่า ออป-แอมป์ที่ไม่ได้เป็นอุดมคติทำงานในลักษณะรูปปิด ซึ่งจะมี อัตราขยายน้อยกว่าอัตรา ขยายรูปเปิด ดังนั้น gain bandwidth product ของออป-แอมป์ ที่มีค่าความถี่ที่ให้อัตราขยายเท่ากับ 1 (unity gain frequency) สูง ๆ ถ้าอุปกรณ์แอกทีฟที่นำมาใช้สามารถทำงานได้ความถี่สูงได้มาก เท่าไร ก็จะส่งผลให้วงจรควอดราเจอร์ออสซิลเลเตอร์สามารถให้กำเนิดสัญญาณไซน์ชอยดอล เอาต์พุตได้ความถี่สูงมากขึ้นตามไปด้วย

บรรณานุกรม

- [1] P. Tuwanut, P. Wardkein, and T. Maneechukate, "**7 decade low frequency switched capacitor oscillator,**" IEEE Proc. of the 44th Midwest Symposium on Circuits and Systems, vol. 2, pp. 785 – 788, August 2001.
- [2] J.I. Osa, and A.Carlosena, "**MOSFET-C sinusoidal oscillator with variable frequency and amplitude,**" IEEE Int. Symposium Circuits and Systems, vol. 2, pp. 725 – 728, 2000.
- [3] Tsung-Sum Lee, Kun-Yui Chen, and Hsein-Yu Pan, "**A fully integrated MOSFET-C oscillator with precision amplitude control and self start-up,**" IEEE Int. Symposium Circuits and Systems, vol. 1, pp. 273 – 276, 1997.
- [4] I.M. Filanovsky, "**A sinusoidal VCO with control of frequency and amplitude,**" IEEE Proc. of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems, vol.1, pp. 446 – 449, 1990.
- [5] I.M. Filanovsky, Qin Shui-Sheng, and G. Kothapalli, "**Sinusoidal oscillator with voltage controlled frequency and amplitude,**" Int. J. Electronics, vol. 68, pp. 95 –112, 1990.
- [6] S.Pookaiyaudom and K.Saivichit, "**RC phase-shifter variable sinusoidal oscillators using initial conditions-restoration amplitude control,**" IEEE Trans. Instrumentation and Measurement, vol.39, pp.1038–1044, 1990.
- [7] I.M. Filanovsky, "**Oscillators with amplitude control by restoration of capacitor initial conditions,**" IEE Proc., vol.134, pt. G., pp. 31-37, 1987.
- [8] I.M. Filanovsky and K.A. Stromsmoe, "**Amplitude control in a twin-T bridge RC-oscillator using a window comparator,**" Int. J. Electronics, vol. 61, pp. 197-206, 1986.
- [9] I.M. Filanovsky, "**A Wein bridge RC oscillator with fast amplitude control,**" Int. J. Electronics, vol. 58, pp. 817 – 826, 1985.
- [10] R. Mancini, and R. Palmer, "**Sine wave oscillator,**" Application report SLOA060 Texas Instruments, pp.3-20, March 2001.
- [11] S.Sedra, and C.smith, **Microelectronic Circuits**. New york: Oxford, 2004.
- [12] D.E. Johnson, J.R. Johnson, J.L. Hilburn, **Electric Circuit Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1989.
- [13] C.K. Alexander, and N.O.Sadiku, **Fundamentals of Electric Circuits**. New York: McGraw-Hill, 2000.

- [14] C. Drof, and A. Svoboda, **Introduction to electric circuits**. New York: John Wiley & Sons, 2004.
- [15] D. Cletti, **Introduction to circuit analysis and design**. New York: Holt, Rinehart and Winson, 1988.
- [16] T. Maneechukate, P. Tuwanut, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, “**New analytic solution of second-order oscillator using multi-time variables technique**,” IEEE Int. Symp. Intelligent Signal Processing and Communication Systems, pp.637-640, Dec. 2005.
- [17] J. Roychowdhury, “**Analyzing circuits with widely separated time scales using numerical PDE methods**,” IEEE Trans. Circuits and Systems Fundamental Theory and Application, vol. 48, 5, pp. 578-594, 2001.
- [18] T.F. Bogart, **Electronic devices and circuits**. New York: Maxmillian Publishing company, 1993.
- [19] C. Tourmazou, F.G. Lidgey and B. Wilson, **Analog IC Design: The current Approach**. London: Peter Peregrinus, 1990.
- [20] E.J. Kennedy, Holt, Rinehart, **Operational amplifier circuits theory and applications**. New York: Winson, Inc. 1988.

ภาคผนวก

ภาคผนวก

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

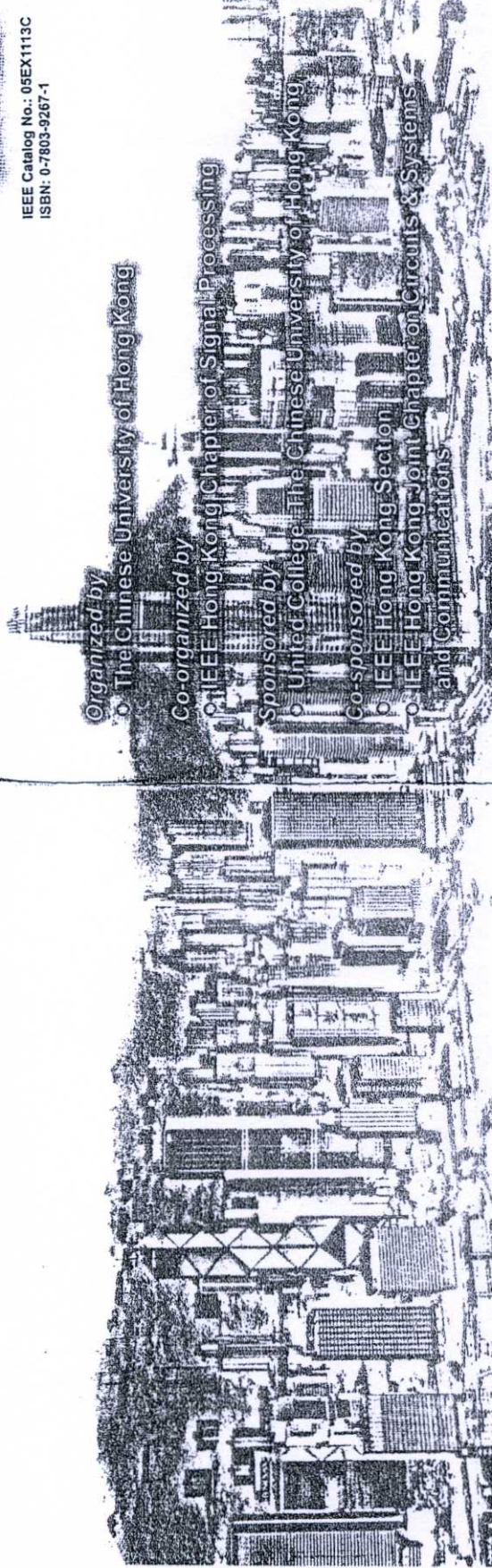
1. T. Maneechukate, P. Tuwanut, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, **“New Analytic Solution of Second-Order Oscillator Using Multi-Time Variables Technique,”** IEEE Int. Symp. Intelligent Signal Processing and Communication Systems (ISPACS), pp.637-640, Dec. 2005.
2. T. Maneechukate, J. Koseeyaporn, P. Koseeyaporn, and P. Wardkein, **“Amplitude Modulation Based on Time-Varying Forced Function of Second-Order Oscillator Circuit,”** IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems (ISCAS), pp.3802-3805, May 2006.
3. T. Maneechukate, J. Koseeyaporn, P. Koseeyaporn, and P. Wardkein, **“Wide-Band Amplitude Control of the Second-Order Oscillator Circuit,”** International Journal of Electronics and Communications (AEU), Vol.62, Issue9, pp.666-673, Oct. 2008.

ISPACS 2005

2005 INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON INTELLIGENT SIGNAL PROCESSING AND COMMUNICATION SYSTEMS

HONG KONG

IEEE Catalog No.: 05EX1113C
ISBN: 0-7803-9267-1



Organized by

The Chinese University of Hong Kong

Co-organized by

IEEE Hong Kong Chapter of Signal Processing

Sponsored by

United College, The Chinese University of Hong Kong

Co-sponsored by

IEEE Hong Kong Section

IEEE Hong Kong Joint Chapter on Circuits & Systems
and Communications

NEW ANALYTIC SOLUTION OF SECOND-ORDER OSCILLATOR USING MULTI-TIME VARIABLES TECHNIQUE

Thongchai Maneechukate, Panwit Tuwanut, Jeerasuda Koseeyaporn, Paramote Wardkein

Telecommunication Department, Faculty of Engineering
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Bangkok, Thailand 10520

ABSTRACT

In this paper, a new analysis of sinusoidal oscillator amplitude controlled by forced response using the second order differential equation (ODE) is proposed. In general, the amplitude of the complete response is derived where forced response slope is normally assumed to be zero. The value of forced response only at initial time is thus employed to determine the amplitude. But if forced input is dynamic signal the amplitude of complete response gained by using such assumption is different from the experimental result. Thus, a new analysis of amplitude for a dynamic forced response is proposed in this paper. It is found that the forced response at any arbitrary time (not only at the initial time) is presented in a term of natural response magnitude. Magnitude of natural response is therefore directly controlled by forced response. To confirm the theoretical analysis, experimental results have been demonstrated and agreed well with the analysis results.

1. INTRODUCTION

The sinusoidal oscillator is one of many important circuits using in communication systems. Mostly, the development has been focused on improving the stability, frequency and/or amplitude control and dimension (number of required elements) of the circuit. In literature, there are many techniques to control amplitude of the oscillated signal [1-8], for example, the method of using multiplier [6] or using initial condition [7,8]. Unfortunately, harmonic distortion, which is the undesired consequence, can be easily generated of using these techniques. Recently, the strategy to control amplitude by forced response using DC signal (voltage and current mode) has been proposed [1-3]. However, the general analysis to determine how the forced response is related to amplitude of the oscillated signal has not yet been analyzed.

The second order differential equation is basically used to explain the condition and the operation of an oscillator in which the complete solution is composed of natural and forced responses. The process of finding the magnitude is therefore necessary to accomplish the

complete response. Conventionally, magnitude of oscillated output is known to be a constant, which depends on the initial condition at the initial time. Thus, magnitude of oscillated output should not be varied if the forced function is time-varying signal. Contrarily, the experimental result of the second order oscillator circuit does not agree with the expectation. It is found that magnitude of the natural response (oscillated output) is changed accordingly with the forced response.

With that result, it gives the question to the authors that what is the reason for such case. This question thus encourages the authors to propose this new analysis for a case time-varying forced response. Recently, [9] proposed a multi-time partial differential equation technique. The same technique has been applied in this work to provide a new analytic solution. The proposed paper is organized as follows. A briefly review of conventional analysis and a new mathematical analysis will be given in section 2. In order to confirm the proposed concept, the numerical, the computer simulated of using both conventional and new analysis to be compared with the experimental results are illustrated in section 3. Finally, the conclusions are provided in section 4.

2. PRINCIPLE

2.1. Review of conventional analysis

In this section, it is first briefly reviewed the conventional analysis technique [10-13]. Generally, it is supposed that an oscillator network can be represented by the following differential second order equation

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \quad (1)$$

where ('') and (') represent first and second order of differentiation, respectively. The constant a_0, a_1 are known parameters and $f(t)$ is an input forced function. The complete solution of (1) is therefore composed of natural response $x_n(t)$ and forced response $x_f(t)$ as defined by $x(t) = x_n(t) + x_f(t)$. In general, the natural solution can be determined by homogenous equation which is

$$x_n''(t) + a_1 x_n'(t) + a_0 x_n(t) = 0 \tag{2}$$

in which the characteristic equation of (2) is

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \text{ where } s_1, s_2 = \sigma \pm j\omega. \tag{3}$$

The s_1, s_2 are roots of (3) where $\sigma = -a_1/2$ and $\omega = \sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}/2$ are damping coefficient and natural radian frequency, respectively, and assuming that a_1^2 were less than $4a_0$ ($a_1^2 < 4a_0$). The natural response thus is

$$x_n(t) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} \tag{4}$$

where A_1 and A_2 are constants respectively determined by using initial conditions $x(t_0)$ and $x'(t_0)$ when t_0 is the initial time. On the other hand, the forced response solution is solved by

$$x_f''(t) + a_1 x_f'(t) + a_0 x_f(t) = f(t). \tag{5}$$

The complete response thus can be expressed as

$$x(t) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} + x_f(t). \tag{6}$$

In case of sinusoidal natural response, the constant A_1 must be equal to A_2 . Let A_1, A_2 be $A/2$, it then yields

$$x(t) = A e^{\sigma t} \cos \omega t + x_f(t). \tag{7}$$

As a result, the natural solution is a cosine function. The constant A can be determined by substituting the initial value at $t = t_0$ where $x(t_0) = X_0$ is arbitrary constant. Since the slope of cosine function at $t = t_0$ is zero, then $x'(t_0) = 0$. By substituting $x'(t_0) = 0$ and $x(t_0) = X_0$ into (7), it thus results in

$$A = e^{-\sigma t_0} (X_0 - x_f(t_0)) / \cos \omega t_0 \tag{8}$$

and the complete response is

$$x(t) = e^{\sigma(t-t_0)} [(X_0 - x_f(t_0)) \cos \omega t / \cos \omega t_0] + x_f(t). \tag{9}$$

Let the initial time t_0 be zero, (9) thus becomes

$$x(t) = e^{\sigma t} (X_0 - x_f(0)) \cos \omega t + x_f(t). \tag{10}$$

As can be seen in (10), the initial condition X_0 and the forced response $x_f(0)$ are shown in the magnitude of the oscillated sinusoidal signal decayed with $e^{\sigma t}$.

2.2. Proposed analysis

It is interesting to note that natural response and forced function are independent in term of their functions. Namely, whatever the forced function is or whenever the forced function is occurred, it will not change the nature function of the natural response. Based on the mentioned assumption, the separated time scales concept [9] is applied. Thus, let us define the forced function, which can be given to the network at any arbitrary time, as $f(\tau)$. The time variable τ is employed to separate to the time variable t . Hence, (5) can be rewritten as follows

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(\tau) \tag{11}$$

where the forced response $x_f(\tau)$ is determined by

$$x_f''(\tau) + a_1 x_f'(\tau) + a_0 x_f(\tau) = f(\tau). \tag{12}$$

In this case, the complete response can therefore be expressed as

$$x(t, \tau) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} + x_f(\tau) \tag{13}$$

where $x(t, \tau)$ is a complete solution in aspect of separated time scales. For sinusoidal natural response, the complete response then is

$$x(t, \tau) = A e^{\sigma t} \cos \omega t + x_f(\tau). \tag{14}$$

By substituting the initial value at time $t = t_0$, $x'(t_0) = 0$ and $x(t_0, \tau) = X_0$ into (14), the constant A therefore is

$$A = e^{-\sigma t_0} (X_0 - x_f(\tau)) / \cos \omega t_0. \tag{15}$$

For $t_0 = 0$, the complete response thus becomes

$$x(t) = e^{\sigma t} (X_0 - x_f(\tau)) \cos \omega t + x_f(\tau). \tag{16}$$

As can be seen, by comparing the result of using conventional analysis in (10) with that of new analysis in (16), they are obviously different. It can be inferred from the result shown in (10) that magnitude of the natural response depends on initial value X_0 and the forced response only at $t = 0$, $x_f(0)$. Contrarily, as shown in (16), magnitude of the natural response shown depends on initial value X_0 and forced response at any arbitrary time $x_f(\tau)$. This implies that the forced function has influence on amplitude of natural response not only at the initial time $\tau = t_0$.

To verify the described principle, a particular Wein bridge oscillator circuit, as shown in Fig. 1. will be an example to analysis where the experimental results will be given in the next section.

From Fig. 1., the output $v_o(t)$ can be expressed by

$$v_o''(t) + \frac{1}{RC} \left(3 - \frac{1}{k_1} \right) v_o'(t) + \frac{v_o(t)}{R^2 C^2} = -\frac{k_2}{k_1} \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \tag{17}$$

where $k_1 = R_1 / (R_1 + R_2)$, $k_2 = R_2 / (R_1 + R_2)$ and $v_i(\tau)$ is forced input which is applied to the circuit at any arbitrary time. The damping effect on $v_o(t)$ is eliminated by setting the term $(3 - 1/k_1) / RC$ to be zero, equivalently, $k_1 = 1/3$ or $k_2/k_1 = R_2/R_1 = 2$ which results in

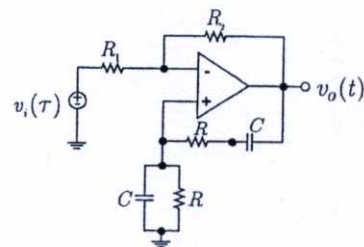


Fig. 1. Wein bridge oscillator.

$$v_o''(t) + \frac{1}{R^2 C^2} v_o(t) = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3}{RC} v_i'(\tau) + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \quad (18)$$

By comparing (18) with (11), it follows that

$$f(\tau) = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3}{RC} v_i'(\tau) + \frac{1}{R^2 C^2} v_i(\tau) \right), \quad a_0 = 1/R^2 C^2$$

$$\text{and } \omega = \sqrt{a_0} = 1/RC.$$

To examine the affect of various kinds of forced function on magnitude of natural response, let us consider for the case forced input respectively be $v_{i1}(\tau) = V_{DC}$, $v_{i2}(\tau) = V_p \cos(\omega_m \tau)$ and $v_{i3}(\tau) = (2f_{ramp} V_p) \tau$. By substituting each case of forced input into (18), it then respectively results in the following forced functions

$$f_1(\tau) = -2V_{DC}/R^2 C^2 = K \quad (19)$$

$$f_2(\tau) = -2 \left(\frac{V_p}{R^2 C^2} \sqrt{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)^2 + (3\omega_m RC)^2} \right) \times \cos(\omega_m \tau - \tan^{-1}(-3\omega_m RC/(1 - \omega_m^2 R^2 C^2))) \quad (20)$$

$$f_3(\tau) = -2 \left(\frac{6}{RC} f_{ramp} V_p + \frac{2}{R^2 C^2} f_{ramp} V_p \tau \right) \quad (21)$$

At $t = t_0 = 0$, the initial condition $v_o(0) = X_0 = \pm V_{SAT}$, where V_{SAT} is Op-amp saturation voltage. The complete responses are given in (22) - (24) respectively for $v_{o1}(\tau)$, $v_{o2}(\tau)$ and $v_{o3}(\tau)$

$$v_{o1}(t, \tau) = (\pm V_{SAT} + 2V_{DC}) \cos(t/RC) - 2V_{DC} \\ = \begin{cases} (2V_{DC} + V_{SAT}) \cos(t/RC) - 2V_{DC}, & V_{DC} < 0 \\ (2V_{DC} - V_{SAT}) \cos(t/RC) - 2V_{DC}, & V_{DC} > 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$v_{o2}(t, \tau) = \left\{ \pm [V_{SAT} - B \cos(\omega_m \tau - \phi)] \cos(t/RC) \right\} \\ + B \cos(\omega_m \tau - \phi) \quad (23)$$

$$\text{where } B = \frac{-2V_p}{1 - \omega_m^2 R^2 C^2} \sqrt{(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)^2 + (3\omega_m RC)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}(-3\omega_m RC/(1 - \omega_m^2 R^2 C^2)).$$

$$v_{o3}(t, \tau) = \left\{ (\pm V_{SAT} + 2((2f_{ramp} V_p) \tau + 6f_{ramp} R C V_p)) \cos(t/RC) \right\} \\ - 2((2f_{ramp} V_p) \tau + 6f_{ramp} R C V_p). \quad (24)$$

As can be seen from (22) - (24), the forced response is appeared in the amplitude term of natural response. Hence to verify the new analysis technique, the experimental results of the described Wein bridge oscillator are illustrated in the following section.

3. RESULTS

In this section, the Wein bridge oscillator is experimented to verify the analysis given in the previous section. However, due to confined space, only the experimental

result for a $2V_{pp}$, 144Hz saw-tooth forcing input is demonstrated. The natural response frequency is set at 1.7kHz using Op-amp LM741 with $\pm 9V$ supply voltage. It is interesting to note that an additional circuit which is left to mention in detail is employed to filter the second term of (18). This is to particularly gain insight into the natural response of the circuit.

Fig. 2. demonstrates the numerical results based on conventional analysis where the upper trace is ramp input, the middle trace is complete response, and the lower trace is only natural response part. Fig. 3., (a), (b), and (c) are the results from experiment, PSPICE simulation, and numerical results of proposed analysis where lines shown in each figure are in the same order as of Fig. 2. As can be seen, the results derived from PSPICE simulation and experiment agree well with that of numerical analysis based on the proposed analysis concept.

In addition, it is obvious that the numerical result in Fig. 2. based on conventional concept is different from both experiment and simulation shown in Fig. 3(a) and 3(b), respectively. For the case of a DC forcing function, it can be seen in [1]. In this case, one might expect that there is no difference between the results based on new and conventional analysis techniques. This is because a DC force function is always constant over time. However, for a time-varying forced function, it is verified that the new analysis can provide more exact response of the second ODE system than conventional analysis. Since the force function results in forced response and forced response has an influence on amplitude of natural response. Thus, amplitude of natural response can be easily controlled by forced function.

4. CONCLUSIONS

A new theoretical analysis for amplitude controlled by forced response of sinusoidal oscillator is proposed in this work. The new analysis has been shown that for a time-varying forced function, amplitude of natural response does not depend on the circuit's initial condition and the forced response given only at the initial time but also at any arbitrary time. Hence, in stead of setting initial condition of the circuit to control amplitude, it can be alternatively controlled by adjusting the forcing function. The experiment result for a ramp forcing function have been illustrated and agreed well with the proposed analysis. However, the conventional analysis is still be true for a constant forced function.

In addition, this paper mainly focuses on the proposed analysis technique of how the forced response is presented in a term of natural response magnitude. The error analysis of the Wein bridge oscillator is therefore omitted to mention due to limited space.

5. REFERENCES

- [1] P. Wardkein, C. Wongsuwon and T. Maneechukate, "The simple sinusoidal oscillator amplitude control by forced response," 23rd Electrical Engineering Conference (Thai Language), November 2000, pp. 645 - 648.

- [2] B. Thamwut, P. Wardkein and T. Maneechukate, "A simple amplitude control by forced response for current mode oscillator," *24th Electrical Engineering Conference (Thai Language)*, 2001, pp. 1018 – 1023.
- [3] P. Tuwanut, P. Wardkein, and T. Maneechukate, "7 decade low frequency switched capacitor oscillator," *IEEE Proc. of the 44th Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol. 2, August 2001, pp. 785 – 788.
- [4] J.I. Osa, and A.Carlosena, "MOSFET-C sinusoidal oscillator with variable frequency and amplitude," *IEEE Int. Symposium Circuits and Systems*, vol. 2, 2000, pp. 725 – 728.
- [5] I.M. Filanovsky, "A sinusoidal VCO with control of frequency and amplitude," *IEEE Proc. of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems*, vol.1, 1990, pp. 446 – 449.
- [6] I.M. Filanovsky, Qin Shui-Sheng, and G. Kothapalli, "Sinusoidal oscillator with voltage controlled frequency and amplitude," *Int. J. Electronics*, vol. 68, 1990, pp. 95 –112.
- [7] I.M. Filanovsky, "Oscillators with amplitude control by restoration of capacitor initial conditions," *IEE Proc.*, vol.134, pt. G., 1987, pp. 31-37.
- [8] I.M. Filanovsky, "A Wein bridge RC oscillator with fast amplitude control," *Int. J. Electronics*, vol. 58, 1985, pp. 817 – 826.
- [9] J. Roychowdhury, "Analyzing circuits with widely separated time scales using numerical PDE methods," *IEEE Trans. Circuits and Systems Fundamental Theory and Application*, vol. 48, 5, 2001, pp. 578-594.
- [10] C.K. Alexander and M.N.O. Sadiku, *Fundamentals of Electric Circuits*, Boston:McGraw Hill, 2000.
- [11] D.E. Johnson, J.R. Johnson, J.L. Hilburn, *Electric Circuit Analysis*, Englewood Cliffs : Prentice-Hall, 1989, pp. 163-290.
- [12] B.J. Rice and J.D. Strange, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Pacific Grove : Brooks/Cole Publishing, 1989.
- [13] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, New York : John Wiley&Sons, 1988.

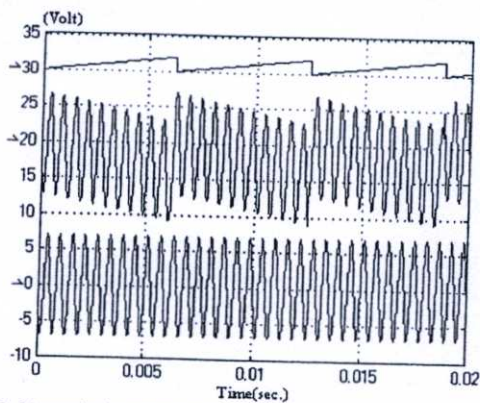


Fig. 2. Numerical results based on conventional analysis : forced input (upper trace), complete response (middle trace), natural response (bottom trace).

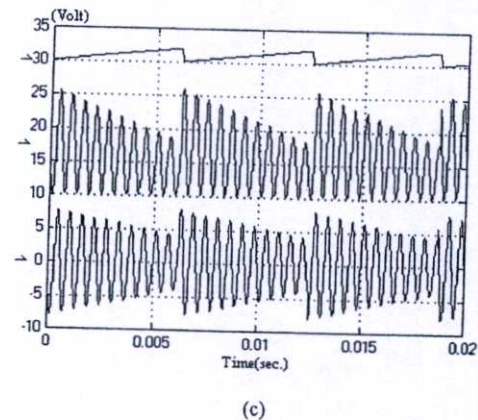
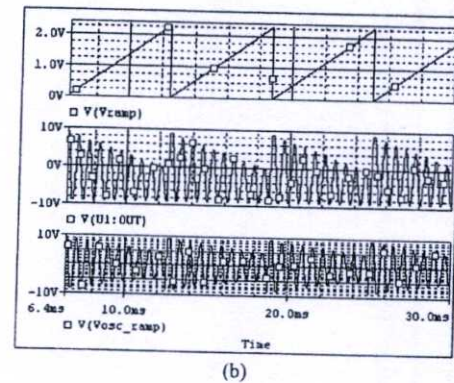
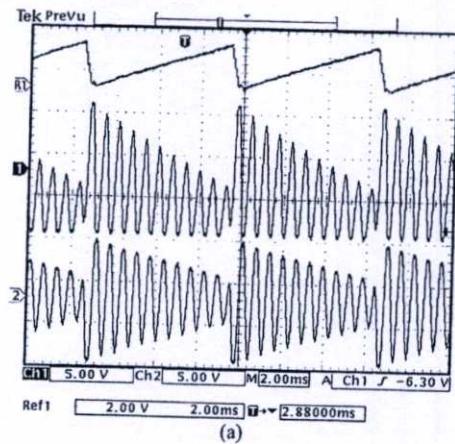


Fig. 3. (a), (b) and (c) illustrate amplitude controlled by the forced response derived from experiment, PSpice simulation and numerical result based on the proposed analysis, respectively, where the upper trace, middle trace and lower trace respectively are the ramp forcing signal, the complete response, and the resulted natural response (forced response is filtered).



ISCAS 2006

2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems

May 21 - 24, 2006 □ Island of Kos, Greece

CIRCUITS AND SYSTEMS: AT CROSSROADS OF LIFE AND TECHNOLOGY

Welcome

Committees

Table of contents

Keynotes

Technical program

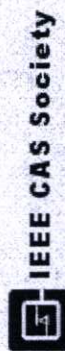
Author index

Tutorials

Session chair index

Help

Search



IEEE Catalog Number:

06CH37717C

ISBN:

0-7803-9390-2

Library of Congress:

80-646530

© 2006 IEEE. Personal use of this material is permitted. However, permission to reprint/republish this material for advertising or promotional purposes or for creating new collective works for resale or redistribution to servers or lists, or to reuse any copyrighted component of this work in other works must be obtained from the IEEE.

Amplitude Modulation Based on Time-Varying Forced Function of Second-Order Oscillator Circuit

Thongchai Maneechukate, Jeerasuda Koseeyaporn,
Paramote Wardkein
Faculty of Engineering
Department of Telecommunication Engineering
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Ladkrabang, Bangkok Thailand 10520

Poolsak Koseeyaporn
Faculty of Technical Education
Department of Teacher Training in Electrical Engineering
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok
Bangsue, Bangkok Thailand 10800

Abstract—This paper presents a novel technique of amplitude modulation which is based on a second-order oscillator circuit. By using the multi-time technique to analyze a second-order system for time-varying forced function, it is found that the system's forced response not only at an initial time but also at any arbitrary time is presented in term of the natural response's magnitude. It implies that amplitude of the natural response can directly be controlled by the forced response. For a condition that the forced response and the time-varying forced function is approximately identical, the resulted complete response of the second-order system therefore is amplitude modulation where the natural response and the time-varying forced function respectively represents sinusoidal carrier and information signals. To confirm the proposed technique, experimental results have been demonstrated which agree well with the given theoretical analysis.

I. INTRODUCTION

In communication system, amplitude modulation (AM) has played an important role for many decades [1-3]. This is because it produces simple, robust wave that does not use much spectral or radio bandwidth which is still be used by citizens' band radios. Its general principle is that carrier signal is modulated in proportion to the strength of information signal. Generally, an AM system requires an oscillator and a modulator which modulates the information signal and the carrier sinusoidal signal obtained from the oscillator. In this paper, a more compact AM system is proposed where the modulator and oscillator are incorporated in one circuit.

Recently, the multi-time (separated time scales) analysis technique was proposed by [4]. By employing such mathematical technique, [5] has demonstrated that for a time-varying forced function, natural response of a second-order system is depended on forced response not only at an initial time but also at any arbitrary time. It therefore implies that the natural response is changed in proportion to the forced response. Hence, for a condition that the forced

response and the time-varying forced function are approximately equal, the second-order system is thus can be applied for AM application, where the natural response is a sinusoidal carrier and the forced response is a modulating input signal.

Based on the given introduction of the proposed concept, the paper will be organized as follows. The proposed principle is described in section II where the condition of the particular second-order system (quadrature circuit) such that its forced response and the time-varying forced are approximately identical are also demonstrated. To confirm the given analysis, the experiment results of the quadrature circuit are illustrated in section III. Finally, the section IV is devoted for the conclusions of this paper.

II. PRINCIPLE

A. Multi-time analysis

To gain insight into the n^{th} -order system analysis, the first and second-order differential equations are generally employed to demonstrate mathematical analysis. Let us consider a second-order system whose system equation is defined as

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t) \quad (1)$$

where $(')$ and $('')$ represent first and second order of differentiation, respectively. In addition, the constants a_0, a_1 are known parameters and $f(t)$ is the input forced function. It is well known that a complete solution of (1) is composed of the natural response $x_n(t)$ and the forced response $x_f(t)$ as defined by $x(t) = x_n(t) + x_f(t)$.

In conventional analysis, the natural solution can be determined by solving the homogenous equation which is $x_n''(t) + a_1x_n'(t) + a_0x_n(t) = 0$ where $\sigma = -a_1/2$ and

$\omega = \left(\sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)/2$ are damping coefficient and natural radian frequency, respectively. The natural response thus is

$$x_n(t) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} \quad (2)$$

Furthermore, A_1 and A_2 are constants which are respectively determined by using initial conditions $x(t_0)$ and $x'(t_0)$ where t_0 is the initial time. On the other hand, the forced response solution is solved by

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t). \quad (3)$$

The complete response can therefore be expressed as

$$x(t) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} + x_f(t). \quad (4)$$

Let us eliminate the damping effect ($\sigma = 0$) and set constants A_1 and A_2 to be equal to $A/2$, it then yields

$$x(t) = A \cos \omega t + x_f(t). \quad (5)$$

As a result, the natural solution is a cosine function where the constant A can be obtained by substituting $x'(t_0) = 0$ and $x(t_0) = X_0$ into (5) which is

$$A = (X_0 - x_f(t_0)) / \cos \omega t_0. \quad (6)$$

The complete response is therefore rewritten as

$$x(t) = \left[(X_0 - x_f(t_0)) / \cos \omega t_0 \right] \cos \omega t + x_f(t). \quad (7)$$

By letting the initial time t_0 be zero, (7) thus becomes

$$x(t) = (X_0 - x_f(0)) \cos \omega t + x_f(t). \quad (8)$$

As can be seen in (8), the initial condition X_0 and the forced response $x_f(0)$ are shown in amplitude of the oscillated sinusoidal signal. Based on this conventional analysis, it implies that amplitude of the first term of (8) is constant even though the forced response is dynamic. However, [5] has demonstrated by theoretical analysis and experimental results that amplitude of the natural response is also varied correspondingly to the forced response when the forced function is time-varying. A review of such analysis will be described as follows.

By applying the separated time scales concept [4], let us define the forced function, which can be given to the network at any arbitrary time, as $f(\tau)$. Hence, (1) can be rewritten as following

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(\tau). \quad (9)$$

The forced response $x_f(\tau)$ is determined by

$$x_f''(\tau) + a_1 x_f'(\tau) + a_0 x_f(\tau) = f(\tau). \quad (10)$$

In this case, the complete response can therefore be expressed as

$$x(t, \tau) = A_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2 e^{(\sigma-j\omega)t} + x_f(\tau). \quad (11)$$

where $x(t, \tau)$ is the complete solution in aspect of the separated time scales. Similarly, by setting σ to be zero and $A_1 = A_2 = A/2$, the complete response then is

$$x(t, \tau) = A \cos \omega t + x_f(\tau). \quad (12)$$

Hence, the constant A is obtained by substituting the initial value at time $t = t_0 = 0$, $x'(0) = 0$ and $x(0, \tau) = X_0$ into (12) resulting in

$$A = (X_0 - x_f(\tau)) / \cos \omega t_0. \quad (13)$$

The complete response thus is

$$x(t, \tau) = (X_0 - x_f(\tau)) \cos \omega t + x_f(\tau). \quad (14)$$

As can be seen in (14), amplitude of the natural response depends on initial value X_0 and the forced response at any arbitrary time $x_f(\tau)$. The analysis result implies that the forced response has influence on amplitude of the natural response not only at the initial time $\tau = t_0$ but also at any arbitrary time. In addition, it is seen that the complete response shown by (14) provides the identical result to that of conventional analysis if the forced function is constant (e.g. DC).

Moreover, it is interesting to note that for a condition which results in $x_f(\tau) \simeq f(\tau)$, (14) then becomes

$$x(t, \tau) = (X_0 - f(\tau)) \cos \omega t + f(\tau). \quad (15)$$

Thus, when the forced function $f(\tau)$ is the information signal, the first term of (15) is obviously an AM output. The second-order system for the time-varying forced input can therefore be applied for AM modulator. The condition such that the forced response is approximately identical to the forced function of the particular second-order system (quadrature oscillator) will be given in the following subsection.

A. Quadrature circuit

A quadrature oscillator circuit, as shown in Fig. 1, is chosen to be an example to verify the described principle. The output $v_o(t)$ of the circuit is given by

$$C^2 R^2 \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + v_o(t) = v_i(\tau). \quad (16)$$

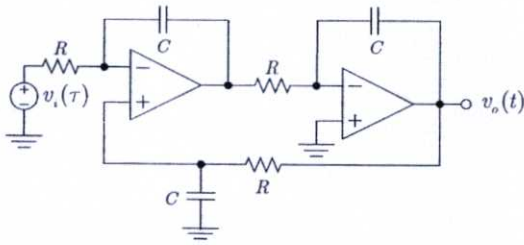


Fig. 1. Quadrature oscillator.

The complete response thus is $v_o(t, \tau) = v_{on}(t) + v_{of}(\tau)$ where $v_{on}(t)$ and $v_{of}(\tau)$ are the natural response and the forced response, respectively. $v_{on}(t)$ can be determined by solving the following homogeneous equation

$$C^2 R^2 \frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + v_o(t) = 0 \quad (17)$$

which results in

$$v_{on}(t) = A_1 e^{j\frac{1}{RC}t} + A_2 e^{-j\frac{1}{RC}t} \quad (18)$$

where $\omega_n = \frac{1}{RC}$ is a natural frequency. In order to obtain sinusoidal waveform, the constants in (18) must be equal. By setting $A_1 = A_2 = A/2$, hence the complete response is

$$v_o(t, \tau) = v_{on}(t) + v_{of}(\tau) = A \cos \omega_n t + v_{of}(\tau). \quad (19)$$

In addition, by substituting $v_o(0, \tau) = \pm V_{sat}$ and $v_o'(0, \tau) = 0$ then $A = \pm V_{sat} - v_{of}(\tau)$ and (19) can be rewritten as

$$v_o(t, \tau) = [\pm V_{sat} - v_{of}(\tau)] \cos \omega_n t + v_{of}(\tau). \quad (20)$$

Let us consider the case that $v_i(\tau) = V_p \cos \omega_m \tau$ whose forced response is defined by

$$v_{of}(\tau) = \frac{V_p}{(1 - R^2 C^2 \omega_m^2)} \cos \omega_m \tau. \quad (21)$$

Additionally, the denominator of (21) can be expressed in the following form

$$1 - R^2 C^2 \omega_m^2 = 1 - \frac{\omega_m^2}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2} = 1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_n^2}$$

where ω_m and ω_n are frequency of information and carrier signals, respectively. Hence, if $\omega_n \gg \omega_m$ therefore

$\frac{\omega_m^2}{\omega_n^2} \ll 1$ resulting in $1 - R^2 C^2 \omega_m^2 = 1 - \frac{\omega_m^2}{\omega_n^2} \approx 1$. Equation

(21) can therefore be rewritten by

$$v_{of}(\tau) = V_p \cos \omega_m \tau = v_i(\tau). \quad (22)$$

It is seen that for a condition that $\omega_n \gg \omega_m$ (which ω_n generally is greater than $10\omega_m$ in modulation process), the forced response is approximately equal to the forced function. By substituting (22) into (20), the complete response then becomes

$$v_o(t, \tau) = [\pm V_{sat} - v_i(\tau)] \cos \omega_n t + v_i(\tau). \quad (23)$$

As can be seen, the first term of (23) represents the AM output where the forced function $v_i(\tau)$ is the information signal and the natural response is the carrier sinusoidal signal. To obtain only the AM output, the second term is therefore filter out resulting in

$$v_o(t, \tau) = \begin{cases} [-V_{sat} + v_i(\tau)] \cos \omega_n t, & v_i(\tau) < 0 \\ [+V_{sat} - v_i(\tau)] \cos \omega_n t, & v_i(\tau) > 0. \end{cases} \quad (24)$$

Equation (24) indicates that the envelope of AM output is either negative or positive all the time, depending on $v_i(\tau)$.

The modulation index of either cases thus is $\frac{v_{i(p)}(\tau)}{|V_{sat}|}$ which is certainly between 0 and 1 where $v_{i(p)}(\tau)$ is peak amplitude of the forced function. To verify the described analysis of the quadrature oscillator, the experimental results are illustrated in the following section.

III. EXPERIMENTAL RESULTS

For the experiment on the quadrature oscillator shown in Fig. 1., the op-amp LM741 and $\pm 9V$ supply voltage are employed where the natural frequency was set at 14.4kHz. It is noted that to obtain only the natural response which is the AM signal, the forced response (the second term of (23)) is filtered out. In this experiment, three different forced functions (information signals) are employed which are $1V_{pp}$, 200Hz sinusoidal signal, $1.2V_{pp}$, 200Hz ramp signal, and $1V_{pp}$, 200Hz squarewave signal, respectively.

The results when the forced function is the sinusoidal signal are illustrated in Fig. 2. where the upper trace and middle traces are the forced function and the AM output, respectively. Moreover the spectrum components of the resulted AM output is given in the lower trace. It is shown that the center frequency is 14.4kHz where the left-handed side and right-handed side of the center frequency are 14.2kHz and 14.6kHz, respectively. For the ramp forced function, the experimental results are given in Fig. 3. As can be seen in the lower trace, the center frequency is shown at 14.4kHz whereas the 1st, 2nd, and 3rd harmonics respectively are 14.6kHz, 14.8kHz, and 15.0kHz. Similarly, for the squarewave input signal, the frequency components are centered at 14.4kHz where 14.8kHz and 15.0kHz are respectively the 1st harmonic, and the 3rd harmonic.

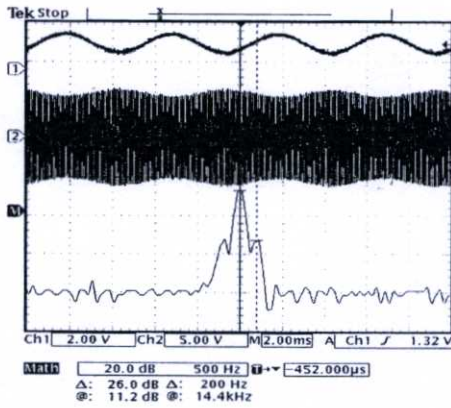


Fig. 2. The experimental results where the upper trace is sinusoidal information signal, the middle trace is AM signal, and the lower trace is frequency components of the resulted AM output.

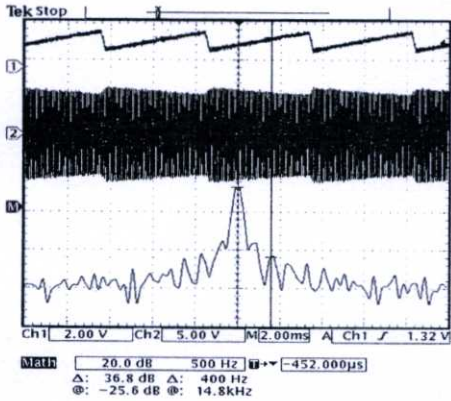


Fig. 3. The experimental results where the upper trace is ramp information signal, the middle trace is AM signal, and the lower trace is frequency components of the resulted AM output.

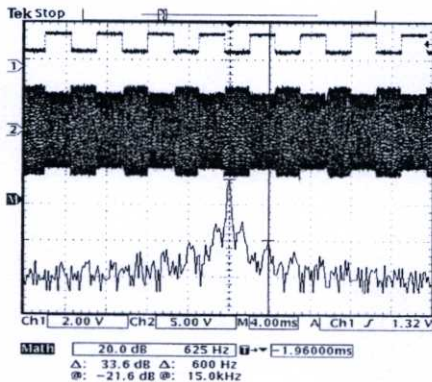


Fig. 4. The experimental results where the upper trace is squarewave information signal, the middle trace is AM signal, and the lower trace is frequency components of the resulted AM output.

IV. CONCLUSIONS

A novel AM system based on time-varying forced function of a second-order system is proposed. By employing the technique of multi-time analysis, it has been shown that the time-varying forced response has influence on amplitude of natural response not only at the initial time but also at any arbitrary time. When the natural response represents as sinusoidal carrier signal (whose frequency is ω_n) and the forced function behaves as information input (whose frequency is ω_m), the natural response thus is the AM signal where the condition $\omega_n \gg \omega_m$ is applied. It is noted that the condition $\omega_n \gg \omega_m$ can be applied for other second-order systems, e.g. Wein bridge oscillator. Unfortunately, the analysis and experimental results of other circuits cannot be demonstrated due to the limited space. However, the experimental results of a quadrature circuit for sinusoidal, ramp, and squarewave forced functions are demonstrated to confirm the theoretical analysis. In addition, it is seen that the carrier oscillator and modulator which are the important parts of AM system are inherent in the proposed circuit. The proposed AM circuit thus provides a simple and compact architecture over the convention systems.

References

- [1] J. Tchorz and B. Kollmeier, "SNR estimation based on amplitude modulation analysis with applications to noise suppression," *IEEE Trans. Speech and Audio Processing*, vol.11, 3, May 2003, pp. 184-192.
- [2] L. Yufeng, "A double-sideband transmitted carrier amplitude modulation method for laser texture characterization," *IEEE Trans. Magnetics*, vol.34, 4, July 1998, pp. 1768-1770.
- [3] N. Tessler, M. Margalit, G. Eisenstein, and U. Koren, "Wide-band amplitude modulation by electrooptic tuning of the center wavelength in short-cavity distributed Bragg reflector lasers," *IEEE Journal Selected Topics in Quantum Electronics*, vol.1, 2, June 1995, pp. 490-493.
- [4] J. Roychowdhury, "Analyzing circuits with widely separated time scales using numerical PDE methods," *IEEE Trans. Circuits and Systems Fundamental Theory and Application*, vol. 48, 5, 2001, pp. 578-594.
- [5] T. Manechukate, P. Tuwanut, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, "New analytic solution of second-order oscillator using multi-time variables technique," *IEEE Int. Symp. Intelligent Signal Processing and Communication Systems*, Dec. 2005, pp.637-640.

Volume 62, Issue 9, Pages 643-716 (1 October 2008)

Email Articles Export Citations Download PDFs Open All Previews

1. **Editorial Board**
Page IFC

Preview PDF (1537 K) | Related Articles

Regular Papers

2. **New reverse converters for the moduli set $\{2^m-3, 2^m-1, 2^m+1, 2^m+3\}$**
Pages 643-658

P.V. Ananda Mohan
 Preview PDF (311 K) | Related Articles

3. **Cross-layer design based on RC-LDPC codes in MIMO channels with estimation errors**
Pages 659-665

Yuling Zhang, Dongfeng Yuan, Cheng-Xiang Wang
 Preview PDF (266 K) | Related Articles

4. **Wide-band amplitude control of the second-order oscillator circuit**
Pages 666-673

Thongchai Maneechukate, Jeerasuda Koseeyaporn, Paramote Wardkein, Poolsak Koseeyaporn
 Preview PDF (1199 K) | Related Articles

5. **A robust prediction model using ANFIS based on recent TETRA outdoor RF measurements conducted in Riyadh city – Saudi Arabia**
Pages 674-682

Faihan D. Alotaibi, Adel Abdenmour, Adel A. Ali



= Full-text available
 = Abstract only

Articles in Press

Volume 63 (2009)

Volume 62 (2008)

Volume 62, Issue 10
pp. 717-786 (1
November 2008)

Volume 62, Issue 9 -
selected
pp. 643-716 (1 October
2008)

Volume 62, Issue 8
pp. 565-642 (1
September 2008)

Volume 62, Issue 7
pp. 483-564 (1 August
2008)

Volume 62, Issue 6
pp. 401-482 (2 June
2008)

Volume 62, Issue 5
pp. 327-400 (5 May
2008)

Volume 62, Issue 4
pp. 245-326 (1 April
2008)

Volume 62, Issue 3

Wide-band amplitude control of the second-order oscillator circuit

Thongchai Maneechukate^a, Jeerasuda Koseeyaporn^{a,*}, Paramote Wardkein^a,
Poolsak Koseeyaporn^b

^aDepartment of Telecommunication Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

^bDepartment of Teacher Training in Electrical Engineering, Faculty of Technical Education, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok, Bangsue, Bangkok 10800, Thailand

Received 31 August 2006; accepted 31 August 2007

Abstract

In this paper, a new analysis technique of an ordinary second-order oscillator which is based on multi-time concept is proposed. This mathematical analysis results in a new closed-form solution of a system complete response. It is found that amplitude of the natural response is not constant but varied with the forced response of the system. For a constant forcing function proposed, the new analysis is identical to the conventional analysis. In the case of time-varying forcing function, however, it is different from the conventional approach. Based on such analysis, it implies that the amplitude of a second-order oscillator can easily be controlled by forced response of the system. Hence, the obtained result based on the proposed analysis technique provides a proper mathematical solution for the system, especially in a time-varying forcing function. Moreover, the mathematical analysis for the wide-band characteristic of a second-order oscillator is also described. The experimental results demonstrate the responses of the oscillator which agree well between the theoretical and simulation results.

© 2007 Elsevier GmbH. All rights reserved.

Keywords: Second-order oscillator; Multi-time technique; Time-varying forced signal; Wide-band second-order oscillator structure

1. Introduction

An oscillator circuit is theoretically well-known to be a system whose periodic output is ideally generated without any input requirement. It is one of many important circuits which are widely used in measurement systems and electronic equipments. It also plays an essential role in a communication system such as amplitude modulation (AM). Hence oscillator has gained much attention and been developed over the decades [1–11]. Most developments have been focusing on stability, dimension, oscillated frequency and amplitude control. In this paper, amplitude control is

specially considered. In order to control the amplitude of the oscillated signal, two methods are usually applied; the method of initial condition determination [6–9] and the method that makes use of the multiplier circuit [5].

For the first technique, it requires the restoration of the initial condition in every cycle of the oscillated output resulting in large dimension of the circuit. In addition, if the process of restoration is not complete, it can significantly cause harmonic distortion to the oscillated signal. For the second method, it also has similar drawbacks in large circuit dimension and distortion due to nonlinearity of the multiplier circuit. Consequently, a new technique of amplitude control where these problems can be alleviated is therefore required.

In this paper, a new technique for controlling amplitude of the oscillator output is proposed. It is derived from the

* Corresponding author. Tel.: +66 23264242; fax: +66 23264554.
E-mail address: kkjeeras@kmitl.ac.th (J. Koseeyaporn).

analysis of a second-order oscillator based on multi-time realization. The obtained result demonstrates that the amplitude of the natural response of the system is a function of the forced response at any arbitrary time. Conventionally, it is recalled that amplitude of the natural response depends only on the forced response at the initial time. The new analysis solution thus seems to be different than that of the conventional approach. However, for a constant forcing function resulting in a constant forced response, the two analytical solutions are identical. But for the case of time-varying forcing function, the results derived from these two solutions are obviously different.

In this paper, it will be organized as follows. In Section 2, the review of the conventional analysis of a second-order oscillator is given where the new analysis which is based on multi-time realization is described in Section 3. Later, the proposed analysis will be applied to some particular oscillators. Moreover, to support a wide-band structure of the oscillator, the mathematical analysis is also described in Section 4. In Section 5, the simulation and experimental results are demonstrated to confirm the proposed analysis. Finally, Section 6 is devoted to the conclusions of this paper.

2. Review of the conventional analysis

In this section, a brief review of the conventional analysis of second-order system is firstly given. In general, differential equation is employed to describe dynamic behavior of the system. By considering a second-order system, the system equation can be expressed as

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(t), \quad (1)$$

where (') and (") represent the first and the second order of differentiation, respectively. In addition, the parameters a_0 and a_1 are constants where $f(t)$ is the input forcing function. From Eq. (1), the complete solution is a superposition of the natural response $x_n(t)$ and the forced response $x_f(t)$ as defined by $x(t) = x_n(t) + x_f(t)$.

In general, the natural solution is determined by solving the homogenous equation, which is

$$x_n''(t) + a_1x_n'(t) + a_0x_n(t) = 0. \quad (2)$$

For the case of oscillation in which $a_1^2 < 4a_0$, the obtained natural response therefore is

$$x_n(t) = A_1e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2e^{(\sigma-j\omega)t}, \quad (3)$$

where $\sigma = -a_1/2$ and $\omega = \left(\sqrt{|a_1^2 - 4a_0|}\right)/2$ are damping coefficient and natural radian frequency, respectively. In addition, A_1 and A_2 are constants which are, respectively, determined by using initial conditions $x(t_0)$ and $x'(t_0)$, where t_0 is the initial time. On the other hand, the solution of the forced response is solved from

$$x_f''(t) + a_1x_f'(t) + a_0x_f(t) = f(t). \quad (4)$$

Hence, the complete response of the system can be expressed as

$$x(t) = A_1e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2e^{(\sigma-j\omega)t} + x_f(t). \quad (5)$$

To eliminate the damping effect, let the damping factor be zero ($\sigma = 0$) and the constants A_1 and A_2 be $A/2$, which then yields

$$x(t) = A \cos \omega t + x_f(t). \quad (6)$$

As a result, the natural response is a cosine function where the constant A is determined by substituting $x'(t_0) = 0$ and $x(t_0) = X_0$ into Eq. (6) which is $A = (X_0 - x_f(t_0))/\cos \omega t_0$. The complete response is therefore rewritten as

$$x(t) = [(X_0 - x_f(t_0))/\cos \omega t_0] \cos \omega t + x_f(t). \quad (7)$$

For convenience, the initial time t_0 is generally zero, Eq. (7) thus becomes

$$x(t) = (X_0 - x_f(0)) \cos \omega t + x_f(t). \quad (8)$$

As can be seen in Eq. (8), the initial condition X_0 and the forced response at the initial time $x_f(0)$ determine amplitude of the oscillated sinusoidal signal. Since $x_f(0)$ is the value of the forced response at the initial time only, hence, the obtained solution shown in Eq. (8) implies that amplitude of the natural response is constant even though the forced response is time varying. In the next section, a new solution which provides the explanation to the system for general case of a forcing function is therefore explored and proposed.

3. The proposed analysis

It is noted that, the concept of multi-time realization recently proposed in [12] has been applied in this work where another variable of time, which is τ , is introduced in this analysis. With this concept, the forcing function, which can be applied to the second-order oscillator at any arbitrary time, is defined as $f(\tau)$. Hence, Eq. (1) is rewritten to be

$$x''(t) + a_1x'(t) + a_0x(t) = f(\tau), \quad (9)$$

where the forced response $x_f(\tau)$ is determined by

$$x_f''(\tau) + a_1x_f'(\tau) + a_0x_f(\tau) = f(\tau). \quad (10)$$

In this case, the complete response can be expressed in the following form:

$$x(t, \tau) = A_1e^{(\sigma+j\omega)t} + A_2e^{(\sigma-j\omega)t} + x_f(\tau), \quad (11)$$

where $x(t, \tau)$ is the complete solution in aspect of the separated time scales. Similarly, by setting σ to be zero and A_1, A_2 to be $A/2$, the complete response then is

$$x(t, \tau) = A \cos \omega t + x_f(\tau). \quad (12)$$

Hence, the constant A is obtained by substituting the initial value at $t = t_0 = 0$, $x'(0, \tau) = 0$, and $x(0, \tau) = X_0$ into

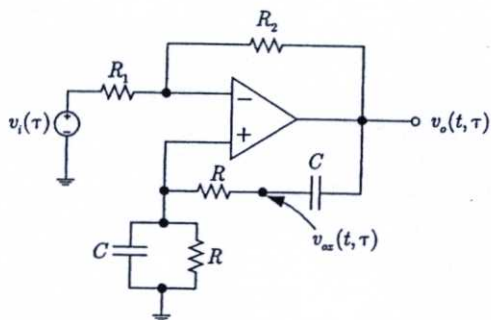


Fig. 1. Wein bridge oscillator.

Eq. (12), which results $A = (X_0 - x_f(\tau))$. The complete response thus is given by

$$x(t, \tau) = (X_0 - x_f(\tau)) \cos \omega t + x_f(\tau). \tag{13}$$

As can be seen in Eq. (13), amplitude of the natural response depends on initial value X_0 and the forced response $x_f(\tau)$ which is apparently varied with time. It can be inferred from the analytical result that the forced response has influence on amplitude of the natural response at any arbitrary time τ . It thus provides a method to control the amplitude of the oscillated output by using the forced response. In addition, the obtained result for the time-varying forcing function is obviously different than the conventional analysis. However, both analytical solutions agree to each other for the case of a constant forcing function (e.g. DC).

Based on the proposed analysis, it will be applied to three different structures of an oscillator which are Wein bridge, phase-shift and twin-T circuits. From the Wein bridge oscillator as shown in Fig. 1, the system output can be expressed by

$$v_0''(t) + \frac{1}{RC} \left(3 - \frac{1}{k_1} \right) v_0'(t) + \frac{v_0(t)}{R^2C^2} = -\frac{k_2}{k_1} \left(v_i''(\tau) + \frac{3v_i'(\tau)}{RC} + \frac{v_i(\tau)}{R^2C^2} \right), \tag{14}$$

where $k_1 = R_1/(R_1 + R_2)$, $k_2 = R_2/(R_1 + R_2)$, and $v_i(\tau)$ is forced input which is applied to the circuit at any arbitrary time. The damping effect on $v_0(t)$ is eliminated by setting the term $(3 - 1/k_1)/RC$ to be zero, or equivalently setting $k_1 = 1/3$ or $k_2/k_1 = R_2/R_1 = 2$ which results in

$$v_0''(t) + \frac{1}{R^2C^2} v_0(t) = -2 \left(v_i''(\tau) + \frac{3}{RC} v_i'(\tau) + \frac{v_i(\tau)}{R^2C^2} \right). \tag{15}$$

By comparing Eq. (15) with Eq. (9), it follows that $f(\tau) = -2(v_i''(\tau) + (3/RC)v_i'(\tau) + v_i(\tau)/R^2C^2)$, $a_0 = 1/R^2C^2$ and $\omega = \sqrt{a_0} = 1/RC$. For a constant forcing function which is $v_i'(\tau) = V_{DC}$ the following forced response is obtained:

$$f(\tau) = -2V_{DC}/R^2C^2 = K. \tag{16}$$

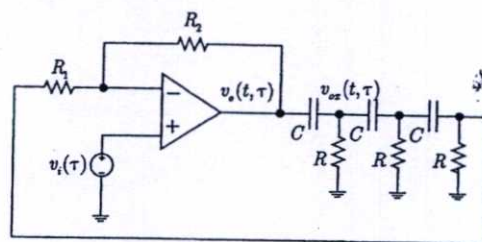


Fig. 2. Phase-shift oscillator.

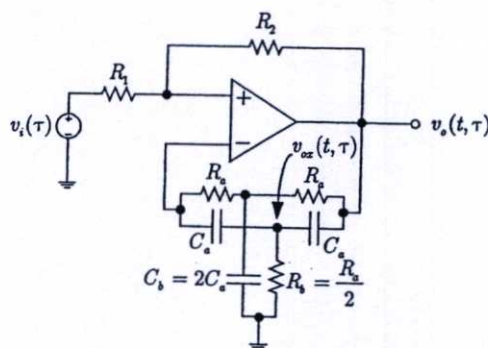


Fig. 3. Twin-T oscillator.

At $t = t_0 = 0$, the initial condition $v_0(0)$ which is X_0 thus is $\pm V_{SAT}$, where V_{SAT} is Op-amp saturation voltage. The complete response is therefore given by

$$v_0(t, \tau) = (\pm V_{SAT} + 2V_{DC}) \cos(t/RC) - 2V_{DC} = \begin{cases} (2V_{DC} + V_{SAT}) \cos(t/RC) - 2V_{DC}, & V_{DC} < 0, \\ (2V_{DC} - V_{SAT}) \cos(t/RC) - 2V_{DC}, & V_{DC} > 0. \end{cases} \tag{17}$$

It is noted that the output with no DC component can be obtained by $v_{ox}(t, \tau)$ (see Fig. 1). In similar fashion, the proposed analysis is applied to a phase-shift and a twin-T oscillators as shown in Fig. 2 and 3, respectively. For the phase-shift oscillator, it is found that the complete response of the system is

$$v_0(t, \tau) = \begin{cases} (kV_{DC} + V_{SAT}) \cos(t/\sqrt{6RC}) + kV_{DC}, & V_{DC} < 0, \\ (kV_{DC} - V_{SAT}) \cos(t/\sqrt{6RC}) + kV_{DC}, & V_{DC} > 0, \end{cases} \tag{18}$$

where $k = R_2/R_1 = 29$. In a case of the twin-T network shown in Fig. 3, the complete response is given by

$$v_0(t, \tau) = \begin{cases} (V_{DC} + V_{SAT}) \cos(t/R_b C_b) + V_{DC}, & V_{DC} < 0, \\ (V_{DC} - V_{SAT}) \cos(t/R_b C_b) + V_{DC}, & V_{DC} > 0. \end{cases} \tag{19}$$

4. Mathematical analysis for wide-band structure of an oscillator

In order to provide mathematical analysis for a wide-band oscillator, the quadrature structure is employed in the analysis. The circuit diagram of a simple quadrature oscillator is depicted in Fig. 4. By using nodal analysis, the following relationship is obtained:

$$C_1 C_2 R_1 R_2 \frac{d^2 v_0}{dt^2} = -A v_0. \tag{20}$$

Let A be a positive constant, the system's characteristic equation thus is

$$s^2 = \frac{-A}{R_1 R_2 C_1 C_2} = \frac{-A}{R_0 C_0}, \tag{21}$$

where $R_0 = R_1 R_2$, $C_0 = C_1 C_2$ resulting in $s_{1,2} = \pm j\sqrt{A/R_0 C_0}$. In addition, the natural response of the system is

$$v_{on}(t) = B_1 e^{j(\sqrt{A/R_0 C_0})t} + B_2 e^{-j(\sqrt{A/R_0 C_0})t} \tag{22}$$

which is real or complex depending on the parameters B_1 and B_2 . In real-world application, these parameters are controlled by the initial condition which is always real which results in $B_1 = B_2 = B$. Hence, Eq. (22) is rewritten as

$$v_{on}(t) = 2B \cos(\sqrt{A/R_0 C_0}t). \tag{23}$$

Eq. (23) implies that if the active elements (Op-amps) are ideal, the oscillated frequency, which is $\sqrt{A/R_0 C_0}$, can be controlled either by A or $R_0 C_0$ without re-adjusting the oscillated condition where amplitude of the oscillated output is not changed throughout the range of frequency band. However, due to non-ideal of the active elements, the bandwidth of the oscillator thus is limited by their frequency characteristic.

To take the non-ideal characteristic of the active elements into account, the integrator circuit shown in Fig. 4 is modeled with the non-ideal Op-amp [13] as depicted in Fig. 5. The system transfer function is found to be

$$\frac{v_i}{v_y} = -R \left\{ \left(\frac{1 + s\omega_L}{D} \right) \left(\frac{1 + sRC}{R} \right) + sC \right\}. \tag{24}$$

By substituting this non-ideal Op-amp model into the circuit shown in Fig. 4, the circuit can be depicted in Fig. 6

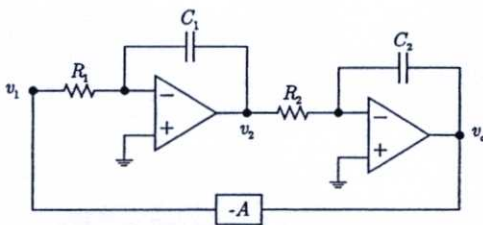
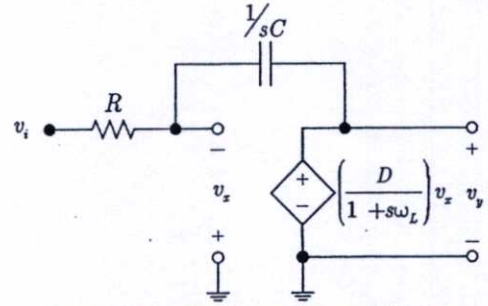
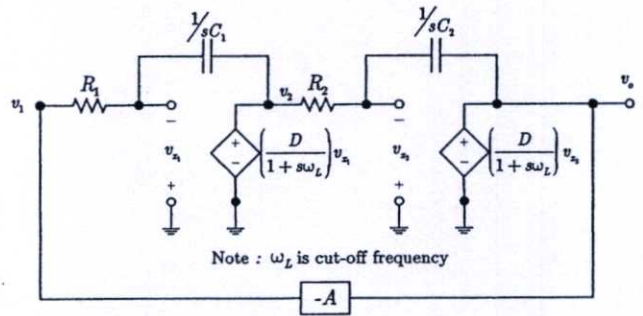


Fig. 4. The quadrature oscillator structure.



Note : D is DC gain, ω_L is cut-off frequency

Fig. 5. The integrator with non-ideal Op-amp realization [13].



Note : ω_L is cut-off frequency

Fig. 6. Quadrature oscillator with non-ideal Op-amp realization.

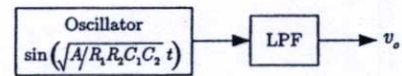


Fig. 7. Equivalent system of a quadrature oscillator.

where the following expressions are obtained:

$$v_1 = -R_1 \left\{ \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left(\frac{1 + sR_1 C_1}{R_1} \right) + sC_1 \right\} v_2, \tag{25}$$

$$v_2 = -R_2 \left\{ \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left(\frac{1 + sR_2 C_2}{R_2} \right) + sC_2 \right\} v_0, \tag{26}$$

$$v_1 = -A v_0. \tag{27}$$

By employing these relationships, it is found that

$$\begin{aligned} -\frac{A}{R_1 R_2} = s & \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left\{ C_2 \left(\frac{1 + sR_1 C_1}{R_1} \right) \right. \\ & \left. + C_1 \left(\frac{1 + sR_2 C_2}{R_2} \right) \right\} + s^2 C_1 C_2 \\ & + \left\{ \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right)^2 \left(\frac{1 + sR_1 C_1}{R_1} \right) \right. \\ & \left. \times \left(\frac{1 + sR_2 C_2}{R_2} \right) \right\}. \end{aligned} \tag{28}$$

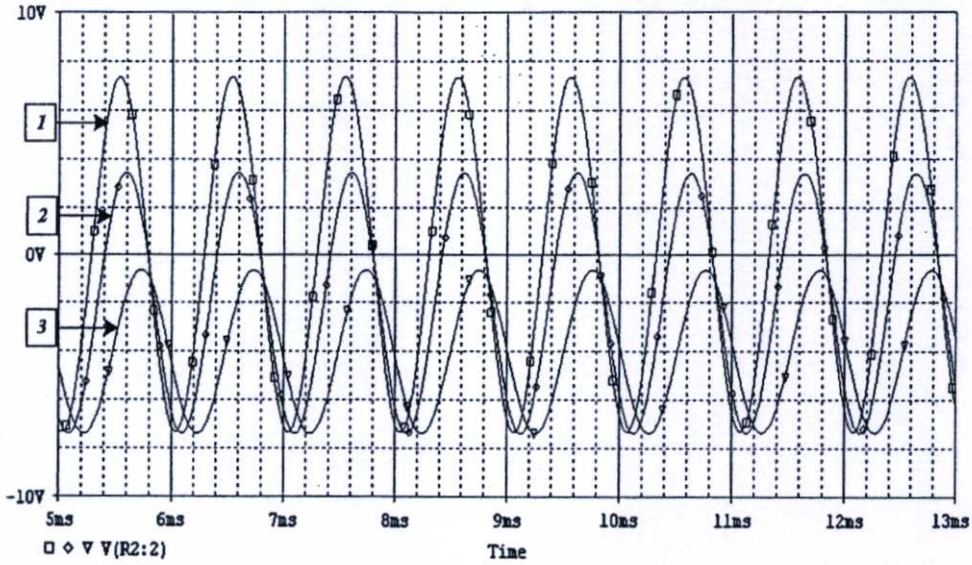


Fig. 8. The PSPICE simulation results of the Wein bridge oscillator where the 1st, 2nd, and 3rd traces are the complete response outputs $v_o(t, \tau)$ when the input voltage $v_i(\tau) = V_{DC}$ is 0, 1, and 2 volts, respectively.

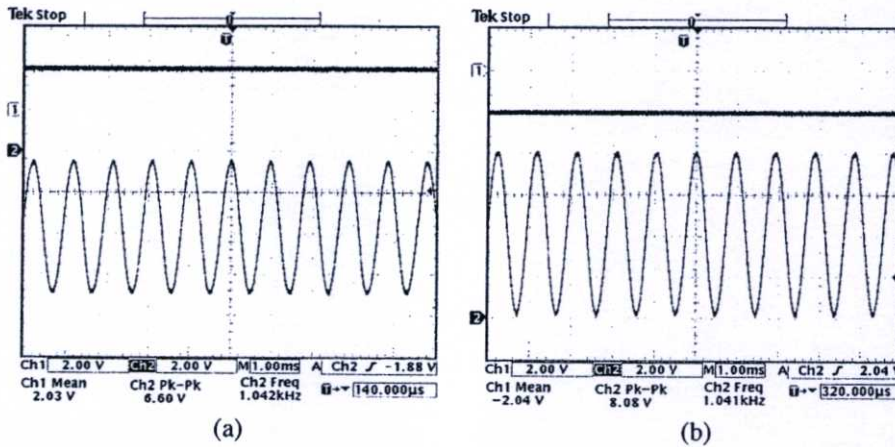


Fig. 9. The Wein bridge oscillator experimental results where the upper trace of (a) and (b) is +2V DC input voltage and -2V DC input voltage, respectively and the lower traces are the obtained complete response outputs.

Since the DC open-loop gain D is very high the last term shown on right-handed side of Eq. (28) thus can be neglected and as a result

$$-\frac{A}{R_1 R_2} = s \left(\frac{1 + \omega_L s}{D} \right) \left\{ C_2 \left(\frac{1}{R_1} + s C_1 \right) + C_1 \left(\frac{1}{R_2} + s C_2 \right) \right\} + s^2 C_1 C_2. \quad (29)$$

From Eq. (29), in case that R_1, R_2 and $\omega_L s$ are much greater than 1, then $1/R_1, 1/R_2$ are approximately zero and $(1 + \omega_L s)$ approximately is $\omega_L s$. Hence, the

following relationship is obtained:

$$s^3 + \frac{D}{2\omega_L} s^2 + \frac{AD}{2R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_L} = \left\{ \left(s + \frac{D}{2\omega_L} \right) \left(s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) \right\} - s \left(\frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) = 0. \quad (30)$$

As can be seen in Eq. (30), there are two cases for which Eq. (30) exists, which are

Case 1:

$$\left(s + \frac{D}{2\omega_L} \right) \left(s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right) = s \left(\frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2} \right). \quad (31)$$

Case 2:

$$\left(s + \frac{D}{2\omega_L}\right) \left(s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right) = 0,$$

$$s \left(\frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right) = 0. \tag{32}$$

The first case as shown in Eq. (31), however, is impossible. The second case where $s(A/R_1 R_2 C_1 C_2) = 0$ is therefore employed to approximate that

$$s^3 + \frac{D}{2\omega_L} s^2 + \frac{AD}{2R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_L}$$

$$\simeq \left(s + \frac{D}{2\omega_L}\right) \left(s^2 + \frac{A}{R_1 R_2 C_1 C_2}\right). \tag{33}$$

It is seen that $(s^2 + A/R_1 R_2 C_1 C_2)$ is an oscillatory term whose characteristic is band-pass whereas $(s + D/2\omega_L)$ is a

decay term whose characteristic is low-pass. It implies that when the oscillatory term is excited by the initial condition, the system behaves as an oscillator cascaded with a low-pass network (as depicted in Fig. 7). Hence, the range of oscillated frequency is limited by the frequency characteristic of the LPF system. For an active LPF system which is constructed by active element, i.e. non-ideal Op-amp, its cut-off frequency thus is the key parameter which determines the bandwidth of the oscillated frequency.

5. Simulation and experimental results

In this section, the simulation and experimental results of the Wein bridge, phase-shift, and twin-T oscillators will be demonstrated. It is noted that the output frequency of the Wein bridge, phase shift, and twin-T oscillators are set

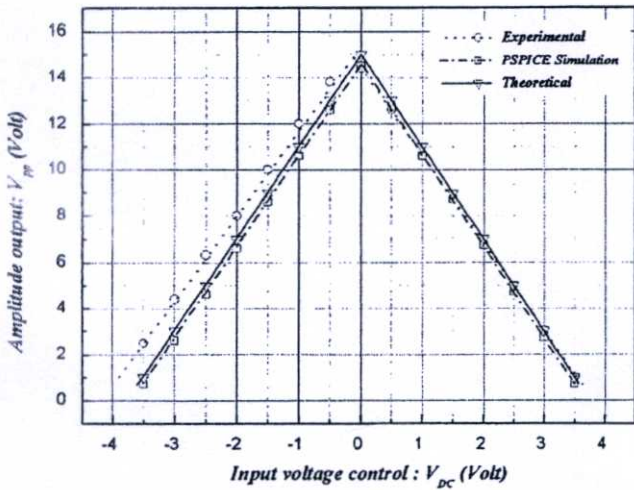


Fig. 10. Illustration of amplitude controlled by the forced response of the Wein bridge oscillator obtained from experiment, PSPICE simulation and theoretical results where the forced input is the varied DC voltage.

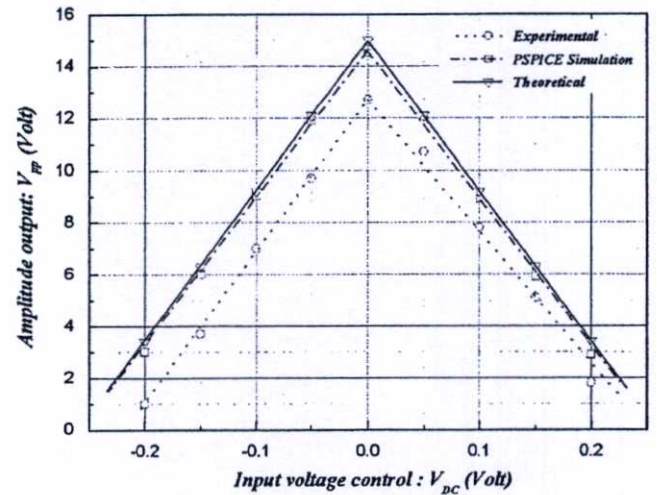


Fig. 12. Illustration of amplitude controlled by the forced response of the phase shift oscillator obtained from experiment, PSPICE simulation and theoretical results where the forced input is the varied DC voltage.

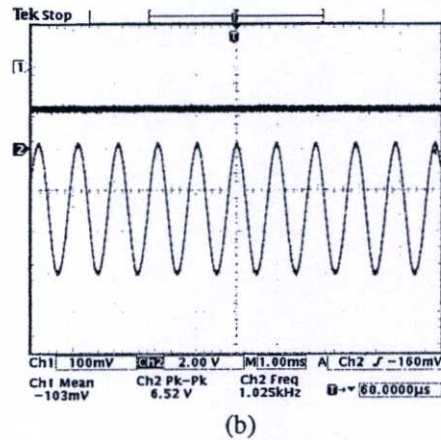
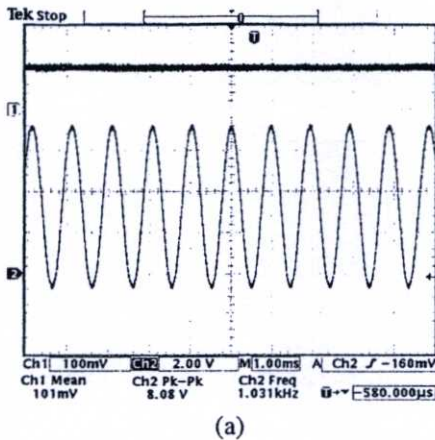


Fig. 11. The phase shift oscillator experimental results where the upper trace of (a) and (b) is +0.1 V DC input voltage and -0.1 V DC input voltage, respectively and the lower traces are the obtained complete response outputs.

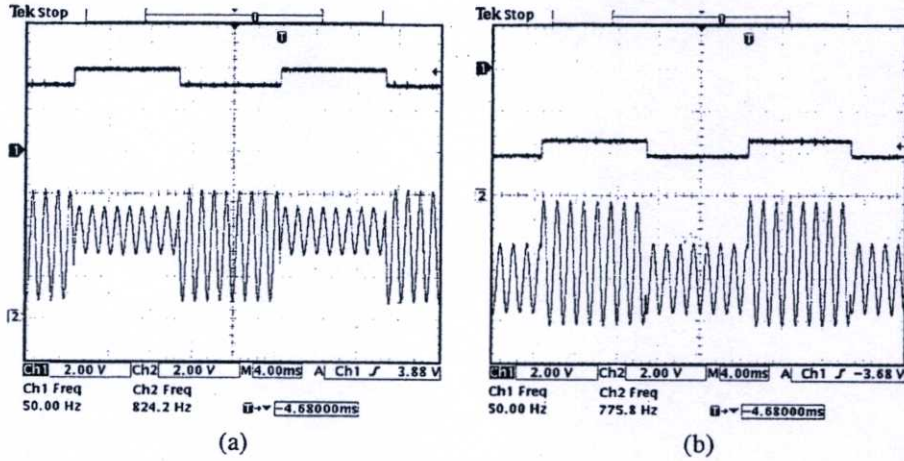


Fig. 13. The twin-T experimental results where the upper trace of (a) and (b) is positive and negative time varying forcing function, respectively and the lower traces are the obtained complete response outputs.

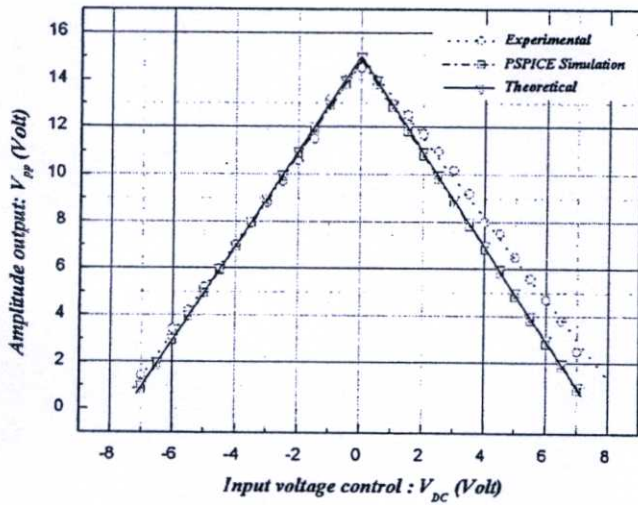


Fig. 14. Illustration of amplitude controlled by the forced response of the twin-T oscillator obtained from experiment, PSPICE simulation and theoretical results where the forced input is the varied DC voltage.

at 1 kHz using the Op-amp LF351 with ± 9 V supply voltage. The complete responses of each network are observed and measured where the input forcing function $v_i(\tau)$ is V_{DC} (Figs. 8–12).

In these experiments, the circuits are tested with various DC levels to illustrate that amplitude of the oscillated output is changed when the forced response is varied. These experimental results thus indicate that an alternative method of controlling amplitude of the oscillated signal can be accomplished by using the forced response of the system. Furthermore, the time-varying forcing function is also tested with the twin-T oscillator. The obtained experimental results which are demonstrated in Fig. 13 agree with the proposed analysis. As can be seen, when the forcing function is time dependent, amplitude of the oscillated output is not constant but varied with the forced response of the system (Fig. 14).

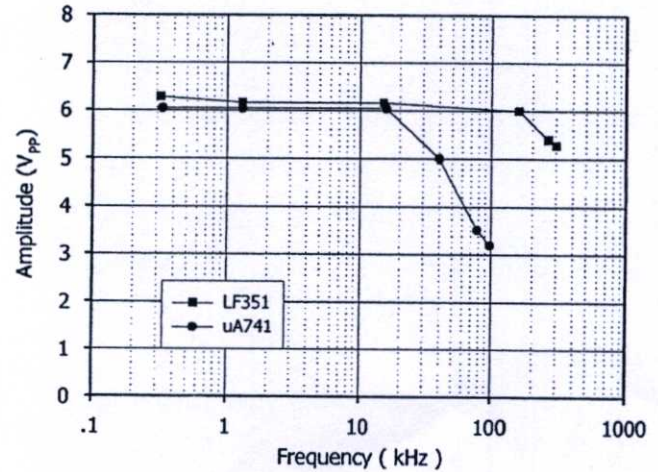


Fig. 15. The frequency response of the quadrature oscillators constructed by using the active elements: Op-amp LF351 and uA741, respectively.

In addition, the quadrature oscillator is experimented to observe its frequency response where two quadrature oscillator circuits are constructed by using different Op-amps which are LF351 and uA741. As mentioned earlier that the cut-off frequency of the oscillator is determined by that of the non-ideal Op-amp. The results given in Fig. 15 illustrate that the obtained output magnitude responses are constant over the wide-band frequency where the cut-off frequency of each circuit is corresponding to that of the employed Op-amp.

6. Conclusions

In this paper, a new mathematical analysis based on multi-time technique of a second-order oscillator is proposed. The complete response of the system can be expressed by a new closed-form solution. This new solution provides clearly

explanation to the system not only for a case of constant forcing function but also for a case of time-varying forced signal. Based on the proposed analysis, it is found that amplitude of the natural response is a function of the forced response at any arbitrary time. The obtained analytical result thus provides an alternative technique of amplitude controlling by using the forced response of the system. Additionally, the mathematical analysis for wide band behavior of the oscillator is given as well. The experimental and simulation results in voltage mode of the quadrature, phase-shift and twin-T oscillators have been demonstrated and agreed well with the proposed analysis technique.

References

- [1] Tuwanut P, Wardkein P, Maneechukate T. 7 decade low frequency switched capacitor oscillator. In: Proceedings of IEEE international symposium on circuits and systems. 2001. p. 785–8.
- [2] Osa JI, Carlosena A. Mosfet-c sinusoidal oscillator with variable frequency and amplitude. In: Proceedings of IEEE international symposium on circuits and systems. 2000. p. 725–8.
- [3] Tsung-Sum L, Kun-Yui C, Hsein-Yu P. A fully integrated mosfet-c oscillator with precision amplitude control and self start-up. In: Proceedings of IEEE international symposium on circuits and systems. 1997. p. 273–6.
- [4] Filanovsky IM. A sinusoidal vco with control of frequency and amplitude. In: Proceedings of IEEE Midwest symposium circuits and systems. 1989. p. 446–9.
- [5] Filanovsky IM, Qiu S-S, Kothapalli G. Sinusoidal oscillator with voltage controlled frequency and amplitude. *Int J Electron* 1990;68:95–112.
- [6] Pookaiyaudom S, Saivichit K. Rc phase-shifter variable sinusoidal oscillators using initial conditions-restoration amplitude control. *IEEE Trans Instrum Meas* 1990;39: 1038–44.
- [7] Filanovsky IM. Oscillators with amplitude control by restoration of capacitor initial conditions. In: *IEE Proc.* 1987. p. 31–7.
- [8] Filanovsky IM, Stromsmoe KA. Amplitude control in a twin-t bridge rc-oscillator using a window comparator. *Int J Electron* 1986;61:197–206.
- [9] Filanovsky IM. Wien bridge rc oscillator with fast amplitude control. *Int J Electron* 1985;58:817–26.
- [10] Pookaiyaudom S, Prasong V, Voraphichet A. Tunable cmos current-mode sinusoidal oscillator with inherent automatic amplitude control. *Electron Lett* 1997;33(11):954–5.
- [11] Pookaiyaudom S, Thanachayanont A, Sitdhikorn R. Current amplitude control circuits suitable for current-mode oscillators. *Electron Lett* 1997;33(1):2–3.

- [12] Roychowdhury J. Circuits with widely separated time scales using numerical pde methods. *IEEE Trans Circuits Syst I Fundam Theory Appl* 2001;48(5):578–94.
- [13] Kennedy EJ. *Operational amplifier circuits theory and applications*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc.; 1988.



Thongchai Maneechukate received the M.E. degree from King Mongkut Institute of Technology Ladkrabang (KMITL) in 1998. He is currently a faculty member at Physics department, Faculty of Science, Naresuan University, Phitsanulok, Thailand and a Doctor degree (D. Eng.) candidate in Electrical Engineering at KMITL.



Jeerasuda Koseeyaporn She graduated M.S. and Ph.D. degrees in Electrical Engineering from Vanderbilt University, Nashville, TN, USA, in 1999 and 2003, respectively. She is currently an assistant professor of Telecommunication Engineering Department, Faculty of Engineering, KMITL, THAILAND.



Paramote Wardkein received the M.E. and D. Eng degree in electrical engineering from King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL), Bangkok, Thailand, in 1990 and 1997, respectively. He is now an associate professor of Department of Telecommunication Engineering, Faculty of Engineering, KMITL.



Poolsak Koseeyaporn He graduated M.S. and Ph.D. degrees in Electrical Engineering from Vanderbilt University, Nashville, TN, USA, in 1999 and 2003, respectively. He is currently an assistant professor at the department of Teacher Training in Electrical Engineering, KMITNB, THAILAND.

ประวัติผู้เขียน

นายธงชัย มณีชูเกตุ เกิดเมื่อวันที่ 23 เมษายน พ.ศ.2509 ที่จังหวัดเพชรบูรณ์ สำเร็จ การศึกษาระดับปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาฟิสิกส์ จากภาควิชาฟิสิกส์ คณะ วิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ พิษณุโลก ในปีการศึกษา 2531 และสำเร็จการศึกษา ในระดับปริญญาโท หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะ วิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ในปีการศึกษา 2541 และได้เข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาเอก หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขา วิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ในปีการศึกษา 2547 โดยในปี พ.ศ. 2531 ได้เข้าทำงานในตำแหน่งวิศวกรผลิตภัณฑ์ บริษัทกุลธร เคอร์บี้จำกัด ในปี พ.ศ. 2535 ได้เข้าทำงานในตำแหน่งวิศวกรแผนกวิศวกรรม บริษัทกุลธรยูนิเวอร์ ซอลติเล็กทริกจำกัด ต่อมาในปี พ.ศ. 2536 ได้เข้ารับราชการในตำแหน่งเจ้าหน้าที่วิจัย ศูนย์วิจัย บริการและพัฒนานวัตกรรม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง และในปีพ.ศ. 2539-ปัจจุบัน ได้เข้ารับราชการ ทำงานในตำแหน่งอาจารย์ประจำ สังกัดภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร พิษณุโลก