ระเบียบวิธีผลต่างอันตะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองสำหรับปัญหาค่าขอบดีริชเลท

THE FINITE DIFFERENCE METHOD OF SECOND-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEMS

สุพัตรา สืบเทพ
อรรัตน์ โพธิ์ภักดีกูล
อารยา สายเทียน

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

ระเบียบวิธีผลต่างอันตะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองสำหรับปัญหาค่าขอบดิริชเลท

THE FINITE DIFFERENCE METHOD OF SECOND-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEMS

สุพัตรา สืบเทพ
อรรัตน์ โพธิ์ภักดีกูล
อารยา สายเทียน

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2558

THE FINITE DIFFERENCE METHOD OF SECOND-ORDER LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR DIRICHLET BOUNDARY VALUE PROBLEMS

SUPATRA SUEBTHEP
ORRARAT PHOPUKDEEGOOL
ARAYA SAITIEN

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIED MATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2015

หัวข้อปัญหาพิเศษ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองสำหรับปัญหาค่าขอบดิริชเลท
The Finite Difference Method of Second-Order Linear Ordinary Differential Equations for Dirichlet Boundary Value Problems

ชื่อนักศึกษา นางสาวสุพัตรา สืบเทพ รหัสนักศึกษา 55050157
นางสาวอรรัตน์ โพธิ์ภักดีกูล รหัสนักศึกษา 55010177
นางสาวอารยา สายเทียน รหัสนักศึกษา 55050192

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

ภาควิชา คณิตศาสตร์

ปีการศึกษา 2558

อาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฏฐ์ แจ่มศรี

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2558

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล ประธานกรรมการ	
ผศ.ดร.เดชา สมนะ กรรมการ	
ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฏฐ์ แจ่มศรี กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ระเบียบวิธีผลต่างอันตะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองสำหรับปัญหาค่าขอบดิริชเลท The Finite Difference Method of Second-Order Linear Ordinary Differential Equations for Dirichlet Boundary Value Problems
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุพัตรา สืบเทพ รหัสนักศึกษา 55050157 นางสาวอรรัตน์ โพธิ์ภักดีกูล รหัสนักศึกษา 55010177 นางสาวอารยา สายเทียน รหัสนักศึกษา 55050192
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา	2558
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฏฐ์ แจ่มศรี

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้ใช้วิธีเชิงตัวเลขในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองโดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ สำหรับปัญหาค่าขอบที่มีความถูกต้องแม่นยำถึงอันดับสี่ เนื่องจากปัญหาแต่ละปัญหาเหมาะสมกับแต่ละวิธีที่แตกต่างกัน ในที่นี้ผู้วิจัยได้แบ่งระเบียบวิธีผลต่างอันตะออกเป็น 3 วิธีย่อย คือ วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังและวิธีผลต่างสี่จุดกลาง ซึ่งใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย ผลลัพธ์ที่ได้จะถูกนำไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง

คำสำคัญ : ปัญหาค่าขอบ ผลเฉลยเชิงตัวเลข ผลเฉลยแม่นตรง ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Title	The Finite Difference Method of Second-Order Linear Ordinary Differential Equations for Dirichlet Boundary Value Problems
Students	Miss. Supatra Suebthep Student ID 55050157
	Miss. Orrarat Phopukdeegool Student ID 55050177
	Miss. Araya Saitien Student ID 55050192
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2015
Advisor	Asst.Prof.Dr.Kannanut Chamsri

Abstract

In this research, we use a numerical method for solving linear second order ordinary differential equation by using finite difference method with fourth order of accuracy. Since each problem is proper with difference methods. Here the finite difference method is divide into three difference approaches. Four-point forward difference method, four-point backward difference method and four-point central difference method. We use a mathematical program to find the solution. The numerical solutions are compared with analytical solution.

Keywords: Boundary Value Problem, Numerical Solution, Finite Difference Method, Ordinary Differential Equation

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี เนื่องจากได้รับความกรุณาจาก ผศ.ดร.กัญญ์ณณัฏฐ์ แจ่มศรี อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ ซึ่งได้ให้คำแนะนำและตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่าง ๆ มาโดยตลอด คณะผู้จัดทำรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาและกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ณ โอกาสนี้ด้วย

กราบขอบพระคุณ รศ.ดร.ภัคคินี ชิตสกุล และ ผศ.ดร.เดชา สมนะ ประธานและกรรมการสอบปัญหาพิเศษ ตลอดจนคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ที่คอยอบรมสั่งสอนและประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ต่าง ๆ ให้แก่คณะผู้จัดทำตลอดมา รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ทุกท่านที่คอยช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่าง ๆ

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ที่ช่วยสนับสนุนและห่วงใยด้วยดีเสมอมา ตลอดจนเพื่อน ๆ และท่านผู้เกี่ยวข้องที่มิได้กล่าวนามข้างต้น ซึ่งมีส่วนช่วยในการทำปัญหาพิเศษ จนบรรลุผลสำเร็จด้วยดี

สุพัตรา สืบเทพ
อรรัตน์ โพธิ์ภักดีกูล
อารยา สายเทียน

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ หน้า

สารบัญรูป

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหามากมายในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และศาสตร์สาขาอื่น ๆ รวมทั้งกฎธรรมชาติ สามารถอธิบายได้ในรูปของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ โดยที่ปัญหาหรือกฎเหล่านี้เป็นที่สนใจส่วนใหญ่แล้วจะเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลง ซึ่งจะสามารถอธิบายได้เป็นอย่างดีด้วยสมการที่แสดงการเปลี่ยนแปลงของปริมาณนั้น ๆ นั่นคือ สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์สามารถจำแนกตามประเภทของตัวแปรอิสระได้เป็น 2 ประเภท คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียว เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และตัวแปรอิสระมีมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการเชิงอนุพันธ์บางปัญหายากสำหรับการหาผลเฉลยจริงหรือไม่สามารถหาผลเฉลยได้จึงต้องใช้วิธีเชิงตัวเลข ในที่นี้จะกล่าวถึงระเบียบวิธีผลต่างอันตะในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสี่

ในทางคณิตศาสตร์ระเบียบวิธีผลต่างอันตะเป็นวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการประมาณค่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ในการศึกษานี้ได้สนใจเฉพาะการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง โดยวิธีการหาผลเฉลย คือ แทนค่าอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองด้วยอนุกรมเทย์เลอร์แล้วสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ ในขั้นตอนสุดท้ายทำการเปรียบเทียบผลเฉลยจริงกับผลเฉลยเชิงตัวเลขและวิเคราะห์ค่าคลาดเคลื่อนเพื่อให้เห็นว่าวิธีการหาผลเฉลยมีประสิทธิภาพและถูกต้องแม่นยำ

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองที่มีความถูกต้องแม่นยำอันดับสี่
2) สร้างขั้นตอนวิธีทางคณิตศาสตร์สำหรับหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) สมการเชิงอนุพันธ์ที่ศึกษาเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองที่มีเงื่อนไขขอบแบบดิริชเลท
2) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ศึกษาเป็นสมการที่ศึกษาบนโดเมนแบบ 1 มิติ โดยที่ $-\infty < a \le x \le b < \infty$
3) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่
4) ผลเฉลยที่ได้มีเพียงคำตอบเดียวและสามารถหาผลเฉลยจริงได้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ศึกษาวิธีเชิงตัวเลข โดยเฉพาะระเบียบวิธีผลต่างอันตะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง
2) สามารถนำความรู้ทางด้านวิธีเชิงตัวเลขมาใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองได้
3) ความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับโปรแกรมทางคณิตศาสตร์ จากการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง
4) สามารถใช้เป็นพื้นฐานสำหรับงานวิจัยขั้นสูงต่อไป

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1) กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ
2) ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา
3) ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองด้วยวิธีเชิงตัวเลข คือ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ
4) นำความรู้และวิธีการที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองและประยุกต์ใช้วิธีการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์
5) สรุปผลงานวิจัย
6) จัดทำปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งนำเสนองานวิจัย

1.6 ระยะเวลาการดำเนินงาน

12 เดือน

ตารางที่ 1.1 ระยะเวลาในการดำเนินงานตามแผนงาน

ขั้นตอนการดำเนินงาน/ ระยะเวลา	ระยะเวลาในการดำเนินงาน											
	ปี พ.ศ. 2558							ปี พ.ศ. 2559				
	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
1.กำหนดหัวข้อปัญหาพิเศษ												
2.ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา												
3.ศึกษาการหาผลเฉลยด้วยวิธีเชิงตัวเลข คือ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ												
4.นำความรู้และวิธีการที่เกี่ยวข้องมาใช้ในการหาผลเฉลย												
5.ประยุกต์ใช้วิธีการหาผลเฉลยด้วยโปรแกรมทางคณิตศาสตร์												
6.สรุปผลการวิจัย												
7.จัดทำปัญหาพิเศษ พร้อมทั้งนำเสนอ												

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญและปัญหาค่าขอบ
(Ordinary Differential Equations and Boundary Value Problem)

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยตัวแปรอิสระเพียงตัวแปรเดียว

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น (Linear Ordinary Differential Equations) คือ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่สามารถเขียนได้ในรูป $a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$ โดยที่ $a_0(x)\neq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง I ซึ่ง $a_0(x),a_1(x),\ldots,a_{n-1}(x),a_n(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์ และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญดังกล่าวว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ** n

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

$$y''=f(x,y,y') \quad \text{สำหรับ} \quad a<x<b$$

ที่มีเงื่อนไขขอบ คือ

$$y(a)=\alpha \quad \text{และ} \quad y(b)=\beta$$

จะเรียกปัญหานี้ว่า **ปัญหาค่าขอบ**

ปัญหาค่าขอบ (Boundary Value Problem)

ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในทางประยุกต์มักจะประกอบด้วย สมการเชิงอนุพันธ์สามัญและเงื่อนไขประกอบ เพื่อหาผลเฉลยเฉพาะสำหรับเงื่อนไขนั้น ซึ่งในสมการนั้นมีตัวแปร y เป็นตัวแปรตามและตัวแปร x เป็นตัวแปรอิสระ ถ้าปัญหาของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์มีเงื่อนไขประกอบเกี่ยวข้องกับ x สองค่า อย่างเช่น พิจารณาช่วงปิด $[a,b]$ เงื่อนไขประกอบที่เกี่ยวข้อง $y(a)=\alpha$ เรียกว่าเงื่อนไขขอบซ้ายและ $y(b)=\beta$ เรียกว่าเงื่อนไขขอบขวา เราจะเรียกปัญหาที่ประกอบด้วยเงื่อนไขดังกล่าวนี้ว่า **ปัญหาค่าขอบ**

เงื่อนไขขอบแบ่งออกเป็น 3 แบบใหญ่ ๆ คือ

1) $y(a)=\alpha$ และ $y(b)=\beta$

เป็นเงื่อนไขขอบที่ประกอบด้วยค่าของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เรียกว่า **เงื่อนไขขอบดิริชเลท** (Dirichlet Boundary Condition)

2) $y'(a)=\alpha$ และ $y'(b)=\beta$

เป็นเงื่อนไขขอบประกอบด้วยอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เรียกว่า **เงื่อนไขขอบนอยมันน์** (Neumann Boundary Condition)

3) $\alpha_1 y(a)+\alpha_2 y'(a)=\alpha_3$

$\beta_1 y(b)+\beta_2 y'(b)=\beta_3$

เป็นผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันไม่ทราบค่าและอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เรียกว่า **เงื่อนไขขอบโรบิน (Robin Boundary Condition)**

2.2 การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

การศึกษาวิธีเชิงตัวเลข อนุกรมเทย์เลอร์นิยมนำมาใช้ในการประยุกต์หาค่าประมาณของฟังก์ชัน โดยจะมีการเพิ่มพจน์เข้าไปเรื่อย ๆ เพื่อให้ฟังก์ชันมีค่าเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่งอย่างรวดเร็ว แต่ก่อนที่จะศึกษาการประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ควรทราบความรู้พื้นฐานดังต่อไปนี้

2.2.1 อนุกรมเทย์เลอร์ พหุนามเทย์เลอร์และทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

<u>**นิยาม**</u> 2.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง f และอนุพันธ์ทุกอันดับของ f มีค่าที่จุด a อนุกรมกำลังในรูป $f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด** a และเมื่อ $a=0$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า **อนุกรมแมคลอริน**

<u>หมายเหตุ</u> เมื่อให้ $f^{(0)}(a)=f(a)$ เราจะเขียนอนุกรมเทย์เลอร์ในรูปแบบทั่วไปได้เป็น $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

<u>**นิยาม**</u> 2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด $x=a$ ถึงอันดับที่ n เรากล่าวว่า $P_n(x)$ เป็น **พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f กระจายรอบจุด** $x=a$ ก็ต่อเมื่อ

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

และสามารถเขียนได้ในรูป $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

ในกรณีที่ $a=0$ เราอาจเรียกพหุนามเทย์เลอร์ว่า **พหุนามแมคลอรินของ f กระจายในกำลังของ** x

<u>ทฤษฎีบท</u> 2.1 **ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)**

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ หาค่าได้บนช่วงเปิด I และให้ $x,a\in I$ แล้วค่าของ $f(x)$ คือ

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

ให้ $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ และเรียกว่า **เศษเหลือ** และเรียกสมการดังกล่าวว่า **สูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือดีกรี n ของ f ณ จุด a**

พิจารณาสูตรของเทย์เลอร์พร้อมเศษเหลือ

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\\ &=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\\ &=P_n(x)+R_n(x)\end{aligned}$$

จะได้ว่า $f(x)$ คือ ค่าจริง

$P_n(x)$ คือ ค่าประมาณ

และ $R_n(x)$ คือ เศษเหลือ

เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน ค่าจริงและค่าประมาณ คือ

ค่าจริง = ค่าประมาณ + ค่าคลาดเคลื่อน

จะได้ว่า $R_n(x)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนจากการประมาณ นั่นคือ $|R_n(x)|=|f(x)-P_n(x)|$ การละพจน์เศษเหลือ $R_n(x)$ ออกจากสมการจะส่งผลให้เกิดค่าคลาดเคลื่อนขึ้นเสมอ หรือจะเรียกเศษเหลือ $R_n(x)$ ที่ถูกละทิ้งจากการประมาณค่าว่า **ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย** (Truncation Error) ซึ่งมักจะแสดงในรูปของอันดับ คือ $O\left((x-a)^{n+1}\right)$

2.2.2 ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์

การประมาณค่าฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ จะพิจารณาอนุกรมเทย์เลอร์ด้วยการเพิ่มจำนวนพจน์ทีละพจน์เรื่อย ๆ ไป ถ้าหากต้องการประมาณค่าฟังก์ชันโดยอนุกรมเทย์เลอร์โดยพจน์แรกของอนุกรม เพราะฉะนั้น

$$f(x_{i+1})\approx f(x_i) \tag{2.1}$$

สมการ (2.1) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์ ซึ่งค่าประมาณที่ได้มีค่าเท่ากับค่าจริง ถ้าหากฟังก์ชันที่นำมาหาค่าประมาณเป็นค่าคงที่ แต่ในกรณีที่ฟังก์ชันไม่ใช่ค่าคงที่ ค่าประมาณที่ได้จะเพิ่มจำนวนพจน์ไปเรื่อย ๆ โดยพิจารณาจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ อย่างเช่น หากต้องการประมาณค่าฟังก์ชันโดยอนุกรมเทย์เลอร์ 2 พจน์ กล่าวคือฟังก์ชันมีลักษณะการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตรง จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{2.2}$$

สมการ (2.2) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง หรือหากต้องการประมาณฟังก์ชันรูปแบบฟังก์ชันกำลังสอง จะประกอบไปด้วยพจน์ของอนุกรม 3 พจน์ จะได้ว่า

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 \tag{2.3}$$

สมการ (2.3) เรียกว่า ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง

ในทำนองเดียวกันเพิ่มพจน์ของอนุกรมเทย์เลอร์ไปเรื่อย ๆ ตามลักษณะของฟังก์ชันที่กำหนด จะได้ค่าประมาณโดยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ n คือ

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1} - x_i)^n \tag{2.4}$$

เพื่อความสะดวกในการนำไปใช้ จะกำหนดให้ระดับขั้นหรือช่วงกว้าง คือ $h = x_{i+1} - x_i$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (2.4) จะได้ว่า

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(h)^n \tag{2.5}$$

และเพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจ สามารถแสดงให้เห็นได้ชัดเจนดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาค่าประมาณโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์ถึงอันดับสี่ของฟังก์ชัน

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

กำหนดให้ $x_i = 0$ เมื่อ $h = 1$ พร้อมทั้งหาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

<u>วิธีทำ</u>

จาก $x_i = 0$ เมื่อ $h = 1$ จะได้ว่า $x_{i+1} = 1$ สำหรับปัญหานี้ทราบว่าค่าจริง $f(1) = 0.2$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับศูนย์ $(n = 0)$

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i)$$

$$f(1) \approx f(0) = 1.2$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}} \right| \times 100\%$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{0.2 - 1.2}{0.2} \right| \times 100\% = 500\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง $(n = 1)$

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(h)$$

จาก

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25$$

$$f'(0) = -0.4(0)^3 - 0.45(0)^2 - 1.0(0) - 0.25 = -0.25$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1)f'(0) = 1.2 - 0.25 = 0.95$$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0.2 - 0.95}{0.2}\right| \times 100\% = 375\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสอง $(n = 2)$

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i)$$

จาก

$$f''(x) = -1.2x^2 - 0.9x - 1.0$$

$$f''(0) = -1.2(0)^2 - 0.9(0) - 1.0 = -1.0$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1)f'(0) + \frac{(1)^2}{2!} f''(0)$$

$$f(1) \approx 1.2 - 0.25(1) - \frac{1}{2} = 0.45$$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0.2 - 0.45}{0.2}\right| \times 100\% = 125\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสาม $(n = 3)$

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i)$$

จาก

$$f'''(x) = -2.4x - 0.9$$

$$f'''(0) = -2.4(0) - 0.9 = -0.9$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1)f'(0) + \frac{(1)^2}{2!} f''(0) + \frac{(1)^3}{3!} f'''(0)$$

$$f(1) \approx 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15 = 0.3$$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0.2 - 0.3}{0.2}\right| \times 100\% = 50\%$$

ค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับสี่ $(n = 4)$

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{(h)^2}{2!} f''(x_i) + \frac{(h)^3}{3!} f'''(x_i) + \frac{(h)^4}{4!} f^{(4)}(x_i)$$

จาก

$$f^{(4)}(x) = -2.4$$

$$f^{(4)}(0) = -2.4$$

จะได้

$$f(1) \approx f(0) + (1)f'(0) + \frac{(1)^2}{2!}f''(0) + \frac{(1)^3}{3!}f'''(0) + \frac{(1)^4}{4!}f^{(4)}(0)$$

$$f(1) \approx 1.2 - 0.25 - 0.5 - 0.15 - 0.1 = 0.2$$

$$\varepsilon_t = \left|\frac{0.2 - 0.2}{0.2}\right| \times 100\% = 0\%$$

จะเห็นว่า $\varepsilon_t = 0\%$ แสดงว่าไม่มีค่าคลาดเคลื่อน

ตารางที่ 2.1 สรุปผลที่ได้จากการประมาณค่าของ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ ที่ $x = 1$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์อันดับ n ตั้งแต่ 0 จนถึง 4

อันดับ n	ค่าประมาณ $f(1)$	$\varepsilon_t\%$
0	1.20	500
1	0.95	375
2	0.45	125
3	0.30	50
4	0.20	0

โดยทั่วไปแล้วค่าประมาณด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับที่ n จะให้ค่าถูกต้องตรงกับค่าจริง ถ้าฟังก์ชันที่ใช้เป็นฟังก์ชันพหุนามอันดับที่ n แต่ถ้าเป็นฟังก์ชันอื่น ๆ ที่สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้และเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เช่น ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล และฟังก์ชันคลื่นรูปไซน์ ค่าประมาณด้วยอันดับที่จำกัด อาจจะไม่ให้ค่าถูกต้องตรงกับค่าจริง แต่สามารถนำค่าประมาณดังกล่าวมาใช้ได้ ถ้าพิจารณาว่าเศษเหลือจากค่าประมาณมีค่าน้อยมาก หรือพิจารณาจากร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์

2.3 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

จากนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x เขียนแทนด้วย $f'(x)$ นิยามดังนี้

$$f'(x) = \lim_{h \to c} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

บางทีใช้สัญลักษณ์ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = f(x)$

ในทางคณิตศาสตร์การหาค่าอนุพันธ์ทำได้ไม่ยากมากนัก หากว่าฟังก์ชัน f ประกอบด้วยฟังก์ชันพื้นฐาน เช่น ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นต้น เนื่องจากว่ามีสูตรที่สามารถทำให้หาได้อยู่แล้ว แต่ในทางปฏิบัติถ้าหากฟังก์ชันอยู่ในรูปที่ยุ่งยากหรือทราบค่าของฟังก์ชันเพียงแค่บางจุดเท่านั้น ทำให้ไม่สามารถหาผลเฉลยจริงได้จึงจำเป็นที่จะต้องใช้วิธีเชิงตัวเลขเข้ามาช่วย

การนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน จะพิจารณาจากการประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์และช่วงกว้างของ h ที่เท่ากัน

2.3.1 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

โดยอนุกรมเทย์เลอร์และกำหนดให้ $h = x_{i+1} - x_i$ คือ ระดับขั้นหรือช่วงกว้าง (Step Size) พิจารณาการหาค่าอนุพันธ์โดยใช้ค่าถัดไป $f(x_{i+1})$ มาประมาณค่าปัจจุบัน $f(x_i)$ และจากกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) ในสมการ (2.5) นั่นคือ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3 + \ldots$$

จะได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \tag{2.6}$$

ดังนั้น ค่าประมาณอนุพันธ์ $f'(x_i)$ คือ $f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$ เรียกว่า **ผลต่างข้างหน้า (Forward Difference)** มีค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายคือ $O(h) = -\frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3 - \ldots$

ในทำนองเดียวกันพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์โดยใช้ค่าก่อนหน้า $f(x_{i-1})$ มาประมาณค่าปัจจุบัน $f(x_i)$ และการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) สามารถกระจายย้อนหลังได้ดังสมการต่อไปนี้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3 + \ldots \tag{2.7}$$

จะได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{2.8}$$

ดังนั้น ค่าประมาณอนุพันธ์ $f'(x_i)$ คือ $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$ เรียกว่า **ผลต่างย้อนหลัง (Backward Difference)** มีค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายคือ $O(h) = -\frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3 - \ldots$

และสุดท้ายพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์โดยใช้การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) แบบย้อนหลังไปหักลบออกจากการกระจายแบบไปข้างหน้า จากสมการ (2.5) นั่นคือ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3 + \ldots$$

และจากสมการ (2.7) นั่นคือ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 - \frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3 + \ldots$$

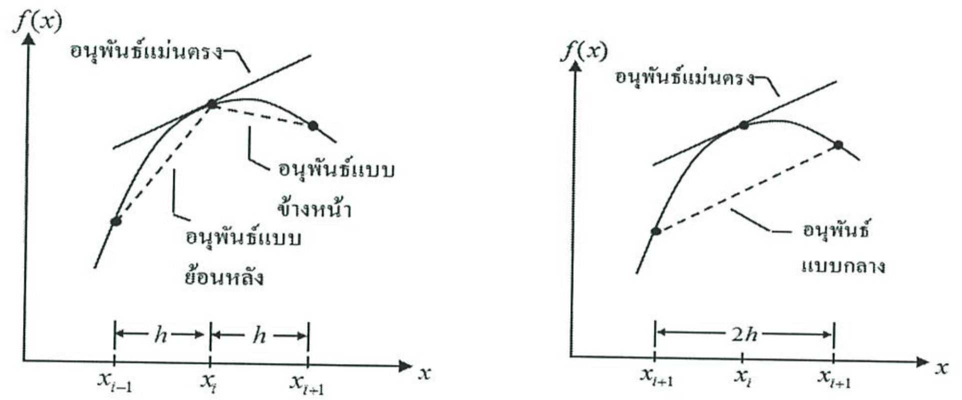
นำสมการ $(2.5)-(2.7)$ จะได้

$$f(x_{i+1})-f(x_{i-1})=2hf'(x_i)+\frac{2h^2}{2!}f''(x_i)+\frac{2h^3}{3!}f'''(x_i)+\frac{2h^5}{5!}f^{(5)}(x_i)+\dots \qquad (2.9)$$

จะได้ว่า
$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}+O(h^2) \qquad (2.10)$$

ดังนั้น ค่าประมาณอนุพันธ์ $f'(x_i)$ คือ $f'(x_i)\approx\frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$ เรียกว่า **ผลต่างกลาง (Central Difference)** มีค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย คือ $O(h^2)=-\frac{2h^2}{2!}f''(x_i)-\frac{2h^3}{3!}f'''(x_i)-\dots$

จะเห็นว่าค่าประมาณผลต่างกลางมีค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายเป็น $O(h^2)$ ในขณะที่ค่าประมาณผลต่างข้างหน้าและค่าประมาณผลต่างย้อนหลังจะมีค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลายเป็น $O(h)$ ซึ่งค่าประมาณผลต่างกลางมีความถูกต้องแม่นยำและให้คำตอบใกล้เคียงกับค่าจริงมากที่สุด



รูปที่ 2.1 การเปรียบเทียบอนุพันธ์ระหว่างอนุพันธ์แม่นตรงและอนุพันธ์เชิงตัวเลขแบบต่าง ๆ

ที่มา : (พรรณนภา พุ่มศิริและคณะ, 2556,18)

2.3.2 การหาอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivative)

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถใช้ค่าตัวเลขที่ได้มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงต่อไป และสามารถเขียนอนุกรมเทย์เลอร์แบบไปข้างหน้าสำหรับ $f(x_{i+2})$ ในพจน์ของ $f(x_i)$

จะได้
$$f(x_{i+2})=f(x_i)+2hf'(x_i)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x_i)+\dots \qquad (2.11)$$

จากสมการ (2.5)
$$f(x_{i+1})=f(x_i)+f'(x_i)(h)+\frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2+\frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3+\dots$$

คูณสมการ (2.5) ด้วย 2 แล้วนำไปลบกับสมการ (2.11) จะได้

$$f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})=-f(x_i)+h^2f''(x_i)+\dots \qquad (2.12)$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ $$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}+O(h) \tag{2.13}$$

ดังนั้น ค่าประมาณอนุพันธ์ $f''(x_i)$ คือ $f''(x_i)\approx\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}$ เรียกว่า **ผลต่างข้างหน้าอันดับสอง (Second Forward Derivative)**

ในทำนองเดียวกันพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์โดยใช้ค่าก่อนหน้า $f(x_{i-2})$ และ $f(x_{i-1})$ มาประมาณค่าปัจจุบัน $f(x_i)$ จะได้

$$f''(x_i)=\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2}+O(h) \tag{2.14}$$

ดังนั้น ค่าประมาณอนุพันธ์ $f''(x_i)$ คือ $f''(x_i)\approx\frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2}$ เรียกว่า **ผลต่างย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Derivative)**

และสุดท้ายพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์โดยใช้ค่าถัดไป $f(x_{i+1})$ และค่าก่อนหน้า $f(x_{i-1})$ มาประมาณค่าปัจจุบัน $f(x_i)$ จะได้

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}+O(h^2) \tag{2.15}$$

ดังนั้น ค่าประมาณอนุพันธ์ $f''(x_i)$ คือ $f''(x_i)\approx\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$ เรียกว่า **ผลต่างกลางอันดับสอง (Second Central Derivative)**

สำหรับการประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสูงสามารถทำได้คล้าย ๆ กัน โดยการเพิ่มจำนวนพจน์ของการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ในการคำนวณ นั่นก็คือการเพิ่มจุดที่ใช้ในการคำนวณค่าประมาณทั้งในวิธีผลต่างข้างหน้า ผลต่างย้อนหลังและผลต่างกลาง ในตารางถัดไปเป็นการสรุปการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขตั้งแต่อันดับหนึ่งจนถึงอันดับสี่ตามตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.2 ค่าอนุพันธ์โดยผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง

$$f'(x_i)\approx\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}$$
$$f''(x_i)\approx\frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^2}$$
$$f'''(x_i)\approx\frac{f(x_{i+3})-3f(x_{i+2})+3f(x_{i+1})-f(x_i)}{h^3}$$
$$f^{(4)}(x_i)\approx\frac{f(x_{i+4})-4f(x_{i+3})+6f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+f(x_i)}{h^4}$$

ที่มา : (อรรจน์ โกญจนาท,2558,136-137)

ตารางที่ 2.3 ค่าอนุพันธ์โดยผลต่างย้อนหลังที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{h}$$
$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_i)-2f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^2}$$
$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_i)-3f(x_{i-1})+3f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^3}$$
$$f^{(4)}(x_i) \approx \frac{f(x_i)-4f(x_{i-1})+6f(x_{i-2})-4f(x_{i-3})+f(x_{i-4})}{h^4}$$

ที่มา : (อรรจน์ โกญจนาท,2558,136-137)

ตารางที่ 2.4 ค่าอนุพันธ์โดยผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสอง

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1})-f(x_{i-1})}{2h}$$
$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{h^2}$$
$$f'''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+2})-2f(x_{i+1})+2f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{2h^3}$$
$$f^{(4)}(x_i) \approx \frac{f(x_{i+2})-4f(x_{i+1})+6f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{h^4}$$

ที่มา : (อรรจน์ โกญจนาท,2558,136-137)

เนื่องจากการประมาณค่าผลต่างข้างหน้าและผลต่างย้อนหลังมีอันดับความแม่นยำอันดับหนึ่ง ส่วนการประมาณค่าผลต่างกลางมีอันดับความแม่นยำอันดับสอง เพื่อความแม่นยำขึ้นเราสามารถลดค่าคลาดเคลื่อนลงได้โดยเพิ่มจำนวนพจน์ของการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) อย่างเช่น

จากสมการ (2.5) $$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 + \frac{f'''(x_i)}{3!}(h)^3 + \ldots$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ $$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2!}(h)^2 + O(h^2) \qquad (2.16)$$

จากสมการ (2.15) แทนค่าด้วยค่าประมาณผลต่างข้างหน้าอันดับสองลงใน $f''(x_i)$ และจัดรูปสมการใหม่ จะได้ว่า $$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \qquad (2.17)$$

จากวิธีการดังกล่าวจะพบว่าค่าประมาณอนุพันธ์โดยผลต่างข้างหน้ามีอันดับความแม่นยำจากอันดับหนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นอันดับสอง และด้วยวิธีการดังกล่าวนี้สามารถนำไปสร้างสมการค่าอนุพันธ์เพื่อให้มีความแม่นยำสูงขึ้นได้ทั้งในค่าประมาณผลต่างข้างหน้า ผลต่างย้อนหลังและผลต่างกลาง

ในตารางถัดไปเป็นการสรุปการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขตั้งแต่อันดับหนึ่งจนถึงอันดับสี่ตามวิธีการดังกล่าวดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.5 ค่าอนุพันธ์โดยผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับสอง

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+4f(x_{i+1})-3f(x_i)}{2h}$$
$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+4f(x_{i+2})-5f(x_{i+1})+2f(x_i)}{h^2}$$
$$f'''(x_i)=\frac{-3f(x_{i+4})+14f(x_{i+3})-24f(x_{i+2})+18f(x_{i+1})-5f(x_i)}{2h^3}$$
$$f^{(4)}(x_i)=\frac{-2f(x_{i+5})+11f(x_{i+4})-24f(x_{i+3})+26f(x_{i+2})-14f(x_{i+1})+3f(x_i)}{h^4}$$

ที่มา : (อรรจน์ โกญจนาท,2558,136-137)

ตารางที่ 2.6 ค่าอนุพันธ์โดยผลต่างย้อนหลังที่มีความแม่นยำอันดับสอง

$$f'(x_i)=\frac{3f(x_i)-4f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{2h}$$
$$f''(x_i)=\frac{2f(x_i)-5f(x_{i-1})+4f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{h^2}$$
$$f'''(x_i)=\frac{5f(x_i)-18f(x_{i-1})+24f(x_{i-2})-14f(x_{i-3})+3f(x_{i-4})}{2h^3}$$
$$f^{(4)}(x_i)=\frac{3f(x_i)-14f(x_{i-1})+26f(x_{i-2})-24f(x_{i-3})+11f(x_{i-4})-2f(x_{i-5})}{h^4}$$

ที่มา : (อรรจน์ โกญจนาท,2558,136-137)

ตารางที่ 2.7 ค่าอนุพันธ์โดยผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสี่

$$f'(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+8f(x_{i+1})-8f(x_{i-1})+f(x_{i-2})}{12h}$$
$$f''(x_i)=\frac{-f(x_{i+2})+16f(x_{i+1})-30f(x_i)+16f(x_{i-1})-f(x_{i-2})}{12h^2}$$
$$f'''(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+8f(x_{i+2})-13f(x_{i+1})+13f(x_{i-1})-8f(x_{i-2})+f(x_{i-3})}{8h^3}$$
$$f^{(4)}(x_i)=\frac{-f(x_{i+3})+12f(x_{i+2})-39f(x_{i+1})+56f(x_i)-39f(x_{i-1})+12f(x_{i-2})-f(x_{i-3})}{6h^4}$$

ที่มา : (อรรจน์ โกญจนาท,2558,136-137)

ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของฟังก์ชัน

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

ที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.5$ ด้วยวิธีผลต่างข้างหน้าที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง วิธีผลต่างย้อนหลังที่มีความแม่นยำอันดับหนึ่ง และวิธีผลต่างกลางที่มีความแม่นยำอันดับสอง

<u>**วิธีทำ**</u>

จากฟังก์ชันที่กำหนดให้ผลเฉลยแม่นตรงหาได้จากสมการ

$$f'(x) = -0.4x^3 - 0.45x^2 - x - 0.25$$

ดังนั้น ค่าอนุพันธ์ที่ $x = 0.5$ คือ

$$f'(0.5) = -0.4(0.5)^3 - 0.45(0.5)^2 - (0.5) - 0.25 = -0.9125$$

เมื่อ $h = 0.5$

ที่ $x_{i-1} = 0$ จะได้ $f(x_{i-1}) = 1.2$

ที่ $x_i = 0.5$ จะได้ $f(x_i) = 0.925$

ที่ $x_{i+1} = 1.0$ จะได้ $f(x_{i+1}) = 0.2$

เพราะฉะนั้นอนุพันธ์สามารถหาได้จาก

<u>วิธีผลต่างข้างหน้า</u>

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

$$f'(0.5) \approx \frac{0.2 - 0.925}{0.5} = -1.45$$

<u>วิธีผลต่างย้อนหลัง</u>

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$$

$$f'(0.5) \approx \frac{0.925 - 1.2}{0.5} = -1.55$$

<u>วิธีผลต่างกลาง</u>

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$$

$$f'(0.5) \approx \frac{0.2 - 1.2}{2(0.5)} = -1.0$$

จากค่าประมาณอนุพันธ์เชิงตัวเลขด้วยวิธีผลต่างข้างหน้า วิธีผลต่างย้อนหลังและวิธีผลต่างกลาง จะเห็นว่าวิธีผลต่างกลางมีค่าประมาณอนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ -1.0 และมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นตรง คือ -0.9125 มากที่สุด

2.4 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite Difference Method)

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง

$$y'' = f(x, y, y') \ ; \ a \le x \le b$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ถ้า f อยู่ในรูปแบบ

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

พิจารณาเงื่อนไขขอบดิริชเลท (Dirichlet Boundary Condition)

$$y(a) = \alpha \ \text{และ} \ y(b) = \beta$$

เริ่มต้นจากการแบ่งจำนวนช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน นิยามการแบ่งโดย $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 0,1,2,...,N$ เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{n}$ เรียกว่า **ระดับขั้นหรือช่วงกว้าง (Step Size)**

ดังนั้น จุดปลายช่วงย่อยของการแบ่ง คือ $x_0 = \alpha$ และ $x_N = \beta$

และจุดตัดภายในช่วงย่อย คือ $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 1,2,...,N-1$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x = x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จาก

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \tag{2.18}$$

โดยวิธีผลต่างกลาง จากสมการ (2.10) อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างกลาง คือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

และจากสมการ (2.15) หาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างกลาง คือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

สำหรับการพิจารณาหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน y ณ จุด x นั่นคือ $y(x)$ สามารถเขียนสมการ (2.10) และ (2.15) ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชัน $y(x_i)$ ได้ คือ

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \tag{2.19}$$

และ

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{2.20}$$

นำสมการ (2.19) และสมการ (2.20) แทนลงในสมการ (2.18) จะได้

$$\left[\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)\right] = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \tag{2.21}$$

ตัดเทอม $O(h^2)$ ออกจากสมการ (2.21) จะได้

$$\left[\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2}\right] = p(x_i)\left[\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \tag{2.22}$$

แทนค่า $y(x_i)=y_i, p(x_i)=p_i, q(x_i)=q_i$ และ $r(x_i)=r_i$ ในสมการ (2.22) จะได้ว่า

$$\left[\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}\right]=p_i\left[\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}\right]+q_iy_i+r_i \tag{2.23}$$

นำ h^2 คูณตลอดสมการ; $$y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}=\frac{1}{2}p_ih\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right)+q_iy_ih^2+r_ih^2 \tag{2.24}$$

นำ -1 คูณตลอดสมการ; $$-y_{i+1}+2y_i-y_{i-1}+\frac{1}{2}p_ih\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right)+q_iy_ih^2=-r_ih^2 \tag{2.25}$$

$$\left(-1-\frac{1}{2}p_ih\right)y_{i-1}+\left(2+q_ih^2\right)y_i+\left(\frac{1}{2}p_ih-1\right)y_{i+1}=-r_ih^2 \tag{2.26}$$

สำหรับทุก $i=1,2,\ldots,N-1$ และจากสมการ (2.26)

เมื่อ $i=1$; $$\left(-1-\frac{1}{2}p_1h\right)y_0+\left(2+q_1h^2\right)y_1+\left(\frac{1}{2}p_1h-1\right)y_2=-r_1h^2 \tag{2.27}$$

เนื่องจากเราทราบค่า y_0 จากเงื่อนไขขอบ

$$\left(2+q_1h^2\right)y_1+\left(\frac{1}{2}p_1h-1\right)y_2=-r_1h^2-\left(-1-\frac{1}{2}p_1h\right)y_0 \tag{2.28}$$

เมื่อ $i=2$; $$\left(-1-\frac{1}{2}p_2h\right)y_1+\left(2+q_2h^2\right)y_2+\left(\frac{1}{2}p_2h-1\right)y_3=-r_2h^2 \tag{2.29}$$

เมื่อ $i=3,\ldots,N-2$; $$\left(-1-\frac{1}{2}p_ih\right)y_{i-1}+\left(2+q_ih^2\right)y_i+\left(\frac{1}{2}p_ih-1\right)y_{i+1}=-r_ih^2 \tag{2.30}$$

และเมื่อ $i=N-1$; $$\left(-1-\frac{1}{2}p_{N-1}h\right)y_{N-2}+\left(2+q_{N-1}h^2\right)y_{N-1}+\left(\frac{1}{2}p_{N-1}h-1\right)y_N=-r_{N-1}h^2 \tag{2.31}$$

เนื่องจากเราทราบค่า y_N จากเงื่อนไขขอบ

$$\left(-1-\frac{1}{2}p_{N-1}h\right)y_{N-2}+\left(2+q_{N-1}h^2\right)y_{N-1}=-r_{N-1}h^2-\left(\frac{1}{2}p_{N-1}h-1\right)y_N \tag{2.32}$$

จากสมการ (2.26),(2.28),(2.29) และ (2.32) สามารถเขียนได้ในรูประบบสมการสำหรับ $y_1,y_2,y_3,\ldots,y_{N-1}$ และสามารถเขียนเป็นเมทริกซ์สามแถวทแยง (Tridiagonal Matrix) ขนาด $(N-1)\times(N-1)$ ในรูปแบบ $\mathbf{Ay}=\mathbf{b}$ คือ

$$\begin{bmatrix} \left(2+q_1h^2\right) & \left(\frac{1}{2}p_1h-1\right) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \left(-1-\frac{1}{2}p_2h\right) & \left(2+q_2h^2\right) & \left(\frac{1}{2}p_2h-1\right) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \left(-1-\frac{1}{2}p_3h\right) & \left(2+q_3h^2\right) & \left(\frac{1}{2}p_3h-1\right) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \left(-1-\frac{1}{2}p_{N-3}h\right) & \left(2+q_{N-2}h^2\right) & \left(\frac{1}{2}p_{N-1}h-1\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \left(-1-\frac{1}{2}p_{N-2}h\right) & \left(2+q_{N-1}h^2\right) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1h^2-\left(-1-\frac{1}{2}p_1h\right)y_0 \\ -r_2h^2 \\ -r_3h^2 \\ \vdots \\ -r_ih^2 \\ \vdots \\ -r_{N-2}h^2 \\ -r_{N-1}h^2-\left(\frac{1}{2}p_{N-1}h-1\right)y_N \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

และเรียกเมทริกซ์สามแถวทแยง (Tridiagonal Matrix) ดังกล่าวนี้ว่า **สูตรผลต่างอันตะ** ในรูปแบบเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 2.3 พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$y''(x)-2y'(x)+3y(x)=0 \quad \text{สำหรับ} \quad 0\le x\le 1$$

เงื่อนไขขอบ $y(0)=1$ และ $y(1)=0.4238$

กำหนดให้ เลือก $N=4$

<u>**วิธีทำ**</u>

จากโจทย์จะได้ว่า $p(x)=2,\ q(x)=-3$ และ $r(x)=0$

เริ่มจากการแบ่งช่วง [0,1] ออกเป็น $N=4$ ช่วงย่อย จะได้ $h=\dfrac{b-a}{N}=\dfrac{1-0}{4}=\dfrac{1}{4}$

และจากสมการเราทราบค่า $y_0=1$ และ $y_4=0.4238$

พิจารณา $i=1,2,3$ และจากสูตรผลต่างอันตะ

$$\begin{bmatrix} (2+q_1h^2) & \left(\frac{1}{2}p_1h-1\right) & 0 \\ \left(-1-\frac{1}{2}p_2h\right) & (2+q_2h^2) & \left(\frac{1}{2}p_2h-1\right) \\ 0 & \left(-1-\frac{1}{2}p_3h\right) & (2+q_3h^2) \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -r_1h^2-\left(-1-\frac{1}{2}p_1h\right)y_0 \\ -r_2h^2 \\ -r_3h^2-\left(\frac{1}{2}p_3h-1\right)y_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(2+\left(-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\right) & \left(\frac{1}{2}(2)\left(\frac{1}{4}\right)-1\right) & 0 \\ \left(-1-\frac{1}{2}(2)\left(\frac{1}{4}\right)\right) & \left(2+\left(-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\right) & \left(\frac{1}{2}(2)\left(\frac{1}{4}\right)-1\right) \\ 0 & \left(-1-\frac{1}{2}(2)\left(\frac{1}{4}\right)\right) & \left(2+\left(-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)\right) \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -(0)\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(1+\frac{1}{2}(2)\left(\frac{1}{4}\right)\right)1 \\ -(0)\left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ -(0)\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{2}(2)\left(\frac{1}{4}\right)-1\right)0.4238 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.8125 & -0.75 & 0 \\ -1.25 & 1.8125 & -0.75 \\ 0 & -1.25 & 1.8125 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.25 \\ 0 \\ 0.3179 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการ คือ $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.2181 \\ 1.2771 \\ 1.0562 \end{bmatrix}$

2.5 ค่าคลาดเคลื่อน (Error)

ค่าคลาดเคลื่อน คือ ความแตกต่างกันระหว่างค่าจริงกับค่าที่ได้จากการประมาณ แต่ก็ยังสามารถเกิดจากสาเหตุอื่นได้อีกดังต่อไปนี้

2.5.1 สาเหตุของค่าคลาดเคลื่อน

ค่าคลาดเคลื่อนนั้นเกิดขึ้นได้จากหลายสาเหตุ ซึ่งสามารถอธิบายได้โดยสังเขปดังต่อไปนี้

2.5.1.1 ค่าคลาดเคลื่อนจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Mathematical modeling error)

เกิดจากการที่ไม่สามารถจำลองแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ตามสภาพที่เป็นจริงของปรากฏการณ์ของธรรมชาติได้อย่างสมบูรณ์ ผลของการคำนวณเชิงตัวเลขที่ตามมาจึงเป็นผลที่มีความคลาดเคลื่อน

2.5.1.2 ค่าคลาดเคลื่อนจากการแพร่กระจายมูล (Propagation of error)

เป็นความผิดพลาดที่เกิดขึ้นขณะทำการคำนวณในขั้นตอนหนึ่ง ซึ่งจะมีผลไปสู่การคำนวณอีกขั้นตอนหนึ่ง

2.5.1.3 ค่าคลาดเคลื่อนจากข้อมูล (Error from data)

เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากข้อมูลที่มีอยู่ ซึ่งข้อมูลส่วนมากได้มาจากการคำนวณโดยใช้สูตร และสูตรที่ใช้ก็มีค่าคงที่ต่าง ๆ ซึ่งค่าเหล่านี้ได้มาจากการวัด การทดลอง หรือการคำนวณล่วงหน้า เช่น ค่า g (ค่าความเร่งจากแรงดึงดูดของโลก) จึงอาจมีความคลาดเคลื่อนได้

2.5.1.4 ค่าคลาดเคลื่อนจากผู้คำนวณ (Human error)

เป็นความผิดพลาดที่เกิดจากความเผอเรอของมนุษย์ นับตั้งแต่การกรอกข้อมูลผิดพิมพ์ตัวเลขผิด ไปจนถึงการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีส่วนผิดและไม่ได้ตรวจสอบโดยถี่ถ้วน

2.5.1.5 ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (Truncation error)

ในบางวิธีที่ใช้หาผลเฉลย จะต้องทอนขั้นตอนการคำนวณที่มีจำนวนเป็นอนันต์ ให้เหลือขั้นตอนที่มีจำนวนจำกัด เพื่อให้คำนวณได้ง่ายขึ้น เช่น การคำนวณโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ในการคำนวณ เราได้ใช้จำนวนพจน์ที่อยู่ในช่วงแรกของสมการอยู่จำนวนหนึ่ง โดยส่วนที่เหลือนั้นได้ถูกตัดทิ้งไป จึงเกิดความคลาดเคลื่อนจากพจน์ที่ถูกตัดทิ้งไป

2.5.1.6 ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (Round-off error)

เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดทอนตัวเลขในการคำนวณ สาเหตุมาจากความจำกัดของเนื้อที่ของเครื่องคำนวณ

2.5.2 นิยามของค่าคลาดเคลื่อน (Error Definition)

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน ค่าจริง ค่าประมาณ คือ

$$\text{ค่าจริง} = \text{ค่าประมาณ} + \text{ค่าคลาดเคลื่อน}$$

ถ้าใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ E_t แทนค่าคลาดเคลื่อน จะได้ E_t = ค่าจริง – ค่าประมาณ

<u>นิยาม</u> 2.3 **ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์** $|E_t|$

$$|E_t| = |\text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ}|$$

นิยาม 2.4 **ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์**

$$\text{ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ } \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}}$$

การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของข้อมูลแต่ละชุดนั้น ไม่สามารถนำมาเปรียบเทียบทางตรงได้ทันที ดังนั้นถ้าต้องการเปรียบเทียบค่า จะต้องคิดเป็นร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

นิยาม 2.5 **ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์** (ε_t)

$$\varepsilon_t = \frac{\text{ค่าคลาดเคลื่อน}}{\text{ค่าจริง}} \times 100\%$$

โดยทั่วไปการวิเคราะห์เชิงตัวเลขไม่จำเป็นเสมอไปที่จะต้องทราบค่าจริง แต่จะสามารถนำค่าประมาณมาใช้แทนค่าจริงได้ โดยพิจารณาจากค่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ

นิยาม 2.6 **ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ** ε_a

$$\varepsilon_a = \frac{\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนสุดท้าย}}{\text{ค่าประมาณสุดท้าย}} \times 100\%$$

2.5.3 สัญกรณ์โอใหญ่ (Big Oh Notation)

แนวคิดของสัญกรณ์โอใหญ่ถูกคิดโดยนักทฤษฎีจำนวนชื่อ เพาล์ บาชมันน์ (Paul Bachmann) จากงานตีพิมพ์ของเขาที่ชื่อว่า ทฤษฎีจำนวนวิเคราะห์ (Analytische Zahlentheorie) ในปี ค.ศ.1894 โดยครั้งนั้นยังไม่ได้ใช้ตัวสัญกรณ์โอใหญ่ สำหรับตัวสัญกรณ์โอใหญ่นั้นถูกใช้อย่างแพร่หลายโดยนักทฤษฎีจำนวนชาวเยอรมันที่มีชื่อว่า เอ็ดมุนด์ ลานเดา (Edmund Landau) ชื่อของเขาบางครั้งได้รับการยกย่องให้เป็นชื่อของสัญกรณ์โอใหญ่ว่าเป็น สัญกรณ์ของลานเดา (Landau notation) สำหรับตัวสัญกรณ์ที่เขียนเป็นรูปโอใหญ่นั้นได้แนวคิดมาจากคำว่า "Order of" ซึ่งเดิมทีนั้นเขียนโดยใช้เป็นโอไมครอนใหญ่

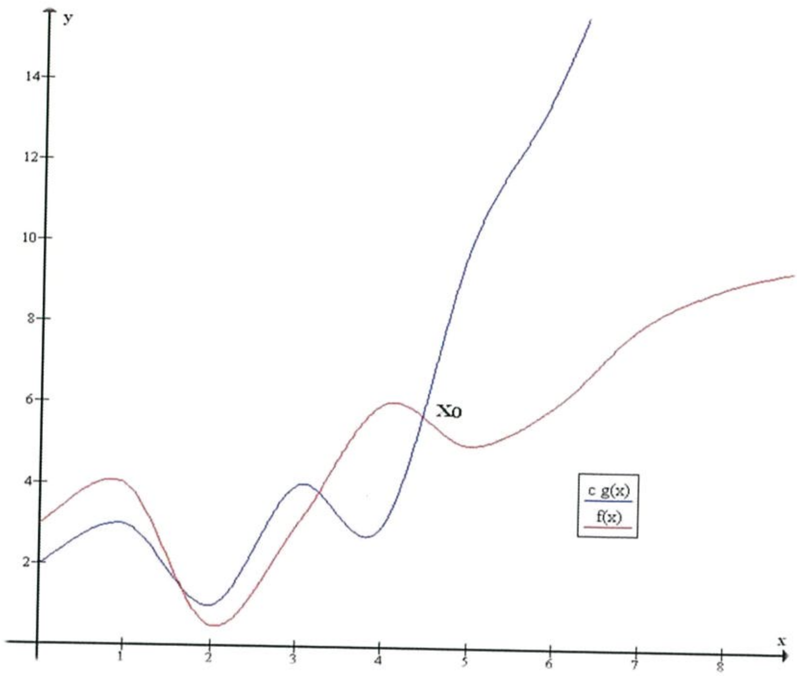
อัตราการเติบโตของฟังก์ชันใด ๆ มีค่าเป็นสัญกรณ์โอใหญ่ของอีกฟังก์ชันหนึ่งแล้ว แสดงว่าอัตราการเติบโตของฟังก์ชันใด ๆ นั้น จะโตน้อยกว่าหรือเท่ากับอัตราการเติบโตของฟังก์ชันดังกล่าว ดังนั้นจึงอาจนิยามได้ว่า

นิยาม 2.7 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะกล่าวว่า

$$f(x) \in O\big(g(x)\big) \text{ เมื่อ } x \to \infty$$

ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ C และ x_0 ที่ทำให้

$$|f(x)| \le C|g(x)| \text{ สำหรับทุก } x \ge x_0$$



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างของสัญกรณ์โอใหญ่ โดย $f(x) \in O\big(g(x)\big)$ ซึ่งหมายความว่า มี C (เช่น $C = 1$) และ x_0 (เช่น $x_0 = 5$) ที่ทำให้ $|f(x)| \le C|g(x)|$ เมื่อ $x \ge x_0$

ที่มา : https://th.wikipedia.org/wiki/สัญกรณ์โอใหญ่

อย่างไรก็ตาม นิยามนี้จำกัดเฉพาะกรณี $x \to \infty$ เท่านั้น ซึ่งไม่เพียงพอต่อการอธิบายในกรณีที่ $x \to a$ ดังนั้น จึงอาจใช้นิยามในอีกรูปแบบในการขยายไปถึงสัญกรณ์โอใหญ่กณิกนันต์ ซึ่งเป็นการพิจารณาอัตราการเติบโตของฟังก์ชันรอบ ๆ จุด a ใด ๆ

นิยาม 2.8 ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะกล่าวว่า

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \text{ เมื่อ } x \to a$$

ก็ต่อเมื่อ มีค่าคงที่ $d > 0$ และ C ที่ซึ่ง

$$|f(x)| \le C|g(x)| \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } |x - a| < d$$

จากนิยามข้างต้น จะได้ว่า

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le C \text{ สำหรับทุก } x \text{ ซึ่ง } |x-a| < d$$

ตัวอย่างเช่น

$$2x^3 = O(x^2) \text{ เมื่อ } x \to 0 \text{ ซึ่ง } \frac{2x^3}{x^2} = 2x < 1 \text{ สำหรับทุก } x < \frac{1}{2}$$

นิยาม 2.9 L2-norm

ให้ $\bar{v} \in V$, Norm ของ $\bar{v}$ เขียนแทนด้วย $\|\bar{v}\|$

กำหนดให้ $\bar{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$ จะได้ว่า

$\|\bar{v}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ จะเรียกสมการดังกล่าวว่า L2-norm (Euclidean norm)

2.5.4 อันดับความแม่นยำ

ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลข อันดับความแม่นยำ (Order of Accuracy) จะบอกถึงอัตราการลู่เข้าของค่าประมาณเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สู่ผลเฉลยแม่นตรง ผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์จะกล่าวได้ว่ามีความแม่นยำอันดับที่ n ถ้าค่าคลาดเคลื่อน E เป็นสัดส่วนกับขนาดความกว้างช่วงย่อย h ยกกำลัง n นั่นคือ $E(h) = Ch^n$ เมื่อ C เป็นค่าคงที่ สัญกรณ์โอใหญ่ที่ใช้แทนความแม่นยำอันดับที่ n ของวิธีเชิงตัวเลข คือ $O(h^n)$

ตารางที่ 2.8 อันดับความแม่นยำของวิธีเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างข้างหน้า ผลต่างย้อนหลังและผลต่างกลาง

วิธีเชิงตัวเลข	อันดับความแม่นยำ
ผลต่างข้างหน้า	$O(h)$
ผลต่างย้อนหลัง	$O(h)$
ผลต่างกลาง	$O(h^2)$

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในบทนี้จะกล่าวถึงวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าขอบดิริชเลทของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง โดยเริ่มจากการสร้างสูตรการหาอนุพันธ์ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 วิธี คือ วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังและวิธีผลต่างสี่จุดกลาง รวมไปถึงการประมาณค่าอนุพันธ์โดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะทั้ง 3 วิธี ซึ่งจะกล่าวดังต่อไปนี้

3.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) รอบจุด $x=a$ นั่นคือ $f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dfrac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$ และกำหนดให้ $h=x-a$ เราสามารถสร้างสูตรการหาอนุพันธ์เชิงตัวเลขทั้งอันดับหนึ่งและอันดับสองได้ดังต่อไปนี้

3.1.1 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

สำหรับการสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งจะพิจารณา 3 กรณี คือ การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง และการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง ซึ่งจะกล่าวดังต่อไปนี้

3.1.1.1 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x+h)$, $(x+2h)$, $(x+3h)$ และ $(x+4h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x)\\
f(x+h) &= f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)\\
f(x+2h) &= f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)\\
f(x+3h) &= f(x)+3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)\\
f(x+4h) &= f(x)+4hf'(x)+\frac{(4h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(4h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(4h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(4h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)
\end{aligned}
$$

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = af(x)+bf(x+h)+cf(x+2h)+df(x+3h)+ef(x+4h) \tag{3.1}$$

$$f'(x) = (a+b+c+d+e)f(x)+(b+2c+3d+4e)hf'(x)+\left(\frac{1}{2}b+2c+\frac{9}{2}d+8e\right)h^2f''(x)$$
$$+\left(\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c+\frac{9}{2}d+\frac{32}{3}e\right)h^3f'''(x)+\left(\frac{1}{24}b+\frac{2}{3}c+\frac{27}{8}d+\frac{32}{3}e\right)h^4f^{(4)}(x) \tag{3.2}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e=0 \tag{3.3}$$

$$b+2c+3d+4e=\frac{1}{h} \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{2}b+2c+\frac{9}{2}d+8e=0 \quad \text{หรือ} \quad b+4c+9d+16e=0 \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c+\frac{9}{2}d+\frac{32}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad b+8c+27d+64e=0 \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{24}b+\frac{2}{3}c+\frac{27}{8}d+\frac{32}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad b+16c+81d+256e=0 \tag{3.7}$$

แก้สมการหาค่าตัวแปร a,b,c,d และ e

$$(3.6)-(3.5); \quad 4c+18d+48e=0 \tag{3.8}$$

$$(3.5)-(3.4); \quad 2c+6d+12e=-\frac{1}{h} \tag{3.9}$$

$$(3.9)\times 2; \quad 4c+12d+24e=-\frac{2}{h} \tag{3.10}$$

$$(3.8)-(3.10); \quad 6d-24e=\frac{2}{h} \tag{3.11}$$

$$(3.7)-(3.6); \quad 8c+54d+192e=0 \tag{3.12}$$

$$(3.8)\times 2; \quad 8c+36d+96d=0 \tag{3.13}$$

$$(3.12)-(3.13); \quad 18d+96e=0 \tag{3.14}$$

$$(3.11)\times 4; \quad 24d+96e=\frac{8}{h} \tag{3.15}$$

$$(3.15)-(3.14); \quad 6d=\frac{8}{h}$$

ดังนั้น $\quad d=\dfrac{4}{3h}$

จาก (3.11); $\quad 6\left(\dfrac{4}{3h}\right)+24e=\dfrac{2}{h}$

ดังนั้น $\quad e=-\dfrac{1}{4h}$

จาก (3.8); $\quad 4c+18\left(\dfrac{4}{3h}\right)+48\left(-\dfrac{1}{4h}\right)=0$

ดังนั้น $\quad c=-\dfrac{3}{h}$

จาก (3.2); $$b+2\left(-\frac{3}{h}\right)+3\left(\frac{4}{3h}\right)+4\left(-\frac{1}{4h}\right)=\frac{1}{h}$$

ดังนั้น $$b=\frac{4}{h}$$

จาก (3.1); $$a+\left(\frac{4}{h}\right)+\left(-\frac{3}{h}\right)+\left(\frac{4}{3h}\right)+\left(-\frac{1}{4h}\right)=0$$

ดังนั้น $$a=-\frac{25}{12h}$$

เพราะฉะนั้น $$(a,b,c,d,e)=\left(-\frac{25}{12h},\frac{4}{h},-\frac{3}{h},\frac{4}{3h},-\frac{1}{4h}\right) \tag{3.16}$$

จะได้ $$f'(x) = af(x)+bf(x+h)+cf(x+2h)+df(x+3h)+ef(x+4h) \tag{3.17}$$

$$f'(x) = -\frac{25}{12h}f(x)+\frac{4}{h}f(x+h)-\frac{3}{h}f(x+2h)+\frac{4}{3h}f(x+3h)-\frac{1}{4h}f(x+4h) \tag{3.18}$$

$$f'(x) = \frac{-25f(x)+48f(x+h)-36f(x+2h)+16f(x+3h)-3f(x+4h)}{12h} \tag{3.19}$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

และค่าคลาดเคลื่อน คือ $$\left(\frac{1}{120}b+\frac{4}{15}c+\frac{81}{40}d+\frac{128}{15}e\right)h^5 f^{(5)}(x)=O(h^5) \tag{3.20}$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า คือ

$$f'(x)=\frac{-25f(x)+48f(x+h)-36f(x+2h)+16f(x+3h)-3f(x+4h)}{12h}+O(h^5) \tag{3.21}$$

หรือ $$y'(x_i)=\frac{-25y(x_i)+48y(x_{i+1})-36y(x_{i+2})+16y(x_{i+3})-3y(x_{i+4})}{12h}+O(h^5) \tag{3.22}$$

3.1.1.2 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-4h)$, $(x-3h)$, $(x-2h)$ และ $(x-h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) นั่นคือ

$$f(x-4h) = f(x)-4hf'(x)+\frac{(4h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(4h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(4h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(4h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x-3h) = f(x)-3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x-2h) = f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x-h) = f(x)-hf'(x)+\frac{(h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x) = f(x)$$

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยกำหนดให้

$$f'(x) = af(x-4h)+bf(x-3h)+cf(x-2h)+df(x-h)+ef(x) \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a+b+c+d+e)f(x)+(-4a-3b-2c-d)hf'(x)+\left(8a+\frac{9}{2}b+2c+\frac{1}{2}d\right)h^2f''(x) \\ &+\left(-\frac{32}{3}a-\frac{9}{2}b-\frac{4}{3}c-\frac{1}{6}d\right)h^3f'''(x)+\left(\frac{32}{3}a+\frac{27}{8}b+\frac{2}{3}c+\frac{1}{24}d\right)h^4f^{(4)}(x) \\ &+\left(-\frac{128}{15}a-\frac{243}{120}b-\frac{4}{15}c-\frac{1}{120}d\right)h^5f^{(5)}(x)+O(h^6) \end{aligned} \tag{3.24}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e=0 \tag{3.25}$$

$$-4a-3b-2c-d=\frac{1}{h} \tag{3.26}$$

$$8a+\frac{9}{2}b+2c+\frac{1}{2}d=0 \quad \text{หรือ} \quad 16a+9b+4c+d=0 \tag{3.27}$$

$$-\frac{32}{3}a-\frac{9}{2}b-\frac{4}{3}c-\frac{1}{6}d=0 \quad \text{หรือ} \quad -64a-27b-8c-d=0 \tag{3.28}$$

$$\frac{32}{3}a+\frac{27}{8}b+\frac{2}{3}c+\frac{1}{24}d=0 \quad \text{หรือ} \quad 256a+81b+16c+d=0 \tag{3.29}$$

แก้สมการหาค่าตัวแปร a,b,c,d และ e

$$(3.26)+(3.27); \quad 12a+6b+2c=\frac{1}{h} \tag{3.30}$$

$$(3.29)-(3.27); \quad 40a+12b+2c=0 \tag{3.31}$$

$$(3.31)-(3.30); \quad 28a+6b=-\frac{1}{h} \tag{3.32}$$

$$(3.28)+(3.29); \quad 192a+54b+8c=0 \tag{3.33}$$

$$(3.33)-(3.31); \quad 32a+6b=0 \tag{3.34}$$

$$(3.29)-(3.33); \quad -4a=-\frac{1}{h}$$

ดังนั้น $\quad a=\dfrac{1}{4h}$

จาก (3.34); $\quad 32\left(\dfrac{1}{4h}\right)+6b=0$

ดังนั้น $\quad b=-\dfrac{4}{3h}$

จาก (3.30); $\quad 12\left(\dfrac{1}{4h}\right)+6\left(-\dfrac{4}{3h}\right)+2c=\dfrac{1}{h}$

ดังนั้น $\quad c=\dfrac{3}{h}$

จาก (3.26); $\quad -4\left(\dfrac{1}{4h}\right)-3\left(-\dfrac{4}{3h}\right)-2\left(\dfrac{3}{h}\right)-d=\dfrac{1}{h}$

ดังนั้น $\quad d=-\dfrac{4}{h}$

จาก (3.25); $$-\left(\frac{1}{4h}\right)-\left(-\frac{4}{3h}\right)-\left(\frac{3}{h}\right)-\left(-\frac{4}{h}\right)=e$$

ดังนั้น $$e=\frac{25}{12h}$$

เพราะฉะนั้น $$(a,b,c,d,e)=\left(\frac{1}{4h},-\frac{4}{3h},\frac{3}{h},-\frac{4}{h},\frac{25}{12h}\right) \tag{3.35}$$

จะได้ $$f'(x) = af(x-4h)+bf(x-3h)+cf(x-2h)+df(x-h)+ef(x) \tag{3.36}$$

$$f'(x) = \frac{1}{4h}f(x-4h)-\frac{4}{3h}f(x-3h)+\frac{3}{h}f(x-2h)-\frac{4}{h}f(x-h)+\frac{25}{12h}f(x) \tag{3.37}$$

$$f'(x) = \frac{3f(x-4h)-16f(x-3h)+36f(x-2h)-48f(x-h)+25f(x)}{12h} \tag{3.38}$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

และค่าคลาดเคลื่อน คือ $$\left(-\frac{128}{15}a-\frac{243}{120}b-\frac{4}{15}c-\frac{1}{120}d\right)h^5f^{(5)}(x)=O(h^5) \tag{3.39}$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง คือ

$$f'(x)=\frac{3f(x_{i-4})-16f(x_{i-3})+36f(x_{i-2})-48f(x_{i-1})+25f(x_i)}{12h}+O(h^5) \tag{3.40}$$

หรือ $$y'(x)=\frac{3y(x_{i-4})-16y(x_{i-3})+36y(x_{i-2})-48y(x_{i-1})+25y(x_i)}{12h}+O(h^5) \tag{3.41}$$

3.1.1.3 การหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-2h)$, $(x-h)$, $(x+h)$ และ $(x+2h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) นั่นคือ

$$f(x-2h) = f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x-h) = f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x-2h) = f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

หาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยกำหนดให้

$$f'(x) = af(x-2h)+bf(x-h)+cf(x)+df(x+h)+ef(x+2h) \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= (a+b+c+d+e)f(x)+(-2a-b+d+2e)hf'(x)+\left(2a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d+2e\right)h^2f''(x)\\ &+\left(-\frac{4}{3}a-\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}d+\frac{4}{3}e\right)h^3f'''(x)+\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{24}b+\frac{1}{24}d+\frac{2}{3}e\right)h^4f^{(4)}(x)\\ &+\left(-\frac{4}{15}a-\frac{1}{120}b+\frac{1}{120}d+\frac{4}{15}e\right)h^5f^{(5)}(x)+O(h^6)\end{aligned} \tag{3.43}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e=0 \tag{3.44}$$

$$-2a-b+d+2e=\frac{1}{h} \tag{3.45}$$

$$2a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d+2e=0 \quad \text{หรือ} \quad 4a+b+d+4e=0 \tag{3.46}$$

$$-\frac{4}{3}a-\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}d+\frac{4}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad -8a-b+d+8e=0 \tag{3.47}$$

$$\frac{2}{3}a+\frac{1}{24}b+\frac{1}{24}d+\frac{2}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad 16a+b+d+16e=0 \tag{3.48}$$

แก้สมการหาค่าตัวแปร a,b,c,d และ e

$$(3.45)+(3.46); \quad 2a+2d+6e=\frac{1}{h} \tag{3.49}$$

$$(3.46)+(3.47); \quad -4a+2d+12e=0 \tag{3.50}$$

$$(3.47)+(3.48); \quad 8a+2d+24e=0 \tag{3.51}$$

$$(3.49)-(3.50); \quad 6a-6e=\frac{1}{h} \tag{3.52}$$

$$(3.50)-(3.51); \quad -12a-12e=0 \tag{3.53}$$

ดังนั้น $$a=-e \tag{3.54}$$

จาก (3.52); $$6(-e)-6e=\frac{1}{h}$$

ดังนั้น $$e=-\frac{1}{12h}$$

และ $$a=\frac{1}{12h}$$

จาก (3.49); $$2\left(\frac{1}{12h}\right)+2d+6\left(-\frac{1}{12h}\right)=\frac{1}{h}$$

ดังนั้น $$d=\frac{2}{3h}$$

จาก (3.45); $$-2\left(\frac{1}{12h}\right)-b+\frac{2}{3h}+2\left(-\frac{1}{12h}\right)=\frac{1}{h}$$

ดังนั้น $$b=-\frac{2}{3h}$$

จาก (3.44); $$\frac{1}{12h}-\frac{2}{3h}+c+\frac{2}{3h}-\frac{1}{12h}=0$$

ดังนั้น $$c=0$$

เพราะฉะนั้น $$(a,b,c,d,e)=\left(\frac{1}{12h},-\frac{2}{3h},0,\frac{2}{3h},-\frac{1}{12h}\right) \tag{3.55}$$

จะได้ $$f'(x)=af(x-2h)+bf(x-h)+cf(x)+df(x+h)+ef(x+2h) \tag{3.56}$$

$$f'(x)=\frac{1}{12h}(x-2h)-\frac{2}{3h}f(x-h)+\frac{2}{3h}f(x+h)-\frac{1}{12h}f(x+2h) \tag{3.57}$$

$$f'(x)=\frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h} \tag{3.58}$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

และค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(-\frac{4}{15}a-\frac{1}{120}b+\frac{1}{120}d+\frac{4}{15}e\right)h^5 f^{(5)}(x)=O\left(h^5\right)$ (3.59)

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง คือ

$$f'(x)=\frac{f(x-2h)-8f(x-h)+8f(x+h)-f(x+2h)}{12h}+O\left(h^5\right) \tag{3.60}$$

หรือ

$$y'(x_i)=\frac{y(x_{i-2})-8y(x_{i-1})+8y(x_{i+1})-y(x_{i+2})}{12h}+O\left(h^5\right) \tag{3.61}$$

3.1.2 การสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสอง

สำหรับการสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับสองจะพิจารณา 3 กรณี เช่นเดียวกับการสร้างสูตรการหาอนุพันธ์อันดับหนึ่งดังต่อไปนี้

3.1.2.1 การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x+h)$, $(x+2h)$, $(x+3h)$ และ $f(x+4h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) นั่นคือ

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)$$

$$f(x+2h) = f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)$$

$$f(x+3h) = f(x)+3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)$$

$$f(x+4h) = f(x)+4hf'(x)+\frac{(4h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(4h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(4h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(4h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right)$$

หาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยกำหนดให้

$$f''(x) = af(x)+bf(x+h)+cf(x+2h)+df(x+3h)+ef(x+4h) \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (a+b+c+d+e)f(x)+(b+2c+3d+4e)hf'(x)+\left(\frac{1}{2}b+2c+\frac{9}{2}d+8e\right)h^2 f''(x) \\ &\quad +\left(\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c+\frac{9}{2}d+\frac{32}{3}e\right)h^3 f'''(x)+\left(\frac{1}{24}b+\frac{2}{3}c+\frac{27}{8}d+\frac{32}{3}e\right)h^4 f^{(4)}(x) \\ &\quad +\left(\frac{1}{120}b+\frac{4}{15}c+\frac{81}{40}d+\frac{128}{15}e\right)h^5 f^{(5)}(x)+O\left(h^6\right) \end{aligned} \tag{3.63}$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e=0 \tag{3.64}$$

$$b+2c+3d+4e=0 \tag{3.65}$$

$$\frac{1}{2}b+2c+\frac{9}{2}d+8e=\frac{1}{h^2} \quad \text{หรือ} \quad b+4c+9d+16e=\frac{2}{h^2} \tag{3.66}$$

$$\frac{1}{6}b+\frac{4}{3}c+\frac{9}{2}d+\frac{32}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad b+8c+27d+64e=0 \tag{3.67}$$

$$\frac{1}{24}b+\frac{2}{3}c+\frac{27}{8}d+\frac{32}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad b+16c+81d+256e=0 \tag{3.68}$$

แก้สมการหาค่าตัวแปร a,b,c,d และ e

$$(3.66)-(3.65); \quad 2c+6d+12e=\frac{2}{h^2} \tag{3.69}$$

$$(3.67)-(3.66); \quad 4c+18d+48e=-\frac{2}{h^2} \tag{3.70}$$

$$(3.69)\times 2; \quad 4c+12d+24e=\frac{4}{h^2} \tag{3.71}$$

$$(3.70)-(3.71); \quad 6d+24e=-\frac{6}{h^2} \tag{3.72}$$

$$(3.68)-(3.65); \quad 14c+78d+252e=0 \tag{3.73}$$

$$(3.69)\times 7; \quad 14c+42d+84e=\frac{14}{h^2} \tag{3.74}$$

$$(3.73)-(3.74); \quad 36d+168e=-\frac{14}{h^2} \tag{3.75}$$

$$(3.72)\times 6; \quad 36d+144e=-\frac{36}{h^2} \tag{3.76}$$

$$(3.75)-(3.76); \quad 24e=\frac{22}{h^2}$$

ดังนั้น $$e=\frac{11}{12h^2}$$

จาก (3.72); $$6d+24\left(\frac{11}{12h^2}\right)=-\frac{6}{h^2}$$

ดังนั้น $$d=-\frac{14}{3h^2}$$

จาก (3.71); $$4c+12\left(-\frac{14}{3h^2}\right)+24\left(-\frac{11}{12h^2}\right)=\frac{4}{h^2}$$

ดั้งนั้น $$c=\frac{19}{2h^2}$$

จาก (3.65); $$b+2\left(\frac{19}{2h^2}\right)+3\left(-\frac{14}{3h^2}\right)+4\left(\frac{11}{12h^2}\right)=0$$

ดังนั้น $$b=-\frac{26}{3h^2}$$

จาก (3.64); $$a+\left(-\frac{26}{3h^2}\right)+\left(\frac{19}{2h^2}\right)+\left(-\frac{14}{3h^2}\right)+\left(\frac{11}{12h^2}\right)=0$$

ดังนั้น $$a=\frac{35}{12h^2}$$

เพราะฉะนั้น $$(a,b,c,d,e)=\left(\frac{35}{12h^2},-\frac{26}{3h^2},\frac{19}{2h^2},-\frac{14}{3h^2},\frac{11}{12h^2}\right) \tag{3.77}$$

จะได้ $f''(x) = af(x)+bf(x+h)+cf(x+2h)+df(x+3h)+ef(x+4h)$ (3.78)

$$f''(x) = \frac{35}{12h^2}f(x)-\frac{26}{3h^2}f(x+h)+\frac{19}{2h^2}f(x+2h)-\frac{14}{3h^2}f(x+3h)+\frac{11}{12h^2}f(x+4h) \quad (3.79)$$

$$f''(x) = \frac{35f(x)-104f(x+h)+114f(x+2h)-56f(x+3h)+11f(x+4h)}{12h^2} \quad (3.80)$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

และค่าคลาดเคลื่อน คือ $\left(\frac{1}{120}b+\frac{4}{15}c+\frac{81}{40}d+\frac{128}{15}e\right)h^5f^{(5)}(x)=\mathrm{O}(h^4)$ (3.81)

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า คือ

$$f''(x)=\frac{35f(x)-104f(x+h)+114f(x+2h)-56f(x+3h)+11f(x+4h)}{12h^2}+\mathrm{O}(h^4) \quad (3.82)$$

หรือ $$y''(x_i)=\frac{35y(x_i)-104y(x_{i+1})+114y(x_{i+2})-56y(x_{i+3})+11y(x_{i+4})}{12h^2}+\mathrm{O}(h^4) \quad (3.83)$$

3.1.2.2 การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-4h)$, $(x-3h)$, $(x-2h)$ และ $(x-h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) นั่นคือ

$$f(x-4h) = f(x)-4hf'(x)+\frac{(4h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(4h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(4h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(4h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\mathrm{O}(h^6)$$

$$f(x-3h) = f(x)-3hf'(x)+\frac{(3h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(3h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(3h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(3h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\mathrm{O}(h^6)$$

$$f(x-2h) = f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\mathrm{O}(h^6)$$

$$f(x-h) = f(x)-hf'(x)+\frac{(h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+\mathrm{O}(h^6)$$

$$f(x) = f(x)$$

หาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยกำหนดให้

$$f''(x) = af(x-4h)+bf(x-3h)+cf(x-2h)+df(x-h)+ef(x) \quad (3.84)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (a+b+c+d+e)f(x)+(-4a-3b-2c-d)hf'(x)+\left(8a+\frac{9}{2}b+2c+\frac{1}{2}d\right)h^2f''(x) \\ &+\left(-\frac{32}{3}a-\frac{9}{2}b-\frac{4}{3}c-\frac{1}{6}d\right)h^3f'''(x)+\left(\frac{32}{3}a+\frac{27}{8}b+\frac{2}{3}c+\frac{1}{24}d\right)h^4f^{(4)}(x) \\ &+\left(-\frac{128}{15}a-\frac{243}{120}b-\frac{4}{15}c-\frac{1}{120}d\right)h^5f^{(5)}(x)+\mathrm{O}(h^6) \end{aligned} \quad (3.85)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e=0 \quad (3.86)$$

$$-4a-3b-2c-d=0 \quad (3.87)$$

$$8a+\frac{9}{2}b+2c+\frac{1}{2}d=\frac{1}{h^2} \quad \text{หรือ} \quad 16a+9b+4c+d=\frac{2}{h^2} \tag{3.88}$$

$$-\frac{32}{3}a-\frac{9}{2}b-\frac{4}{3}c-\frac{1}{6}d=0 \quad \text{หรือ} \quad -64a-27b-8c-d=0 \tag{3.89}$$

$$\frac{32}{3}a+\frac{27}{8}b+\frac{2}{3}c+\frac{1}{24}d=0 \quad \text{หรือ} \quad 256a+81b+16c+d=0 \tag{3.90}$$

แก้สมการหาค่าตัวแปร a,b,c,d และ e

$$(3.87)+(3.88); \quad 12a+6b+2c=\frac{2}{h^2} \tag{3.91}$$

$$(3.89)+(3.90); \quad 192a+54b+8c=0 \tag{3.92}$$

$$(3.92)-(3.91)\times 4; \quad 144a+30b=-\frac{8}{h^2} \tag{3.93}$$

$$(3.88)+(3.89); \quad -24a-9b-2c=\frac{1}{h^2} \tag{3.94}$$

$$(3.91)+(3.94); \quad -12a-3b=\frac{3}{h^2} \tag{3.95}$$

$$(3.93)+(3.95)\times 10; \quad 24a=\frac{22}{h^2}$$

ดังนั้น $\quad a=\dfrac{11}{12h^2}$

จาก (3.95); $\quad -12\left(\dfrac{11}{12h^2}\right)-3b=\dfrac{3}{h^2}$

ดังนั้น $\quad b=-\dfrac{14}{3h^2}$

จาก (3.91); $\quad 12\left(\dfrac{11}{12h^2}\right)+6\left(-\dfrac{14}{3h^2}\right)+2c=\dfrac{2}{h^2}$

ดังนั้น $\quad c=\dfrac{19}{2h^2}$

จาก (3.87); $\quad d=-4\left(\dfrac{11}{12h^2}\right)-3\left(-\dfrac{14}{3h^2}\right)-2\left(\dfrac{19}{2h^2}\right)$

ดังนั้น $\quad d=-\dfrac{26}{3h^2}$

จาก (3.86); $\quad e=-\left(\dfrac{11}{12h^2}\right)-\left(-\dfrac{14}{3h^2}\right)-\left(\dfrac{19}{2h^2}\right)-\left(-\dfrac{26}{3h^2}\right)$

ดังนั้น $\quad e=\dfrac{35}{12h^2}$

เพราะฉะนั้น
$$(a,b,c,d,e)=\left(\frac{11}{12h^2},-\frac{14}{3h^2},\frac{19}{2h^2},-\frac{26}{3h^2},\frac{35}{12h^2}\right) \tag{3.96}$$

จะได้
$$f''(x)=af(x-4h)+bf(x-3h)+cf(x-2h)+df(x-h)+ef(x) \tag{3.97}$$

$$f''(x)=\frac{11}{12h^2}f(x-4h)-\frac{14}{3h^2}f(x-3h)+\frac{19}{2h^2}f(x-2h)-\frac{26}{3h^2}f(x-h)+\frac{35}{12h^2}f(x) \tag{3.98}$$

$$f''(x)=\frac{11f(x-4h)-56f(x-3h)+144f(x-2h)-104f(x-h)+35f(x)}{12h^2} \tag{3.99}$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

และค่าคลาดเคลื่อน คือ
$$\left(-\frac{128}{15}a-\frac{243}{120}b-\frac{4}{15}c-\frac{1}{120}d\right)h^5f^{(5)}(x)=O\left(h^4\right) \tag{3.100}$$

ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง คือ

$$f''(x)=\frac{11f(x-4h)-56f(x-3h)+114f(x-2h)-104f(x-h)+35f(x)}{12h^2}+O(h^4) \qquad (3.101)$$

หรือ $$y''(x_i)=\frac{11y(x_{i-4})-56y(x_{i-3})+114y(x_{i-2})-104y(x_{i-1})+35y(x_i)}{12h^2}+O(h^4) \qquad (3.102)$$

3.1.2.3 การหาอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x นั่นคือ $f'(x)$ ถูกประมาณโดยใช้จุด $(x-2h)$, $(x-h)$, $(x+h)$ และ $(x+2h)$ ดังต่อไปนี้

จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Expansion) นั่นคือ

$$f(x-2h) = f(x)-2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)-\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x-h) = f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)-\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)-\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{h^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

$$f(x-2h) = f(x)+2hf'(x)+\frac{(2h)^2}{2!}f''(x)+\frac{(2h)^3}{3!}f'''(x)+\frac{(2h)^4}{4!}f^{(4)}(x)+\frac{(2h)^5}{5!}f^{(5)}(x)+O(h^6)$$

หาค่าอนุพันธ์อันดับสองโดยกำหนดให้

$$f''(x) = af(x-2h)+bf(x-h)+cf(x)+df(x+h)+ef(x+2h) \qquad (3.103)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (a+b+c+d+e)f(x)+(-2a-b+d+2e)hf'(x)+\left(2a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d+2e\right)h^2f''(x) \\ &\quad+\left(-\frac{4}{3}a-\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}d+\frac{4}{3}e\right)h^3f'''(x)+\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{24}b+\frac{1}{24}d+\frac{2}{3}e\right)h^4f^{(4)}(x) \\ &\quad+\left(-\frac{4}{15}a-\frac{1}{120}b+\frac{1}{120}d+\frac{4}{15}e\right)h^5f^{(5)}(x)+O(h^6) \end{aligned} \qquad (3.104)$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$a+b+c+d+e=0 \qquad (3.105)$$

$$-2a-b+d+2e=0 \qquad (3.106)$$

$$2a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}d+2e=\frac{1}{h^2} \quad \text{หรือ} \quad 4a+b+d+4e=\frac{2}{h^2} \qquad (3.107)$$

$$-\frac{4}{3}a-\frac{1}{6}b+\frac{1}{6}d+\frac{4}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad -8a-b+d+8e=0 \qquad (3.108)$$

$$\frac{2}{3}a+\frac{1}{24}b+\frac{1}{24}d+\frac{2}{3}e=0 \quad \text{หรือ} \quad 16a+b+d+16e=0 \qquad (3.109)$$

แก้สมการหาค่าตัวแปร a,b,c,d และ e

$$(3.106)+(3.107);\quad 2a+2d+6e=\frac{2}{h^2} \tag{3.110}$$

$$(3.107)+(3.108);\quad -4a+2d+12e=\frac{2}{h^2} \tag{3.111}$$

$$(3.108)+(3.109);\quad 8a+2d+24e=0 \tag{3.112}$$

$$(3.110)-(3.111);\quad 6a-6e=0 \tag{3.113}$$

ดังนั้น $$a=e \tag{3.114}$$

$$(3.111)-(3.112);\quad -12a-12e=\frac{2}{h^2} \tag{3.115}$$

จาก (3.115); $$-12(e)-12e=\frac{2}{h^2}$$

ดังนั้น $$e=-\frac{1}{12h^2}$$

และ $$a=-\frac{1}{12h^2}$$

จาก (3.110); $$2\left(-\frac{1}{12h^2}\right)+2d+6\left(-\frac{1}{12h^2}\right)=\frac{2}{h^2}$$

ดังนั้น $$d=\frac{4}{3h^2}$$

จาก (3.106); $$-2\left(-\frac{1}{12h^2}\right)-b+\frac{4}{3h^2}+2\left(-\frac{1}{12h^2}\right)=0$$

ดังนั้น $$b=\frac{4}{3h^2}$$

จาก (3.105); $$-\frac{1}{12h^2}+\frac{4}{3h^2}+c+\frac{4}{3h^2}-\frac{1}{12h^2}=0$$

ดังนั้น $$c=-\frac{5}{2h^2}$$

เพราะฉะนั้น $$(a,b,c,d,e)=\left(-\frac{1}{12h^2},\frac{4}{3h^2},-\frac{5}{2h^2},\frac{4}{3h^2},-\frac{1}{12h^2}\right) \tag{3.116}$$

จะได้ $$f''(x)=af(x-2h)+bf(x-h)+cf(x)+df(x+h)+ef(x+2h) \tag{3.117}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{12h^2}(x-2h)+\frac{4}{3h^2}f(x-h)-\frac{5}{2h^2}f(x)+\frac{4}{3h^2}f(x+h)-\frac{1}{12h^2}f(x+2h) \tag{3.118}$$

$$f''(x)=\frac{-f(x-2h)+16f(x-h)-30f(x)+16f(x+h)-f(x+2h)}{12h^2} \tag{3.119}$$

เป็นค่าประมาณอนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

และค่าคลาดเคลื่อน คือ $$\left(-\frac{4}{15}a-\frac{1}{120}b+\frac{1}{120}d+\frac{4}{15}e\right)h^5f^{(5)}(x)=O(h^4) \tag{3.120}$$

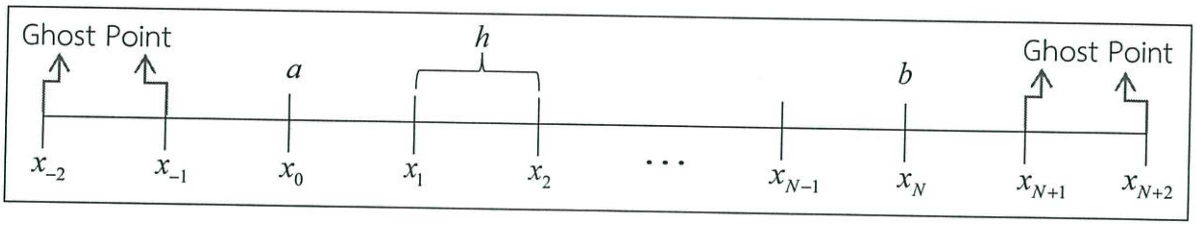
ดังนั้น อนุพันธ์อันดับสองโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง คือ

$$f''(x)=\frac{-f(x-2h)+16f(x-h)-30f(x)+16f(x+h)-f(x+2h)}{12h^2}+O(h^4) \tag{3.121}$$

หรือ $$y''(x_i)=\frac{-y(x_{i-2})+16y(x_{i-1})-30y(x_i)+16y(x_{i+1})-y(x_{i+2})}{12h^2}+O(h^4) \tag{3.122}$$

3.2 เงื่อนไขขอบและจุดสมมติ (Ghost Point)

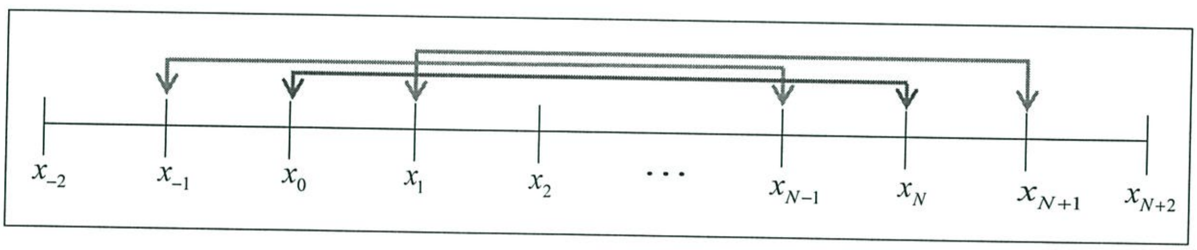
ในระเบียบวิธีผลต่างอันตะสำหรับการประมาณค่าอนุพันธ์จะพิจารณาภายใต้ช่วงปิด $[a,b]$ โดยแบ่งออกเป็น N ช่วงย่อยเท่าๆกัน ซึ่งนิยามการแบ่ง คือ $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 0,1,2,...,\mathrm{N}$ ตามภาพดังนี้



รูปที่ 3.1 การแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่า ๆ กัน

จากเงื่อนไขขอบทำให้ทราบค่า x_0 และ x_N ส่วนที่ไม่อยู่ในขอบเขตที่พิจารณา เราจะเรียกว่าจุดสมมติ (Ghost point) มีหลายวิธีในการกำหนดจุดสมมติ ซึ่งส่วนของงานวิจัยนี้จะมีการกำหนดจุดสมมติ 2 แบบคือ 1) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ 2) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ ดังต่อไปนี้

3.2.1 การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ



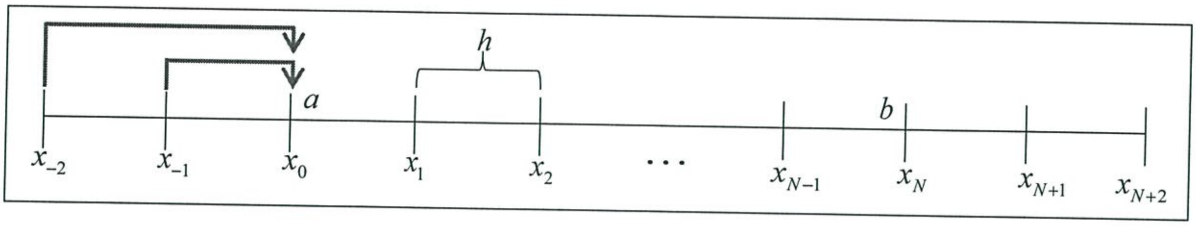
รูปที่ 3.2 การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ

เมื่อค่าขอบฝั่งซ้าย (y_0) เท่ากับค่าขอบฝั่งขวา (y_n) กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ โดยให้ $x_0 = x_N$, $x_{-1} = x_{N-1}$ และ $x_1 = x_{N+1}$ เป็นต้น

3.2.2 การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ โดยใช้ค่าคงที่ในการกำหนดจุดสมมติ

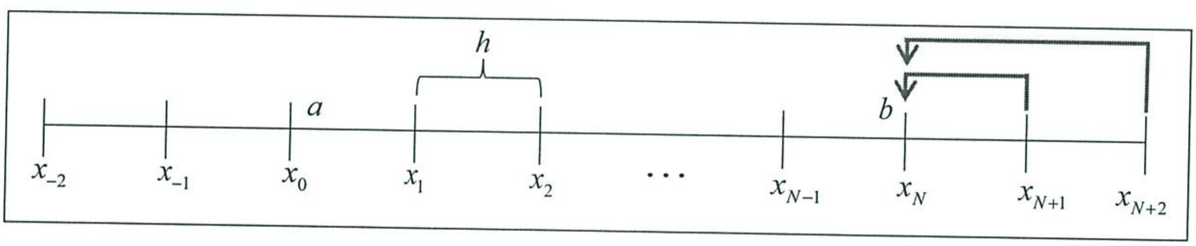
3.2.2.1 การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย



รูปที่ 3.3 การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

กำหนดจุดสมมติโดยให้ $x_0 = x_{-1} = x_{-2}$

3.2.2.2 การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา



รูปที่ 3.4 การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

กำหนดจุดสมมติโดยให้ $x_N = x_{N+1} = x_{N+2}$

3.3 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ

ปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสอง ดังนี้

$$y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x) \quad ;a \le x \le b$$

ด้วยเงื่อนไขขอบดิริชเลท $y(a) = \alpha$ และ $y(b) = \beta$ เริ่มต้นจากการแบ่งจำนวนช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยเท่าๆกัน นิยามการแบ่งโดย $x_i = a + ih$ สำหรับ $i = 0,1,2,\ldots,\mathrm{N}$ เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{N}$ เรียกว่า ระดับขั้น

หรือช่วงกว้าง ดังนั้น จุดปลายช่วงย่อยของการแบ่ง คือ $x_0=\alpha$ และ $x_N=\beta$ และจุดตัดภายในช่วงย่อย คือ $x_i=a+ih$ สำหรับ $i=1,2,\ldots,\mathrm{N}-1$

3.3.1 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x=x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จากสมการ (2.18) คือ

$$y''(x_i)=p(x_i)y'(x_i)+q(x_i)y(x_i)+r(x_i)$$

จากสมการ (3.22) อนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ

$$y'(x_i)=\frac{-25f(x_i)+48f(x_{i+1})-36f(x_{i+2})+16f(x_{i+3})-3f(x_{i+4})}{12h}+\mathrm{O}(h^5)$$

จากสมการ (3.83) อนุพันธ์อันดับสอง คือ

$$y''(x_i)=\frac{35f(x_i)-104f(x_{i+1})+114f(x_{i+2})-56f(x_{i+3})+11f(x_{i+4})}{12h^2}+\mathrm{O}(h^4)$$

นำสมการ (3.22) และ (3.83) แทนลงในสมการ (2.18) จะได้

$$\begin{aligned}&\left[\frac{35f(x_i)-104f(x_{i+1})+114f(x_{i+2})-56f(x_{i+3})+11f(x_{i+4})}{12h^2}+\mathrm{O}(h^4)\right]\\&=p(x_i)\left[\frac{-25f(x_i)+48f(x_{i+1})-36f(x_{i+2})+16f(x_{i+3})-3f(x_{i+4})}{12h}+\mathrm{O}(h^5)\right]+q(x_i)y(x_i)+r(x_i)\end{aligned}\tag{3.123}$$

ตัดพจน์ $\mathrm{O}(h^4)$ และ $\mathrm{O}(h^5)$ ออกจากสมการ (3.123)

$$\begin{aligned}&\left[\frac{35f(x_i)-104f(x_{i+1})+114f(x_{i+2})-56f(x_{i+3})+11f(x_{i+4})}{12h^2}\right]\\&=p(x_i)\left[\frac{-25f(x_i)+48f(x_{i+1})-36f(x_{i+2})+16f(x_{i+3})-3f(x_{i+4})}{12h}\right]+q(x_i)y(x_i)+r(x_i)\end{aligned}\tag{3.124}$$

แทนค่า $y(x_i)=y_i, p(x_i)=p_i, q(x_i)=q_i$ และ $r(x_i)=r_i$ ในสมการ (3.124) จะได้ว่า

$$\left[\frac{35y_i-104y_{i+1}+114y_{i+2}-56y_{i+3}+11y_{i+4}}{12h^2}\right]=p_i\left[\frac{-25y_i+48y_{i+1}-36y_{i+2}+16y_{i+3}-3y_{i+4}}{12h}\right]+q_iy_i+r_i\tag{3.125}$$

นำ $12h^2$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$\begin{aligned}35y_i-104y_{i+1}+114y_{i+2}-56y_{i+3}+11y_{i+4}&=-25hp_iy_i+48hp_iy_{i+1}-36hp_iy_{i+2}+16hp_iy_{i+3}-3hp_iy_{i+4}\\&\quad+12h^2q_iy_i+12h^2r_i\end{aligned}\tag{3.126}$$

นำ (−1) คูณตลอดสมการ จะได้

$$\begin{aligned}-35y_i+104y_{i+1}-114y_{i+2}+56y_{i+3}-11y_{i+4}&=25hp_iy_i-48hp_iy_{i+1}+36hp_iy_{i+2}-16hp_iy_{i+3}+3hp_iy_{i+4}\\&\quad-12h^2q_iy_i-12h^2r_i\end{aligned}\tag{3.127}$$

จัดรูปใหม่ ได้ว่า

$$\begin{aligned}&(-35-25hp_i+12h^2q_i)y_i+(104+48hp_i)y_{i+1}+(-114-36hp_i)y_{i+2}+(56+16hp_i)y_{i+3}+(-11-3hp_i)y_{i+4}\\&=-12h^2r_i\end{aligned}\tag{3.128}$$

กำหนดให้ $a_1 = -35 - 25hp_i + 12h^2 q_i$

$a_2 = 104 + 48hp_i$

$a_3 = -114 - 36hp_i$

$a_4 = 56 + 16hp_i$

$a_5 = -11 - 3hp_i$

จะได้ว่า $$a_1 y_i + a_2 y_{i+1} + a_3 y_{i+2} + a_4 y_{i+3} + a_5 y_{i+4} = -12h^2 r_i \qquad (3.129)$$

กำหนดให้สมการ (3.129) สามารถเขียนในรูปแบบเมทริกซ์ได้ 5 แบบ ต่อไปนี้

1) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12h^2 r_0 - a_1 y_0 \\ -12h^2 r_1 \\ -12h^2 r_2 \\ \vdots \\ -12h^2 r_i \\ \vdots \\ -12h^2 r_{N-1} - a_3 y_N - a_4 y_{N+1} - a_5 y_{N+2} \end{bmatrix} \qquad (3.130)$$

กำหนดให้ $y_N = y_{N+1} = y_{N+2}$

2) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

$$\begin{bmatrix} a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12h^2 r_0 - a_1 y_0 \\ -12h^2 r_1 \\ -12h^2 r_2 \\ \vdots \\ -12h^2 r_i \\ \vdots \\ -12h^2 r_{N-1} - a_3 y_N \end{bmatrix} \qquad (3.131)$$

กำหนดให้ $y_{N+1} = y_1,\ y_{N+2} = y_2$

3) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

$$\begin{bmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12h^2 r_{-2} - a_1 y_{-2} - a_2 y_{-1} - a_3 y_0 \\ -12h^2 r_{-1} - a_1 y_{-1} - a_2 y_0 \\ -12h^2 r_0 - a_1 y_0 \\ \vdots \\ -12h^2 r_i \\ \vdots \\ -12h^2 r_{N-1} - a_5 y_N \end{bmatrix} \qquad (3.132)$$

กำหนดให้ $y_{-2} = y_{-1} = y_0$

4) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

$$\begin{bmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_4 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12h^2 r_{-2} - a_3 y_0 \\ -12h^2 r_{-1} - a_2 y_0 \\ -12h^2 r_0 \\ \vdots \\ -12h^2 r_i \\ \vdots \\ -12h^2 r_{N-1} - a_5 y_N \end{bmatrix} \tag{3.133}$$

กำหนดให้ $y_{-2} = y_{N-2},\ y_{-1} = y_{N-1}$

5) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12h^2 r_1 \\ -12h^2 r_2 \\ -12h^2 r_3 \\ \vdots \\ -12h^2 r_i \\ \vdots \\ -12h^2 r_{N-1} - a_2 y_N \end{bmatrix} \tag{3.134}$$

กำหนดให้ $y_{N+1} = y_1,\ y_{N+2} = y_2,\ y_{N+3} = y_3$

สังเกตว่า สมการ $(3.130),(3.131),(3.132),(3.133),(3.134)$ สามารถเขียนในรูปสมการ $Ay = b$

3.3.2 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x = x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จากสมการ (2.18) คือ

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

จากสมการ (3.41) อนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ

$$y'(x_i) = \frac{3y(x_{i-4}) - 16y(x_{i-3}) + 36y(x_{i-2}) - 48y(x_{i-1}) + 25y(x_i)}{12h} + O(h^5)$$

จากสมการ (3.102) อนุพันธ์อันดับสอง คือ

$$y''(x_i) = \frac{11y(x_{i-4}) - 56y(x_{i-3}) + 114y(x_{i-2}) - 104y(x_{i-1}) + 35y(x_i)}{12h^2} + O(h^4)$$

นำสมการ (3.41) และ (3.102) แทนลงในสมการ (2.18) จะได้

$$\begin{aligned} &\left[\frac{11y(x_{i-4}) - 56y(x_{i-3}) + 114y(x_{i-2}) - 104y(x_{i-1}) + 35y(x_i)}{12h^2} + O(h^4)\right] \\ &= p(x_i)\left[\frac{3y(x_{i-4}) - 16y(x_{i-3}) + 36y(x_{i-2}) - 48y(x_{i-1}) + 25y(x_i)}{12h} + O(h^5)\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \end{aligned} \tag{3.135}$$

ตัดพจน์ $O(h^4)$ และ $O(h^5)$ ออกจากสมการ (3.135)

$$\left[\frac{11y(x_{i-4})-56y(x_{i-3})+114y(x_{i-2})-104y(x_{i-1})+35y(x_i)}{12h^2}\right]$$
$$=p(x_i)\left[\frac{3y(x_{i-4})-16y(x_{i-3})+36y(x_{i-2})-48y(x_{i-1})+25y(x_i)}{12h}\right]+q(x_i)y(x_i)+r(x_i) \quad (3.136)$$

แทนค่า $y(x_i)=y_i, p(x_i)=p_i, q(x_i)=q_i$ และ $r(x_i)=r_i$ ในสมการ (3.136) จะได้ว่า

$$\left[\frac{11y_{i-4}-56y_{i-3}+114y_{i-2}-104y_{i-1}+35y_i}{12h^2}\right]=p_i\left[\frac{3y_{i-4}-16y_{i-3}+36y_{i-2}-48y_{i-1}+25y_i}{12h}\right]+q_iy_i+r_i \quad (3.137)$$

นำ $12h^2$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$11y_{i-4}-56y_{i-3}+114y_{i-2}-104y_{i-1}+35y_i=3hp_iy_{i-4}-16hp_iy_{i-3}+36hp_iy_{i-2}-48hp_iy_{i-1}+25hp_iy_i$$
$$+12h^2q_iy_i+12h^2r_i \quad (3.138)$$

จัดใหม่ ได้ว่า

$$(11-3hp_i)y_{i-4}+(-56+16hp_i)y_{i-3}+(114-36hp_i)y_{i-2}+(-104+48hp_i)y_{i-1}+(35-25hp_i-12h^2q_i)y_i$$
$$=12h^2r_i \quad (3.139)$$

กำหนดให้ $b_1=11-3hp_i$

$b_2=-56+16hp_i$

$b_3=114-36hp_i$

$b_4=-104+48hp_i$

$b_5=35-25hp_i-12h^2q_i$

จะได้ว่า $b_1y_{i-4}+b_2y_{i-3}+b_3y_{i-2}+b_4y_{i-1}+b_5y_i=12h^2r_i$ (3.140)

กำหนดให้สมการ (3.140) สามารถเขียนในรูปแบบเมทริกซ์ได้ 5 แบบ ต่อไปนี้

1) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

$$\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12h^2r_1-b_1y_0 \\ 12h^2r_2 \\ 12h^2r_3 \\ \vdots \\ 12h^2r_i \\ \vdots \\ 12h^2r_{N-1}-b_3y_N-b_4y_{N+1}-b_5y_{N+2} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

กำหนดให้ $y_N=y_{N+1}=y_{N+2}$

2) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

$$\begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12h^2 r_1 - b_1 y_0 \\ 12h^2 r_2 \\ 12h^2 r_3 \\ \vdots \\ 12h^2 r_i \\ \vdots \\ 12h^2 r_{N-1} - b_3 y_N \end{bmatrix} \tag{3.142}$$

กำหนดให้ $y_{N+1} = y_1,\ y_{N+2} = y_2$

3) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12h^2 r_1 - b_3 y_0 - b_2 y_{-1} - b_1 y_{-2} \\ 12h^2 r_2 - b_2 y_0 - b_1 y_{-1} \\ 12h^2 r_3 - b_1 y_0 \\ \vdots \\ 12h^2 r_i \\ \vdots \\ 12h^2 r_{N-1} - b_5 y_N \end{bmatrix} \tag{3.143}$$

กำหนดให้ $y_{-2} = y_{-1} = y_0$

4) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_1 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12h^2 r_1 - b_3 y_0 \\ 12h^2 r_2 - b_2 y_0 \\ 12h^2 r_3 - b_1 y_0 \\ \vdots \\ 12h^2 r_i \\ \vdots \\ 12h^2 r_{N-1} - b_5 y_N \end{bmatrix} \tag{3.144}$$

กำหนดให้ $y_{-2} = y_{N-2},\ y_{-1} = y_{N-1}$

5) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ

$$\begin{bmatrix} b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12h^2r - b_4y_0 \\ 12h^2r_2 - b_3y_0 \\ 12h^2r_3 - b_2y_0 \\ \vdots \\ 12h^2r_i \\ \vdots \\ 12h^2r_{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

กำหนดให้ $y_{-3} = y_{N-3},\ y_{-2} = y_{N-2},\ y_{-1} = y_{N-1}$

สังเกตว่า สมการ $(3.141),(3.142),(3.143),(3.144),(3.145)$ สามารถเขียนในรูปสมการ $Ay = b$

3.3.3 การประมาณค่าอนุพันธ์โดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ ณ จุด $x = x_i$ ประมาณค่าพจน์ที่เป็นอนุพันธ์จากสมการ (2.18) คือ

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i)$$

จากสมการ (3.61) อนุพันธ์อันดับหนึ่ง คือ

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i-2}) - 8y(x_{i-1}) + 8y(x_{i+1}) - y(x_{i+2})}{12h} + O(h^5)$$

จากสมการ (3.122) อนุพันธ์อันดับสอง คือ

$$y''(x_i) = \frac{-y(x_{i-2}) + 16y(x_{i-1}) - 30y(x_i) + 16y(x_{i+1}) - y(x_{i+2})}{12h^2} + O(h^4)$$

นำสมการ (3.61) และ (3.122) แทนลงในสมการ (2.18) จะได้

$$\left[\frac{-y(x_{i-2}) + 16y(x_{i-1}) - 30y(x_i) + 16y(x_{i+1}) - y(x_{i+2})}{12h^2} + O(h^4)\right]$$
$$= p(x_i)\left[\frac{y(x_{i-2}) - 8y(x_{i-1}) + 8y(x_{i+1}) - y(x_{i+2})}{12h} + O(h^5)\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \quad (3.146)$$

ตัดเทอม $O(h^5)$ และ $O(h^4)$ ออกจากสมการ (3.146)

$$\left[\frac{-y(x_{i-2}) + 16y(x_{i-1}) - 30y(x_i) + 16y(x_{i+1}) - y(x_{i+2})}{12h^2}\right]$$
$$= p(x_i)\left[\frac{y(x_{i-2}) - 8y(x_{i-1}) + 8y(x_{i+1}) - y(x_{i+2})}{12h}\right] + q(x_i)y(x_i) + r(x_i) \quad (3.147)$$

แทนค่า $y(x_i) = y_i, p(x_i) = p_i, q(x_i) = q_i$ และ $r(x_i) = r_i$ ในสมการ (3.147) จะได้ว่า

$$\left[\frac{-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2}}{12h^2}\right] = p_i\left[\frac{y_{i-2} - 8y_{i-1} + 8y_{i+1} - y_{i+2}}{12h}\right] + q_iy_i + r_i \quad (3.148)$$

นำ $12h^2$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$-y_{i-2} + 16y_{i-1} - 30y_i + 16y_{i+1} - y_{i+2} = hp_iy_{i-2} - 8hp_iy_{i-1} + 8hp_iy_{i+1} - hp_iy_{i+2} + 12h^2q_iy_i + 12h^2r_i \quad (3.149)$$

นำ (-1) คูณตลอดสมการ จะได้

$$y_{i-2}-16y_{i-1}+30y_i-16y_{i+1}+y_{i+2}=-hp_iy_{i-2}+8hp_iy_{i-1}-8hp_iy_{i+1}+hp_iy_{i+2}-12h^2q_iy_i-12h^2r_i \tag{3.150}$$

จัดใหม่ ได้ว่า

$$(1+hp_i)y_{i-2}+(-16-8hp_i)y_{i-1}+(30+12h^2q_i)y_i+(-16+8hp_i)y_{i+1}+(1-hp_i)y_{i+2}=-12h^2r_i \tag{3.151}$$

กำหนดให้ $c_1=1+hp_i$

$c_2=-16-8hp_i$

$c_3=30+12h^2q_i$

$c_4=-16+8hp_i$

$c_5=1-hp_i$

จะได้ว่า $c_1y_{i-2}+c_2y_{i-1}+c_3y_i+c_4y_{i+1}+c_5y_{i+2}=-12h^2r_i$ (3.152)

กำหนดให้สมการ (3.152) สามารถเขียนในรูปแบบเมทริกซ์ได้ 2 แบบ ต่อไปนี้

1) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

$$\begin{bmatrix} c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12h^2r_1-c_1y_{-1}-c_2y_0 \\ -12h^2r_2-c_1y_0 \\ -12h^2r_3 \\ \vdots \\ -12h^2r_i \\ \vdots \\ -12h^2r_{N-1}-c_4y_N-c_5y_{N+1} \end{bmatrix} \tag{3.153}$$

กำหนดให้ $y_{-1}=y_0,\ y_{N+1}=y_N$

2) การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ

$$\begin{bmatrix} c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12h^2r_1-c_2y_0 \\ -12h^2r_2-c_1y_0 \\ -12h^2r_3 \\ \vdots \\ -12h^2r_i \\ \vdots \\ -12h^2r_{N-1}-c_4y_N \end{bmatrix} \tag{3.154}$$

กำหนดให้ $y_{-1}=y_{N-1},\ y_{N+1}=y_1$

สังเกตว่า สมการ (3.153),(3.154) สามารถเขียนในรูปสมการ $Ay=b$

บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

ในบทนี้จะคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองของปัญหาค่าขอบดิริชเลทโดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะซึ่งแบ่งออกเป็น 3 วิธี คือ วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังและวิธีผลต่างสี่จุดกลาง โดยใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย หลังจากนั้นนำผลเฉลยเชิงตัวเลขของแต่ละวิธีมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงเพื่อตรวจสอบความถูกต้องซึ่งจะแสดงอยู่ในรูปแบบของตาราง จากนั้นแสดงในรูปแบบการจำลองกราฟพร้อมทั้งวิเคราะห์และอภิปรายผลการเปรียบเทียบที่ได้

ขั้นตอนต่อไปผู้วิจัยจะหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่สามารถหาผลเฉลยจริงได้เพื่อตรวจสอบความถูกต้องของโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยเริ่มจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 4.1 พิจารณาปัญหาค่าขอบ $y''+4y=\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{4},\quad y(0)=0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

ซึ่งผลเฉลยจริงหาได้จากสมการ $y(x)=\dfrac{-1}{3}\cos 2x-\dfrac{\sqrt{2}}{6}\sin 2x+\dfrac{1}{3}\cos x$

วิธีทำ

โดยรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองและจากโจทย์จะได้ว่า $p(x)=0,\quad q(x)=4$ และ $r(x)=\cos x$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ ออกเป็น N ช่วงย่อยและจะได้ค่า h คือ ช่วงกว้างต่าง ๆ นิยามการแบ่งโดย $x_i=a+ih$ สำหรับ $i=0,1,2,\dots,N$ ซึ่งผู้วิจัยได้แบ่งช่วงย่อยออกเป็น 10, 20, 30 และ 60 ดังนั้นช่วงกว้างจะมีค่าเป็น $h=\dfrac{\pi}{40},\dfrac{\pi}{80},\dfrac{\pi}{120},\dfrac{\pi}{240}$ ตามลำดับ แล้วใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลยตามรูปแบบของสมการผลต่างอันตะดังที่แสดงไว้แล้วในบทที่ 3 ซึ่งต่อไปนี้จะแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขในรูปแบบของตาราง กราฟของผลเฉลยและค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ในรูปแบบตารางตามที่จะกล่าวดังต่อไปนี้

1) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าแบ่งออกเป็น 5 รูปแบบ โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1, 2 วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

ตารางที่ 4.1 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	–0.0606	–0.0084	0.0047
$y(4)$	–0.0912	0.0077	0.1246
$y(6)$	–0.0896	0.0345	0.7357
$y(8)$	–0.0575	0.0334	1.9163
$y(10)$	0	0	0

ตารางที่ 4.2 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย $(1.0e+03*)$
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	–0.0338	–0.0190	0.0004
$y(4)$	–0.0606	–0.0316	0.0026
$y(6)$	–0.0799	–0.0375	0.0073
$y(8)$	–0.0912	–0.0367	0.0000
$y(10)$	–0.0944	–0.0292	–0.0692
$y(12)$	–0.0896	–0.0149	–0.2168
$y(14)$	–0.0771	0.0057	0.0125
$y(16)$	–0.0575	0.0256	2.2523
$y(18)$	–0.0315	0.0252	7.1210
$y(20)$	0	0	0

ตารางที่ 4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย $(1.0e+04*)$
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	–0.0233	–0.0163	–0.0000
$y(4)$	–0.0435	–0.0297	–0.0000
$y(6)$	–0.0606	–0.0401	0.0000
$y(8)$	–0.0743	–0.0474	0.0000
$y(10)$	–0.0846	–0.0516	0.0001
$y(12)$	–0.0912	–0.0526	0.0000
$y(14)$	–0.0942	–0.0505	–0.0006
$y(16)$	–0.0937	–0.0454	–0.0018
$y(18)$	–0.0896	–0.0374	0.0001

ตารางที่ 4.3 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย $(1.0e+04*)$
$y(20)$	−0.0821	−0.0265	0.0189
$y(22)$	−0.0713	−0.0126	0.0591
$y(24)$	−0.0575	0.0043	−0.0019
$y(26)$	−0.0408	0.0196	−0.6058
$y(28)$	−0.0215	−0.0190	−1.9197
$y(30)$	0	0	0

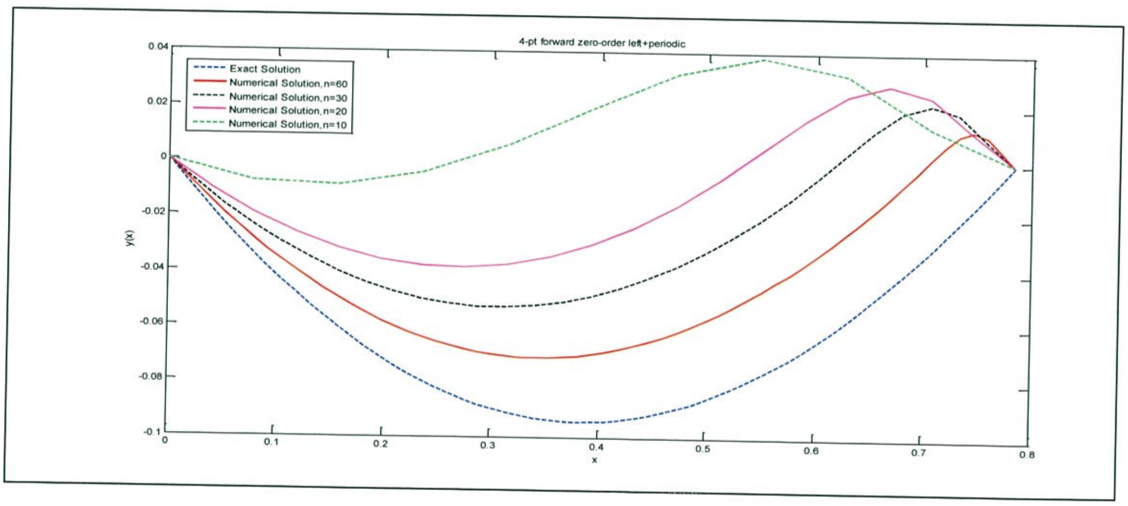
ตารางที่ 4.4 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย $(1.0e+11*)$
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0120	−0.0101	−0.0000
$y(4)$	−0.0233	−0.0196	−0.0000
$y(6)$	−0.0338	−0.0283	0.0000
$y(8)$	−0.0435	−0.0362	0.0000
$y(10)$	−0.0525	−0.0433	0.0000
$y(12)$	−0.0606	−0.0497	−0.0000
$y(14)$	−0.0679	−0.0552	−0.0000
$y(16)$	−0.0743	−0.0600	−0.0000
$y(18)$	−0.0799	−0.0639	0.0000
$y(20)$	−0.0846	−0.0670	0.0000
$y(22)$	−0.0883	−0.0692	0.0000
$y(24)$	−0.0912	−0.0706	−0.0000
$y(26)$	−0.0932	−0.0711	−0.0000
$y(28)$	−0.0942	−0.0709	−0.0000
$y(30)$	−0.0944	−0.0698	0.0000
$y(32)$	−0.0937	−0.0678	0.0000
$y(34)$	−0.0921	−0.0651	0.0000
$y(36)$	−0.0896	−0.0616	−0.0000
$y(38)$	−0.0863	−0.0574	−0.0000
$y(40)$	−0.0821	−0.0524	−0.0000
$y(42)$	−0.0771	−0.0446	0.0000
$y(44)$	−0.0713	−0.0402	0.0005
$y(46)$	−0.0648	−0.0331	0.0016
$y(48)$	−0.0575	−0.0254	−0.0001
$y(50)$	−0.0495	−0.0170	−0.0160

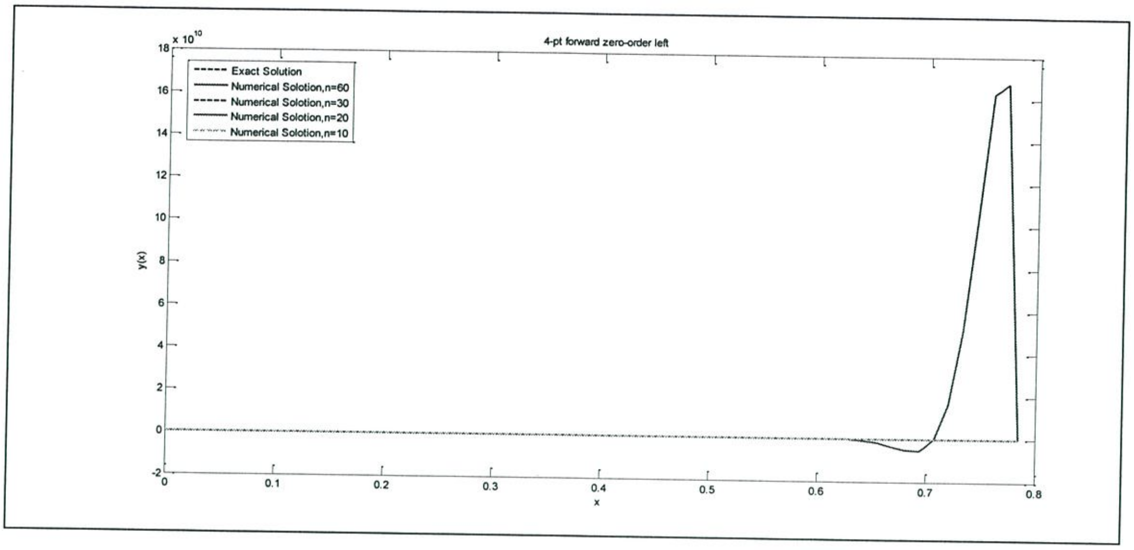
ตารางที่ 4.4 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย $(1.0e+11*)$
$y(52)$	–0.0408	–0.0077	–0.0503
$y(54)$	–0.0315	0.0024	0.0010
$y(56)$	–0.0215	0.0111	0.5127
$y(58)$	–0.0110	0.0108	1.6264
$y(60)$	0	0	0

จากตารางที่ 4.1 – 4.4 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ ถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบมีความเหมาะสมมากกว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายเพียงอย่างเดียว จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.1 เห็นได้ชัดว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ เมื่อยิ่งแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากขึ้น และรูปที่ 4.2 สังเกตได้ว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย จะมีผลเฉลยที่ช่วงกว้างหนึ่งมีแนวโน้มลู่ออกจากผลเฉลยจริงมาก ดังนั้นหากจะใช้การกำหนดจุดสมมติรูปแบบนี้จึงค่อนข้างที่จะไม่เหมาะสมสำหรับระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

รูปแบบที่ 3, 4 วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

ตารางที่ 4.5 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0606	−0.0486	−0.0617
$y(4)$	−0.0912	−0.0678	−0.0936
$y(6)$	−0.0896	−0.0567	−0.0934
$y(8)$	−0.0575	−0.0246	−0.0607
$y(10)$	0	0	0

ตารางที่ 4.6 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h = \frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0338	−0.0308	−0.0338
$y(4)$	−0.0606	−0.0547	−0.0607
$y(6)$	−0.0799	−0.0712	−0.0800
$y(8)$	−0.0912	−0.0801	−0.0915
$y(10)$	−0.0944	−0.0813	−0.0949
$y(12)$	−0.0896	−0.0747	−0.0905
$y(14)$	−0.0771	−0.0606	−0.0784
$y(16)$	−0.0575	−0.0392	−0.0593
$y(18)$	−0.0315	−0.0148	−0.0330
$y(20)$	0	0	0

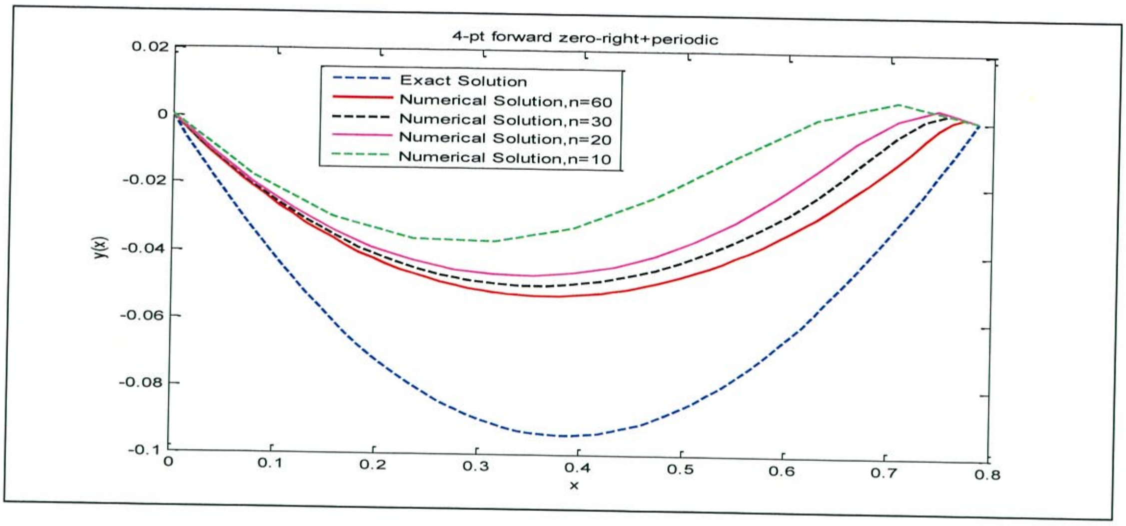
ตารางที่ 4.7 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h = \frac{\pi}{120}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางกับแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0233	−0.0219	−0.0232
$y(4)$	−0.0435	−0.0409	−0.0435
$y(6)$	−0.0606	−0.0567	−0.0606
$y(8)$	−0.0743	−0.0691	−0.0743
$y(10)$	−0.0846	−0.0782	−0.0845
$y(12)$	−0.0912	−0.0838	−0.0912
$y(14)$	−0.0942	−0.0858	−0.0943
$y(16)$	−0.0937	−0.0844	−0.0939
$y(18)$	−0.0896	−0.0797	−0.0899
$y(20)$	−0.0821	−0.0716	−0.0826
$y(22)$	−0.0713	−0.0604	−0.0720
$y(24)$	−0.0575	−0.0459	−0.0584
$y(26)$	−0.0408	−0.0284	−0.0420
$y(28)$	−0.0215	−0.0104	−0.0226
$y(30)$	0	0	0

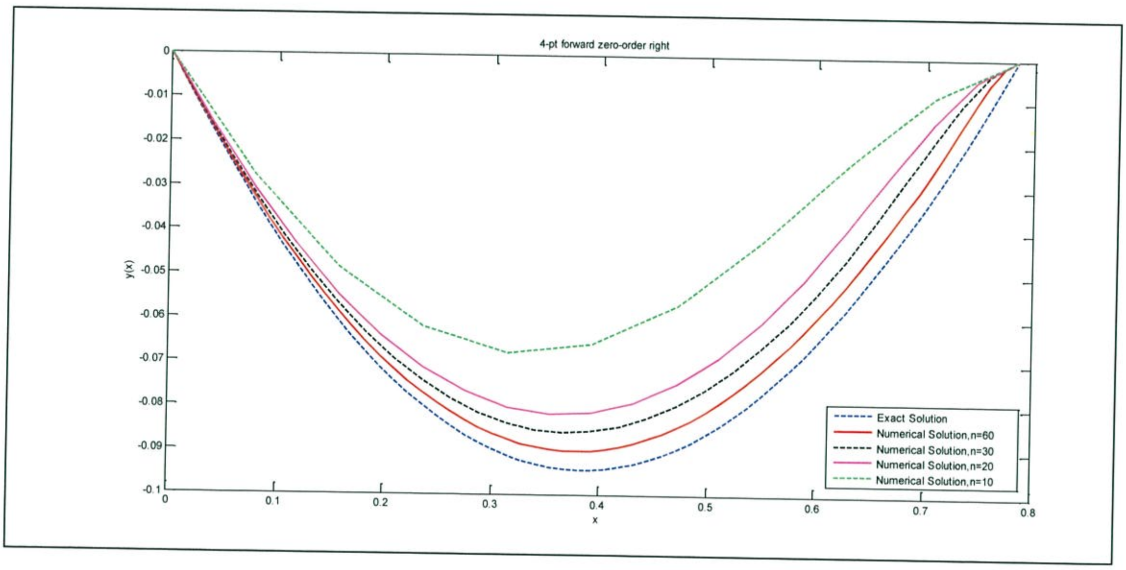
ตารางที่ 4.8 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0120	−0.0117	−0.0120
$y(4)$	−0.0233	−0.0226	−0.0232
$y(6)$	−0.0338	−0.0328	−0.0338
$y(8)$	−0.0435	−0.0422	−0.0435
$y(10)$	−0.0525	−0.0508	−0.0524
$y(12)$	−0.0606	−0.0586	−0.0606
$y(14)$	−0.0679	−0.0656	−0.0678
$y(16)$	−0.0743	−0.0717	−0.0743
$y(18)$	−0.0799	−0.0770	−0.0798
$y(20)$	−0.0846	−0.0814	−0.0845
$y(22)$	−0.0883	−0.0848	−0.0882
$y(24)$	−0.0912	−0.0875	−0.0911
$y(26)$	−0.0932	−0.0892	−0.0931
$y(28)$	−0.0942	−0.0900	−0.0942
$y(30)$	−0.0944	−0.0900	−0.0944
$y(32)$	−0.0937	−0.0890	−0.0937
$y(34)$	−0.0921	−0.0872	−0.0921
$y(36)$	−0.0896	−0.0846	−0.0896
$y(38)$	−0.0863	−0.0811	−0.0863
$y(40)$	−0.0821	−0.0768	−0.0822
$y(42)$	−0.0771	−0.0717	−0.0773
$y(44)$	−0.0713	−0.0658	−0.0715
$y(46)$	−0.0648	−0.0592	−0.0650
$y(48)$	−0.0575	−0.0518	−0.0578
$y(50)$	−0.0495	−0.0438	−0.0498
$y(52)$	−0.0408	−0.0351	−0.0412
$y(54)$	−0.0315	−0.0256	−0.0320
$y(56)$	−0.0215	−0.0153	−0.0221
$y(58)$	−0.0110	−0.0055	−0.0115
$y(60)$	0	0	0

จากตารางที่ 4.5 – 4.8 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวากับเงื่อนไขขอบแบบคาบ เห็นได้ว่าถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาเหมาะสมกว่า จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา และแบบคาบเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.3 – 4.4 เห็นได้ชัดว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ เมื่อแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากขึ้น ในทำนองเดียวกันการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาก็มีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงด้วย แต่สามารถเห็นได้ชัดว่าที่ช่วงกว้างเดียวกันนั้นสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวามีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงได้เร็วกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

รูปแบบที่ 5 วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ

ตารางที่ 4.9 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0606	−0.0321
$y(4)$	−0.0912	−0.0580
$y(6)$	−0.0896	−0.0529
$y(8)$	−0.0575	−0.0231
$y(10)$	0	0

ตารางที่ 4.10 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0338	−0.0205
$y(4)$	−0.0606	−0.0459
$y(6)$	−0.0799	−0.0642
$y(8)$	−0.0912	−0.0748
$y(10)$	−0.0944	−0.0779
$y(12)$	−0.0896	−0.0732
$y(14)$	−0.0771	−0.0609
$y(16)$	−0.0575	−0.0405
$y(18)$	−0.0315	−0.0151
$y(20)$	0	0

ตารางที่ 4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0233	−0.0146
$y(4)$	−0.0435	−0.0342
$y(6)$	−0.0606	−0.0507
$y(8)$	−0.0743	−0.0639
$y(10)$	−0.0846	−0.0738
$y(12)$	−0.0912	−0.0802
$y(14)$	−0.0942	−0.0831
$y(16)$	−0.0937	−0.0825
$y(18)$	−0.0896	−0.0786

ตารางที่ 4.11 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(20)$	–0.0821	–0.0714
$y(22)$	–0.0713	–0.0610
$y(24)$	–0.0575	–0.0473
$y(26)$	–0.0408	–0.0300
$y(28)$	–0.0215	–0.0109
$y(30)$	0	0

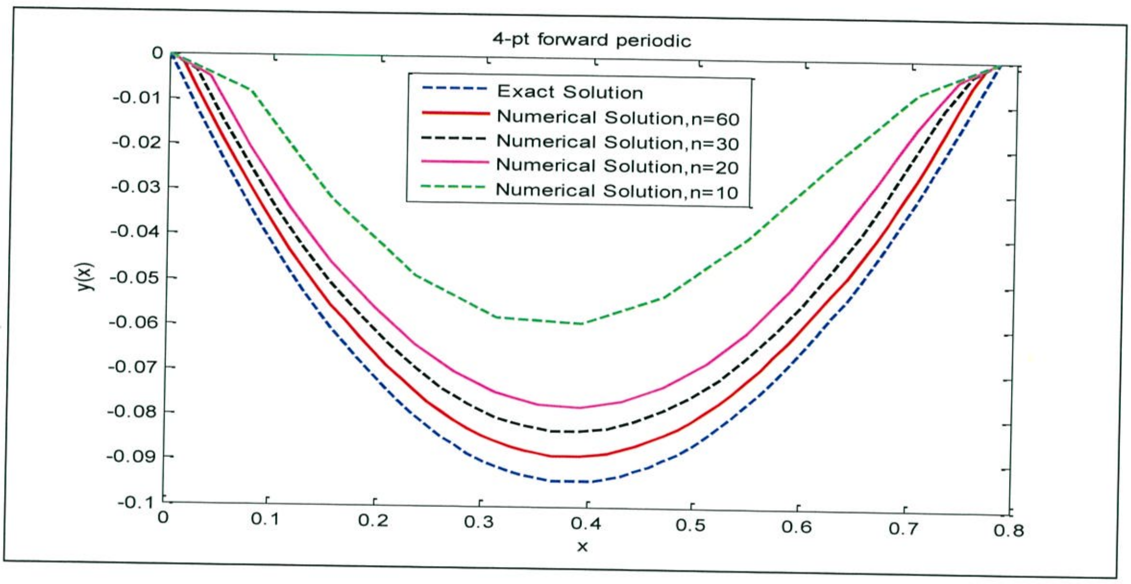
ตารางที่ 4.12 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	–0.0120	–0.0078
$y(4)$	–0.0233	–0.0189
$y(6)$	–0.0338	–0.0292
$y(8)$	–0.0435	–0.0388
$y(10)$	–0.0525	–0.0476
$y(12)$	–0.0606	–0.0556
$y(14)$	–0.0679	–0.0628
$y(16)$	–0.0743	–0.0691
$y(18)$	–0.0799	–0.0745
$y(20)$	–0.0846	–0.0791
$y(22)$	–0.0883	–0.0828
$y(24)$	–0.0912	–0.0856
$y(26)$	–0.0932	–0.0876
$y(28)$	–0.0942	–0.0886
$y(30)$	–0.0944	–0.0888
$y(32)$	–0.0937	–0.0881
$y(34)$	–0.0921	–0.0865
$y(36)$	–0.0896	–0.0840
$y(38)$	–0.0863	–0.0808
$y(40)$	–0.0821	–0.0767
$y(42)$	–0.0771	–0.0718
$y(44)$	–0.0713	–0.0661
$y(46)$	–0.0648	–0.0596
$y(48)$	–0.0575	–0.0525
$y(50)$	–0.0495	–0.0466
$y(52)$	–0.0408	–0.0361
$y(54)$	–0.0315	–0.0268

ตารางที่ 4.12 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนด $h = \frac{\pi}{240}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(56)$	−0.0215	−0.0164
$y(58)$	−0.0110	−0.0058
$y(60)$	0	0

จากตารางที่ 4.9 – 4.12 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ เห็นได้ว่าหากยิ่งแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงมากยิ่งขึ้นแล้วผลเฉลยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงด้วยเช่นกัน จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



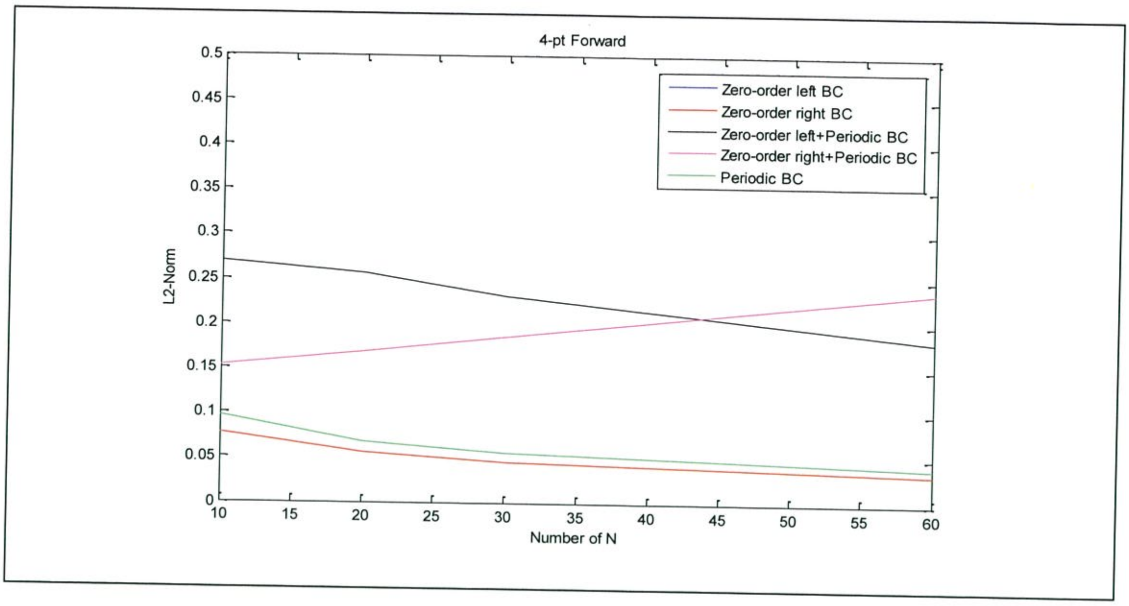
รูปที่ 4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

เนื่องจากระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าพิจารณาสมการผลต่างอันตะในรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ เพื่อต้องการทราบรูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการกำหนดจุดสมมติของระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าสำหรับตัวอย่างนี้ ดังนั้นจึงหาค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.13 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ

ช่วงกว้าง	สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ				
	อันดับศูนย์ทางขวา	แบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$h=\frac{\pi}{40}$	0.0760	0.0962	0.2685	0.5131	3.2461
$h=\frac{\pi}{80}$	0.0553	0.0680	0.2555	0.1676	$1.1468e+04$
$h=\frac{\pi}{120}$	0.0457	0.0558	0.2305	0.1857	$3.0910e+04$
$h=\frac{\pi}{240}$	0.0328	0.0397	0.1808	0.2361	$2.6184e+11$
$h=\frac{\pi}{480}$	0.0234	0.0282	0.1349	0.3162	NaN
$h=\frac{\pi}{960}$	0.0167	0.0200	0.0981	0.4351	NaN
$h=\frac{\pi}{1920}$	0.0118	0.0142	0.0703	0.6069	NaN
$h=\frac{\pi}{3840}$	0.0084	0.0100	0.0501	0.8524	NaN
$h=\frac{\pi}{7680}$	0.0059	0.0071	0.0355	1.2014	NaN
$h=\frac{\pi}{15360}$	0.0042	0.0050	0.0252	1.6961	NaN

จากตารางที่ 4.13 เมื่อนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm จากสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ มาเปรียบเทียบกัน เห็นได้ชัดว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า ถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวามีความเหมาะสมมากกว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอื่น ๆ เนื่องจากว่ามีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่ารูปแบบอื่น ๆ และจากตารางยังสังเกตได้ว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า ถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย พบว่าที่ช่วงกว้างหนึ่งไม่สามารถประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ดีนัก เพื่อภาพที่ชัดเจนยิ่งขึ้นจะแสดงในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.6 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ

จากรูปที่ 4.6 กราฟสีแดงเป็นค่าคลาดเคลื่อนของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เห็นได้ชัดว่าวิธีการดังกล่าวมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ในลำดับถัดมาคือกราฟสีเขียวเป็นค่าคลาดเคลื่อนของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยเป็นลำดับถัดมาจากกราฟสีแดง และเห็นว่าในรูปไม่ปรากฏกราฟเส้นสีน้ำเงินเนื่องจากเป็นค่าคลาดเคลื่อนของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนมากเกินกว่าจะนำมาพิจารณาได้

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าโดยรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวามีความเหมาะสมมากกว่ารูปแบบการกำหนดจุดสมมติรูปแบบอื่น ๆ

2) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังแบ่งออกเป็น 5 รูปแบบ โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1, 2 วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

ตารางที่ 4.14 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	–0.0606	–0.0014	–0.0251
$y(4)$	–0.0912	–0.0325	–0.0568
$y(6)$	–0.0896	–0.0494	–0.0665
$y(8)$	–0.0575	–0.0377	–0.0464
$y(10)$	0	0	0

ตารางที่ 4.15 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	–0.0338	–0.0012	–0.0155
$y(4)$	–0.0606	–0.0250	–0.0407
$y(6)$	–0.0799	–0.0485	–0.0625
$y(8)$	–0.0912	–0.0640	–0.0763
$y(10)$	–0.0944	–0.0711	–0.0818
$y(12)$	–0.0896	–0.0704	–0.0793
$y(14)$	–0.0771	–0.0625	–0.0694
$y(16)$	–0.0575	–0.0477	–0.0524
$y(18)$	–0.0315	–0.0266	–0.0290
$y(20)$	0	0	0

ตารางที่ 4.16 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	–0.0233	–0.0010	–0.0110
$y(4)$	–0.0435	–0.0189	–0.0300
$y(6)$	–0.0606	–0.0380	–0.0483
$y(8)$	–0.0743	–0.0535	–0.0631
$y(10)$	–0.0846	–0.0650	–0.0741
$y(12)$	–0.0912	–0.0731	–0.0815
$y(14)$	–0.0942	–0.0777	–0.0855
$y(16)$	–0.0937	–0.0789	–0.0860
$y(18)$	–0.0896	–0.0768	–0.0829
$y(20)$	–0.0821	–0.0713	–0.0765

ตารางที่ 4.16 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$y(22)$	−0.0713	−0.0626	−0.0669
$y(24)$	−0.0575	−0.0509	−0.0542
$y(26)$	−0.0408	−0.0364	−0.0386
$y(28)$	−0.0215	−0.0194	−0.0205
$y(30)$	0	0	0

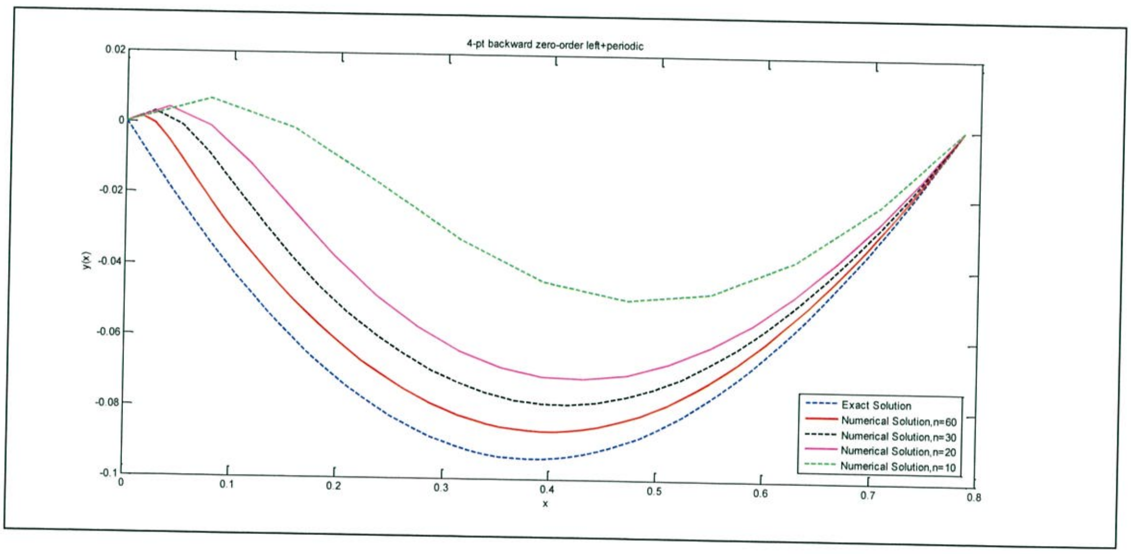
ตารางที่ 4.17 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0120	−0.0006	−0.0059
$y(4)$	−0.0233	−0.0106	−0.0165
$y(6)$	−0.0338	−0.0219	−0.0275
$y(8)$	−0.0435	−0.0322	−0.0375
$y(10)$	−0.0525	−0.0414	−0.0466
$y(12)$	−0.0606	−0.0497	−0.0548
$y(14)$	−0.0679	−0.0572	−0.0623
$y(16)$	−0.0743	−0.0639	−0.0689
$y(18)$	−0.0799	−0.0698	−0.0746
$y(20)$	−0.0846	−0.0747	−0.0794
$y(22)$	−0.0883	−0.0789	−0.0834
$y(24)$	−0.0912	−0.0821	−0.0865
$y(26)$	−0.0932	−0.0845	−0.0887
$y(28)$	−0.0942	−0.0860	−0.0900
$y(30)$	−0.0944	−0.0866	−0.0904
$y(32)$	−0.0937	−0.0863	−0.0899
$y(34)$	−0.0921	−0.0852	−0.0886
$y(36)$	−0.0896	−0.0832	−0.0864
$y(38)$	−0.0863	−0.0804	−0.0833
$y(40)$	−0.0821	−0.0767	−0.0794
$y(42)$	−0.0771	−0.0722	−0.0747
$y(44)$	−0.0713	−0.0670	−0.0692
$y(46)$	−0.0648	−0.0610	−0.0629
$y(48)$	−0.0575	−0.0542	−0.0559
$y(50)$	−0.0495	−0.0468	−0.0482
$y(52)$	−0.0408	−0.0386	−0.0398

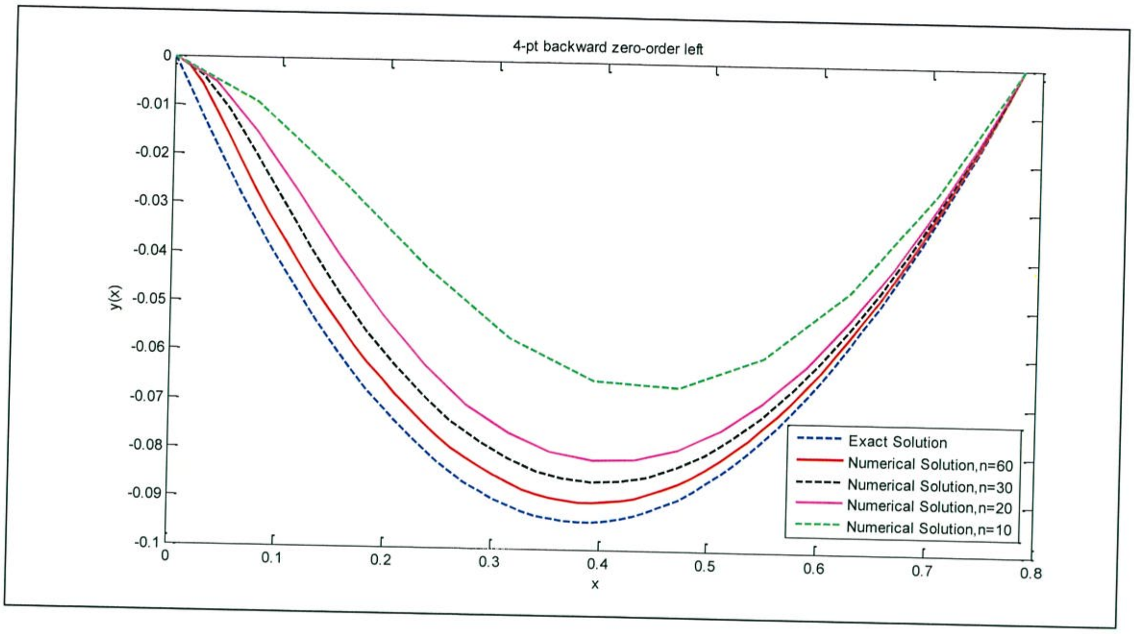
ตารางที่ 4.17 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h = \frac{\pi}{240}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย
$y(54)$	-0.0315	-0.0298	-0.0307
$y(56)$	-0.0215	-0.0205	-0.0210
$y(58)$	-0.0110	-0.0105	-0.0108
$y(60)$	0	0	0

จากตารางที่ 4.14 – 4.17 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ เห็นได้ว่ายังไม่สามารถระบุได้แน่ชัดว่าการกำหนดจุดสมมติรูปแบบใดมีความเหมาะสมมากกว่าเนื่องจากผลเฉลยที่ได้มีค่าใกล้เคียงกันมาก จากนั้นจึงนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ อันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบคาบเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.7–4.8 เห็นได้ชัดว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย เมื่อแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากขึ้น ในทำนองเดียวกันการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ เมื่อแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงมากขึ้นเช่นกัน แต่สามารถเห็นได้ชัดว่าที่ช่วงกว้างเดียวกันนั้น สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายเพียงอย่างเดียวมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงได้เร็วกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

รูปแบบที่ 3, 4 วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ อันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

ตารางที่ 4.18 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0606	0.0333	1.7396
$y(4)$	−0.0912	0.0311	0.6762
$y(6)$	−0.0896	0.0031	0.1187
$y(8)$	−0.0575	−0.0111	0.0059
$y(10)$	0	0	0

ตารางที่ 4.19 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา (1.0e+03 *)
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0338	0.0239	6.1807
$y(4)$	−0.0606	0.0223	1.9549
$y(6)$	−0.0799	0.0001	0.0109
$y(8)$	−0.0912	−0.0210	−0.1882
$y(10)$	−0.0944	−0.0347	−0.0600
$y(12)$	−0.0896	−0.0408	0.0000
$y(14)$	−0.0771	−0.0400	0.0063
$y(16)$	−0.0575	−0.0326	0.0023
$y(18)$	−0.0315	−0.0191	0.0003
$y(20)$	0	0	0

ตารางที่ 4.20 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$

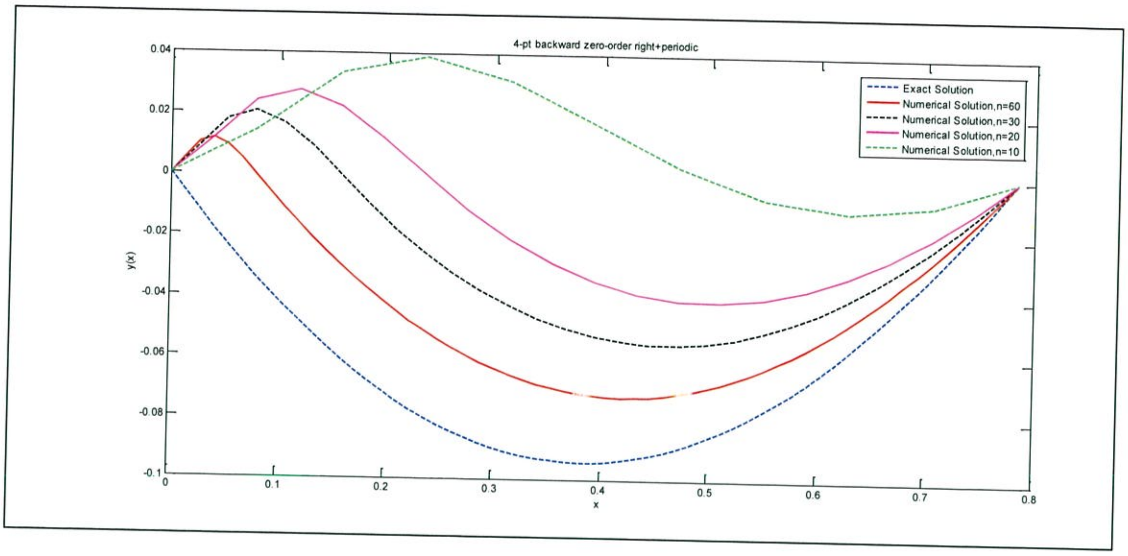
$y(x)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา (1.0e+04*)
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0233	0.0179	−1.6501
$y(4)$	−0.0435	0.0166	−0.5207
$y(6)$	−0.0606	−0.0003	−0.0016
$y(8)$	−0.0743	−0.0181	0.0508
$y(10)$	−0.0846	−0.0323	0.0162
$y(12)$	−0.0912	−0.0429	0.0001
$y(14)$	−0.0942	−0.0502	−0.0016
$y(16)$	−0.0937	−0.0544	−0.0005
$y(18)$	−0.0896	−0.0554	0.0000
$y(20)$	−0.0821	−0.0533	0.0001
$y(22)$	−0.0713	−0.0482	0.0000
$y(24)$	−0.0575	−0.0401	0.0000
$y(26)$	−0.0408	−0.0292	−0.0000
$y(28)$	−0.0215	−0.0158	−0.0000
$y(30)$	0	0	0

ตารางที่ 4.21 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

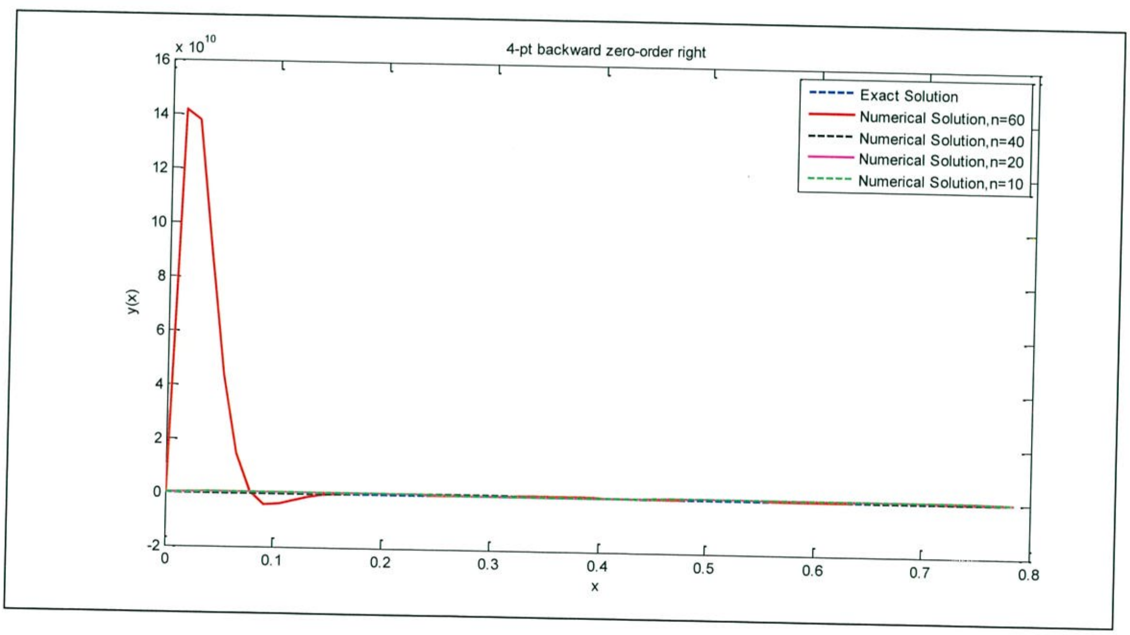
$y(x)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบ	
		อันดับศูนย์ทางขวาผสมแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา (1.0e+11*)
$y(0)$	0	0	0
$y(2)$	−0.0120	0.0100	1.3753
$y(4)$	−0.0233	0.0093	0.4335
$y(6)$	−0.0338	−0.0003	0.0009
$y(8)$	−0.0435	−0.0112	−0.0425
$y(10)$	−0.0525	−0.0210	−0.0135
$y(12)$	−0.0606	−0.0298	−0.0001
$y(14)$	−0.0679	−0.0378	0.0013
$y(16)$	−0.0743	−0.0449	0.0004
$y(18)$	−0.0799	−0.0513	0.0000
$y(20)$	−0.0846	−0.0569	−0.0000
$y(22)$	−0.0883	−0.0617	−0.0000
$y(24)$	−0.0912	−0.0656	−0.0000
$y(26)$	−0.0932	−0.0687	0.0000
$y(28)$	−0.0942	−0.0710	0.0000
$y(30)$	−0.0944	−0.0724	0.0000
$y(32)$	−0.0937	−0.0729	−0.0000
$y(34)$	−0.0921	−0.0726	−0.0000
$y(36)$	−0.0896	−0.0715	−0.0000
$y(38)$	−0.0863	−0.0696	0.0000
$y(40)$	−0.0821	−0.0669	0.0000
$y(42)$	−0.0771	−0.0634	0.0000
$y(44)$	−0.0713	−0.0591	−0.0000
$y(46)$	−0.0648	−0.0541	−0.0000
$y(48)$	−0.0575	−0.0483	−0.0000
$y(50)$	−0.0495	−0.0418	0.0000
$y(52)$	−0.0408	−0.0347	0.0000
$y(54)$	−0.0315	−0.0269	0.0000
$y(56)$	−0.0215	−0.0185	−0.0000
$y(58)$	−0.0110	−0.0095	−0.0000
$y(60)$	0	0	0

จากตารางที่ 4.18 – 4.21 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ ถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบ

มีความเหมาะสมมากกว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาเพียงอย่างเดียว จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและแบบคาบเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.9 เห็นได้ชัดว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบเมื่อยิ่งแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงกราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากขึ้น และรูปที่ 4.10 สังเกตได้ว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา จะมีผลเฉลยที่ช่วงกว้างหนึ่งมีแนวโน้มลู่ออกจากผลเฉลยจริงมาก ดังนั้นหากจะใช้

การกำหนดจุดสมมติรูปแบบนี้จึงค่อนข้างที่จะไม่เหมาะสมสำหรับระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

รูปแบบที่ 5 วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ

ตารางที่ 4.22 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	–0.0606	–0.0223
$y(4)$	–0.0912	–0.0480
$y(6)$	–0.0896	–0.0506
$y(8)$	–0.0575	–0.0253
$y(10)$	0	0

ตารางที่ 4.23 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	–0.0338	–0.0149
$y(4)$	–0.0606	–0.0387
$y(6)$	–0.0799	–0.0582
$y(8)$	–0.0912	–0.0697
$y(10)$	–0.0944	–0.0731
$y(12)$	–0.0896	–0.0690
$y(14)$	–0.0771	–0.0616
$y(16)$	–0.0575	–0.0397
$y(18)$	–0.0315	–0.0158
$y(20)$	0	0

ตารางที่ 4.24 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	–0.0233	–0.0108
$y(4)$	–0.0435	–0.0291
$y(6)$	–0.0606	–0.0464
$y(8)$	–0.0743	–0.0600
$y(10)$	–0.0846	–0.0699

ตารางที่ 4.24 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(12)$	−0.0912	−0.0764
$y(14)$	−0.0942	−0.0795
$y(16)$	−0.0937	−0.0791
$y(18)$	−0.0896	−0.0754
$y(20)$	−0.0821	−0.0684
$y(22)$	−0.0713	−0.0583
$y(24)$	−0.0575	−0.0452
$y(26)$	−0.0408	−0.0295
$y(28)$	−0.0215	−0.0113
$y(30)$	0	0

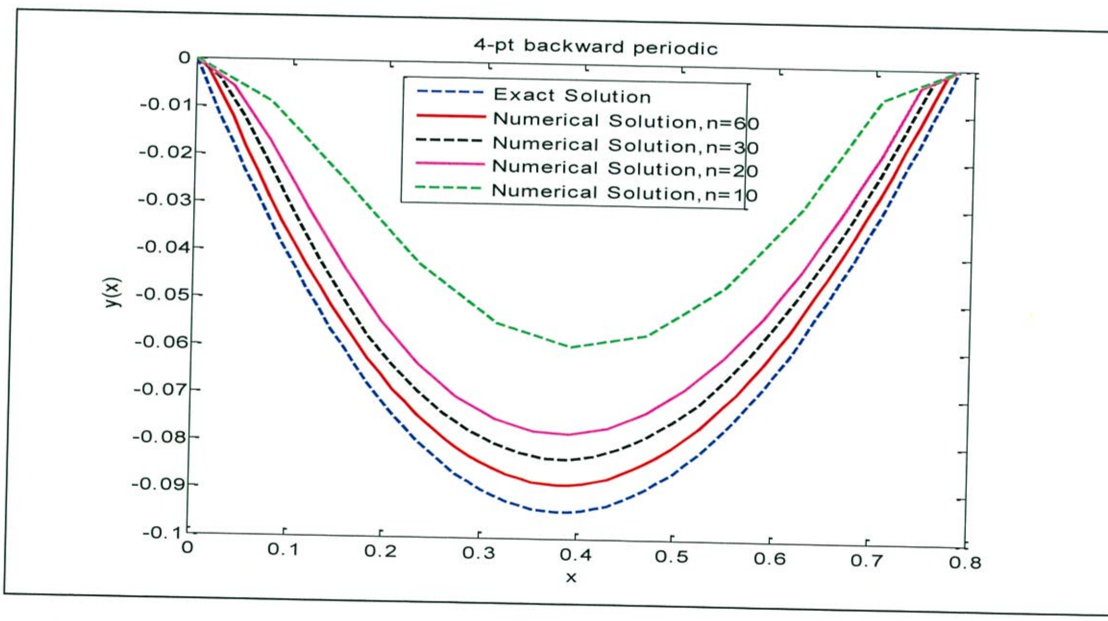
ตารางที่ 4.25 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0120	−0.0058
$y(4)$	−0.0233	−0.0163
$y(6)$	−0.0338	−0.0270
$y(8)$	−0.0435	−0.0367
$y(10)$	−0.0525	−0.0455
$y(12)$	−0.0606	−0.0535
$y(14)$	−0.0679	−0.0606
$y(16)$	−0.0743	−0.0669
$y(18)$	−0.0799	−0.0724
$y(20)$	−0.0846	−0.0770
$y(22)$	−0.0883	−0.0807
$y(24)$	−0.0912	−0.0836
$y(26)$	−0.0932	−0.0855
$y(28)$	−0.0942	−0.0866
$y(30)$	−0.0944	−0.0868
$y(32)$	−0.0937	−0.0862
$y(34)$	−0.0921	−0.0846
$y(36)$	−0.0896	−0.0823
$y(38)$	−0.0863	−0.0791
$y(40)$	−0.0821	−0.0750
$y(42)$	−0.0771	−0.0702
$y(44)$	−0.0713	−0.0646
$y(46)$	−0.0648	−0.0582

ตารางที่ 4.25 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(48)$	−0.0575	−0.0511
$y(50)$	−0.0495	−0.0434
$y(52)$	−0.0408	−0.0349
$y(54)$	−0.0315	−0.0259
$y(56)$	−0.0215	−0.0162
$y(58)$	−0.0110	−0.0060
$y(60)$	0	0

จากตารางที่ 4.22 – 4.25 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ เห็นได้ว่าหากยิ่งแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงมากยิ่งขึ้นแล้วผลเฉลยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงด้วยเช่นกัน จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

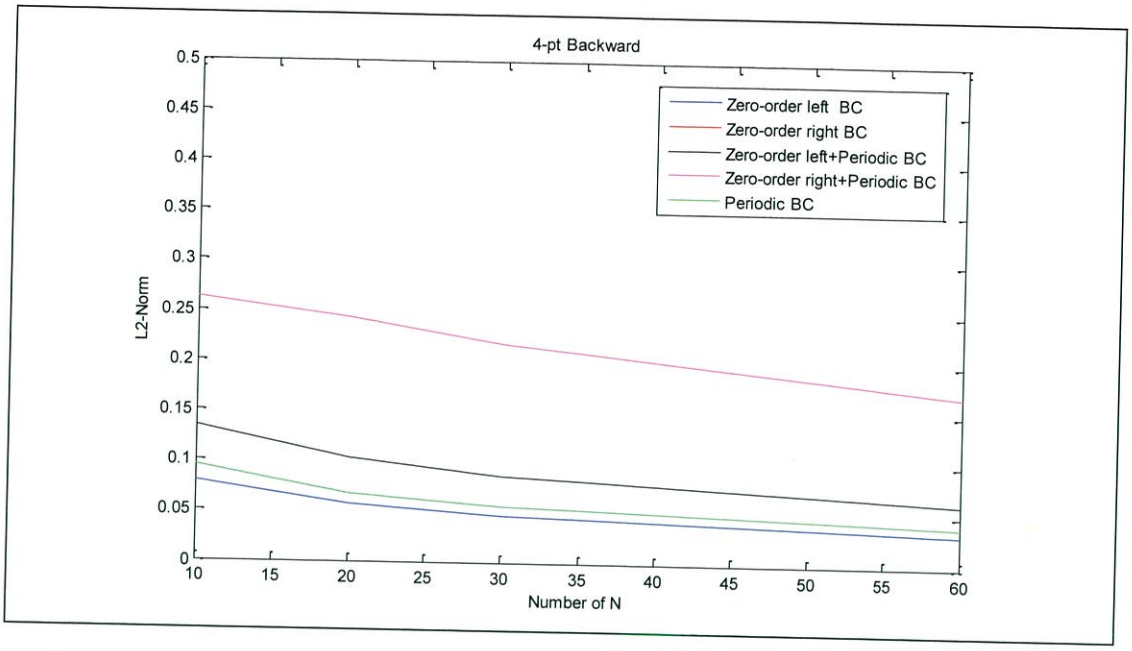
เนื่องจากระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังพิจารณาสมการผลต่างอันตะในรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ เพื่อต้องการทราบรูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับ

การกำหนดจุดสมมติของระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังสำหรับตัวอย่างนี้ ดังนั้น จึงหาค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.26 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ

ช่วงกว้าง	สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ				
	อันดับศูนย์ทางซ้าย	แบบคาบ	อันดับศูนย์ทางซ้าย และแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา และแบบคาบ	อันดับศูนย์ทางขวา
$h=\frac{\pi}{40}$	0.0792	0.0955	0.1346	0.2622	2.9662
$h=\frac{\pi}{80}$	0.0569	0.0675	0.1032	0.2432	$9.9539e+03$
$h=\frac{\pi}{120}$	0.0462	0.0555	0.0859	0.2175	$2.6569e+04$
$h=\frac{\pi}{240}$	0.0322	0.0396	0.0616	0.1691	$2.2142e+11$
$h=\frac{\pi}{480}$	0.0225	0.0282	0.0439	0.1257	$6.4105e+25$
$h=\frac{\pi}{960}$	0.0158	0.0200	0.0311	0.0911	$2.2087e+55$
$h=\frac{\pi}{1920}$	0.0112	0.0142	0.0220	0.0653	$1.0892e+115$
$h=\frac{\pi}{3840}$	0.0079	0.0100	0.0156	0.0465	$1.1778e+235$
$h=\frac{\pi}{7680}$	0.0056	0.0071	0.0110	0.0330	NaN
$h=\frac{\pi}{15360}$	0.0039	0.0050	0.0078	0.0233	NaN

การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ เห็นได้ชัดว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีสี่จุดย้อนหลังหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายมีความเหมาะสมมากกว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอื่น ๆ เนื่องจากว่ามีค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่ารูปแบบอื่น ๆ และจากตารางยังสังเกตได้ว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง ถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา พบว่าที่ช่วงกว้างหนึ่งไม่สามารถประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ดีนัก เพื่อภาพที่ชัดเจนยิ่งขึ้นจะแสดงในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.12 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ

จากรูปที่ 4.12 กราฟสีน้ำเงินเป็นค่าคลาดเคลื่อนของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย เห็นได้ชัดว่าวิธีการดังกล่าวมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด ในลำดับถัดมาคือกราฟสีเขียวเป็นค่าคลาดเคลื่อนของสมการผลต่างอันตะ ที่มีรูปแบบกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนน้อยเป็นลำดับถัดมาจากกราฟสีน้ำเงิน และเห็นว่าในรูปไม่ปรากฏกราฟเส้นสีแดงเนื่องจากเป็นค่าคลาดเคลื่อนของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา ซึ่งมีค่าคลาดเคลื่อนมากเกินกว่าจะนำมาพิจารณาได้

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างอันตะสี่จุดย้อนหลังโดยรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายมีความเหมาะสมมากกว่ารูปแบบการกำหนดจุดสมมติรูปแบบอื่น ๆ

3) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1 วิธีผลต่างสี่จุดกลางโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

ตารางที่ 4.27 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0606	−0.0479
$y(4)$	−0.0912	−0.0730
$y(6)$	−0.0896	−0.0722
$y(8)$	−0.0575	−0.0457
$y(10)$	0	0

ตารางที่ 4.28 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0338	−0.0252
$y(4)$	−0.0606	−0.0463
$y(6)$	−0.0799	−0.0616
$y(8)$	−0.0912	−0.0709
$y(10)$	−0.0944	−0.0740
$y(12)$	−0.0896	−0.0707
$y(14)$	−0.0771	−0.0611
$y(16)$	−0.0575	−0.0455
$y(18)$	−0.0315	−0.0243
$y(20)$	0	0

ตารางที่ 4.29 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0233	−0.0170
$y(4)$	−0.0435	−0.0326
$y(6)$	−0.0606	−0.0460
$y(8)$	−0.0743	−0.0568
$y(10)$	−0.0846	−0.0650
$y(12)$	−0.0912	−0.0705
$y(14)$	−0.0942	−0.0732
$y(16)$	−0.0937	−0.0732
$y(18)$	−0.0896	−0.0704
$y(20)$	−0.0821	−0.0648
$y(22)$	−0.0713	−0.0565
$y(24)$	−0.0575	−0.0456

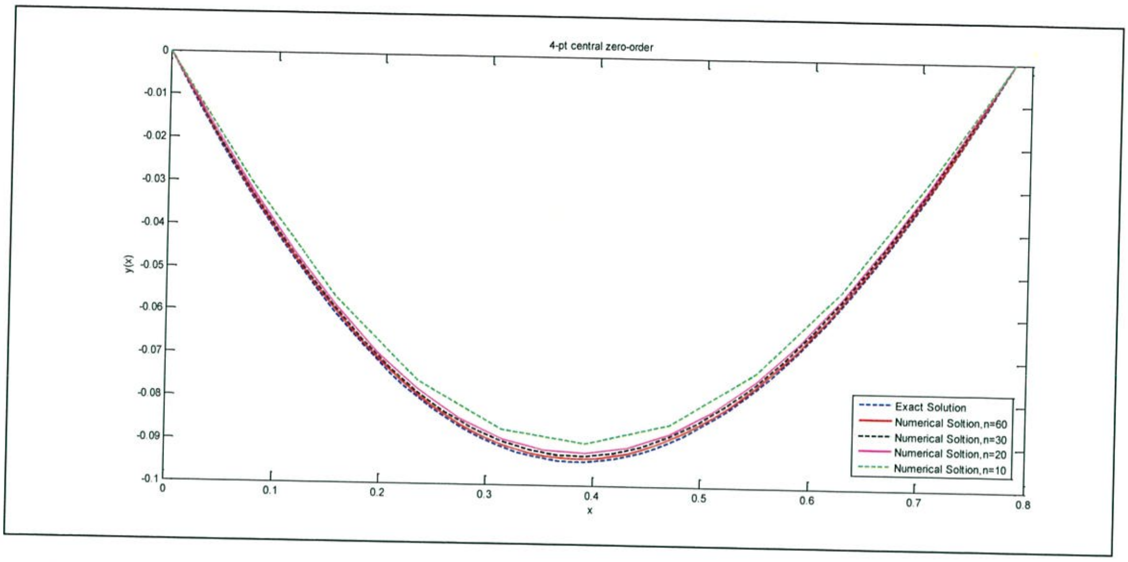
ตารางที่ 4.29 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$y(26)$	−0.0408	−0.0322
$y(28)$	−0.0215	−0.0165
$y(30)$	0	0

ตารางที่ 4.30 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0120	−0.0086
$y(4)$	−0.0233	−0.0171
$y(6)$	−0.0338	−0.0252
$y(8)$	−0.0435	−0.0327
$y(10)$	−0.0525	−0.0396
$y(12)$	−0.0606	−0.0459
$y(14)$	−0.0679	−0.0515
$y(16)$	−0.0743	−0.0566
$y(18)$	−0.0799	−0.0610
$y(20)$	−0.0846	−0.0647
$y(22)$	−0.0883	−0.0678
$y(24)$	−0.0912	−0.0702
$y(26)$	−0.0932	−0.0719
$y(28)$	−0.0942	−0.0730
$y(30)$	−0.0944	−0.0733
$y(32)$	−0.0937	−0.0730
$y(34)$	−0.0921	−0.0719
$y(36)$	−0.0896	−0.0702
$y(38)$	−0.0863	−0.0678
$y(40)$	−0.0821	−0.0647
$y(42)$	−0.0771	−0.0609
$y(44)$	−0.0713	−0.0565
$y(46)$	−0.0648	−0.0515
$y(48)$	−0.0575	−0.0458
$y(50)$	−0.0495	−0.0395
$y(52)$	−0.0408	−0.0325
$y(54)$	−0.0315	−0.0251
$y(56)$	−0.0215	−0.0170
$y(58)$	−0.0110	−0.0084
$y(60)$	0	0

จากตารางที่ 4.27 – 4.30 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ เห็นได้ว่าหากยิ่งแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงมากยิ่งขึ้นแล้วผลเฉลยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงด้วยเช่นกัน จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

รูปแบบที่ 2 วิธีผลต่างสี่จุดกลางโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ

ตารางที่ 4.31 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{40}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0606	−0.0502
$y(4)$	−0.0912	−0.0756
$y(6)$	−0.0896	−0.0748
$y(8)$	−0.0575	−0.0481
$y(10)$	0	0

ตารางที่ 4.32 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0338	−0.0263
$y(4)$	−0.0606	−0.0474

ตารางที่ 4.32 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{80}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(6)$	−0.0799	−0.0628
$y(8)$	−0.0912	−0.0722
$y(10)$	−0.0944	−0.0753
$y(12)$	−0.0896	−0.0720
$y(14)$	−0.0771	−0.0624
$y(16)$	−0.0575	−0.0467
$y(18)$	−0.0315	−0.0254
$y(20)$	0	0

ตารางที่ 4.33 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{120}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0233	−0.0177
$y(4)$	−0.0435	−0.0334
$y(6)$	−0.0606	−0.0467
$y(8)$	−0.0743	−0.0576
$y(10)$	−0.0846	−0.0658
$y(12)$	−0.0912	−0.0714
$y(14)$	−0.0942	−0.0741
$y(16)$	−0.0937	−0.0741
$y(18)$	−0.0896	−0.0712
$y(20)$	−0.0821	−0.0656
$y(22)$	−0.0713	−0.0573
$y(24)$	−0.0575	−0.0464
$y(26)$	−0.0408	−0.0330
$y(28)$	−0.0215	−0.0172
$y(30)$	0	0

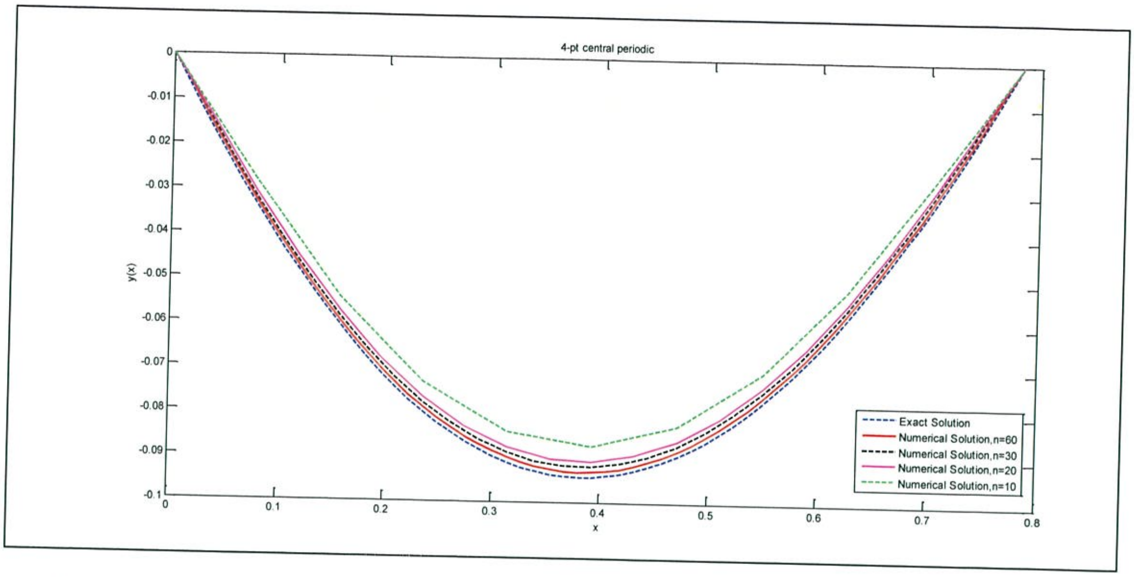
ตารางที่ 4.34 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(0)$	0	0
$y(2)$	−0.0120	−0.0089
$y(4)$	−0.0233	−0.0175
$y(6)$	−0.0338	−0.0255
$y(8)$	−0.0435	−0.0330

ตารางที่ 4.34 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนด $h=\frac{\pi}{240}$ (ต่อ)

$y(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
$y(10)$	−0.0525	−0.0399
$y(12)$	−0.0606	−0.0462
$y(14)$	−0.0679	−0.0519
$y(16)$	−0.0743	−0.0570
$y(18)$	−0.0799	−0.0614
$y(20)$	−0.0846	−0.0652
$y(22)$	−0.0883	−0.0683
$y(24)$	−0.0912	−0.0707
$y(26)$	−0.0932	−0.0724
$y(28)$	−0.0942	−0.0734
$y(30)$	−0.0944	−0.0738
$y(32)$	−0.0937	−0.0734
$y(34)$	−0.0921	−0.0724
$y(36)$	−0.0896	−0.0706
$y(38)$	−0.0863	−0.0682
$y(40)$	−0.0821	−0.0651
$y(42)$	−0.0771	−0.0614
$y(44)$	−0.0713	−0.0569
$y(46)$	−0.0648	−0.0519
$y(48)$	−0.0575	−0.0462
$y(50)$	−0.0495	−0.0398
$y(52)$	−0.0408	−0.0329
$y(54)$	−0.0315	−0.0254
$y(56)$	−0.0215	−0.0174
$y(58)$	−0.0110	−0.0088
$y(60)$	0	0

จากตารางที่ 4.31 – 4.34 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ เห็นได้ว่าหากยิ่งแบ่งช่วงกว้างให้เล็กลงมากยิ่งขึ้นแล้วผลเฉลยเชิงตัวเลขจะมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงด้วยเช่นกัน จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

เนื่องจากระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางหลังพิจารณาสมการผลต่างอันตะในรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์และการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ เพื่อต้องการทราบรูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการกำหนดจุดสมมติของระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางสำหรับตัวอย่างนี้ ดังนั้นจึงหาค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ดังตารางต่อไปนี้

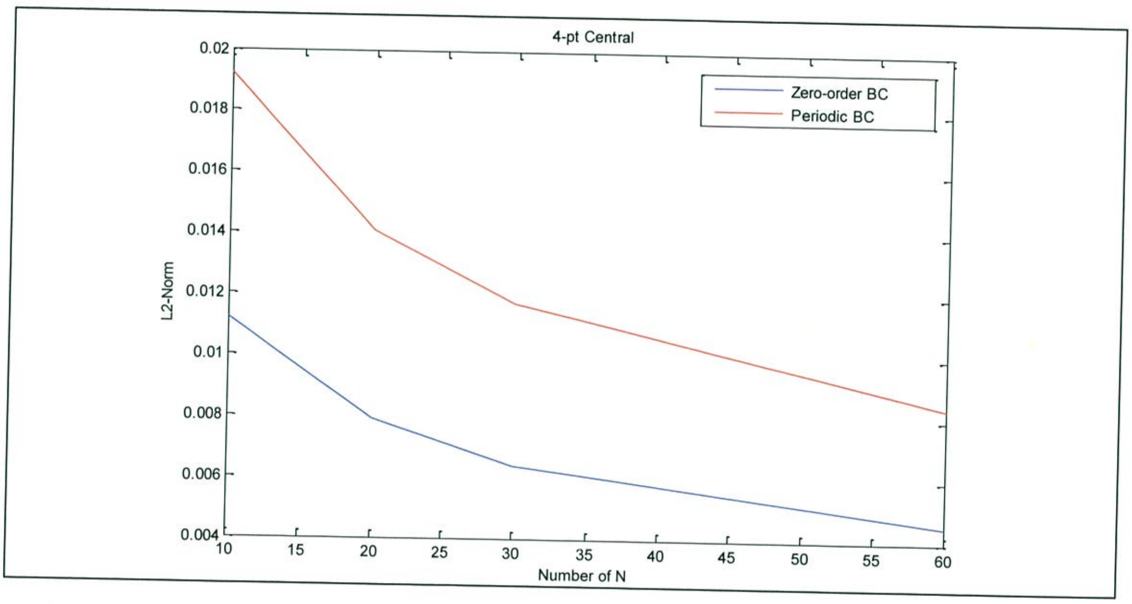
ตารางที่ 4.35 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ

ช่วงกว้าง	สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
	อันดับศูนย์	แบบคาบ
$h=\frac{\pi}{40}$	0.0112	0.0192
$h=\frac{\pi}{80}$	0.0079	0.0141
$h=\frac{\pi}{120}$	0.0064	0.0117
$h=\frac{\pi}{240}$	0.0045	0.0084
$h=\frac{\pi}{480}$	0.0032	0.0059
$h=\frac{\pi}{960}$	0.0023	0.0042
$h=\frac{\pi}{1920}$	0.0016	0.0030
$h=\frac{\pi}{3840}$	0.0011	0.0021

ตารางที่ 4.35 การเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ (ต่อ)

ช่วงกว้าง	สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
	อันดับศูนย์	แบบคาบ
$h=\dfrac{\pi}{7680}$	$8.0053e-04$	0.0015
$h=\dfrac{\pi}{15360}$	$5.6603e-04$	0.0011

จากตารางเปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ เห็นได้ชัดว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีสี่จุดกลางหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีความเหมาะสมมากกว่าการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบตามที่แสดงในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.15 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบต่าง ๆ

จากผลการวิจัยทั้งหมดสรุปได้ว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะทั้ง 3 วิธีที่พิจารณาวิธีที่เหมาะสมที่สุดสำหรับแต่ละวิธีมีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติที่แตกต่างกัน คือ วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้ามีสมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมที่สุดใช้การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา ส่วนวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังมีสมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมที่สุดใช้การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย และวิธีผลต่างสี่จุดกลางมีสมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมที่สุดใช้การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

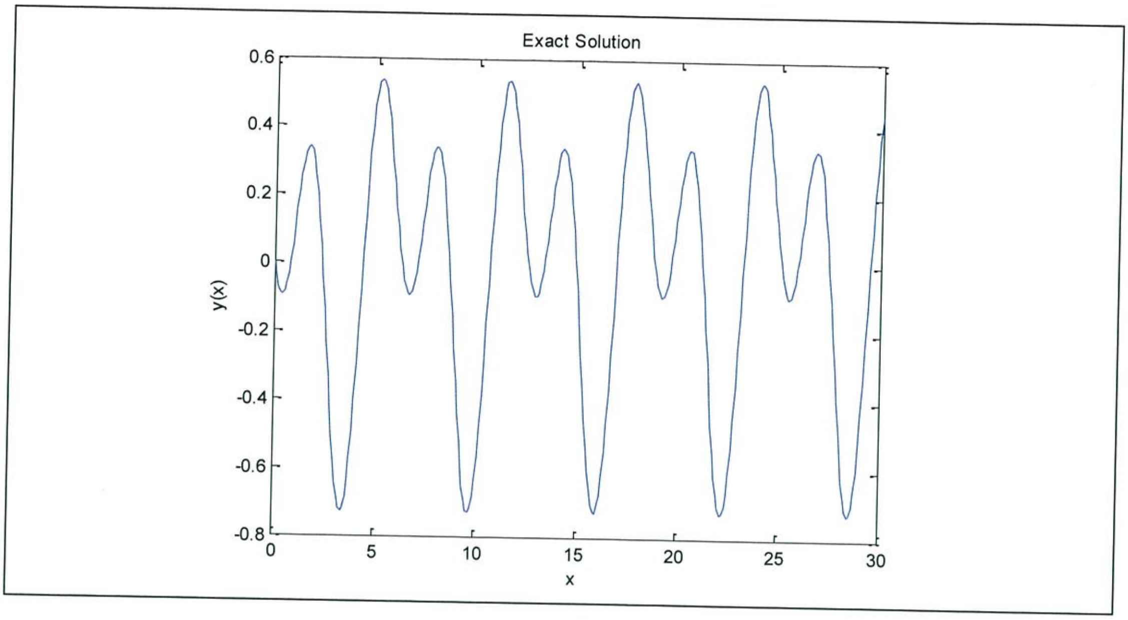
หากพิจารณาเลือกใช้สมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมโดยพิจารณาจากทุก ๆ สมการผลต่างอันตะในทุกรูปแบบของการกำหนดจุดสมมติโดยนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm มาเปรียบเทียบกัน

สมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมสำหรับตัวอย่าง 4.1 มีลำดับค่าคลาดเคลื่อนเรียงจากน้อยไปมากตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.36 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังและวิธีผลต่างสี่จุดกลางที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบที่แตกต่างกัน

ช่วงกว้าง	ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดต่าง ๆ และรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ					
	วิธีผลต่างสี่จุดกลาง		วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า	วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง		วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า
	อันดับศูนย์	แบบคาบ	อันดับศูนย์ขวา	อันดับศูนย์ซ้าย	แบบคาบ	แบบคาบ
$h=\frac{\pi}{40}$	0.0112	0.0192	0.0760	0.0792	0.0955	0.0962
$h=\frac{\pi}{80}$	0.0079	0.0141	0.0553	0.0569	0.0675	0.0680
$h=\frac{\pi}{120}$	0.0064	0.0117	0.0457	0.0462	0.0555	0.0558
$h=\frac{\pi}{240}$	0.0045	0.0084	0.0328	0.0322	0.0396	0.0397
$h=\frac{\pi}{480}$	0.0032	0.0059	0.0234	0.0225	0.0282	0.0282
$h=\frac{\pi}{960}$	0.0023	0.0042	0.0167	0.0158	0.0200	0.0200
$h=\frac{\pi}{1920}$	0.0016	0.0030	0.0118	0.0112	0.0142	0.0142
$h=\frac{\pi}{3840}$	0.0011	0.0021	0.0084	0.0079	0.0100	0.0100
$h=\frac{\pi}{7680}$	$8.0053e-04$	0.0015	0.0059	0.0056	0.0071	0.0071
$h=\frac{\pi}{15360}$	$5.6603e-04$	0.0011	0.0042	0.0039	0.0050	0.0050

จากตารางที่ 4.36 สำหรับตัวอย่างที่ 4.1 นี้ จากโจทย์เห็นได้ว่าควรพิจารณาการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ เนื่องด้วยว่าค่าขอบฝั่งซ้าย (y_0) เท่ากับค่าขอบฝั่งขวา (y_N) นั่นคือ $y_0 = 0 = y_N$ แต่ว่าหากพิจารณาจากผลเฉลยจริงของตัวอย่างนี้ดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.16 กราฟของผลเฉลยจริงซึ่งหาได้จากสมการ $y(x)=\frac{-1}{3}\cos 2x-\frac{\sqrt{2}}{6}\sin 2x+\frac{1}{3}\cos x$

สรุปว่า สำหรับตัวอย่างที่ 4.1 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางซึ่งสมการผลต่างอันตะที่กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีรูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในตัวอย่างนี้ และมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงเร็วยิ่งขึ้นมากกว่าสมการผลต่างอันตะรูปแบบอื่น ๆ

ตัวอย่างที่ 4.2 สมการความร้อนของแท่งวัตถุไม่มีฉนวนหุ้มแท่งหนึ่งอยู่ในสภาวะคงตัว (Steady State) มีสมการดังนี้

$$\frac{d^2T}{dx^2}=0.01T-\left(0.01\times 20\right)$$

มีเงื่อนไขขอบ คือ $T(0)=40$ และ $T(10)=200$

จงหาค่าประมาณอนุพันธ์โดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ เมื่อกำหนดให้ช่วงกว้าง คือ $h=1$ และผลเฉลยจริงหาได้จากสมการ $T=73.4523e^{0.1x}-53.4523e^{-0.1x}+20$

<u>**วิธีทำ**</u>

โดยรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองและจากโจทย์จะได้ว่า $p(x)=0,\ q(x)=0.01$ และ $r(x)=-0.2$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง $[0,10]$ โดยโจทย์กำหนดให้ $h=1$ และจากนิยามการแบ่ง ดังนั้นช่วงย่อยสำหรับตัวอย่างนี้ถูกแบ่งออกเป็น 10 ช่วงย่อย

เนื่องจากว่าที่เงื่อนไขขอบสำหรับตัวอย่างนี้ค่าขอบฝั่งซ้าย (y_0) ไม่เท่ากับค่าขอบฝั่งขวา (y_{10}) นั่นคือ $y_0\neq y_{10}$ จึงไม่พิจารณาสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและ

เงื่อนไขขอบแบบคาบและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ จากนั้นใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของตารางดังต่อไปนี้

1) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

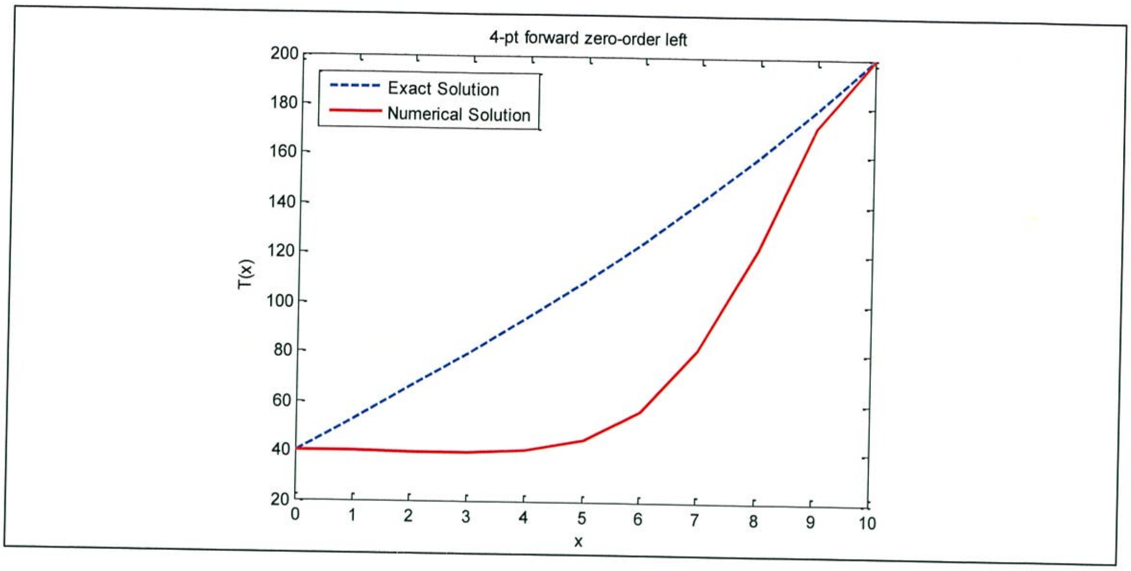
ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบเปรียบเทียบกัน โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1, 2 วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

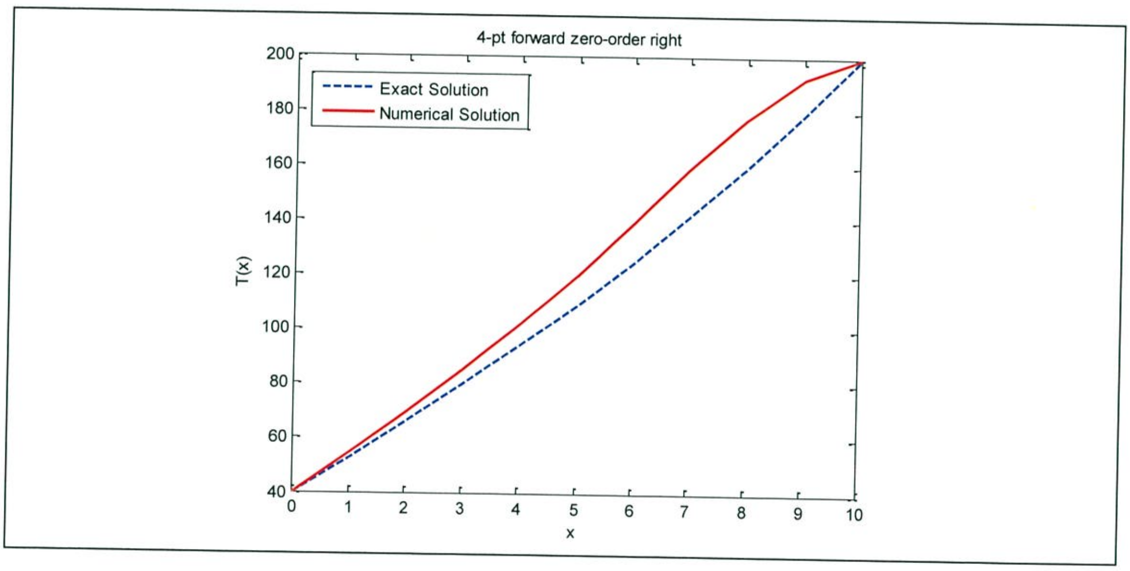
ตารางที่ 4.37 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

$T(x)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย	อันดับศูนย์ทางขวา
$T(0)$	40	40	40
$T(1)$	52.8117	39.8804	54.2656
$T(2)$	65.9518	39.6096	69.0900
$T(3)$	79.5518	39.4694	84.7819
$T(4)$	93.7478	40.4333	101.5956
$T(5)$	108.6819	44.8284	119.7082
$T(6)$	124.5036	56.7485	139.0204
$T(7)$	141.3711	81.4409	158.8316
$T(8)$	159.4534	122.1089	177.4773
$T(9)$	178.9314	172.0062	192.2385
$T(10)$	200	200	200

จากตารางที่ 4.37 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เห็นได้ว่าถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวามีความเหมาะสมกว่า แต่เพื่อภาพที่เห็นชัดยิ่งขึ้นจากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.18 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.18 เห็นได้ชัดว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าสำหรับตัวอย่างที่ 4.2 ควรใช้รูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

2) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

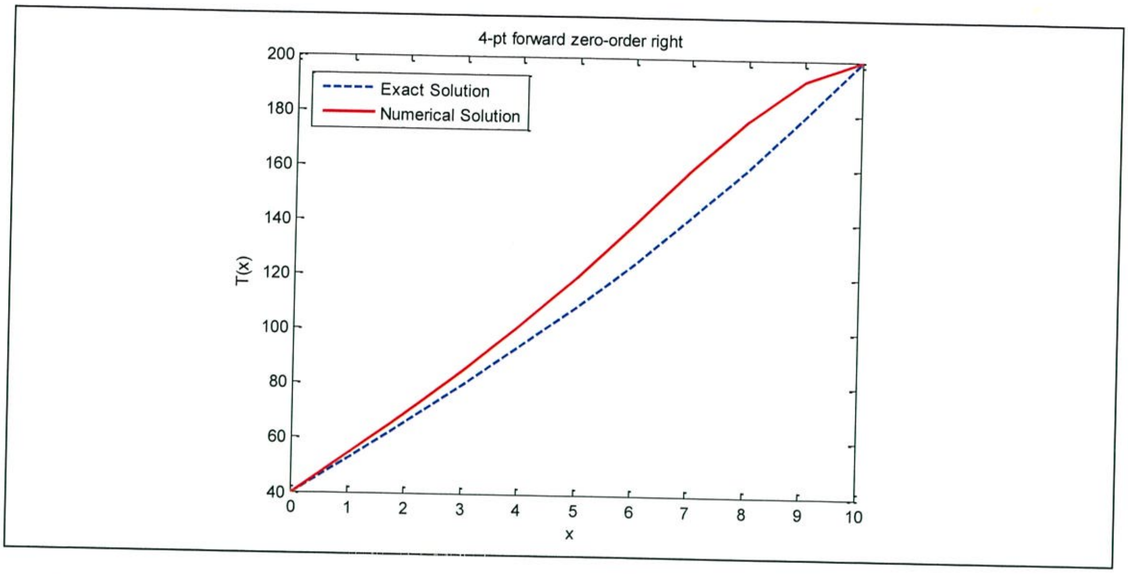
ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบ เปรียบเทียบกันเช่นเดียวกับวิธีก่อนหน้านี้ โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1,2 วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

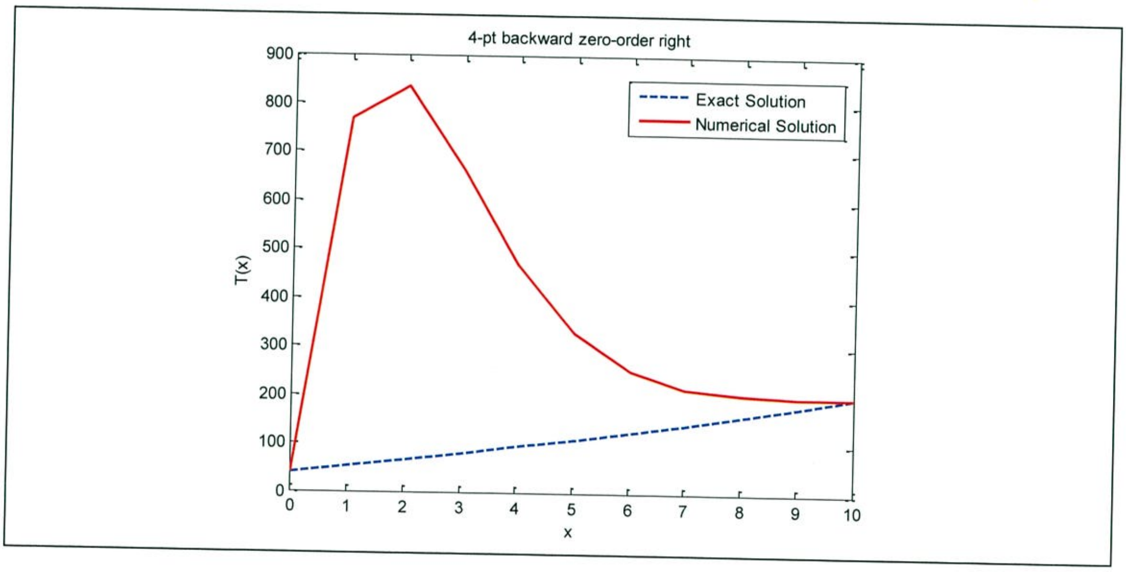
ตารางที่ 4.38 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

$T(x)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย	อันดับศูนย์ทางขวา
$T(0)$	40	40	40
$T(1)$	52.8117	44.9899	768.9845
$T(2)$	65.9518	54.9469	835.5865
$T(3)$	79.5518	68.3267	663.5846
$T(4)$	93.7478	83.6885	469.5148
$T(5)$	108.6819	100.2439	330.1293
$T(6)$	124.5036	117.7393	251.6640
$T(7)$	141.3711	136.2401	215.9323
$T(8)$	159.4534	155.9566	203.2637
$T(9)$	178.9314	177.1456	200.2554
$T(10)$	200	200	200

จากตารางที่ 4.38 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เห็นได้ชัดว่าถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายมีความเหมาะสมกว่า จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.19 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.20 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ อันดับศูนย์ทางขวา เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.19 เห็นได้ชัดว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังสำหรับตัวอย่างที่ 4.2 ควรใช้รูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

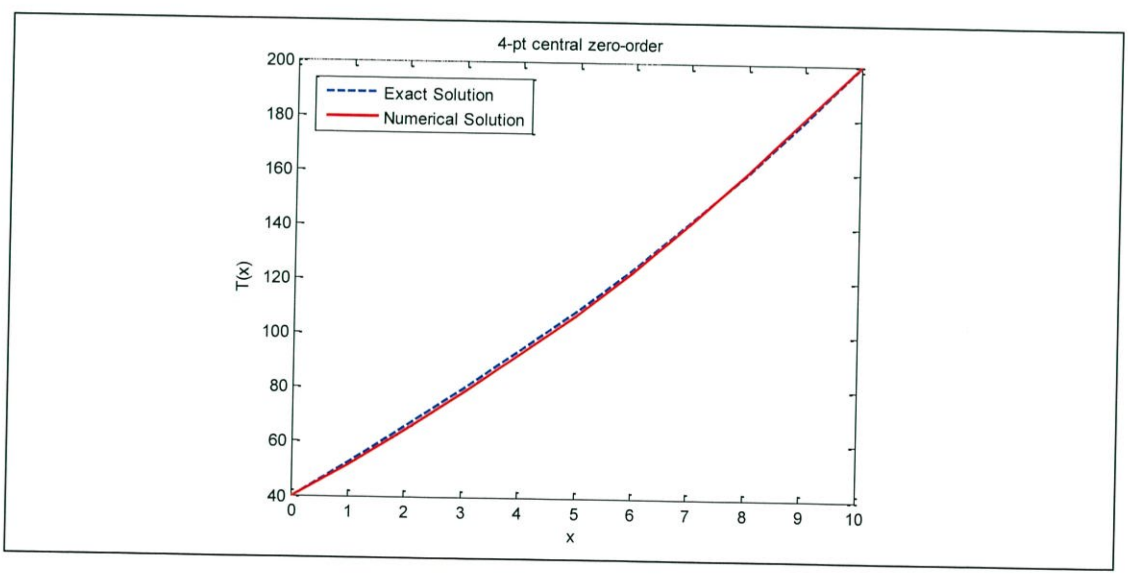
3) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางจะพิจารณาเพียงแค่รูปแบบเดียว คือ วิธีผลต่างสี่จุดกลางโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะแสดงดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.39 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

$T(x)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$T(0)$	40	40
$T(1)$	52.8117	51.7466
$T(2)$	65.9518	64.6415
$T(3)$	79.5518	78.0562
$T(4)$	93.7478	92.2429
$T(5)$	108.6819	107.3523
$T(6)$	124.5036	123.5358
$T(7)$	141.3711	140.9542
$T(8)$	159.4534	159.7618
$T(9)$	178.9314	179.8683
$T(10)$	200	200

จากตารางที่ 4.39 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ เห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากอยู่ที่เดียว แต่เพื่อภาพที่เห็นชัดยิ่งขึ้นจากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.21 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากผลการวิจัยเห็นได้ว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะทั้ง 3 วิธีที่พิจารณา วิธีที่เหมาะสมที่สุดแต่ละวิธีมีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติดังต่อไปนี้ วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า คือ สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง คือ สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย และวิธีผลต่างกลาง คือ สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

หากพิจารณาเลือกใช้สมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมที่สุดโดยพิจารณาจากทุก ๆ สมการผลต่างอันตะในทุกรูปแบบของการกำหนดจุดสมมติ โดยนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm มาเปรียบเทียบกันดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.40 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ของสมการผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังและวิธีผลต่างสี่จุดกลางที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบที่แตกต่างกัน

สมการผลต่างอันตะ	ค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm
วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา	35.2140
วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย	23.8366
วิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์	3.3473

สำหรับตัวอย่างที่ 4.2 เงื่อนไขขอบที่โจทย์กำหนดมานั้นมีค่าขอบแต่ละฝั่งไม่เท่ากัน จึงไม่สามารถพิจารณาสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบและร่วมกับแบบคาบได้ จึงเลือกพิจารณาการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ และจากโจทย์ในตัวอย่างนี้เป็นโจทย์ลักษณะสมการการแพร่ (Diffusion Equation) จึงเหมาะสมสำหรับการใช้วิธีผลต่างกลางในการประมาณค่า ซึ่งสอดคล้องกับตารางที่ 4.40 เห็นได้ชัดว่าค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ของสมการผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างกลางที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีค่าน้อยที่สุด

สรุปว่า สำหรับตัวอย่างที่ 4.2 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางซึ่งสมการผลต่างอันตะที่กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีรูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในตัวอย่างนี้ และมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงเร็วยิ่งขึ้นมากกว่าสมการผลต่างอันตะรูปแบบอื่น ๆ

ตัวอย่างที่ 4.3 จงใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\frac{d^2u}{dx^2}+6\frac{du}{dx}+u=2$$

ด้วยเงื่อนไขขอบ คือ $u(0)=1$ และ $u(2)=10$ และกำหนดให้ช่วงกว้างคือ $h=0.1$

วิธีทำ

สำหรับตัวอย่างนี้ผลเฉลยจริงสามารถหาได้จาก $u(x)=11.27513e^{-0.171573x}-12.27514e^{-5.828427x}+2$ จากรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองและจากโจทย์จะได้ว่า $p(x)=-6,\ q(x)=-1$ และ $r(x)=2$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง $[0,2]$ โดยโจทย์กำหนดให้ $h=0.1$ และจากนิยามการแบ่ง ดังนั้นช่วงย่อยสำหรับตัวอย่างนี้ถูกแบ่งออกเป็น 20 ช่วงย่อย

เนื่องจากว่าที่เงื่อนไขขอบสำหรับตัวอย่างนี้ค่าขอบฝั่งซ้าย (y_0) ไม่เท่ากับค่าขอบฝั่งขวา (y_{20}) นั่นคือ $y_0 \neq y_{20}$ จึงไม่พิจารณาสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติเงื่อนไขขอบ อันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวากับเงื่อนไขขอบแบบคาบและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ จากนั้นใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของตารางดังต่อไปนี้

1) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบเปรียบเทียบกัน โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1, 2 วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

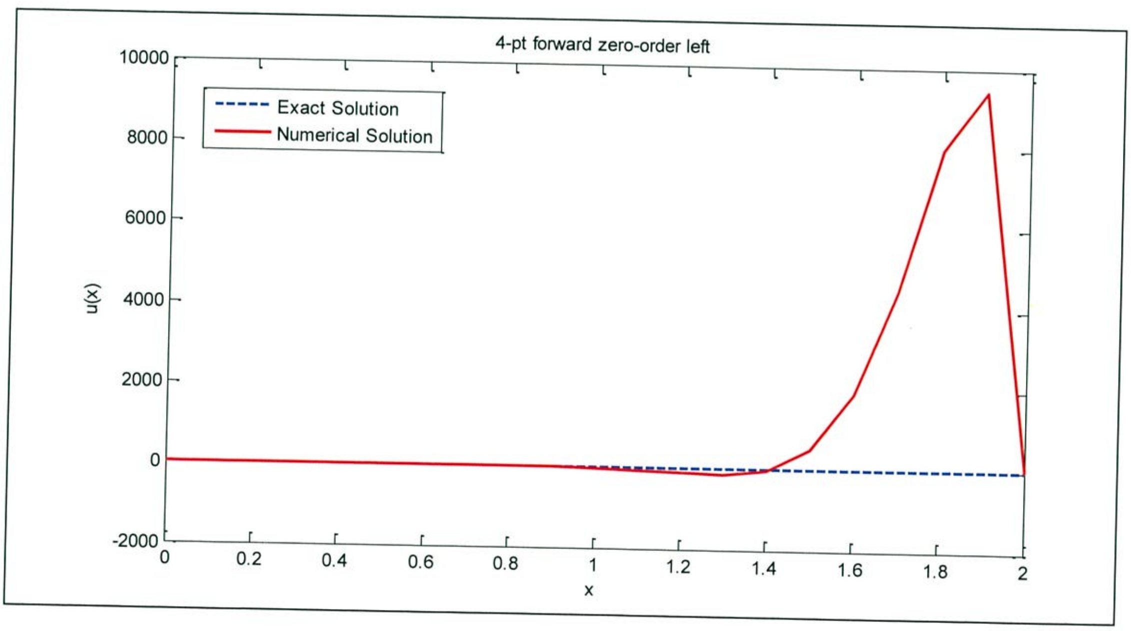
ตารางที่ 4.41 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย (1.0e+0.3*)	อันดับศูนย์ทางขวา
$u(0)$	1.0000	1.0000	1.0000
$u(1)$	6.2300	0.0001	6.7206
$u(2)$	9.0685	0.0002	9.6733
$u(3)$	10.5732	0.0005	11.1449
$u(4)$	11.3346	0.0010	11.8281
$u(5)$	11.6823	0.0019	12.0925
$u(6)$	11.8004	0.0030	12.1351
$u(7)$	11.7916	0.0040	12.0612
$u(8)$	11.7132	0.0036	11.9268
$u(9)$	11.5971	−0.0003	11.7616
$u(10)$	11.4614	−0.0100	11.5816
$u(11)$	11.3158	−0.0265	11.3951

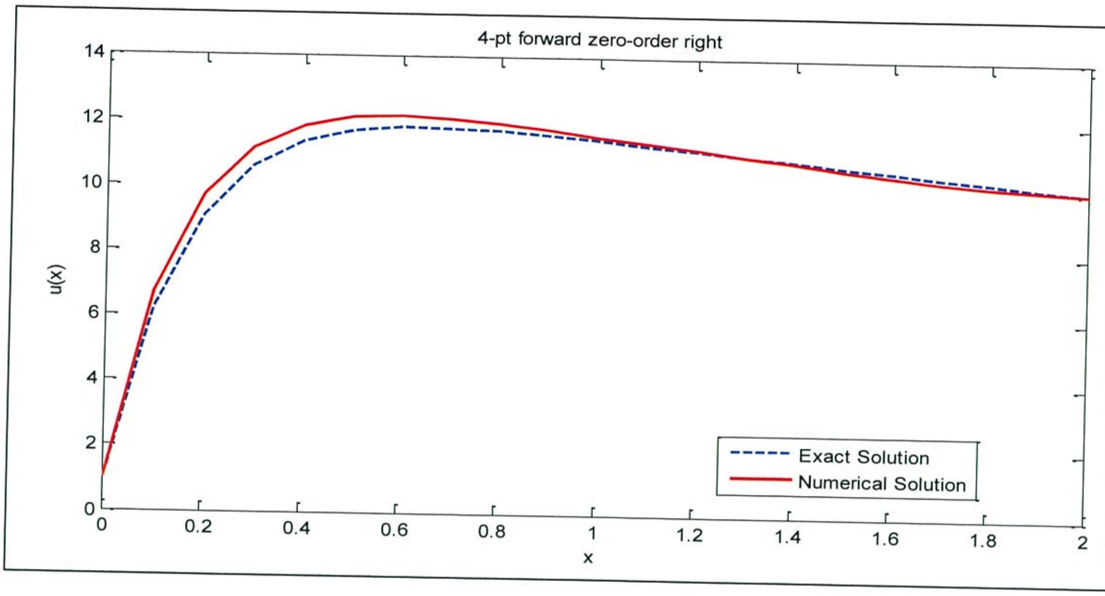
ตารางที่ 4.41 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า (ต่อ)

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย (1.0*e*+0.3*)	อันดับศูนย์ทางขวา
$u(12)$	11.1658	−0.0456	11.2065
$u(13)$	11.0147	−0.0517	11.0180
$u(14)$	10.8640	−0.0119	10.8310
$u(15)$	10.7147	0.1245	10.6470
$u(16)$	10.5673	0.4096	10.4693
$u(17)$	10.4220	0.8455	10.3047
$u(18)$	10.2790	1.2845	10.1638
$u(19)$	10.1383	1.2873	10.0566
$u(20)$	10.0000	10.0000	10.0000

จากตารางที่ 4.41 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เห็นได้ว่าถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวามีความเหมาะสมกว่า เนื่องจากว่ากราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่า จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.22 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.23 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.23 เห็นได้ชัดว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าสำหรับตัวอย่างที่ 4.3 ควรใช้รูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

2) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบเปรียบเทียบกันเช่นเดียวกับวิธีก่อนหน้านี้ โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1, 2 วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

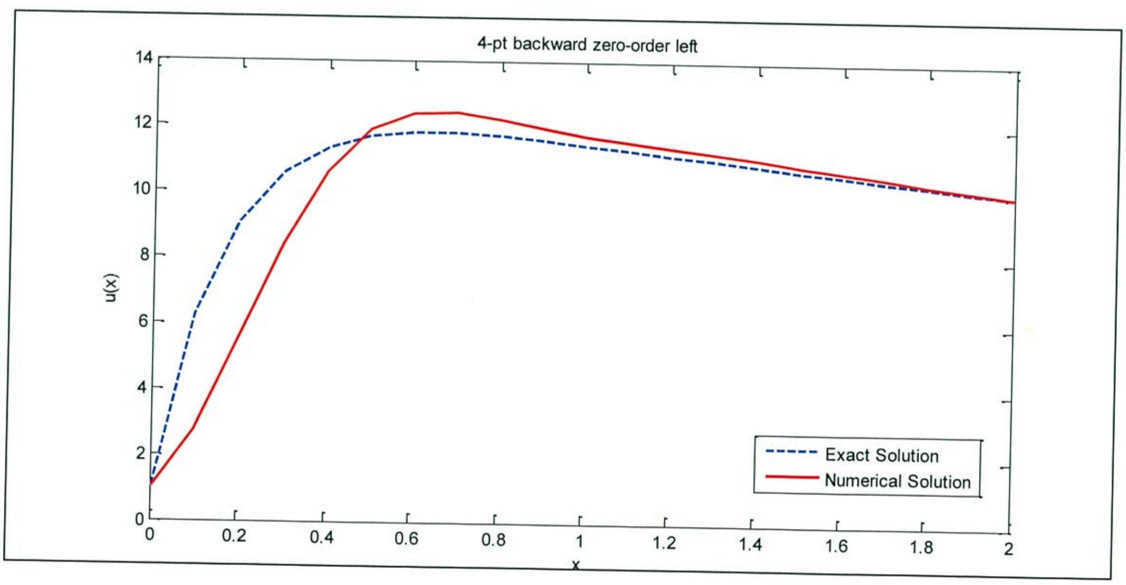
ตารางที่ 4.42 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย	อันดับศูนย์ทางขวา (1.0*e*+0.3*)
$u(0)$	1.0000	1.0000	1.0000
$u(1)$	6.2300	2.7201	0.3269
$u(2)$	9.0685	5.5600	0.8697
$u(3)$	10.5732	8.4310	1.1028
$u(4)$	11.3346	10.6062	0.9966

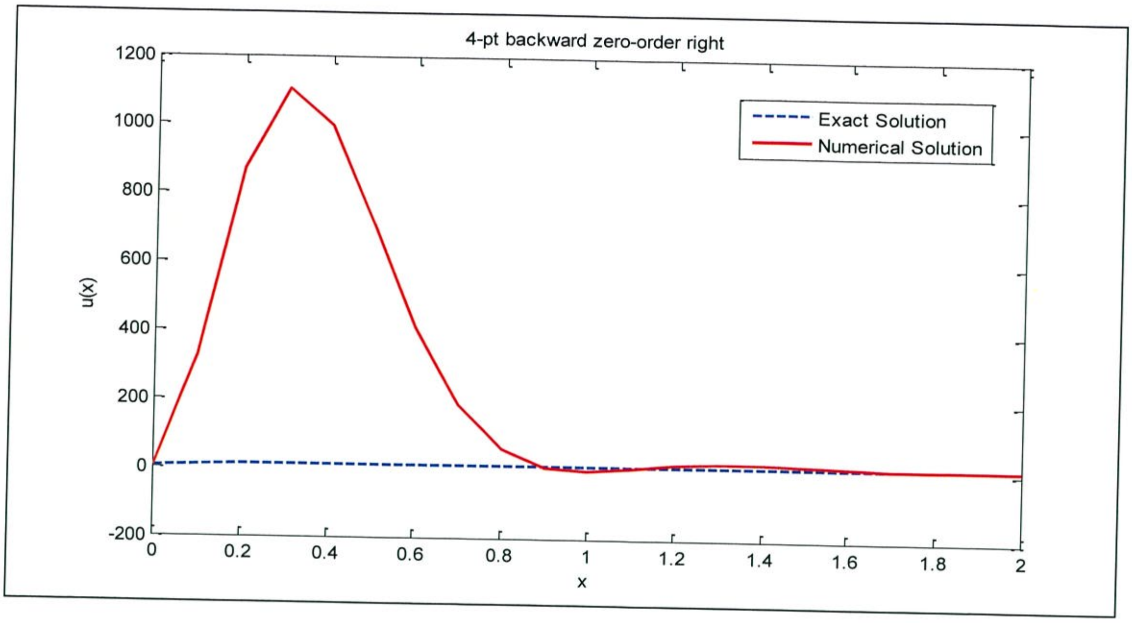
ตารางที่ 4.42 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง (ต่อ)

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย	อันดับศูนย์ทางขวา (1.0e+0.3*)
$u(5)$	11.6823	11.8750	0.7118
$u(6)$	11.8004	12.3844	0.4110
$u(7)$	11.7916	12.4152	0.1861
$u(8)$	11.7132	12.2237	0.0581
$u(9)$	11.5971	11.9758	0.0067
$u(10)$	11.4614	11.7471	–0.0008
$u(11)$	11.3158	11.5534	0.0082
$u(12)$	11.1658	11.3835	0.0179
$u(13)$	11.0147	11.2210	0.0224
$u(14)$	10.8640	11.0554	0.0219
$u(15)$	10.7147	10.8330	0.0188
$u(16)$	10.5673	10.7052	0.0152
$u(17)$	10.4220	10.5251	0.0125
$u(18)$	10.2790	10.3456	0.0109
$u(19)$	10.1383	10.1687	0.0102
$u(20)$	10.0000	10.0000	10.0000

จากตารางที่ 4.42 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เห็นได้ชัดว่าถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายมีความเหมาะสมกว่า จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.24 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.25 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.24 เห็นได้ชัดว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังสำหรับตัวอย่างที่ 4.3 ควรใช้รูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

3) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางจะพิจารณาเพียงแค่รูปแบบเดียว คือ วิธีผลต่างสี่จุดกลางโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะแสดงดังต่อไปนี้

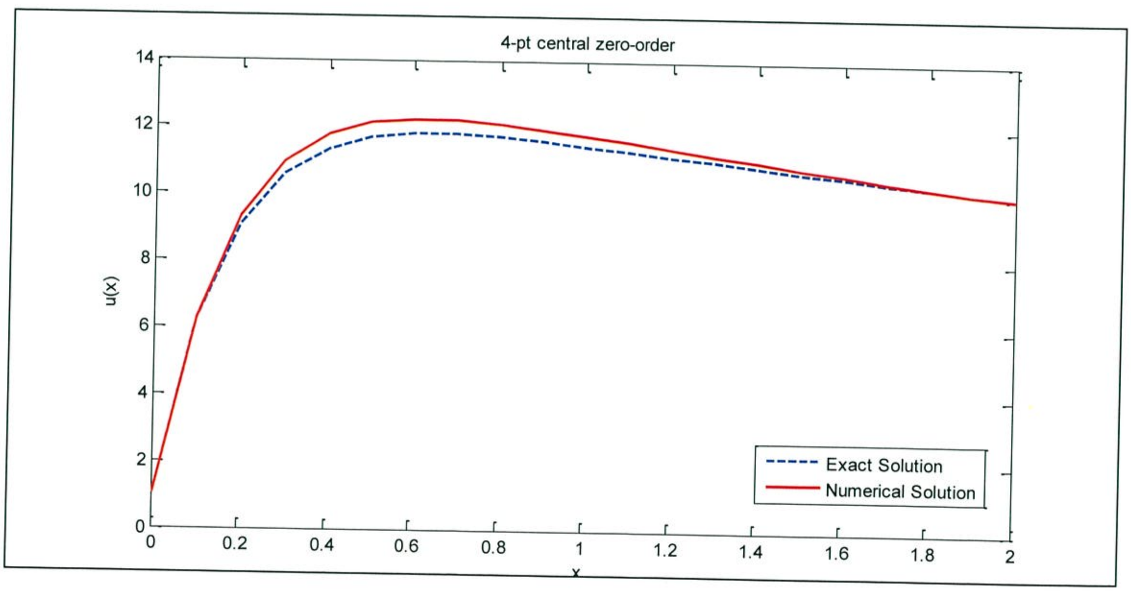
ตารางที่ 4.43 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$u(0)$	1.0000	1.0000
$u(1)$	6.2300	6.2484
$u(2)$	9.0685	9.3103
$u(3)$	10.5732	10.9458
$u(4)$	11.3346	11.7636
$u(5)$	11.6823	12.1251
$u(6)$	11.8004	12.2328
$u(7)$	11.7916	12.2004

ตารางที่ 4.43 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง (ต่อ)

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$u(8)$	11.7132	12.0911
$u(9)$	11.5971	11.9403
$u(10)$	11.4614	11.7679
$u(11)$	11.3158	11.5849
$u(12)$	11.1658	11.3974
$u(13)$	11.0147	11.2089
$u(14)$	10.8640	11.0213
$u(15)$	10.7147	10.8355
$u(16)$	10.5673	10.6521
$u(17)$	10.4220	10.4715
$u(18)$	10.2790	10.2951
$u(19)$	10.1383	10.1364
$u(20)$	10.0000	10.0000

จากตารางที่ 4.43 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ เห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากอยู่ทีเดียว แต่เพื่อภาพที่เห็นชัดยิ่งขึ้น จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟ ดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.26 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากผลการวิจัยเห็นได้ว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะทั้ง 3 วิธีที่พิจารณา วิธีที่เหมาะสมที่สุดแต่ละวิธีมีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติดังต่อไปนี้ วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า คือ สมการผลต่างอันตะแบบ

การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง คือ สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและวิธีผลต่างสี่จุดกลาง คือ สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

หากพิจารณาเลือกใช้สมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมที่สุดโดยพิจารณาจากทุก ๆ สมการผลต่างอันตะในทุกรูปแบบของการกำหนดจุดสมมติ โดยนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm มาเปรียบเทียบกันดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.44 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังและวิธีผลต่างสี่จุดกลางที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบที่แตกต่างกัน

สมการผลต่างอันตะ	ค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm
วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา	1.2938
วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย	1.2938
วิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์	1.2245

สำหรับตัวอย่างที่ 4.3 เงื่อนไขขอบที่โจทย์กำหนดมานั้นมีค่าขอบแต่ละฝั่งไม่เท่ากันจึงไม่สามารถพิจารณาสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบหรือร่วมกับแบบคาบได้ จึงเลือกพิจารณาการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ จากตารางที่ 4.44 เห็นได้ชัดว่าค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2-norm ของสมการผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีค่าน้อยที่สุด

สรุปว่า สำหรับตัวอย่างที่ 4.3 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางซึ่งสมการผลต่างอันตะที่กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีรูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในตัวอย่างนี้ และมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงเร็วยิ่งขึ้นมากกว่าสมการผลต่างอันตะรูปแบบอื่นๆ

ตัวอย่างที่ 4.4 จงใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 6\frac{du}{dx} + u = 2$$

ด้วยเงื่อนไขขอบคือ $u(0) = 10$ และ $u(2) = 1$ และกำหนดให้ช่วงกว้าง คือ $h = 0.1$

<u>วิธีทำ</u>

สำหรับตัวอย่างนี้ผลเฉลยจริงสามารถหาได้จาก $u(x) = 8.00011\mathrm{e}^{0.171573x} - 0.000106297\mathrm{e}^{5.82843x} + 2$ จากรูปแบบทั่วไปของปัญหาค่าขอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองและจากโจทย์

จะได้ว่า $p(x)=6,\ \ q(x)=-1$ และ $r(x)=2$ หลังจากนั้นแบ่งช่วง $[0,2]$ โดยโจทย์กำหนดให้ $h=0.1$ และจากนิยามการแบ่ง ดังนั้นช่วงย่อยสำหรับตัวอย่างนี้ถูกแบ่งออกเป็น 20 ช่วงย่อย

เนื่องจากว่าที่เงื่อนไขขอบสำหรับตัวอย่างนี้ค่าขอบฝั่งซ้าย (y_0) ไม่เท่ากับค่าขอบฝั่งขวา (y_{20}) นั่นคือ $y_0 \neq y_{20}$ จึงไม่พิจารณาสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติเงื่อนไขขอบ อันดับศูนย์ทางซ้ายและเงื่อนไขขอบแบบคาบ การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาและเงื่อนไขขอบแบบคาบและการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ จากนั้นใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลย ซึ่งแสดงอยู่ในรูปแบบของตารางดังต่อไปนี้

1) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบเปรียบเทียบกัน โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1, 2 วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

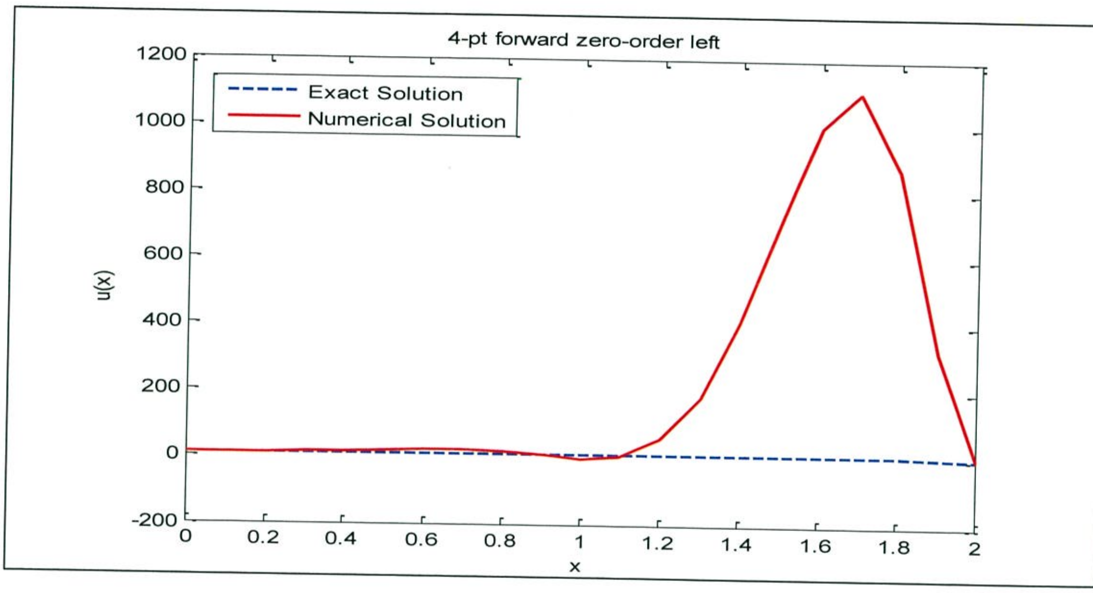
ตารางที่ 4.45 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย $(1.0e+03\ *)$	อันดับศูนย์ทางขวา
$u(0)$	10	10	10
$u(1)$	10.1384	0.0120	10.1687
$u(2)$	10.2791	0.0109	10.3456
$u(3)$	10.4221	0.0125	10.5251
$u(4)$	10.5673	0.0125	10.7052
$u(5)$	10.7147	0.0188	10.8830
$u(6)$	10.8640	0.0219	11.0554
$u(7)$	11.0147	0.0224	11.2210
$u(8)$	11.1659	0.0179	11.3835
$u(9)$	11.3158	0.0082	11.5534
$u(10)$	11.4614	–0.0008	11.7471
$u(11)$	11.5972	0.0067	11.9758
$u(12)$	11.7132	0.0581	12.2237
$u(13)$	11.7916	0.1861	12.4152
$u(14)$	11.8004	0.4110	12.3844
$u(15)$	11.6823	0.7118	11.8750
$u(16)$	11.3346	0.9966	10.6062
$u(17)$	10.5732	1.1028	8.4310
$u(18)$	9.0685	0.8697	5.5560

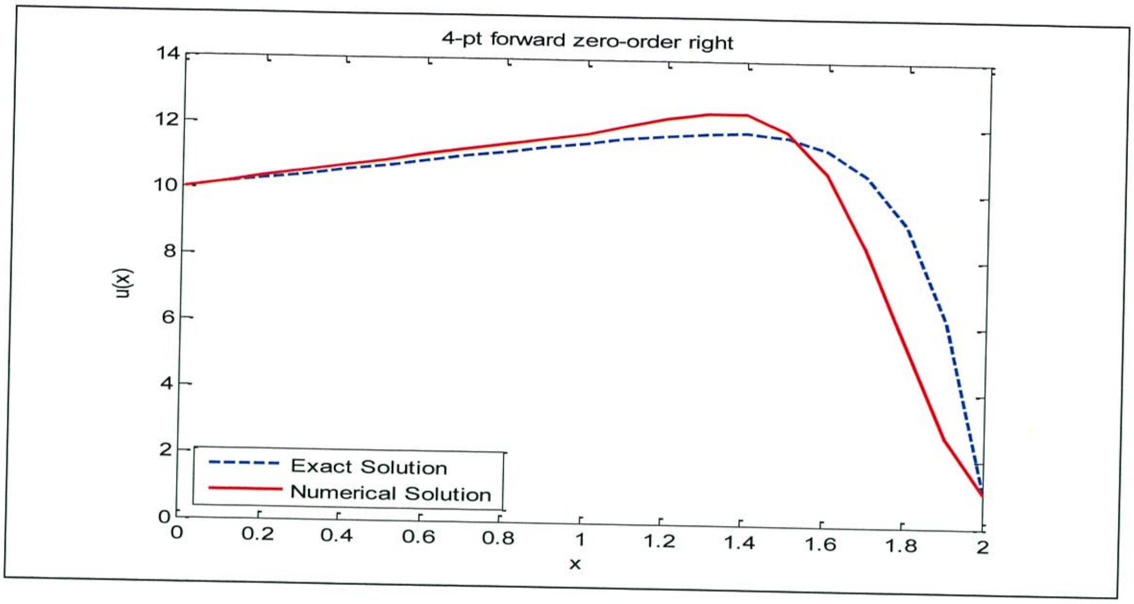
ตารางที่ 4.45 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า (ต่อ)

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย $(1.0e+03\ *)$	อันดับศูนย์ทางขวา
$u(19)$	6.2300	0.3269	2.7201
$u(20)$	1	1	1

จากตารางที่ 4.45 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เห็นได้ว่าถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวามีความเหมาะสมกว่า จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.27 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายเปรียบเทียบผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.28 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.28 เห็นได้ชัดว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าสำหรับตัวอย่างที่ 4.4 ควรใช้รูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

2) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังแบ่งออกเป็น 2 รูปแบบเปรียบเทียบกันเช่นเดียวกับวิธีก่อนหน้านี้ โดยจะพิจารณาตามรูปแบบดังต่อไปนี้พร้อมทั้งผลเฉลยที่ได้

รูปแบบที่ 1, 2 วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

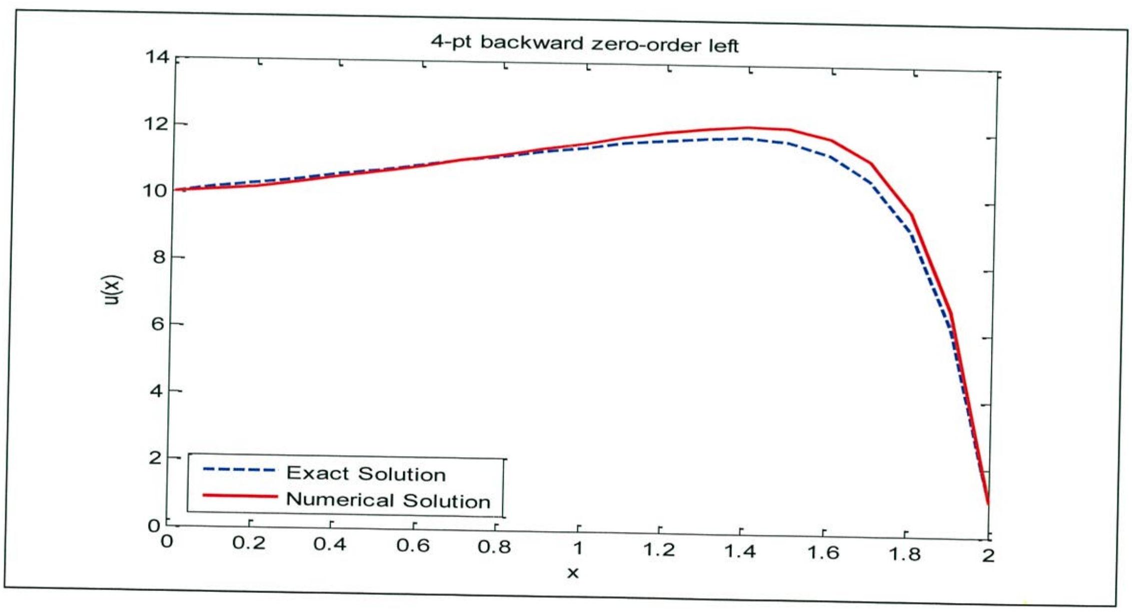
ตารางที่ 4.46 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย	อันดับศูนย์ทางขวา (1.0e+03 *)
$u(0)$	10	10	10
$u(1)$	10.1384	10.0566	9.4435
$u(2)$	10.2791	10.1638	7.9843
$u(3)$	10.4221	10.3047	4.4883
$u(4)$	10.5673	10.4693	1.8817
$u(5)$	10.7147	10.6470	0.5155

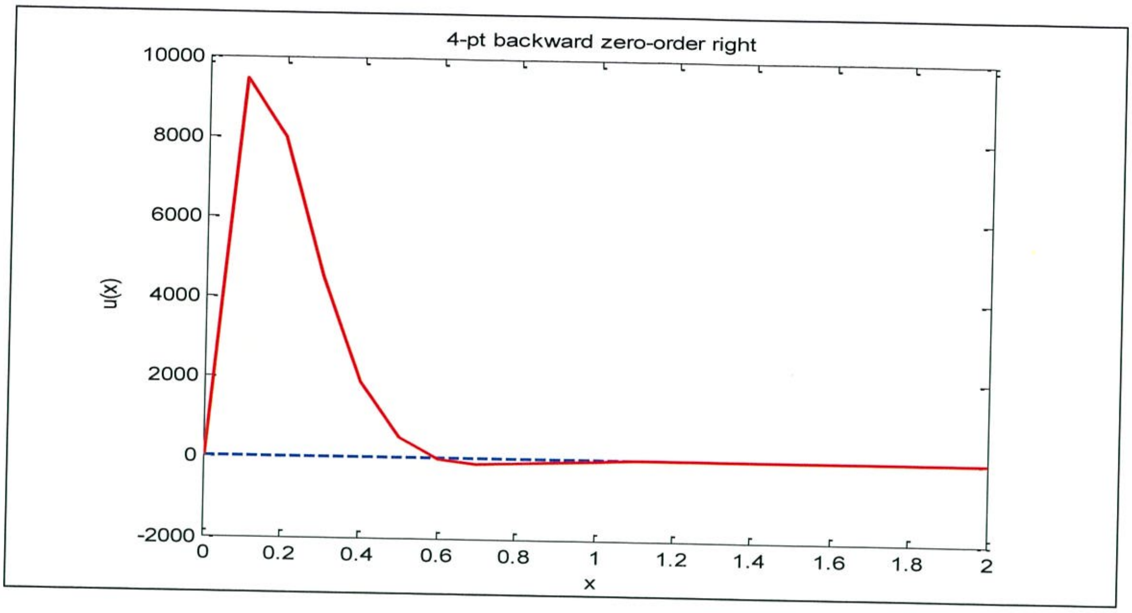
ตารางที่ 4.46 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง (ต่อ)

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบ	
		อันดับศูนย์ทางซ้าย	อันดับศูนย์ทางขวา (1.0e+03 *)
$u(6)$	10.8640	10.8310	–0.0149
$u(7)$	11.0147	11.0180	–0.1359
$u(8)$	11.1659	11.2065	–0.1110
$u(9)$	11.3158	11.3951	–0.0609
$u(10)$	11.4614	11.5816	–0.0245
$u(11)$	11.5972	11.7616	–0.0058
$u(12)$	11.7132	11.9268	0.0014
$u(13)$	11.7916	12.0612	0.0029
$u(14)$	11.8004	12.1351	0.0026
$u(15)$	11.6823	12.0925	0.0019
$u(16)$	11.3346	11.8281	0.0014
$u(17)$	10.5732	11.1449	0.0011
$u(18)$	9.0685	9.6733	0.0010
$u(19)$	6.2300	6.7206	0.0010
$u(20)$	1	1	1

จากตารางที่ 4.46 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายและแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เห็นได้ชัดว่าถ้าหากกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายมีความเหมาะสมกว่า จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.29 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง



รูปที่ 4.30 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากรูปที่ 4.29 เห็นได้ชัดว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย กราฟของผลเฉลยเชิงตัวเลขมีแนวโน้มเข้าใกล้กราฟของผลเฉลยจริงมากกว่าสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา

ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังสำหรับตัวอย่างที่ 4.4 ควรใช้รูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย

3) ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

ในการพิจารณาระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางจะพิจารณาเพียงแค่รูปแบบเดียว คือ วิธีผลต่างสี่จุดกลางโดยมีสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จะแสดงดังต่อไปนี้

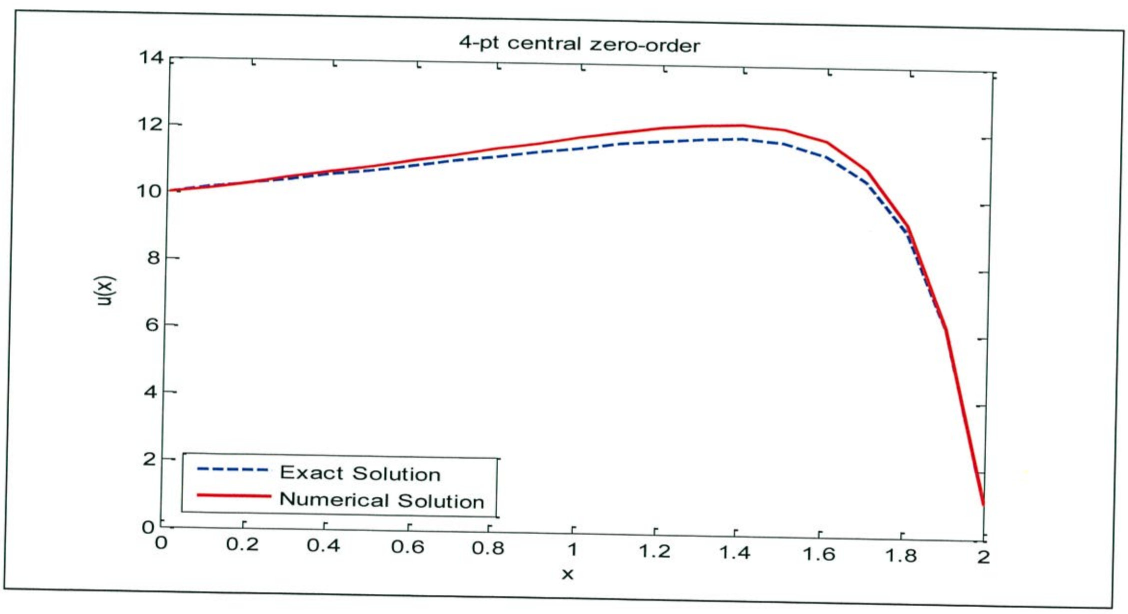
ตารางที่ 4.47 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$u(0)$	10	10
$u(1)$	10.1384	10.1364
$u(2)$	10.2791	10.2951
$u(3)$	10.4221	10.4715
$u(4)$	10.5673	10.6521
$u(5)$	10.7147	10.8355
$u(6)$	10.8640	11.0213
$u(7)$	11.0147	11.2089
$u(8)$	11.1659	11.3974

ตารางที่ 4.47 ผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลาง (ต่อ)

$u(x_i)$	ผลเฉลยจริง	ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์
$u(9)$	11.3158	11.5849
$u(10)$	11.4614	11.7679
$u(11)$	11.5972	11.9403
$u(12)$	11.7132	12.0911
$u(13)$	11.7916	12.2004
$u(14)$	11.8004	12.2328
$u(15)$	11.6823	12.1251
$u(16)$	11.3346	11.7636
$u(17)$	10.5732	10.9458
$u(18)$	9.0685	9.3103
$u(19)$	6.2300	6.2484
$u(20)$	1	1

จากตารางที่ 4.47 สำหรับสมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ เห็นได้ว่าผลเฉลยเชิงตัวเลขมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากอยู่ทีเดียว แต่เพื่อภาพที่เห็นชัดยิ่งขึ้น จากนั้นนำผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขมาสร้างอยู่ในรูปแบบการจำลองกราฟดังภาพต่อไปนี้



รูปที่ 4.31 ผลเฉลยเชิงตัวเลขจากการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์เปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง

จากผลการวิจัยเห็นได้ว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะทั้ง 3 วิธีที่พิจารณา วิธีที่เหมาะสมที่สุดแต่ละวิธีมีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติดังต่อไปนี้ วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า คือ สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง คือ สมการผลต่าง

อันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย และวิธีผลต่างกลาง คือ สมการผลต่างอันตะแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

หากพิจารณาเลือกใช้สมการผลต่างอันตะที่เหมาะสมที่สุดโดยพิจารณาจากทุก ๆ สมการผลต่างอันตะในทุกรูปแบบของการกำหนดจุดสมมติ โดยนำค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm มาเปรียบเทียบกันดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 4.48 เปรียบเทียบค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ของสมการผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลังและวิธีผลต่างสี่จุดกลางที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบที่แตกต่างกัน

สมการผลต่างอันตะ	ค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm
วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวา	5.5900
วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้าย	1.2938
วิธีผลต่างสี่จุดกลาง กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์	1.2244

สำหรับตัวอย่างที่ 4.4 เงื่อนไขขอบที่โจทย์กำหนดมานั้นมีค่าขอบแต่ละฝั่งไม่เท่ากัน จึงไม่สามารถพิจารณาสมการผลต่างอันตะที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบหรือร่วมกับแบบคาบได้ จึงเลือกพิจารณาการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ จากตารางที่ 4.48 เห็นได้ชัดว่าค่าคลาดเคลื่อนโดยใช้ L2 – norm ของสมการผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างกลางที่มีรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีค่าน้อยที่สุด

สรุปว่า สำหรับตัวอย่างที่ 4.4 ระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางซึ่งสมการผลต่างอันตะที่กำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีรูปแบบที่เหมาะสมที่สุดสำหรับการประมาณค่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในตัวอย่างนี้ และมีแนวโน้มเข้าใกล้ผลเฉลยจริงเร็วยิ่งขึ้นมากกว่าสมการผลต่างอันตะรูปแบบอื่น ๆ

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

สำหรับงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองสำหรับปัญหาค่าขอบดิริชเลทโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะซึ่งแบ่งออกเป็น 3 วิธี คือ

1. วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า
2. วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง
3. วิธีผลต่างสี่จุดกลาง

เนื่องจากว่าวิธีการประมาณค่าด้วยระเบียบวิธีผลต่างอันตะต้องแบ่งออกเป็นช่วงย่อยและทำการประมาณค่าหาอนุพันธ์ที่จุดย่อยเหล่านั้น ในการแบ่งช่วงย่อยหากเกิดจุดที่ไม่อยู่ในขอบเขตที่พิจารณาหรือจุดสมมติ (Ghost Point) จะใช้วิธีการกำหนดจุดสมมติดังต่อไปนี้

1. การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบแบบคาบ
2. การกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์

จากนั้นเมื่อได้รูปแบบของสมการผลต่างอันตะตามรูปแบบในบทที่ 3 จึงนำไปคำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขโดยใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการหาผลเฉลยและนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงซึ่งผลการวิจัยพบว่า

1. วิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้า ถ้ากำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางขวามีความเหมาะสมมากกว่ารูปแบบอื่น
2. วิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง ถ้ากำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ทางซ้ายมีความเหมาะสมมากกว่ารูปแบบอื่น
3. วิธีผลต่างสี่จุดกลาง ถ้ากำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์มีความเหมาะสมมากกว่ารูปแบบอื่น

เห็นได้ว่ารูปแบบการกำหนดจุดสมมติส่งผลต่อผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ประมาณค่าได้ เพราะว่าแต่ละวิธีก็เหมาะสมกับการกำหนดจุดสมมติที่รูปแบบแตกต่างกัน รวมไปถึงแต่ละวิธีก็เหมาะสมกับปัญหาที่แตกต่างกันไปด้วย แต่เนื่องจากว่าขอบเขตของการศึกษางานวิจัยนี้เป็นการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองบนโดเมนแบบ 1 มิติ เพราะฉะนั้นปัญหาส่วนใหญ่ที่พบเห็นจึงมักอยู่ในรูปของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Model) ของสมการการแพร่ (Diffusion Equation) ดังนั้นระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างกลางเป็นวิธีการที่เหมาะสมสำหรับการประมาณค่าของปัญหานี้ ซึ่งสอดคล้องกับผลการเปรียบเทียบจากตัวอย่างทั้งหมดในบทที่ 4 พบว่าระเบียบวิธีผลต่างอันตะโดยวิธีผลต่างสี่จุดกลางที่มีสมการผลต่างอันตะรูปแบบการกำหนดจุดสมมติแบบเงื่อนไขขอบอันดับศูนย์ให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขที่เหมาะสมมากกว่าวิธีผลต่างสี่จุดข้างหน้าและวิธีผลต่างสี่จุดย้อนหลัง อีกทั้งยังให้ค่าคลาดเคลื่อนน้อยกว่าด้วย

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. การเลือกรูปแบบการกำหนดจุดสมมติที่เหมาะสมนอกเหนือจากงานวิจัยนี้ อาจจะส่งผลให้ผลเฉลยเชิงตัวเลขมีการปรับปรุงในทางที่ดีขึ้น

2. สามารถพัฒนางานวิจัยเพื่อใช้สำหรับแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์ที่ไม่ใช่ค่าคงที่ได้ เช่น สมการโคชี-ออยเลอร์ เป็นต้น

เอกสารอ้างอิง

[1] ดำรงค์ ทิพย์โยธาและคณะ . *แคลคูลัส 2.* พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2554.

[2] ผศ.ดร.กาญจนา คำนึงกิจ. *การวิเคราะห์เชิงตัวเลข.* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2554.

[3] ไม่ปรากฏชื่อผู้แต่ง.2556: ออนไลน์. *สัญกรณ์โอใหญ่.* แหล่งที่มา: https://th.wikipedia.org/wiki/สัญกรณ์โอใหญ่. ค้นเมื่อ 5 ธันวาคม 2558.

[4] รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ. *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.* พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพฯ: มีนเซอร์วิส ซัพพลาย, 2555.

[5] อรรจน์ โกญจนาท. ม.ป.ป.: 128-137. *Numerical Differentiation and Integration.* แหล่งที่มา : http://cpe.rsu.ac.th/ut/courses/T2-57/cpe332/download/CPE332%20Ed3%20Pt%20III.pdf. ค้นเมื่อ 13 ตุลาคม 2558.

[6] Fqires, J.Douglas, and Richarad L.Burden, Numerical Methods, ISBN 0-534-93136-7, 1993

[7] Hunt, Brian R.; Lipsman, Ronald L.; Rosenberg, Jonathan M., A Guide to MATLAB: For Beginners and Experienced Users, ISBN 10: 052100859X, 2001

[8] P.K.Pandey,Fourth Order Finite Difference Method for sixth Order Boundary Value Problem , COMPUTATIONAL MATHEMATICS AND MATHEMATICAL PHYSICS Vol. 53 No. 1,57-62, 2013

[9] R.LAKSHMI , M.MUTHUSELVI ,NUMERICAL SOLUTION FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM USING FINITE DIFFERENCE METHOD, International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology, Vol. 2, Issue 10, 5305-5313,October2013