

# การทำนายอุณหภูมิบนขอบเขตปัญหาการนำความร้อน

## สองมิติด้วยวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม

### Temperature Estimation on Boundary of Two-Dimensional

### Heat Conduction Problem by a Finite Volume Method

ภาสกร เวสสะโกศล<sup>1</sup>

จารุวัตร เจริญสุข<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

<sup>2</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

#### บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมเพื่อหาอุณหภูมิที่ยังไม่ทราบค่าบนขอบเขตของของแข็งสองมิติ ซึ่งอยู่ภายใต้การนำความร้อนที่สภาวะคงตัว ระบบสมการพีชคณิตของอุณหภูมิและอัตราการนำความร้อนไม่ทราบค่าสำหรับจุดต่อภายในและจุดต่อบนขอบเขตถูกสร้างขึ้นมาและหาคำตอบด้วยวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม ปัญหาผกผันของการนำความร้อนถูกนำมาคิดเพื่อการทำนายอุณหภูมิที่ไม่ทราบค่าบนขอบเขตของวัสดุด้วยการใช้ข้อมูลที่วัดได้ภายในของวัสดุ เทคนิคที่เรียกว่าคิวบิกสไปลน์ถูกใช้ในการประมาณค่าอุณหภูมิบางจุดบนขอบเขตของวัสดุ แผ่นวัสดุไอโซโทรปิกเอกพันธ์รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1 หน่วยคือโดเมนของปัญหา ขอบเขตที่กำหนดฟังก์ชันอุณหภูมิคือขอบเขตที่ใช้กับทุกผิวของแผ่นสี่เหลี่ยม ผลที่ได้จากการศึกษาสรุปได้ว่าโครงตาข่ายการคำนวณจำนวน 16 จุดในพิกัด  $x$  และ  $y$  มีความผิดพลาดในการทำนายสูงสุดเท่ากับ  $0.306^{\circ}C$  และ  $0.024^{\circ}C$  เมื่อไม่ได้ใช้และใช้วิธีคิวบิกสไปลน์ตามลำดับที่ระยะ  $y = 0.625\text{ m}$

**คำสำคัญ :** ปัญหาผกผันของการนำความร้อน, วิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม, วิธีคิวบิกสไปลน์, การคำนวณเชิงตัวเลข, การนำความร้อนสองมิติ

#### Abstract

This paper proposes a finite volume method for finding the unknown temperature on boundary of two-dimensional solid under heat conduction at steady state. A system of algebraic equations for unknown temperature and heat rate at nodal points are formulated and solved by the finite volume method. The inverse heat conduction problem is carried out to determine the unknown temperature on the boundary by employing the known temperature inside the domain. The cubic-spline interpolation is used to improve the accuracy of the solution on the boundary of domain. The unit square plate of isotropic homogeneous material is the domain of the problem. The functions of temperature are specified on the all boundaries of square plate. The result of this study can be summarized that the mesh size of 16

points in both  $x$  and  $y$  coordinates gives the maximum errors  $0.306^\circ C$  and  $0.024^\circ C$  when using finite volume method without and with cubic-spline technique, respectively, at position  $y = 0.625$  m .

**Keywords :** Inverse heat conduction problem (IHCP), Finite volume method (FVM), Cubic spline, numerical method, two-dimensional heat conduction.

## 1. บทนำ

ปัญหาผกผันของการนำความร้อนหรือ Inverse Heat Conduction (IHCP) เกิดขึ้นในหลายสถานการณ์ ได้แก่ การหาอุณหภูมิหรือฟลักซ์ความร้อนบนพื้นผิวที่ไม่สามารถเข้าถึงได้ หรือไม่สามารถติดตั้งเครื่องมือวัดในงานนั้นได้โดยตรง ในบางครั้งปัญหานี้เกี่ยวข้องกับการหาค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนบนพื้นผิว การระบุอัตราการผลิตความร้อนภายในวัสดุ และการหาความเค้นเนื่องจากความร้อน เป็นต้น [1]

ในการแก้ปัญหา IHCP ลำดับแรกจะกระทำโดยการแก้ปัญหาโดยตรง (Direct heat conduction problems) เหมือนกับการแก้ปัญหการนำความร้อนตามปกติเพื่อหาข้อมูลเบื้องต้น (อุณหภูมิ) ของจุดต่อต่างๆภายในโดเมนทำการใส่เงื่อนไขให้กับขอบเขตทุกด้าน ต่อจากนั้นนำเอาอุณหภูมิที่จุดต่อภายในไปใช้ในการทำนายอุณหภูมิบนขอบเขตที่สนใจ Dennis และคณะ [1] ใช้วิธีไฟไนต์-เอลิเมนต์ในการทำนายอุณหภูมิ ระยะขจัดภายในแท่งวัสดุสามมิติรูปทรงกระบอกซึ่งมีรูเจาะจำนวนสี่รูอยู่ภายใน เทคนิคพิเศษที่เขาใช้คือ regularization method เพื่อลดความผิดพลาดในการทำนายผลของอุณหภูมิมบนพื้นผิวในกรณีที่มีความผิดพลาดในการวัดอุณหภูมิภายในชิ้นงาน เอกสาร [2, 3] รวบรวมทฤษฎีที่ใช้งานได้กับปัญหา IHCP Kanjanakijkasem [4, 5] แสดงให้เห็นอีกแนวทางหนึ่งในการหาคำตอบให้กับ IHCP ด้วยการใช่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ร่วมกับหลายเทคนิค ได้แก่ การประมาณค่าในช่วงด้วยเส้นโค้งกำลังสาม (cubic spline interpolation) และการแก้

ระบบสมการด้วยวิธี Preconditioned Conjugate Gradient Method for Normal Equation [6] เป็นต้น โดยไม่ใช้เทคนิค Regularization

บทความนี้ต้องการนำเสนอระเบียบวิธีเชิงตัวเลขหนึ่งคือ วิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม (finite volume method) สำหรับโครงตาข่ายสี่เหลี่ยมจัตุรัส (square mesh) เพื่อหาคำตอบให้กับ IHCP ในโดเมนสองมิติที่สภาวะคงตัว โดยมีเงื่อนไขขอบเขตแบบ Dirichlet หรือเงื่อนไขของอุณหภูมิบนพื้นผิว และศึกษาถึงผลกระทบของขนาด Mesh และการใช้เทคนิคคิวบิกสไปไลน์ที่มีต่อความผิดพลาดในการทำนาย ในหัวข้อที่ 2 อธิบายสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาการนำความร้อน หัวข้อที่ 3 กล่าวถึงระเบียบวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม หัวข้อที่ 4 อธิบายเทคนิคการประมาณค่าภายในด้วยวิธีคิวบิกสไปไลน์ หัวข้อที่ 5 แสดงตัวอย่างของการคำนวณ และหัวข้อที่ 6 สรุปผลการศึกษา

## 2. ปัญหาการนำความร้อน

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการนำความร้อนสามมิติภายในวัสดุของแข็งไอโซทรอปิก (Isotropic) และเอกพันธ์ (homogeneous) ที่สภาวะคงตัว (steady state) คือ

$$k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q''' = 0 \quad (1)$$

โดย  $x$ ,  $y$  และ  $z$  คือตำแหน่งพิกัดของระบบคาร์ทีเซียนสามมิติ,  $T$  คืออุณหภูมิ,  $k$  คือสภาพการนำความร้อนในของแข็ง,  $q'''$  คืออัตราการผลิตความร้อนภายในของแข็ง สมการที่ (1) ใช้ได้กับของแข็งทั่วไปซึ่งไม่มีการผลิตความร้อนภายใน ( $q''' = 0$ ) โดเมนของปัญหาคือรูปทรงสอง

มิติ ดังนั้นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับพิกัด  $z$  จะถูกตัดทิ้งออกจากสมการที่ (1) รูปที่ 1 แสดงโดเมนสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด  $1\text{ m}$  วัสดุที่ใช้มีสภาพการนำความร้อน( $k$ ) เท่ากับ  $1\text{ W}/(\text{m}\cdot^{\circ}\text{C})$  เงื่อนไขอุณหภูมิที่ผิวด้านซ้าย ขวาและล่าง เท่ากับ  $0^{\circ}\text{C}$  แต่เงื่อนไขอุณหภูมิที่ผิวด้านบนคือ  $T = f(x) = \sin(\pi x)$  คำตอบแม่นยำคือ

$$T(x, y) = \frac{\sin(\pi x)\sinh(\pi y)}{\sinh \pi} \quad (2)$$

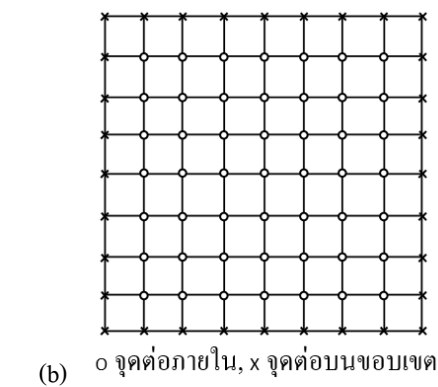
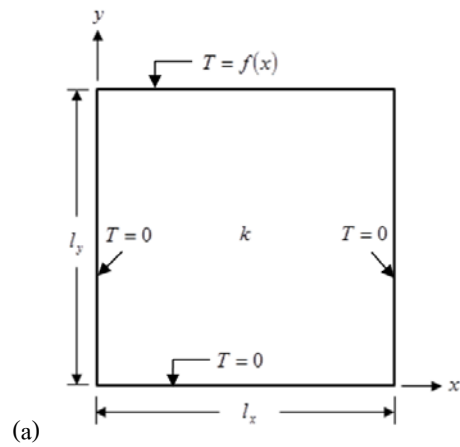
คำตอบนี้จะนำมาใช้ในการประเมินความถูกต้องของคำตอบผกผันต่อไปในหัวข้อที่ 5

### 3. วิธีปริมาตรสืบเนื่อง

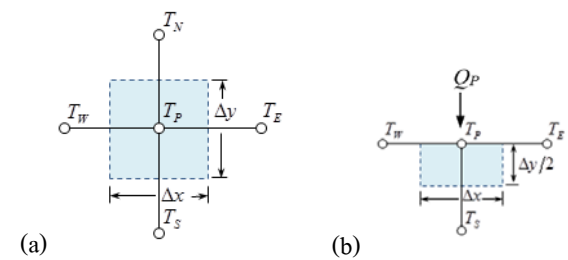
หลักการอย่างง่ายของวิธีปริมาตรสืบเนื่องในบทความนี้คือ แบ่งโดเมนออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาดเล็ก หรือ Mesh อย่างสม่ำเสมอตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  Mesh ( $8 \times 8$ ) หมายถึงการแบ่งโดเมนออกมาเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสอย่างสม่ำเสมอจำนวน 8 ชั้นในแกน  $x$  และแกน  $y$  ดังรูปที่ 1(b) ต่อจากนั้นให้ทำการแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ (สมการที่ (1)) ให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการปริมาตรสืบเนื่อง สมการปริมาตรสืบเนื่องสำหรับจุดต่อของปัญหาแบ่งออกเป็นสองส่วนได้แก่ (1) จุดต่อภายในและ (2) จุดต่อบนขอบเขตในรูปที่ 1(b) ถ้าจุดต่อบนขอบเขตนั้นมีการระบุอุณหภูมิแน่ชัดแล้วก็ไม่จำเป็นต้องสร้างสมการสมดุลความร้อน แต่ถ้าจุดต่อบนขอบเขตนั้นเป็นจุดต่อที่ต้องการทำนายอุณหภูมิจะต้องสร้างสมการสมดุลความร้อนให้กับจุดต่อนั้น สมการสำหรับอุณหภูมิของจุดต่อภายใน ( $T_P$ ) และจุดต่อข้างเคียง ( $T_N, T_E, T_S, T_W$ ) ในรูปที่ 2(a) สามารถเขียนได้จากอัตราการนำความร้อนผ่านเข้ามาทางผิวด้านเหนือ, ใต้, ตะวันออก และตะวันตกจะต้องเท่ากับศูนย์ดังนี้

$$\left(\frac{k\Delta y}{\Delta x}\right)(T_E - T_P) + \left(\frac{k\Delta y}{\Delta x}\right)(T_W - T_P) +$$

$$\left(\frac{k\Delta x}{\Delta y}\right)(T_N - T_P) + \left(\frac{k\Delta x}{\Delta y}\right)(T_S - T_P) = 0 \quad (3)$$



รูปที่ 1 (a) รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาการนำความร้อนสองมิติ (b) ตัวอย่างของ Mesh ( $8 \times 8$ )



รูปที่ 2 ปริมาตรควบคุมและจุดต่อรอบข้างสำหรับ (a) จุดต่อภายใน (b) จุดต่อบนขอบเขต

เมื่อ  $\Delta x$  และ  $\Delta y$  คือระยะห่างของจุดต่อในแกน  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ

ในกรณีที่  $\Delta x = \Delta y$  และทำการหารสมการที่ (3) ด้วย  $k$  ทำให้ได้

$$T_S + T_W - 4T_P + T_E + T_N = 0 \quad (4)$$

อุณหภูมิของจุดตอบนขอบเขต ( $T_P$ ) และจุดต่อข้างเคียง ดังรูปที่ 2(b) สมการสมดุลความร้อนของอุณหภูมิได้มา ผลรวมระหว่างอัตราการนำความร้อนผ่านผิวด้านใต้, ตะวันออก, ตะวันตก และฟลักซ์ความร้อนที่เข้าสู่ของจุด ต่อทางทิศเหนือ ( $Q_P$ ) ดังนี้

$$\left(\frac{k\Delta y}{2\Delta x}\right)(T_E - T_P) + \left(\frac{k\Delta y}{2\Delta x}\right)(T_W - T_P) + \left(\frac{k\Delta x}{\Delta y}\right)(T_S - T_P) + Q_P = 0 \quad (5)$$

หลังจากหารสมการที่ (5) ด้วย  $k$  และ  $\Delta x = \Delta y$  สมการที่ (5) กลายเป็น

$$T_S + 0.5T_W - 2T_P + 0.5T_E + Q_P/k = 0 \quad (6)$$

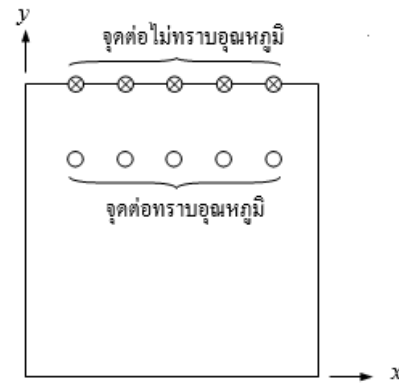
จุดต่อที่จะกล่าวถึงในเนื้อหาต่อไปถูกแสดงอยู่ใน รูปที่ 3 มีนิยามดังนี้ (1) จุดต่อทราบอุณหภูมิ (over-specified data nodes) อยู่ภายในโดเมน (2) จุดต่อไม่ทราบ อุณหภูมิ (missing data nodes) อยู่บนขอบเขตของ โดเมน

การกำหนดเงื่อนไขอุณหภูมิให้กับ IHCP เกิดขึ้น ที่จุดบนขอบเขตทั้งสามด้านรวมกับอุณหภูมิของจุดต่อ ทราบอุณหภูมิภายในโดเมน ระบบสมการสุดท้ายอยู่ใน รูปแบบเมตริกซ์

$$Ax = b \quad (7)$$

เมื่อ  $A$  คือเมตริกซ์สัมประสิทธิ์,  $b$  คือเวกเตอร์ที่ได้จาก ตัวแปรรู้ค่าและ  $x$  คือเวกเตอร์ของผลเฉลยประกอบด้วย อุณหภูมิไม่รู้ค่าภายในโดเมน อุณหภูมิไม่ทราบค่าบน ขอบเขต และอัตราการถ่ายเทความร้อนไม่ทราบค่าบน ขอบเขต วิธีที่ใช้ในการหาคำตอบให้กับปัญหาใน บทความนี้คือ วิธีกำจัดตัวแปรแบบเกาส์ (Gauss-

elimination method) คำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จาก Mesh 8x8 และ Mesh 16x16 ถูกนำมาตรวจสอบความแม่นยำโดย เปรียบเทียบกับคำตอบแม่นยำตรงในสมการที่ (2) พบว่ามีค่า ใกล้เคียงกัน



รูปที่ 3 จุดต่อทราบอุณหภูมิภายในโดเมน และจุดต่อไม่ ทราบอุณหภูมิตามขอบเขตของโดเมน

#### 4. การประมาณค่าด้วยวิธีคิวบิกสไปไลน์

การประมาณค่าในช่วง (interpolation) ด้วยเส้น โคง์กำลังสามดังรูปที่ 4 เกิดขึ้นได้ด้วยการใช้ฟังก์ชันที่ แบ่งเป็นช่วงต่อไปนี้

$$F(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x_1 \leq x \leq x_2 \\ f_2(x) & \text{if } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & \text{if } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (8)$$

เมื่อ  $f_i(x)$  คือฟังก์ชันโพลีโนเมียลกำลังสามในช่วง  $x_i$  ถึง  $x_{i+1}$  มีนิยามว่า

$$f_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i; x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (9)$$

เมื่อ  $a_i, b_i, c_i$  และ  $d_i$  คือค่าสัมประสิทธิ์ของพจน์พหุนามผลต่างกำลังสาม, สอง, หนึ่งและพจน์ค่าคงที่ตามลำดับ ในช่วง  $i$ ; ธรรมชาติต่าง  $i = 1, 2, K, n$

อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองของฟังก์ชันในสมการที่ (9) คือ

$$f_i'(x) = 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \quad (10)$$

$$f_i''(x) = 6a_i(x - x_i) + 2b_i \quad (11)$$

โดยค่าสัมประสิทธิ์  $a_i, b_i, c_i$  และ  $d_i$  ในสมการที่ (9) คือ

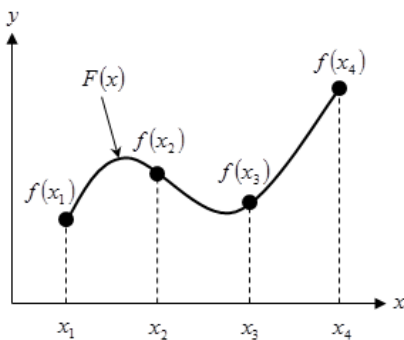
$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h}$$

$$b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \left( \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} \right) h$$

$$d_i = y_i \quad (10)$$

เมื่อ  $h = x_i - x_{i-1}$  เป็นค่าคงที่ถ้าแบ่งกริดอย่างสม่ำเสมอ ในทิศทาง  $x$ ,  $y_i = f(x_i)$  คือค่าของฟังก์ชันที่จุดควบคุม (control points),  $M_i = f_i''(x_i)$  ถูกนิยามขึ้นมาเพื่อให้เข้าใจได้ง่ายขึ้น



รูปที่ 4 วิธีคิวบิกสไปลน์

ต่อไปคือการระบุเงื่อนไขของค่าอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันมีค่าเป็นศูนย์ตรงปลายเส้นโค้งทั้งสอง

$$M_1 = M_n = 0 \quad (11)$$

ในที่สุดค่าของ  $M_i$  ที่ได้จากการแก้สมการด้วยเมทริกซ์จะนำไปคำนวณเป็นค่าสัมประสิทธิ์  $a_i, b_i, c_i$  และ  $d_i$  ของฟังก์ชันในแต่ละช่วง หากต้องการทราบว่าค่าฟังก์ชันที่ตำแหน่ง  $x$  ใดก็ให้ตรวจสอบว่าอยู่ในช่วงใดแล้วเลือกใช้ฟังก์ชันประมาณค่าภายในสำหรับช่วงนั้น

## 5. ผลการคำนวณ

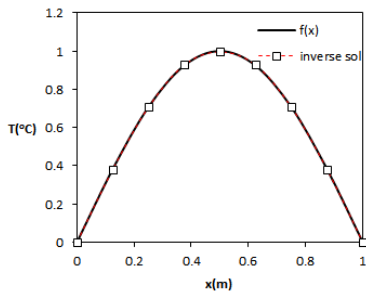
ผลการคำนวณได้มาจากการแบ่งโดเมนด้วย Mesh 8x8 และ Mesh 16x16 สำหรับแก้ปัญหาการนำความร้อนในของแข็งมีคุณสมบัติไอโซทรอปิกและเอกพันธ์ การประเมินความแม่นยำของการทำนายได้มาจากความผิดพลาดแบบ Root Mean Square Error (RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i - T_i^*)^2} \quad (11)$$

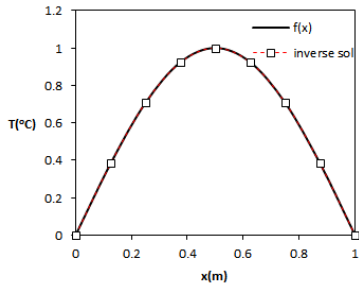
เมื่อ  $N$  คือจำนวนของจุดต่อบนขอบเขตที่ตำแหน่ง  $y = 1$  m,  $T$  คืออุณหภูมิที่คำนวณได้จากปัญหา IHCP และ  $T^* = \sin(\pi x)$  ซึ่งเป็นค่าที่กำหนดขึ้นมาเพื่อให้ทำนาย

### 5.1 การหาคำตอบโดยไม่ใช้วิธีคิวบิกสไปลน์

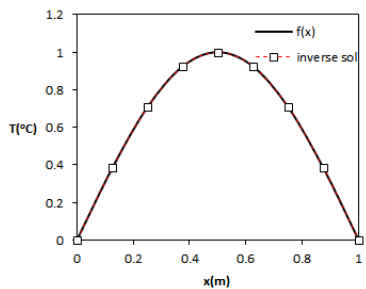
รูปที่ 3 แสดงคำตอบของ IHCP สามารถคำนวณได้จากวิธีแก้มเมทริกซ์ธรรมดา โดยกำหนดให้จุดต่อทราบอุณหภูมิและไม่ทราบอุณหภูมิมิมีจำนวนเท่ากัน ผลเฉลยของอุณหภูมิบนขอบเขต  $y = 1$  m โดยการเปลี่ยนแปลงพิกัด  $y$  ของจุดต่อทราบอุณหภูมิ ผลเฉลยของ Mesh 8x8 สอดคล้องไปกับคำตอบที่ถูกต้องแต่มีความผิดพลาดเพิ่มขึ้นเมื่อตำแหน่งพิกัด  $y$  ห่างจากขอบเขต  $y = 1$  m ผลเฉลยของ Mesh 16x16 จะพบว่ามีความแม่นยำเช่นเดียวกันแต่มีการแกว่งของคำตอบและความผิดพลาดมากขึ้นดังรูปที่ 5 และ 6 ดังนั้นวิธีคิวบิกสไปลน์จึงถูกนำมาใช้เพื่อช่วยลดการแกว่งของคำตอบในหัวข้อถัดไป



(a)  $y = 0.625\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.002 \text{ } ^\circ\text{C}$



(b)  $y = 0.75\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.0005 \text{ } ^\circ\text{C}$



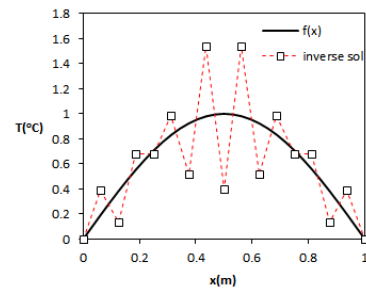
(c)  $y = 0.875\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.00009 \text{ } ^\circ\text{C}$

รูปที่ 5 ผลกระทบจากตำแหน่งของจุดต่อทราบอุณหภูมิที่มีต่อคำตอบ IHCP ที่พิกัด  $y = 1 \text{ m}$  เมื่อใช้ Mesh 8x8 และไม่ใช่วิธีคิวบิกสไปลน์

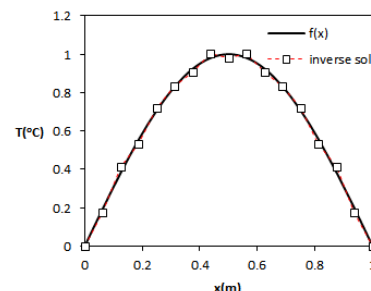
### 5.2 การหาคำตอบร่วมกับวิธีคิวบิกสไปลน์

รูปที่ 7 แสดงตัวอย่าง Mesh 8x8 เพื่อใช้วิธีคิวบิกสไปลน์บนขอบเขตที่ตำแหน่ง  $y = 1 \text{ m}$  อุณหภูมิที่ปลายทั้งสองของเส้นโค้งคือ  $0^\circ\text{C}$  จำนวนจุดควบคุมที่ใช้สำหรับ Mesh 8x8 คือ 5 จุด จำนวนจุดควบคุมที่ใช้สำหรับ Mesh 16x16 คือ 5 จุดและ 9 จุด อุณหภูมิที่จุดควบคุมได้มาจากการประมาณค่าด้วยวิธีคิวบิกสไปลน์ ผลการคำนวณแสดงให้เห็นว่าวิธีคิวบิกสไปลน์ทำให้ได้คำตอบที่ไม่มีการแกว่งเลขในทุกรณี และมีความผิดพลาดน้อยดังแสดงใน

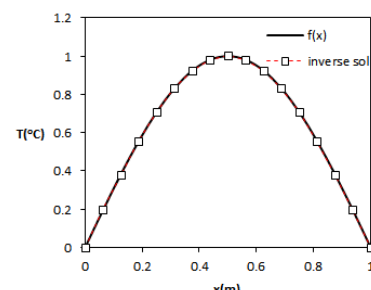
รูปที่ 8 และ 9 สำหรับ Mesh 16x16 แบบ 5 จุดควบคุม และ Mesh 16x16 แบบ 9 จุดควบคุม มีค่าคงที่คือ  $0.008 \text{ } ^\circ\text{C}$  ทุกระยะทาง  $y$  ที่ใช้ในการศึกษาแต่ความผิดพลาดของอุณหภูมิที่ได้จากการใช้ 9 จุดควบคุมมีค่าตั้งแต่  $0.0002 \text{ } ^\circ\text{C}$  ถึง  $0.024 \text{ } ^\circ\text{C}$  เมื่อระยะทาง  $y$  ห่างจากผิวที่ต้องการทำนายมากขึ้น ลักษณะของความผิดพลาดของรูปที่ 9(a) เมื่อใช้ 9 จุดควบคุมมีลักษณะของคำตอบที่ดำเนินไปและสูงเกินไปในลักษณะสลับแต่ความผิดพลาดแบบนี้ไม่ปรากฏให้เห็นเด่นชัดในรูปที่ 8(a) เมื่อใช้ 5 จุดควบคุม



(a)  $y = 0.625\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.306 \text{ } ^\circ\text{C}$

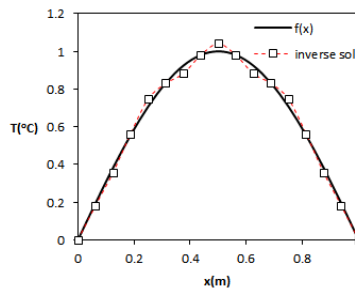
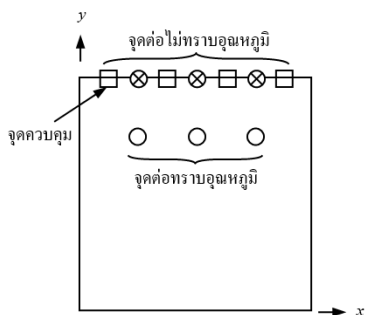


(b)  $y = 0.75\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.02 \text{ } ^\circ\text{C}$



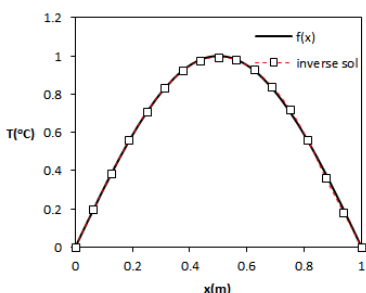
(c)  $y = 0.875\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.001 \text{ } ^\circ\text{C}$

รูปที่ 6 ผลกระทบจากตำแหน่งของจุดต่อทราบอุณหภูมิที่มีต่อคำตอบ IHCP ที่พิกัด  $y = 1 \text{ m}$  เมื่อใช้ Mesh 16x16 และไม่ใช่วิธีคิวบิกสไปลน์

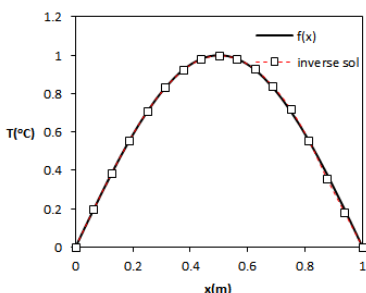


(a)  $y = 0.625\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.024 \text{ } ^\circ\text{C}$

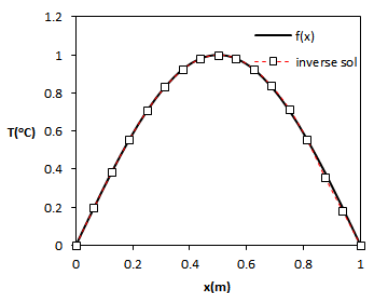
รูปที่ 7 จุดต่อทราบอุณหภูมิ และจุดต่อไม่ทราบอุณหภูมิ เมื่อใช้วิธีปริมาตรสี่เหลี่ยมร่วมกับวิธีคิวบิกสไปลน์



(a)  $y = 0.625\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.008 \text{ } ^\circ\text{C}$

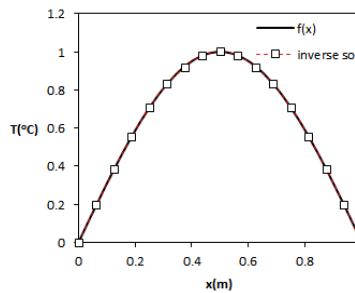


(b)  $y = 0.75\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.008 \text{ } ^\circ\text{C}$

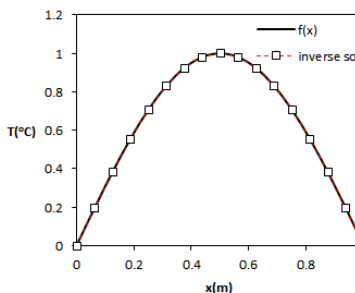


(c)  $y = 0.875\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.008 \text{ } ^\circ\text{C}$

รูปที่ 8 ผลกระทบจากตำแหน่งของจุดต่อทราบอุณหภูมิที่มีต่อคำตอบ IHCP ที่พิกัด  $y = 1\text{ m}$  เมื่อใช้ Mesh  $16 \times 16$  และวิธีคิวบิกสไปลน์ (5 จุดควบคุม)



(b)  $y = 0.75\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.002 \text{ } ^\circ\text{C}$



(c)  $y = 0.875\text{m}$ ,  $\text{RMSE} = 0.0002 \text{ } ^\circ\text{C}$

รูปที่ 9 ผลกระทบจากตำแหน่งของ จุดต่อทราบอุณหภูมิที่มีต่อคำตอบ IHCP ที่พิกัด  $y = 1\text{ m}$  เมื่อใช้ Mesh  $16 \times 16$  และวิธีคิวบิกสไปลน์ (9 จุดควบคุม)

## 6. สรุป

บทความนี้ได้นำเสนอแนวคิดของการหาอุณหภูมิบนขอบเขตของวัสดุไอโซทรอปิกเอกพันธ์หรือ IHCP ด้วยวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม แนวคิด IHCP สามารถใช้ในการหาอุณหภูมิในบริเวณที่ยากต่อการติดตั้งเครื่องมือวัดอุณหภูมิหรือ ฟลักซ์ความร้อนได้ เทคนิคคิวบิกสไปลน์มีส่วนช่วยให้การคำนวณ IHCP สามารถทำนายอุณหภูมิบนขอบเขตได้แม่นยำและช่วยลดการแกว่งของคำตอบได้

การใช้จุดควบคุม 5 จุดให้ความผิดพลาดในการทำนายน้อยกว่าการใช้จุดควบคุม 9 จุดสำหรับ Mesh 16x16 อย่างไรก็ตามถ้าใช้ในการคำนวณที่ mesh มีจำนวนมากขึ้นจะทำให้ความแม่นยำลดลงได้ และตำแหน่งจุดวัดควรอยู่ใกล้ขอบให้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้เพื่อให้สามารถทำนายอุณหภูมิได้อย่างถูกต้อง

[6] Kanjanakijkasem, W., 2014, Numerical methods, Chulalongkorn University, 1<sup>st</sup> edition, Bangkok.

## 7. เอกสารอ้างอิง

- [1] Dennis, B.H., Dulikravich, G.S., and Yoshimura, S., 2004, "A finite element formulation for the determination of unknown boundary conditions for three-dimensional steady thermoelastic problems", *Journal of Heat Transfer*, 126, pp.110-118.
- [2] Ozisik, M.N. and Orlande, H.R.B. (2000) *Inverse heat transfer fundamentals and applications*. Taylor & Francis, New York.
- [3] Alifanov, O.M., 1994, *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer.
- [4] Kanjanakijkasem, W., 2015, "A finite element method for predicting of unknown boundary conditions in two-dimensional steady-state heat conduction problems", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 88, pp.891-901.
- [5] Kanjanakijkasem, W., 2016, "Estimation of spatially varying thermal contact resistance from finite element solutions of boundary inverse heat conduction problems split along material interface", *Applied Thermal Engineering*, 106, pp.731-742.