

การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง

NUMERICAL SIMULATION OF SUSPENDED STRING VIBRATION

ศตวรรษิ ทรัพย์คล้าย
KANAWOOT SUBKLAY

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาระดับปริญญาโท สาขาวิชาวิทยาศาสตร์คอมพิวเตอร์

สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2555

KMITL-SC12-SC-15-001-028

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง

NUMERICAL SIMULATION OF SUSPENDED STRING VIBRATION

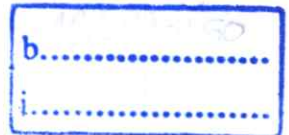


T123000

คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย

KANAWOOT SUBKLAY

เลขหมู่.....
สาขาทะเบียน..... 123000
วัน,เดือน,ปี..... 10 ต.ค. 2555



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2555

KMITL-2012-SC-M-001-023

NUMERICAL SIMULATION OF SUSPENDED STRING VIBRATION

KANAWOOT SUBKLAY

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2012
KMITL-2012-SC-M-001-023**

COPYRIGHT 2012

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์

การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง
Numerical Simulation of Suspended String Vibration

นักศึกษา

นายคณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย

รหัสประจำตัว

53650702

ปริญญา

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา

คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

รศ.ภักคินี ชิตสกุล

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.นพรัตน์	โพธิ์ชัย	
ดร.วรรณพร	สรรประเสริฐ	
รศ.ดร.สุวรรณ	ถังมณี	
รศ.ภักคินี	ชิตสกุล	
ดร.ใจปอง	เกษมสุวรรณ	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ 25 พฤษภาคม พ.ศ. 2555 เวลา 13.00 - 16.00 น.

สถานที่สอบ ณ ห้อง 210 ชั้น 2 อาคารจุฬาภรณ์วิทยาลัยลักษณ 1



คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว
(รองศาสตราจารย์ ดร.ตุงณี ชนะบริพัฒน์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ 24 เดือน พค. พ.ศ. 55

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง
นักศึกษา	นายคณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย
รหัสประจำตัว	53650702
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2555
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ
อาจารย์ที่ปรึกษาร่วม	รศ.ภักคินี ชิตสกุล

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง โดยศึกษา 3 วิธี ได้แก่ ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งในสูตรที่ถูกปรับปรุง (Modified Explicit Finite Difference Scheme) ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยาย (Implicit Finite Difference Scheme) และระเบียบวิธีแครงคินิโคลสัน (Crank-Nicolson Scheme) และนำผลที่ได้จากทั้ง 3 วิธีมาเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้ง (Explicit Finite Difference Formula) โดยกำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นและความเร็วต้นของเส้นลวดมีค่าเท่ากัน และได้ข้อสรุปว่าผลเฉลยค่าประมาณจากวิธีทั้งหมด มีค่าใกล้เคียงกัน โดยแสดงตารางเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นและกราฟเปรียบเทียบลักษณะการสั่นของเส้นลวดที่ได้จากทั้ง 3 วิธี รวมถึงแสดงขั้นตอนการตรวจสอบความเสถียรภาพ (Stability Analysis) นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังได้ศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขเบื้องต้นของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำกับเส้นลวดอีกด้วย

คำสำคัญ : สมการเส้นลวดในแนวดิ่ง, ผลเฉลยเชิงตัวเลข, วิธีผลต่างจำกัด, วิธีแครงคินิโคลสัน

Thesis Title	Numerical Simulation of Suspended String Vibration
Student	Kanawoot Subklay
Student ID	53650702
Degree	Master of Science
Program	Applied Mathematics
Year	2012
Thesis Advisor	Dr. Jaipong Kasemsuwan
Thesis Co-advisor	Assoc. Prof. Pakkinee Chitsakul

ABSTRACT

In this thesis ,the approximate numerical solution of the initial boundary value problem of the suspended string vibrating equation is studied by using three schemes such as **modified explicit finite difference formula**, **implicit finite difference formula** and **Crank-Nicolson formula**. The results are compared with those obtained from the finite difference method previously reported. It is found that the approximate solutions obtained from all methods are in good agreement under the same initial shapes and initial velocity. The comparison results from all methods are shown graphically and also summarized in tables. The stability criteria is also checked. In addition, the vibration taking into account the nonlinear external force term is also investigated.

Keyword : Suspended String Equation, Numerical Solution, Finite Difference Method, Crank-Nicolson Method

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ในหัวข้อ การจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีนั้น ผู้จัดทำขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ และอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม รองศาสตราจารย์ภักดีณี ชิตสกุล ท่านทั้งสองเป็นผู้ที่คอยชี้แนะให้ความรู้ตั้งแต่ขั้นพื้นฐาน แนวคิด คำแนะนำ และเป็นທີ່ปรึกษาในการตรวจสอบ ปรับปรุง เปลี่ยนแปลง และแก้ไขรายละเอียดเนื้อหา หรือปัญหาอุปสรรคในการดำเนินการวิจัย รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของวิทยานิพนธ์ด้วย

ขอขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบ อาจารย์บัณฑิตประจำ และผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก อันประกอบด้วย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ดร.วรรณพร สรรประเสริฐ และรองศาสตราจารย์ ดร.สุวรรณ ถังมณี ตามลำดับ ผู้พิจารณาหัวข้อและสอบวิทยานิพนธ์ รวมทั้งตรวจสอบความถูกต้อง และเพิ่มเติมรายละเอียดของวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบพระคุณประธานสาขาวิชาคณิตศาสตร์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.บุญมาส พิมพ์พรหมชาติ ที่คอยให้คำแนะนำ ชี้แนะประสานงานให้การสอบวิทยานิพนธ์ลุล่วงไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาท ทั้งทางด้านวิชาความรู้ ตลอดจนคุณธรรม จริยธรรมที่สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้ จนกระทั่งวิทยานิพนธ์นี้สัมฤทธิ์ผลเป็นที่เรียบร้อย

ขอขอบคุณศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ประเทศไทย ที่ได้ให้ทุนสนับสนุนการวิจัย

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ประจำสาขาคณิตศาสตร์ คุณชุตติกาญจน์ ต้นยะสิทธิ์ และคุณอุคร บุญธรรม ที่คอยช่วยเหลือ ส่งเสริม และอำนวยความสะดวก ทั้งในด้านเอกสารต่างๆ อีกทั้งในส่วนของการใช้คอมพิวเตอร์ และเครื่องพิมพ์เอกสารในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

ขอขอบคุณนายนายฉัฐพร วรรณพิสุทธิกุล ที่คอยให้ความช่วยเหลือด้านโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์จนสำเร็จลุล่วงเป็นที่เรียบร้อย

ขอขอบคุณน้องๆ นักศึกษา โดยเฉพาะ นายฉัฐพล บุญนำ นายวงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง นายศราวุธ สุวรรณอัคร์ นางสาวสิริพัชร แสงสว่าง นายนิติภูมิ อัครวิติสกุล และนายเชาวนิตี เทียมแพที่คอยให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิทยานิพนธ์ รวมถึงคอยให้กำลังใจเสมอมาจนกระทั่งสำเร็จลุล่วงทุกประการ

สุดท้ายขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ ผู้ให้การสนับสนุน และเป็นกำลังใจเสมอมาจนสำเร็จการศึกษา ประโยชน์อันพึงมีจากวิทยานิพนธ์นี้ ขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

นายคณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	VI
สารบัญตาราง	XII
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ	1
1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย	11
1.3 ขอบเขตของงานวิจัย	11
1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย	12
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	12
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	13
2.1 วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข	13
2.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด	13
2.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	14
2.4 ระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน	16
2.5 วิธีการหาผลเฉลยในสมการพาราโบลิก	17
2.6 วิธีการหาผลเฉลยในสมการอีลิปติก	25
2.7 วิธีการหาผลเฉลยในสมการไฮเปอร์โบลิก	28
2.8 การแก้ระบบสมการ โดยวิธี Triangular Decomposition	34
2.9 ความเสถียรภาพ	38
2.10 วิธีตรวจสอบความเสถียรภาพของสมการพาราโบลิก	39
2.10 วิธีตรวจสอบความเสถียรภาพของสมการไฮเปอร์โบลิก	43
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	51
3.1 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน	54
3.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรรูปแบบที่ 1	58
3.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรรูปแบบที่ 2	61

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.4 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3	65
3.5 ระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน	69
บทที่ 4 ผลการวิจัยและอภิปรายผล	73
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและเสนอแนะ	142
เอกสารอ้างอิง	144
ภาคผนวก	145
ประวัติผู้วิจัย	152

สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 1.1 แสดงการสั้นของเส้นลวดในแนวดิ่ง	2
รูปที่ 1.2 รูปแสดงส่วนของเส้นลวดในช่วงที่พิจารณา	3
รูปที่ 1.3 รูปที่ใช้เพื่อพิจารณาค่าของมุม tangent	4
รูปที่ 2.1 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในวิธี The Four Point Explicit Scheme	17
รูปที่ 2.2 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในวิธี The Fully Implicit Method Scheme	18
รูปที่ 2.3 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีเครงก์-นิโคลสัน	19
รูปที่ 2.4 แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของสมการพาราโบลิก	20
รูปที่ 2.5 แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของสมการปัวร์ซง	25
รูปที่ 2.6 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัด	25
รูปที่ 2.7 แผนภาพแสดงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัด	26
รูปที่ 2.8 แผนภาพแสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของสมการไฮเปอร์โบลิก	28
รูปที่ 2.9 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในสมการไฮเปอร์โบลิก	28
รูปที่ 2.10 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในสมการไฮเปอร์โบลิก	29
รูปที่ 2.11 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีเครงก์-นิโคลสันในสมการไฮเปอร์โบลิก	29
รูปที่ 3.1 แสดงแผนภาพการแบ่งโดเมน	51
รูปที่ 3.2 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน	52
รูปที่ 3.3 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1	52
รูปที่ 3.4 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2	52
รูปที่ 3.5 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3	53
รูปที่ 3.6 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีเครงก์-นิโคลสัน	53
รูปที่ 3.7 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	54
รูปที่ 3.8 แสดงโดเมนทั้ง 5 จุด	55
รูปที่ 3.9 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	55
รูปที่ 3.10 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	56
รูปที่ 3.11 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	58
รูปที่ 3.12 แสดงโดเมนทั้ง 7 จุด	59
รูปที่ 3.13 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	59
รูปที่ 3.14 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	60
รูปที่ 3.15 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	61
รูปที่ 3.16 แสดงโดเมนทั้ง 7 จุด	62

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 3.17 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	62
รูปที่ 3.18 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	63
รูปที่ 3.19 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	65
รูปที่ 3.20 แสดงโดเมนทั้ง 5 จุด	66
รูปที่ 3.21 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	66
รูปที่ 3.22 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	67
รูปที่ 3.23 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	69
รูปที่ 3.24 แสดงโดเมนทั้ง 7 จุด	70
รูปที่ 3.25 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	70
รูปที่ 3.26 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต	71
รูปที่ 4.1 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 1 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ 0	74
รูปที่ 4.2 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 2 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ 0	75
รูปที่ 4.3 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 3 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ 0	76
รูปที่ 4.4 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ 0	77
รูปที่ 4.5 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 5 โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ 0	78
รูปที่ 4.6 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 6 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ 1	74
รูปที่ 4.7 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 7 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ 1	79
รูปที่ 4.8 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 8 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ 1	81
รูปที่ 4.9 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 9 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ 1	82

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.10 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 10 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ 1	83
รูปที่ 4.11 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 11 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ -1	84
รูปที่ 4.12 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 12 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ -1	85
รูปที่ 4.13 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 13 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ -1	86
รูปที่ 4.14 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 14 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ -1	87
รูปที่ 4.15 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 15 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ -1	88
รูปที่ 4.16 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 16 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ x	89
รูปที่ 4.17 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 17 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ x	90
รูปที่ 4.18 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 18 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ x	91
รูปที่ 4.19 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 19 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ x	92
รูปที่ 4.20 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 20 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ x	93
รูปที่ 4.21 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 21 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ x^2	94
รูปที่ 4.22 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 22 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ x^2	95
รูปที่ 4.23 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 23 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ x^2	96
รูปที่ 4.24 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 24 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ x^2	97

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.25 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 25 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ x^2	98
รูปที่ 4.26 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 26 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ 0	99
รูปที่ 4.27 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 27 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ 0	100
รูปที่ 4.28 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 28 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ 0	101
รูปที่ 4.29 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 29 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ 0	102
รูปที่ 4.30 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 30 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ 0	103
รูปที่ 4.31 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 31 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ 1	104
รูปที่ 4.32 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 32 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ 1	105
รูปที่ 4.33 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 33 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ 1	106
รูปที่ 4.34 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 34 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ 1	107
รูปที่ 4.35 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 35 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ 1	108
รูปที่ 4.36 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 36 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ -1	109
รูปที่ 4.37 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 37 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ -1	110
รูปที่ 4.38 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 38 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ -1	111

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.39 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 39 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ -1	112
รูปที่ 4.40 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 40 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ -1	113
รูปที่ 4.41 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 41 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้ง และความเร็วต้นคือ x	114
รูปที่ 4.42 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 42 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ x	115
รูปที่ 4.43 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 43 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ x	116
รูปที่ 4.44 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 44 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ x	117
รูปที่ 4.45 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 45 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ x	118
รูปที่ 4.46 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 46 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้ง และความเร็วต้นคือ x^2	119
รูปที่ 4.47 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 47 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ x^2	120
รูปที่ 4.48 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 48 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ x^2	121
รูปที่ 4.49 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 24 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ x^2	122
รูปที่ 4.50 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 50 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน และความเร็วต้นคือ x^2	123
รูปที่ 4.51 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข ความเร็วต้นเป็นศูนย์ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกมากระทำ	124
รูปที่ 4.52 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข ความเร็วต้นเป็น 1 ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกมากระทำ	125
รูปที่ 4.53 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข ความเร็วต้นเป็น -1 ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกมากระทำ	126

สารบัญรูป (ต่อ)

	หน้า
รูปที่ 4.54 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข ความเร็วต้นเป็น x ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกมากระทำ	127
รูปที่ 4.55 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข ความเร็วต้นเป็น x^2 ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกมากระทำ	128

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 2.1 แสดงผลต่างอันสูงของผลต่างจำกัด	14
ตารางที่ 2.2 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยวิธี The Four Points Explicit Scheme	20
ตารางที่ 2.3 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยวิธี The Fully Implicit Method Scheme	21
ตารางที่ 2.4 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยวิธี The Fully Implicit Method Scheme	22
ตารางที่ 2.5 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน	23
ตารางที่ 2.6 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน	24
ตารางที่ 2.7 แสดงผลเฉลยของสมการอีลิปติกด้วยระเบียบผลต่างจำกัด	27
ตารางที่ 2.8 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลาด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปซัดแจ็ง	30
ตารางที่ 2.9 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลาด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปปริยาย	30
ตารางที่ 2.10 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลาด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปปริยาย	31
ตารางที่ 2.11 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลาด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปปริยาย	31
ตารางที่ 2.12 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลาด้วยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน	32
ตารางที่ 2.13 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลาด้วยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน	32
ตารางที่ 2.14 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลาด้วยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน	33
ตารางที่ 2.15 แสดงถึงผลต่างจำกัด เงื่อนไขการลู่เข้า รูปแบบของผลต่างและค่าคลาดเคลื่อน	50
ตารางที่ 4.1 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบซัดแจ็ง ในวินาทีที่ 20 เมื่อ ไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกกระทำ ภายใต้ ความเร็วต้นเดียวกัน	129
ตารางที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด แบบปริยายแบบที่ 1 ในวินาทีที่ 20 เมื่อ ไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอก กระทำ ภายใต้ความเร็วต้นเดียวกัน	130
ตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด แบบปริยายแบบที่ 2 ในวินาทีที่ 20 เมื่อ ไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอก กระทำภายใต้ความเร็วต้นเดียวกัน	131
ตารางที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัด แบบปริยายแบบที่ 3 ในวินาทีที่ 20 เมื่อ ไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอก กระทำภายใต้ความเร็วต้นเดียวกัน	132

สารบัญตาราง (ต่อ)

	หน้า
ตารางที่ 4.5 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน ในวินาทีที่ 20 เมื่อไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกมากกระทำ ภายใต้ความเร็วต้นเดียวกัน	133
ตารางที่ 5.1 ตารางสรุปการเปรียบเทียบค่าแอมพลิจูดของกราฟผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเดียวกัน โดยเปรียบเทียบฟังก์ชันความเร็วต้นต่างๆ กับฟังก์ชันความเร็วต้นเป็นศูนย์	142

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญ

ในปัจจุบันมีการศึกษาถึงการสั่นของคลื่นในแนวนอน (Standing Wave) ซึ่งอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยกันอย่างแพร่หลาย อาทิเช่น คลื่นบนผิวน้ำ (Water Wave) การสั่นของเครื่องดนตรี (Standing Acoustic Wave) รังสีเอ็กซ์ (X-ray Standing Wave) และคลื่นอัลตราโซนิค (Ultrasonic Wave) ซึ่งเป็นคลื่นที่มีความถี่สูงเกินกว่าที่มนุษย์จะรับรู้ได้ จะเห็นได้ว่าการวิจัยและศึกษาด้านต่างๆ เหล่านี้มีประโยชน์ต่อมนุษย์อย่างมาก แต่งานวิจัยที่เกี่ยวกับการสั่นของคลื่นในแนวตั้ง (Suspended String) ซึ่งถูกศึกษาเป็นครั้งแรกโดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย [7] ยังมีไม่มากนัก ผู้วิจัยจึงได้แนวคิดที่ว่าถ้าหากเราได้ทำการวิจัยและศึกษาการสั่นของคลื่นในแนวตั้ง อาจเกิดการพัฒนาได้เช่นเดียวกับการสั่นของคลื่นในแนวนอน

ตัวอย่างของคลื่นในแนวตั้งที่พบในธรรมชาติ อาทิเช่น Seismic waves จัดเป็นคลื่นพลังงานชนิดหนึ่งที่เดินทางผ่านแผ่นดิน มีสาเหตุของการเกิดจากแผ่นดินไหว การระเบิดที่รุนแรง หรือภูเขาไฟระเบิดซึ่งเป็นที่มาของของคลื่นพลังงานความถี่ต่ำ

Jaipong and Yamuguchi [4] ได้ศึกษาผลเฉลยทั่วไป (General solution) ของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นในแนวตั้ง

Jaipong and Yamuguchi [5] ได้ศึกษาผลเฉลยแบบฉบับ (Classical solution) ของปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นในแนวตั้ง ภายใต้แรงภายนอกไม่เชิงเส้นที่มีการดูดซับแรง

ใจปอง เกษมสุวรรณ [1] ได้อธิบายถึงลักษณะของผลเฉลยประเภทต่างๆ ของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง ที่ได้ถูกศึกษาไว้ในงานวิจัยต่างๆ

J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit [6] ได้ศึกษาแบบจำลองของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเดียวกัน

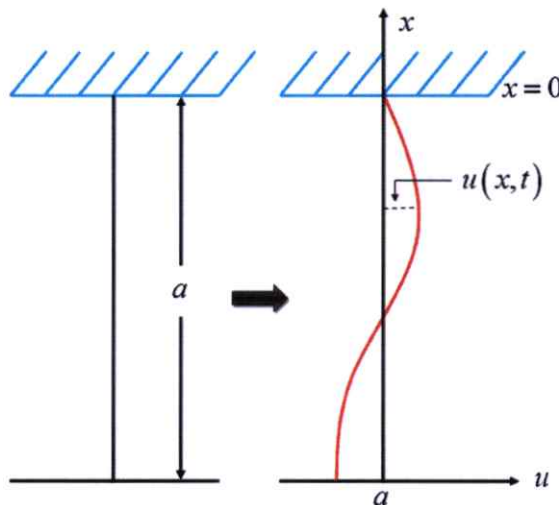
เนื่องจากผลเฉลยวิเคราะห์ (Analytic Solution) ของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเชลชนิดที่หนึ่ง [4] ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) ได้ ในงานวิจัยนี้จึงนำเสนอขั้นตอนของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดทั้งในรูปชัดเจน (Explicit Form) รูปปริยาย (Implicit Form) และระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข รวมถึงการตรวจสอบความเสถียรภาพ (Stability Checking) ของการลู่เข้าอีกด้วย

ที่มาของสมการการสั่นในแนวดิ่ง

N. S. Koshlyakov [7] ได้พิสูจน์ที่มาของสมการเส้นลวดที่ยืดหยุ่น (flexible) และมีน้ำหนัก (heavy) ซึ่งมีความยาวจำกัด a (หน่วย) และความหนาแน่นเชิงมวล ρ (น้ำหนักต่อลูกบาศก์หน่วย) ซึ่งโดยทั่วไปความหนาแน่นจะขึ้นอยู่กับแต่ละจุด (position) x (หน่วย) บนเส้นลวด กำหนดให้เส้นลวดถูกแขวนในแนวดิ่งโดยปลายด้านบนถูกตรึงไว้กับเพดานส่วนปลายด้านล่างถูกปล่อยอิสระภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก กำหนดให้เส้นแนวดิ่งผ่านจุดที่ตรึงไว้กับเพดานเป็นแกน x และจุดกำเนิดถูกกำหนดที่ตำแหน่งของปลายด้านบน เมื่อเส้นลวดอยู่ในสถานะปกติโดยปราศจากแรงภายนอกยกเว้นแรงโน้มถ่วงที่ปลายด้านล่างถูกกำหนดตำแหน่งที่ $x = a$ โดยกำหนด $u = u(x, t)$ แทนตำแหน่งการสั่น (the displacement) ของเส้นลวด สมมติว่าเส้นลวดที่แขวนอยู่นี้สั่นตามระนาบตั้ง ซึ่งในทิศทางดังกล่าวทุกจุดของลวดสั่นตามแนวอน ภายใต้แรงภายนอกเชิงเส้น h ที่มากระทำกับเส้นลวด โดย h อยู่ในรูปเชิงเส้นของ $h(x, t)$

ให้ $\Omega = \{(x, t) | [0, a] \times [0, t]\}$ และเส้นลวดสั้นเล็กน้อยจาก กฎข้อที่ 2 ของนิวตันสมการของการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่งคือ $\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^x \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right) = h$ โดย $(x, t) \in \Omega$

โดยที่ g (9.8 เมตรต่อวินาทีกำลังสอง) เป็นความเร่งภายใต้แรงโน้มถ่วงของโลก และ h (นิวตันต่อหน่วย) เป็นแรงภายนอกเชิงเส้น (a linear outer forcing form) สำหรับปัญหาที่ศึกษานี้จะประมาณค่า g ด้วย 1 หน่วยต่อวินาทีกำลังสอง



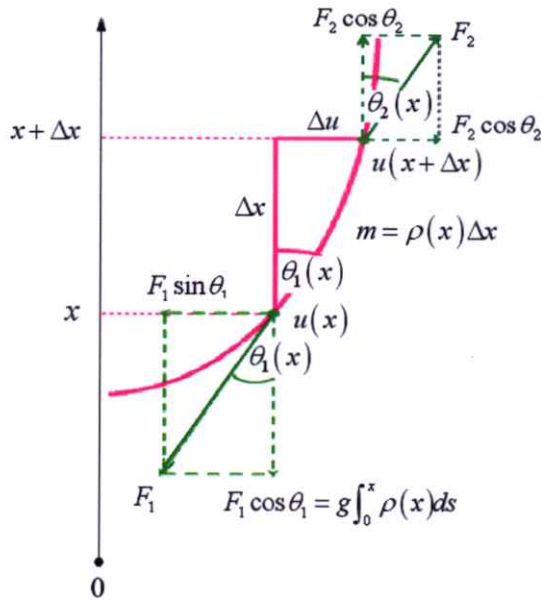
รูปที่ 1.1 แสดงการสั่นของเส้นลวดในแนวดิ่ง

สมการการสั่นในแนวตั้งสามารถพิจารณาได้ดังรูปต่อไปนี้

ในการศึกษาที่มาของสมการการสั่น จะพิจารณาเฉพาะส่วนย่อยของเส้นลวดทั้งหมด โดยกำหนด x และ $x + \Delta x$ เป็นปลายทั้งสองข้างของเส้นลวด และ Δx คือระยะทางระหว่าง x และ $x + \Delta x$ โดยที่ Δx มีค่าน้อยๆ

โดย $F(x, t) = F_1$ แทนแรงที่จุด x ณ เวลา t และ $F(x + \Delta x, t) = F_2$ แทนแรงที่จุด $x + \Delta x$ ณ เวลา t (ดังรูปที่ 1.2) และกำหนด $\theta_1(x), \theta_2(x + \Delta x)$ คือมุมที่แรงทำกับแนวตั้ง พิจารณาที่จุด x กำหนด F_1 คือแรงที่มากระทำกับเส้นลวดที่จุด x โดยแตกแรงตามแนวนอนและแนวตั้งได้เป็น $F_1 \sin \theta_1$ และ $F_1 \cos \theta_1$ ตามลำดับ (ดังรูปที่ 1.2)

พิจารณาที่จุด $x + \Delta x$ กำหนด F_2 คือแรงที่มากระทำกับเส้นลวดที่จุด $x + \Delta x$ โดยแตกแรงตามแนวนอนและแนวตั้งได้เป็น $F_2 \sin \theta_2$ และ $F_2 \cos \theta_2$ ตามลำดับ (ดังรูปที่ 1.2)

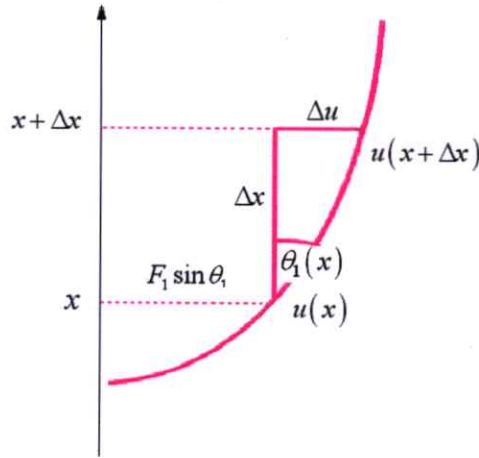


รูปที่ 1.2 รูปแสดงส่วนของเส้นลวดในช่วงที่พิจารณา

ให้ $\rho(x)$ คือ ความหนาแน่นเชิงมวล s คือ ระยะทาง และ m เป็นมวล ซึ่ง $m = \rho(x) \times s$

$$\text{เมื่อพิจารณาที่จุด } x + \Delta x \text{ จะได้ว่า } m(x + \Delta x) = \int_0^{x + \Delta x} \rho(s) ds \quad (1.1)$$

$$\text{เมื่อพิจารณาที่จุด } x \text{ จะได้ว่า } m(x) = \int_0^x \rho(s) ds \quad (1.2)$$



รูปที่ 1.3 รูปที่ใช้เพื่อพิจารณาค่าของมุม tangent

จากรูปที่ 1.3 จะได้ว่า

$$\tan \theta = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

นั่นคือ

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.3)$$

เนื่องจาก แรงลัพธ์ในแนวราบ คือ

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, t) - F(x, t) &= F_2 \sin \theta_2 - F_1 \sin \theta_1 \\ &= F_2 \cos \theta_2 \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} - F_1 \cos \theta_1 \frac{\sin \theta_1}{\cos \theta_1} \\ &= F_2 \cos \theta_2 \tan \theta_2 - F_1 \cos \theta_1 \tan \theta_1 \end{aligned}$$

เนื่องจากมุม θ มีขนาดเล็กมากจนเข้าใกล้ศูนย์จึงได้

$$= F_2 \tan \theta_2 - F_1 \tan \theta_1$$

จาก $F = mg$ และ $\tan \theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ จะได้

$$\begin{aligned} &= gm(x + \Delta x) \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - gm(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \\ F(x + \Delta x, t) - F(x, t) &= g \left\{ \int_0^{x+\Delta x} \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \int_0^x \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right\} \quad (1.4) \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\frac{F(x + \Delta x, t) - F(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} F(x + \theta \Delta x, t) \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x, t) - F(x, t) &= \Delta x \frac{\partial}{\partial x} F(x + \theta \Delta x, t) \\ &= \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left[g \int_0^{x+\theta \Delta x} \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(x + \theta \Delta x, t) \right] \quad (1.5) \end{aligned}$$

ให้ m เป็นมวลซึ่งมีค่าเท่ากับ ความหนาแน่นเชิงมวล \times ระยะทาง

$$\text{จะได้ว่า} \quad m = \rho(x)\Delta x \quad (1.6)$$

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน (Newton Second Law)

$$\begin{aligned} ma &= \sum F \\ \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= F(x+\Delta x, t) - F(x, t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

แทนสมการที่ (1.4) ในสมการที่ (1.7) จะได้ว่า

$$\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \left\{ \int_0^{x+\Delta x} \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x, t) - \int_0^x \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right\} \quad (1.8)$$

และจากสมการที่ (1.5) จะได้ว่า

$$\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} F(x+\theta\Delta x, t) \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \left(g \int_0^{x+\theta\Delta x} \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(x+\theta\Delta x, t) \right) \quad \text{เมื่อ } 0 < \theta < 1 \quad (1.9)$$

จัดรูปสมการที่ (1.9) โดยกำหนด ξ มีค่าอยู่ระหว่าง x และ $x+\Delta x$ จะได้ว่า

$$\rho(x)\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta x g \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\xi \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(\xi, t) \quad \text{เมื่อ } x < \xi < x+\Delta x \quad (1.10)$$

พิจารณาสมการที่ (1.10) ให้ง่ายขึ้นโดยกำหนดให้ $g \approx 1$

เมื่อมีแรงภายนอก $h(x, t)$ มากระทำกับเส้นลวดในแนวนอนจะได้

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^x \rho(s) ds \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + h(x, t) = 0 \quad (1.11)$$

เนื่องจากความหนาแน่นจะขึ้นอยู่กับแต่ละจุด x บนเส้นลวดดังนั้นสมการความหนาแน่น ρ จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันยกกำลังของ x หรือความหนาแน่นยกกำลัง (The power density) คือ

$$\rho(x) = \alpha x^\mu \quad \text{เมื่อ } \alpha \text{ และ } \mu \text{ คือ ค่าคงที่}$$

ดังนั้น

$$\alpha x^\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^x \alpha x^\mu dx \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + h(x, t) = 0$$

$$\alpha x^\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + h(x, t) = 0$$

$$x^\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + \frac{h(x, t)}{\alpha} = 0$$

$$x^\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \left(\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + (\mu+1) \frac{x^\mu}{\mu+1} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + \frac{h(x, t)}{\alpha} = 0$$

หารตลอดด้วย x^μ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \left(\frac{x}{\mu+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + \frac{h(x, t)}{\alpha x^\mu} = 0 \quad (1.12)$$

ให้ L คือตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ 2 ในรูป

$$L = \frac{x}{\mu+1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.13)$$

$$Lu = \frac{x}{\mu+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.14)$$

แทนสมการที่ (1.14) ในสมการที่ (1.12) จะได้ว่าสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งคือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - Lu(x,t) + \frac{h(x,t)}{\alpha} = 0 \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - Lu(x,t) + f(x, u(x,t)) = 0 \quad (1.16)$$

โดย $f(x, u(x,t)) = \frac{h(x,t)}{\alpha \mu^x}$ ซึ่งเป็นแรงภายนอกที่ทำให้เส้นลวดเกิดการสั่น

ในงานวิจัยนี้จะทำการศึกษา ปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งดังสมการที่ (1.16)

เนื่องจากจุดปลายด้านบนของเส้นลวดถูกตรึงไว้กับเพดาน จึงไม่มีการเคลื่อนที่ จะได้ว่า

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตคือ} \quad u(0,t) = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad t \in [0, T] \quad (1.17)$$

และจากลักษณะการเคลื่อนที่ของเส้นลวดนี้ขึ้นอยู่กับรูปเดิมของเส้นลวดก่อนที่จะถูกปล่อยให้เกิดการสั่นและความเร็วต้นของจุดต่างๆบนเส้นลวด ค่าทั้งสองนี้ขึ้นอยู่กับ x โดยที่ $t = 0$ ดังนั้น

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้นคือ} \quad u(x,0) = f_1(x) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x) \quad \text{เมื่อ} \quad x \in [0, a] \quad (1.18)$$

ผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytical Solution)

ปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - Lu(x,t) = 0 \quad (1.19)$$

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตคือ} \quad u(0,t) = 0 \quad \text{เมื่อ} \quad t \in (0, T) \quad (1.20)$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้นคือ} \quad u(x,0) = f_1(x) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x) \quad \text{เมื่อ} \quad x \in (0, a) \quad (1.21)$$

เมื่อ L เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองโดย

$$L = \left(\frac{x}{\mu+1} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \quad (1.22)$$

สมมติผลเฉลยอยู่ในรูปอนุกรมกำลัง ดังนี้

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \phi_j(x) \\ f_1(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_j \phi_j(x) \\ f_2(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} q_j \phi_j(x) \end{aligned} \quad (1.23)$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_j(t)}{\partial t^2} \phi_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{u}_j(t) \phi_j(x) \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$Lu(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) L\phi_j(x) \quad (1.25)$$

เมื่อ

$$L\phi_j = \left(\frac{x}{\mu+1} \right) \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x}$$

จะได้

$$Lu(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \left(\left(\frac{x}{\mu+1} \right) \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right)$$

นำ (1.24) และ (1.25) แทนใน (1.19) จะได้

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{u}_j(t) \phi_j(x) - \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) L\phi_j(x) = 0$$

เนื่องจากเราจะกำหนดให้ $\phi_j(x)$ สอดคล้องกับผลเฉลยของปัญหาค่าลักษณะเฉพาะดังนั้นจะได้ว่า

$$L\phi_j(x) = \lambda \phi_j(x)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{u}_j(t) \phi_j(x) - \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \lambda \phi_j(x) &= 0 \\ \left[\sum_{j=1}^{\infty} \ddot{u}_j(t) - \lambda \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \right] \phi_j(x) &= 0 \\ \sum_{j=1}^{\infty} [\ddot{u}_j(t) - \lambda u_j(t)] \phi_j(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

พิจารณาผลเฉลยของ (1.26) ได้ดังนี้

$$\ddot{u}_j + \lambda_j u_j = 0 \quad (1.27)$$

$$u_j(0) = p_j, \quad \dot{u}_j(0) = q_j$$

หาผลเฉลยโดยสมการช่วยอยู่ในรูปแบบ

$$r^2 + \lambda_j = 0, \quad r = \pm \sqrt{\lambda_j} i$$

ซึ่งผลเฉลยในรูปเชิงซ้อนมีรูปทั่วไปคือ

$$u_j = c_1 \cos \sqrt{\lambda_j} t + c_2 \sin \sqrt{\lambda_j} t$$

$$\dot{u}_j = c_1(-\sin\sqrt{\lambda_j}t)(\sqrt{\lambda_j}) + c_2(\cos\sqrt{\lambda_j}t)(\sqrt{\lambda_j})$$

แทนค่าขอบ $u_j(0) = p_j$ จะได้

$$p_j = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0$$

$$c_1 = p_j$$

และค่าขอบ $\dot{u}_j(0) = q_j$ จะได้

$$q_j = c_1(-\sin 0)(\sqrt{\lambda_j}) + c_2(\cos 0)(\sqrt{\lambda_j})$$

$$c_2 = \frac{q_j}{\sqrt{\lambda_j}}$$

จึงได้ผลเฉลยเป็น

$$u_j = p_j \cos\sqrt{\lambda_j}t + \frac{q_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin\sqrt{\lambda_j}t$$

ดังนั้น ปัญหา (1.27) จะมีผลเฉลย คือ

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(p_j \cos\sqrt{\lambda_j}t + \frac{q_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin\sqrt{\lambda_j}t \right) \phi_j(x) \quad (1.28)$$

โดยที่ $\phi_j(x)$ เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue Problem for L) ดังนี้

$$L\phi(x) = \left(\left(\frac{x}{\mu+1} \right) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx} \right) \phi(x) = \lambda\phi(x) \text{ ใน } (0, a) \quad (1.29)$$

$$\text{เงื่อนไขขอบเขต } \phi(a) = 0 \quad (1.30)$$

$$\text{ให้ } y = \sqrt{x} \text{ และ } y^\mu = x^{\frac{\mu}{2}}$$

$$\text{จะได้ว่า } \psi(y) = x^{\frac{\mu}{2}}\phi(x) = y^\mu\phi(x)$$

$$\text{นั่นคือ } \phi(x) = y^{-\mu}\psi(y) = x^{-\frac{\mu}{2}}\psi(\sqrt{x})$$

$$\partial_x\phi(x) = \left(\frac{-\mu}{2} \right) x^{-\frac{\mu}{2}-1}\psi(\sqrt{x}) + x^{-\frac{\mu}{2}}\psi'(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{\mu}{2}-1} \left\{ -\mu\psi(y) + x^{\frac{1}{2}}\psi'(y) \right\}$$

$$\partial_x^2\phi(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{\mu}{2}-2} \left(\frac{-\mu}{2} - 1 \right) \left\{ -\mu\psi(\sqrt{x}) + x^{\frac{1}{2}}\psi'(\sqrt{x}) \right\}$$

$$+ \frac{1}{2}x^{-\frac{\mu}{2}-1} \left\{ -\mu\psi'(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\psi'(\sqrt{x}) + x^{\frac{1}{2}}\psi''(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} \right\}$$

$$= \frac{1}{4}x^{-\frac{\mu}{2}-2} \left[x\psi''(y) + (-2\mu-1)x^{\frac{1}{2}}\psi'(y) + \mu(\mu+2)\psi(y) \right]$$

ดังนั้น

$$\frac{x}{\mu+1} \partial_x^2\phi(x) = \frac{1}{4(\mu+1)} x^{-\frac{\mu}{2}-1} \left[x\psi''(y) - (2\mu+1)x^{\frac{1}{2}}\psi'(y) + \mu(\mu+2)\psi(y) \right]$$

จากสมการ (1.19) จะได้ว่า

$$\frac{x^{-\frac{\mu}{2}-1}}{4(\mu+1)} \left[x\psi''(y) + x^{\frac{1}{2}}\psi'(y) - \mu^2\psi(y) \right] = -\lambda\phi(x)$$

$$x\psi''(y) + x^{\frac{1}{2}}\psi'(y) - \mu^2\psi(y) = -\lambda\phi(x)x^{\frac{\mu+2}{2}} \times 4(\mu+1)$$

$$\begin{aligned} \text{ให้} \quad y &= x^{\frac{1}{2}} & \psi(y) &= y^\mu \phi(x) \\ (y^2 = x) & & (\phi(x) &= y^{-\mu}\psi(y)) \end{aligned}$$

สามารถจัดรูปสมการได้ ดังนี้

$$y^2\psi''(y) + y\psi'(y) + \{4(\mu+1)\lambda y^2 - \mu^2\}\psi(y) = 0 \quad (1.31)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต คือ $\psi(\sqrt{a}) = 0$

พิจารณารูปแบบทั่วไปของสมการเบสเซล

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$$

โดย $J_\nu(x)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

และ $Y_\nu(x)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่สอง

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi} J_\nu(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2k} - \dots - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \frac{\tau'(k+1)}{\tau(k+1)}$$

สามารถจัดรูปสมการที่ (1.31) ให้ตรงกับรูปแบบของสมการเบสเซล (Bessel Equation) ดังนี้

จากสมการที่ (1.31) ให้ $4(\mu+1)\lambda = a^2$

และให้ $\psi(y) = F(ay) = F(Y)$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \frac{\partial \psi(y)}{\partial y} = a \frac{\partial F(Y)}{\partial Y}, \quad \frac{\partial^2 \psi(y)}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 F(Y)}{\partial Y^2}$$

จัดรูปสมการที่ (1.31)

$$\begin{aligned} y^2\psi''(y) + y\psi'(y) + \{a^2 y^2 - \mu^2\}\psi(y) &= 0 \\ a^2 y^2 \frac{d^2 F(Y)}{dY^2} + ay \frac{dF(Y)}{dY} + \{Y^2 - \mu^2\}F(Y) &= 0 \\ Y^2 \frac{d^2 F(Y)}{dY^2} + Y \frac{d}{dY} F(Y) + \{Y^2 - \mu^2\}F(Y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

และมีเงื่อนไขขอบเขต คือ $\psi(\sqrt{a}) = 0$

เนื่องจาก สมการที่ (1.32) ตรงกับรูปแบบทั่วไปของสมการเบสเซล

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการที่ (1.32) คือ

$$\begin{aligned}\psi(y) &= F(Y) = c_1 J_\mu(Y) + c_2 Y_\mu(Y) \\ &= c_1 J_\mu(2\sqrt{\lambda(\mu+1)}y) + c_2 Y_\mu(2\sqrt{\lambda(\mu+1)}y)\end{aligned}\quad (1.33)$$

จากเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า

$$\psi(0) = Y_\mu(0) \quad \text{และ} \quad \lim_{y \rightarrow 0} Y_\mu(y) = -\infty$$

นั่นคือ $c_2 = 0$

จากสมการที่ (1.33) จะได้ว่า $\psi(y) = c_1 J_\mu(2\sqrt{\lambda(\mu+1)}y)$

และจากเงื่อนไขขอบเขต $\phi(a) = 0$ จะได้ว่า $\psi(\sqrt{a}) = (\sqrt{a})^\mu (\phi(\sqrt{a})^2) = 0$

เนื่องจาก $c_1 \neq 0$ จะได้ว่า $J_\mu(2\sqrt{\lambda(\mu+1)}a) = 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\phi(x) &= y^{-\mu} \psi(y) \\ &= x^{-\frac{\mu}{2}} C J_\mu(2\sqrt{\lambda(\mu+1)}y)\end{aligned}\quad (1.34)$$

ให้ $2\sqrt{\lambda_k(\mu+1)}a = \gamma_k$

$$\text{จะได้ว่า} \quad \lambda_k = \frac{\gamma_k^2}{4(\mu+1)a}$$

โดย $\{\gamma_k : k = 1, 2, \dots\}$ เป็นเซตของจุดศูนย์บวกทั้งหมดของ ฟังก์ชันเบสเซล $J_\mu(x)$

และ $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 \dots$

$$\text{และจากสมการที่ (1.34) จะได้ว่า} \quad 2\sqrt{\lambda(\mu+1)} = 2\sqrt{\frac{\gamma_k^2(\mu+1)}{4(\mu+1)a}} = \frac{\gamma_k}{\sqrt{a}}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \phi_k(x) = Cx^{-\frac{\mu}{2}} J_\mu\left(\frac{\gamma_k}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\right)$$

$$\text{จาก proposition 3.1 ใน [4] จะได้ว่า} \quad C = \frac{1}{\sqrt{a}J_{\mu+1}(\gamma_k)}$$

ดังนั้น ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะคือ

$$\begin{aligned}\phi_k(x) &= \frac{1}{\sqrt{a}J_{\mu+1}(\gamma_k)} \cdot \frac{1}{x^{\frac{\mu}{2}}} J_\mu\left(\gamma_k \sqrt{\frac{x}{a}}\right) \\ u(x, t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(p_j \cos \sqrt{\lambda_j} t + \frac{q_j}{\sqrt{\lambda_j}} \sin \sqrt{\lambda_j} t \right) \phi_j(x)\end{aligned}$$

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1) เพื่อศึกษาและอธิบายที่มาของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งที่กำหนดค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขตมาให้
- 2) เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite Difference Method) และนำมาใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการได้
- 3) ต้องการศึกษาคำอธิบายปัญหาแบบปัญหาค่าเริ่มต้นและค่าขอบเขต
- 4) วิเคราะห์และเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีต่างๆ เมื่อมีแรงภายนอกมากระทำ

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1) กรณีที่เส้นลวดปลายข้างหนึ่งตรึงอยู่กับที่ ปลายอีกข้างหนึ่งปล่อยอิสระไม่มีแรงภายนอก (External Force) ยกเว้นแรงโน้มถ่วงซึ่งมีค่าคงที่ประมาณเป็น 1 หน่วยต่อวินาทีกำลังสอง
- 2) เส้นลวดมีความหนาแน่น $\rho(x) = \alpha x^\mu$ โดยในงานวิจัยนี้จะศึกษาความหนาแน่นเอกกรูป (Uniform density) $\rho(x) = \alpha$ เมื่อ $\mu = 0$
- 3) รูปร่างเริ่มต้นโดยกำหนดให้อยู่ในรูป $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$ ความเร็วต้นกำหนดให้มีทั้งค่าคงที่และฟังก์ชันในรูป $u_t(x, 0) = x^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
- 4) เปรียบเทียบการสั่นที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำกับการสั่นที่มีแรงภายนอก โดยกำหนดให้แรงภายนอก $[4],[5]$ อยู่ในรูป $A(x)u^{n-1}$ และกำหนดให้ $A(x) = 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ในกรณีศึกษาจะใช้รูปแบบแรงภายนอกโดย $f(x, u(x, t)) = u^3$

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงานวิจัย								
	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.
1. ค้นคว้าเอกสารและข้อมูลที่เกี่ยวข้อง	←→								
2. ศึกษาปัญหาการจำลองการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง			←→						
3. ศึกษาระเบียบวิธีผลต่างจำกัดที่ใช้กับปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย				←→					
4. นำระเบียบวิธีผลต่างจำกัดมาประยุกต์ใช้กับสมการการสั้นของเส้นลวดในแนวตั้ง						←→			
5. ตรวจสอบผลเฉลยโดยใช้วิธีของ Von Neumann							←→		
6. สรุปและเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้และเสนอแนะแนวทางการพัฒนาวิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขต่อไปในอนาคต								←→	
7. จัดทำรูปเล่มวิทยานิพนธ์									←→

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) ได้รับความรู้ในการศึกษาแบบจำลองการสั้นในแนวตั้ง
- 2) ได้รับความรู้เพิ่มเติมจากการศึกษาระเบียบวิธีผลต่างจำกัดทั้งในรูปชัดเจน รูปปริยาย และวิธีแรงค์ นิโคลสัน

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข

วิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่นิยมประกอบด้วย 3 วิธี ดังนี้

1. ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) เหมาะกับโดเมนอย่างง่ายไม่ซับซ้อน
2. ระเบียบวิธีสมาชิกจำกัด (Finite Element Method) เหมาะกับโดเมนที่เกี่ยวกับบริเวณที่มีขอบเขตแน่นอน
3. ระเบียบวิธีปริมาตรจำกัด (Finite Volume Method) เหมาะกับโดเมนที่เกี่ยวกับรูปทรงและเวลา

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยจะศึกษาถึงการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาการสั้นของเส้นลวดในแนวดิ่ง โดยศึกษาระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในรูปชัดแจ้ง (Explicit Form) รูปปริยาย (Implicit Form) และวิธีเครงคั่นโคลสัน โดยเริ่มด้วยการอธิบายถึงลักษณะของผลต่างจำกัดชนิดต่างๆ การประมาณค่าอนุพันธ์ด้วยผลต่างจำกัดและการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยผลต่างจำกัด

2.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด

ผลต่างจำกัดที่จะศึกษาแบ่งออกเป็น 3 ชนิด คือ

Δ ผลต่างจำกัดข้างหน้า (Forward Difference)

∇ ผลต่างจำกัดย้อนหลัง (Backward Difference)

δ ผลต่างจำกัดกลาง (Central Difference)

โดย

$$\Delta f_r = f_{r+1} - f_r$$

$$\nabla f_r = f_r - f_{r-1} \quad \text{เมื่อ } r = 1, 2, 3, \dots$$

$$\delta f_{r+\frac{1}{2}} = f_{r+1} - f_r$$

ผลต่างอันดับสูงขึ้นแสดงดังตารางที่ 2.1

x_r	f_r	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$	$\Delta^4 f$
x_{-1}	f_{-1}	$\Delta f_{-2} = \delta f_{\frac{-3}{2}} = \nabla f_{-1}$	$\Delta^2 f_{-2} = \delta^2 f_{-1} = \nabla^2 f_0$	$\Delta^3 f_{-2} = \delta^3 f_{\frac{-1}{2}} = \nabla^3 f_1$	$\Delta^4 f_{-2} = \delta^4 f_0 = \nabla^4 f_2$
x_0	f_0	$\Delta f_{-1} = \delta f_{\frac{-1}{2}} = \nabla f_0$	$\Delta^2 f_{-1} = \delta^2 f_0 = \nabla^2 f_1$		
x_1	f_1	$\Delta f_0 = \delta f_{\frac{1}{2}} = \nabla f_1$ $\Delta f_1 = \delta f_{\frac{3}{2}} = \nabla f_2$	$\Delta^2 f_0 = \delta^2 f_1 = \nabla^2 f_2$	$\Delta^3 f_{-1} = \delta^3 f_{\frac{1}{2}} = \nabla^3 f_2$	
x_2	f_2				

ตารางที่ 2.1 แสดงผลต่างอันดับสูงของผลต่างจำกัดชนิดไปข้างหน้าชนิดไปข้างหลัง และชนิดตรงกลาง จากตารางพบว่า $\delta^n f_r = \Delta^n f_{r-\frac{n}{2}} = \nabla^n f_{r+\frac{n}{2}}$

สูตรอนุพันธ์ในรูปของลิมิตเมื่อ $u = u(x)$ คือ

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (2.1)$$

เมื่อ $h \rightarrow 0$ สามารถประมาณค่าอนุพันธ์โดยใช้ผลต่างจำกัด

$$\frac{du}{dx} \cong \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

2.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

โดยการใช้ทฤษฎีของเทเลอร์กระจาย $u(x+h)$ รอบ x เมื่อ $-h < x < h$ จะได้ว่า

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!} u''(x) + \frac{h^3}{3!} u'''(x) + \dots \quad (2.2)$$

โดยการตัดพจน์อนุพันธ์อันดับมากกว่าหนึ่งออกไปจะได้

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h) \quad (2.3)$$

เมื่อ $O(h)$ คือ พจน์ของค่าคลาดเคลื่อนโดยการตัดปลาย เราเรียก (2.3) ว่า “ค่าประมาณผลต่างจำกัดข้างหน้าอันดับที่หนึ่ง”

และจากสมการ (2.2) ใช้ทฤษฎีของเทเลอร์กระจาย $f(x-h)$ รอบ x จะได้

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!} u''(x) - \frac{h^3}{3!} u'''(x) + \dots \quad (2.4)$$

ในทำนองเดียวกับ (2.3)

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h) \quad (2.5)$$

เราเรียก (2.5) ว่า “ค่าประมาณผลต่างจำกัดย้อนหลังอันดับที่หนึ่ง”

พิจารณาผลต่างของสมการ (2.2) และ (2.4) จะได้

$$u(x+h) - u(x-h) = 2hu'(x) + 2h^3 \frac{u'''}{3!}(x) + \dots \quad (2.6)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^3) \quad (2.7)$$

เรียกสมการ (2.7) ว่า “ค่าประมาณผลต่างจำกัดกลางอันดับที่หนึ่ง”

พิจารณาผลบวกของสมการ (2.2) และ (2.4) จะได้

$$u(x+h) + u(x-h) = 2u(x) + h^2 u''(x) + 2 \frac{h^4 u^{(4)}(x)}{4!} + \frac{2h^6 u^{(6)}(x)}{6!} + \dots \quad (2.8)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.9)$$

เรียกสมการ (2.9) “ค่าประมาณผลต่างจำกัดกลางอันดับที่สอง”

ให้ $u = u(x, t)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระสองตัวแปร จากการกระจายของอนุกรมเทเลอร์ของ u รอบ x เมื่อ $-h < x < h$ และ t คงที่ จะได้

$$u(x+h, t) = u(x, t) + hu'(x, t) + \frac{h^2}{2!} u''(x, t) + \frac{h^3}{3!} u'''(x, t) + \dots \quad (2.10)$$

$$u(x-h, t) = u(x, t) - hu'(x, t) + \frac{h^2}{2!} u''(x, t) - \frac{h^3}{3!} u'''(x, t) + \dots \quad (2.11)$$

จากสมการที่ (2.3), (2.5), (2.7) และ (2.9) เมื่อกำหนดให้ $u = u(x, t)$ จะได้

$$u_x(x, t) = \frac{u(x+h, t) - u(x, t)}{h} + O(h) \quad (2.12)$$

$$u_x(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x-h, t)}{h} + O(h) \quad (2.13)$$

$$u_x(x, t) = \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} + O(h^2) \quad (2.14)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} + O(h^2) \quad (2.15)$$

ในทำนองเดียวกันหากเราประมาณค่าของ $u(x, t+k)$ รอบ t เมื่อ $-k < t < k$ ด้วยอนุกรมเทเลอร์ จะได้

$$u(x, t+k) = u(x, t) + ku'(x, t) + \frac{k^2}{2!} u''(x, t) + \frac{k^3}{3!} u'''(x, t) + \dots \quad (2.16)$$

$$u(x, t-k) = u(x, t) - ku'(x, t) + \frac{k^2}{2!} u''(x, t) - \frac{k^3}{3!} u'''(x, t) + \dots \quad (2.17)$$

จากสมการ (2.16) และ (2.17) โดยการตัดพจน์อนุพันธ์อันดับมากกว่าหนึ่งออกไปจะได้

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} + O(k) \quad (2.18)$$

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t) - u(x, t-k)}{k} + O(k) \quad (2.19)$$

เรียกสมการ (2.18) และ (2.19) ว่า “ค่าประมาณผลต่างจำกัดข้างหน้าอันดับที่หนึ่งและค่าประมาณผลต่างจำกัดย้อนหลังอันดับที่หนึ่ง”

พิจารณาผลต่างและผลบวกของสมการ (2.16) และ (2.17) จะได้

$$u_t(x, t) = \frac{u(x, t+k) - u(x, t-k)}{2k} + O(k) \quad (2.20)$$

$$u_{tt}(x, t) = \frac{u(x, t+k) - 2u(x, t) + u(x, t-k)}{k^2} + O(k^2) \quad (2.21)$$

เรียกสมการ (2.20) และ (2.21) ว่า “ค่าประมาณผลต่างจำกัดกลางอันดับที่หนึ่งและค่าประมาณผลต่างจำกัดกลางอันดับที่สอง”

2.4 ระเบียบวิธีเครงก์-นิโคลสัน

จากสมการ (2.14) สูตรผลต่างจำกัดกลางอันดับที่หนึ่ง

$$u_x \cong \frac{u(x+h, t) - u(x-h, t)}{2h} \quad (2.22)$$

จาก (2.22) ถ้าการเลื่อนตำแหน่ง t ไปเป็น $t+1$ จึงได้สูตรใหม่เป็น

$$u_x \cong \frac{u(x+h, t+1) - u(x-h, t+1)}{2h} \quad (2.23)$$

นำ (2.22) + (2.23) แล้วจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$u_x \cong \frac{u(x+h, t+1) + u(x+h, t) - u(x+h, t+1) - u(x-h, t)}{4h} \quad (2.24)$$

เรียก (2.24) ว่าค่าประมาณเครงก์-นิโคลสัน อันดับที่หนึ่ง

ในทำนองเดียวกันจากสมการ (2.15) สูตรผลต่างจำกัดกลางอันดับที่สอง

$$u_{xx} \cong \frac{u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{h^2} \quad (2.25)$$

จาก (2.25) ทำการเลื่อนตำแหน่ง t ไปเป็น $t+1$ จึงได้สูตรใหม่เป็น

$$u_{xx} \cong \frac{u(x+h, t+1) - 2u(x, t+1) + u(x-h, t+1)}{h^2} \quad (2.26)$$

นำ (2.25) + (2.26) แล้วจัดรูปใหม่ ได้เป็น

$$u_{xx} \cong \frac{u(x+h, t+1) - 2u(x, t+1) + u(x-h, t+1) + u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)}{2h^2} \quad (2.27)$$

เรียก (2.27) ว่าค่าประมาณเครงก์-นิโคลสันอันดับที่สอง

2) ผลเฉลยรูปปริยาย

จาก (2.18) และ (2.23) เราจะประมาณ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ด้วยผลต่างจำกัดข้างหน้าและประมาณ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ด้วยผลต่างจำกัดกลาง (โดยการแทนที่ t ด้วย $t+1$) ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u(x, t+1) - u(x, t)}{k} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u(x+1, t+1) - 2u(x, t+1) + u(x-1, t+1)}{h^2} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

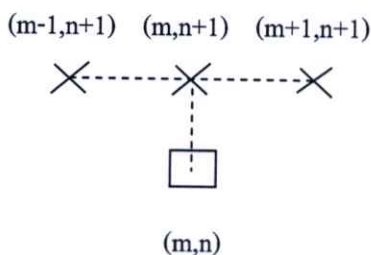
แทนค่า $\frac{\partial u}{\partial t}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ใน (2.28) ได้

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} \cong c \left[\frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right]$$

ใช้ k คูณตลอดสมการแล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$-pU_{m+1}^{n+1} + (1+2p)U_m^{n+1} - pU_{m-1}^{n+1} \cong U_m^n \quad \text{เมื่อ} \quad p = \frac{ck}{h^2} \quad (2.32)$$

เรียก (2.32) ว่า "The Fully Implicit Method Scheme"



รูปที่ 2.2 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในวิธี The Fully Implicit Method Scheme

3) ระเบียบวิธีแครังก์-นิโคลสัน

จาก (2.18) และ (2.27) เราจะประมาณ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ด้วยผลต่างจำกัดข้างหน้าและ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ด้วยวิธีแครังก์-นิโคลสัน ดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &\cong \frac{u(x, t+1) - u(x, t)}{k} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\cong \frac{u(x+1, t+1) - 2u(x, t+1) + u(x-1, t+1) + u(x+1, t) - 2u(x, t) + u(x-1, t)}{2h^2} \\ &= \frac{U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h^2}\end{aligned}$$

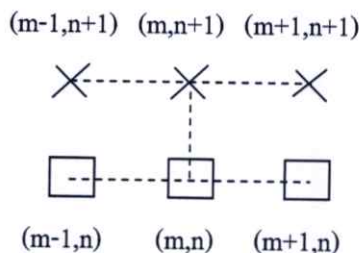
แทนค่า $\frac{\partial u}{\partial t}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ใน (2.28) ได้

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} \cong c \left[\frac{U_m^{n+1} - 2U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n}{2h^2} \right]$$

ใช้ k คูณตลอดสมการแล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$-\frac{1}{2}pU_{m+1}^{n+1} + (1+p)U_m^{n+1} - \frac{1}{2}pU_{m-1}^{n+1} \cong \frac{1}{2}pU_{m+1}^n + (1-p)U_m^n + \frac{1}{2}pU_{m-1}^n \quad (2.33)$$

เมื่อ $p = \frac{ck}{h^2}$



รูปที่ 2.3 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีแครังก์-นิโคลสัน

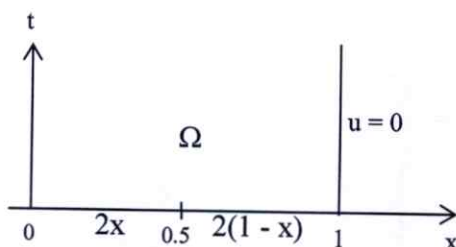
ตัวอย่าง พิจารณาผลเฉลยโดยประมาณของสมการพาราโบลิก

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.34)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 2x \quad ; \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ (2.35)

$$u(x, 0) = 2(1-x) \quad ; \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad (2.36)$$

และเงื่อนไขขอบ $u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad ; \quad t > 0$ (2.37)



รูปที่ 2.4 แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของสมการพาราโบลิก

1) The Four Points Explicit Scheme

การแบ่งโดเมน เล็ก $h = \frac{1}{10}$, $k = \frac{1}{1000}$ ดังนั้น $p = \frac{ck}{h^2} = \frac{1 \left(\frac{1}{1000} \right)}{\left(\frac{1}{10} \right)^2} = 0.1$

จาก (2.31) เมื่อแทนค่า $p = 0.1$ จะได้

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{10} U_{m-1}^n + \left[1 - \frac{2}{10} \right] U_m^n + \frac{1}{10} U_{m+1}^n$$

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{10} [U_{m-1}^n + 8U_m^n + U_{m+1}^n] \quad (2.38)$$

ได้ผลเฉลยดังตารางนี้

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
t \ n\m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0 0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
0 1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.96	0.8	0.6	0.4	0.2	0
0 2	0	0.2	0.4	0.6	0.796	0.928	0.796	0.6	0.4	0.2	0
0 3	0	0.2	0.4	0.5996	0.7896	0.9016	0.7896	0.5996	0.4	0.2	0
0 4	0	0.2	0.39996	0.59864	0.7818	0.8792	0.7818	0.59864	0.39996	0.2	0
0 5	0	0.2	0.39983	0.59709	0.77322	0.85972	0.77322	0.59709	0.39983	0.2	0
0 6	0	0.19998	0.39957	0.59498	0.76426	0.84242	0.76426	0.59498	0.39957	0.19998	0

ตารางที่ 2.2 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลิกด้วยวิธี The Four Points Explicit Scheme

2) The Fully Implicit Method Scheme

การแบ่งโดเมน เลือก $h = \frac{1}{4}, k = \frac{1}{100}$ ดังนั้น $p = \frac{ck}{h^2} = \frac{1\left(\frac{1}{100}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 0.16$

จาก (2.32) เมื่อแทนค่า $p = 0.16$ จะได้

$$-0.16U_{m+1}^{n+1} + 1.32U_m^{n+1} - 0.16U_{m-1}^{n+1} = U_m^n \tag{2.39}$$

$m = 1, n = 0$;

$$\begin{aligned} -0.16U_0^1 + 1.32U_1^1 - 0.16U_2^1 &= U_1^0 \\ 0 + 1.32U_1^1 - 0.16U_2^1 &= 0.5 \end{aligned} \tag{2.40}$$

$m = 2, n = 0$;

$$\begin{aligned} -0.16U_1^1 + 1.32U_2^1 - 0.16U_3^1 &= U_2^0 \\ -0.16U_1^1 + 1.32U_2^1 - 0.16U_3^1 &= 1 \end{aligned} \tag{2.41}$$

$m = 3, n = 0$;

$$\begin{aligned} -0.16U_2^1 + 1.32U_3^1 - 0.16U_4^1 &= U_3^0 \\ -0.16U_2^1 + 1.32U_3^1 - 0 &= 0.5 \end{aligned} \tag{2.42}$$

$$\begin{bmatrix} 1.32 & -0.16 & 0 \\ -0.16 & 1.32 & -0.16 \\ 0 & -0.16 & 1.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $\begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4848 \\ 0.8751 \\ 0.4848 \end{Bmatrix}$

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n\m	0	1	2	3	4
0	0	0	0.5	1	0.5	1
0	1	0	0.4848	0.8751	0.4848	0
0	2	0				0

ตารางที่ 2.3 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยวิธี The Fully Implicit Method Scheme

พิจารณา $m=1, n=1$;

$$\begin{aligned} -0.16U_0^2 + 1.32U_1^2 - 0.16U_2^2 &= U_1^1 \\ 0 + 1.32U_1^2 - 0.16U_2^2 &= 0.4848 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$m=2, n=1$;

$$\begin{aligned} -0.16U_1^2 + 1.32U_2^2 - 0.16U_3^2 &= U_2^1 \\ -0.16U_1^2 + 1.32U_2^2 - 0.16U_3^2 &= 0.8751 \end{aligned} \quad (2.44)$$

$m=3, n=1$;

$$\begin{aligned} -0.16U_2^2 + 1.32U_3^2 - 0.16U_4^2 &= U_3^1 \\ -0.16U_2^2 + 1.32U_3^2 - 0 &= 0.4848 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{bmatrix} 1.32 & -0.16 & 0 \\ -0.16 & 1.32 & -0.16 \\ 0 & -0.16 & 1.32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4848 \\ 0.8751 \\ 0.4848 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น

$$\begin{Bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4611 \\ 0.7747 \\ 0.4611 \end{Bmatrix}$$

ได้ผลเฉลยดังตารางนี้

x	0	0.25	0.5	0.75	1
t n\m	0	1	2	3	4
0 0	0	0.5	1	0.5	1
0 1	0	0.4848	0.8751	0.4848	0
0 2	0	0.4611	0.7747	0.4611	0

ตารางที่ 2.4 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยวิธี The Fully Implicit Method Scheme

3) ระเบียบวิธีแครงก์-นิโคลสัน

$$\text{เลือก } h = \frac{1}{10}, k = \frac{1}{100} \text{ ดังนั้น } p = \frac{ck}{h^2} = \frac{1\left(\frac{1}{100}\right)}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 1$$

จาก (2.33) เมื่อแทนค่า $p = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}U_{m-1}^{n+1} + 2U_m^{n+1} - \frac{1}{2}U_{m+1}^{n+1} &= \frac{1}{2}U_{m-1}^n + (0)U_m^n + \frac{1}{2}U_{m+1}^n \\ -\frac{1}{2}U_{m-1}^{n+1} + 2U_m^{n+1} - \frac{1}{2}U_{m+1}^{n+1} &= \frac{1}{2}U_{m-1}^n + \frac{1}{2}U_{m+1}^n \end{aligned} \quad (2.46)$$

พิจารณา $m = 1, n = 0$;

$$\begin{aligned} -U_0^1 + 4U_1^1 - U_2^1 &= U_0^0 + U_2^0 \\ 4U_1^1 - U_2^1 &= 0.4 \end{aligned} \quad (2.47)$$

$m = 2, n = 0$;

$$-U_1^1 + 4U_2^1 - U_3^1 = U_1^0 + U_3^0 = 0.2 + 0.6 = 0.8 \quad (2.48)$$

$m = 3, n = 0$;

$$-U_2^1 + 4U_3^1 - 4U_4^1 = U_2^0 + U_4^0 = 0.4 + 0.8 = 1.2 \quad (2.49)$$

$m = 4, n = 0$;

$$-U_3^1 + 4U_4^1 - U_5^1 = U_3^0 + U_5^0 = 0.6 + 1.0 = 1.6 \quad (2.50)$$

$m = 5, n = 0$;

$$-U_4^1 + 4U_5^1 - U_6^1 = U_4^0 + U_6^0$$

เนื่องจากค่าของเมทริกซ์มีลักษณะสมมาตรกันจึงสามารถแทน U_6 ด้วย U_4

$$-U_4^1 + 4U_5^1 - U_4^1 = 0.8 + 0.8 = 1.6 \quad (2.51)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_4^1 \\ U_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ 1.6 \\ 1.6 \end{bmatrix} \quad \text{ดังนั้น} \quad \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_4^1 \\ U_5^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1989 \\ 0.3956 \\ 0.5834 \\ 0.7381 \\ 0.7691 \end{bmatrix}$$

ได้ผลเฉลยดังตารางนี้

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
0	1	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691	0.7381	0.5834	0.3956	0.1989
0	2	0									0

ตารางที่ 2.5 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยระเบียบวิธีแครงก์-นิโคลสัน

พิจารณา $m=1, n=1$;

$$\begin{aligned} -U_0^2 + 4U_1^2 - U_2^2 &= U_0^1 + U_2^1 \\ 4U_1^2 - U_2^2 &= 0.3956 \end{aligned} \quad (2.52)$$

$m=2, n=1$;

$$-U_1^2 + 4U_2^2 - U_3^2 = U_1^1 + U_3^1 = 0.7845 \quad (2.53)$$

$m=3, n=1$;

$$-U_2^2 + 4U_3^2 - 4U_4^2 = U_2^1 + U_4^1 = 1.1337 \quad (2.54)$$

$m=4, n=1$;

$$-U_3^2 + 4U_4^2 - U_5^2 = U_3^1 + U_5^1 = 1.3525 \quad (2.55)$$

$m=5, n=1$;

$$-U_4^2 + 4U_5^2 - U_6^2 = U_4^1 + U_6^1$$

เนื่องจากค่าของเมทริกซ์มีลักษณะสมมาตรกันจึงสามารถแทน U_6 ด้วย U_4

$$-U_4^2 + 4U_5^2 - U_6^2 = 1.4762 \quad (2.56)$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \\ U_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3956 \\ 0.7845 \\ 1.1337 \\ 1.3525 \\ 1.4762 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_4^2 \\ U_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1938 \\ 0.3795 \\ 0.5398 \\ 0.6461 \\ 0.6921 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

ได้ผลเฉลยดังตารางนี้

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
t n\m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0 0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0
0 1	0	0.1989	0.3956	0.5834	0.7381	0.7691	0.7381	0.5834	0.3956	0.1989	0
0 2	0	0.1938	0.3795	0.5398	0.6461	0.6921	0.6461	0.5398	0.3795	0.1938	0

ตารางที่ 2.6 แสดงผลเฉลยของสมการพาราโบลาด้วยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน

2.6 วิธีการหาผลเฉลยในสมการอีลิปติก (Elliptic Equation)

สมการแพร์ความร้อน (Potential equation) รวมถึงความเย็นซึ่งมีอัตราเร็วช้ากว่า

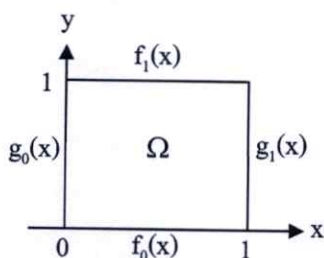
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \text{ สำหรับทุก } (x, y) \in \Omega \quad (2.57)$$

พิจารณาสมการปัวร์ซงในสี่เหลี่ยมจัตุรัส

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.58)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$u(x, y) = \begin{cases} f_0(x) & \text{ตามเส้น } y=0, 0 \leq x \leq 1 \\ f_1(x) & \text{ตามเส้น } y=1, 0 \leq x \leq 1 \\ g_0(y) & \text{ตามเส้น } x=0, 0 \leq y \leq 1 \\ g_1(y) & \text{ตามเส้น } x=1, 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.59)$$



รูปที่ 2.5 แสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของสมการปัวร์ซง

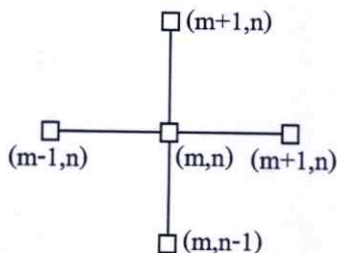
จาก (2.21) และ (2.25) เราประมาณ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ และ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ด้วยผลต่างจำกัดกลางใน (2.58) จะได้

$$\frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + \frac{U_m^{n-1} - 2U_m^n + U_m^{n+1}}{k^2} = f_m^n \quad (2.60)$$

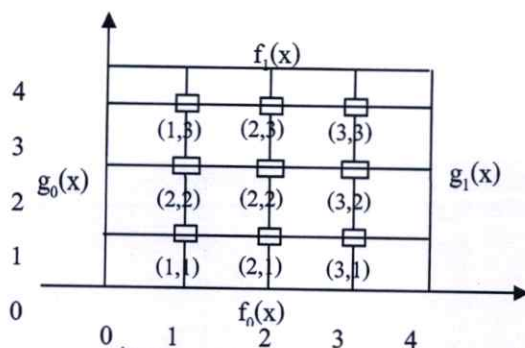
เมื่อ $f_m^n = f(x_m, y_s)$ และ $h = k$

จาก (2.60) คูณด้วย h^2 แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$U_{m-1}^n + U_{m+1}^n + U_m^{n-1} - 4U_m^n = h^2 f_m^n \quad (2.61)$$



รูปที่ 2.6 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัด



รูปที่ 2.7 แผนภาพแสดงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรวมถึงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ

$$n=1, m=1 ;$$

$$\begin{aligned} U_0^1 + U_2^1 + U_1^0 + U_1^2 - 4U_1^1 &= h^2 f_1^1 \\ \therefore -4U_1^1 + U_2^1 + U_1^2 &= h^2 f_1^1 - g_0(y_1) - f_0(x_1) \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$n=1, m=2 ;$$

$$\begin{aligned} U_1^1 + U_3^1 + U_2^0 + U_2^2 - 4U_2^1 &= h^2 f_2^1 \rightarrow f(x_2, y_1) \\ \therefore -4U_2^1 + U_1^1 + U_3^1 + U_2^2 &= h^2 f_2^1 - f_0(x_2) \end{aligned} \quad (2.63)$$

$$n=1, m=3 ;$$

$$\begin{aligned} U_2^1 + U_4^1 + U_3^0 + U_3^2 - 4U_3^1 &= h^2 f_3^1 \\ \therefore -4U_3^1 + U_2^1 + U_3^2 &= h^2 f_3^1 - g(y_1) - f_0(x_3) \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$n=2, m=1 ;$$

$$\begin{aligned} U_0^2 + U_2^2 + U_1^1 + U_1^3 - 4U_1^2 &= h^2 f_1^2 \\ \therefore -4U_1^2 + U_2^2 + U_1^1 + U_1^3 &= h^2 f_1^2 - g_0(y_2) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$n=2, m=2 ;$$

$$U_1^2 + U_3^2 + U_2^1 + U_2^3 - 4U_2^2 = h^2 f_2^2 \quad (2.66)$$

$$n=2, m=3 ;$$

$$\begin{aligned} U_2^2 + U_4^2 + U_3^1 + U_3^3 - 4U_3^2 &= h^2 f_3^2 \\ \therefore -4U_3^2 + U_2^2 + U_3^1 + U_3^3 &= h^2 f_3^2 - g_1(y_2) \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$n=3, m=1 ;$$

$$\begin{aligned} U_0^3 + U_2^3 + U_1^2 + U_1^4 - 4U_1^3 &= h^2 f_1^3 \\ \therefore -4U_1^3 + U_2^3 + U_1^2 &= h^2 f_1^3 - g_0(y_3) - f_1(x_1) \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$n=3, m=2 ;$$

$$\begin{aligned} U_1^3 + U_3^3 + U_2^2 + U_2^4 - 4U_2^3 &= h^2 f_2^3 \\ \therefore -4U_2^3 + U_1^3 + U_3^3 + U_2^2 &= h^2 f_2^3 - f_1(x_2) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$n=3, m=3 ;$$

$$\begin{aligned} U_2^3 + U_4^3 + U_3^2 + U_3^4 - 4U_3^3 &= h^2 f_3^3 \\ \therefore -4U_3^3 + U_2^3 + U_3^2 &= h^2 f_3^3 - g_1(y_3) - f_1(x_3) \end{aligned} \quad (2.70)$$

จากสมการ (2.62) – (2.70) เขียนในรูปเมตริกซ์ได้ เป็น

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 f_1^1 - g_0(y_1) - f_0(x_1) \\ h^2 f_2^1 - f_0(x_2) \\ h^2 f_3^1 - g(y_1) - f_0(x_2) \\ h^2 f_1^2 - g_0(y_2) \\ h^2 f_2^2 \\ h^2 f_3^2 - g_1(y_2) \\ h^2 f_1^3 - g_0(y_3) - f_1(x_1) \\ h^2 f_2^3 - f_1(x_2) \\ h^2 f_3^3 - g_1(y_3) - f_1(x_3) \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง พิจารณาผลเฉลยของสมการอีลิปติก

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -16 \quad (2.71)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$u(x, y) = \begin{cases} 1-x & \text{ตามเส้น} & y=0, 0 \leq x \leq 1 \\ 1-x & \text{ตามเส้น} & y=1, 0 \leq x \leq 1 \\ 1-y & \text{ตามเส้น} & x=0, 0 \leq y \leq 1 \\ 1-y & \text{ตามเส้น} & x=1, 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad (2.72)$$

วิธีทำ เลือก $h = \frac{1}{4}$, $k = \frac{1}{4}$ (นิยมแบ่งโดเมนให้เท่ากัน)

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \\ U_1^3 \\ U_2^3 \\ U_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ -1.5 \\ -2 \\ -1.5 \\ -1 \\ -1.5 \\ -2 \\ -1.5 \\ -1.5 \end{bmatrix}$$

ได้ผลเฉลยดังตารางนี้

	m	0	1	2	3	4
n	y \ x	0	0.25	0.5	0.75	1
0	0	1	0.75	0.5	0.25	0/1
1	0.25	0.75	1.3304	1.4107	1.1875	0.75
2	0.5	0.5	1.4107	1.625	1.3393	0.5
3	0.75	0.25	1.1875	1.3393	1.0455	0.25
4	1	1/0	0.75	0.5	0.25	0

ตารางที่ 2.7 แสดงผลเฉลยของสมการอีลิปติกด้วยระเบียบผลต่างจำกัด

2.7 วิธีการหาผลเฉลยในสมการไฮเปอร์โบลิก (Hyperbolic Equation)

สมการไฮเปอร์โบลิกอันดับที่หนึ่ง

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.73)$$

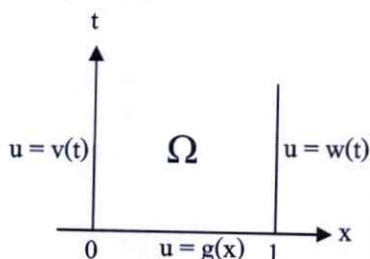
ภายในช่วง $R = [0, 1] \times [0, T]$ โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.74)$$

เงื่อนไขขอบ

$$u(0, t) = v(x), \quad t > 0 \quad (2.75)$$

$$u(1, t) = w(t), \quad t > 0 \quad (2.76)$$



รูปที่ 2.8 แผนภาพแสดงเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบของสมการไฮเปอร์โบลิกอันดับที่หนึ่ง

1) ผลเฉลยรูปซัดแฉ่ง

จาก (2.18) และ (2.22) เราประมาณ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ด้วยผลต่างจำกัดกลางและประมาณ $\frac{\partial u}{\partial t}$

ด้วยผลต่างจำกัดข้างหน้าใน (2.73) จะได้

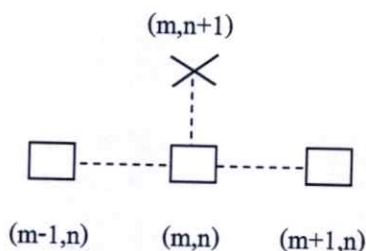
$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \mu \left[\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right] = 0 \quad (2.77)$$

คูณด้วย k ตลอดสมการ แล้วจัดรูปใหม่

$$U_m^{n+1} = \frac{-\mu k}{2h} U_{m+1}^n + U_m^n + \frac{\mu k}{2h} U_{m-1}^n$$

$$U_m^{n+1} = \frac{-r}{2} U_{m+1}^n + U_m^n + \frac{r}{2} U_{m-1}^n \quad (2.78)$$

เมื่อ $r = -\frac{\mu k}{h}$



รูปที่ 2.9 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในสมการไฮเปอร์โบลิกอันดับหนึ่ง

2) ผลเฉลยรูปปริยาย

จาก (2.19) และ (2.23) เราประมาณ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ด้วยผลต่างจำกัดกลางที่ $U(m, n+1)$ และ

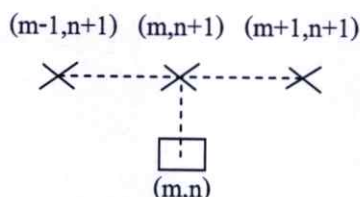
ประมาณ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ด้วยผลต่างจำกัดย้อนหลังที่ $U(m, n+1)$ ใน (2.73) จะได้

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \mu \left[\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right] = 0 \quad (2.79)$$

คูณด้วย k ตลอดสมการ แล้วจัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} \frac{\mu k}{2h} U_{m+1}^{n+1} + U_m^{n+1} - \frac{\mu k}{2h} U_{m-1}^{n+1} &= U_m^n \\ \frac{r}{2} U_{m+1}^{n+1} + U_m^{n+1} - \frac{r}{2} U_{m-1}^{n+1} &= U_m^n \end{aligned} \quad (2.80)$$

เมื่อ $r = \frac{\mu k}{h}$



รูปที่ 2.10 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีผลต่างจำกัดในสมการไฮเปอร์โบลิกอันดับหนึ่ง

3) วิธีเครงก์-นิโคลสัน

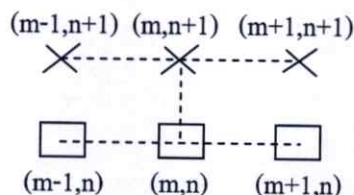
จาก (2.19) และ (2.24) เราประมาณ $\frac{\partial u}{\partial x}$ ด้วยวิธีเครงก์-นิโคลสัน และประมาณ $\frac{\partial u}{\partial t}$ ด้วยผลต่างจำกัดย้อนหลังที่ $U(m, n+1)$ ใน (2.73) จะได้

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + \mu \left[\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1} + U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{4h} \right] = 0 \quad (2.81)$$

คูณด้วย k ตลอดสมการ แล้วจัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} \frac{\mu k}{4h} U_{m+1}^{n+1} + U_m^{n+1} - \frac{\mu k}{4h} U_{m-1}^{n+1} &= \frac{-\mu k}{4h} U_{m+1}^n + U_m^n + \frac{\mu k}{4h} U_{m-1}^n \\ \frac{r}{4} U_{m+1}^{n+1} + U_m^{n+1} - \frac{r}{4} U_{m-1}^{n+1} &= \frac{-r}{4} U_{m+1}^n + U_m^n + \frac{r}{4} U_{m-1}^n \end{aligned} \quad (2.82)$$

เมื่อ $r = \frac{\mu k}{h}$



รูปที่ 2.11 แผนภาพแสดงถึงจุดที่ใช้ในระเบียบวิธีเครงก์-นิโคลสันในสมการไฮเปอร์โบลิกอันดับหนึ่ง

ตัวอย่าง พิจารณาผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกอันดับหนึ่ง

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = 1 + x \quad , 0 \leq x \leq 1$$

และเงื่อนไขขอบ

$$u(0, t) = t \quad , t > 0$$

$$u(1, t) = -t \quad , t > 0$$

เลือก $h = 0.25$, $k = 0.1$ ดังนั้น $r = \frac{\mu k}{h} = \frac{1(0.1)}{0.25} = 0.4$

1) ผลเฉลยรูปชัดเจน

จาก (2.78) แทนค่า $r = 0.4$ จะได้

$$U_m^{n+1} = 0.2U_{m+1}^n + U_m^n - 0.2U_{m-1}^n \quad (2.83)$$

ได้ผลเฉลยดังตาราง

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n \ m	0	1	2	3	4
0	0	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	1	0.1	1.15	1.4	1.65	-0.1
0.2	2	0.2	0.89	1.3	1.95	-0.2

ตารางที่ 2.8 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปชัดเจน

2) ผลเฉลยรูปปริยาย

จาก (2.80) แทนค่า $r = 0.4$ จะได้

$$0.2U_{m+1}^{n+1} + U_m^{n+1} - 0.2U_{m-1}^{n+1} = U_m^n \quad (2.84)$$

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n \ m	0	1	2	3	4
0	0	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	1	0.1				-0.1
0.2	2	0.2				-0.2

ตารางที่ 2.9 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปปริยาย

$$n = 0, m = 1 ;$$

$$\begin{aligned} 0.2U_2^1 + U_1^1 - 0.2U_0^1 &= 1.25 \\ U_1^1 + 0.2U_2^1 &= 1.27 \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$n = 0, m = 2 ;$$

$$\begin{aligned} 0.2U_3^1 + U_2^1 - 0.2U_1^1 &= 1.5 \\ -0.2U_1^1 + U_2^1 - 0.2U_3^1 &= 1.5 \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$n=0, m=3 ;$$

$$\begin{aligned} 0.2U_4^1 + U_3^1 - 0.2U_2^1 &= 1.75 \\ -0.2U_2^1 + U_3^1 &= 1.77 \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0.2 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.27 \\ 1.5 \\ 1.77 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0107 \\ 1.2963 \\ 2.0293 \end{bmatrix}$$

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n\m	0	1	2	3	4
0	0	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	1	0.1	1.0107	1.2963	2.0293	-0.1
0.2	2	0.2				-0.2

ตารางที่ 2.10 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปปริยาย

$$n=1, m=1 ;$$

$$\begin{aligned} 0.2U_2^2 + U_1^2 - 0.2U_0^2 &= 0.9222 \\ U_1^2 + 0.2U_2^2 &= 0.9622 \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$n=1, m=2 ;$$

$$\begin{aligned} 0.2U_3^2 + U_2^2 - 0.2U_1^2 &= 1.7391 \\ -0.2U_1^2 + U_2^2 - 0.2U_3^2 &= 1.7391 \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$n=1, m=3 ;$$

$$\begin{aligned} 0.2U_4^2 + U_3^2 - 0.2U_2^2 &= 2.1178 \\ -0.2U_2^2 + U_3^2 &= 2.1578 \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0.2 \\ 0 & -0.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9622 \\ 1.7391 \\ 2.1578 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6844 \\ 1.3889 \\ 2.4356 \end{bmatrix}$$

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n\m	0	1	2	3	4
0	0	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	1	0.1	1.0107	1.2963	2.0293	-0.1
0.2	2	0.2	0.6844	1.3889	2.4356	-0.2

ตารางที่ 2.11 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกด้วยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดรูปปริยาย

3) วิธีแครังก์-นิโคลสัน

จาก (2.82) แทนค่า $r=0.4$ จะได้

$$0.1U_{m+1}^{n+1} + U_m^{n+1} - 0.1U_{m-1}^{n+1} = -0.1U_{m+1}^n + U_m^n + 0.1U_{m-1}^n$$

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n\m	0	1	2	3	4
0	0	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	1	0.1				-0.1
0.2	2	0.2				-0.2

ตารางที่ 2.12 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกด้วยระเบียบวิธีแครังก์-นิโคลสัน

$n=0, m=1$;

$$\begin{aligned} 0.1U_2^1 + U_1^1 - 0.1U_0^1 &= -0.1U_2^0 + U_1^0 + 0.1U_0^0 \\ U_1^1 + 0.1U_2^1 &= 0.1(0.1) - 0.1(1.5) + 1.25 + 0.1(1) = 1.21 \end{aligned} \quad (2.91)$$

$n=0, m=2$;

$$\begin{aligned} 0.1U_3^1 + U_2^1 - 0.1U_1^1 &= -0.1U_3^0 + U_2^0 + 0.1U_1^0 \\ -0.1U_1^1 + U_2^1 - 0.1U_3^1 &= -0.1(1.75) + 1.5 + 0.1(1.25) = 1.45 \end{aligned} \quad (2.92)$$

$n=0, m=3$;

$$\begin{aligned} 0.1U_4^1 + U_3^1 - 0.1U_2^1 &= -0.1U_4^0 + U_3^0 + 0.1U_2^0 \\ -0.1U_2^1 + U_3^1 &= -0.1(-0.1) - 0.1(2) + 1.75 + 0.1(1.5) = 1.71 \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1.21 \\ 1.45 \\ 1.71 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_3^1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1.0727 \\ 1.3725 \\ 1.8473 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n\m	0	1	2	3	4
0	0	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	1	0.1	1.0727	1.3725	1.8473	-0.1
0.2	2	0.2				-0.2

ตารางที่ 2.13 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกด้วยระเบียบวิธีแครังก์-นิโคลสัน

$$n=1, m=1 ;$$

$$0.1U_2^2 + U_1^2 - 0.1U_0^2 = -0.1U_2^1 + U_1^1 + 0.1U_0^1$$

$$U_1^2 + 0.1U_2^2 = 0.1(0.2) - 0.1(1.3725) + 1.0727 + 0.1(0.1) = 0.9655$$

(2.94)

$$n=1, m=2 ;$$

$$0.1U_3^2 + U_2^2 - 0.1U_1^2 = -0.1U_3^1 + U_2^1 + 0.1U_1^1$$

$$= -0.1(1.8473) + 1.3725 + 0.1(1.0727) = 1.2950$$

(2.95)

$$n=1, m=3 ;$$

$$0.1U_4^2 + U_3^2 - 0.1U_2^2 = -0.1U_4^1 + U_3^1 + 0.1U_2^1$$

$$-0.1U_2^2 + U_3^2 = -0.1(-0.2) - 0.1(-0.1) + 1.8473 + 0.1(1.3725) = 2.0146$$

(2.96)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 1 & 0.1 \\ 0 & -0.1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9655 \\ 1.2950 \\ 2.0146 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ U_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8488 \\ 1.1668 \\ 2.1313 \end{bmatrix}$$

ได้ผลเฉลยดังตาราง

	x	0	0.25	0.5	0.75	1
t	n\m	0	1	2	3	4
0	0	1	1.25	1.5	1.75	2
0.1	1	0.1	1.0727	1.3725	1.8473	-0.1
0.2	2	0.2	0.8488	1.1668	2.1313	-0.2

ตารางที่ 2.14 แสดงผลเฉลยของสมการไฮเปอร์โบลิกด้วยระเบียบวิธีแรงก์-นิโคลสัน

2.8 การแก้ระบบสมการโดยวิธี Triangular Decomposition

เมทริกซ์ใดๆ A ขนาด $n \times n$ สามารถเขียนในรูปผลคูณ $A = LU$

เมื่อ $U = [u_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $n \times n$

และ $L = [l_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างขนาด $n \times n$ โดย $l_{ii} = 1$

$$\text{เช่น } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

หรือ $U = [u_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $n \times n$ โดย $u_{ii} = 1$

และ $L = [l_{i,j}]$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่างขนาด $n \times n$

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \text{ และ } U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

สำหรับปัญหาที่ศึกษานี้มีลักษณะเป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่เรียกว่า เมทริกซ์สามแนวเฉียง (Tridiagonal matrix) กล่าวคือถ้าสมาชิกที่ไม่เป็นศูนย์อยู่บนแนวทแยงมุมหลัก และอยู่บนแนวเหนือและล่างแนวทแยงมุม เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 \end{bmatrix} \text{ จะได้ว่า } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } LU = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ l_1 u_1 & l_1 v_1 + u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & l_2 u_2 & l_2 v_2 + u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & l_3 u_3 & l_3 v_3 + u_4 \end{bmatrix}$$

จาก $AX = B$ ถ้า $A = LU$ แล้ว $LUX = B$ จะได้

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ l_1 u_1 & l_1 v_1 + u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & l_2 u_2 & l_2 v_2 + u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & l_3 u_3 & l_3 v_3 + u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

และถ้า $UX = Y$ แล้ว $LY = B$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = k_1 \text{ และ } y_2 = k_2 - k_1 l_1$$

$$y_3 = k_3 - l_2(k_2 - k_1 l_1) \text{ และ } y_4 = k_4 - l_3(k_3 - l_2(k_2 - k_1 l_1))$$

จากนั้นพิจารณา $UX = Y$ จะได้

$$\begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 - k_1 l_1 \\ k_3 - l_2(k_2 - k_1 l_1) \\ k_4 - l_3(k_3 - l_2(k_2 - k_1 l_1)) \end{bmatrix}$$

$$x_4 = \frac{k_4 - l_3(k_3 - l_2(k_2 - k_1 l_1))}{u_4}$$

$$x_3 = \frac{(k_3 - l_2(k_2 - k_1 l_1)) - v_3 x_4}{u_3}$$

$$x_2 = \frac{(k_2 - k_1 l_1) - v_2 x_3}{u_2}$$

$$x_1 = \frac{k_1 - v_1 x_2}{u_1}$$

ขั้นตอนวิธี (Algorithm)

INPUT ค่า n ซึ่งแสดงจำนวนมิติของเมทริกซ์จัตุรัส
 ค่า a_{ij} เมื่อ $1 \leq i, j \leq n$ ของเมทริกซ์ A
 สมาชิกแนวทแยงมุม $l_{11} = \dots = l_{nn} = 1$ ของเมทริกซ์ L หรือสมาชิกแนวทแยงมุม
 $u_{11} = \dots = u_{nn} = 1$ ของ U

OUTPUT ค่า l_{ij} เมื่อ $1 \leq j \leq i, 1 \leq i \leq n$ ของ L และค่าของ u_{ij} เมื่อ $i \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n$
 ของ U

ขั้นที่ 1 เลือก l_{11} และ u_{11} ที่สอดคล้อง $l_{11} u_{11} = a_{11}$
 IF $l_{11} u_{11} = 0$ then OUTPUT ('Factorization impossible')

STOP.

ขั้นที่ 2 For $j = 2, \dots, n$ กำหนดค่า $u_{1j} = a_{1j} / l_{11}$; (แถวแรกของ U)
 $l_{1j} = a_{1j} / u_{1j}$. (หลักแรกของ L)

ขั้นที่ 3 For $i = 2, \dots, n-1$ ทำขั้นที่ 4 และ 5
ขั้นที่ 4 เลือก l_{i1} และ u_{i1} ที่สอดคล้อง $l_{i1} u_{i1} = a_{i1} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{k1}$

ขั้นที่ 5 For $j = i+1, \dots, n$

$$\text{กำหนด } u_{ij} = \frac{1}{l_{ij}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \right]; \text{ (แถวที่ } i \text{ ของ } U)$$

$$l_{ji} = \frac{1}{u_{ii}} \left[a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right]. \text{ (หลักที่ } i \text{ ของ } L)$$

ขั้นที่ 6 เลือก l_{nm} และ u_{nm} ที่สอดคล้อง $l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{nk}u_{nk}$
 (ถ้า $l_{nn}u_{nn} = 0$ แล้ว $A = LU$ แต่ A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน)

ขั้นที่ 7 OUTPUT (l_{ij} สำหรับ $j=1, \dots, i$ และ $i=1, \dots, n$);
 OUTPUT (u_{ij} สำหรับ $j=1, \dots, n$ และ $i=1, \dots, n$);
 STOP.

จาก $AX = B$ ถ้า $A = LU$ แล้ว $LUX = B$ จะได้

และถ้า $UX = Y$ แล้ว $LY = B$ จะได้

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

และสำหรับแต่ละ $i = 2, 3, \dots, n$,

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j \right]$$

จากนั้นหาค่า x จากเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน $Ux = y$

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} \text{ และ } x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right]$$

ตัวอย่าง พิจารณาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_2 - 3x_3 - x_4 &= 10 \\ 7x_3 + 4x_4 &= 6 \end{aligned}$$

วิธีทำ เปลี่ยนระบบสมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

เขียนในรูปความสัมพันธ์ของ $A = LU$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & u_4 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & 0 & 0 \\ \ell_1 u_1 & \ell_1 v_1 + u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & \ell_2 u_2 & \ell_2 v_2 + u_3 & v_3 \\ 0 & 0 & \ell_3 u_3 & \ell_3 v_3 + u_4 \end{bmatrix}$$

พิจารณาสมาชิกแต่ละตำแหน่งได้ค่าดังนี้

$$u_1 = 1, v_1 = 2$$

$$l_1 u_1 = 2, l_1 = 2 \text{ และ } l_1 v_1 + u_2 = -1, u_2 = -5 \text{ และ } v_2 = 1$$

$$l_2 u_2 = 3, l_2 = -\frac{3}{5} \text{ และ } l_2 v_2 + u_3 = -3, u_3 = -\frac{12}{5}$$

$$v_3 = -1 \text{ และ } l_3 u_3 = 7, l_3 = -\frac{35}{12}$$

$$l_3 v_3 + u_4 = 4, u_4 = \frac{13}{12}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{35}{12} & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{12} \end{bmatrix}$$

จาก $AX = B$ ถ้า $A = LU$ แล้ว $LUX = B$

และถ้า $UX = Y$ แล้ว $LY = B$

$$\text{ดังนั้น } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -35/12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -17 \\ -1/5 \\ 65/12 \end{bmatrix}$$

จากนั้นพิจารณา $UX = Y$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12/5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 13/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -17 \\ -1/5 \\ 65/12 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2.9 ความเสถียรภาพ (Stability)

แนวคิดของความเสถียรภาพ (The concept of stability)

แนวคิดของความเสถียรภาพเกี่ยวข้องกับขอบเขตของผลเฉลยของสมการผลต่างจำกัด และแนวคิดนี้จะพิจารณาถึงการหาความเสถียรภาพภายใต้เงื่อนไข

$$Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$$

เมื่อ \tilde{U}_m^n คือผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณซึ่งอาจมีค่าเคลื่อนเนื่องจากการปัดเศษ

U_m^n คือผลเฉลยของสมการผลต่างจำกัด

Z_m^n ผลต่างระหว่างผลเฉลยจากการคำนวณและผลเฉลยของสมการผลต่างจำกัด

ซึ่งการพิจารณาจะกำหนดค่า h และ ℓ เมื่อเวลา t ใดๆ (ในส่วนของ การตรวจสอบความเสถียรภาพจะขอใช้ตัวแปร ℓ แทน k)

การวิเคราะห์ความเสถียร (The analysis of stability)

เราจะพิจารณาการเพิ่มขึ้นของค่ารบกวน (Perturbation) ในข้อมูลเริ่มต้น หรือการเพิ่มขึ้นของค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการแบ่งโดเมน วิธีที่นิยมใช้ในการตรวจสอบความเสถียรภาพมี 3 วิธีคือ

- 1) The matrix method
- 2) The Von Neumann หรือ Fourier method
- 3) The energy method

การวิเคราะห์ความเสถียรภาพโดยวิธีของวอน นอยมานน์ (Von Neumann)

วิธีการตรวจสอบความเสถียรภาพนี้ถูกพัฒนาโดยจอห์น วอน นอยมานน์ (John Von Neumann) ในปี 1940 ซึ่งในวิธีการนี้จะเป็นการหาผลเฉลยและเงื่อนไขของสมการผลต่างจำกัด ซึ่งมีรูปแบบ

$$Z_m^n = A e^{i\beta m h} \cdot e^{\alpha n \ell}$$

จะเห็นได้ว่า Z_m^n ขึ้นอยู่กับตัวประกอบ $(e^{\alpha \ell})^n$

จาก Von Neumann Criteria [2]

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } |e^{\alpha \ell}| \leq 1 & \quad \text{แล้วผลเฉลยจะลู่เข้า} \\ |e^{\alpha \ell}| > 1 & \quad \text{แล้วผลเฉลยจะลู่ออก} \end{aligned} \tag{2.97}$$

พิจารณาการกระจายของค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ t เพิ่มขึ้น โดย

$$\begin{aligned} Z_m^n &= e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta m h} \\ &= \xi^n \cdot e^{i\beta m h} \end{aligned}$$

เมื่อ α แทน สัมประสิทธิ์เชิงซ้อน $\beta \in \mathbb{R}$, $\xi = e^{\alpha \ell}$ เรียก ξ ว่าส่วนขยายตัวประกอบ

2.10 วิธีตรวจสอบความเสถียรภาพของสมการพาราโบลิก

ตัวอย่าง พิจารณาการตรวจสอบเงื่อนไขความเสถียรภาพของสมการพาราโบลิก (2.28)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad a \leq x \leq b$$

1) The Four Point Explicit Scheme

จากสมการ (2.31)

$$U_m^{n+1} = pU_{m-1}^n + (1-2p)U_m^n + pU_{m+1}^n$$

แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$

$$\tilde{U}_m^{n+1} = p\tilde{U}_{m-1}^n + (1-2p)\tilde{U}_m^n + p\tilde{U}_{m+1}^n \quad (2.98)$$

นำสมการ (2.31) ลบด้วย (2.98) แล้วจัดรูปจะได้

$$U_m^{n+1} - \tilde{U}_m^{n+1} = p(U_{m-1}^n - \tilde{U}_{m-1}^n) + (1-2p)(U_m^n - \tilde{U}_m^n) + p(U_{m+1}^n - \tilde{U}_{m+1}^n) \quad (2.99)$$

แทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.99) จะได้

$$Z_m^{n+1} = pZ_{m-1}^n + (1-2p)Z_m^n + pZ_{m+1}^n \quad (2.100)$$

ในการทดสอบนี้จะให้ Z_m^n อยู่ในรูปแบบ $Ae^{\alpha t} \cdot e^{i\beta m h}$ จะได้

$$Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta m h} = pAe^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m-1)h} + (1-2p)Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h} + pAe^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m+1)h} \quad (2.101)$$

หารตลอดสมการ (2.101) ด้วย $Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$ แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} &= p(e^{-i\beta h} + e^{i\beta h}) + (1-2p) \\ \xi &= p(e^{-i\beta h} + e^{i\beta h}) + (1-2p) \end{aligned} \quad (2.102)$$

จากสูตรของออยเลอร์

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{และ} \quad i \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \quad (2.103)$$

แทน θ ด้วย βh แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$2 \cos(\beta h) = e^{i\beta h} + e^{-i\beta h} \quad \text{และ} \quad 2i \sin(\beta h) = e^{i\beta h} - e^{-i\beta h} \quad (2.104)$$

และสูตรมุมครึ่งของตรีโกณมิติ

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \quad (2.105)$$

เมื่อแทน 2θ ด้วย βh ในสมการข้างต้นจะได้

$$\cos \beta h = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \quad (2.106)$$

แทนสมการ (2.104) และ (2.106) ลงใน (2.102) จะได้

$$\begin{aligned} \xi &= 2p(\cos \beta h) + (1-2p) \\ &= 2p\left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)\right) + (1-2p) \\ &= 1 - 4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } |\xi| = \left| 1 - 4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right|$$

และจากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\begin{aligned} \left| 1 - 4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right| &\leq 1 \\ -1 &\leq 1 - 4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \leq 1 \\ -2 &\leq -4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \leq 0 \\ -4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) &\geq -2 \\ p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) &\leq \frac{1}{2} \\ p &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.31) ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข (Conditionally Stable) เมื่อ $p \leq \frac{1}{2}$

2) The Fully Implicit Method Scheme

จากสมการ (2.32)

$$-pU_{m-1}^{n+1} + (1+2p)U_m^{n+1} - pU_{m+1}^{n+1} = U_m^n$$

แทน $U_m^n \equiv \tilde{U}_m^n$

$$-p\tilde{U}_{m-1}^{n+1} + (1+2p)\tilde{U}_m^{n+1} - p\tilde{U}_{m+1}^{n+1} = \tilde{U}_m^n \quad (2.107)$$

นำสมการ (2.32) ลบด้วย (2.107) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$-pZ_{m-1}^{n+1} + (1+2p)Z_m^{n+1} - pZ_{m+1}^{n+1} = Z_m^n \quad (2.108)$$

ในการทดสอบนี้จะให้ Z_m^n อยู่ในรูปแบบ $Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$ จะได้

$$\left[-pAe^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta(m-1)h} \right] + \left[(1+2p)Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta m h} \right] - \left[pAe^{\alpha(n+1)t} e^{i\beta(m+1)h} \right] = Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$$

หารตลอดสมการด้วย $Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$ แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\left[-pe^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta h} \right] + e^{\alpha t} + 2pe^{\alpha t} - \left[pe^{\alpha t} \cdot e^{i\beta h} \right] = 1$$

$$e^{\alpha t} \left[-p \cdot e^{-i\beta h} + 1 + 2p - p \cdot e^{i\beta h} \right] = 1$$

$$e^{\alpha t} \left[-2p \left(\frac{e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}}{2} \right) + (1+2p) \right] = 1$$

$$e^{\alpha t} \left[-2p \cos \beta h + 1 + 2p \right] = 1$$

$$e^{\alpha t} \left[-2p \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) + 1 + 2p \right] = 1$$

$$e^{\alpha t} \left[-2p + 4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 1 + 2p \right] = 1$$

$$e^{\alpha t} = \frac{1}{1 + 4p \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}$$

$$\xi = \frac{1}{1 + 4p \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}$$

ดังนั้น

$$|\xi| = \left| \frac{1}{1 + 4p \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \right|$$

และจากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + 4p \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \right| &\leq 1 \\ -1 &\leq \frac{1}{1 + 4p \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \leq 1 \\ 4p \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 1 &\geq 1 \\ 4p \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) &\geq 0 \\ p &\geq 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.32) ลู่เข้าอย่างไม่มีเงื่อนไข (Unconditionally Stable)

3) ระเบียบวิธีแครงก์-นิโคลสัน

จากสมการ (2.33)

$$-\frac{1}{2}pU_{m-1}^{n+1} + (1+p)U_m^{n+1} - \frac{1}{2}pU_{m+1}^{n+1} = \frac{1}{2}pU_{m-1}^n + (1-p)U_m^n + \frac{1}{2}pU_{m+1}^n$$

แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$

$$-\frac{1}{2}p\tilde{U}_{m-1}^{n+1} + (1+p)\tilde{U}_m^{n+1} - \frac{1}{2}p\tilde{U}_{m+1}^{n+1} = \frac{1}{2}p\tilde{U}_{m-1}^n + (1-p)\tilde{U}_m^n + \frac{1}{2}p\tilde{U}_{m+1}^n \quad (2.109)$$

นำสมการ (2.33) ลบด้วย (2.109) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้ว่า

$$-\frac{1}{2}pZ_{m-1}^{n+1} + (1+p)Z_m^{n+1} - \frac{1}{2}pZ_{m+1}^{n+1} = \frac{1}{2}pZ_{m-1}^n + (1-p)Z_m^n + \frac{1}{2}pZ_{m+1}^n \quad (2.110)$$

ในการทดสอบนี้จะให้ Z_m^n อยู่ในรูปแบบ $Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}p[Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta(m-1)h}] + (1+p)[Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta m h}] - \frac{1}{2}p[Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta(m+1)h}] \\ = \frac{1}{2}p[Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m-1)h}] + (1-p)[Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}] + \frac{1}{2}p[Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m+1)h}] \end{aligned}$$

หารตลอดสมการด้วย $Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$ แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}p \cdot e^{\alpha t} e^{-i\beta h} + (1+p)e^{\alpha t} - \frac{1}{2}pe^{\alpha t} \cdot e^{i\beta h} &= \frac{1}{2}pe^{-i\beta h} + (1-p) + \frac{1}{2}pe^{i\beta h} \\
e^{\alpha t} \left[-\frac{1}{2}pe^{-i\beta h} - \frac{1}{2}pe^{i\beta h} + (1+p) \right] &= \frac{1}{2}pe^{-i\beta h} + \frac{1}{2}pe^{i\beta h} + (1-p) \\
e^{\alpha t} \left[-p \frac{e^{-i\beta h} + pe^{i\beta h}}{2} + (1+p) \right] &= p \frac{e^{-i\beta h} + pe^{i\beta h}}{2} + (1-p) \\
e^{\alpha t} [-p \cos(\beta h) + 1 + p] &= p \cos(\beta h) + 1 - p \\
e^{\alpha t} \left[-p \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) + 1 + p \right] &= p \left[1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right] + 1 - p \\
e^{\alpha t} \left[1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right] &= 1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \\
e^{\alpha t} &= \frac{1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)}{1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)} \\
|e^{\alpha t}| &= \frac{\left| 1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right|}{\left| 1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right|} \\
|\xi| &= \frac{\left| 1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right|}{\left| 1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right|}
\end{aligned}$$

และจากเงื่อนไขการดูเข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\left| 1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right|}{\left| 1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right|} &\leq 1 \\
\left| 1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right| &\leq \left| 1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right| \\
\left(1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)^2 &\leq \left(1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)^2 \\
\left[1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 1 + 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right] \left[1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) - 1 - 2p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right] &\leq 0 \\
2(-4p \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)) &\leq 0 \\
p &\geq 0
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.33) ดูเข้าอย่างไม่มีเงื่อนไข

2.11 วิธีตรวจสอบความเสถียรภาพของสมการไฮเปอร์โบลิก

William F. Ames แสดงการวิเคราะห์ความเสถียรภาพของสมการไฮเปอร์โบลิกอันดับหนึ่งทั้ง 7 กรณีดังนี้

$$1) \frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k} + a \left[\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right] = 0$$

ใช้ k คูณตลอดแล้วจัดรูปใหม่ได้

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= -\frac{ak}{h} U_{m+1}^n + \frac{ak}{h} U_{m-1}^n + U_m^{n-1} \\ U_m^{n+1} &= -p U_{m+1}^n + p U_{m-1}^n + U_m^{n-1} \end{aligned} \quad (2.111)$$

เมื่อ $p = \frac{ak}{h}$ แทน $U_m^n \equiv \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.111) จะได้

$$\tilde{U}_m^{n+1} = -p \tilde{U}_{m+1}^n + p \tilde{U}_{m-1}^n + \tilde{U}_m^{n-1} \quad (2.112)$$

นำสมการ (2.111) ลบด้วย (2.112) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$Z_m^{n+1} = -p Z_{m+1}^n + p Z_{m-1}^n + Z_m^{n-1} \quad (2.113)$$

แทน $Z_m^n = Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$ จะได้

$$Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta m h} = -p Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m-1)h} + p Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + Ae^{\alpha(n-1)t} \cdot e^{i\beta m h}$$

$$e^{\alpha t} = -p e^{i\beta h} + p \cdot e^{-i\beta h} + e^{-\alpha t}$$

$$e^{\alpha t} - e^{-\alpha t} = -p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})$$

$$\xi - \frac{1}{\xi} = -2pi \sin(\beta h)$$

$$\xi^2 + 2pi \sin(\beta h)(\xi) - 1 = 0$$

$$\xi = \frac{-2pi \sin(\beta h) \pm \sqrt{-4p^2 \sin^2(\beta h) - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

ค่าของ ξ จะมีคำตอบเป็นจริงเมื่อ

$$-4p^2 \sin^2(\beta h) + 4 \geq 0$$

$$-4p^2 + 4 \geq 0$$

$$p^2 \leq 1$$

จะได้ว่า $-1 \leq p \leq 1$ เนื่องจาก $p = \frac{ak}{h} > 0$

ดังนั้น $p \leq 1$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.111) ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขเมื่อ $p \leq 1$

$$2) \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \left[\frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} \right] = 0$$

ใช้ $2k$ คูณตลอดแล้วจัดรูปใหม่ได้

$$U_m^{n+1} = -\frac{ak}{2h} U_{m+1}^n + \frac{ak}{2h} U_{m-1}^n + U_m^n$$

$$U_m^{n+1} = \frac{-P}{2} U_{m+1}^n + \frac{P}{2} U_{m-1}^n + U_m^n \quad (2.114)$$

เมื่อ $p = \frac{ak}{h}$ แทน $U_m^n \equiv \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.114) จะได้

$$\tilde{U}_m^{n+1} = \frac{-P}{2} \tilde{U}_{m+1}^n + \frac{P}{2} \tilde{U}_{m-1}^n + \tilde{U}_m^n \quad (2.115)$$

นำสมการ (2.114) ลบด้วย (2.115) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$Z_m^{n+1} = \frac{-P}{2} Z_{m+1}^n + \frac{P}{2} Z_{m-1}^n + Z_m^n \quad (2.116)$$

แทน $Z_m^n = Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$ จะได้

$$Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta m h} = \frac{-P}{2} Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + \frac{P}{2} Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m-1)h} + Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h}$$

$$e^{\alpha t} = \frac{-P}{2} \cdot e^{i\beta h} + \frac{P}{2} \cdot e^{-i\beta h} + 1$$

$$= \frac{-P}{2} [e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}] + 1$$

$$= \frac{-P}{2} (2i \sin(\beta h)) + 1$$

$$= 1 - pi \sin(\beta h)$$

$$|e^{\alpha t}| = |1 - pi \sin(\beta h)|$$

และจากเงื่อนไขการลู่ออกในสมการที่ (2.97) จะได้

$$|e^{\alpha t}|^2 = 1 + p^2 \sin^2(\beta h) \leq 1$$

$$p^2 \sin^2(\beta h) \leq 0$$

ดังนั้น

$$p^2 \leq 0$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.114) ลู่ออกอย่างไม่มีเงื่อนไข (Unconditionally Unstable)

$$3) \frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k} + a \left[\frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} \right] = 0$$

ใช้ $2k$ คูณตลอดแล้วจัดรูปใหม่ได้

$$U_m^{n+1} = -\frac{2ak}{h}U_m^n + \frac{2ak}{h}U_{m-1}^n + U_m^{n-1}$$

$$U_m^{n+1} = -2pU_m^n + 2pU_{m-1}^n + U_m^{n-1} \quad (2.117)$$

เมื่อ $p = \frac{ak}{h}$ แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.117) จะได้

$$\tilde{U}_m^{n+1} = -2p\tilde{U}_m^n + 2p\tilde{U}_{m-1}^n + \tilde{U}_m^{n-1} \quad (2.118)$$

นำสมการ (2.117) ลบด้วย (2.118) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$Z_m^{n+1} = -2Z_m^n + 2pZ_{m-1}^n + Z_m^{n-1} \quad (2.119)$$

แทน $Z_m^n = Ae^{\alpha t} \cdot e^{i\beta mh}$ จะได้

$$Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta(m+1)h} = -2pAe^{\alpha nt} \cdot e^{i\beta mh} + 2pAe^{\alpha nt} \cdot e^{i\beta(m-1)h} + Ae^{\alpha(n-1)t} \cdot e^{i\beta mh}$$

$$e^{\alpha t} = -2p + 2pe^{-i\beta h} + e^{-\alpha t}$$

$$\xi^2 + 2p[1 + e^{-i\beta h}] \xi - 1 = 0$$

$$\xi^2 + 2p[1 + \cos(\beta h) - i \sin(\beta h)] \xi - 1 = 0$$

$$\xi = \frac{-2p[1 + \cos(\beta h) - i \sin(\beta h)] \pm \sqrt{4p^2[1 + \cos(\beta h) - i \sin(\beta h)]^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4}}{2}$$

เมื่อ $B = -2p[1 + \cos(\beta h) - i \sin(\beta h)]$ ซึ่งมีค่าน้อยมากๆ จึงพิจารณาได้ว่า

$$\xi = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4}}{2} > 1 \text{ สำหรับทุก } p \text{ ใดๆ}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.117) จึงลู่ออกอย่างไม่มีเงื่อนไข

$$4) \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \left[\frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} \right] = 0$$

ใช้ k คูณตลอดแล้วจัดรูปใหม่ได้

$$U_m^{n+1} = -\frac{ak}{h}U_m^n + U_m^n + \frac{ak}{h}U_{m-1}^n$$

$$U_m^{n+1} = [-p + 1]U_m^n + pU_{m-1}^n \quad (2.120)$$

เมื่อ $p = \frac{ak}{h}$ แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.120) จะได้

$$\tilde{U}_m^{n+1} = [-p + 1]\tilde{U}_m^n + p\tilde{U}_{m-1}^n \quad (2.121)$$

นำสมการ (2.120) ลบด้วย (2.121) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$Z_m^{n+1} = [-p + 1]Z_m^n + pZ_{m-1}^n \quad (2.122)$$

แทน $Z_m^n = Ae^{\alpha t} \cdot e^{i\beta m h}$ จะได้

$$Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta m h} = [-p + 1]Ae^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta m h} + pAe^{\alpha n t} \cdot e^{i\beta(m-1)h}$$

$$e^{\alpha t} = [-p + 1] + p \cdot e^{-i\beta h}$$

$$= -p + 1 + p(\cos(\beta h) - i \sin(\beta h))$$

$$|e^{\alpha t}| = |1 - p(1 - \cos(\beta h)) - pi \sin(\beta h)|$$

$$|\xi|^2 = [1 - p(1 - \cos(\beta h))]^2 + [p \sin(\beta h)]^2$$

$$|\xi|^2 = 1 - 2p(1 - \cos(\beta h)) + p^2(1 - 2\cos(\beta h) + \cos^2(\beta h)) + p^2 \sin^2(\beta h)$$

$$|\xi|^2 = 1 - 2(1 - \cos(\beta h))p + [1 - 2\cos(\beta h) + \cos^2(\beta h) + 1 - \cos^2(\beta h)]p^2$$

$$|\xi|^2 = 1 - 2(1 - \cos(\beta h))p + 2[1 - \cos(\beta h)]p^2$$

$$|\xi|^2 = (1 - \cos(\beta h))p^2 - (1 - \cos(\beta h))p$$

เมื่อ $1 - \cos(\beta h) \geq 0$ และจากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$p^2 - p \leq 0$$

$$0 \leq p \leq 1$$

ดังนั้น

$$p \leq 1$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.120) ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขเมื่อ $p \leq 1$

$$5) \frac{U_m^{n+1} - U_m^{n-1}}{2k} + a \left[\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right] = 0$$

ใช้ $2k$ คูณตลอดแล้วจัดรูปใหม่ได้

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} &= -\frac{ak}{h} U_{m+1}^{n+1} + \frac{ak}{h} U_{m-1}^{n+1} + U_m^{n-1} \\ U_m^{n+1} &= -pU_{m+1}^{n+1} + pU_{m-1}^{n+1} + U_m^{n-1} \end{aligned} \quad (2.123)$$

เมื่อ $p = \frac{ak}{h}$ แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.123) จะได้

$$U_m^{n+1} = -pU_{m+1}^{n+1} + pU_{m-1}^{n+1} + U_m^{n-1} \quad (2.124)$$

นำสมการ (2.123) ลบด้วย (2.124) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$Z_m^{n+1} = -pZ_{m+1}^{n+1} + pZ_{m-1}^{n+1} + Z_m^{n-1} \quad (2.125)$$

$$Ae^{\alpha(n+1)t} e^{i\beta mh} = -pAe^{\alpha(n+1)t} e^{i\beta(m+1)h} + pAe^{\alpha(n+1)t} e^{i\beta(m-1)h} + Ae^{\alpha(n-1)t} \cdot e^{i\beta mh}$$

$$e^{\alpha t} = -pe^{\alpha t} e^{i\beta h} + pe^{\alpha t} e^{-i\beta h} + e^{-\alpha t}$$

$$e^{\alpha t} [1 + pe^{i\beta h} - pe^{-i\beta h}] = e^{-\alpha t}$$

$$e^{\alpha t} [1 + p(2i \sin(\beta h))] = e^{-\alpha t}$$

$$[1 + 2pi \sin(\beta h)] \zeta^2 - 1 = 0$$

$$\zeta^2 = \frac{1}{[1 + 2pi \sin(\beta h)]}$$

$$|\zeta|^2 = \frac{1}{|1 + 2pi \sin(\beta h)|}$$

$$|\zeta|^2 = \frac{1}{1 + 4p^2 \sin^2(\beta h)}$$

จากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$1 + 4p^2 \sin^2(\beta h) \geq 1$$

$$4p^2 \geq 0$$

$$p^2 \geq 0$$

$$p \geq 0$$

ดังนั้น

เพราะฉะนั้นสมการ (2.123) ลู่เข้าอย่างไม่มีเงื่อนไข

$$6) \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \left[\frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \right] = 0$$

ใช้ $2k$ คูณตลอดแล้วจัดรูปใหม่ได้

$$\begin{aligned} 2U_m^{n+1} + \frac{ak}{h}U_{m+1}^{n+1} - \frac{ak}{h}U_{m-1}^{n+1} &= 2U_m^n \\ 2U_m^{n+1} + pU_{m+1}^{n+1} - pU_{m-1}^{n+1} &= 2U_m^n \end{aligned} \quad (2.126)$$

เมื่อ $p = \frac{ak}{h}$ แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.126) จะได้

$$2\tilde{U}_m^{n+1} + p\tilde{U}_{m+1}^{n+1} - p\tilde{U}_{m-1}^{n+1} = 2\tilde{U}_m^n \quad (2.127)$$

นำสมการ (2.126) ลบด้วย (2.127) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$2Z_m^{n+1} + pZ_{m+1}^{n+1} - pZ_{m-1}^{n+1} = 2Z_m^n \quad (2.128)$$

$$2Ae^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta mh} + pAe^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m+1)h} - pAe^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m-1)h} = 2Ae^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta mh}$$

$$2e^{\alpha \ell} + pe^{\alpha \ell} \cdot e^{i\beta h} - pe^{\alpha \ell} \cdot e^{-i\beta h} = 2$$

$$e^{\alpha \ell} [2 + p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h})] = 2$$

$$e^{\alpha \ell} [2 + p(2i \sin(\beta h))] = 2$$

$$e^{\alpha \ell} = \frac{2}{2 + 2pi \sin(\beta h)}$$

$$= \frac{1}{1 + pi \sin(\beta h)}$$

$$|e^{\alpha \ell}| = \frac{1}{1 + p^2 \sin^2(\beta h)}$$

$$|\xi| = \frac{1}{1 + p^2 \sin^2(\beta h)}$$

จากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\frac{1}{1 + p^2 \sin^2(\beta h)} \leq 1$$

$$1 + p^2 \sin^2(\beta h) \geq 1$$

$$p^2 \geq 0$$

ดังนั้น

$$p \geq 0$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.126) ลู่เข้าอย่างไร้เงื่อนไข

$$7) \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + a \left[\frac{U_m^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{h} \right] = 0$$

ใช้ k คูณตลอดแล้วจัดรูปใหม่ได้

$$\begin{aligned} U_m^{n+1} + \frac{ak}{h} U_m^{n+1} - \frac{ak}{h} U_{m-1}^{n+1} &= U_m^n \\ U_m^{n+1} + p U_m^{n+1} - p U_{m-1}^{n+1} &= U_m^n \end{aligned} \quad (2.129)$$

เมื่อ $p = \frac{ak}{h}$ แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (2.129) จะได้

$$\tilde{U}_m^{n+1} + p \tilde{U}_m^{n+1} - p \tilde{U}_{m-1}^{n+1} = \tilde{U}_m^n \quad (2.130)$$

นำสมการ (2.129) ลบด้วย (2.130) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$Z_m^{n+1} + p Z_m^{n+1} - p Z_{m-1}^{n+1} = Z_m^n \quad (2.131)$$

$$Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta mh} + pAe^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta mh} - pAe^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta(m-1)h} = Ae^{\alpha nt} \cdot e^{i\beta mh}$$

$$e^{\alpha t} + pe^{\alpha t} - pe^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta h} = 1$$

$$e^{\alpha t} [1 + p - p(\cos(\beta h) - i \sin(\beta h))] = 1$$

$$e^{\alpha t} = \frac{1}{1 + p - p(\cos(\beta h) - i \sin(\beta h))}$$

$$|e^{\alpha t}| = \frac{1}{|[1 + p - p \cos(\beta h)] + pi \sin(\beta h)|}$$

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \frac{1}{|1 + 2p - 2p \cos(\beta h) + p^2 - p^2 \cos(\beta h) + p^2 \cos^2(\beta h) + p^2 \sin^2(\beta h)|} \\ &= \frac{1}{|1 + 2p - 2p[1 - 2 \sin^2(\frac{\beta h}{2})] + 2p^2 - 2p^2[1 - 2 \sin^2(\frac{\beta h}{2})]|} \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\frac{1}{1 + 4p \sin^2(\frac{\beta h}{2}) + 4p^2 \sin^2(\frac{\beta h}{2})} \leq 1$$

$$1 + 4p \sin^2(\frac{\beta h}{2}) + 4p^2 \sin^2(\frac{\beta h}{2}) \geq 1$$

$$4p^2 + 4p \geq 0$$

$$p \leq -1 \text{ หรือ } p \geq 0$$

เพราะฉะนั้นสมการ (2.129) ลู่เข้าอย่างไม่มีเงื่อนไข

จากการวิเคราะห์ความเสถียรภาพทั้ง 7 กรณี สามารถสรุปได้ดังตารางที่ 2.15

ลำดับ	ผลต่างจำกัดที่ใช้ $x - t$	เงื่อนไขของความเสถียรภาพ (Stability)	รูปแบบของผลต่างจำกัดชัดแจ้งหรือปริยาย (Explicit or Implicit)	ค่าคลาดเคลื่อนโดยการตัดปลาย (Truncation Error)
1	$C_s - C_t$	$\frac{ak}{h} \leq 1$	ชัดแจ้ง	$O(h^2) + O(k^2)$
2	$C_s - F_t$	ไม่ลู่เข้า	ชัดแจ้ง	$O(h^2) + O(k)$
3	$B_s - C_t$	ไม่ลู่เข้า	ชัดแจ้ง	$O(h) + O(k^2)$
4	$B_s - F_t$	$\frac{ak}{h} \leq 1$	ชัดแจ้ง	$O(h) + O(k)$
5	$C_{s,j+1} - C_t$	ลู่เข้า	ปริยาย	$O(h^2) + O(k^2)$
6	$C_{s,j+1} - F_t$	ลู่เข้า	ปริยาย	$O(h^2) + O(k)$
7	$B_{s,j+1} - F_t$	ลู่เข้า	ชัดแจ้ง	$O(h^2) + O(k)$

ตารางที่ 2.15 แสดงถึงผลต่างจำกัดที่ใช้ เงื่อนไขของการลู่เข้า รูปแบบของผลต่างและค่าคลาดเคลื่อน

พบว่าความเสถียรภาพที่ได้ดังตารางนี้ ตรงกับกับการวิเคราะห์ความเสถียรภาพที่ได้ศึกษาและวิจัยในการศึกษาการวิเคราะห์เชิงตัวเลขที่ได้มีการศึกษามาก่อนหน้านี้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

ในงานวิจัยนี้เราศึกษาการสั่นเมื่อเส้นลวดมีความหนาแน่นเอกรูป ($\mu = 0$) จึงทำให้สมการ (1.19) และ (1.22) ในบทที่ 1 ลดรูปได้ดังนี้

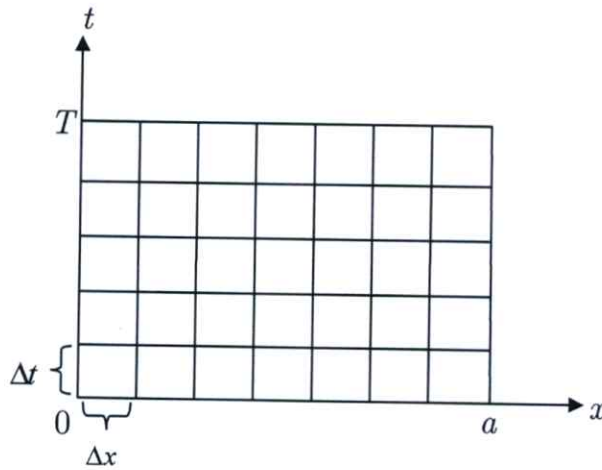
$$u_{tt} - [x(u_{xx}) + u_x] + f(x, u(x, t)) = 0 \quad (3.1)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = f_1(x) \quad u_t(x, 0) = f_2(x) \quad \text{เมื่อ } x \in [0, a] \quad (3.2)$$

และเงื่อนไขขอบ

$$u(0, t) = 0 \quad u_x(a, t) = 0 \quad \text{เมื่อ } t \in [0, T] \quad (3.3)$$



รูปที่ 3.1 แสดงแผนภาพการแบ่งโดเมน

ให้ x คือ ระยะทาง

t คือ เวลา

h คือ ผลต่างของแต่ละช่วงของ x หรือ $h = \Delta x$

k คือ ผลต่างของแต่ละช่วงของ t หรือ $k = \Delta t$

ให้ M คือ จำนวนช่วงย่อยตามแกน x ซึ่ง $M = \frac{a-0}{h}$

N คือ จำนวนช่วงย่อยตามแกน t ซึ่ง $N = \frac{T-0}{k}$

จากสมการ (3.1) เนื่องจาก x เป็นตำแหน่งที่เปลี่ยนแปลงไปบนตารางจึงสามารถแทนด้วยพจน์ $m\Delta x$ หรือ mh จะได้

$$u_{tt} - [mh(u_{xx}) + u_x] + f(x, u(x, t)) = 0 \quad (3.4)$$

ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหานี้ ผู้วิจัยจะศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขด้วยวิธีต่างๆ โดยแสดงผ่านสัญลักษณ์ในแผนภาพดังต่อไปนี้

สัญลักษณ์ \bigcirc แทน $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

สัญลักษณ์ \triangle แทน $\frac{\partial u}{\partial x}$

สัญลักษณ์ ∇ แทน $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

สัญลักษณ์ \square แทนจุดที่ทราบค่า

สัญลักษณ์ \times แทนจุดที่ไม่ทราบค่า

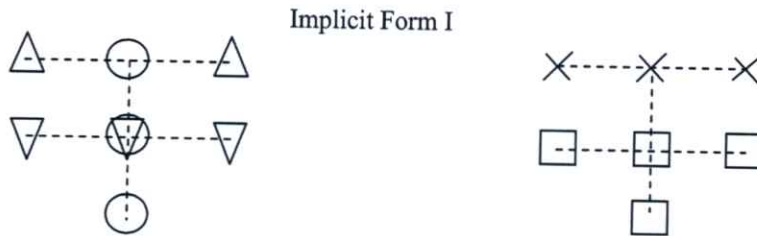
3.1) ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้ง (Explicit Formula)



รูปที่ 3.2 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้ง

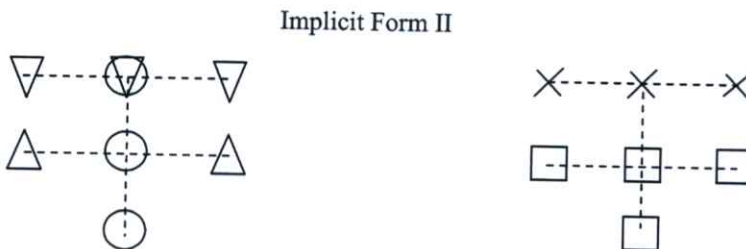
เราเรียกวิธีข้างต้นว่า “Five points explicit – three time level”

3.2) ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยาย 3 รูปแบบ (Implicit Formula)



รูปที่ 3.3 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1

เราเรียกวิธีข้างต้นว่า “Seven points implicit (Central at u_m^{n+1} for 1st order) – three time level”



รูปที่ 3.4 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2

เราเรียกวิธีข้างต้นว่า “Seven points implicit (Central at u_m^{n+1} for 2nd order) – three time level”

Implicit Formula III



รูปที่ 3.5 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3

เราเรียกวิธีข้างต้นว่า “Five points implicit (Central at u_m^{n+1} for 1st order and 2nd order)

– three time level”

3.3) ระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Formula)



รูปที่ 3.6 แสดงแผนภาพระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน

เราเรียกวิธีข้างต้นว่า “Crank-Nicolson – three time level”

3.1) ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน

โดยเราจะประมาณ u_{xx} , u_x และ u_{tt} ด้วยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางดังนี้

$$u_x \cong \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad (3.5)$$

$$u_{xx} \cong \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \quad (3.6)$$

$$u_{tt} \cong \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \quad (3.7)$$

แทน u_x , u_{xx} และ u_{tt} ลงใน (3.4) จะได้

$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right] = -f(x, u(x, t)) \quad (3.8)$$

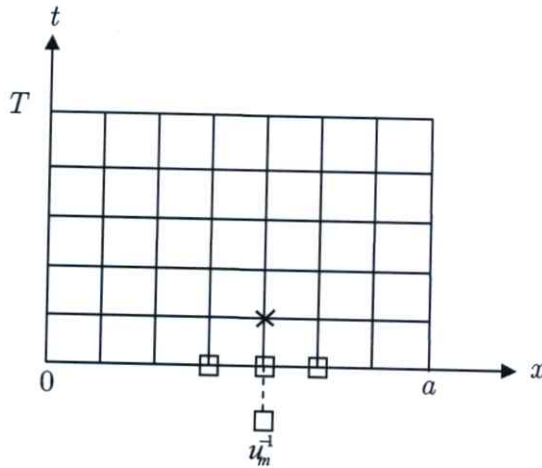
นำ $2k^2$ คูณตลอดสมการ (3.8) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n - (4mp - 4)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \right] \quad (3.9)$$

$$\text{โดย } p = \frac{k^2}{h}$$

กรณีที่ 1 ($n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

$$u_m^1 = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 - (4mp - 4)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 - 2u_m^{-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \right] \quad (3.10)$$



รูปที่ 3.7 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.10) พบว่ามีพจน์ u_m^{-1} ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.7 แต่สามารถประมาณค่าของ u_m^{-1} ด้วยสูตรผลต่างจำกัดย้อนหลังตามสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \quad (3.11)$$

และจากเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f_2(x)$$

จะได้ว่า

$$\frac{u_m^0 - u_m^{-1}}{k} = f_2(x)$$

หรือ

$$u_m^{-1} = u_m^0 - kf_2(x) \quad (3.12)$$

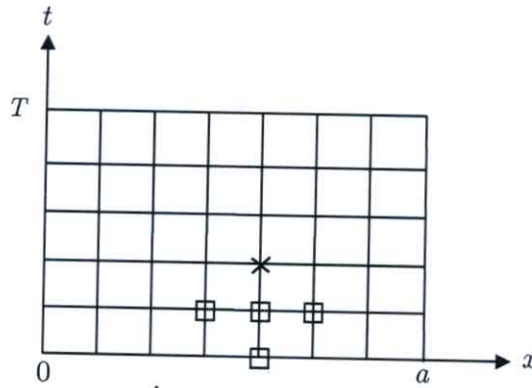
นำ (3.12) ไปแทนใน (3.10) จะได้

$$u_m^1 = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)u_{m+1}^0 - (4mp - 2)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t)) \right] \quad (3.13)$$

กรณีที่ 2 ($n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

ในกรณีนี้สมการที่ (3.9) สอดคล้องกับเงื่อนไขจึงสามารถใส่สูตรคำนวณได้เลย

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)u_{m+1}^n - (4mp - 4)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \right]$$

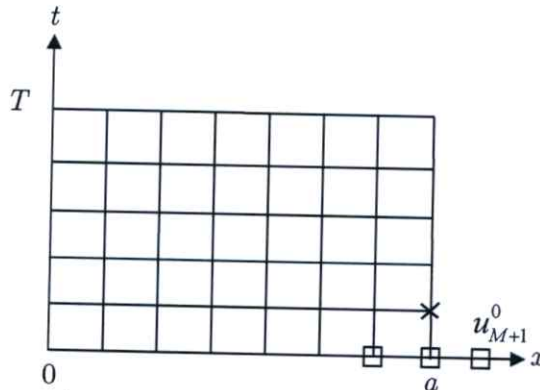


รูปที่ 3.8 แสดงโดเมนทั้ง 5 จุด

กรณีที่ 3 พิจารณาจุดที่ปลายช่วง ($n = 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.13) จะได้ว่า

$$u_M^1 = \frac{1}{2} \left[(2Mp + p)u_{M+1}^0 - (4Mp - 2)u_M^0 + (2Mp - p)u_{M-1}^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t)) \right] \quad (3.14)$$



รูปที่ 3.9 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.14) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^0 ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.9 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^0 จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าตามสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} \quad (3.15)$$

และจากเงื่อนไขขอบ

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, 0) = 0 \quad \text{เมื่อ } t = 0$$

จะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^0 - u_M^0}{h} = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{u_{M+1}^1 - u_M^1}{h} = 0$$

หรือ

$$u_{M+1}^0 \cong u_M^0 \quad \text{และ} \quad u_{M+1}^1 \cong u_M^1 \quad (3.16)$$

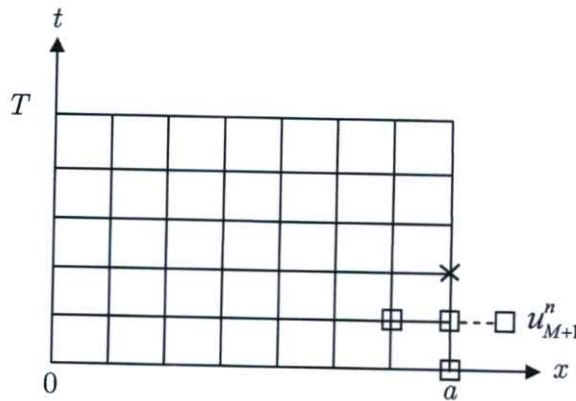
แทนสมการที่ (3.16) ลงในสมการที่ (3.14) จะได้

$$u_M^1 = \frac{1}{2} [(-2Mp + p + 2)u_M^0 + (2Mp - p)u_{M-1}^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t))] \quad (3.17)$$

กรณีที่ 4 ($n > 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.9) จะได้ว่า

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} [(2Mp + p)u_{M+1}^n - (4Mp - 4)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))] \quad (3.18)$$



รูปที่ 3.10 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.18) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^n ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.10 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^n จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าเช่นเดียวกับสมการ (3.16) และเงื่อนไขขอบจะได้ว่า

$$\frac{u_{M+1}^n - u_M^n}{h} = 0$$

หรือ

$$u_{M+1}^n \cong u_M^n \quad \text{และ} \quad u_{M+1}^{n+1} \cong u_M^{n+1} \quad (3.19)$$

แทนสมการที่ (3.19) ลงในสมการที่ (3.18) จะได้

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} [(-2Mp + p + 4)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))] \quad (3.20)$$

สมการที่นำไปใช้ในการหาผลเฉลยโดยวิธีผลต่างสี่บเนื่องมีดังต่อไปนี้

$$u_m^1 = \frac{1}{2} [(2mp + p)u_{m+1}^0 - (4mp - 2)u_m^0 + (2mp - p)u_{m-1}^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t))] \quad (3.13)$$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2} [(2mp + p)u_{m+1}^n - (4mp - 4)u_m^n + (2mp - p)u_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))] \quad (3.9)$$

$$u_M^1 = \frac{1}{2} [(-2Mp + p + 2)u_M^0 + (2Mp - p)u_{M-1}^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t))] \quad (3.17)$$

$$u_M^{n+1} = \frac{1}{2} [(-2Mp + p + 4)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))] \quad (3.20)$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้ในการหาผลเฉลยเมื่อ $n = 0, m = 1, 2, 3, \dots, M$ คือ

$$\begin{cases} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_{M-1}^1 \\ u_M^1 \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(4mp - 2)u_1^0 + (2mp + p)u_2^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ (2mp - p)u_1^0 - (4mp - 2)u_2^0 + (2mp + p)u_3^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ \vdots \\ (2mp - p)u_{m-1}^0 - (4mp - 2)u_m^0 + (2mp + p)u_{m+1}^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ (2Mp - p)u_{M-1}^0 + (-2Mp + p + 2)u_M^0 + 2kf_2(x) - 2k^2 f(x, u(x, t)) \end{bmatrix}$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้ในการหาผลเฉลยเมื่อ $n > 0, m = 1, 2, 3, \dots, M$ คือ

$$\begin{cases} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(4mp - 4)u_1^n + (2mp + p)u_2^n - 2u_1^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ (2mp - p)u_1^n - (4mp - 4)u_2^n + (2mp + p)u_3^n - 2u_2^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ \vdots \\ (2mp - p)u_{m-1}^n - (4mp - 4)u_m^n + (2mp + p)u_{m+1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ (2Mp - p)u_{M-1}^n + (-2Mp + p + 4)u_M^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \end{bmatrix}$$

3.2) เปรียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1

โดยเราจะประมาณ u_{xx} และ u_{tt} ด้วยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางเช่นเดียวกับสมการ (3.6) และ (3.7) และประมาณ u_x ด้วยผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางที่ตำแหน่ง $(m, n+1)$ ดังนี้

$$u_x \cong \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} \quad (3.21)$$

$$u_{xx} \cong \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

$$u_{tt} \cong \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2}$$

แทน u_x, u_{xx} และ u_{tt} ลงใน (3.4) จะได้

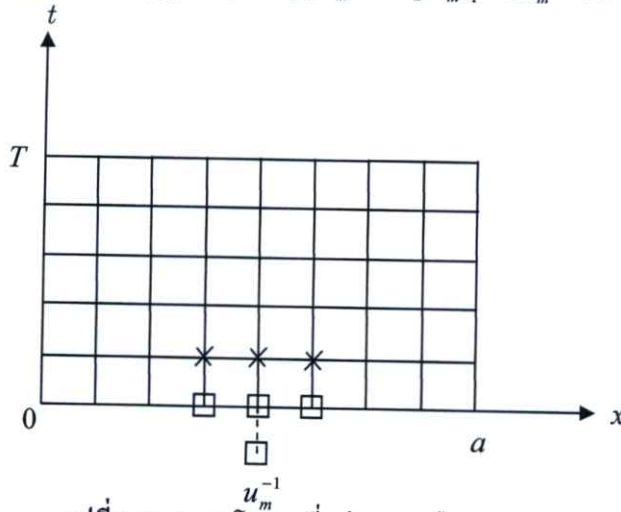
$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} \right] = -f(x, u(x, t)) \quad (3.22)$$

นำ $2k^2$ คูณตลอดสมการ (3.22) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$-pu_{m+1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} + pu_{m-1}^{n+1} = 2mpu_{m+1}^n + 4(1-mp)u_m^n + 2mpu_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.23)$$

กรณีที่ 1 ($n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

$$-pu_{m+1}^1 + 2u_m^1 + pu_{m-1}^1 = 2mpu_{m+1}^0 + 4(1-mp)u_m^0 + 2mpu_{m-1}^0 - 2u_m^{-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.24)$$



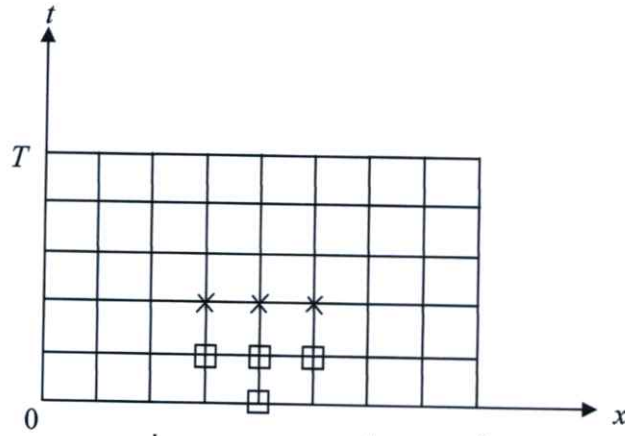
รูปที่ 3.11 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.24) พบว่ามีพจน์ u_m^{-1} ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.11 แต่สามารถประมาณค่าของ u_m^{-1} ด้วยสูตรผลต่างจำกัดย้อนหลังเช่นเดียวกับสมการ (3.12) จะได้

$$-pu_{m+1}^1 + 2u_m^1 + pu_{m-1}^1 = 2mpu_{m+1}^0 + 2(1-2mp)u_m^0 + 2mpu_{m-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.25)$$

กรณีที่ 2 ($n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

ในกรณีนี้สมการที่ (3.23) สอดคล้องกับเงื่อนไขจึงสามารถใช้สูตรคำนวณได้โดย

$$-pu_{m+1}^{n+1} + 2u_m^{n+1} + pu_{m-1}^{n+1} = 2mpu_{m+1}^n + 4(1-mp)u_m^n + 2mpu_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))$$


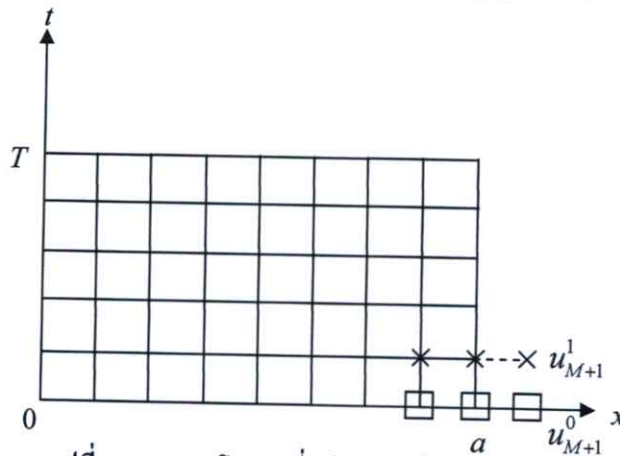
รูปที่ 3.12 แสดงโดเมนทั้ง 7 จุด

กรณีที่ 3 พิจารณาจุดที่ปลายช่วง ($n = 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.23) จะได้ว่า

$$-pu_{M+1}^1 + 2u_M^1 + pu_{M-1}^1 = 2Mpu_{M+1}^0 + 2(1-2Mp)u_M^0 + 2Mpu_{M-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t))$$

(3.26)



รูปที่ 3.13 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.26) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^0 และ u_{M+1}^1 ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.13 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^0 และ u_{M+1}^1 จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าเช่นเดียวกับสมการ (3.16) จะได้

$$(-p+2)u_M^1 + pu_{M-1}^1 = (2-2Mp)u_M^0 + 2Mpu_{M-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t))$$

(3.27)

กรณีที่ 4 ($n > 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.23) จะได้ว่า

$$-pu_{M+1}^{n+1} + 2u_M^{n+1} + pu_{M-1}^{n+1} = 2Mpu_{M+1}^n + 4(1-Mp)u_M^n + 2Mpu_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))$$

(3.28)

3.3) ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2

โดยเราจะประมาณ u_x และ u_{xx} ด้วยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางเช่นเดียวกับสมการ (3.5) และ (3.7) และประมาณ u_{tt} ด้วยผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางที่ตำแหน่ง $(m, n+1)$ ดังนี้

$$\begin{aligned} u_x &\cong \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \\ u_{xx} &\cong \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \\ u_{tt} &\cong \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} \end{aligned} \quad (3.30)$$

แทน u_x, u_{xx} และ u_{tt} ลงใน (3.4) จะได้

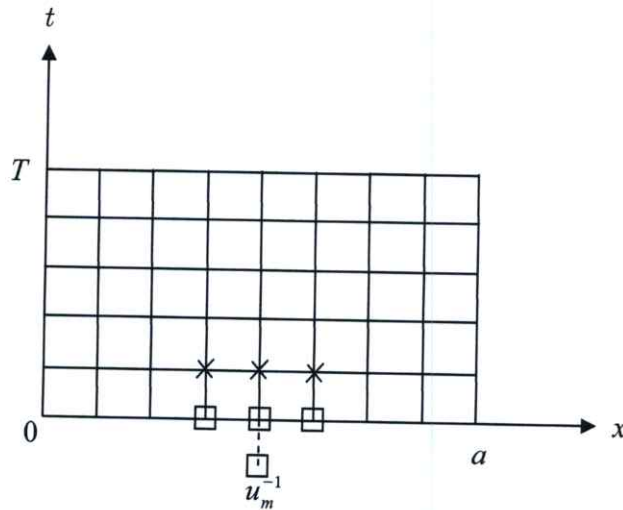
$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right) + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right] = -f(x, u(x, t)) \quad (3.31)$$

นำ $2k^2$ คูณตลอดสมการ (3.31) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$-2mpu_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)u_m^{n+1} - 2mpu_{m-1}^{n+1} = pu_{m+1}^n + 4u_m^n - pu_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.32)$$

กรณีที่ 1 ($n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

$$-2mpu_{m+1}^1 + 2(2mp+1)u_m^1 - 2mpu_{m-1}^1 = pu_{m+1}^0 + 4u_m^0 - pu_{m-1}^0 - 2u_m^{-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.33)$$



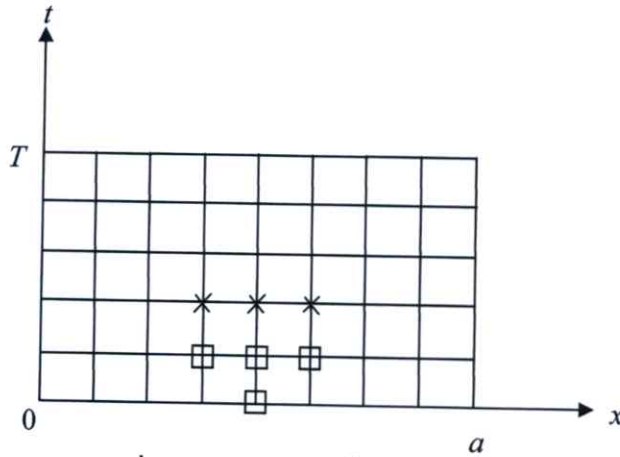
รูปที่ 3.15 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.33) พบว่ามีพจน์ u_m^{-1} ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.15 แต่สามารถประมาณค่าของ u_m^{-1} ด้วยสูตรผลต่างจำกัดย้อนหลังเช่นเดียวกับสมการ (3.12) จะได้

$$-2mpu_{m+1}^1 + 2(2mp+1)u_m^1 - 2mpu_{m-1}^1 = pu_{m+1}^0 + 2u_m^0 - pu_{m-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.34)$$

กรณีที่ 2 ($n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

ในกรณีนี้สมการที่ (3.32) สอดคล้องกับเงื่อนไขจึงสามารถใช้สูตรคำนวณได้โดย

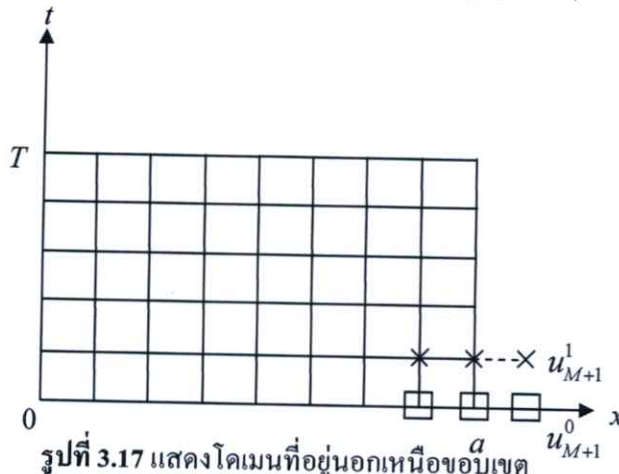
$$-2mpu_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)u_m^{n+1} - 2mpu_{m-1}^{n+1} = pu_{m+1}^n + 4u_m^n - pu_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))$$


รูปที่ 3.16 แสดงโดเมนทั้ง 7 จุด

กรณีที่ 3 พิจารณาจุดที่ปลายช่วง ($n = 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.34) จะได้ว่า

$$-2Mpu_{M+1}^1 + 2(2Mp+1)u_M^1 - 2Mpu_{M-1}^1 = pu_{M+1}^0 + 2u_M^0 - pu_{M-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.35)$$



รูปที่ 3.17 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

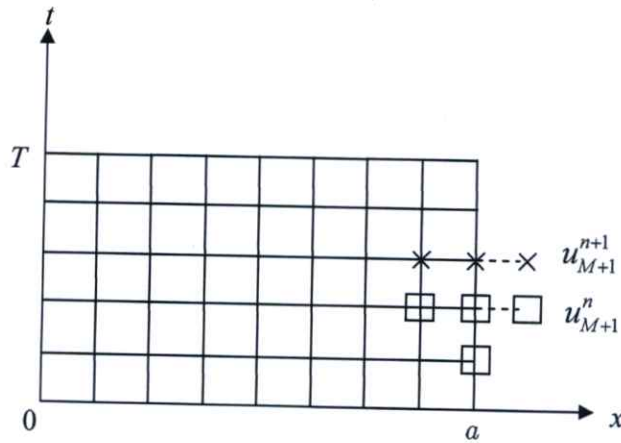
จาก (3.35) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^0 และ u_{M+1}^1 ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.17 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^0 และ u_{M+1}^1 จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าเช่นเดียวกับสมการ (3.16) จะได้ว่า

$$(2Mp+2)u_M^1 - 2Mpu_{M-1}^1 = (p+2)u_M^0 - pu_{M-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.36)$$

กรณีที่ 4 ($n > 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.32) จะได้ว่า

$$-2Mpu_{M+1}^{n+1} + 2(2Mp+1)u_M^{n+1} - 2Mpu_{M-1}^{n+1} = pu_{M+1}^n + 4u_M^n - pu_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.37)$$



รูปที่ 3.18 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.37) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^n และ u_{M+1}^{n+1} ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.18 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^n และ u_{M+1}^{n+1} จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าเช่นเดียวกับสมการ (3.19) จะได้ว่า

$$(2Mp+2)u_M^{n+1} - 2Mpu_{M-1}^{n+1} = (p+4)u_M^n - pu_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.38)$$

สมการที่นำไปใช้ในการหาผลเฉลยโดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมนี้มีดังต่อไปนี้

$$-2mpu_{m+1}^1 + 2(2mp+1)u_m^1 - 2mpu_{m-1}^1 = pu_{m+1}^0 + 2u_m^0 - pu_{m-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t))$$

(3.34)

$$-2mpu_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)u_m^{n+1} - 2mpu_{m-1}^{n+1} = pu_{m+1}^n + 4u_m^n - pu_{m-1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))$$

(3.32)

$$(2Mp+2)u_M^1 - 2Mpu_{M-1}^1 = (p+2)u_M^0 - pu_{M-1}^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.36)$$

$$(2Mp+2)u_M^{n+1} - 2Mpu_{M-1}^{n+1} = (p+4)u_M^n - pu_{M-1}^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.38)$$

ระบบสมการเชิงเส้นใช้ในการหาผลเฉลยเมื่อ $n = 0, m = 1, 2, 3, \dots, M$ คือ

$$\begin{bmatrix} 2(2mp+1) & -2mp & & & & \\ -2mp & 2(2mp+1) & -2mp & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -2mp & 2(2mp+1) & -2mp \\ & & & & -2Mp & 2Mp+2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_{M-1}^1 \\ u_M^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_1^0 + pu_2^0 + 2ku_1 - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ -pu_1^0 + 2u_2^0 + pu_3^0 + 2ku_1 - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ \vdots \\ pu_{m+1}^0 + 2u_m^0 - pu_{m-1}^0 + 2ku_1 - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ -pu_{M-1}^0 + (p+2)u_M^0 + 2ku_1 - 2k^2 f(x, u(x, t)) \end{bmatrix}$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้ในการหาผลเฉลยเมื่อ $n > 0, m = 1, 2, 3, \dots, M$ คือ

$$\begin{bmatrix} 2(2mp+1) & -2mp & & & & \\ -2mp & 2(2mp+1) & -2mp & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -2mp & 2(2mp+1) & -2mp \\ & & & & -2Mp & 2Mp+2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u_1^n + pu_2^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ -pu_1^n + 4u_2^n + pu_3^n - 2u_2^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ \vdots \\ -pu_{m-1}^n + 4u_m^n + pu_{m+1}^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \\ -pu_{M-1}^n + (p+4)u_M^n - 2u_M^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \end{bmatrix}$$

3.4) เปรียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3

โดยเราจะประมาณ u_{tt} ด้วยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางดังสมการ (3.7) และประมาณ u_x และ u_{xx} ด้วยผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลางที่ตำแหน่ง $(m, n+1)$ เช่นเดียวกับสมการ (3.21) และ (3.30) ดังนี้

$$u_x \cong \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h}$$

$$u_{xx} \cong \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

$$u_{tt} \cong \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2}$$

แทน u_x, u_{xx} และ u_{tt} ลงใน (3.4) จะได้

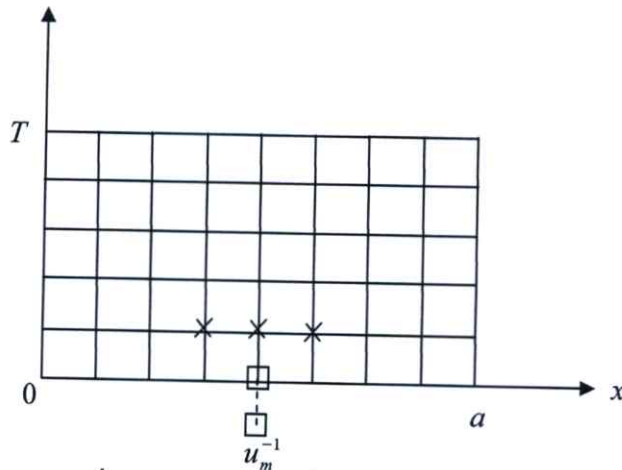
$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} \right) + \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} \right] = -f(x, u(x, t)) \quad (3.39)$$

นำ $2k^2$ คูณตลอดสมการ (3.39) แล้วจัดรูปใหม่จะได้

$$-p(2m+1)u_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)u_m^{n+1} + p(1-2m)u_{m-1}^{n+1} = 4u_m^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.40)$$

กรณีที่ 1 ($n=0$ และ $m=1, 2, 3, \dots, M-1$)

$$-p(2m+1)u_{m+1}^1 + 2(2mp+1)u_m^1 + p(1-2m)u_{m-1}^1 = 4u_m^0 - 2u_m^{-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.41)$$



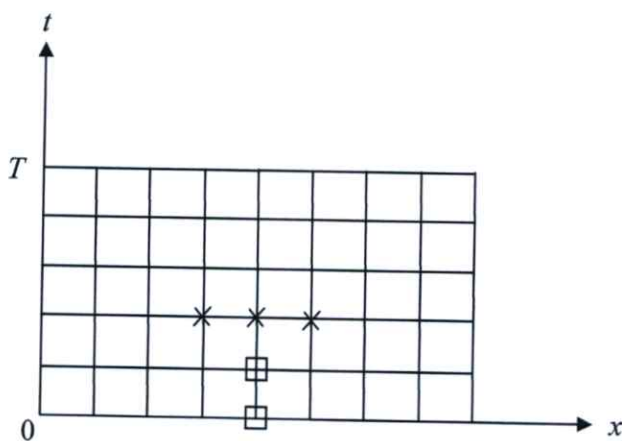
รูปที่ 3.19 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.41) พบว่ามีพจน์ u_m^{-1} ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.19 แต่สามารถประมาณค่าของ u_m^{-1} ด้วยสูตรผลต่างจำกัดย้อนหลังเช่นเดียวกับสมการ (3.12) จะได้

$$-p(2m+1)u_{m+1}^1 + 2(2mp+1)u_m^1 + p(1-2m)u_{m-1}^1 = 2u_m^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.42)$$

กรณีที่ 2 ($n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

ในกรณีนี้สมการที่ (3.40) สอดคล้องกับเงื่อนไขจึงสามารถใช้สูตรคำนวณได้โดย

$$-p(2m+1)u_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)u_m^{n+1} + p(1-2m)u_{m-1}^{n+1} = 4u_m^n - 2u_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))$$


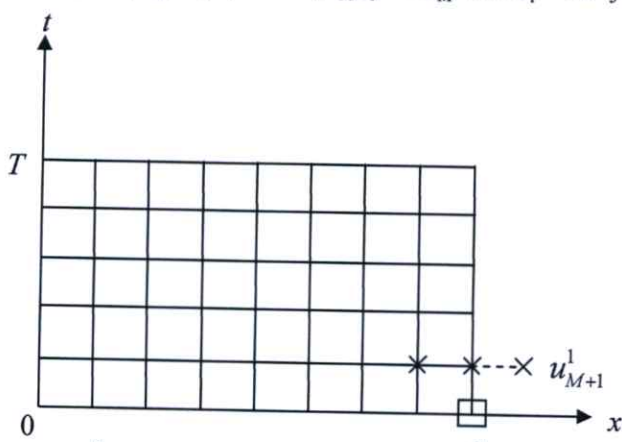
รูปที่ 3.20 แสดงโดเมนทั้ง 5 จุด a

กรณีที่ 3 พิจารณาจุดที่ปลายช่วง ($n = 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.42) จะได้ว่า

$$-p(2M+1)u_{M+1}^1 + 2(2Mp+1)u_M^1 + p(1-2M)u_{M-1}^1 = 2u_M^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t))$$

(3.43)



รูปที่ 3.21 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.43) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^1 ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.21 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^1 จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าเช่นเดียวกับสมการ (3.16) จะได้

$$(2Mp - p + 2)u_M^1 + (p - 2Mp)u_{M-1}^1 = 2u_M^0 + 2ku_t - 2k^2 f(x, u(x, t))$$

(3.44)

3.5) ระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน

โดยเราจะประมาณ u_{xx} และ u_x ด้วยสูตรแครงค์-นิโคลสันและประมาณ u_{tt} ด้วยวิธีผลต่างสี่บเนื่องตรงกลางเช่นเดียวกับสมการ (3.7) ดังนี้

$$u_x \cong \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n + u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{4h} \quad (3.47)$$

$$u_{xx} \cong \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n + u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{2h^2} \quad (3.48)$$

$$u_{tt} \cong \frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2}$$

แทน u_x, u_{xx} และ u_{tt} ลงใน (3.4) จะได้

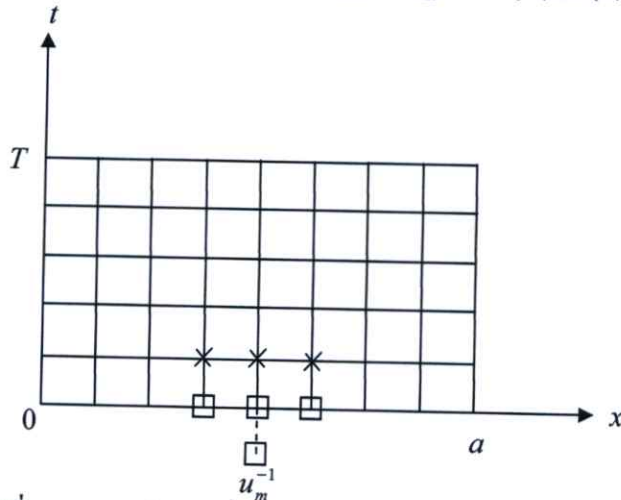
$$\frac{u_m^{n+1} - 2u_m^n + u_m^{n-1}}{k^2} - \left[mh \left(\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n + u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{2h^2} \right) + \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n + u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{4h} \right] = f(x, u(x, t)) \quad (3.49)$$

นำ $4k^2$ คูณตลอดสมการ (3.52) และจัดรูปใหม่จะได้

$$\begin{aligned} & -p(2m+1)u_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)u_m^{n+1} + p(1-2m)u_{m-1}^{n+1} \\ & = p(2m+1)u_{m+1}^n + 4(2-mp)u_m^n + p(2m-1)u_{m-1}^n - 4u_m^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.50)$$

กรณีที่ 1 ($n = 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

$$\begin{aligned} & -p(2m+1)u_{m+1}^1 + 4(1+mp)u_m^1 + p(1-2m)u_{m-1}^1 \\ & = p(2m+1)u_{m+1}^0 + 4(2-mp)u_m^0 + p(2m-1)u_{m-1}^0 - 4u_m^{-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.51)$$



รูปที่ 3.23 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.51) พบว่ามีพจน์ u_m^{-1} ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.23 แต่สามารถประมาณค่าของ u_m^{-1} ด้วยสูตรผลต่างจำกัดย้อนหลังเช่นเดียวกับสมการที่ (3.12) จะได้

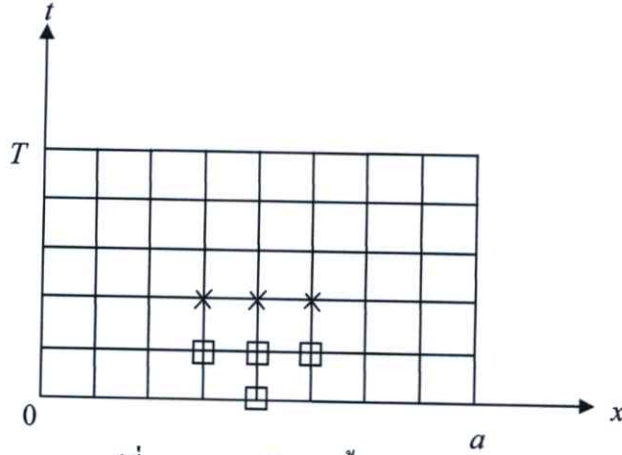
$$\begin{aligned} & -p(2m+1)u_{m+1}^1 + 4(1+mp)u_m^1 + p(1-2m)u_{m-1}^1 \\ & = p(2m+1)u_{m+1}^0 + 4(1-mp)u_m^0 + p(2m-1)u_{m-1}^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

กรณีที่ 2 ($n > 0$ และ $m = 1, 2, 3, \dots, M-1$)

ในกรณีนี้สมการที่ (3.50) สอดคล้องกับเงื่อนไขจึงสามารถใช้สูตรคำนวณได้โดย

$$-p(2m+1)u_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)u_m^{n+1} + p(1-2m)u_{m-1}^{n+1}$$

$$= p(2m+1)u_{m+1}^n + 4(2-mp)u_m^n + p(2m-1)u_{m-1}^n - 4u_m^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t))$$



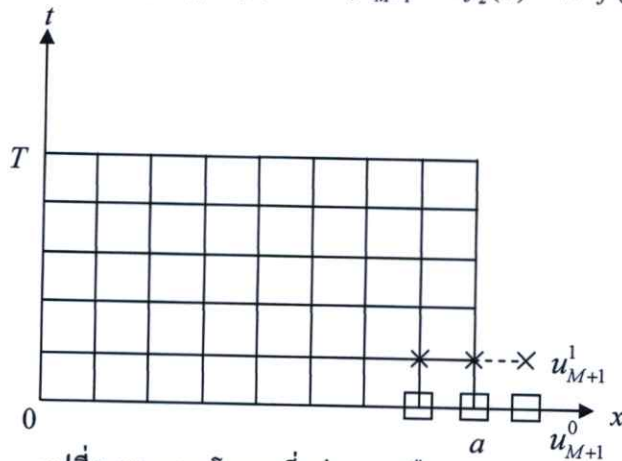
รูปที่ 3.24 แสดงโดเมนทั้ง 7 จุด

กรณีที่ 3 ($n = 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.52) จะได้ว่า

$$-p(2M+1)u_{M+1}^1 + 4(1+Mp)u_M^1 + p(1-2M)u_{M-1}^1$$

$$= p(2M+1)u_{M+1}^0 + 4(1-Mp)u_M^0 + p(2M-1)u_{M-1}^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.53)$$



รูปที่ 3.25 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.53) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^1 และ u_{M+1}^0 ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.25 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^1 และ u_{M+1}^0 จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าเช่นเดียวกับสมการ (3.16) จะได้

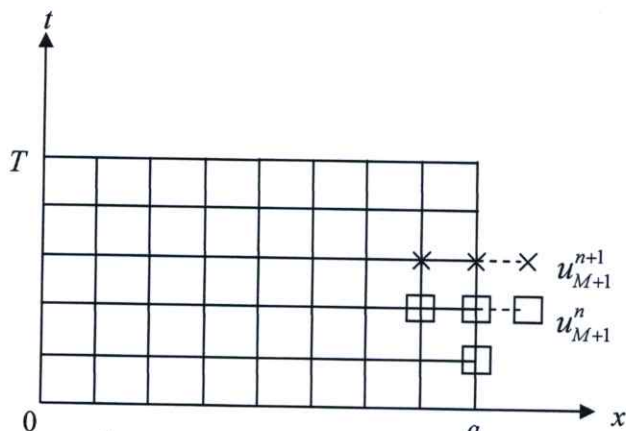
$$(2Mp - p + 4)u_M^1 + (p - 2Mp)u_{M-1}^1$$

$$= (p - 2Mp + 4)u_M^0 + (2Mp - p)u_{M-1}^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \quad (3.54)$$

กรณีที่ 4 ($n > 0$ และ $m = M$)

จากสมการที่ (3.50) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & -p(2M+1)u_{M+1}^{n+1} + 4(1+Mp)u_M^{n+1} + p(1-2M)u_{M-1}^{n+1} \\ & = p(2M+1)u_{M+1}^n + 4(2-Mp)u_M^n + p(2M-1)u_{M-1}^n - 4u_M^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.55)$$



รูปที่ 3.26 แสดงโดเมนที่อยู่นอกเหนือขอบเขต

จาก (3.55) พบว่ามีพจน์ u_{M+1}^n และ u_{M+1}^{n+1} ซึ่งไม่อยู่ในโดเมนดังรูปที่ 3.26 แต่สามารถประมาณค่าของ u_{M+1}^n และ u_{M+1}^{n+1} จากการแทนค่าเงื่อนไขขอบด้วยสูตรผลต่างจำกัดข้างหน้าเช่นเดียวกับสมการ (3.19) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & (2Mp - p + 4)u_{M+1}^{n+1} + (p - 2Mp)u_{M-1}^{n+1} \\ & = (p - 2Mp + 8)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n - 4u_M^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.56)$$

สมการที่นำไปใช้ในการหาผลเฉลยโดยวิธีของ Crank-Nicolson มีดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} & -p(2m+1)u_{m+1}^1 + 4(1+mp)u_m^1 + p(1-2m)u_{m-1}^1 \\ & = p(2m+1)u_{m+1}^0 + 4(1-mp)u_m^0 + p(2m-1)u_{m-1}^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} & -p(2m+1)u_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)u_m^{n+1} + p(1-2m)u_{m-1}^{n+1} \\ & = p(2m+1)u_{m+1}^n + 4(2-mp)u_m^n + p(2m-1)u_{m-1}^n - 4u_m^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} & (2Mp - p + 4)u_M^1 + (p - 2Mp)u_{M-1}^1 \\ & = (p - 2Mp + 4)u_M^0 + (2Mp - p)u_{M-1}^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} & (2Mp - p + 4)u_M^{n+1} + (p - 2Mp)u_{M-1}^{n+1} \\ & = (p - 2Mp + 8)u_M^n + (2Mp - p)u_{M-1}^n - 4u_M^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (3.56)$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้ในการหาผลเฉลยเมื่อ $n = 0, m = 1, 2, 3, \dots, M$ คือ

$$\begin{bmatrix} 4(1+mp) & -p(2m+1) & & & & & \\ p(1-2m) & 4(1+mp) & -p(2m+1) & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & p(1-2m) & 4(1+mp) & -p(2m+1) & \\ & & & & p-2Mp & 2Mp-p+4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_{M-1}^1 \\ u_M^1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4(1-mp)u_1^0 + p(2m+1)u_2^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \\ p(2m-1)u_1^0 + 4(1-mp)u_2^0 + p(2m+1)u_3^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \\ \vdots \\ p(2m-1)u_{m-1}^0 + 4(1-mp)u_m^0 + p(2m+1)u_{m+1}^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \\ (2Mp-p)u_{M-1}^0 + (p-2Mp+4)u_M^0 + 4kf_2(x) - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{bmatrix}$$

ระบบสมการเชิงเส้นที่ใช้ในการหาผลเฉลยเมื่อ $n > 0, m = 1, 2, 3, \dots, M$ คือ

$$\begin{bmatrix} 4(1+mp) & -p(2m+1) & & & & & \\ p(1-2m) & 4(1+mp) & -p(2m+1) & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & p(1-2m) & 4(1+mp) & -p(2m+1) & \\ & & & & p-2Mp & 2Mp-p+4 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-1}^n \\ u_M^n \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 4(2-mp)u_1^n + p(2m+1)u_2^n - 4u_1^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \\ p(2m-1)u_1^n + 4(2-mp)u_2^n + p(2m+1)u_3^n - 4u_2^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \\ \vdots \\ p(2m-1)u_{m-1}^n + 4(2-mp)u_m^n + p(2m+1)u_{m+1}^n - 4u_m^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \\ (2Mp-p)u_{M-1}^n + (p-2Mp+8)u_M^n - 4u_M^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \end{bmatrix}$$

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

จากการศึกษาเนื้อหาที่ผ่านมาได้ศึกษาขั้นตอนการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดทั้งในรูปแบบชัดเจน ปริยายและวิธีเครงค์-นิโคลสัน ในบทนี้ได้ทำการพัฒนาโปรแกรมเพื่อช่วยในการหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลข การจำลองของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำ และมีแรงภายนอกมากระทำ โดยพิจารณากรณีขอบเขตต่างๆดังนี้

1) กำหนดฟังก์ชันเงื่อนไขเริ่มต้นมีรูปแบบ $u(x, 0) = \sin(2\pi x)$

2) กำหนดเงื่อนไขความเร็วต้นมีรูปแบบที่แตกต่างกันดังนี้

2.1 ความเร็วต้นอยู่ในรูป $f_2(x) = 0$

2.2 ความเร็วต้นอยู่ในรูป $f_2(x) = 1$

2.3 ความเร็วต้นอยู่ในรูป $f_2(x) = -1$

2.4 ความเร็วต้นอยู่ในรูป $f_2(x) = x$

2.5 ความเร็วต้นอยู่ในรูป $f_2(x) = x^2$

3) กำหนดวิธีในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขแตกต่างกันทั้ง 5 วิธี ได้แก่

3.1 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน

3.2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1

3.3 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2

3.4 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3

3.5 ระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน

4) กำหนดเงื่อนไขแรงภายนอกที่มากระทำมีรูปแบบที่แตกต่างกันดังนี้

4.1 ไม่มีแรงภายนอก $f(x, u(x, t)) = 0$

4.2 แรงภายนอกอยู่ในรูป $f(x, u(x, t)) = u^3$

ผลเฉลยที่ได้แสดงในรูปของกราฟ วิเคราะห์เปรียบเทียบลักษณะของกราฟและตารางในแต่ละตัวอย่างดังต่อไปนี้

การหาผลเฉลยของปัญหาที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำ

ปัญหาอยู่ในรูปแบบของ

$$u_{tt} - (xu_{xx} + u_x) = 0 \quad \text{สำหรับ } 0 \leq x \leq 1 \text{ และ } 0 \leq t \leq 0.2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ คือ

$$u(0, t) = 0 \quad \text{และ} \quad u_x(1, t) = 0$$

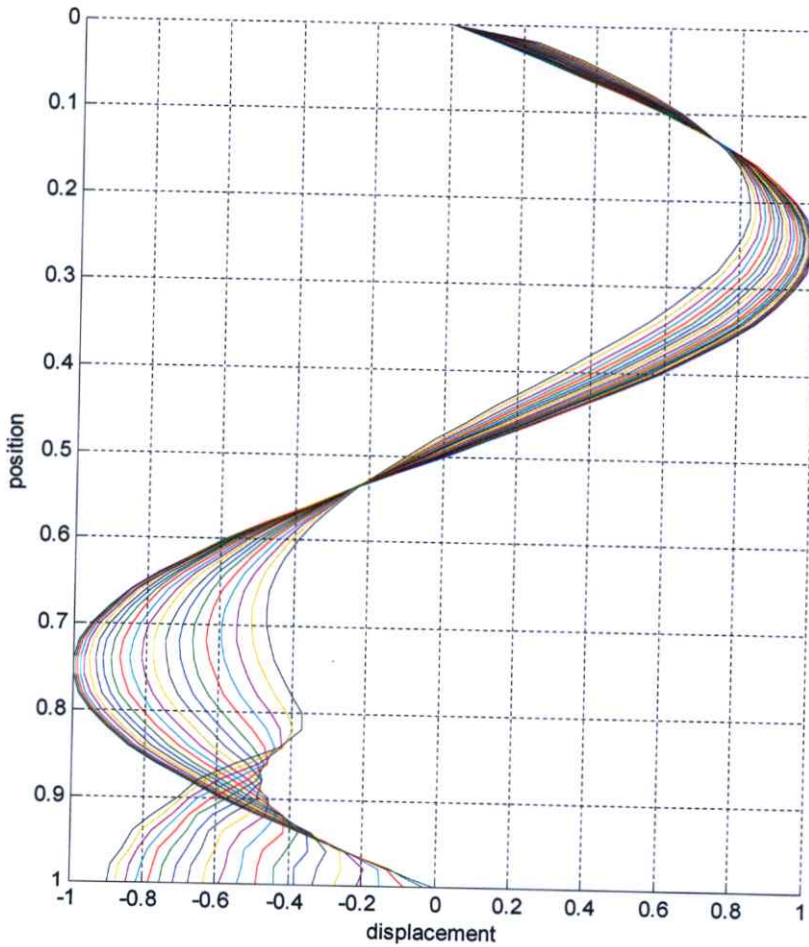
และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \quad \text{และ} \quad u_t(x, 0) = f_2(x)$$

เลือก $h = 0.02$ และ $k = 0.0025$ (กราฟแต่ละเส้นแสดงทุกช่วงเวลา 0.01 วินาทีที่เพิ่มขึ้น)

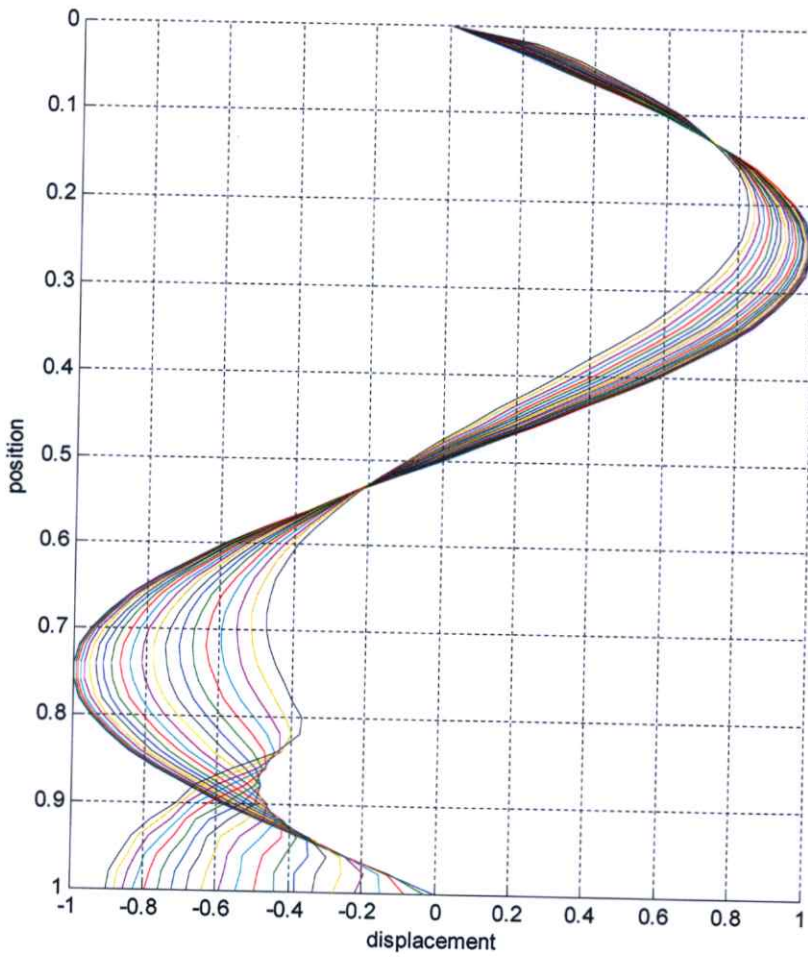
4.1 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิถี โดยความเร็วต้นเป็นศูนย์ $f_2(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 1 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



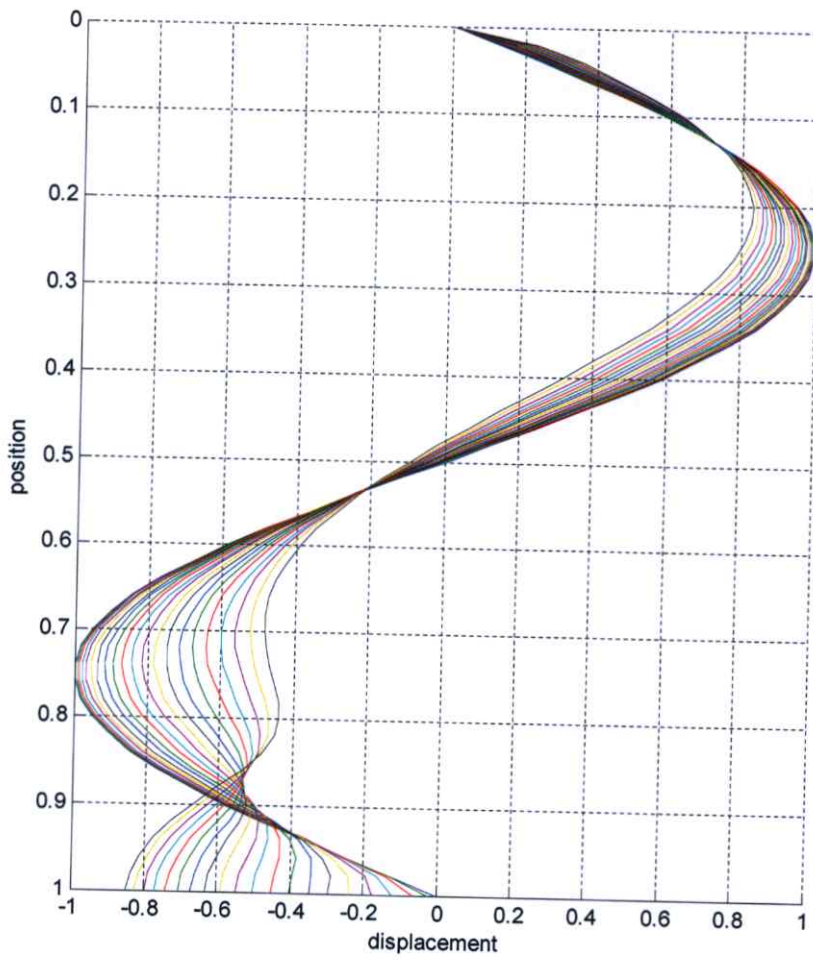
รูปที่ 4.1 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 1 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 2 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



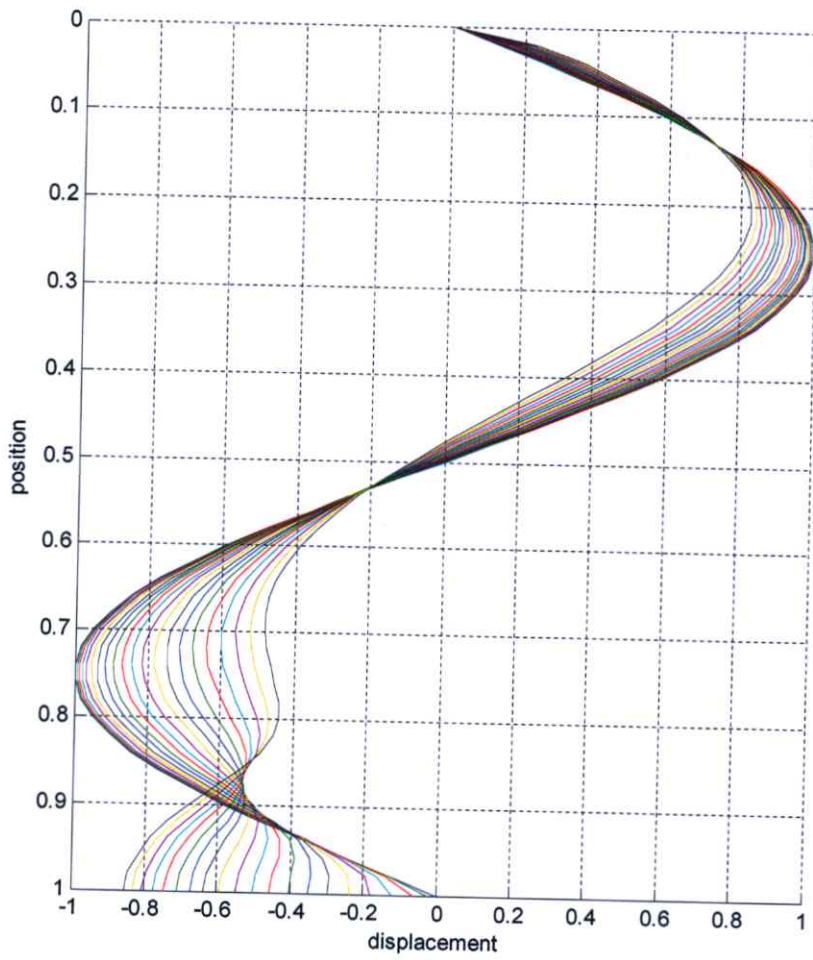
รูปที่ 4.2 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 2 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 3 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



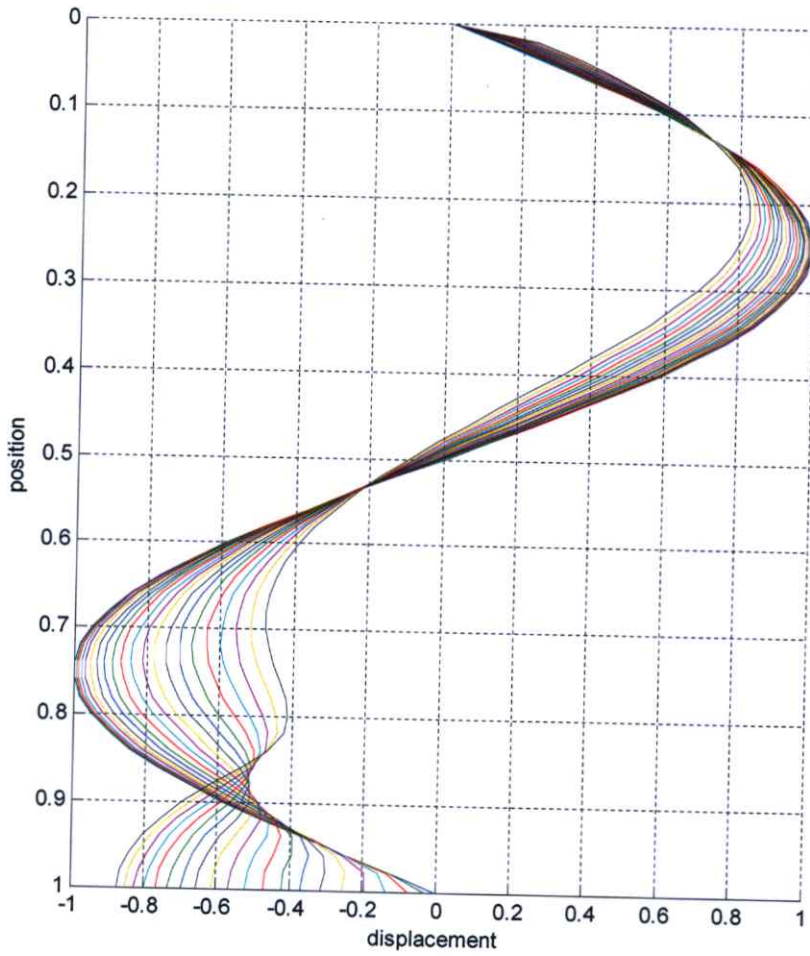
รูปที่ 4.3 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 3 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 4 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรแบบที่ 3



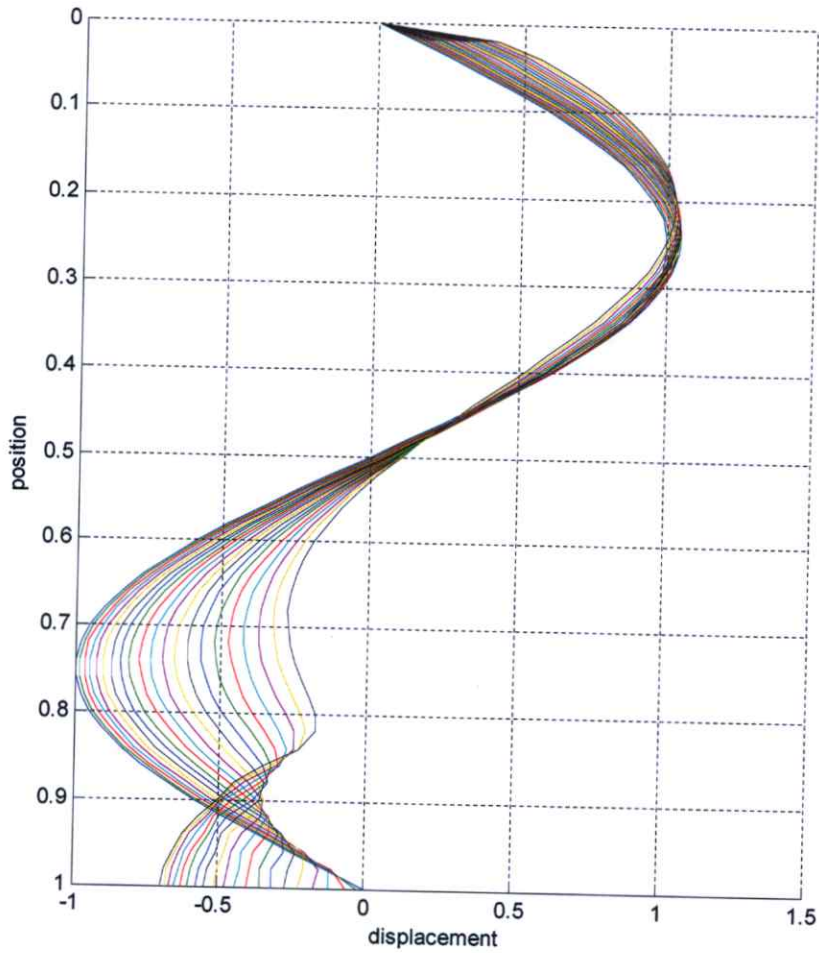
รูปที่ 4.4 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 4 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 5 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน



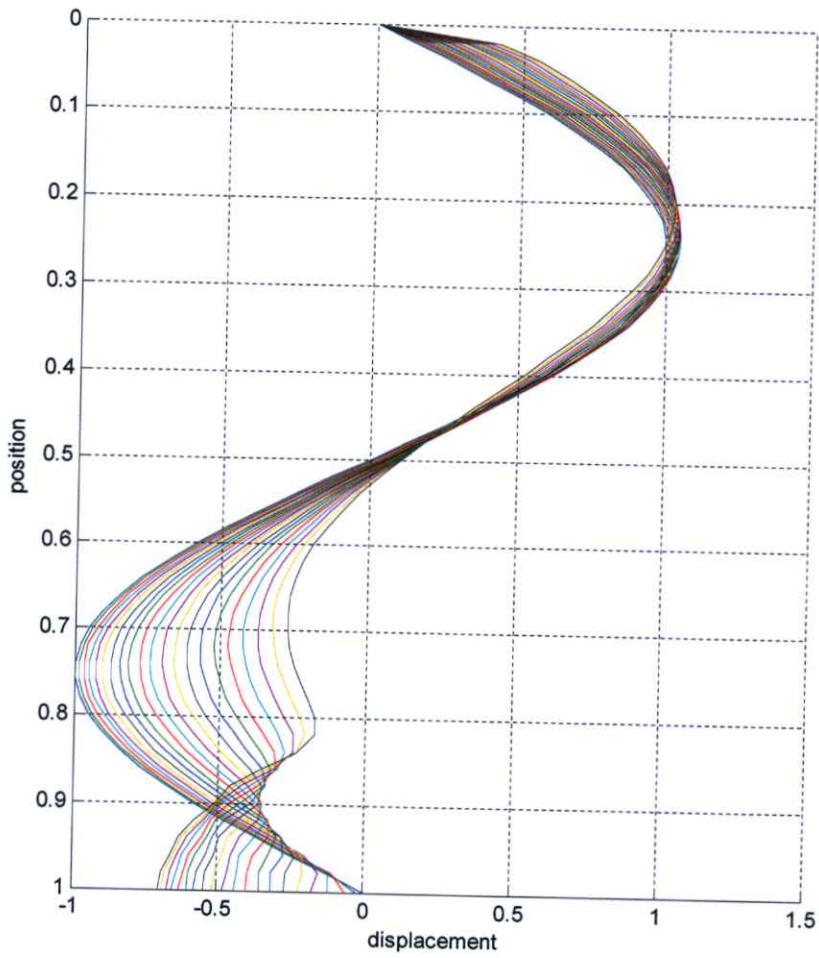
รูปที่ 4.5 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 5 โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ 0

4.2 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ในรูป $f_2(x) = 1$
 ตัวอย่างที่ 6 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



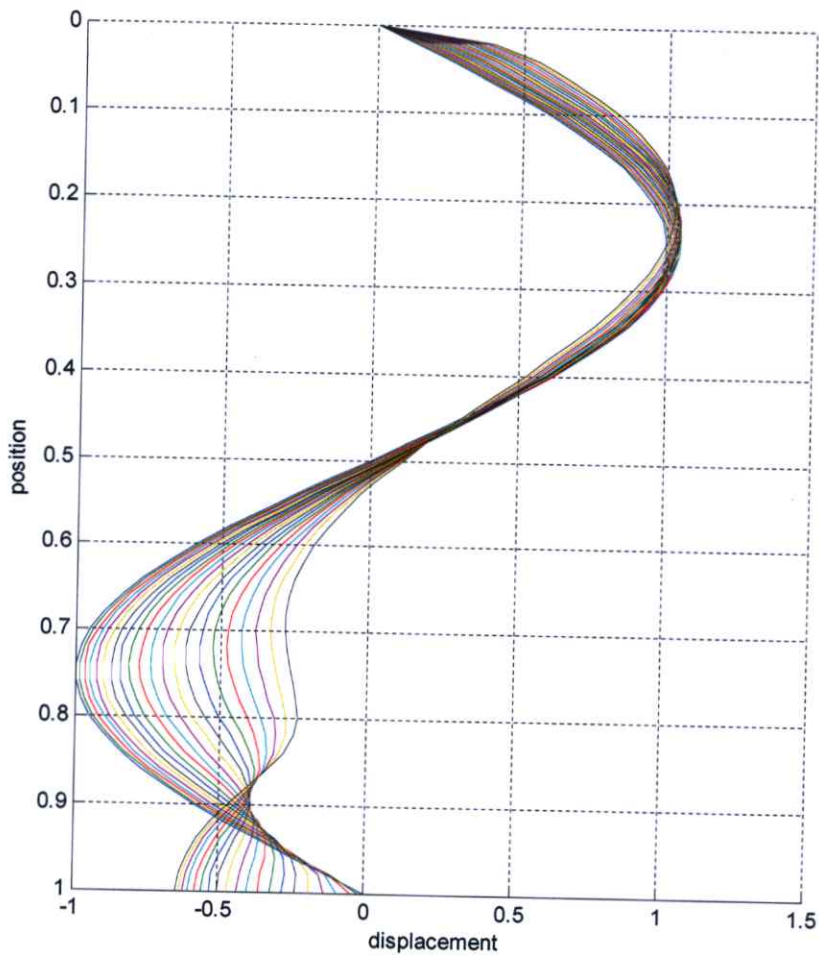
รูปที่ 4.6 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 6 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน
 และความเร็วต้นคือ 1

ตัวอย่างที่ 7 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรแบบที่ 1



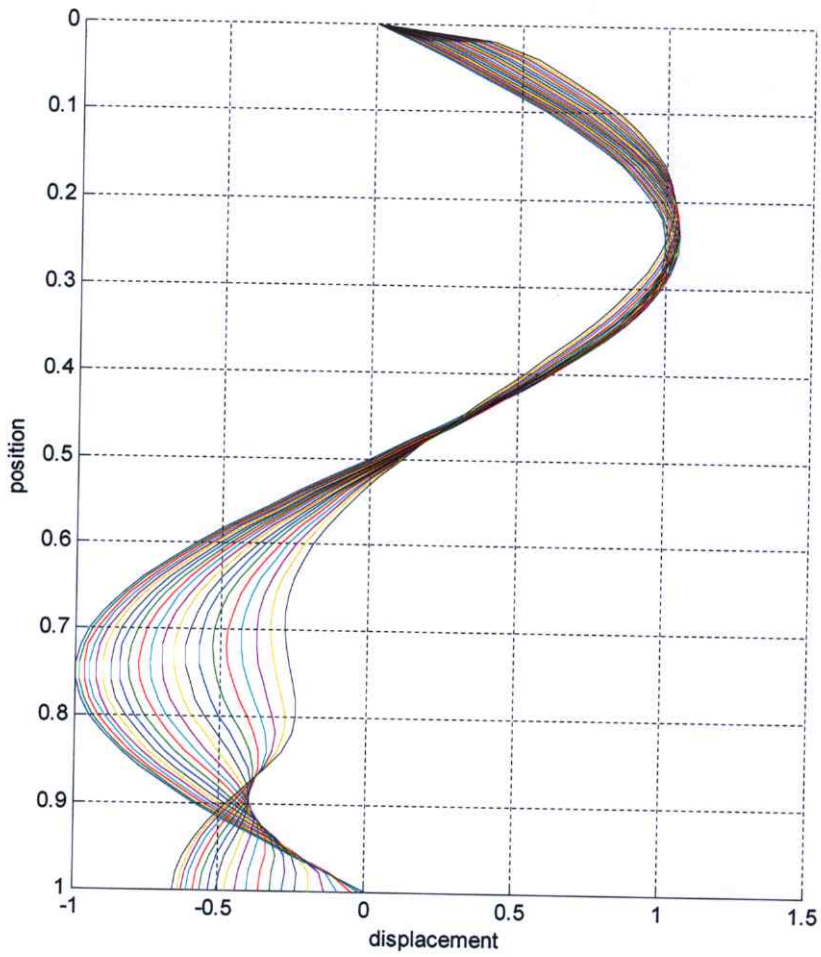
รูปที่ 4.7 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 7 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ 1

ตัวอย่างที่ 8 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



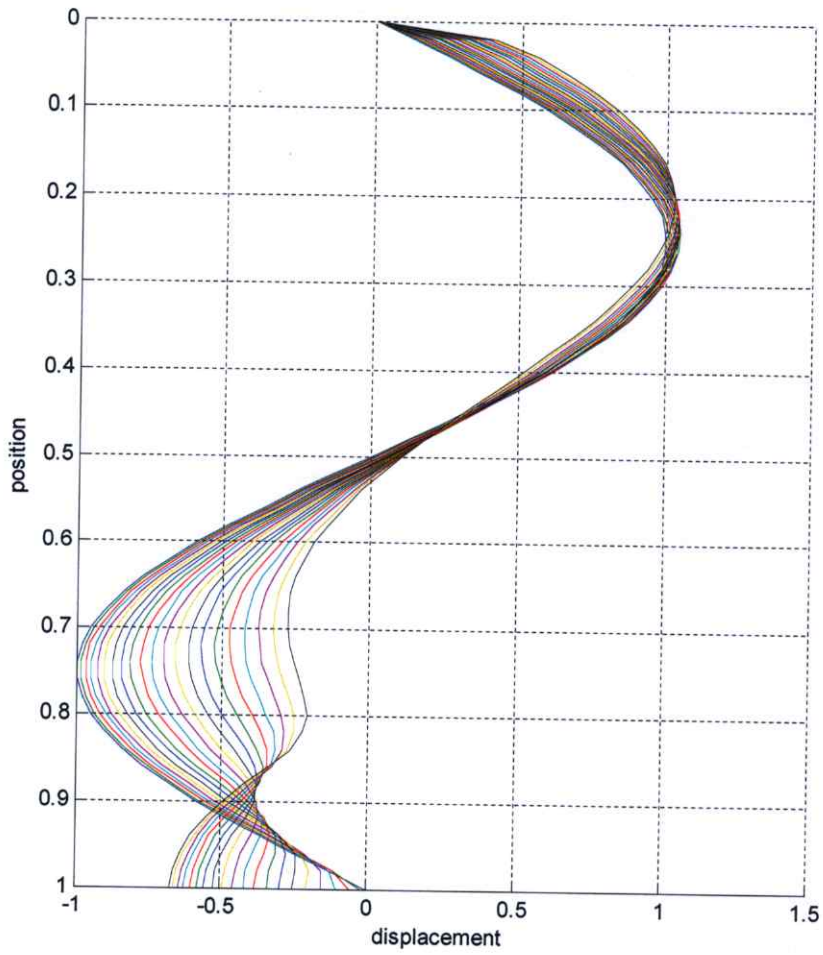
รูปที่ 4.8 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 8 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ 1

ตัวอย่างที่ 9 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.9 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 9 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วคั่นคือ 1

ตัวอย่างที่ 10 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน

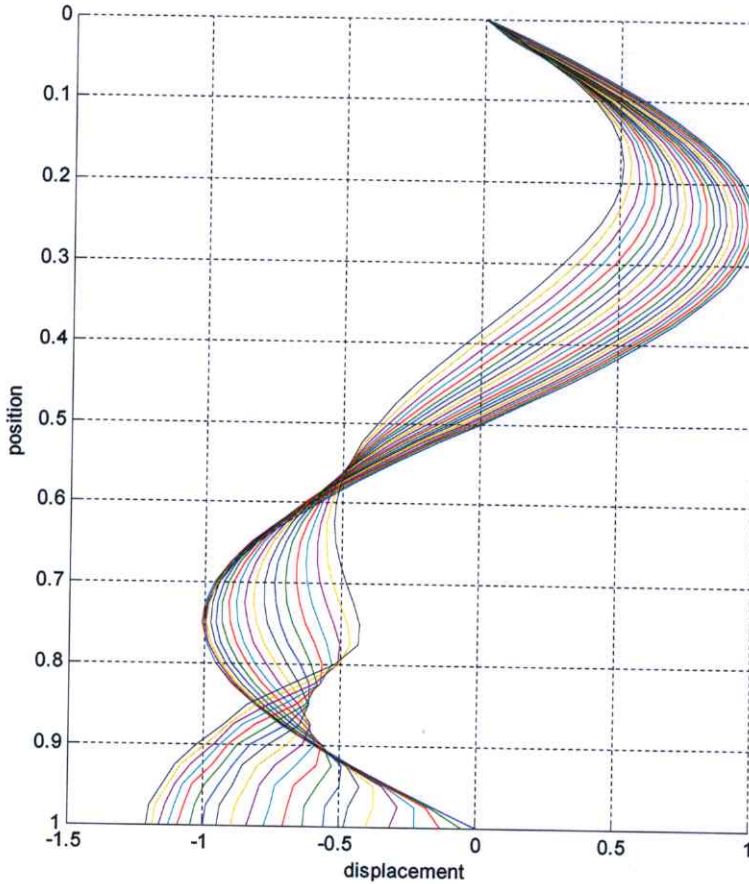


รูปที่ 4.10 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 10 โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ 1

4.3 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ใน

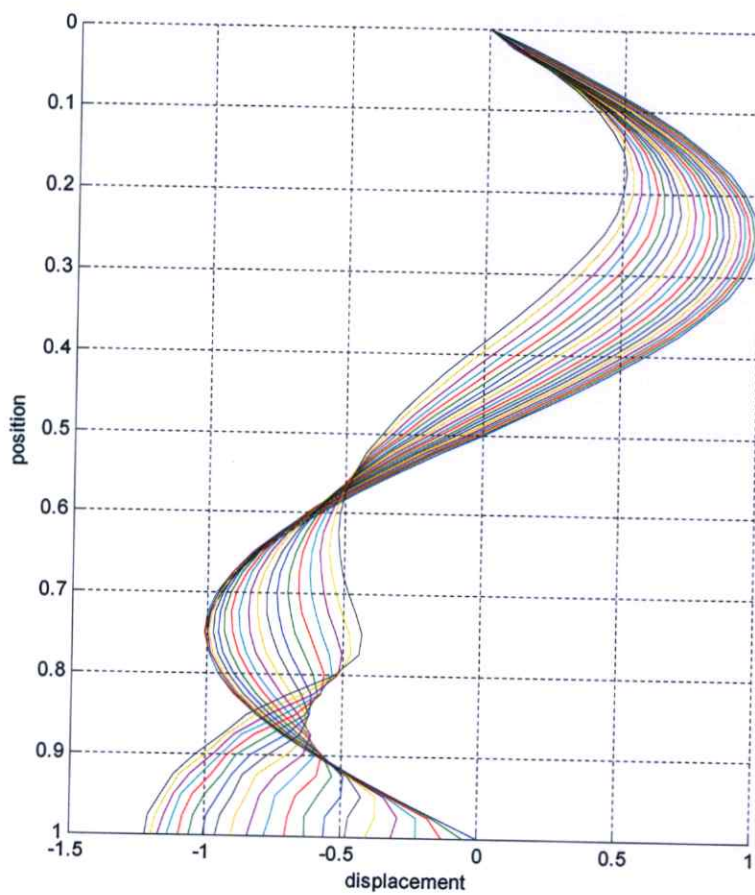
$$\text{รูป } f_2(x) = -1$$

ตัวอย่างที่ 11 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



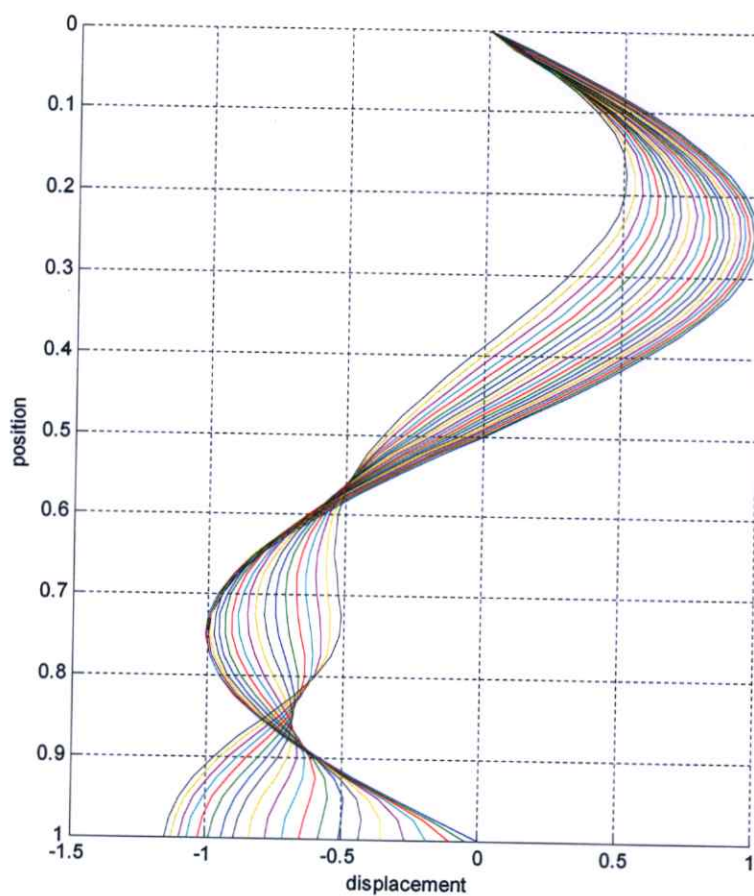
รูปที่ 4.11 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 11 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 12 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



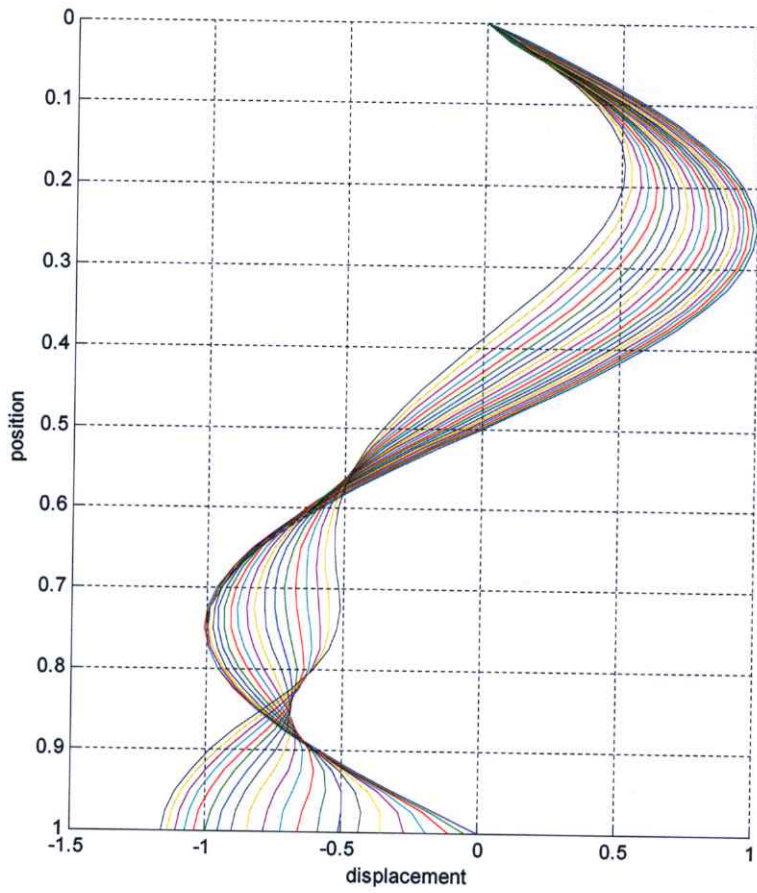
รูปที่ 4.12 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 12 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 13 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



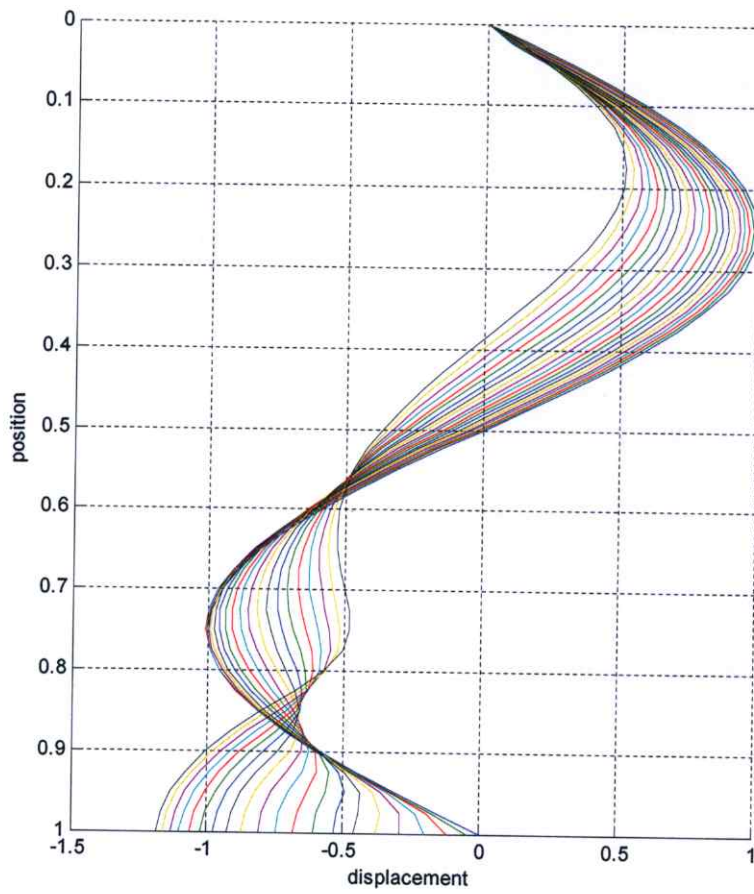
รูปที่ 4.13 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 13 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2
และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 14 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.14 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 14 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3
และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 15 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน

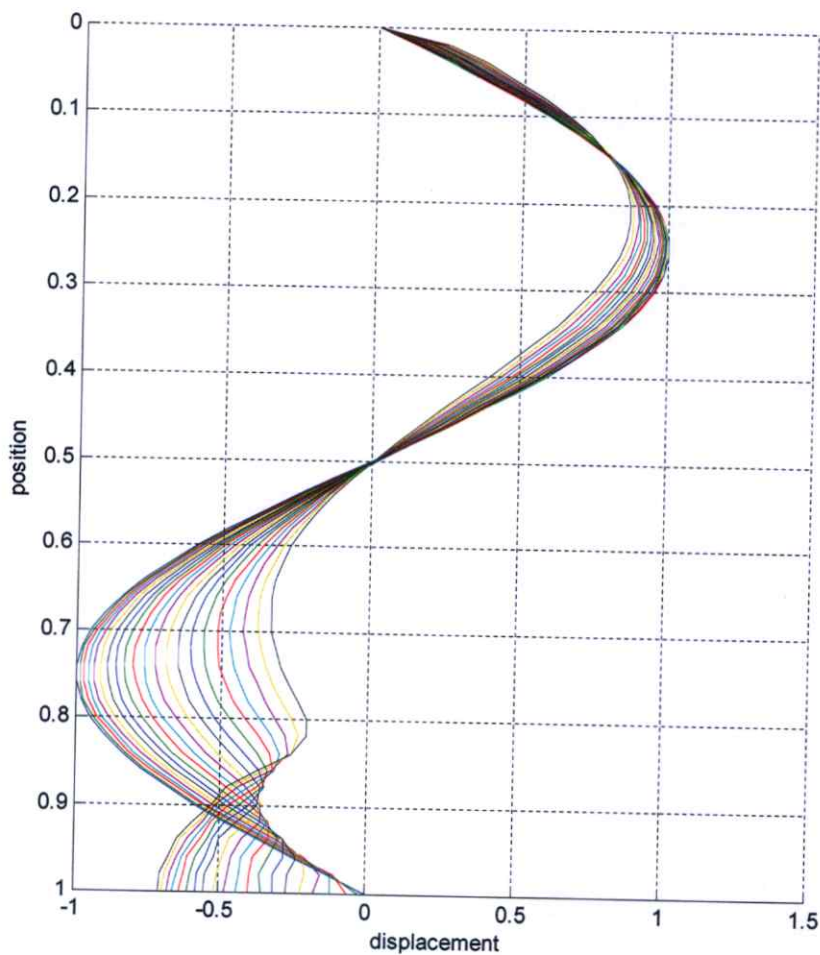


รูปที่ 4.15 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 15 โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ -1

4.4 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ใน

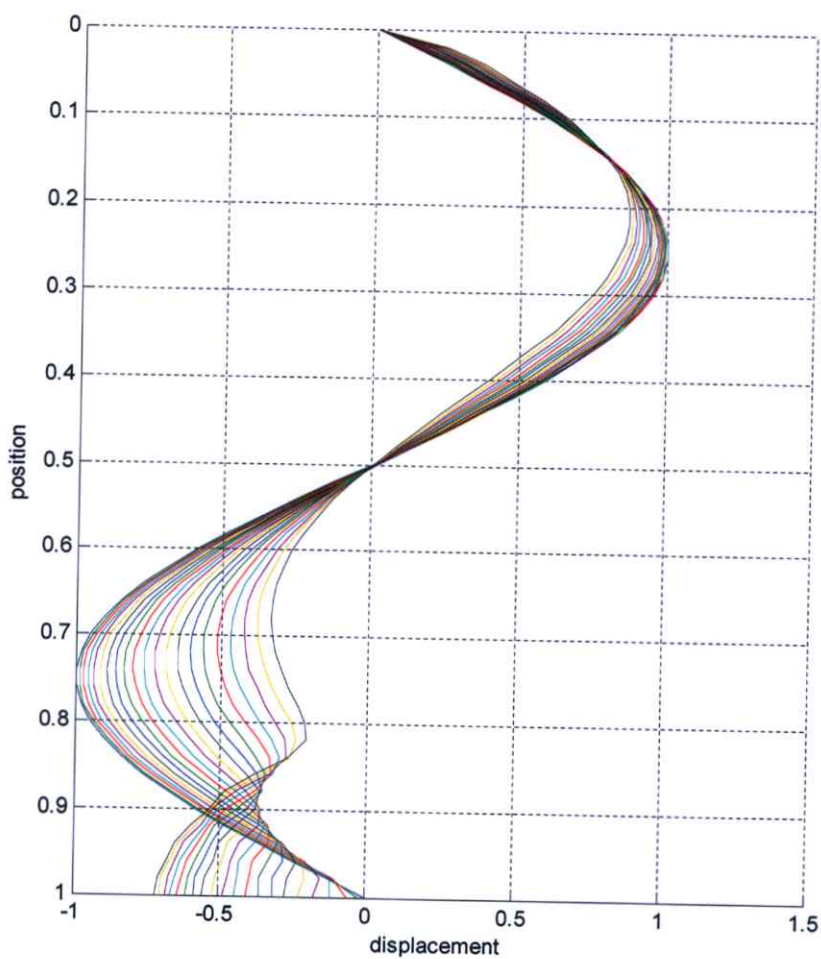
$$\text{รูป } f_2(x) = x$$

ตัวอย่างที่ 16 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



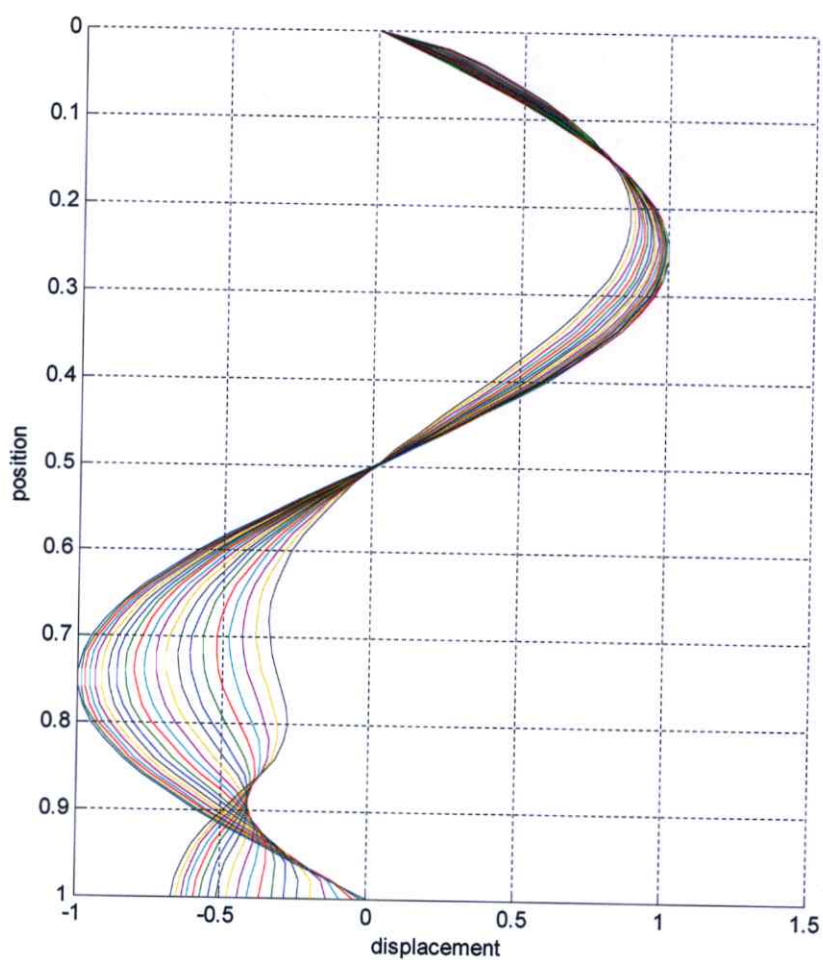
รูปที่ 4.16 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 16 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 17 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



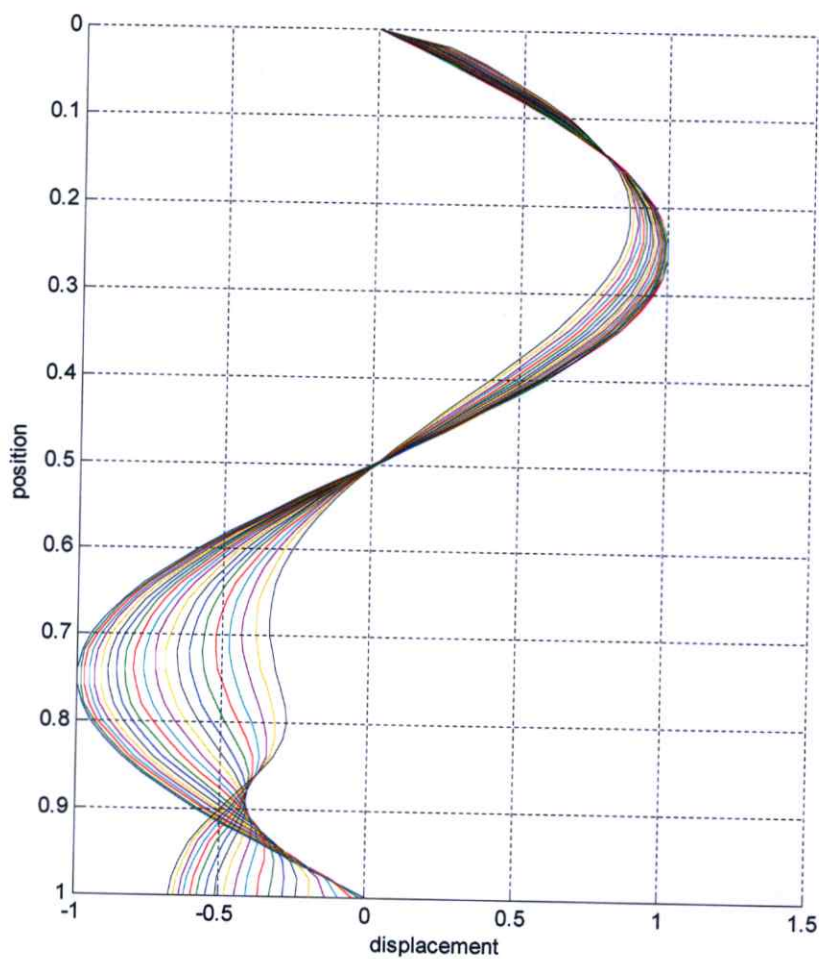
รูปที่ 4.17 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 17 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 18 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



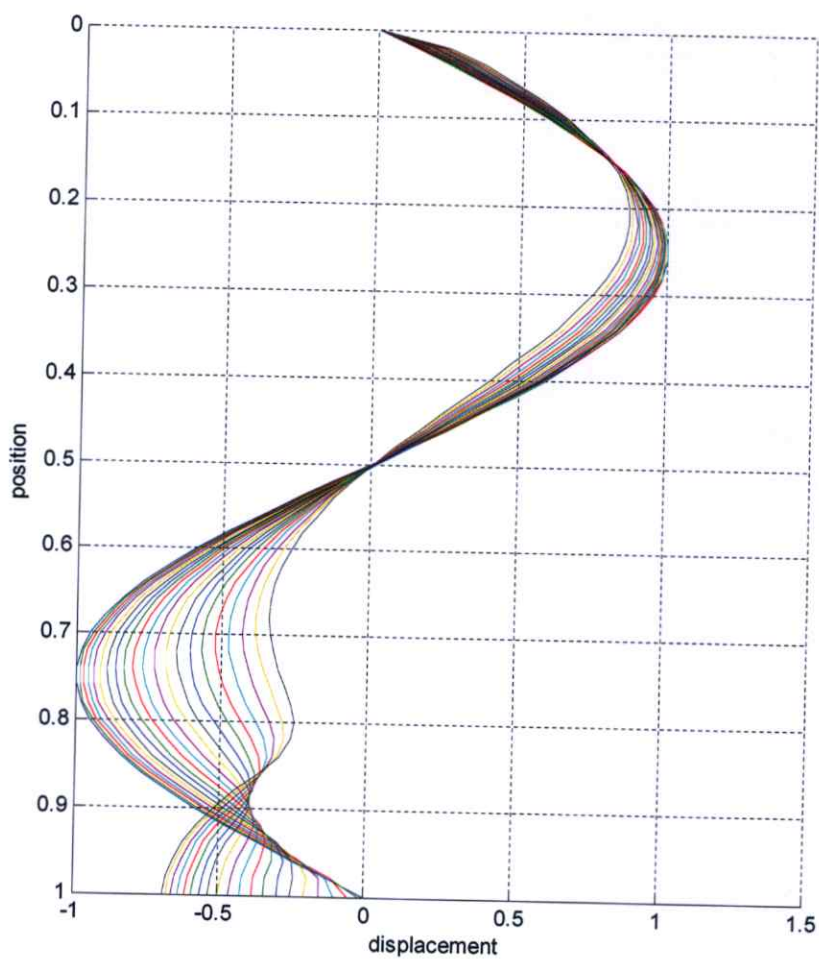
รูปที่ 4.18 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 18 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2
และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 19 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.19 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 19 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3
และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 20 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน

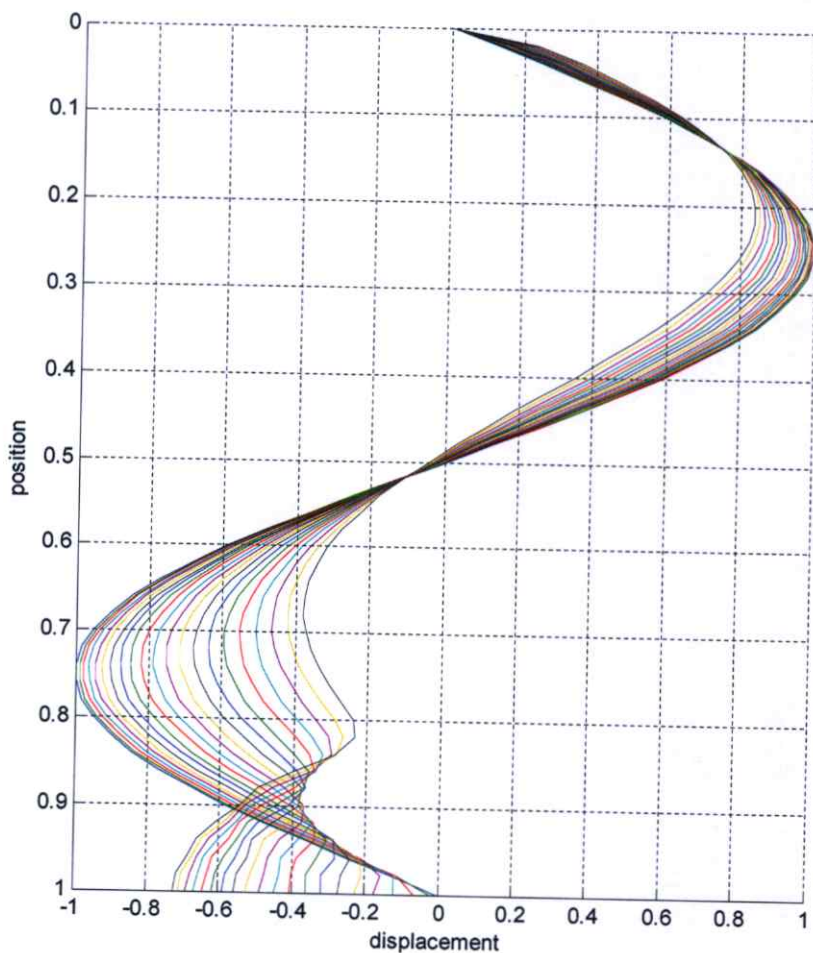


รูปที่ 4.20 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 20 โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ x

4.5 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ใน

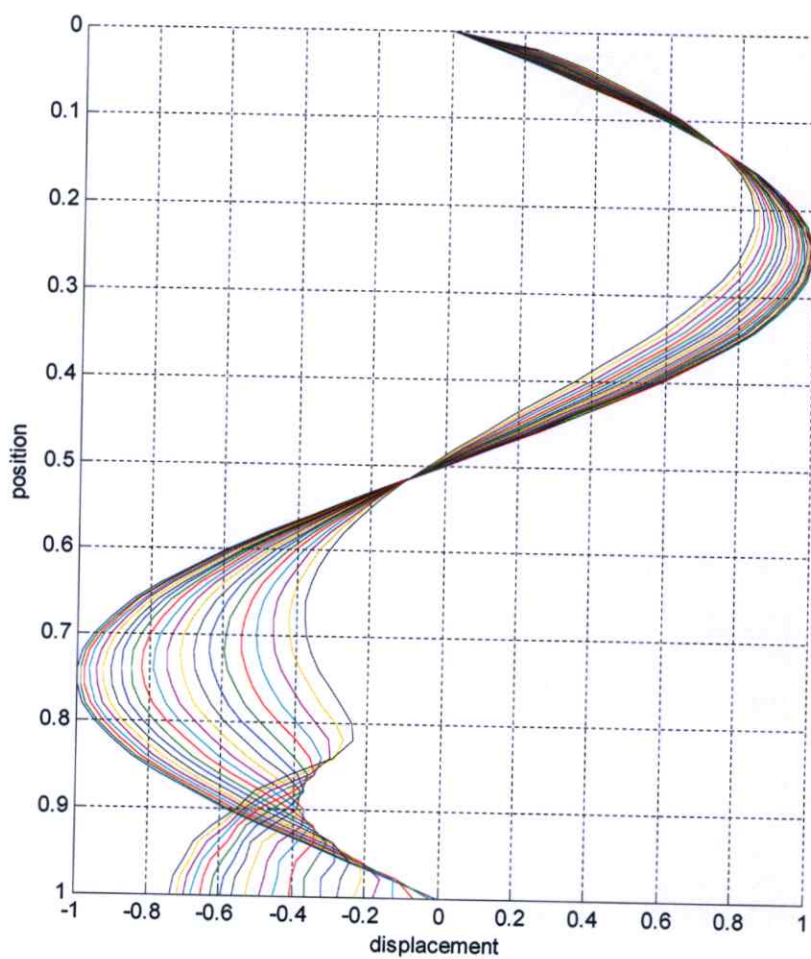
รูป $f_2(x) = x^2$

ตัวอย่างที่ 21 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



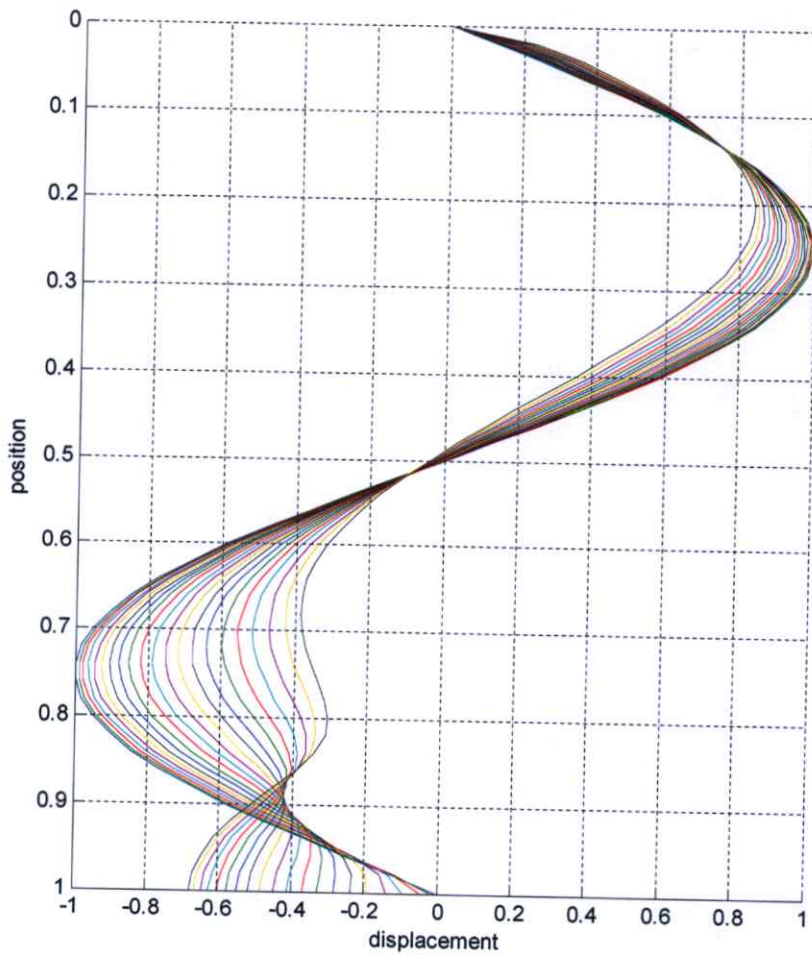
รูปที่ 4.21 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 21 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ x^2

ตัวอย่างที่ 22 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



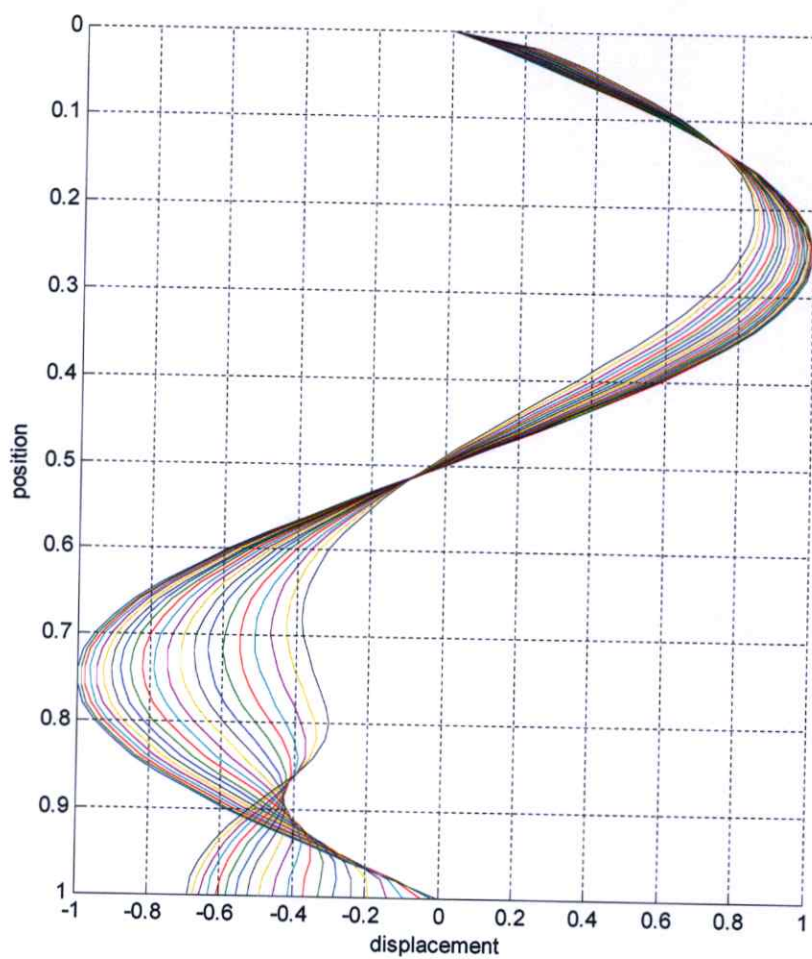
รูปที่ 4.22 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 22 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ x^2

ตัวอย่างที่ 23 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



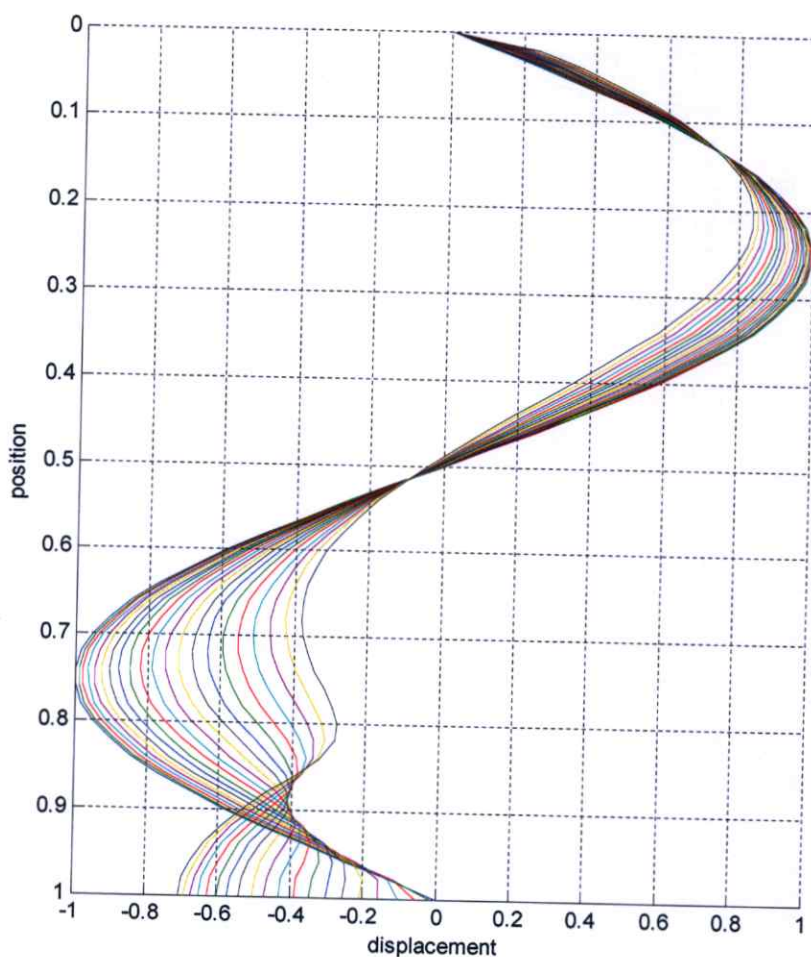
รูปที่ 4.23 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 23 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ x^2

ตัวอย่างที่ 24 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.24 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 24 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3
และความเร็วต้นคือ x^2

ตัวอย่างที่ 25 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน



รูปที่ 4.25 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 25 โดยระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ x^2

จากรูปที่ 4.1 - 4.25 เมื่อกำหนดความเร็วต้นเดียวกัน สามารถจำแนกกราฟได้เป็นสองกลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งคือ ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งและระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 ส่วนกลุ่มที่สองคือ ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และระเบียบวิธีแครงค์-นิโคลสัน เส้นกราฟทั้งสองกลุ่มจะมีลักษณะคล้ายกันในช่วง $[0, 0.5]$ แต่หลังจากนั้นกราฟในกลุ่มที่สองจะมีการสั่นที่ราบเรียบกว่ากราฟในกลุ่มที่หนึ่ง

การหาผลเฉลยของปัญหาที่มีแรงภายนอกมากระทำ

ปัญหาอยู่ในรูปแบบของ

$$u_{tt} - (xu_{xx} + u_x) + f(x, u(x, t)) = 0 \quad \text{สำหรับ } 0 \leq x \leq 1 \text{ และ } 0 \leq t \leq 0.2$$

โดยมีเงื่อนไขค่าขอบ คือ

$$u(0, t) = 0 \quad \text{และ} \quad u_x(1, t) = 0$$

และเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ

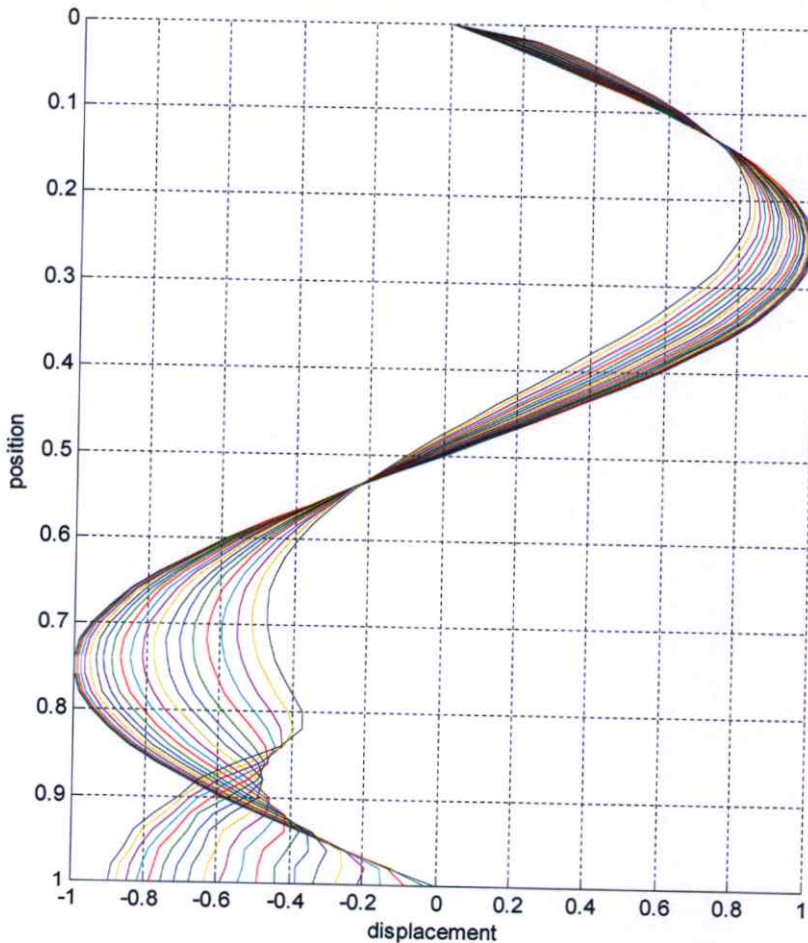
$$u(x, 0) = \sin(2\pi x) \quad \text{และ} \quad u_t(x, 0) = f_2(x)$$

เลือก $h = 0.02$ และ $k = 0.0025$ (กราฟแต่ละเส้นแสดงทุกช่วงเวลา 0.01 วินาทีที่เพิ่มขึ้น)

โดย $f(x, u(x, t)) = u^3$

4.6 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นเป็นศูนย์ $f_2(x) = 0$

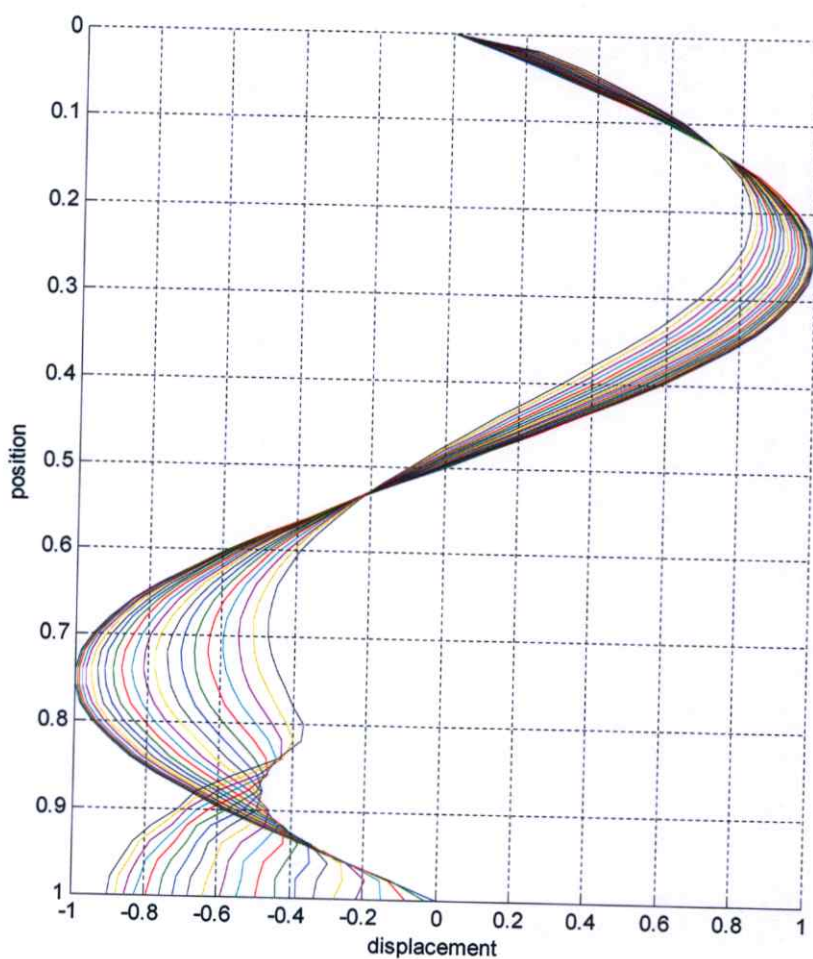
ตัวอย่างที่ 26 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



รูปที่ 4.26 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 26 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน

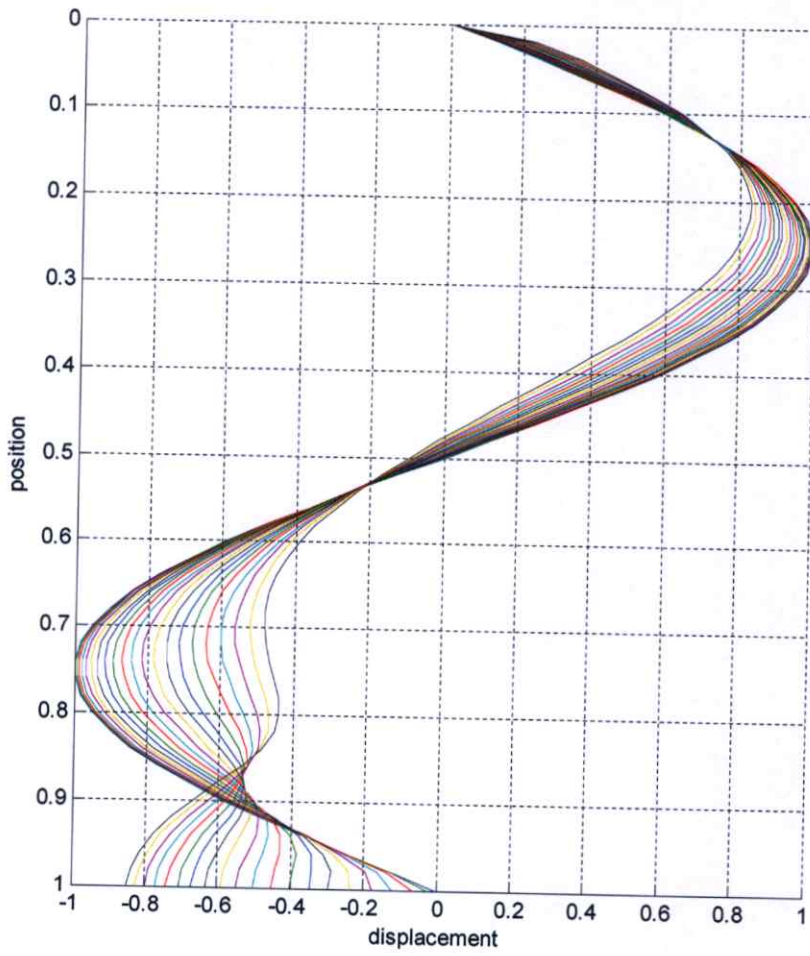
และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 27 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



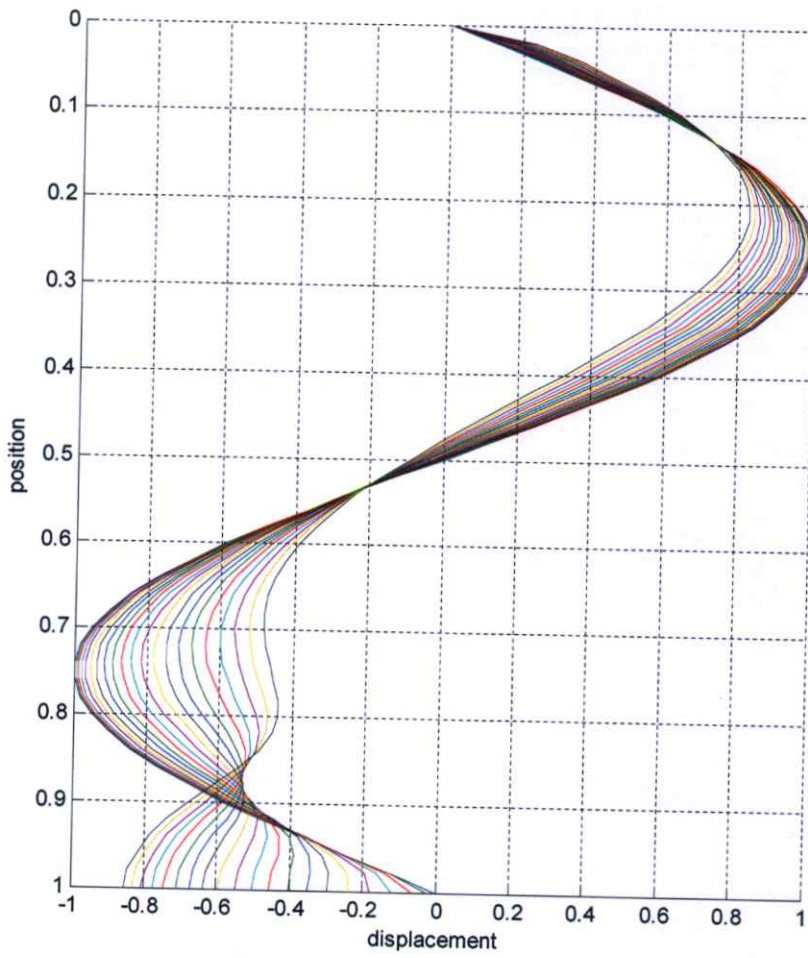
รูปที่ 4.27 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 27 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 28 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



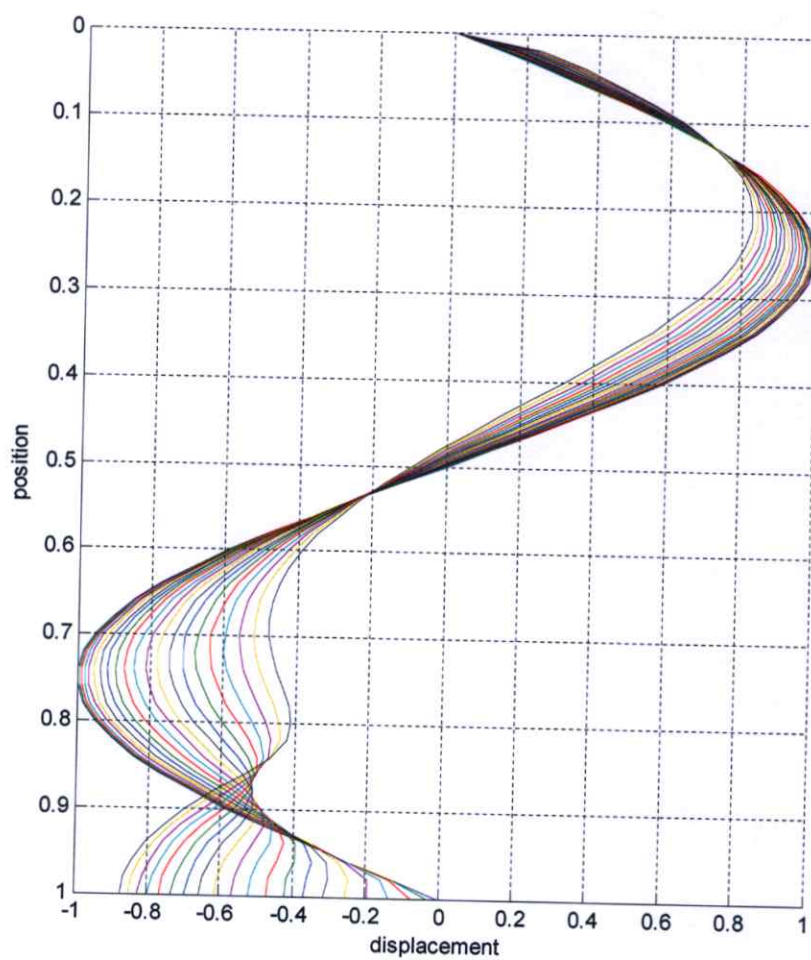
รูปที่ 4.28 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 28 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 29 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.29 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 29 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3
และความเร็วต้นคือ 0

ตัวอย่างที่ 30 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน

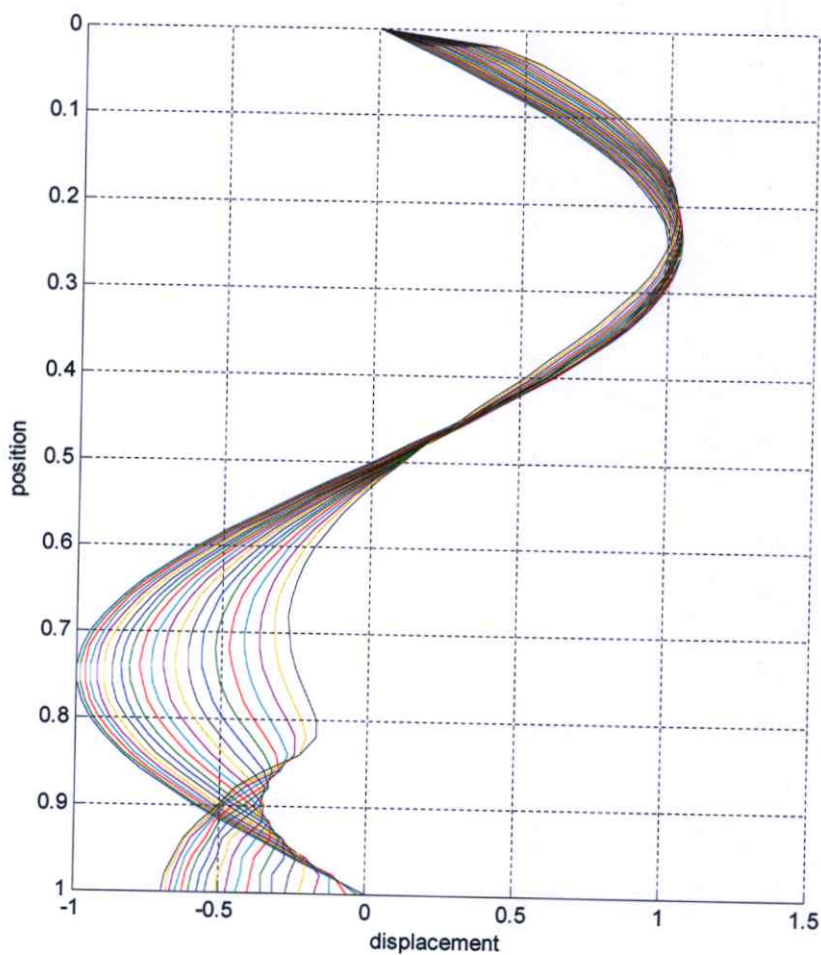


รูปที่ 4.30 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 30 โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ 0

4.7 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ใน

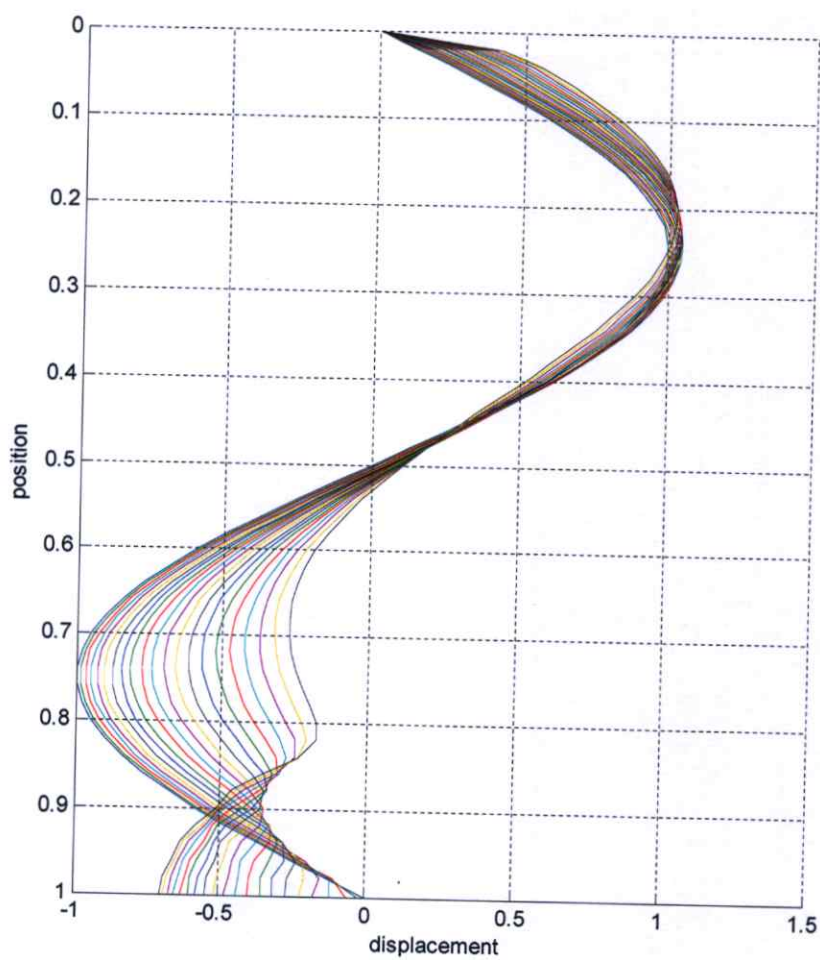
$$\text{รูป } f_2(x) = 1$$

ตัวอย่างที่ 31 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



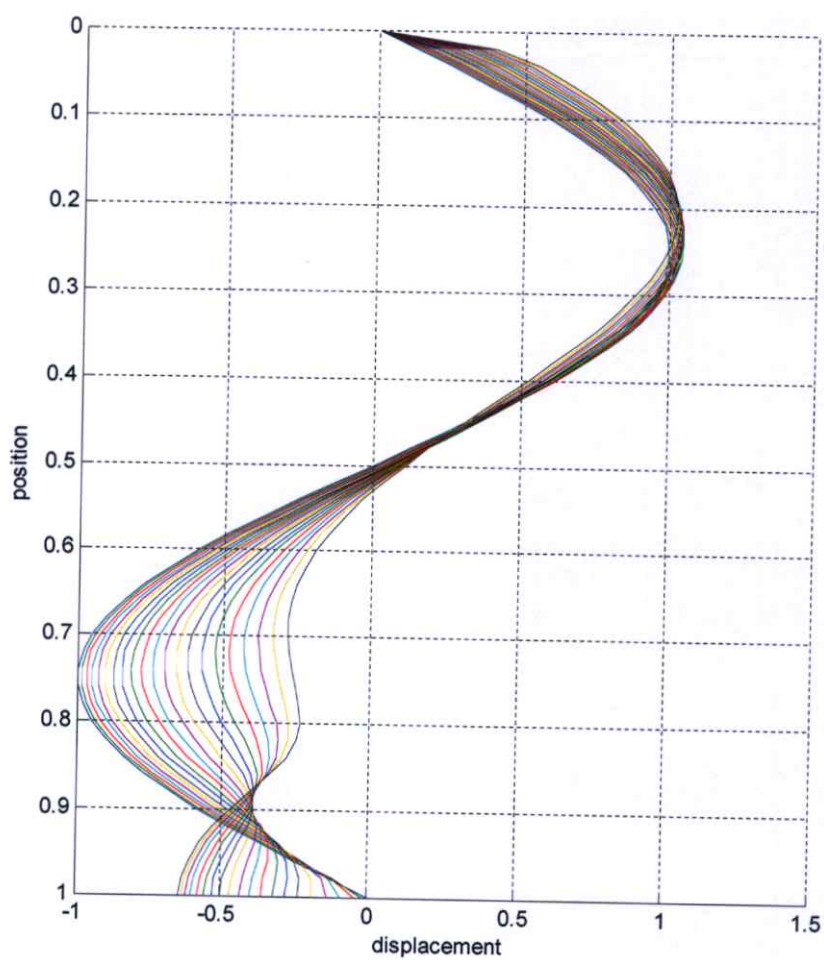
รูปที่ 4.31 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 31 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน
และความเร็วต้นคือ 1

ตัวอย่างที่ 32 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



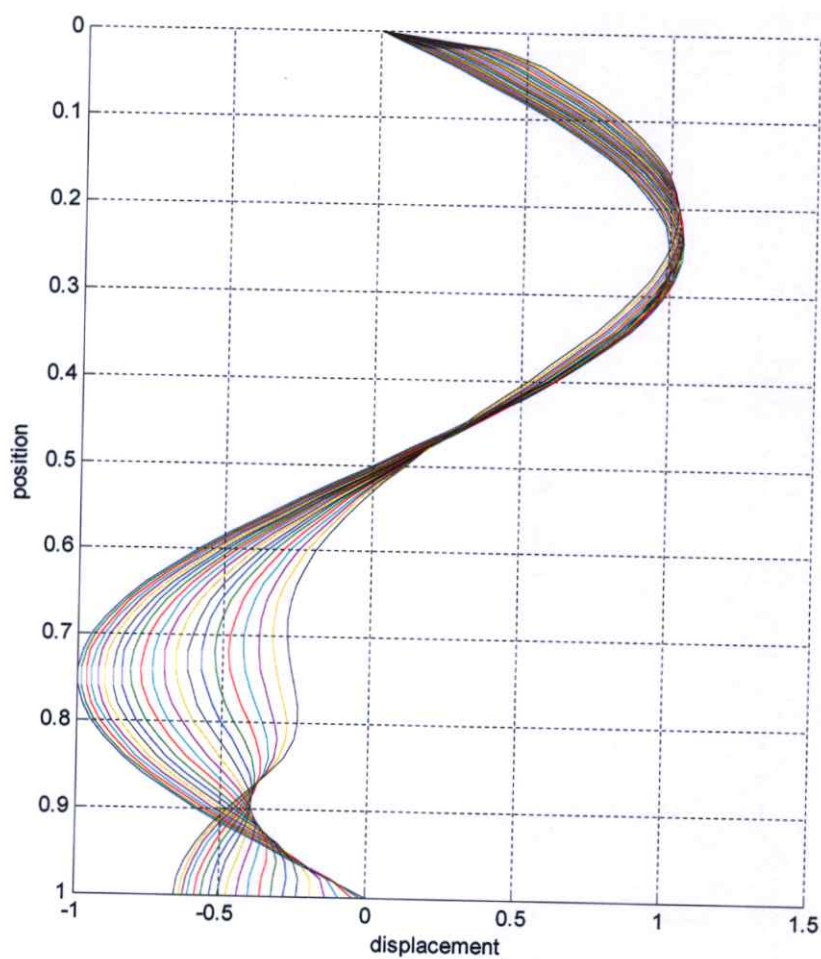
รูปที่ 4.32 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 32 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ 1

ตัวอย่างที่ 33 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



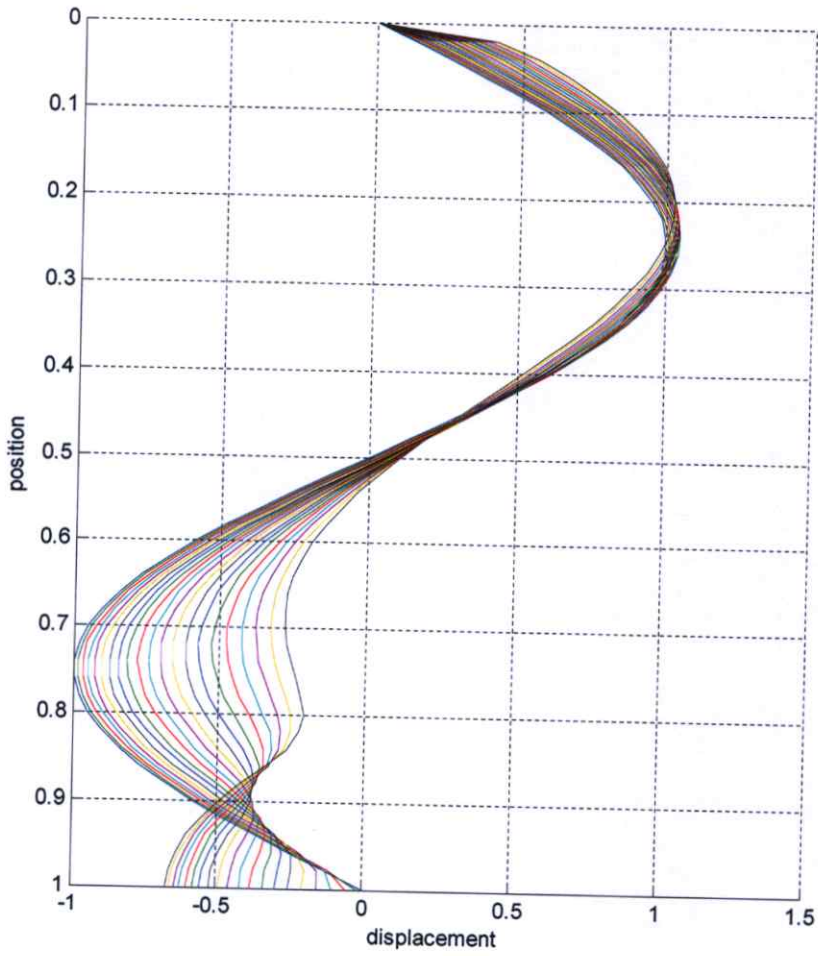
รูปที่ 4.33 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 33 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2
และความเร็วต้นคือ 1

ตัวอย่างที่ 34 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.34 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 34 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3
และความเร็วต้นคือ 1

ตัวอย่างที่ 35 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน

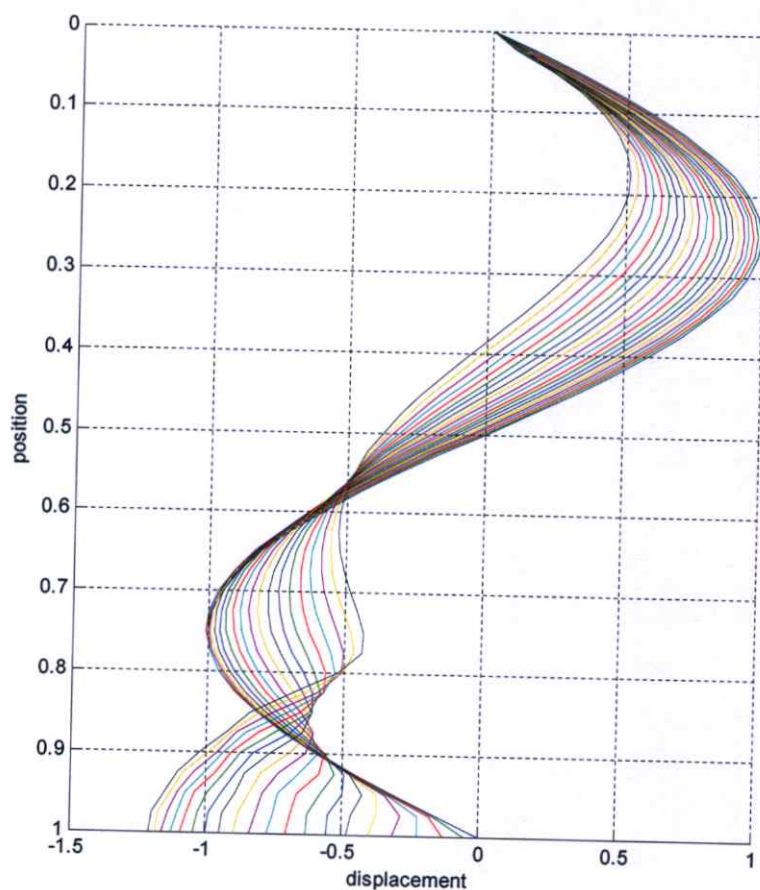


รูปที่ 4.35 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 35 โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน
และความเร็วคั่นคือ 1

4.8 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ใน

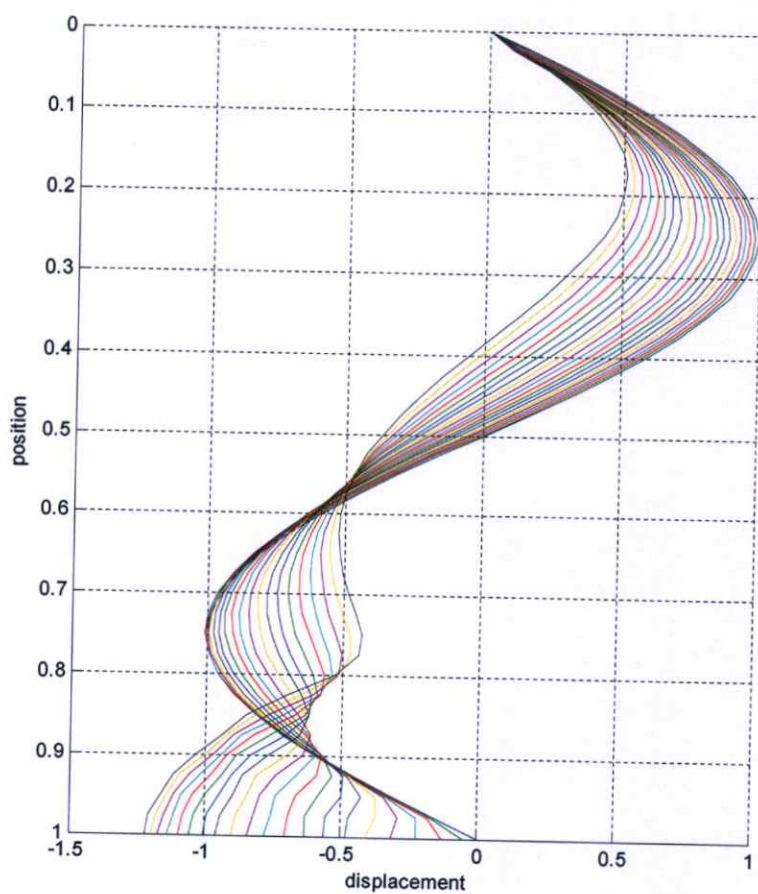
รูป $f_2(x) = -1$

ตัวอย่างที่ 36 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



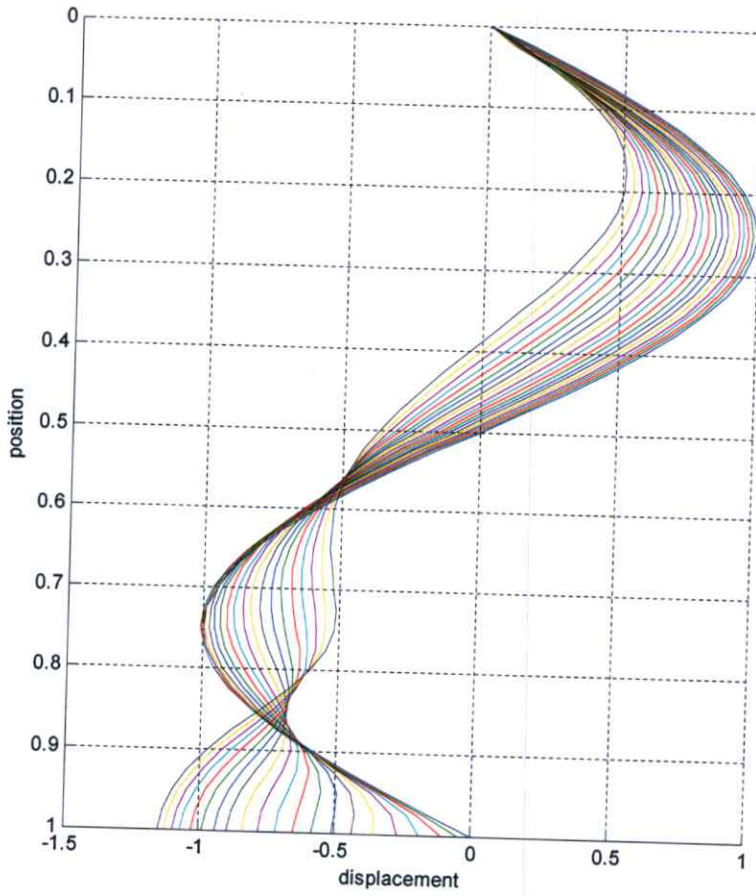
รูปที่ 4.36 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 36 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 37 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



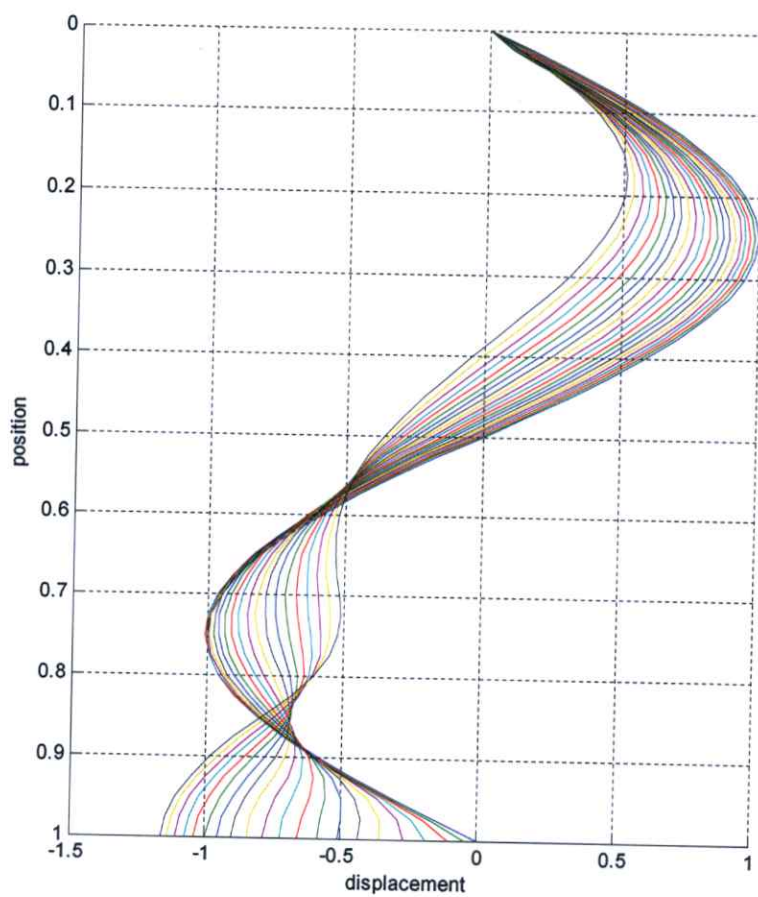
รูปที่ 4.37 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 37 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 38 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



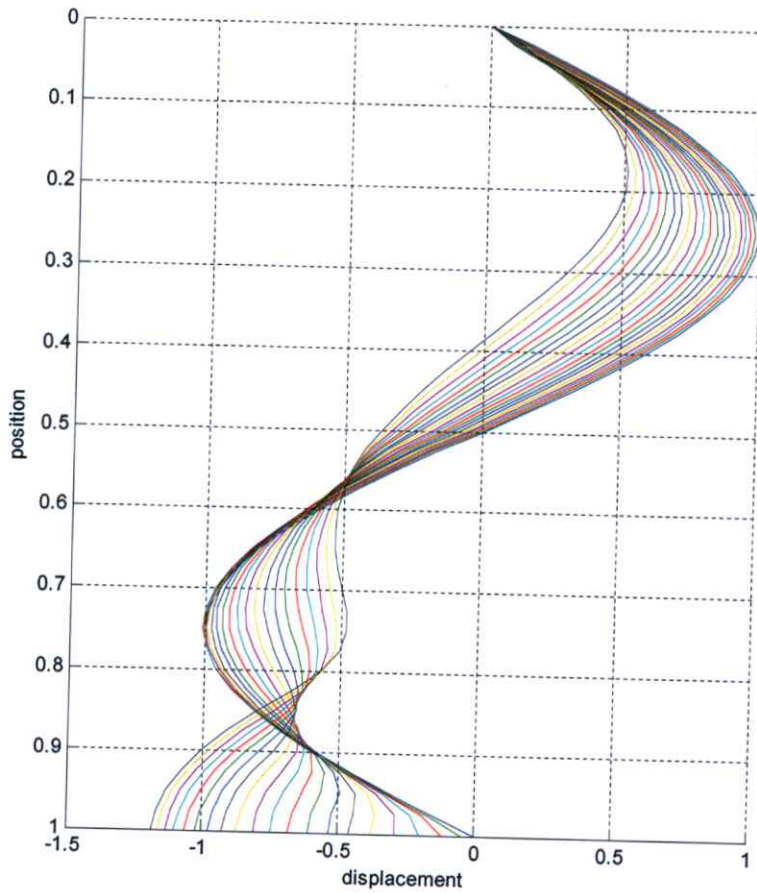
รูปที่ 4.38 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 38 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 39 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



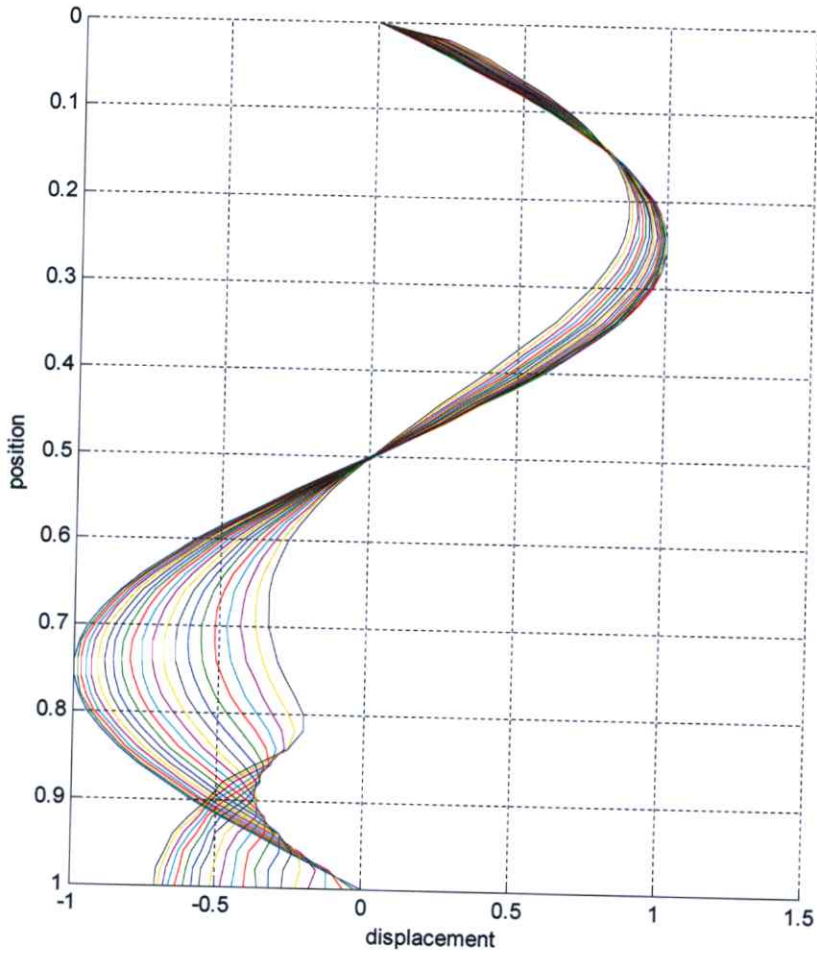
รูปที่ 4.39 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 39 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ -1

ตัวอย่างที่ 40 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน



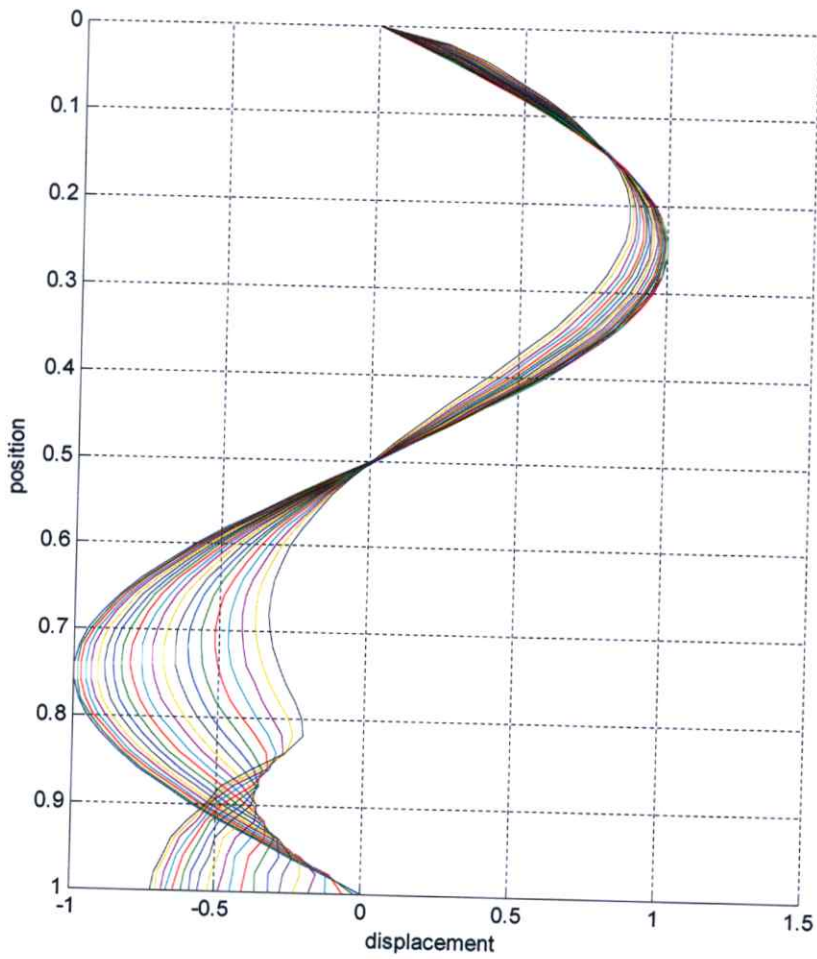
รูปที่ 4.40 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 40 โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ -1

4.9 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ใน
 รูป $f_2(x) = x$
 ตัวอย่างที่ 41 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



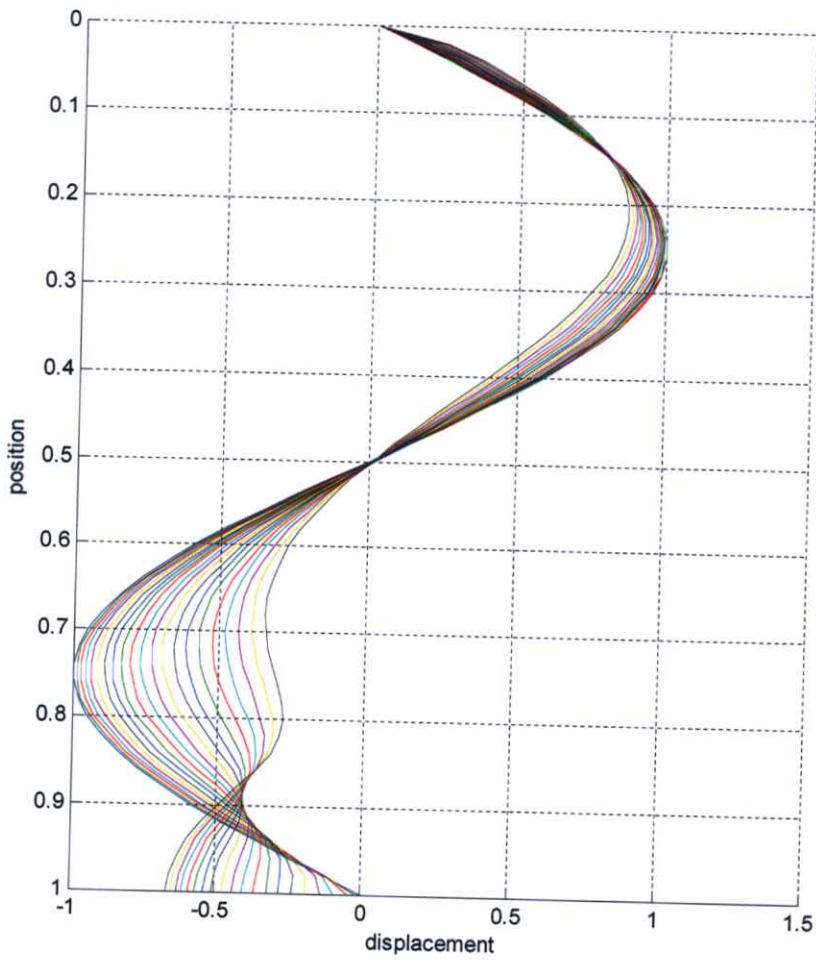
รูปที่ 4.41 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 41 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน
 และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 42 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



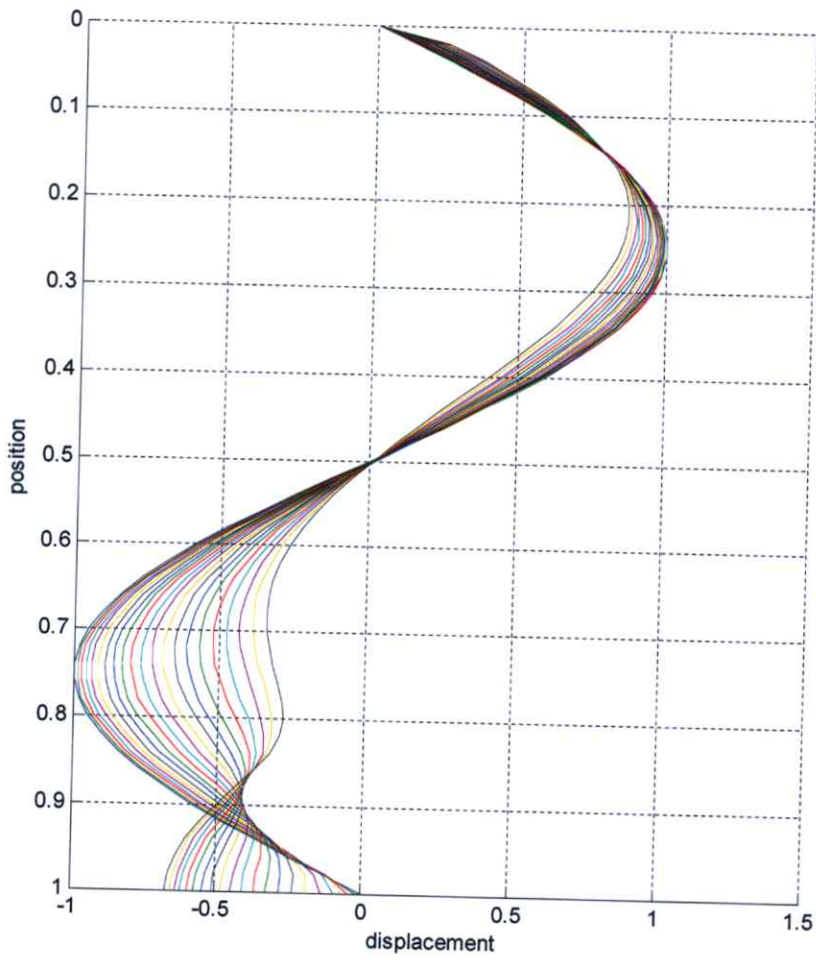
รูปที่ 4.42 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 42 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 43 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรแบบที่ 2



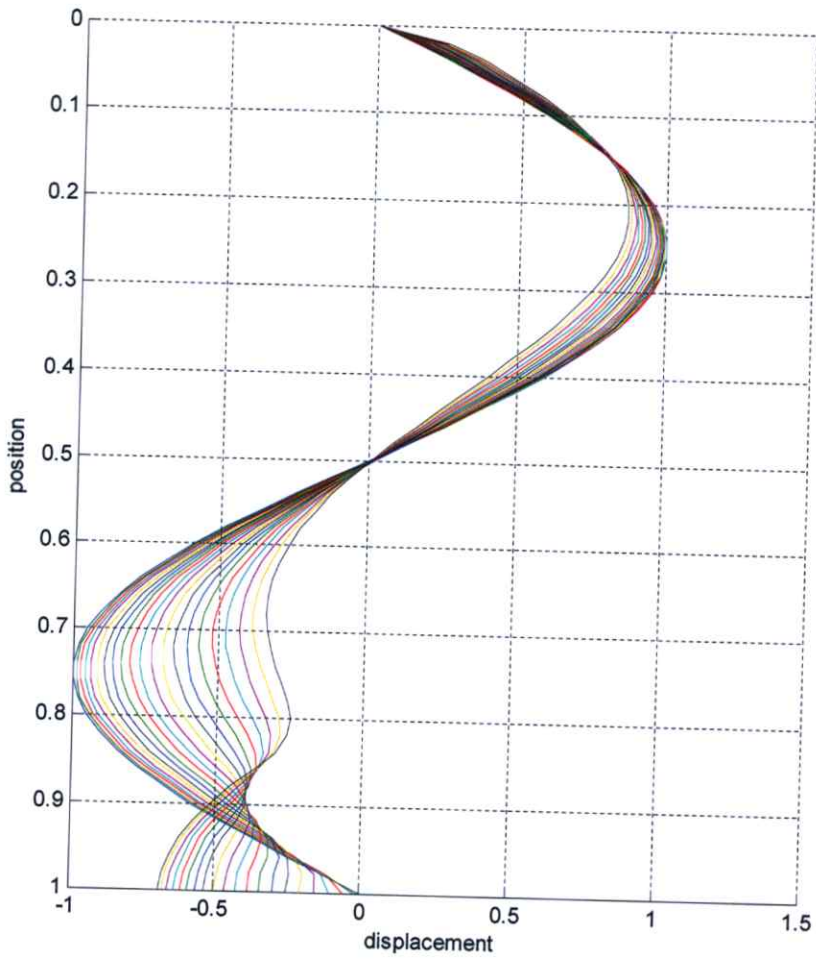
รูปที่ 4.43 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 43 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริมาตรแบบที่ 2
และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 44 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.44 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 44 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3
และความเร็วต้นคือ x

ตัวอย่างที่ 45 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน

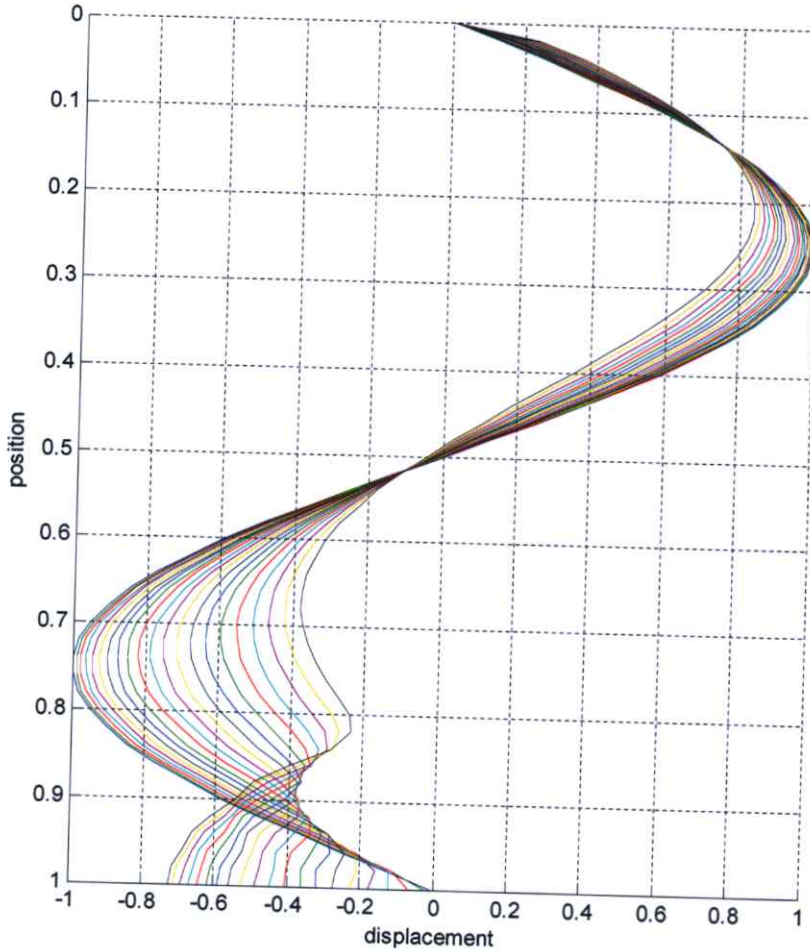


รูปที่ 4.45 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 45 โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ x

4.10 ตัวอย่างแสดงลักษณะกราฟผลเฉลยของปัญหาการสั่นทั้ง 5 วิธี โดยความเร็วต้นอยู่ใน

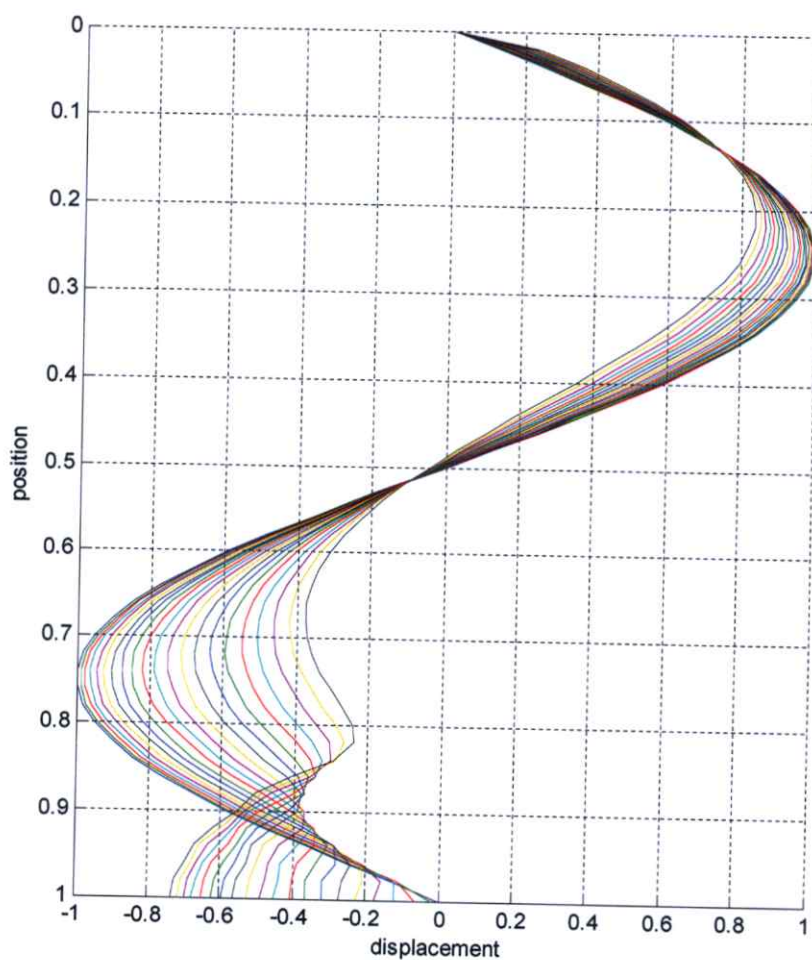
$$\text{รูป } f_2(x) = x^2$$

ตัวอย่างที่ 46 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน



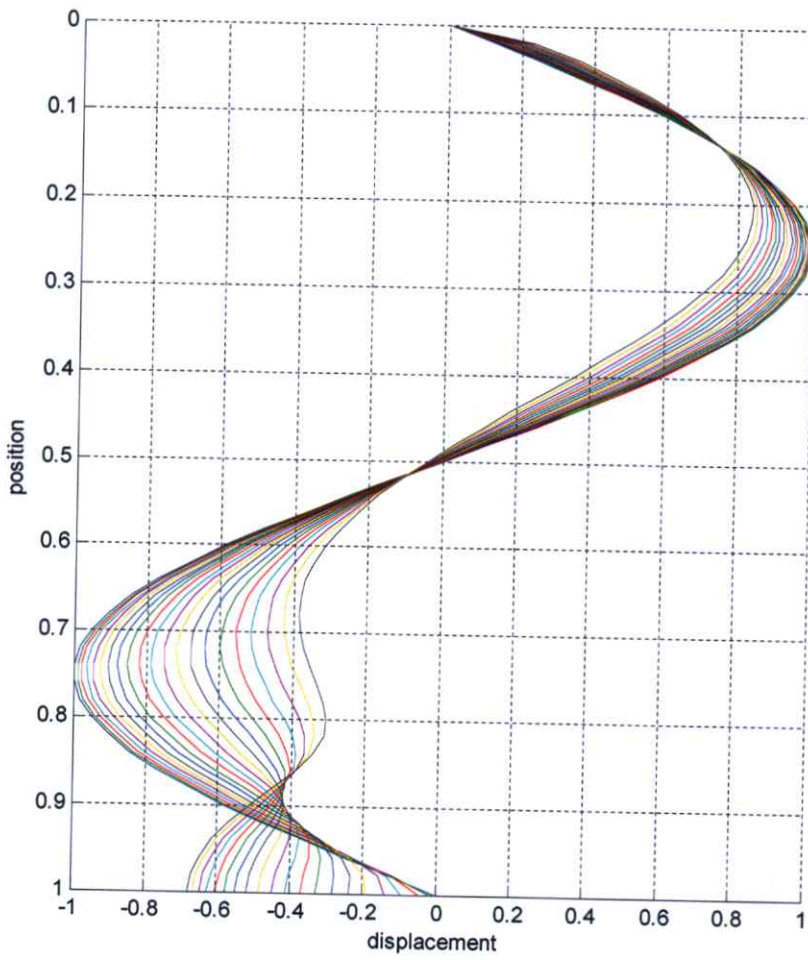
รูปที่ 4.46 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 46 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจน
และความเร็วต้นคือ x^2

ตัวอย่างที่ 47 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 1



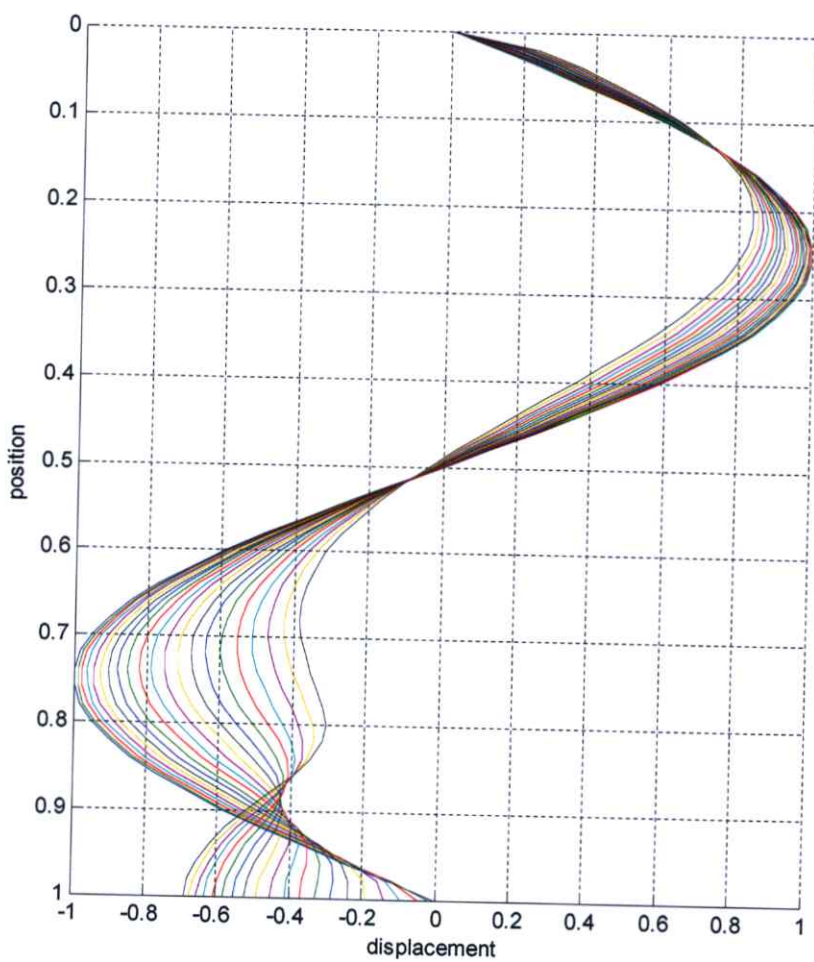
รูปที่ 4.47 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 47 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1
และความเร็วต้นคือ x^2

ตัวอย่างที่ 48 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 2



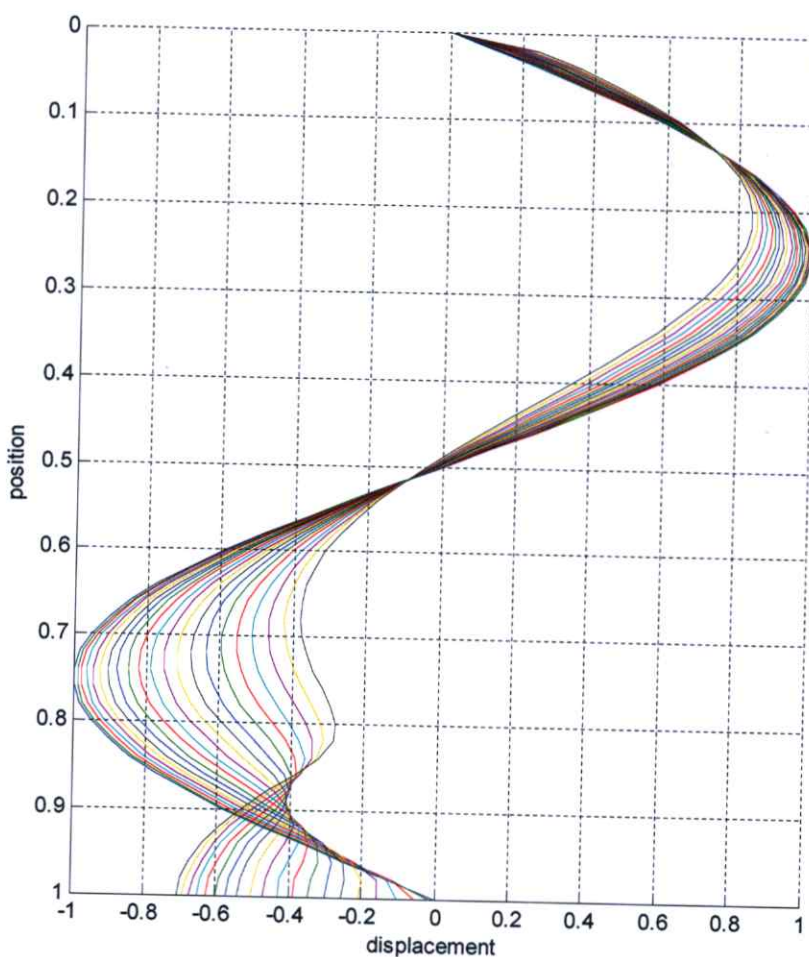
รูปที่ 4.48 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 48 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 และความเร็วต้นคือ x^2

ตัวอย่างที่ 49 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายรูปแบบที่ 3



รูปที่ 4.49 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 49 โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และความเร็วต้นคือ x^2

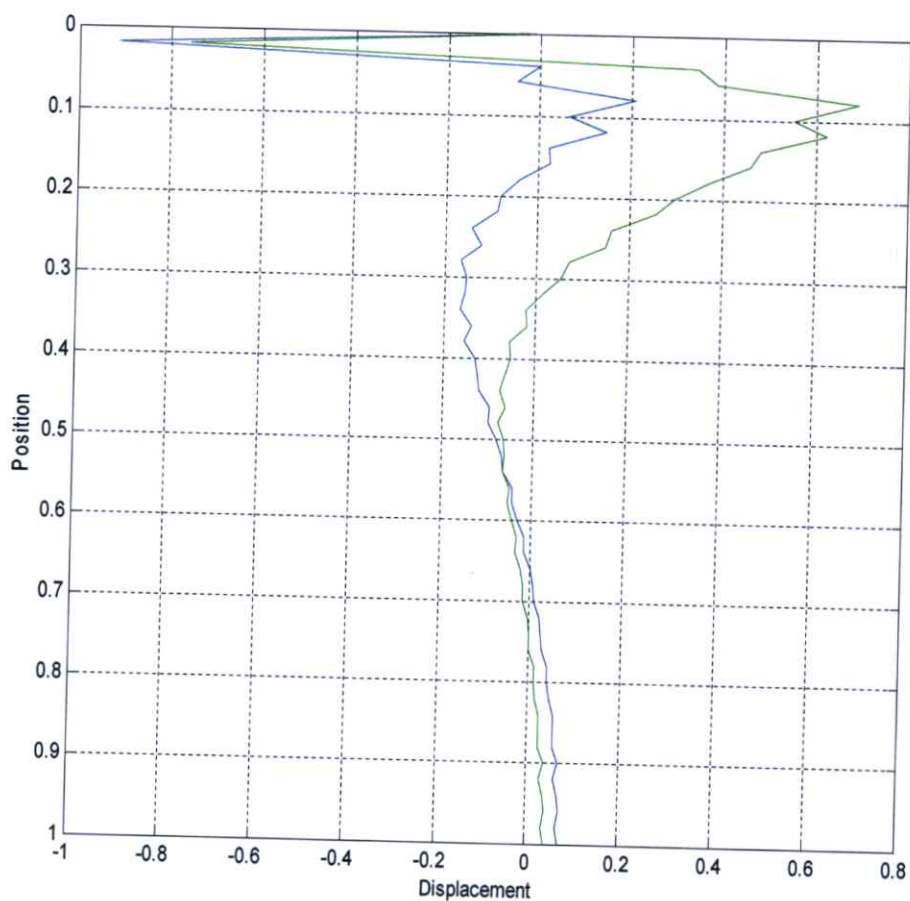
ตัวอย่างที่ 50 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน



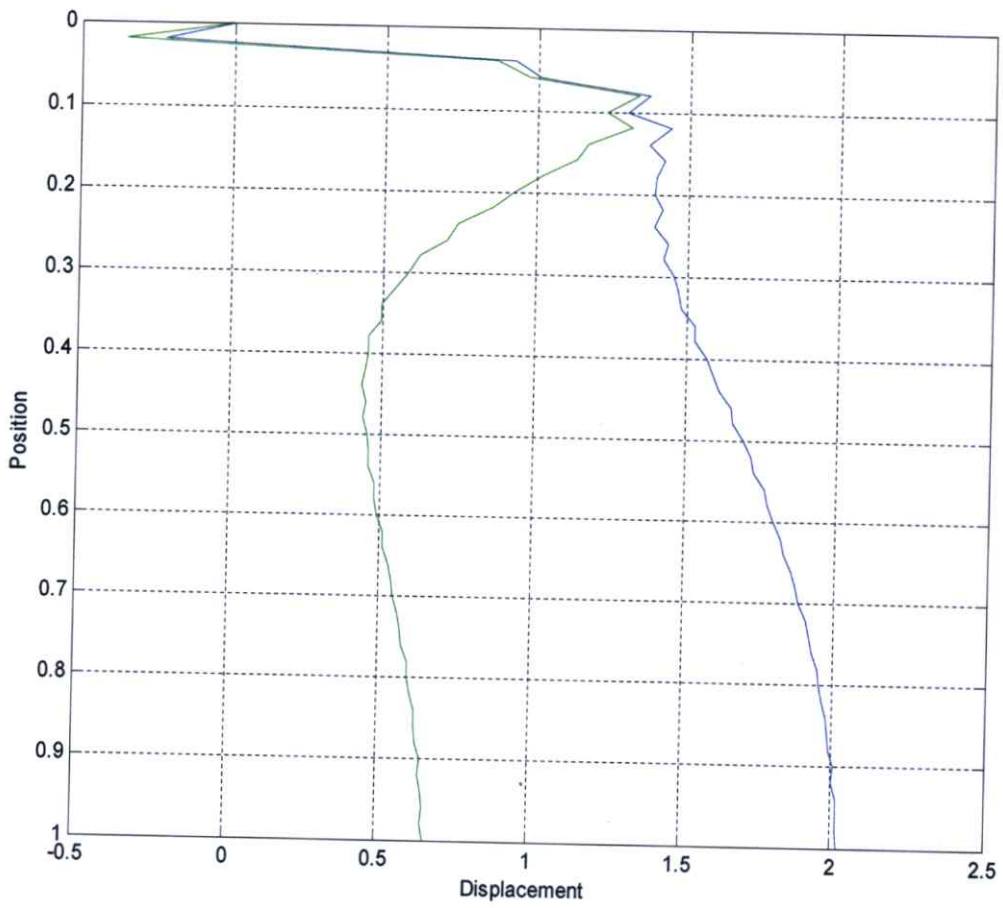
รูปที่ 4.50 กราฟของผลเฉลยในตัวอย่างที่ 50 โดยระเบียบวิธีแรงค์-นิโคลสัน
และความเร็วต้นคือ x^2

จากรูปที่ 4.26 - 4.50 จะเห็นว่าลักษณะการสั้นของกราฟที่มีแรงภายนอกมากจะทำนั้น แทบจะไม่มีผลต่อการเปลี่ยนแปลงของกราฟในช่วงเวลา $[0, 0.2]$

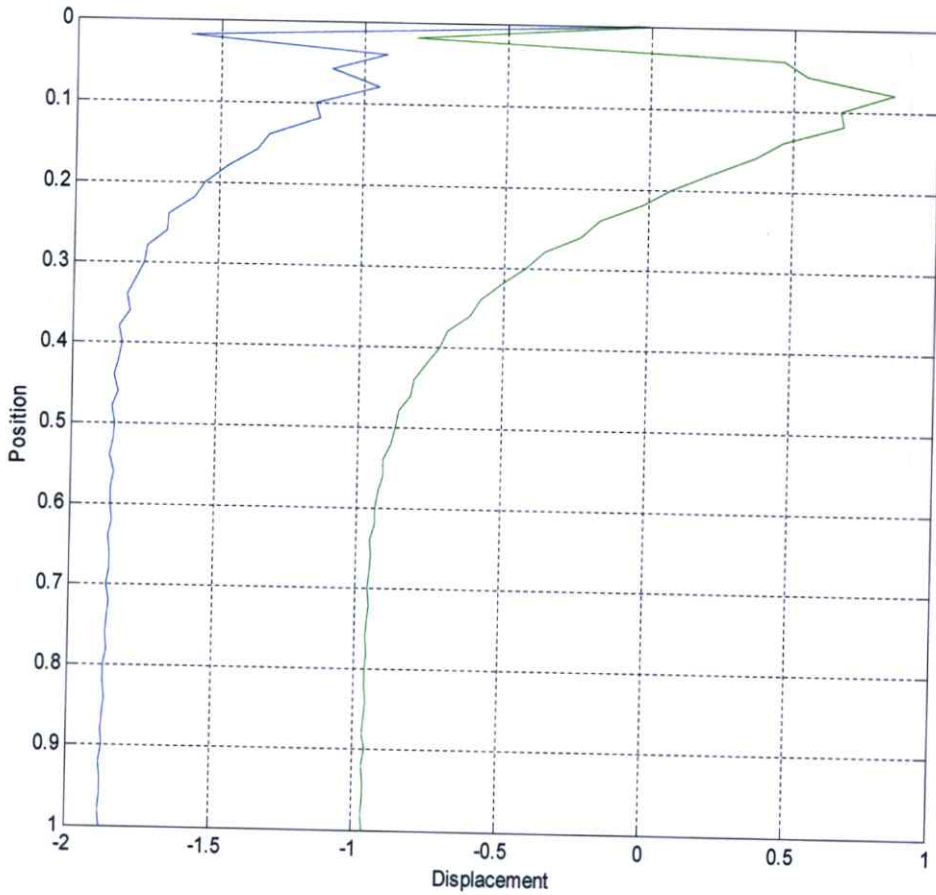
นอกจากนี้ผู้วิจัยได้ทำการคำนวณผลเฉลยต่อเนื่องไปจนถึงช่วงเวลา $k = 0(0.0025)2$ เพื่อเปรียบเทียบกราฟที่ไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกมากกระทำ ปรากฏผลดังนี้



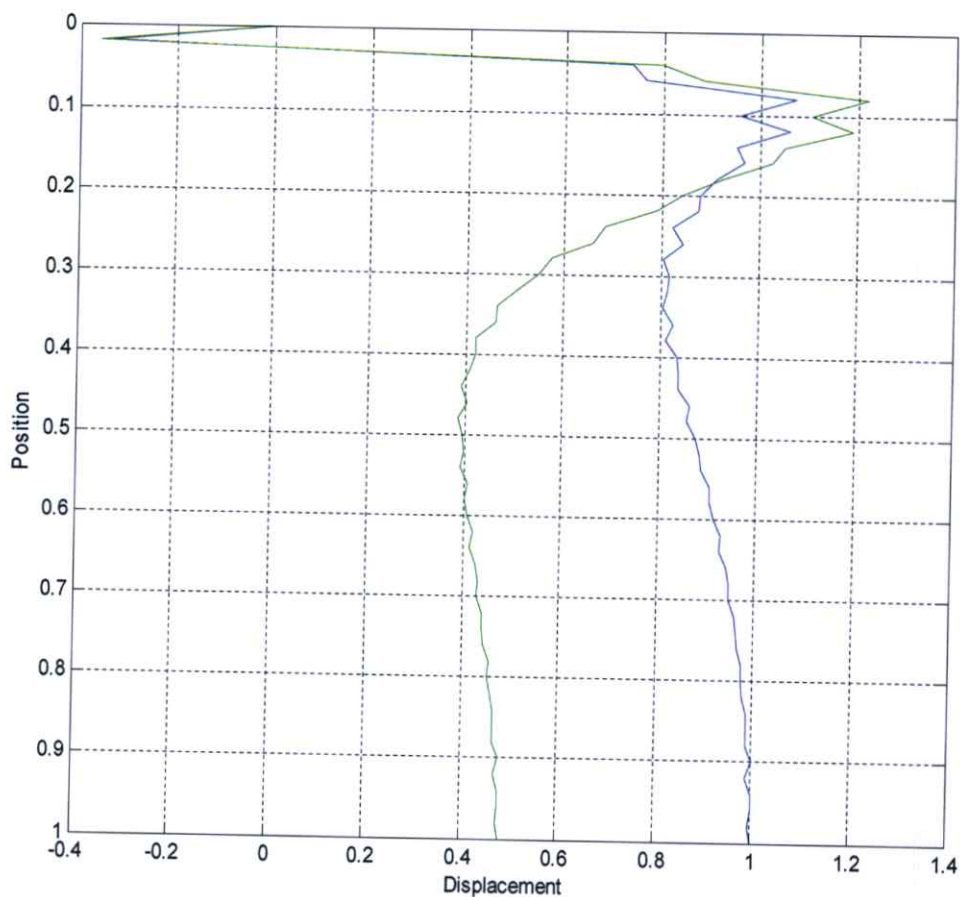
รูปที่ 4.51 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข
 ความเร็วต้นเป็นศูนย์ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกกระทำ
 (เส้นสีน้ำเงินแสดงการสั่นที่ไม่มีแรงภายนอก เส้นสีเขียวแสดงการสั่นที่มีแรงภายนอก)



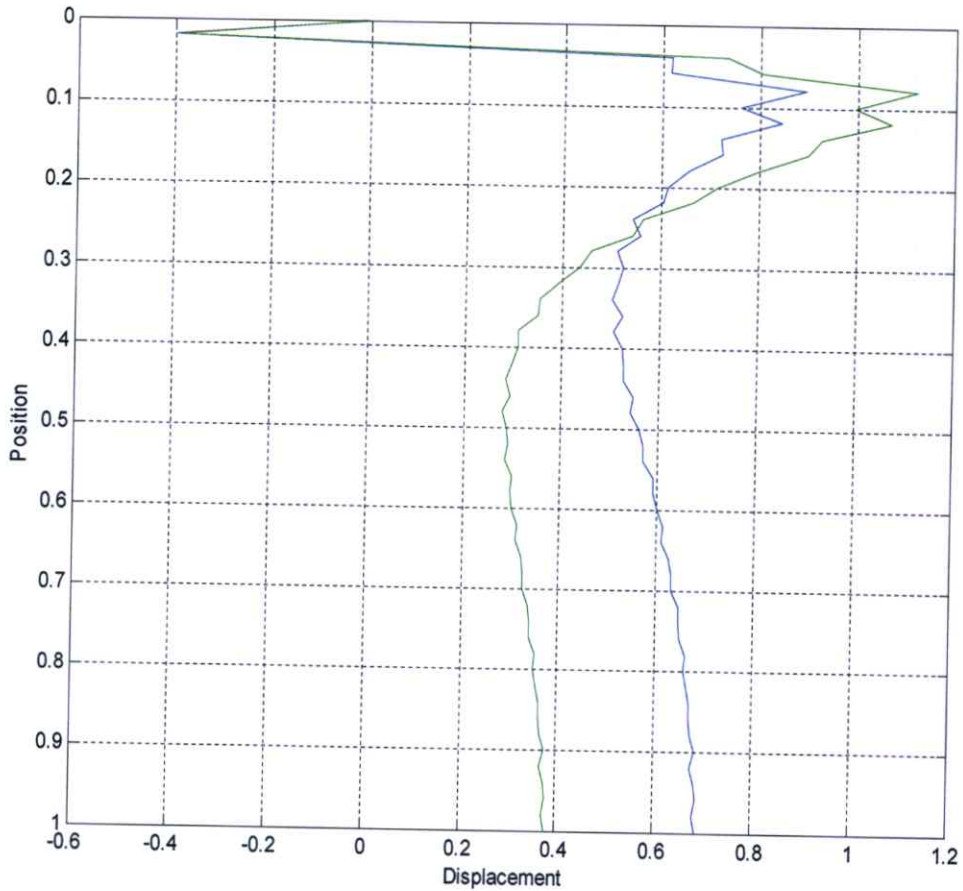
รูปที่ 4.52 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดเจนภายใต้เงื่อนไข
 ความเร็วต้นเป็น 1 ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกกระทำ
 (เส้นสีน้ำเงินแสดงการสั่นที่ไม่มีแรงภายนอก เส้นสีเขียวแสดงการสั่นที่มีแรงภายนอก)



รูปที่ 4.53 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข
 ความเร็วต้นเป็น -1 ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกกระทำ
 (เส้นสีน้ำเงินแสดงการสั่นที่ไม่มีแรงภายนอก เส้นสีเขียวแสดงการสั่นที่มีแรงภายนอก)



รูปที่ 4.54 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข
ความเร็วต้นเป็น x ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกมากระทำ
(เส้นสีน้ำเงินแสดงการสั่นที่ไม่มีแรงภายนอก เส้นสีเขียวแสดงการสั่นที่มีแรงภายนอก)



รูปที่ 4.55 กราฟเปรียบเทียบผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งภายใต้เงื่อนไข
ความเร็วต้นเป็น x^2 ในวินาทีที่ 2 เมื่อมีและไม่มีแรงภายนอกมากระทำ
(เส้นสีน้ำเงินแสดงการสั่นที่ไม่มีแรงภายนอก เส้นสีเขียวแสดงการสั่นที่มีแรงภายนอก)

จากรูปที่ 4.51 - 4.55 แสดงกราฟผลเฉลยโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้ง จะสังเกตเห็นว่า ลักษณะของการสั่นจะมีค่าแอมพลิจูดลดน้อยลงเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำเปรียบเทียบกับกรณีเมื่อไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

ตารางต่อไปผู้วิจัยได้กำหนดค่า $h = 0.05$ และ $k = 0.025$ เพื่อตรวจสอบค่าผลเฉลยเมื่อไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกมากกระทำในวินาทีที่ 20

x	$f_2(x) = 0$		$f_2(x) = 1$		$f_2(x) = -1$		$f_2(x) = x$		$f_2(x) = x^2$	
	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.65783	0.30892	-0.28167	-1.47887	1.59733	-0.7104	0.33119	-0.12969	0.52344	-0.0293
0.1	0.08583	0.01888	-1.14797	-1.39717	1.31963	0.09371	-0.38607	-0.2049	-0.14702	-0.27299
0.15	-0.27521	0.00388	-1.67657	-1.27466	1.12614	0.52275	-0.85555	0.05934	-0.59811	-0.03478
0.2	-0.96713	-0.34027	-2.48268	-1.0331	0.54841	0.67578	-1.63856	0.24719	-1.37474	0.04686
0.25	-0.73879	0.03097	-2.33671	-0.60744	0.85913	0.97668	-1.48919	0.81741	-1.2247	0.58426
0.3	-0.23208	0.35602	-1.88923	-0.41994	1.42506	1.09056	-1.0477	1.1314	-0.78151	0.9111
0.35	0.14324	0.31789	-1.55517	-0.64786	1.84165	0.8368	-0.72373	1.03187	-0.45185	0.88173
0.4	0.45098	0.13847	-1.27505	-1.0399	2.17701	0.4792	-0.45624	0.80837	-0.17565	0.72073
0.45	0.49799	-0.16878	-1.2458	-1.27099	2.24178	0.28572	-0.44366	0.57818	-0.15535	0.46914
0.5	0.40221	-0.45522	-1.35255	-1.35688	2.15698	0.23761	-0.56871	0.39611	-0.27343	0.23877
0.55	0.30857	-0.58751	-1.45269	-1.35996	2.06983	0.32514	-0.68682	0.31934	-0.38497	0.13577
0.6	0.04135	-0.73752	-1.72351	-1.37514	1.80621	0.41097	-0.97493	0.24299	-0.66767	0.02542
0.65	0.02795	-0.55536	-1.73866	-1.18213	1.79456	0.69949	-1.00644	0.47001	-0.69521	0.23523
0.7	0.00213	-0.36087	-1.76509	-0.97632	1.76934	0.9499	-1.04748	0.72441	-0.73326	0.46781
0.75	-0.00438	-0.17819	-1.77153	-0.77956	1.76278	1.13789	-1.06632	0.96635	-0.74979	0.68943
0.8	-0.07505	-0.10903	-1.84181	-0.69282	1.69171	1.18379	-1.14624	1.07668	-0.82753	0.79043
0.85	-0.06547	-0.01554	-1.83173	-0.64025	1.7008	1.19257	-1.14317	1.16986	-0.82253	0.89821
0.9	-0.04238	0.06828	-1.80821	-0.56263	1.72345	1.22342	-1.12494	1.25535	-0.80342	0.99601
0.95	0.04956	0.20565	-1.71598	-0.42297	1.8151	1.33146	-1.03625	1.39419	-0.71473	1.14427
1	-0.01226	0.13875	-1.77771	-0.51783	1.75318	1.22849	-1.09841	1.31185	-0.77621	1.07359

ตารางที่ 4.11 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบชัดแจ้งในวินาทีที่ 20 เมื่อไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกมากกระทำ ภายใต้อัตราความเร็วต้นเดียวกัน

x	$f_2(x) = 0$		$f_2(x) = 1$		$f_2(x) = -1$		$f_2(x) = x$		$f_2(x) = x^2$	
	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	0.72213	-0.10706	-0.38043	-0.84462	1.82468	-0.33873	0.33633	-0.77332	0.56384	-0.35627
0.1	0.04028	-0.20667	-1.40492	-0.49098	1.48548	0.51172	-0.51777	-0.66159	-0.23756	-0.35151
0.15	-0.45827	-0.16838	-2.09955	-0.38723	1.18302	0.70707	-1.14313	-0.41828	-0.84185	-0.04767
0.2	-1.12074	-0.25397	-2.8959	0.08436	0.65441	0.77617	-1.91321	-0.039	-1.60623	0.26479
0.25	-0.78925	0.23009	-2.66002	0.4013	1.08153	0.68639	-1.67228	0.49899	-1.3636	0.83249
0.3	-0.17335	0.58021	-2.11158	0.47081	1.76488	0.44942	-1.13074	0.75709	-0.81902	1.16662
0.35	0.25534	0.51441	-1.72898	0.18576	2.23967	0.01184	-0.76099	0.57586	-0.44232	1.09936
0.4	0.53066	0.23015	-1.48424	-0.30534	2.54555	-0.45833	-0.53198	0.22669	-0.20308	0.83278
0.45	0.58884	-0.08388	-1.44596	-0.54699	2.62364	-0.61107	-0.51358	-0.00496	-0.17581	0.58383
0.5	0.49641	-0.32214	-1.55129	-0.59311	2.54411	-0.58747	-0.63991	-0.1582	-0.29422	0.39004
0.55	0.36589	-0.40629	-1.69018	-0.57565	2.42195	-0.46326	-0.79872	-0.23292	-0.44557	0.29519
0.6	0.09762	-0.45336	-1.96385	-0.53558	2.15909	-0.29973	-1.09132	-0.24931	-0.7322	0.24945
0.65	0.06234	-0.20796	-2.00255	-0.36221	2.12723	-0.0134	-1.14733	-0.00284	-0.78354	0.4915
0.7	0.03904	0.05334	-2.02795	-0.16998	2.10603	0.22081	-1.18802	0.28887	-0.82073	0.78193
0.75	0.0224	0.27049	-2.04584	0.00385	2.09063	0.36042	-1.21878	0.54979	-0.84878	1.04608
0.8	-0.04966	0.36427	-2.1186	0.07864	2.01929	0.34928	-1.30145	0.67038	-0.929	1.18138
0.85	-0.06531	0.44289	-2.13466	0.09949	2.00404	0.2747	-1.32458	0.73105	-0.94994	1.27702
0.9	-0.01437	0.56035	-2.08395	0.19426	2.05522	0.27976	-1.27924	0.82873	-0.90364	1.40588
0.95	0.03075	0.64797	-2.03895	0.27454	2.10045	0.29893	-1.23752	0.89864	-0.86157	1.49921
1	0.03921	0.65846	-2.03053	0.26047	2.10895	0.26742	-1.22988	0.89152	-0.8536	1.50554

ตารางที่ 4.12 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 ในวินาทีที่ 20 เมื่อไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกมากกระทำ ภายใต้อัตราเร็วต้นเดียวกัน

x	$f_2(x) = 0$		$f_2(x) = 1$		$f_2(x) = -1$		$f_2(x) = x$		$f_2(x) = x^2$	
	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	-0.04305	0.00814	-0.75392	0.31973	0.66781	-0.40124	-0.39988	0.26635	-0.27585	0.36374
0.1	-0.04562	0.00725	-0.98615	0.42935	0.89492	-0.51322	-0.52375	0.31756	-0.35972	0.45036
0.15	-0.04147	0.00198	-1.11299	0.49966	1.03005	-0.56423	-0.59318	0.32532	-0.40636	0.47907
0.2	-0.03501	-0.0053	-1.19459	0.55387	1.12456	-0.58997	-0.63936	0.31606	-0.43722	0.48429
0.25	-0.02773	-0.01348	-1.2513	0.59919	1.19583	-0.6029	-0.6727	0.29907	-0.45938	0.47819
0.3	-0.02032	-0.02191	-1.29249	0.63863	1.25186	-0.60877	-0.69791	0.27864	-0.47608	0.4664
0.35	-0.01313	-0.03021	-1.32327	0.6736	1.29701	-0.61064	-0.71755	0.25707	-0.48903	0.45196
0.4	-0.00638	-0.03815	-1.34669	0.70483	1.33394	-0.61026	-0.73316	0.23569	-0.49928	0.43661
0.45	-0.00018	-0.04556	-1.36476	0.73271	1.3644	-0.60866	-0.74572	0.21529	-0.50751	0.42139
0.5	0.00539	-0.05235	-1.37883	0.75748	1.38961	-0.60649	-0.75591	0.19637	-0.51416	0.40695
0.55	0.01033	-0.05846	-1.38983	0.77931	1.41048	-0.60412	-0.76421	0.17921	-0.51957	0.39368
0.6	0.01461	-0.06385	-1.39846	0.79831	1.42768	-0.60179	-0.77096	0.16399	-0.52396	0.3818
0.65	0.01826	-0.06853	-1.40521	0.8146	1.44174	-0.59965	-0.77643	0.15078	-0.52751	0.37143
0.7	0.02131	-0.07248	-1.41046	0.82827	1.45307	-0.59776	-0.78082	0.13958	-0.53036	0.36261
0.75	0.02377	-0.07574	-1.41449	0.83946	1.46204	-0.59617	-0.78427	0.13038	-0.53261	0.35534
0.8	0.0257	-0.07832	-1.41751	0.84829	1.46891	-0.59489	-0.78692	0.12309	-0.53433	0.34957
0.85	0.02713	-0.08025	-1.41968	0.8549	1.47394	-0.59391	-0.78886	0.11763	-0.53559	0.34525
0.9	0.02809	-0.08158	-1.42113	0.85942	1.47732	-0.59324	-0.79017	0.11389	-0.53645	0.34228
0.95	0.02864	-0.08235	-1.42195	0.86201	1.47923	-0.59285	-0.79092	0.11176	-0.53694	0.34059
1	0.02881	-0.08259	-1.4222	0.86282	1.47982	-0.59273	-0.79115	0.11109	-0.53709	0.34005

ตารางที่ 4.13 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 ในวินาทีที่ 20 เมื่อไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกกระทำ ภายได้ความเร็วต้นเดียวกัน

x	$f_2(x) = 0$		$f_2(x) = 1$		$f_2(x) = -1$		$f_2(x) = x$		$f_2(x) = x^2$	
	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	-0.03723	0.02548	-0.8761	0.36142	0.80164	-0.65299	-0.45925	0.19728	-0.3128	0.40903
0.1	-0.04149	0.02334	-1.14897	0.49263	1.066	-0.82946	-0.60588	0.22687	-0.41265	0.50133
0.15	-0.03835	0.0151	-1.29858	0.57973	1.22189	-0.90961	-0.68882	0.22097	-0.46902	0.52906
0.2	-0.03215	0.00462	-1.39493	0.64834	1.33062	-0.94995	-0.74408	0.2011	-0.50645	0.53114
0.25	-0.0246	-0.0066	-1.46182	0.70648	1.41262	-0.96976	-0.78386	0.17507	-0.53325	0.52114
0.3	-0.01655	-0.01783	-1.5103	0.75754	1.4772	-0.97791	-0.81379	0.14666	-0.55328	0.50531
0.35	-0.00851	-0.02865	-1.54639	0.80309	1.52937	-0.97918	-0.83694	0.11792	-0.56867	0.48695
0.4	-0.00078	-0.03881	-1.57374	0.84399	1.57218	-0.97641	-0.85517	0.09006	-0.58069	0.46792
0.45	0.00645	-0.04818	-1.59472	0.88067	1.60761	-0.97138	-0.8697	0.06384	-0.59019	0.44934
0.5	0.01305	-0.05667	-1.61095	0.91339	1.63705	-0.96522	-0.88138	0.03971	-0.59777	0.43188
0.55	0.01897	-0.06422	-1.62356	0.94231	1.6615	-0.9587	-0.89079	0.01795	-0.60382	0.41594
0.6	0.02417	-0.07084	-1.63337	0.96756	1.68171	-0.95233	-0.89836	-0.00129	-0.60866	0.40174
0.65	0.02865	-0.07653	-1.64099	0.98926	1.69829	-0.94642	-0.90444	-0.01796	-0.61252	0.38939
0.7	0.03242	-0.08131	-1.64686	1.00752	1.71171	-0.94118	-0.90926	-0.03205	-0.61556	0.37892
0.75	0.0355	-0.08522	-1.65134	1.02248	1.72234	-0.93673	-0.91303	-0.04363	-0.61792	0.37031
0.8	0.03793	-0.0883	-1.65466	1.03429	1.73053	-0.93313	-0.91589	-0.05278	-0.61971	0.3635
0.85	0.03975	-0.09059	-1.65704	1.04313	1.73653	-0.93038	-0.91796	-0.05964	-0.621	0.3584
0.9	0.04098	-0.09216	-1.6586	1.04918	1.74057	-0.92849	-0.91935	-0.06434	-0.62187	0.3549
0.95	0.04169	-0.09306	-1.65948	1.05264	1.74287	-0.92739	-0.92014	-0.06702	-0.62235	0.35291
1	0.04191	-0.09334	-1.65975	1.05372	1.74358	-0.92705	-0.92038	-0.06786	-0.62251	0.35228

ตารางที่ 4.14 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 ในวินาทีที่ 20 เมื่อไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกมากกระทำ ภายใต้ความเร็วต้นเดียวกัน

x	$f_2(x) = 0$		$f_2(x) = 1$		$f_2(x) = -1$		$f_2(x) = x$		$f_2(x) = x^2$	
	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง	ไม่มีแรง	มีแรง
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.05	-0.05213	0.2395	-0.93749	0.02544	0.83323	-0.81427	-0.45545	0.20129	-0.29824	0.49394
0.1	-0.06936	0.26199	-1.23634	0.08206	1.09762	-0.97738	-0.61657	0.18119	-0.41115	0.55995
0.15	-0.0723	0.24113	-1.3977	0.14733	1.2531	-1.01341	-0.71138	0.11871	-0.47968	0.54697
0.2	-0.06583	0.2055	-1.49603	0.21491	1.36438	-1.00232	-0.77356	0.04435	-0.52476	0.50785
0.25	-0.05351	0.16478	-1.55846	0.28195	1.45145	-0.97107	-0.81606	-0.03123	-0.55506	0.4593
0.3	-0.03819	0.12295	-1.59875	0.34697	1.52237	-0.93149	-0.84598	-0.10337	-0.57575	0.40805
0.35	-0.02201	0.08181	-1.625	0.40905	1.58099	-0.88946	-0.86776	-0.16984	-0.59026	0.35717
0.4	-0.00644	0.04225	-1.64237	0.46761	1.62948	-0.84812	-0.88434	-0.22964	-0.60094	0.30823
0.45	0.00759	0.0048	-1.65417	0.52218	1.66934	-0.80914	-0.89758	-0.28238	-0.60932	0.26215
0.5	0.01962	-0.03018	-1.66251	0.57242	1.70175	-0.77344	-0.90869	-0.32811	-0.61636	0.21948
0.55	0.02952	-0.06236	-1.66875	0.61802	1.72778	-0.74148	-0.91833	-0.3671	-0.62259	0.18064
0.6	0.03736	-0.09147	-1.67366	0.65875	1.74838	-0.71343	-0.92687	-0.39981	-0.62829	0.14588
0.65	0.04337	-0.11726	-1.67771	0.69443	1.76444	-0.68932	-0.93445	-0.42678	-0.6335	0.11542
0.7	0.04782	-0.13955	-1.68111	0.72496	1.77675	-0.66906	-0.9411	-0.44856	-0.6382	0.08935
0.75	0.05101	-0.15823	-1.68396	0.75032	1.78598	-0.65252	-0.94677	-0.46575	-0.64232	0.06769
0.8	0.05322	-0.17325	-1.68628	0.77057	1.79273	-0.6395	-0.95141	-0.47888	-0.64575	0.05041
0.85	0.05469	-0.18466	-1.68807	0.78585	1.79745	-0.62979	-0.955	-0.48843	-0.64844	0.03737
0.9	0.05559	-0.19254	-1.68933	0.79637	1.80052	-0.62316	-0.95751	-0.49483	-0.65034	0.02839
0.95	0.05608	-0.19708	-1.69006	0.80242	1.80222	-0.61937	-0.95896	-0.49844	-0.65145	0.02323
1	0.05622	-0.19851	-1.69029	0.80431	1.80274	-0.61819	-0.95942	-0.49956	-0.65181	0.02162

ตารางที่ 4.15 แสดงการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน ในวินาทีที่ 20 เมื่อไม่มีแรงภายนอกและมีแรงภายนอกกระทำ ภายใต้ความเร็วต้นเดียวกัน

จากตารางที่ 4.11 – 4.15 จะสังเกตเห็นว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขทั้ง 5 วิธี ที่มีแรงภายนอกกระทำจะมีแอมพลิจูดคดน้อยลงกว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำ โดยจะเห็นค่าแอมพลิจูดที่น้อยลงอย่างชัดเจนทั้ง 5 วิธีเมื่อความเร็วต้นเป็น 1, -1, x และ x^2

การตรวจสอบความเสถียรภาพ

$$1) U_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)U_{m+1}^n - (4mp - 4)U_m^n + (2mp - p)U_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \right] \quad (4.1)$$

ในการตรวจสอบความเสถียรภาพผู้วิจัยได้กำหนดให้ไม่มีแรงภายนอกโดย $f(x, u(x, t)) = 0$ จะได้

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)U_{m+1}^n - (4mp - 4)U_m^n + (2mp - p)U_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} \right] \quad (4.2)$$

และทำการประมาณ U_m^{n-1} ด้วยผลต่างจำกัดย้อนหลังโดย $U_m^{n-1} = U_m^n - kf_2(x)$

ทั้งนี้สมมติความเร็วต้นเป็นศูนย์เพื่อง่ายต่อการจัดรูปจะได้

$$U_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)U_{m+1}^n - (4mp - 2)U_m^n + (2mp - p)U_{m-1}^n \right] \quad (4.3)$$

แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (4.3) จะได้

$$\tilde{U}_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)\tilde{U}_{m+1}^n - (4mp - 2)\tilde{U}_m^n + (2mp - p)\tilde{U}_{m-1}^n \right] \quad (4.4)$$

นำสมการ (4.3) ลบด้วย (4.4) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$Z_m^{n+1} = \frac{1}{2} \left[(2mp + p)Z_{m+1}^n - (4mp - 2)Z_m^n + (2mp - p)Z_{m-1}^n \right] \quad (4.5)$$

$$2Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta h m}$$

$$= (2mp + p)Ae^{\alpha t} \cdot e^{i\beta(m+1)h} - (4mp - 2)Ae^{\alpha t} \cdot e^{i\beta h m} + (2mp - p)Ae^{\alpha t} \cdot e^{i\beta(m-1)h}$$

$$2e^{\alpha t} = (2mp + p)e^{i\beta h} - (4mp - 2) + (2mp - p)e^{-i\beta h}$$

$$2e^{\alpha t} = 2mp(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) + p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) - 4mp + 2$$

$$2e^{\alpha t} = 4mp \cos(\beta h) + 2pi \sin(\beta h) - 4mp + 2$$

$$e^{\alpha t} = 2mp \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) + pi \sin(\beta h) - 2mp + 1$$

$$e^{\alpha t} = 1 - 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + pi \sin(\beta h)$$

$$|e^{\alpha t}| = \left| 1 - 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + pi \sin(\beta h) \right|$$

$$|\xi| = \left| 1 - 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + pi \sin(\beta h) \right|$$

$$|\xi|^2 = 1 - 8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 16m^2 p^2 \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + p^2 \sin^2(\beta h)$$

$$|\xi|^2 = 1 - 8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 16m^2 p^2 \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + p^2 (1 - \cos^2(\beta h))$$

$$|\xi|^2 = 1 - 8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 16m^2 p^2 \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + p^2 \left(1 - \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
|\xi|^2 &= 1 - 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) \\
&\quad + p^2 \left(1 - \left(1 - 4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right)\right) \\
|\xi|^2 &= 1 - 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + p^2 \left(4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 4 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right)\right) \\
|\xi|^2 &= 1 - 8mp + 16m^2 p^2 + p^2 (4 - 4) \\
|\xi|^2 &= 16m^2 p^2 - 8mp + 1 \\
|\xi| &= |4mp - 1|
\end{aligned}$$

จากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\begin{aligned}
|4mp - 1| &\leq 1 \\
-1 &\leq 4mp - 1 \leq 1 \\
4mp - 1 &\leq 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$2mp \leq 1$$

เนื่องจากค่า m เป็นค่าที่เปลี่ยนไปตามตำแหน่งของ x ซึ่งกำหนดโดย $m = 1, 2, 3, \dots, M$ เราจึงแทนค่า m ด้วย M เพื่อพิจารณากรณีที่ค่า m มากที่สุดที่เป็นไปได้ว่ายังมีค่าไม่เกิน 1 จะได้

$$2Mp \leq 1$$

เนื่องจาก $M = \frac{1}{h}$ และ $p = \frac{k^2}{h}$

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{k^2}{h}\right) &\leq 1 \\
\left(\frac{k}{h}\right)^2 &\leq \frac{1}{2} \\
\frac{k}{h} &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสมการ (4.1) ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

$$\begin{aligned}
2) \quad -pU_{m+1}^{n+1} + 2U_m^{n+1} + pU_{m-1}^{n+1} \\
= 2mpU_{m+1}^n + 4(1-mp)U_m^n + 2mpU_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t))
\end{aligned} \quad (4.6)$$

ในการตรวจสอบความเสถียรภาพผู้วิจัยได้กำหนดให้ไม่มีแรงภายนอกโดย $f(x, u(x, t)) = 0$ จะได้

$$-pU_{m+1}^{n+1} + 2U_m^{n+1} + pU_{m-1}^{n+1} = 2mpU_{m+1}^n + 4(1-mp)U_m^n + 2mpU_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} \quad (4.7)$$

และทำการประมาณ U_m^{n-1} ด้วยผลต่างจำกัดย้อนหลังโดย $U_m^{n-1} = U_m^n - kf_2(x)$

ทั้งนี้สมมติความเร็วต้นเป็นศูนย์เพื่อง่ายต่อการจัดรูปจะได้

$$-pU_{m+1}^{n+1} + 2U_m^{n+1} + pU_{m-1}^{n+1} = 2mpU_{m+1}^n + 2(1-2mp)U_m^n + 2mpU_{m-1}^n \quad (4.8)$$

แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (4.8) จะได้

$$-p\tilde{U}_{m+1}^{n+1} + 2\tilde{U}_m^{n+1} + p\tilde{U}_{m-1}^{n+1} = 2mp\tilde{U}_{m+1}^n + 2(1-2mp)\tilde{U}_m^n + 2mp\tilde{U}_{m-1}^n \quad (4.9)$$

นำสมการ (4.8) ลบด้วย (4.9) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$-pZ_{m+1}^{n+1} + 2Z_m^{n+1} + pZ_{m-1}^{n+1} = 2mpZ_{m+1}^n + 2(1-2mp)Z_m^n + 2mpZ_{m-1}^n \quad (4.10)$$

$$-pAe^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 2Ae^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta mh} + pAe^{\alpha(n+1)t} \cdot e^{i\beta(m-1)h}$$

$$= 2mpAe^{\alpha nt} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 2(1-2mp)Ae^{\alpha nt} \cdot e^{i\beta mh} + 2mpAe^{\alpha nt} \cdot e^{i\beta(m-1)h}$$

$$-pe^{\alpha t} \cdot e^{i\beta h} + 2e^{\alpha t} + pe^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta h} = 2mpe^{i\beta mh} + 2(1-2mp) + 2mpe^{-i\beta h}$$

$$e^{\alpha t} (-p \cdot e^{i\beta h} + 2 + pe^{-i\beta h}) = 2mp(e^{i\beta mh} + e^{-i\beta h}) + 2(1-2mp)$$

$$e^{\alpha t} (-p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + 2) = 2mp(e^{i\beta mh} + e^{-i\beta h}) + 2(1-2mp)$$

$$e^{\alpha t} (-2pi \sin(\beta h) + 2) = 4mp \cos(\beta h) + 2(1-2mp)$$

$$e^{\alpha t} (-2pi \sin(\beta h) + 2) = 4mp \left(1 - 2 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) + 2(1-2mp)$$

$$e^{\alpha t} (-2pi \sin(\beta h) + 2) = -8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2$$

$$e^{\alpha t} = \frac{-4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 1}{-pi \sin(\beta h) + 1}$$

$$|e^{\alpha t}| = \left| \frac{4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 1}{pi \sin(\beta h) - 1} \right|$$

$$|\xi| = \left| \frac{4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 1}{pi \sin(\beta h) - 1} \right|$$

จากเงื่อนไขการลู่ออกในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\left| \frac{4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 1}{pi \sin(\beta h) - 1} \right| \leq 1$$

$$\left| 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 1 \right| \leq |pi \sin(\beta h) - 1|$$

$$16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 1 \leq p^2 \sin^2(\beta h) + 1$$

$$16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq p^2 \left(4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 4 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right)$$

$$16m^2 p^2 - 8mp \leq p^2 (4 - 4)$$

$$16m^2 p^2 - 8mp \leq 0$$

$$2mp \leq 1$$

ดังนั้น

เนื่องจากค่า m เป็นค่าที่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งของ x ซึ่งกำหนดโดย $m=1,2,3,\dots,M$ เราจึงแทนค่า m ด้วย M เพื่อพิจารณากรณีที่ค่า m มากที่สุดที่เป็นไปได้ว่ายังมีค่าไม่เกิน 1 จะได้ว่า

$$2Mp \leq 1$$

เนื่องจาก $M = \frac{1}{h}$ และ $p = \frac{k^2}{h}$

$$2\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{k^2}{h}\right) \leq 1$$

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{k}{h} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

เพราะฉะนั้นสมการ (4.6) ดูเข้าอย่างมีเงื่อนไข

$$\begin{aligned} 3) \quad & -2mpU_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)U_m^{n+1} - 2mpU_{m-1}^{n+1} \\ & = pU_{m+1}^n + 4U_m^n - pU_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (4.11)$$

ในการตรวจสอบความเสถียรภาพผู้วิจัยได้กำหนดให้ไม่มีแรงภายนอกโดย $f(x, u(x, t)) = 0$ จะได้ว่า

$$-2mpU_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)U_m^{n+1} - 2mpU_{m-1}^{n+1} = pU_{m+1}^n + 4U_m^n - pU_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} \quad (4.12)$$

และทำการประมาณ U_m^{n-1} ด้วยผลต่างจำกัดย้อนหลังโดย $U_m^{n-1} = U_m^n - kf_2(x)$

ทั้งนี้สมมติความเร็วต้นเป็นศูนย์เพื่อง่ายต่อการจัดรูปจะได้

$$-2mpU_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)U_m^{n+1} - 2mpU_{m-1}^{n+1} = pU_{m+1}^n + 2U_m^n - pU_{m-1}^n \quad (4.13)$$

แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (4.13) จะได้ว่า

$$-2mp\tilde{U}_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)\tilde{U}_m^{n+1} - 2mp\tilde{U}_{m-1}^{n+1} = p\tilde{U}_{m+1}^n + 2\tilde{U}_m^n - p\tilde{U}_{m-1}^n \quad (4.14)$$

นำสมการ (4.13) ลบด้วย (4.14) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้ว่า

$$-2mpZ_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)Z_m^{n+1} - 2mpZ_{m-1}^{n+1} = pZ_{m+1}^n + 2Z_m^n - pZ_{m-1}^n \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} & -2mpAe^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 2(2mp+1)Ae^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta mh} - 2mpAe^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m-1)h} \\ & = pAe^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 2Ae^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta mh} - pAe^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta(m-1)h} \end{aligned}$$

$$-2mpe^{\alpha \ell} \cdot e^{i\beta h} + 2(2mp+1)e^{\alpha \ell} - 2mpe^{\alpha \ell} \cdot e^{-i\beta h} = pe^{i\beta h} + 2 - pe^{-i\beta h}$$

$$e^{\alpha \ell} (-2mpe^{i\beta h} + 2(2mp+1) - 2mpe^{-i\beta h}) = pe^{i\beta h} + 2 - pe^{-i\beta h}$$

$$e^{\alpha \ell} (-2mp(e^{\alpha \ell} + e^{-i\beta h}) + 2(2mp+1)) = p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + 2$$

$$e^{\alpha \ell} (-4mp \cos(\beta h) + 2(2mp+1)) = 2pi \sin(\beta h) + 2$$

$$e^{\alpha \ell} = \frac{2 + 2pi \sin(\beta h)}{4mp + 2 - 4mp \cos(\beta h)}$$

$$e^{\alpha \ell} = \frac{2 + 2pi \sin(\beta h)}{2 + 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}$$

$$e^{\alpha t} = \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)}$$

$$|e^{\alpha t}| = \left| \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \right|$$

$$|\xi| = \left| \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \right|$$

จากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้ว่า

$$\left| \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right)} \right| \leq 1$$

$$|1 + pi \sin(\beta h)| \leq \left| 1 + 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right|$$

$$1 + p^2 \sin^2(\beta h) \leq 1 + 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

$$1 + p^2 \left(4 \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 4 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) \right) \leq 1 + 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right)$$

$$1 + p^2 (4 - 4) \leq 1 + 8mp + 16m^2 p^2$$

$$8mp + 16m^2 p^2 \geq 0$$

ดังนั้น

$$2mp \geq -1$$

เพราะฉะนั้นสมการ (4.11) ลู่เข้าอย่างไม่มีเงื่อนไข

$$4) \quad \begin{aligned} & -2mpU_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)U_m^{n+1} - 2mpU_{m-1}^{n+1} \\ & = pU_{m+1}^n + 4U_m^n - pU_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} - 2k^2 f(x, u(x, t)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

ในการตรวจสอบความเสถียรภาพผู้วิจัยได้กำหนดให้ไม่มีแรงภายนอกโดย $f(x, u(x, t)) = 0$ จะได้ว่า

$$-2mpU_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)U_m^{n+1} - 2mpU_{m-1}^{n+1} = pU_{m+1}^n + 4U_m^n - pU_{m-1}^n - 2U_m^{n-1} \quad (4.17)$$

และทำการประมาณ U_m^{n-1} ด้วยผลต่างจำกัดย้อนหลังโดย $U_m^{n-1} = U_m^n - kf_2(x)$

ทั้งนี้สมมติความเร็วต้นเป็นศูนย์เพื่อง่ายต่อการจัดรูปจะได้

$$-2mpU_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)U_m^{n+1} - 2mpU_{m-1}^{n+1} = pU_{m+1}^n + 2U_m^n - pU_{m-1}^n \quad (4.18)$$

แทน $U_m^n \equiv \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (4.18) จะได้ว่า

$$-2mp\tilde{U}_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)\tilde{U}_m^{n+1} - 2mp\tilde{U}_{m-1}^{n+1} = p\tilde{U}_{m+1}^n + 2\tilde{U}_m^n - p\tilde{U}_{m-1}^n \quad (4.19)$$

นำสมการ (4.18) ลบด้วย (4.19) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้ว่า

$$-2mpZ_{m+1}^{n+1} + 2(2mp+1)Z_m^{n+1} - 2mpZ_{m-1}^{n+1} = pZ_{m+1}^n + 2Z_m^n - pZ_{m-1}^n \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
& -2mpAe^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 2(2mp+1)Ae^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta mh} - 2mpAe^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m-1)h} \\
& \quad = pAe^{\alpha n\ell} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 2Ae^{\alpha n\ell} \cdot e^{i\beta mh} - pAe^{\alpha n\ell} \cdot e^{i\beta(m-1)h} \\
& -2mpe^{\alpha\ell} \cdot e^{i\beta h} + 2(2mp+1)e^{\alpha\ell} - 2mpe^{\alpha\ell} \cdot e^{-i\beta h} = pe^{i\beta h} + 2 - pe^{-i\beta h} \\
& \quad e^{\alpha\ell} \left(-2mpe^{i\beta h} + 2(2mp+1) - 2mpe^{-i\beta h} \right) = pe^{i\beta h} + 2 - pe^{-i\beta h} \\
& \quad e^{\alpha\ell} \left(-2mp(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) + 2(2mp+1) \right) = p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + 2 \\
& \quad e^{\alpha\ell} \left(-4mp \cos(\beta h) + 2(2mp+1) \right) = 2pi \sin(\beta h) + 2 \\
& e^{\alpha\ell} \left(-4mp \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) + 2(2mp+1) \right) = 2pi \sin(\beta h) + 2 \\
& e^{\alpha\ell} \left(-4mp \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) + 2(2mp+1) \right) = 2pi \sin(\beta h) + 2 \\
& \quad e^{\alpha\ell} \left(8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 2 \right) = 2pi \sin(\beta h) + 2 \\
& \quad e^{\alpha\ell} = \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)} \\
& |e^{\alpha\ell}| = \left| \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)} \right| \\
& |\xi| = \left| \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)} \right|
\end{aligned}$$

จากเงื่อนไขการลู่อู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1 + pi \sin(\beta h)}{1 + 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right)} \right| \leq 1 \\
& |1 + pi \sin(\beta h)| \leq \left| 1 + 4mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right| \\
& 1 + p^2 \sin^2(\beta h) \leq 1 + 8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 16m^2 p^2 \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \\
& 1 + p^2 \left(4 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) - 4 \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) \leq 1 + 8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 16m^2 p^2 \sin^4 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \\
& 1 + p^2 (4 - 4) \leq 1 + 8mp + 16m^2 p^2 \\
& 8mp + 16m^2 p^2 \geq 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$2mp \geq -1$$

เพราะฉะนั้นสมการ (4.16) ลู่อู่เข้าอย่างไม่มีเงื่อนไข

$$\begin{aligned}
 & -p(2m+1)U_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)U_m^{n+1} + p(1-2m)U_{m-1}^{n+1} \\
 5) & = p(2m+1)U_{m+1}^n + 4(2-mp)U_m^n + p(2m-1)U_{m-1}^n - 4U_m^{n-1} - 4k^2 f(x, u(x, t)) \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

ในการตรวจสอบความเสถียรภาพผู้วิจัยได้กำหนดให้ไม่มีแรงภายนอกโดย $f(x, u(x, t)) = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
 & -p(2m+1)U_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)U_m^{n+1} + p(1-2m)U_{m-1}^{n+1} \\
 & = p(2m+1)U_{m+1}^n + 4(2-mp)U_m^n + p(2m-1)U_{m-1}^n - 4U_m^{n-1} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

และทำการประมาณ U_m^{n-1} ด้วยผลต่างจำกัดย้อนหลังโดย $U_m^{n-1} = U_m^n - kf_2(x)$

ทั้งนี้สมมติความเร็วต้นเป็นศูนย์เพื่อง่ายต่อการจัดรูปจะได้

$$\begin{aligned}
 & -p(2m+1)U_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)U_m^{n+1} + p(1-2m)U_{m-1}^{n+1} \\
 & = p(2m+1)U_{m+1}^n + 4(1-mp)U_m^n + p(2m-1)U_{m-1}^n \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

แทน $U_m^n \cong \tilde{U}_m^n$ ในสมการ (4.23) จะได้

$$\begin{aligned}
 & -p(2m+1)\tilde{U}_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)\tilde{U}_m^{n+1} + p(1-2m)\tilde{U}_{m-1}^{n+1} \\
 & = p(2m+1)\tilde{U}_{m+1}^n + 4(1-mp)\tilde{U}_m^n + p(2m-1)\tilde{U}_{m-1}^n \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

นำสมการ (4.23) ลบด้วย (4.24) แล้วจัดรูปโดยแทน $Z_m^n = U_m^n - \tilde{U}_m^n$ จะได้

$$\begin{aligned}
 & -p(2m+1)Z_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)Z_m^{n+1} + p(1-2m)Z_{m-1}^{n+1} \\
 & = p(2m+1)Z_{m+1}^n + 4(1-mp)Z_m^n + p(2m-1)Z_{m-1}^n \quad (4.25)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -p(2m+1)Ae^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 4(1+mp)Ae^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta mh} + p(1-2m)Ae^{\alpha(n+1)\ell} \cdot e^{i\beta(m-1)h} \\
 & = p(2m+1)Ae^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta(m+1)h} + 4(1-mp)Ae^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta mh} + p(2m-1)Ae^{\alpha n \ell} \cdot e^{i\beta(m-1)h}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -p(2m+1)e^{\alpha \ell} \cdot e^{i\beta h} + 4(1+mp)e^{\alpha \ell} + p(1-2m)e^{\alpha \ell} \cdot e^{-i\beta h} \\
 & = p(2m+1)e^{i\beta h} + 4(1-mp) + p(2m-1)e^{-i\beta h}
 \end{aligned}$$

$$e^{\alpha \ell} \left(-p(2m+1)e^{i\beta h} + 4(1+mp) + p(1-2m)e^{-i\beta h} \right)$$

$$= p(2m+1)e^{i\beta h} + 4(1-mp) + p(2m-1)e^{-i\beta h}$$

$$e^{\alpha \ell} \left(-2mp(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) - p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + 4(1+mp) \right)$$

$$= 2mp(e^{i\beta h} + e^{-i\beta h}) + p(e^{i\beta h} - e^{-i\beta h}) + 4(1-mp)$$

$$e^{\alpha \ell} \left(-4mp \cos(\beta h) - 2pi \sin(\beta h) + 4(1+mp) \right)$$

$$= 4mp \cos(\beta h) + 2pi \sin(\beta h) + 4(1-mp)$$

$$e^{\alpha \ell} \left(-4mp \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) - 2pi \sin(\beta h) + 4(1+mp) \right)$$

$$= 4mp \left(1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) \right) + 2pi \sin(\beta h) + 4(1-mp)$$

$$e^{\alpha \ell} \left(8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 4 - 2pi \sin(\beta h) \right) = -8mp \sin^2 \left(\frac{\beta h}{2} \right) + 4 + 2pi \sin(\beta h)$$

$$|e^{\alpha t}| = \frac{\left| -8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 + 2pi \sin(\beta h) \right|}{\left| 8mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 - 2pi \sin(\beta h) \right|}$$

$$|e^{\alpha t}| = \frac{\left| -4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 + pi \sin(\beta h) \right|}{\left| 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 - pi \sin(\beta h) \right|}$$

$$|\xi| = \frac{\left| -4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 + pi \sin(\beta h) \right|}{\left| 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 - pi \sin(\beta h) \right|}$$

จากเงื่อนไขการลู่เข้าในสมการที่ (2.97) จะได้

$$\frac{\left| -4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 + pi \sin(\beta h) \right|}{\left| 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 - pi \sin(\beta h) \right|} \leq 1$$

$$\left| -4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 + pi \sin(\beta h) \right| \leq \left| 4mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 2 - pi \sin(\beta h) \right|$$

$$16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) - 16mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 + p^2 \sin^2(\beta h)$$

$$\leq 16m^2 p^2 \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 16mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + 4 + p^2 \sin^2(\beta h)$$

$$-32mp \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) \leq 0$$

ดังนั้น

$$mp \geq 0$$

เพราะฉะนั้นสมการ (4.21) ลู่เข้าอย่างไม่มีเงื่อนไข

บทที่ 5

สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลวิจัย

ผู้วิจัยได้นำโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB มาช่วยในการหาผลเฉลยปัญหาการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง โดยกำหนดตำแหน่งเริ่มต้นของการสั่นเป็นตำแหน่งเดียวกันและให้ความเร็วเริ่มต้นของการสั่นที่แตกต่างกัน รวมถึงวิธีหาผลเฉลยทั้ง 5 วิธี สรุปผลจากกราฟผลเฉลยในกรณีต่างๆ ได้ดังนี้

การวิเคราะห์กราฟจากตัวอย่างในบทที่ 4 พบว่าวิธีหาผลเฉลยทั้ง 5 วิธีมีค่าใกล้เคียงกัน โดยแบ่งได้สองกลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบซัดแจนจ์และระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 1 และกลุ่มที่สองคือ ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 2 ระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแบบปริยายแบบที่ 3 และระเบียบวิธีเครงค์-นิโคลสัน โดยกลุ่มที่สองมีการสั่นที่ราบเรียบกว่ากลุ่มที่หนึ่ง

นอกจากนี้ยังพบว่าถ้ากำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่แล้วค่าแอมพลิจูดจะเพิ่มขึ้น ในขณะที่กำหนดความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันพหุนามแล้วค่าแอมพลิจูดจะลดลง เป็นแนวโน้มเดียวกันทั้ง 5 วิธี เมื่อเปรียบเทียบกับความเร็วต้นต้นที่เป็นศูนย์ ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชันความเร็วต้น	แอมพลิจูดเพิ่มขึ้น	แอมพลิจูดลดลง
1	✓	
-1	✓	
x		✓
x^2		✓

ตารางที่ 5.1 ตารางสรุปการเปรียบเทียบค่าแอมพลิจูดของกราฟผลเฉลยที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นเดียวกัน โดยเปรียบเทียบฟังก์ชันความเร็วต้นต่างๆ กับฟังก์ชันความเร็วต้นเป็นศูนย์

การวิเคราะห์แรงภายนอกพบว่า เมื่อกำหนดแรงภายนอกในรูป $f(x, u(x, t)) = u^3$ ปรากฏว่าแรงภายนอกแทบไม่มีผลต่อการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งในช่วงเวลา $k = 0(0.0025)0.2$ แต่ถ้าคำนวณต่อไปจนถึงช่วงวินาทีที่ 2 จะพบว่าแรงภายนอกมีผลต่อการสั่นของเส้นลวดอย่างชัดเจน ในทำนองเดียวกันนี้ผู้วิจัยได้ทำการเลือก $h = 0.02$, $k = 0.01$ แล้วเปรียบเทียบผลเฉลยในวินาทีที่ 20 พบว่าแรงภายนอกมีผลต่อการสั่นของเส้นลวดอย่างชัดเจน ซึ่งสอดคล้องกับ [4], [5] ผลเฉลยทั่วไปและผลเฉลยเชิงแบบฉบับภายใต้แรงภายนอกไม่เชิงเส้นที่มีการดูดซับแรง โดยจะสังเกตเห็นการสั่นที่มีแอมพลิจูดน้อยลง

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. งานวิจัยนี้สามารถนำไปพัฒนาและศึกษาต่อสำหรับปัญหาการสั้นในแนวตั้งภายใต้เงื่อนไขลักษณะอื่นๆเช่น กรณีของเส้นลวดมีมวลที่ไม่เป็นค่าคงที่ และมวลของเส้นลวดแปรผันตามความยาว
2. สามารถนำงานวิจัยนี้มาวิเคราะห์และเพิ่มปัจจัยที่มีผลต่อการสั้นของเส้นลวด เพื่อใช้ปรับปรุงวิธีวิเคราะห์เชิงตัวเลขให้ได้ค่าประมาณของผลเฉลยที่ดีขึ้น

เอกสารอ้างอิง

- [1] ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. “การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง” วารสารวิชาการ มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย 3 ,30: 101-111
- [2] A.R. Mitchell, Computational Methods in Partial Equations, Scotland, 1969
- [3] G.D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equation(third edition):Finite Difference Methods, New York 1985
- [4] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, Global solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string, Tokyo Journal of Mathematics 30, No. 2 (2007), 543-556.
- [5] J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, Global classical solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string, Tokyo Journal of Mathematics 31, No.2 (2008), 351-373.
- [6] J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, Simulation of suspended string equation, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.
- [7] N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov, Differential Equations of Mathematical Physics, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation : North-Holland Publ. Co, 1964.
- [8] William F. Ames, Numerical Methods for Partial Differential Equations(third edition), Atlanta, 1992

ภาคผนวก

แบบจำลองเชิงตัวเลขของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง
Numerical Simulation of Suspended String Vibration

คณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย^{1,2} และใจปอง เกษมสุวรรณ¹

Kanawoot Subklay^{1,2} and Jaipong Kasemsuwan¹

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้ได้แสดงแบบจำลองของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง และศึกษาผลเฉลยประมาณค่าเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบเขตของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง โดยใช้ระเบียบวิธีแครงคินิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) เปรียบเทียบกับระเบียบวิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method) จากงานวิจัยของ J. Kasemsuwan (2010) โดยกำหนดให้ตำแหน่งเริ่มต้นของเส้นลวดและความเร็วต้นของเส้นลวดเหมือนกัน และได้ข้อสรุปว่าผลเฉลยค่าประมาณจากทั้งสองวิธีมีค่าใกล้เคียงกัน โดยแสดงตารางเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขของการสั่นและกราฟเปรียบเทียบลักษณะการสั่นของเส้นลวดที่ได้จากวิธีทั้งสอง นอกจากนี้งานวิจัยนี้ยังได้แสดงการศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขเบื้องต้นของการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งเมื่อมีแรงภายนอกมากระทำกับเส้นลวดอีกด้วย

คำสำคัญ : สมการเส้นลวดในแนวตั้ง ผลเฉลยเชิงตัวเลข วิธีแครงคินิโคลสัน

ABSTRACT

This paper is to study an approximate numerical solution of the initial boundary value problem of the suspended string vibrating equation using the Crank-Nicolson method. The results are compared with those obtained from the finite difference method previously reported (J. Kasemsuwan, 2010). It is found that the approximate solutions obtained from both methods are in good agreement under the same initial shapes and initial velocity. The comparison results between these two methods are shown graphically and also summarized in tables. In addition, the vibration taking into account the nonlinear outer force is also investigated.

Key Words : Suspended String Equation, Numerical Solution, Crank-Nicolson Method

E-mail : darkenesis1@hotmail.com

¹ สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ

Department of Mathematics, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

² Centre of Excellence in Mathematics, CHE, Si Ayutthaya Rd., Bangkok 10400, Thailand

คำนำ

สมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งได้ถูกศึกษาโดย [1] และมีงานวิจัย [2]-[10] ได้ทำการศึกษาวិธีการพิสูจน์การมีอยู่จริงของผลเฉลยประเภทต่าง ๆ ตามที่ได้อธิบายไว้ใน [11] มีเพียงงานวิจัย [10] เท่านั้นที่ได้ศึกษาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นในแนวตั้งโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจำกัด โดยได้ข้อสรุปว่าแอมพลิจูดของการสั่นเพิ่มขึ้นเมื่อความเร็วต้นเป็นฟังก์ชันค่าคงที่และเป็นฟังก์ชันพหุนาม ในขณะที่แอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นและลดลงเพียงเล็กน้อยเมื่อความเร็วเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติ และไม่ว่าแอมพลิจูดของการสั่นจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงลักษณะของการสั่นก็ยังคงรักษารูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวด และเนื่องจากผลเฉลยวิเคราะห์ (Analytic Solution) ของสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้งอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ของผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันเบสเชลชนิดที่หนึ่งและสองทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ ในงานวิจัยนี้จึงนำเสนอขั้นตอนของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข โดยใช้ระเบียบวิธีแครงคินิโคลสันและนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงตัวเลขในงานวิจัย [10] พบว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มีค่าใกล้เคียงกัน

ระเบียบวิธีแครงคินิโคลสัน

งานวิจัยนี้ เป็นการศึกษาการสั่นในแนวตั้งของเส้นลวดที่ยึดหยุ่นและมีน้ำหนัก มีความหนาแน่นเอกกรูปลายาว a หน่วย ปลายด้านบนถูกตรึงให้อยู่กับที่ ส่วนปลายด้านล่างปล่อยอิสระแต่มีความชันคงที่ ปัญหาค่าเริ่มต้นและปัญหาค่าขอบเขตของสมการการสั่นถูกกำหนดโดย

$$\partial_t^2 u(x,t) - x \partial_x^2 u(x,t) - \partial_x u(x,t) + f(x,t,u) = 0, \quad (x,t) \in \Omega$$

$$u(0,t) = 0, \quad \partial_x u(a,t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \partial_t u(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0, a]$$

เมื่อ $u(x,t)$ แทนตำแหน่งของเส้นลวด ณ ตำแหน่ง x และเวลา t ใดๆ กำหนดให้ $\Omega = (0,a) \times (0,T)$ แทนโดเมนของการสั่นสมการที่นำไปใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ในการเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขในรูปที่ 1-3 นั้น ได้กำหนดให้เส้นลวดยาว 1 หน่วย รูปร่างเริ่มต้นของเส้นลวดเป็น $\sin 7x$ ($\phi(x) = \sin 7x$) แรงภายนอกเป็นศูนย์ ($f(x,t,u) = 0$) ประมาณค่า $\partial_t^2 u(x,t)$ ด้วยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมตรงกลาง ประมาณค่า $\partial_x^2 u(x,t)$ และ $\partial_t u(x,t)$ โดยระเบียบวิธีแครงคินิโคลสันด้วยสูตรต่อไปนี้

$$\begin{aligned} \text{กำหนดให้ } M &= \frac{1}{\Delta x} \text{ และ } N = \frac{1}{\Delta t} \text{ โดยที่ } m = 0, 1, 2, \dots, M \text{ และ } n = 0, 1, 2, \dots, N \text{ เมื่อ } p = \frac{k^2}{h} \\ &- p(2m+1)u_{m+1}^1 + 4(1+mp)u_m^1 + p(1-2m)u_{m-1}^1 = p(2m+1)u_{m+1}^0 + 4(1-mp)u_m^0 + p(2m-1)u_{m-1}^0 + 4k\psi(x) \\ &- p(2m+1)u_{m+1}^{n+1} + 4(1+mp)u_m^{n+1} + p(1-2m)u_{m-1}^{n+1} = p(2m+1)u_{m+1}^n + 4(2-mp)u_m^n + p(2m-1)u_{m-1}^n - 4u_m^{n-1} \\ &4(1+Mp)u_M^1 - 4Mpu_{M-1}^1 = 4(1-Mp)u_M^0 + 4Mpu_{M-1}^0 + 4kf_2(x) \\ &4(1+Mp)u_M^{n+1} - 4Mpu_{M-1}^{n+1} = 4(2-Mp)u_M^n + 4Mpu_{M-1}^n - 4u_M^{n-1} \end{aligned}$$

ผลการทดลองและวิจารณ์

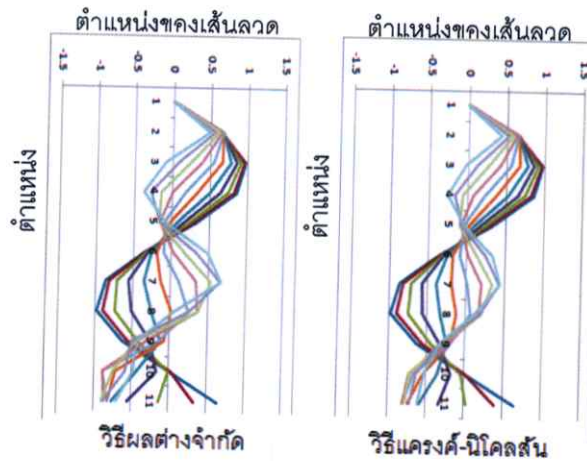
โปรแกรม MATLAB 7 และ Excel ถูกนำมาใช้เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยระเบียบวิธีแครงคินิโคลสัน และนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีผลต่างจำกัด จะได้ผลเฉลยใกล้เคียงกันดังนี้

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
0	0	0.64422	0.98545	0.86321	0.33499	-0.3508	-0.8716	-0.9825	-0.6313	0.01681	0.65699	
1	0.05	0	0.64896	0.96501	0.82463	0.30406	-0.3452	-0.818	-0.8986	-0.5594	0.03114	0.3369
2	0.1	0	0.65744	0.92395	0.74927	0.24563	-0.3317	-0.7125	-0.738	-0.4256	-0.0074	-0.1361
3	0.15	0	0.5677	0.86198	0.64077	0.16633	-0.3055	-0.5588	-0.5147	-0.2616	-0.1654	-0.5447
4	0.2	0	0.5769	0.77889	0.50457	0.07546	-0.2611	-0.3631	-0.2511	-0.1245	-0.4339	-0.7637
5	0.25	0	0.68146	0.67484	0.34798	-0.0157	-0.1928	-0.1352	0.018	-0.077	-0.715	-0.8178
6	0.3	0	0.67726	0.5506	0.17998	-0.095	-0.0967	0.1097	0.24444	-0.1472	-0.8849	-0.8205
7	0.35	0	0.65984	0.40796	0.0111	-0.1504	0.02796	0.3481	0.37556	-0.3007	-0.8828	-0.8554
8	0.4	0	0.62472	0.24995	-0.1471	-0.1716	0.17659	0.5469	0.37541	-0.4512	-0.7504	-0.904
9	0.45	0	0.56775	0.08118	-0.2827	-0.1515	0.33696	0.667	0.24814	-0.5102	-0.591	-0.8758
10	0.5	0	0.48543	-0.0921	-0.384	-0.0879	0.48776	0.6736	0.04675	-0.4442	-0.482	-0.7052

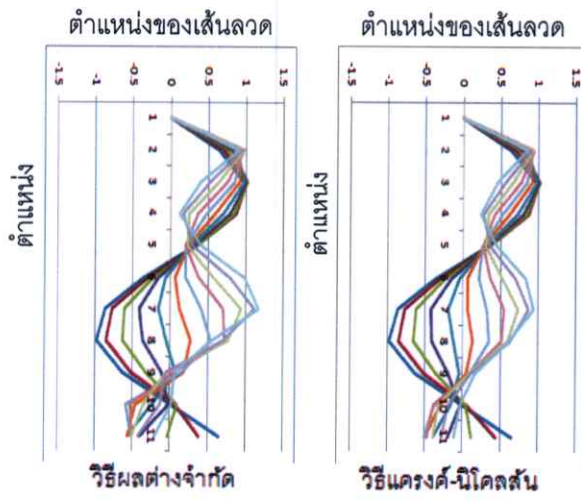
ตารางที่ 1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากวิธีผลต่างจำกัดเมื่อความเร็วต้นเป็นศูนย์

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	
0	0	0.6442	0.9855	0.8632	0.335	-0.3508	-0.872	-0.9825	-0.6313	0.0168	0.657	
1	0.1	0	0.6485	0.9649	0.8255	0.3057	-0.3441	-0.819	-0.9022	-0.5658	0.0092	0.3994
2	0.1	0	0.6555	0.9238	0.7529	0.2519	-0.3277	-0.717	-0.7528	-0.4553	-0.0477	0.0259
3	0.2	0	0.6631	0.8619	0.6498	0.1811	-0.2972	-0.57	-0.5533	-0.3332	-0.1743	-0.3277
4	0.2	0	0.6682	0.7795	0.5225	0.1025	-0.2486	-0.389	-0.3305	-0.236	-0.3514	-0.5846
5	0.3	0	0.6672	0.6775	0.3787	0.0263	-0.1789	-0.188	-0.1163	-0.1894	-0.5315	-0.7329
6	0.3	0	0.6563	0.5575	0.2276	-0.0372	-0.0882	0.0167	0.058	-0.1979	-0.6653	-0.7977
7	0.4	0	0.6315	0.4222	0.0791	-0.0795	0.0195	0.2019	0.1688	-0.2444	-0.7241	-0.8084
8	0.4	0	0.5893	0.2757	-0.057	-0.0947	0.1357	0.3462	0.2074	-0.299	-0.7072	-0.7798
9	0.5	0	0.5267	0.123	-0.1712	-0.0808	0.2476	0.4317	0.1818	-0.3331	-0.6332	-0.7131
10	0.5	0	0.4417	-0.0296	-0.2557	-0.0404	0.3399	0.4495	0.1139	-0.33	-0.5256	-0.6063

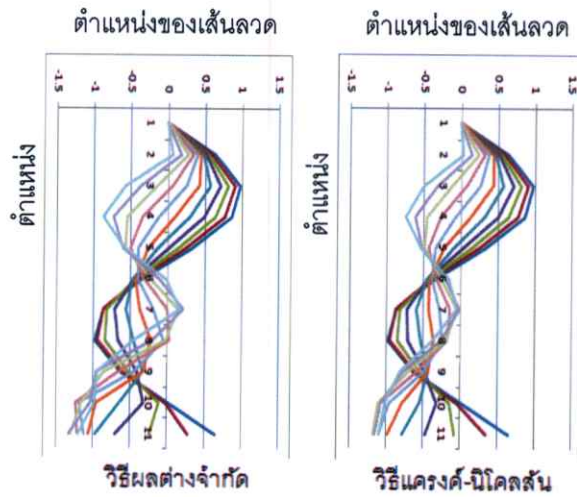
ตารางที่ 2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากวิธีเครงค์-นิโคลสันเมื่อความเร็วต้นเป็นศูนย์



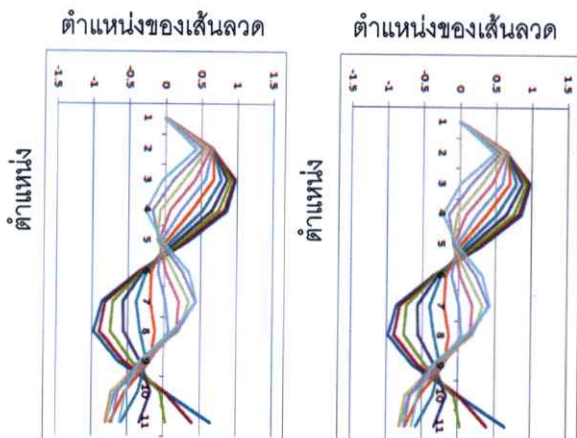
รูปที่ 1 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของทั้งสองวิธีเมื่อความเร็วต้นเป็นศูนย์



รูปที่ 2 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของทั้งสองวิธีเมื่อความเร็วต้นเป็น 1 เมตรต่อวินาที



รูปที่ 3 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของทั้งสองวิธีเมื่อความเร็วต้นเป็น -1 เมตรต่อวินาที



รูปที่ 4 กราฟแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีแครงค์-นิโคลสัน เมื่อไม่มีแรงและมีแรงภายนอกคือ $(-u^3)$

ผลสรุปและข้อเสนอแนะ

นอกจากระเบียบวิธีผลต่างจำกัดแล้ว ยังสามารถใช้ระเบียบวิธีเครงคินิโคลสัน (Crank-Nicolson Method) เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการการสั่นในแนวตั้งได้อีกด้วย และผลเฉลยประมาณค่าที่ได้ยังมีค่าใกล้เคียงกัน ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตเดียวกัน โดยวิธีเครงคินิโคลสันดีกว่าวิธีผลต่างจำกัด เนื่องจากค่าแอมพลิจูดที่ได้มีค่าน้อยกว่า โดยสังเกตจากกราฟจะเห็นลักษณะการสั่นอย่างราบรื่น (Smooth Vibration) และต่อเนื่องกว่า อีกทั้งวิธีเครงคินิโคลสันยังสามารถใช้กับโดเมนเท่าใดก็ได้ นอกเหนือจากนี้ในรูปภาพที่ 4 เมื่อกำหนดให้แรงภายนอกเป็น $-u^3$ จะสังเกตเห็นว่าตำแหน่งของคลื่นมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก เมื่อถูกแรงภายนอกมากกระทำ

กิตติกรรมประกาศ

ผลงานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนการวิจัยจากศูนย์ความเป็นเลิศด้านคณิตศาสตร์ สำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ประเทศไทย

เอกสารอ้างอิง

- ใจปอง เกษมสุวรรณ. 2553. "การศึกษาสมการการสั่นของเส้นลวดในแนวตั้ง"วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย 3 ,30: 101-111.
- N. S. Koshlyakov, E. V. Gliner and M. M. Smirnov, *Differential Equations of Mathematical Physics*, Moscow, 1962 (in Russian). English Translation : North-Holland Publ. Co, 1964.
- M. Yamaguchi, *Almost periodic oscillations of suspended string under Quasiperiodic linear force*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 303, No.2 (2005), 643-660.
- M. Yamaguchi, T. Nagai and K. Matsukane, *Forced oscillations of nonlinear damped equation of suspended string*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. 342, No.1 (2008), 89-107
- M. Yamaguchi, *Global smooth solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 342, No.2 (2008), 798-815.
- M. Yamaguchi, *Infinitely many periodic solutions of nonlinear equations of suspended strings*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA 51, No.2 (2008), 245-267.
- M. Yamaguchi, *Existence and regularity of periodic solutions of nonlinear equation of a suspended string*, FUNKCIALAJ EKVACIOJ-SERIO INTERNACIA 52, No.2 (2009), 281-300.
- J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, Tokyo Journal of Mathematics 30, No.2 (2007), 543-556.
- J. Wongsawasdi and M. Yamaguchi, *Global classical solutions of IBVP to nonlinear equation of suspended string*, , Tokyo Journal of Mathematics 31, No.2 (2008), 351-373.

- J. Kasemsuwan, *Exponential decay for nonlinear damped equation of suspended string*, Proceedings of 2009 International Symposium on Computing, Communication, and Control, 2009, 308-312.
- J. Kasemsuwan, P. Chitsakul and P. Chaisanit, *Simulation of suspended string equation*, The 3rd Thai-Japan International Academic Conference, 2010, 60-61.

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ - นามสกุล	นายคณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย
วัน เดือน ปีเกิด	28 มกราคม 2525
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลอนันต์มหิดล อ.เมือง จ.ลพบุรี
ที่อยู่ปัจจุบัน	302/855 ป.1260/9 ต.เขาพระงาม อ.เมือง จ.ลพบุรี 15160
ประวัติการศึกษา	ศึกษาศาสตร์บัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ (ทุนเร่งรัดพัฒนาผู้ที่มีความสามารถทางด้าน คณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย รุ่นที่ 7)
ปีที่สำเร็จการศึกษา	2546
อีเมล	darkenesis1@hotmail.com