วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์กระชับรูปร่างสำหรับวิเคราะห์การนำความร้อน

A Body-Fitted Finite Difference Method for Heat Conduction Analysis

ภาสกร เวสสะโกศล[1] จารุวัตร เจริญสุข[2]

[1]ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์

[2]ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

บทความนี้แสดงให้เห็นถึงการใช้ และความสามารถของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์กระชับรูปร่างในการจำลองเชิงตัวเลขสำหรับปัญหาการนำความร้อนสองมิติที่สภาวะคงตัว การสร้างกริดดำเนินการโดยใช้เทคนิค Transfinite Interpolation (TFI) เพื่อสร้างกริดเริ่มต้น ต่อจากนั้นนำกริดเริ่มต้นมาผ่าน elliptic grid generator เพื่อให้ได้กริดคุณภาพดี การคำนวณเชิงตัวเลขกระทำโดยใช้ระบบสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์บนพิกัดกระชับรูปร่าง (BFC) และการระบุเงื่อนไขขอบเขตให้กับปัญหา เห็นได้ว่าวิธีปัจจุบันสามารถแก้ปัญหาการนำความร้อนในรูปร่างที่ซับซ้อนได้อย่างแม่นยำ

คำสำคัญ : พิกัดกระชับรูปร่าง, วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์, การนำความร้อน

Abstract

This paper illustrates the implementation and performance of Body-Fitted Finite Difference Method in simulating the steady two-dimensional heat conduction problems. Firstly, the initial grid is generated by the Transfinite Interpolation (TFI) technique. Then, the good quality mesh is obtained by smoothing the initial grid by the elliptic grid generator. The numerical solution is done by the system of finite difference equations written on the Body-Fitted Coordinate (BFC) and the thermal conditions assigned on the domain boundaries. It can be seen that the present method can accurately solve the heat conduction problems in complex geometries.

Keywords : Body-Fitted Coordinate, Finite Difference Method, Heat conduction

1. บทนำ

วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ได้รับการยอมรับมานานแล้วว่าสามารถหาคำตอบให้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนและการไหลของของไหล ข้อดีของวิธีนี้คือ มีระดับความอิสระ (degree of freedom) น้อย สร้างกริดได้ง่ายและสร้างสมการได้ง่าย แต่ข้อเสียประการสำคัญคือ ต้องปรับขนาดของกริดให้ละเอียดมากหากปัญหาที่มีรูปร่างโดเมนซับซ้อน เพื่อให้ความแม่นยำของคำตอบที่น่าพึงพอใจ ในบางครั้งการปรับขนาดของกริดในบริเวณหนึ่ง อาจทำให้ต้องปรับขนาดในบริเวณอื่นตามไปด้วย ทำให้วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบเดิมซึ่งอ้างอิงจาก กริดที่มาจากระบบพิกัดฉาก $(x-y)$ ไม่เป็นที่นิยมในการใช้งานกับปัญหา

จริงที่มีขอบเขตที่เอียงทำมุมกับแนวพิกัด $(x-y)$ เป็นส่วนใหญ่ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์จะสามารถแก้ปัญหาในโดเมนที่มีรูปร่างซับซ้อนด้วยเทคนิคที่ชื่อว่า Body-Fitted Coordinate (BFC)

นักวิจัยกลุ่มแรกที่ใช้เทคนิค BFC ได้แก่ Vinokur [1], Thompson และคณะ [2] และ Gordon and Hall [3] นักวิจัยที่ใช้เทคนิค BFC เมื่อไม่นานมานี้คือ Putivisutisak and Prasertlarp [4] และ Nance [5] วัตถุประสงค์ของบทความนี้คือ แสดงรายละเอียดของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ ด้วยการใช้เทคนิค BFC หัวข้อที่ 2 กล่าวถึงการสร้างกริดกระชับรูปร่าง ต่อมาหัวข้อที่ 3 กล่าวถึงสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับกริดกระชับรูปร่าง หัวข้อที่ 4 เกี่ยวข้องกับปัญหาทดสอบ หัวข้อที่ 5 สรุปผลการศึกษาที่ทำไว้ในบทความนี้

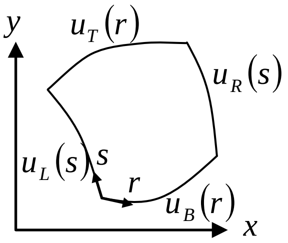
2. การสร้างกริด

วิธีสร้างระบบพิกัดกระชับรูปร่าง มีพื้นฐานมาจากการเชื่อมโยง (mapping) ความสัมพันธ์ระหว่างกริดมีระเบียบไม่ซับซ้อนในที่ว่างมาตรฐาน (normalized space) ไปสู่กริดมีระเบียบแนวโค้งเชิงเส้น (curvilinear mesh) ในที่ว่างจริง (real space) ซึ่งอ้างอิงด้วยพิกัด $(x-y)$ โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำหรับสร้างกริด เป็นเครื่องมือสำคัญที่ช่วยให้การคำนวณมีความแม่นยำ และรวดเร็ว โดยทั่วไปการสร้างกริดมีสองขั้นตอนคือ (1) สร้างกริดเริ่มต้น (initial grid) จากวิธี Transfinite interpolation (TFI) (2) ปรับปรุงกริดให้สอดคล้องกับ สมการอนุพันธ์ย่อยด้วย elliptic grid generation การสร้างกริดเริ่มต้นด้วยวิธี TFI เริ่มต้นด้วยการใช้ฟังก์ชัน Lagrange interpolation ในการสร้างตำแหน่ง $(x-y)$ ของจุดต่างๆบนแนวเส้นกริดภายในโดเมนปิดดังรูปที่ 1

$$\begin{aligned} x &= (1-s)x_B(r) + sx_T(r) \\ &+ (1-r)[x_L(s) - (1-s)x_B(0) - sx_T(0)] \\ &+ r[x_R(s) - (1-s)x_B(1) - sx_T(1)] \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y &= (1-s)y_B(r) + sy_T(r) \\ &+ (1-r)[y_L(s) - (1-s)y_B(0) - sy_T(0)] \\ &+ r[y_R(s) - (1-s)y_B(1) - sy_T(1)] \end{aligned} \tag{2}$$

โดย r และ s คือตัวแปรไร้มิติสำหรับการประมาณค่าของ x และ y ตามลำดับภายในที่ว่างระหว่างขอบต่างๆทั้งสี่ด้านของโดเมน ขอบเขตของ r และ s คือ $0 \le r \le 1$ และ $0 \le s \le 1$ ตามลำดับ ยกตัวอย่างเช่น $x_B(r)$ หมายถึงพิกัด x บนขอบ B ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปร r เท่านั้น และ $y_R(s)$ หมายถึงพิกัด y บนขอบ R ซึ่งขึ้นอยู่กับตัวแปร s เท่านั้นเป็นต้น



รูปที่ 1 โดเมนปิดสำหรับ transfinite interpolation ซึ่งกำหนดให้ u เป็นเวคเตอร์ของพิกัด (x, y)

ขั้นตอนต่อไปคือ นำกริดเริ่มต้นที่ได้จากวิธี TFI ไปแก้ไขให้แนวตัดของเส้นกริดเป็นมุมฉาก ตามสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังนี้

$$\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} = 0 \tag{3}$$

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2\beta \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} = 0 \tag{4}$$

โดย (ξ, η) คือพิกัดบนในโดเมนการคำนวณ; α , β และ γ คือ

$$\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 \tag{5}$$

$$\beta = \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi} \tag{6}$$

$$\gamma = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 \tag{7}$$

3. วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

3.1 การแปลงรูประหว่างพิกัดฉาก (Cartesian coordinate) กับพิกัดแนวโค้งเชิงเส้น (Curvilinear coordinate)

การแปลงรูปค่าอนุพันธ์ต่างๆจาก Cartesian coordinate $(x-y)$ ไปเป็น Body-Fitted Coordinate

$(\xi-\eta)$ ด้วยกฎลูกโซ่ของอนุพันธ์ย่อย (chain rule of partial derivatives) ในรูปแบบเมตริกซ์ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

โดย $[J]$ คือ Jacobian matrix ดังนั้นถ้าเขียนในอีกรูปแบบหนึ่งจะได้

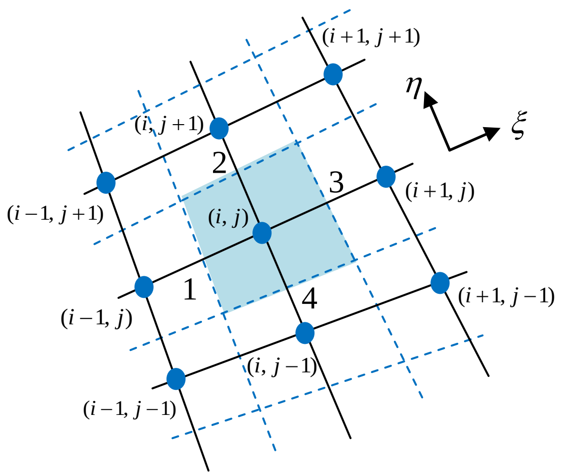
$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial T}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial T}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

โดย J คือ $(\partial x/\partial \xi)(\partial y/\partial \eta)-(\partial x/\partial \eta)(\partial y/\partial \xi)$

3.2 การสร้างสมการคำนวณ

สมการบังคับในพิกัด $(x-y)$ ที่อยู่ในความสนใจมีเพียงพจน์ของการแพร่เท่านั้นดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)=0 \quad (10)$$



รูปที่ 2 ปริมาตรควบคุมรอบ node (i, j)

สมการที่ (10) ถูกเปลี่ยนให้เป็นสมการของ Body-Fitted Coordinate [4] ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\left(\frac{k\alpha}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{k\beta}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(\frac{k\gamma}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)-\left(\frac{k\beta}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)\right]=0 \quad (11)$$

ปริมาตรควบคุมรอบ node (i, j) ในระบบพิกัดมีทั้งหมด 4 ด้านดังรูปที่ 2 ดังนั้นสามารถเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยในสมการที่ (11) เป็นสมการพีชคณิตด้วยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ดังนี้

$$\begin{aligned} &\left\{\left[\left(\frac{k\alpha}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{k\beta}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)\right]_{side3} -\left[\left(\frac{k\alpha}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)-\left(\frac{k\beta}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)\right]_{side1}\right\}\Big/\Delta\xi \\ &+\left\{\left[\left(\frac{k\gamma}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)-\left(\frac{k\beta}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)\right]_{side2} -\left[\left(\frac{k\gamma}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\right)-\left(\frac{k\beta}{J}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial \xi}\right)\right]_{side4}\right\}\Big/\Delta\eta=0 \end{aligned} \quad (12)$$

กำหนดให้ $\Delta\xi=\Delta\eta=1$ ทำให้ค่า Gradients ต่างๆที่ node (i, j) ในสมการที่ (5), (6), (7) และ (12) บนด้านที่ 1 เป็นดังนี้ [5]

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=x_{i,j}-x_{i-1,j} \quad (13)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=y_{i,j}-y_{i-1,j} \quad (14)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}=\frac{1}{4}\left(x_{i-1,j+1}-x_{i-1,j-1}+x_{i.,j+1}-x_{i,j-1}\right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}=\frac{1}{4}\left(y_{i-1,j+1}-y_{i-1,j-1}+y_{i.,j+1}-y_{i,j-1}\right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}=T_{i,j}-T_{i-1,j} \quad (17)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta}=\frac{1}{4}\left(T_{i-1,j+1}-T_{i-1,j-1}+T_{i.,j+1}-T_{i,j-1}\right) \quad (18)$$

Gradient ต่างๆบนด้านที่ 2 คือ

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\left(x_{i+1,j+1}-x_{i-1,j+1}+x_{i+1,j}-x_{i-1,j}\right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\left(y_{i+1,j+1}-y_{i-1,j+1}+y_{i+1,j}-y_{i-1,j}\right) \quad (20)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta}=x_{i,j+1}-x_{i,j} \quad (21)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta}=y_{i,j+1}-y_{i,j} \quad (22)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi}=\frac{1}{4}\left(T_{i+1,j+1}-T_{i-1,j+1}+T_{i+1,j}-T_{i-1,j}\right) \quad (23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta}=T_{i,j+1}-T_{i,j} \quad (24)$$

Gradient ต่างๆบนด้านที่ 3 คือ

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = x_{i+1,j} - x_{i,j} \tag{25}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = y_{i+1,j} - y_{i,j} \tag{26}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\left(x_{i,j+1} - x_{i,j-1} + x_{i+1.,j+1} - x_{i+1,j-1}\right) \tag{27}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\left(y_{i,j+1} - y_{i,j-1} + y_{i+1.,j+1} - y_{i+1,j-1}\right) \tag{28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = T_{i+1,j} - T_{i,j} \tag{29}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{1}{4}\left(T_{i,j+1} - T_{i,j-1} + T_{i+1.,j+1} - T_{i+1,j-1}\right) \tag{30}$$

Gradient ต่างๆบนด้านที่ 4 คือ

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\left(x_{i+1,j} - x_{i-1,j} + x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j-1}\right) \tag{31}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\left(y_{i+1,j} - y_{i-1,j} + y_{i+1,j-1} - y_{i-1,j-1}\right) \tag{32}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = x_{i,j} - x_{i,j-1} \tag{33}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = y_{i,j} - y_{i,j-1} \tag{34}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{1}{4}\left(T_{i+1,j} - T_{i-1,j} + T_{i+1,j-1} - T_{i-1,j-1}\right) \tag{35}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = T_{i,j} - T_{i,j-1} \tag{36}$$

หลังจากแทน gradient ทั้งหมดจากทุกด้านของปริมาตรควบคุมจะเห็นได้ว่า คำตอบที่ node (i, j) มีความเกี่ยวข้องกับคำตอบที่ node รอบข้างจำนวน 8 node ได้แก่ (i-1,j-1), (i,j-1) , (i+1,j-1), (i-1,j), (i+1,j) , (i-1,j+1), (i,j+1) และ (i+1,j+1) คำตอบของระบบสมการได้มาจากการคำนวณซ้ำด้วยวิธี Gauss-Seidel

4. การทดสอบ

ปัญหาที่นำมาทดสอบคำตอบจาก วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์มีทั้งสิ้น 3 ปัญหาได้แก่ ทรงกระบอกกลวง แผ่นสี่เหลี่ยมที่มีรูเจาะวงกลมตรงกลาง และแผ่นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน (rhombus) คำอธิบายเพิ่มเติมอยู่ในหัวข้อย่อย โปรแกรมคอมพิวเตอร์ถูกสร้างขึ้นมาด้วยภาษาฟอร์แทรน 90 และคำตอบในรูปแบบของลำดับชั้นของอุณหภูมิได้มาจากการพล็อตด้วยโปรแกรม tecplot

4.1 ทรงกระบอกกลวง

รูปร่างและเงื่อนไขขอบของปัญหาแสดงอยู่ในรูปที่ 3(a) วัตถุทรงกระบอกกลวงมีรัศมีในและนอกเท่ากับ 1 m และ 2 m ตามลำดับ อุณหภูมิผิวด้านในและด้านนอกถูกกำหนดให้เท่ากับ 100°C และ 50°C ตามลำดับ สัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 W/(m.°C) ในการคำนวณจริงใช้เพียงครึ่งเดียวโดยอาศัย ความสมมาตรของปัญหา และกำหนดฟลักซ์ความร้อนที่ขอบสมมาตรให้เท่ากับศูนย์ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ได้มาจากการใช้ mesh ขนาด 21 x 11 ในทิศทางมุมกวาดและรัศมีซึ่งสอดคล้องกับ ξ และ η ตามลำดับ คำตอบแสดงอยู่ในรูปของแผนภูมิลำดับชั้นของอุณหภูมิดังรูปที่ 3(b) คำตอบเชิงวิเคราะห์ถูกนำมาเปรียบเทียบกับคำตอบจากวิธีปัจจุบันในรูปที่ 4

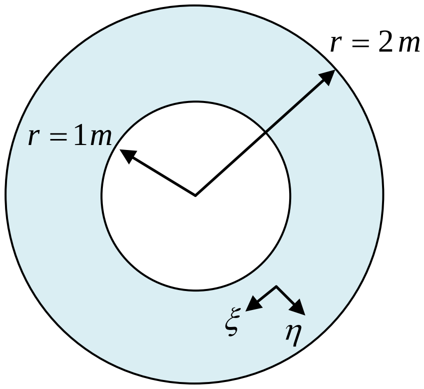
4.2 แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีรูเจาะตรงกลาง

รูปที่ 5 แสดงรูปร่างจริงของปัญหา และรูปร่างโดเมนที่ใช้ในการคำนวณ แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีขนาด 2 m ในขณะที่รูเจาะมีขนาดรัศมี 1 m วัสดุมีสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 W/(m.°C) อุณหภูมิที่ผิวของวงกลมและผิวของสี่เหลี่ยมคือ 100°C และ 50°C ตามลำดับ ในการคำนวณจริงใช้เพียงหนึ่งในสี่โดยอาศัย ความสมมาตรของปัญหา และกำหนดฟลักซ์ความร้อนที่ขอบสมมาตรให้เท่ากับศูนย์ mesh ที่ใช้คือ 21 x 11 ตามทิศทางมุมกวาดและระยะห่างระหว่างวงกลมกับสี่เหลี่ยมซึ่งสอดคล้องกับ ξ และ η ตามลำดับ คำตอบจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ถูกนำมาเปรียบเทียบกับคำตอบจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในรูปที่ 6

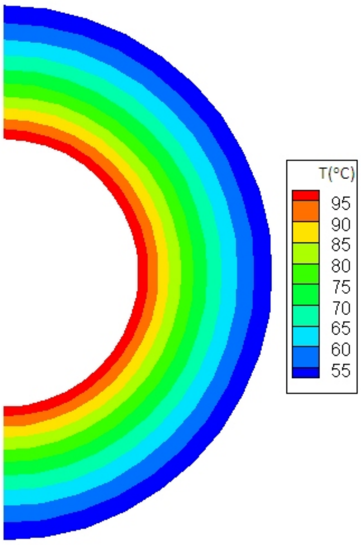
4.3 แผ่นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

แผ่นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มีสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 1 W/(m.°C) อุณหภูมิด้านล่างมีอุณหภูมิ 1°C อุณหภูมิด้านบนและด้านข้างทั้งสองเท่ากับ 0°C ขนาดความยาวของทุกด้าน (L) เท่ากับ 1 m ขอบด้านข้างเอียงทำมุม 60 องศากับแกน x ดังรูปที่ 7(a) ขนาด mesh ที่ใช้คือ 41x41 ดังรูปที่ 7(b) การกระจายอุณหภูมิจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกนำมาเปรียบเทียบกันในรูปที่ 8 บนเส้นตรงกึ่งกลางแผ่นสี่เหลี่ยมเอียงทำมุม 60 องศากับแกน x คำตอบจากวิธีไฟไนต์

เอลิเมนต์ได้มาจาก mesh 41x41 เช่นเดียวกันกับวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ ผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกันเป็นอย่างดี

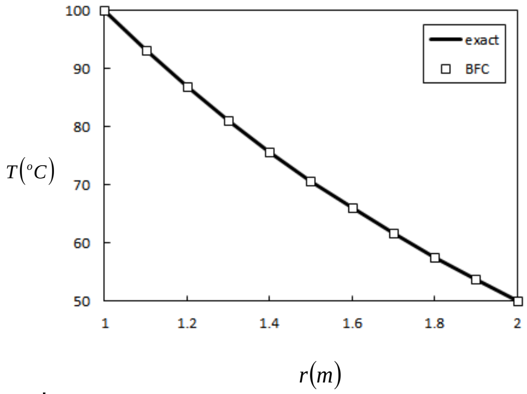


(a)

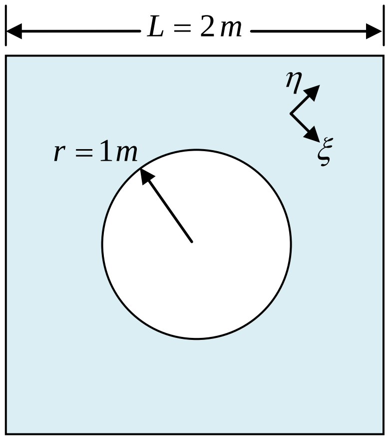


(b)

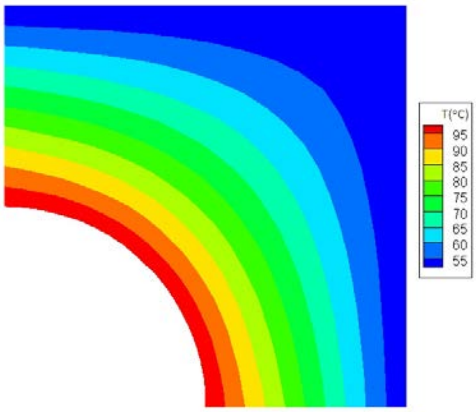
รูปที่ 3(a) รูปร่างและเงื่อนไขขอบของปัญหาที่ 4.1 (b) การกระจายอุณหภูมิในทรงกระบอกกลวงที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์



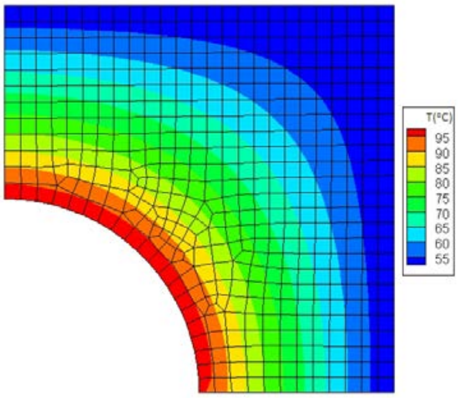
รูปที่ 4 การเปรียบเทียบคำตอบจากวิธีเชิงวิเคราะห์ (exact) กับวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (BFC)



รูปที่ 5 รูปร่างของปัญหา

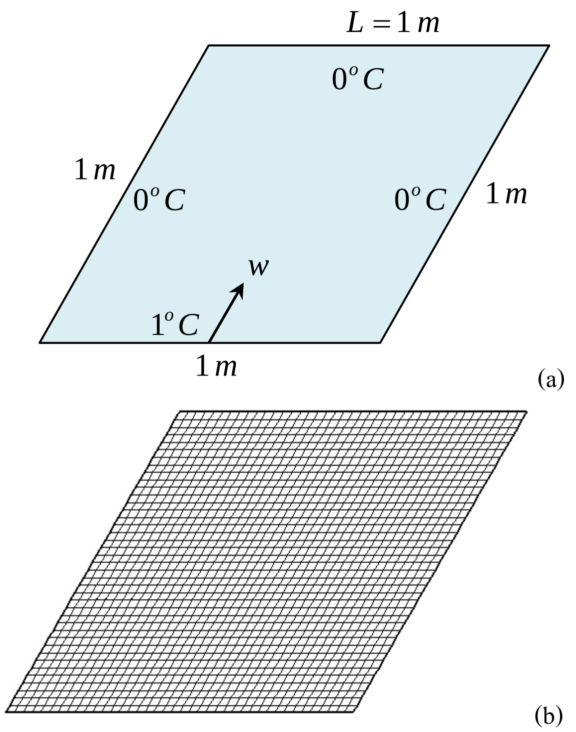


(a)

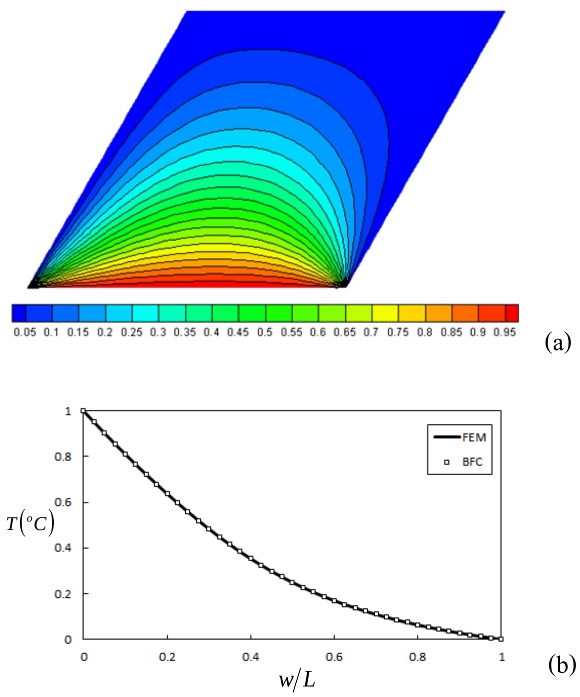


(b)

รูปที่ 6 (a) คำตอบจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (b) คำตอบจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์



รูปที่ 7 (a) รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่ 4.3 (b) กริดที่ใช้ในการคำนวณของวิธีไฟน์ดิฟเฟอเรนซ์



รูปที่ 8 การกระจายอุณหภูมิในแผ่นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่คำนวณได้จาก (a) วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และ (b) อุณหภูมิที่กึ่งกลางแผ่นสี่เหลี่ยมสำหรับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (FEM) และวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (BFC)

5. สรุป

วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ที่ถูกประดิษฐ์ขึ้นจากพิกัดกระชับรูปร่างสามารถคำนวณปัญหาการนำความร้อนสองมิติที่สภาวะคงตัวได้อย่างแม่นยำ พิกัดกระชับรูปร่างหรือ BFC เป็นพิกัดที่มีการจัดเรียง node อย่างเป็นระเบียบและอาศัยการแปลงรูป (coordinate transformation) ปัญหาที่เลือกใช้ในการทดสอบได้แก่ ทรงกระบอกกลวง แผ่นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีรูเจาะวงกลมตรงกลาง และแผ่นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน อุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์ ดิฟเฟอเรนซ์ ถูกนำมาเปรียบเทียบกับอุณหภูมิจากวิธีอื่นๆ แล้วพบว่ามีความใกล้เคียงกันเป็นอย่างดี

6. เอกสารอ้างอิง

[1] M., Vinokur, Conservation Equations of Gas Dynamics in Curvilinear Coordinate Systems, Journal of Computational Physics, vol. 14, pp. 105-125, 1992.

[2] J. F., Thompson, F.C., Thames and C. W. Mastin, Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinates System for Field Containing any Number of Arbitrary Two-dimensional Bodies, Journal of Computational Physics, vol. 15, pp. 299-319, 1974.

[3] W.N., Gordon and C.A., Hall, Construction of Curvilinear Coordinate Systems, International Journal of Numerical Methods in Engineering, vol. 7, pp.461-477, 1973.

[4] S., Putivisutisak and S., Prasertlarp, Calculation of Heat Transfer and Fluid Flow in Complex Geometries Using a Finite Volume Method in Body-Fitted Coordinates, KNUTNB Int. J. Appl. Sci. Technol., vol. 6, no. 3, pp. 1-9, Jul.-Sep., 2013.

[5] D.V., Nance, Finite Volume Algorithms for Heat Conduction, Air Force Research Laboratory, 2010.