

เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถ
ปรับค่าแอมพลิจูดได้

A SINUSOIDAL NONLINEAR OSCILLATOR WITH
ADJUSTABLE AMPLITUDE

วีรวัดน์ ขวัญแก้ว

WEERAWAT KHWANKAEW

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาคณะหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

KMITL - 2009 - EN - M - 080 - 102

เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถ
ปรับค่าแอมพลิจูดได้

A SINUSOIDAL NONLINEAR OSCILLATOR WITH
ADJUSTABLE AMPLITUDE



วีรวัฒน์ ขวัญแก้ว

WEERAWAT KHWANKAEW

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน.....**105315**
วัน,เดือน,ปี.....**18 พ.ย. 2552**



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2552

KMITL 2009-EN-M-080-102

**A SINUSOIDAL NONLINEAR OSCILLATOR WITH
ADJUSTABLE AMPLITUDE**

WEERAWAT KHWANKAEW

**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN CONTROL ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2009
KMITL 2009-EN-M-080-102**


COPYRIGHT 2009

FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าแอมพลิจูดได้
Thesis Title A Sinusoidal Nonlinear Oscillator with Adjustable Amplitude
นักศึกษ นายวีรวัฒน์ ขวัญแก้ว
รหัสประจำตัว 50060507
ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา วิศวกรรมระบบควบคุม
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.ประเมษฐ์ ประณยานันท์
หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2009-EN-M-080-102

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
รศ.ดร.ชนินทร์	บุญลักษณ์นาสุสรณ์	
ผศ.ดร.นนทวัฒน์	จุลเดชะ	
ดร.ประจวบ	ปวรังกูร	
รศ.ดร.วันชัย	วีรจจา	
ผศ.ดร.ประเมษฐ์	ประณยานันท์	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันอังคารที่ 30 มิถุนายน พ.ศ. 2552 เวลา 13.00-15.00 น.

สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 3 ห้องประชุม 2

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร.กอบชัย เดชหาญ)

คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

วันที่ 30 มิถุนายน พ.ศ. 2552

หัวข้อวิทยานิพนธ์	เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าแอมพลิจูดได้
นักศึกษา	นายวีรวัฒน์ ขวัญแก้ว
รหัสนักศึกษา	50060507
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมระบบควบคุม
พ.ศ.	2552
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ศศ.ดร.ปรเมษฐ์ ประณยานันท์

บทคัดย่อ

จุดประสงค์หลักของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือ การปรับแอมพลิจูดของสัญญาณที่เกิดจากตัวกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์โดยมีการจำกัดให้มีค่าความถี่ที่คงที่ ซึ่งมีหลักการที่ใช้เพื่อช่วยในการคำนวณระบบได้แก่ หลักการ ปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert Space) ผลคูณภายใน (Inner Product) อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier Serie) และวิธีการเคสโครบิงค์ฟังก์ชัน (Describing Function Method) โดยนำมาทำนายการมีอยู่จริงของลิมิตไซเคิล (Limit Cycle) และยังนำมาใช้พิจารณาเรื่องเสถียรภาพของระบบซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้มีการต่อวงจรแบบป้อนกลับระหว่างวงจรรองความถี่แถบผ่านอันดับสองและอุปกรณ์โอทีเอ (OTA: Operational Transconductance Amplifier) ส่วนผลการทดลองนั้นแสดงให้เห็นถึงค่าของแอมพลิจูดต่างๆที่ได้จากการทดลองโดยมีค่าความถี่คงที่

Thesis Title	A Sinusoidal Nonlinear Oscillator with Adjustable Amplitude
Student	Mr. Weerawat Khwankaew
Student ID.	50060507
Degree	Master of Engineering
Program	Control Engineering
Year	2009
Thesis Advisor	Assist. Prof. Dr. Poramate Pranayanuntana

ABSTRACT

The main purpose of this research work was to adjust the amplitude of the OTA based Sinusoidal nonlinear oscillator with constant frequency. Hilbert Space, Fourier serie and Inner product are used in the system calculation. The describing function method also used in the system to predict the existence of limit cycles and to determine the amplitude of oscillation. An equivalent circuit of the OTA-based sinusoidal nonlinear oscillator is close-loop negative feedback configuration of electronically adjustable bandpass filter and operational transconductance amplifier. The experimental results show that the amplitude of oscillation can be adjusted independently at specific frequency.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความรู้และความเมตตาจากอาจารย์ที่ปรึกษาคือ ผศ.ดร.ประเมษฐ์ ประยานันท์ ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะแนวทางการแก้ปัญหาตลอดจนให้ความรู้ความเข้าใจแก่ข้าพเจ้าจนในที่สุดทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้

ขอขอบพระคุณ คณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ได้ให้คำแนะนำชี้แนวทางในการศึกษา

ขอขอบคุณพี่อมรเทพ กาพย์แก้ว ที่ให้คำแนะนำในการใช้อุปกรณ์ทางอิเล็กทรอนิกส์ต่างๆ พี่พงศรัพี แก้วไทรชะ ที่ให้แนวทางในการเรียนให้คำปรึกษาในการทำวิทยานิพนธ์ และนิธิมหาญเม่ง ที่ให้กำลังใจที่ดีและความช่วยเหลือที่มีให้ตลอดเวลา

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณบิดามารดา ที่ให้การสนับสนุนการทำวิทยานิพนธ์ ให้ความรักและความปรารถนาดีต่อข้าพเจ้า

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดามารดา และทุกคนในครอบครัวของข้าพเจ้า

วีรวัฒน์ ขวัญแก้ว

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VII
สารบัญรูป.....	VIII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 ขอบเขตการศึกษา.....	2
1.4 ขั้นตอนการศึกษา.....	2
บทที่ 2 วิธีการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน.....	3
2.1 บทนำ.....	3
2.2 พื้นฐานของเดสไครบิงฟังก์ชัน.....	4
2.2.1 ตัวอย่างการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน.....	4
2.2.2 ขอบเขตการใช้งาน.....	7
2.2.3 สมมติฐานพื้นฐาน.....	10
2.2.4 ทฤษฎีบทพื้นฐาน.....	11
2.2.5 การคำนวณหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชัน.....	12
2.3 ตัวอย่างความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่างๆ.....	13
2.4 เดสไครบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั่วไป.....	17
2.4.1 ภาวะอิ่มตัว(Saturation).....	17
2.4.2 จุดบอด (Dead-Zone).....	19
2.4.3 การเกิดระยะคลอน (Backlash).....	21
2.5 บทวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	22
2.5.1 หลักการของไนควิสต์ (Nyquist Criterion) และการนำไปใช้งาน.....	22
2.5.2 การมีอยู่จริงของลิมิตไซเคิล.....	24
2.5.3 เสถียรภาพของลิมิตไซเคิล.....	28

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

2.5.4 ความน่าเชื่อถือของการวิเคราะห์ด้วยเคสโครบิงฟังก์ชัน.....	30
บทที่ 3 วงจรกรองความถี่แบบแอกทีฟ.....	32
3.1 บทนำ.....	32
3.2 ชนิดของวงจรกรองความถี่แบบแอกทีฟ.....	32
3.3 วงจรกรองความถี่แถบผ่าน (Bandpass Filter).....	35
3.3.1 วงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง (Wide Band pass Filter).....	35
3.3.2 วงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ (Narrow Band pass Filter).....	37
บทที่ 4 หลักการเบื้องต้นของการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณ.....	38
4.1 บทนำ.....	38
4.2 หลักการเบื้องต้นของการออสซิลเลตหรือการกำเนิดสัญญาณ.....	38
4.3 หน้าที่สำคัญของวงจรออสซิลเลตเตอร์หรือวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ.....	41
4.4 ลักษณะของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณที่ดี.....	42
4.4.1 มีความเพี้ยนของรูปสัญญาณคลื่นต่ำ (Low Distortion).....	42
4.4.2 มีเสถียรภาพทางขนาดสัญญาณ (Amplitude Stability).....	42
4.4.3 มีเสถียรภาพทางความถี่ (Frequency Stability).....	42
บทที่ 5 การออกแบบวงจรถูกกำเนิดสัญญาณที่ไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์.....	44
5.1 บทนำ.....	44
5.2 กระบวนการและวิธีการ.....	44
5.2.1 ฟังก์ชันคาบ (Periodic Function).....	44
5.2.2 วิธีการเคสโครบิงฟังก์ชัน.....	46
5.2.3 การนำเคสโครบิงฟังก์ชันไปใช้งาน.....	47
5.2.4 ลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของอุปกรณ์ไอทีโอ.....	48
บทที่ 6 ตัวอย่างและผลการทดลอง.....	49
6.1 การออกแบบระบบ.....	49
6.2 วงจรกรองความถี่ผ่านอันดับสอง.....	52

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
6.3 เครื่องกำเนิดสัญญาณที่ใช้ในการทดลอง.....	54
6.4 ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง.....	55
6.5 ผลลัพธ์ที่ได้จากการต่อวงจรจริง.....	56
บทที่ 7 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	58
7.1 บทสรุปและวิจารณ์.....	58
7.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการวิจัยในการพัฒนาต่อ.....	58
บรรณานุกรม.....	59
ภาคผนวก ก ทฤษฎีและหลักการทำงานของวงจรถยายโอทีเอ (OTA).....	61
ก.1 หลักการทำงานพื้นฐานของวงจรถยายโอทีเอ.....	61
ก.2 การวิเคราะห์หาค่าอัตราขยาย g_m สำหรับวงจรถยายแบบดิฟเฟอเรนเชียล.....	62
ภาคผนวก ข ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.....	66
ประวัติผู้เขียน.....	74

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
6.1 ความสัมพันธ์ระหว่างระหว่าง $A, D(A)$ และ Q	53
6.2 ความสัมพันธ์ระหว่างระหว่าง A, R , และ Q	53

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 การต่อแบบป้อนกลับ.....	1
2.1 ระบบป้อนกลับของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเคอ โพล.....	4
2.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเคอ โพล.....	5
2.3 ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	7
2.4 ระบบควบคุมที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น.....	7
2.5 แสดงการเปลี่ยนระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน.....	8
2.6 แสดงส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น และเดสไครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น.....	12
2.7 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุม.....	14
2.8 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว	15
2.9 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากระยะคลอน.....	16
2.10 ความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัวและความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต - เอาท์พุทที่เกี่ยวข้อง. .18	
2.11 กราฟเดสไครบิงฟังก์ชันของภาวะอิ่มตัวของความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัว.....	18
2.12 ความไม่เป็นเชิงเส้นและกราฟเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์.....	19
2.13 ลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอด.....	20
2.14 อินพุตและเอาท์พุท ของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอด.....	20
2.15 อินพุตและรูปคลื่นเอาท์พุทของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบการเกิดระยะคลอน.....	22
2.16 ระบบเชิงเส้นวงปิด.....	22
2.17 กราฟของไนควิสต์	23
2.18 หลักการของไนควิสต์ของระบบที่มีค่าคงที่.....	24
2.19 ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น	24
2.20 กราฟแสดงการเกิดลิมิตไซเคิล.....	25
2.21 การเกิดลิมิตไซเคิลสำหรับเดสไครบิงฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับความถี่.....	26
2.22 บล็อกไดอะแกรมของเครื่องกำเนิดสัญญาณ.....	27
2.23 กราฟเดสไครบิงฟังก์ชัน.....	28
2.24 เสถียรภาพของลิมิตไซเคิล.....	29
3.1 วงจรกรองความถี่.....	33
3.2 การตอบสนองความถี่ทางอุดมคติของวงจรกรองความถี่	
(ก) ความถี่ต่ำผ่าน (ข) ความถี่สูงผ่าน (ค) ความถี่แถบผ่าน (ง) ความถี่แถบตัด.....	33

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.3 การตอบสนองเชิงความถี่จริงๆ ของวงจรกรองความถี่ (ก) ความถี่ต่ำผ่าน (ข) ความถี่สูงผ่าน (ค) ความถี่แถบผ่าน (ง) ความถี่แถบตัด (จ) รวมผลตอบสนองความถี่ทั้งหมด.....	34
3.4 (ก) ผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง (ข) ส่วนประกอบของวงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง.....	36
3.5 (ก) ผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ (ข) วงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ.....	37
4.1 ระบบการกำเนิดสัญญาณทางกล (ก) ความกว้างของการแกว่ง (ข) การกำเนิดสัญญาณแบบเดมปี.....	38
4.2 แสดงการกำเนิดสัญญาณทางด้านวงจรไฟฟ้า.....	39
4.3 แสดงการกำเนิดสัญญาณในช่วงเริ่มแรกและแบบต่อเนื่อง	39
4.4 ระบบป้อนกลับแบบลบ.....	40
5.1 การต่อแบบป้อนกลับ (Feedback Connection).....	44
5.2 วงจรสมมูลย์ของโอทีเอ.....	48
6.1 วงจรทดสอบ โอทีเอ.....	49
6.2 การปรับข้อมูล (Data Fitting) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด(Least Squares Method).....	49
6.3 เคสไครบิงฟังก์ชัน $D(a)$ ของฟังก์ชันถ่ายโอน $\mu(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$	51
6.4 กราฟของ $G(j\omega)$ และ $-1/D(a)$	52
6.5 วงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง [13].....	52
6.6 ตัวกรองความถี่ผ่านอันดับที่สองที่ค่า Q ต่างๆ.....	54
6.7 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ.....	54
6.8 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 4.464$	55
6.9 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 8.064$	55
6.10 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 11.905$	55
6.11 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 4.464$ (ค่าแอมพลิจูด = 100 mV).....	56
6.12 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 8.064$ (ค่าแอมพลิจูด = 200 mV).....	56
6.13 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 11.905$ (ค่าแอมพลิจูด = 300 mV).....	57

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
ก.1 บล็อกไดอะแกรมแสดงโครงสร้างพื้นฐานของวงจรรขยายไอทีเอ.....	62
ก.2 วงจรสมมูลย์ทางอุดมคติของวงจรรขยายไอทีเอ.....	63
ก.3 สัญลักษณ์แทนวงจรรขยายไอทีเอ.....	63
ก.4 วงจรรขยายแบบดิฟเฟอเรนเชียล.....	63

1.3 ขอบเขตการศึกษา

ขอบเขตการศึกษาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้คือ การศึกษากระบวนการปรับแอมพลิฟิเคชันของสัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากเครื่องกำเนิดสัญญาณ โดยปรับค่าตัวประกอบคุณภาพ (Quality Factor) ซึ่งเป็นคุณสมบัติข้อหนึ่งของวงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง การออกแบบวงจรนั้นจะอาศัยโปรแกรม ORCAD CAPTURE ซึ่งเป็นโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการจำลองและวิเคราะห์วงจรอิเล็กทรอนิกส์ ส่วนกระบวนการเคสโครมิงฟังก์ชันถูกนำมาใช้ในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลและวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ

1.4 ขั้นตอนของการศึกษา

บทนำในบทที่ 1 แสดงความคิดรวบยอด (Concept) ของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งเกี่ยวข้องกับเครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ บทที่ 2 แสดงพื้นฐานและการวิเคราะห์เคสโครมิงฟังก์ชัน บทที่ 3 อธิบายเกี่ยวกับวงจรกรองความถี่แบบแอกทีฟชนิดต่างๆ บทที่ 4 อธิบายเกี่ยวกับหลักการเบื้องต้นของการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณ บทที่ 5 ได้แสดงถึงการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ ส่วนตัวอย่างและผลการทดลองได้แสดงไว้ในบทที่ 6 และบทที่ 7 แสดงบทสรุปและวิจารณ์รวมทั้งแนวทางในการพัฒนาต่อ

บทที่ 2

การวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน (Describing Function Analysis)

2.1 บทนำ

วิธีการตอบสนองเชิงความถี่ (Frequency Response Method) นั้น เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพในการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมเชิงเส้น วิธีการตอบสนองเชิงความถี่ยังเป็นพื้นฐานของการอธิบายระบบเชิงเส้นโดยใช้ค่าฟังก์ชันเชิงซ้อน (Complex Valued Function) แทนการอธิบายด้วยสมการอนุพันธ์ ซึ่งข้อดีของการอธิบายระบบเชิงเส้นด้วยวิธีการตอบสนองเชิงความถี่มีดังนี้ ประการแรกการวิเคราะห์ลักษณะของระบบบางประการ เช่น เสถียรภาพและผลตอบสนองเชิงฟังก์ชันไซน์ เป็นต้น จะถูกลดให้อยู่ในเขตของสมการพีชคณิตอย่างง่ายในโดเมนความถี่ ประการที่สองการนำเสนอในรูปแบบของกราฟจะทำให้การวิเคราะห์และออกแบบระบบนั้นทำได้ง่าย ประการต่อมาฟังก์ชันผลตอบสนองเชิงความถี่ สามารถวิเคราะห์ได้อย่างละเอียดในเชิงกายภาพ (Physical Insight) ประการสุดท้ายความซับซ้อนของกระบวนการผลตอบสนองเชิงความถี่จะขึ้นอยู่กับอันดับของระบบนั้น อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์บนโดเมนความถี่นั้นไม่สามารถใช้กับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้โดยตรงเนื่องจากฟังก์ชันผลตอบสนองเชิงความถี่ไม่ได้ถูกกำหนดมาสำหรับระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

วิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน (Describing Function Method) เป็นกระบวนการหนึ่งของการตอบสนองเชิงความถี่ ซึ่งใช้ในการวิเคราะห์และทำนายความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างคร่าวๆ ถึงแม้ว่าวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชันเป็นเพียงวิธีการในการหาค่าอย่างคร่าวๆ ก็ตามแต่เนื่องจากมีข้อได้เปรียบกว่าการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีการอื่นๆ ทำให้เดสไครบิงฟังก์ชันกลายเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมเป็นอย่างมากในการวิเคราะห์ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยส่วนใหญ่ถูกใช้เป็นตัวทำนายการเกิดลิมิตไซเคิล (Limit Cycle) และยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้อีกหลายทาง

ในบทนี้จะอธิบายถึงพื้นฐานของวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชันและการใช้เดสไครบิงฟังก์ชันในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิล ในหัวข้อ 2.2 ความไม่เป็นเชิงเส้นได้อธิบายแนวความคิดพื้นฐานของวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน หัวข้อ 2.3 ได้พูดถึงตัวอย่าง “ความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างรุนแรง” (Hard Nonlinearities) ในวิศวกรรมระบบควบคุมเพราะว่าเดสไครบิงฟังก์ชันเป็นวิธีการที่มีประโยชน์อย่างยิ่ง โดยเฉพาะการพิจารณา ระบบควบคุมที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นประกอบอยู่ด้วย หัวข้อ 2.4 แสดงการหาค่าความไม่เป็นเชิงเส้นด้วยวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน หัวข้อ 2.5 อธิบายวิธีการใช้เดสไครบิงฟังก์ชันในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลในระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

2.2 พื้นฐานของเดสไครบิงฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้ได้นำเสนอแนวความคิดพื้นฐานบางประการที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน เริ่มด้วยการแก้โจทย์ปัญหาต่อไปนี้

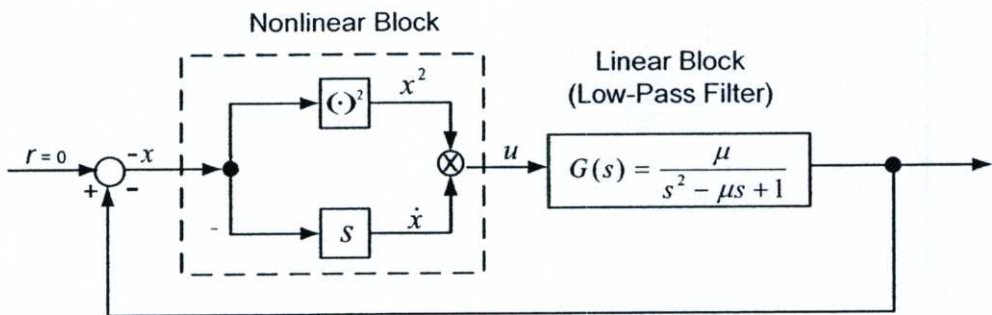
2.2.1 ตัวอย่างการวิเคราะห์เดสไครบิงฟังก์ชัน

พิจารณาสมการแวนเดอโพล (Vander Pol Equation) ต่อไปนี้

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (2.1)$$

จากระบบในสมการ 2.1 พิจารณาว่าระบบมีลิมิตไซเคิลหรือไม่ถ้ามีจงหาค่าของแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิล นั้นด้วย

ประการแรกสมมติว่าระบบมีลิมิตไซเคิลโดยไม่ได้กำหนดค่าแอมพลิจูดและความถี่ และจากนั้นพิจารณาว่าสมการของระบบสามารถแก้ได้หรือไม่ วิธีการนี้คล้ายกับการสมมติค่าตัวแปร (Assumed - Variable Method) ในทฤษฎีสมการอนุพันธ์ ซึ่งเริ่มด้วยการสมมติวิธีการหาค่าในรูปแบบที่เป็นระบบ จากนั้นแทนค่าตัวแปรลงในสมการอนุพันธ์นั้นออกมา



รูปที่ 2.1 ระบบป้อนกลับของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเดอโพล

ก่อนเริ่มกระบวนการวิเคราะห์ระบบ พิจารณาบล็อกไดอะแกรม (Block Diagram) ในรูปที่ 2.1 ซึ่งเป็นระบบป้อนกลับที่ประกอบไปด้วยส่วนที่เป็นเชิงเส้นและส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยส่วนที่เป็นเชิงเส้นคือฟังก์ชันถ่ายโอนของวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน

เริ่มกระบวนการโดยสมมติว่าระบบมีลิมิตไซเคิลและสัญญาณของการสั่น ซึ่งแทนด้วยตัวแปร x ให้อยู่ในรูปของ

$$x(t) = A \sin(\omega t)$$

โดยที่ A คือ แอมพลิจูด และ ω คือ ความถี่ (rad/sec)
 ดังนั้น

$$\dot{x}(t) = A\omega \cos(\omega t)$$

โดยเอาที่พหุของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นคือ

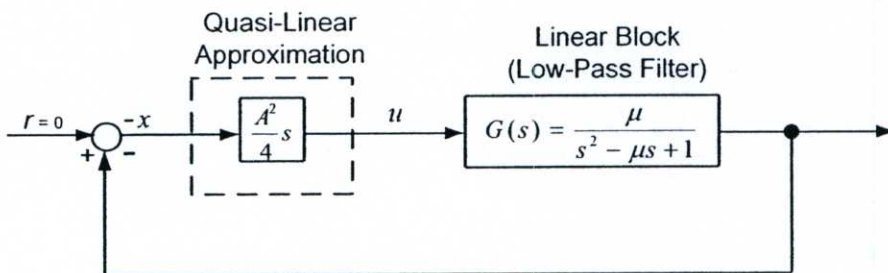
$$\begin{aligned} \mu &= x^2 \dot{x} = A^2 \sin^2(\omega t) A\omega \cos(\omega t) \\ &= \frac{A^3 \omega}{2} (1 - \cos(2\omega t)) \cos(\omega t) = \frac{A^3 \omega}{4} (\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)) \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่า μ ประกอบด้วยเทอมของฮาร์โมนิกที่สาม แต่ด้วยคุณสมบัติของวงจรรองความถี่ต่ำผ่าน ทำให้ฮาร์โมนิกที่ 3 ถูกจำกัดออกไป นั่นหมายความว่าเราสามารถประมาณค่าของ μ ได้ว่า

$$\mu \approx \frac{A^3}{4} \omega \cos \omega t = \frac{A^2}{4} \frac{d}{dt} [A \sin(\omega t)]$$

ดังนั้น ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูป 2.1 สามารถถูกประมาณค่าให้อยู่ในรูปของ “รูปแบบเสมือนเชิงเส้น” (Quasi-Linear) ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 2.2 ส่วนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเสมือนนั้นขึ้นอยู่กับแอมพลิจูด (A) ของสัญญาณ (ไม่เหมือนฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับแอมพลิจูดของสัญญาณ) เมื่อพิจารณาในโดเมนความถี่จะได้

$$\mu = D(A, \omega)(-x) \quad (2.2)$$



รูปที่ 2.2 การประมาณค่าเชิงเส้นของเครื่องกำเนิดสัญญาณแวนเดอโพล

ซึ่ง

$$D(A, \omega) = \frac{A^2}{4} (j\omega)$$

นั่นคือส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะถูกประมาณค่าโดยฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่ (Frequency Response Function) $D(A, \omega)$ โดยสมมติให้ระบบเป็นการสั่นแบบสัญญาณไซน์ที่อยู่ ในรูป

$$x = A \sin(\omega t) = G(j\omega)u = G(j\omega)D(A, \omega)(-x)$$

ซึ่ง $G(j\omega)$ คือฟังก์ชันถ่ายโอนของส่วนที่เป็นเชิงเส้น นั้นหมายความว่า

$$1 + \frac{A^2(j\omega)}{4} \cdot \frac{u}{(j\omega)^2 u(j\omega) + 1} = 0$$

ทำการแก้สมการข้างบนจะได้ $A = 2$ และ $\omega = 1$

หมายเหตุ ในเทอมของระบบที่เป็นตัวแปรลาปลาซ (Laplace Variable) s จะได้สมการคุณลักษณะวงปิดของระบบเป็น

$$1 + \frac{A^2 s}{4} \cdot \frac{u}{s^2 us + 1} = 0 \quad (2.3)$$

และจากสมการที่ 2.3 สมการหาค่าไอเกน (eigenvalue) ได้เป็น

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{8}u(A^2 - 4) \pm \sqrt{\frac{1}{64}u^2(A^2 - 4)^2 - 1} \quad (2.4)$$

จากค่าแอมพลิจูด $A = 2$ จะได้ ค่าไอเกนคือ $\lambda_{1,2} = \pm j$ ดังนั้นระบบมีลิมิตไซเคิลที่แอมพลิจูดเท่ากับ 2 และความถี่เท่ากับ 1 ซึ่งจะเห็นว่าทั้งค่าแอมพลิจูด A และความถี่ ω ไม่ได้ขึ้นอยู่กับค่า μ ในสมการที่ 2.1

เมื่อนำค่าลิมิตไซเคิล จากตัวอย่างมาเขียนกราฟลงบนแนวระนาบเฟส จะได้เป็นกราฟรูปวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 2 หน่วย แต่เมื่อเปลี่ยนแปลงค่า μ แล้วนำค่าของลิมิตไซเคิลที่ได้มาเขียนกราฟใหม่ จะพบว่าการประมาณค่าใช้ได้ดีที่ค่า μ น้อยๆ แต่เมื่อใดก็ตามที่ค่า μ มากขึ้นจะทำให้การประมาณค่ามีความคลาดเคลื่อนมากขึ้นตามไปด้วย ดังนั้นสามารถเข้าใจได้ว่าการที่ค่า μ มีค่ามากขึ้นทำให้ความไม่เป็นเชิงเส้นมีผลต่อระบบมากขึ้นและส่งผลให้การประมาณค่าเชิงเส้น (Quasi-Linear Approximation) มีความแม่นยำน้อยลง

กระบวนการวิเคราะห์ ข้างต้นยังสามารถใช้ในการพิจารณาเสถียรภาพของลิมิตไซเคิลได้ ยกตัวอย่างเช่น สมมติว่าแอมพลิจูด (A) ของลิมิตไซเคิลเพิ่มขึ้นมากกว่า 2 หน่วย เมื่อนำค่าแอมพลิจูดไปแทนในสมการที่ 2.4 แล้วพบว่าโพลวงปิดเป็นค่าจริงลบอยู่ฝั่งซ้าย นั้นหมายความว่า

ระบบมีเสถียรภาพดังนั้นขนาดของสัญญาณจะลดลงและเป็นเช่นเดียวกันเมื่อค่าแอมพลิจูด (A) ของลิมิตไซเคิลมีค่าน้อยกว่า 2 ทำให้สามารถสรุปได้ว่าลิมิตไซเคิลมีเสถียรภาพที่แอมพลิจูดเท่ากับ 2

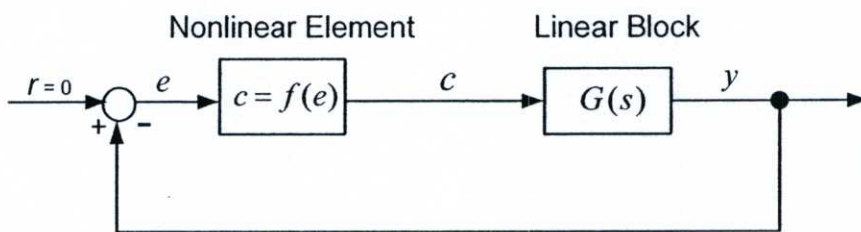
หมายเหตุ จากการวิเคราะห์การประมาณค่าข้างต้น ประเด็นสำคัญคือการแทนค่าตรงส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นด้วย ส่วนประมาณค่าเชิงเส้น (Quasi Linear Block) ซึ่งมีฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่เป็น $(A^2/4)(j\omega)$ หลังจากนั้นแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลสามารถพิจารณาได้จากสมการ $1 + G(j\omega)D(A, \omega) = 0$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน โดยที่ $D(A, \omega)$ ถูกเรียกว่า “เดสไครบิงฟังก์ชัน” ของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น และกระบวนการวิเคราะห์การประมาณค่าข้างต้นยังสามารถใช้ในการทำนายลิมิตไซเคิลของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นระบบอื่นๆ ที่สามารถจำลองระบบให้เหมือนกับบล็อกไดอะแกรมในรูปที่ 2.1 ได้อีกด้วย

2.2.2 ขอบเขตการใช้งาน

ก่อนที่จะพูดถึงการใช้งานของกระบวนการเดสไครบิงฟังก์ชัน จะกล่าวถึงชนิดของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นและชนิดของข้อมูลที่สามารถนำมาใช้เกี่ยวกับลักษณะของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นอย่างคร่าวๆ ก่อน

ระบบ (The systems)

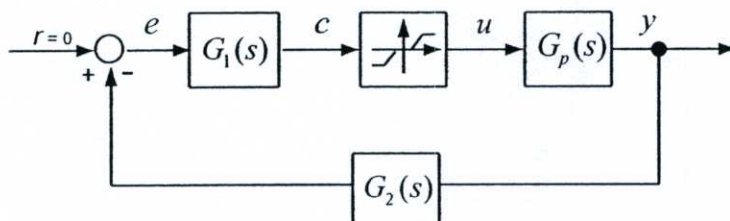
ระบบใดก็ตามที่สามารถแปลงให้อยู่ในรูปแบบดังรูปที่ 2.3 ได้นั้นสามารถใช้เดสไครบิงฟังก์ชันในการศึกษาวิเคราะห์ระบบได้



รูปที่ 2.3 ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

จากรูปที่ 2.3 ระบบใดๆ จะต้องประกอบไปด้วยระบบย่อยที่สำคัญอย่างน้อย 2 ระบบ ระบบแรกคือ ระบบที่เกือบจะเป็นเชิงเส้น (Almost Linear System) ซึ่งเป็นระบบที่ประกอบไปด้วยส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) อยู่ภายในคอนโทรลลูป (Control Loop) ตัวอย่างของระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) ได้แก่ ภาวะอิ่มตัวของมอเตอร์ (Motor - Saturation) ในตัวดำเนินการหรือ จุดบอดของตัวเซนเซอร์ (Actuator or Sensor Dead - Zones) ในโรงงาน ตัวอย่างระบบที่เกี่ยวข้องกับความไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) ของตัวดำเนินการแสดงไว้ในรูปที่ 2.4

ตัวอย่างที่ 2.1 ระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นเพียงตัวเดียว



รูปที่ 2.4 ระบบควบคุมที่มีความไม่เป็นเชิงเส้น

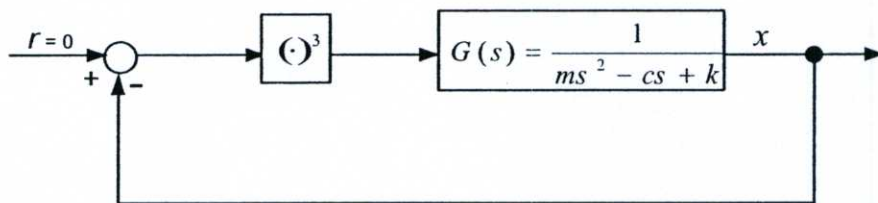
พิจารณาระบบควบคุมที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.4 ซึ่งเป็นระบบที่มีส่วนไม่เป็นเชิงเส้น (Hard Nonlinearity) และสามารถจัดให้อยู่ในรูปแบบเดียวกับรูปที่ 2.3 ได้โดยที่มี G_p , G_1 , G_2 เป็นส่วนที่เป็นส่วนที่เป็นเชิงเส้นซึ่งแทนด้วย G และความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวดำเนินการ เป็นส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ N ระบบที่สองคือระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นอย่างแท้จริง ซึ่งสมการของระบบ (Dynamic Equation) สามารถจัดให้เป็นดังรูปที่ 2.3 ได้ ตัวอย่างสมการระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างแท้จริง แสดงได้ดังนี้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + k_1x^3 = 0$$

จะได้

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -k_1x^3$$

และสามารถนำสมการมาเขียนเป็นบล็อกไดอะแกรม ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 2.5 ได้ดังนี้



รูปที่ 2.5 แสดงการแปลงระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน

การนำเดสไครบิงฟังก์ชันไปใช้งาน

สำหรับระบบต่างๆ ที่มักจะเกิดลิมิตไซเคิลอันเนื่องมาจากความไม่เป็นเชิงเส้น เช่นระบบในรูปที่ 2.4 นั้น แต่อย่างไรก็ตามการควบคุมเชิงเส้นไม่สามารถทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลได้ แต่เดสไครบิงฟังก์ชันเป็นเครื่องมือที่สามารถค้นหาการมีอยู่ของลิมิตไซเคิลได้ และยังสามารถพิจารณาเสถียรภาพของระบบได้อย่างดีไม่ว่าระบบนั้นจะค่าความไม่เป็นเชิงเส้น “มาก (Hard)”

หรือ “น้อย (Soft)” ก็ตาม โดยส่วนใหญ่แล้วสัญญาณของระบบลิมิตไซเคิล (Limit Cycling System) มักจะเป็นสัญญาณรูปแบบไซน์ ในที่นี้จะนำเคสไครบิงฟังก์ชันมาอธิบายระบบในรูปแบบที่ 2.5 โดยสมมติว่าระบบมีลิมิตไซเคิลซึ่งสัญญาณของระบบจะเป็นสัญญาณที่มีคาบ และจากระบบในรูปแบบที่ 2.5 สัญญาณคาบ (Periodic Signal) ที่เป็นสัญญาณขาเข้าสู่ส่วนที่เป็นเชิงเส้นจะมีหลายฮาร์โมนิก แต่ด้วยคุณสมบัติของส่วนที่เป็นเชิงเส้น (ซึ่งก็คือวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน) จะทำการลดทอนฮาร์โมนิกสูงๆ ของสัญญาณทำให้ได้สัญญาณเอาต์พุต $x(t)$ ที่มีแต่ฮาร์โมนิกต่ำออกมา ดังนั้นสามารถตั้งสมมุติฐานได้ว่าสัญญาณของระบบจะเป็นสัญญาณที่อยู่ในรูปแบบไซน์และอาจกล่าวได้ว่า เคสไครบิงฟังก์ชันยังสามารถใช้ในจุดประสงค์อื่นได้อีกเช่น การทำนายผลตอบสนองวงปิด (Closed – Loop Response) ของระบบต่างๆ ที่เป็นดังรูปที่ 2.3 โดยมี $r(t) = r_0 \sin(\omega t)$ เป็นสัญญาณกระตุ้นจากภายนอก

การทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลเป็นสิ่งสำคัญมากเพราะว่าลิมิตไซเคิลสามารถเกิดขึ้นได้เสมอในระบบทางกายภาพที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Physical Nonlinear System) ตัวอย่างเช่น การพิจารณาลิมิตไซเคิลของเครื่องกำเนิดสัญญาณทางอิเล็กทรอนิกส์ที่ใช้ในห้องทดลอง หรือการทำนายลิมิตไซเคิลซึ่งใช้ในการลดผลกระทบเชิงลบของแรงเสียดทานคูลอมบ์ (Coulomb Friction) ในระบบเชิงกล แต่ในระบบควบคุมส่วนใหญ่ ลิมิตไซเคิลอาจไม่เป็นที่ต้องการอันเนื่องมาจากสาเหตุต่างๆ ดังนี้

1. การเกิดลิมิตไซเคิล (Limit Cycling) มักนำไปสู่สาเหตุที่ทำให้การควบคุมไม่แม่นยำซึ่งทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพ
2. การสั่นคงที่ (Constant Oscillation) ที่เกี่ยวข้องกับลิมิตไซเคิลสามารถเป็นเหตุให้เกิดการสึกกร่อนหรือแม้กระทั่งเกิดความเสียหายต่างๆ ขึ้นกับอุปกรณ์ (Hardware) ของระบบควบคุมนั้น
3. การเกิดลิมิตไซเคิล (Limit Cycling) อาจเป็นสาเหตุทำให้เกิดผลกระทบที่ไม่ต้องการ เช่น ระบบขับเครื่องบินเป็นแบบอัตโนมัติ (Autopilot) ทำให้ผู้โดยสารบนเครื่องบินรู้สึกไม่สะดวกสบาย

โดยทั่วไปแล้วถึงแม้ว่าความรู้ที่แท้จริงในเรื่องรูปร่างและการมีอยู่จริงรวมไปถึงขนาดของแอมพลิจูดและความถี่ ของลิมิตไซเคิลเป็นสิ่งที่ไม่ได้เป็นแบบแผนหรือเป็นกฎระเบียบแน่นอนตายตัวแต่วิธีการของเคสไครบิงฟังก์ชันสามารถแก้ปัญหานี้ได้และยังสามารถนำไปสู่การออกแบบตัวชดเชยเพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดลิมิตไซเคิลได้อีกด้วย

2.2.3 สมมติฐานพื้นฐาน

พิจารณาระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นดังรูปที่ 2.3 จากพื้นฐานของวิธีเคสไครบิงฟังก์ชัน ระบบจะต้องรองรับสมมติฐานทั้งสี่ข้อดังต่อไปนี้

1. มีส่วนประกอบที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพียงส่วนเดียวเท่านั้น
2. ความไม่เป็นเชิงเส้นนั้นไม่ขึ้นกับเวลา
3. จากอินพุทรูปแบบไซน์ $e = A\sin(\omega t)$ พิจารณาเฉพาะส่วนประกอบที่เป็นความถี่เดียวกับความถี่ของสัญญาณ (Fundamental Component) นั่นคือส่วน $c_1(t)$ ของเอาต์พุต $c(t)$ เท่านั้น
4. ความไม่เป็นเชิงเส้นต้องเป็นฟังก์ชันที่

สมมติฐานข้อแรกหมายความว่า ถ้าในระบบมีส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นตั้งแต่สองส่วนขึ้นไป แต่ละส่วนจะต้องรวมเข้าด้วยกันให้กลายเป็นส่วนเดียว (เช่น สามารถทำได้โดยการนำแต่ละส่วนมาต่อขนานกัน) หรือพิจารณาเฉพาะส่วนที่สำคัญที่สุดเท่านั้น

สมมติฐานข้อที่สองหมายความว่า ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่เป็นอิสระ (Autonomous) หรือไม่ขึ้นกับเวลาเท่านั้นที่นำมาพิจารณาตัวอย่างเช่น สภาวะอิ่มตัวในตัวขยายต่างๆ (Saturation in Amplifiers), ระยะเวลา (Backlash) ในระบบเกียร์ แรงเสียดทานคูลอมบ์ (Coulomb Friction) ระหว่างผิวสัมผัส และฮิสเทอรีซิส (Hysteresis) ในวงจรรีเลย์ (Relay) เหตุผลสำหรับสมมติฐานข้อนี้คือการใช้หลักการของไนควิสต์ (Nyquist criterion) ซึ่งใช้ได้เฉพาะกับระบบที่ไม่ขึ้นกับเวลาเท่านั้น

สมมติฐานข้อที่สาม คือ สมมติฐานหลักของวิธีการเคสไครบิงฟังก์ชัน ซึ่งอธิบายถึงหลักการประมาณค่า เนื่องจากสัญญาณเอาต์พุตของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่มีฮาร์โมนิกอันดับสูงปนอยู่กับสัญญาณพื้นฐาน (Fundamental) ดังนั้นส่วนที่เป็นเชิงเส้นจึงมีหน้าที่ในการลดทอนฮาร์โมนิกอันดับสูงเหล่านี้และทำให้เอาต์พุตของระบบเป็นสัญญาณที่มีแต่สัญญาณเป็นพื้นฐาน (Fundamental Component) จากตัวอย่างที่ผ่านมาส่วนที่เป็นเชิงเส้นคือวงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน ดังนั้นจะได้

$$|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)| \quad \text{for } n = 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

ดังนั้นสมมติฐานข้อที่สามหมายถึงสมมติฐานการกรองสัญญาณ (Filtering Hypothesis)

สมมติฐานข้อที่สี่หมายถึงกราฟของความสัมพันธ์ $f(e)$ ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น ซึ่งสมมาตรที่จุดกำเนิด นั่นคือ ส่วนที่คงที่ใน การกระจายแบบฟูเรียร์ (Fourier expansion) ของสัญญาณเอาต์พุตจะถูกลดทอนลงไปเพื่อความง่ายในการพิจารณา (หมายเหตุ : ความไม่เป็นเชิงเส้นที่ได้อภิปรายไปก่อนหน้านี้ล้วนแต่รองรับสมมติฐานข้อนี้ทั้งสิ้น)

อย่างไรก็ตามสมมติฐานทั้งสี่ข้อที่กล่าวมาเป็นเพียงพื้นฐานเท่านั้น แต่ความเป็นจริงระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นจะมีความซับซ้อนมากกว่า เช่นมีส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นหลายส่วนในระบบเดียว, ความไม่เป็นเชิงเส้นขึ้นกับเวลาและสัญญาณไซน์ในสมมติฐานข้อที่ 3 มีหลายฮาร์โมนิก เป็นต้น

2.2.4 ทฤษฎีบทพื้นฐาน

วิธีเคสไครบิงฟังก์ชันเป็นการนำเสนอส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งคล้ายกับวิธีผลตอบสนองเชิงความถี่ อันดับแรกพิจารณาสัญญาณอินพุตรูปแบบไซน์ที่เข้าไปสู่ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นโดยกำหนดแอมพลิจูดเป็น A และความถี่เป็น ω จะได้ว่า $e(t) = A\sin(\omega t)$ ดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.6 ดังนั้นจะได้สัญญาณเอาต์พุต $c(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ (แต่ไม่เป็นสัญญาณรูปแบบไซน์เพราะผ่านส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นมาแล้ว) และจาก $f[A\sin(\omega(t + 2\pi/\omega))] = f[A\sin(\omega t)]$ ทำให้สังเกตได้ว่าความไม่เป็นเชิงเส้นมีค่าเดียวดังสมมติฐานข้อที่ 1 โดยเอาต์พุต $c(t)$ ที่เป็นฟังก์ชันคาบสามารถอธิบายได้ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ดังนี้

$$c(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (2.6)$$

ซึ่งสัมประสิทธิ์ a_i และ b_i ของอนุกรมฟูเรียร์เป็นฟังก์ชันของ A และ ω โดย

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(t) d(\omega t) \quad (2.7ก)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.7ข)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c(t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.7ค)$$

จากสมมติฐานข้อที่ 4 ข้างต้นจะได้ $a_0 = 0$ และจากสมมติฐานข้อที่ 3 ทำการพิจารณาส่วนประกอบพื้นฐาน (Fundamental Component) $c_1(t)$ ได้ว่า

$$c(t) \approx c_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) = M \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.8)$$

ซึ่ง

$$M(A, \omega_0) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad \text{and} \quad \phi(A, \omega_0) = \arctan(a_1/b_1)$$

สมการข้างบนบ่งบอกว่าส่วนประกอบที่ความถี่เป็นความถี่เดียวกับสัญญาณ (Fundamental Component) ที่เกิดจากสัญญาณอินพุตรูปแบบไซน์นั้นเป็นสัญญาณรูปแบบไซน์ที่มีความถี่เดียวกัน และสามารถนำเสนอในรูปแบบจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$c_1 = Me^{j(\omega_0 t + \phi)} = (b_1 + ja_1)e^{j\omega_0 t}$$

แนวความคิดของฟังก์ชันตอบสนองเชิงความถี่คือ อัตราส่วนระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่นำเสนอในรูปแบบสัญญาณไซน์บนโดเมนความถี่ ซึ่งคล้าย กับเคสไครบิงฟังก์ชันที่นำเสนออัตราส่วนของจำนวนเชิงซ้อนรูปแบบไซน์ และเอาต์พุตรูปแบบไซน์ดังนี้



รูปที่ 2.6 แสดงส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น และเคสไครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น

จากรูปที่ 2.6 สามารถเห็นได้ว่าเคสไครบิงฟังก์ชัน เป็นการอธิบายระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น โดยมีอินพุตเป็นสัญญาณรูปแบบไซน์และมีฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $D(A, \omega)$ อย่างไรก็ตามสำหรับเคสไครบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นขึ้นอยู่กับแอมพลิจูด A ของสัญญาณอินพุต

โดยทั่วไปแล้วเคสไครบิงฟังก์ชันนั้นขึ้นอยู่กับทั้งแอมพลิจูดและความถี่ของสัญญาณอินพุต แต่ในกรณีที่ระบบมีค่าความไม่เป็นเชิงเส้นเพียงค่าเดียว จะทำให้เคสไครบิงฟังก์ชันที่ออกมาเป็นค่าจริงและไม่ขึ้นอยู่กับความถี่ของสัญญาณอินพุต ส่วนจริงของเคสไครบิงฟังก์ชัน D มาจากสมการที่ 2.7x ส่วนการไม่ขึ้นกับความถี่นั้นมาจากสมการที่ 2.7c

ถึงแม้ว่าสมมติให้ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นเชิงเส้นแบบคงที่ (Scalar Nonlinear Function) เพื่อสามารถหาค่าเคสไครบิงฟังก์ชันได้ง่าย แต่การหาค่าเคสไครบิงฟังก์ชันในระบบจริงนั้นมีความซับซ้อนมากกว่า และต้องอาศัยประสบการณ์ในการพิจารณา

2.2.5 การคำนวณหาค่าเคสไครบิงฟังก์ชัน

ในการพิจารณาหาค่าเคสไครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่างๆ นั้นมีหลายวิธีซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการ 3 วิธีการดังนี้ : การคำนวณเชิงวิเคราะห์ (Analytical Calculation), การพิจารณาจากการทดลอง (Experimental Determination) และการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) ซึ่งแต่ละวิธีจะพิจารณาถึงความเหมาะสมและค่าใช้จ่ายในการดำเนินการด้วย ส่วนความแม่นยำของการหาค่าเคสไครบิงฟังก์ชันนั้นไม่ใช่ประเด็นสำคัญเพราะวิธีการเคสไครบิงเป็นเพียงวิธีในการประมาณค่าเท่านั้น

การคำนวณเชิงวิเคราะห์

เมื่อคุณลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้น $c = f(e)$ (โดยที่ e คืออินพุตและ c คือเอาต์พุต) ของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นถูกอธิบายด้วยฟังก์ชัน และการอินทิเกรตในสมการที่ 2.7 สามารถหาค่าได้ ดังนั้นจากสมการที่ 2.7 การหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชันด้วยวิธีนี้เป็นสิ่งที่เหมาะสม ฟังก์ชัน $f(e)$ ของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นอาจเป็นการนำเสนอในทางอุดมคติของความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างง่าย เช่น ภาวะอิ่มตัว (Saturation) และ จุดบอด Dead - Zone

การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration)

สำหรับความไม่เป็นเชิงเส้นต่างๆ ที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต - เอาต์พุต $c = f(e)$ ซึ่งนำเสนอในรูปแบบของกราฟ หรือตาราง การอินทิเกรตเชิงตัวเลขเป็นวิธีการที่เหมาะสมในการหาค่าเดสไครบิงฟังก์ชันซึ่งวิธีการนี้สามารถใช้โปรแกรมทางคอมพิวเตอร์มาช่วยในการคำนวณได้ ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะออกมาในรูปแบบของกราฟเดสไครบิงฟังก์ชันและสามารถนำกราฟไปใช้ทำนายลิมิตไซเคิลได้

การหาค่าจากการทดลอง (Experimental Evaluation)

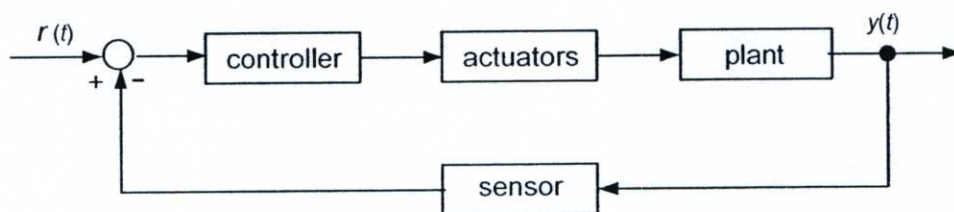
กระบวนการหาค่าจากการทดลอง (Experimental Method) นั้นเหมาะกับความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเชิงซ้อน (Complex) และมีการเปลี่ยนแปลงไปเรื่อยๆ ไม่คงที่ (Dynamic) เมื่อระบบถูกกระตุ้นด้วยอินพุตรูปแบบไซน์ที่รู้ค่าแอมพลิจูดและความถี่ ดังนั้นการพิจารณาค่าเดสไครบิงฟังก์ชันจากการทดลองจะอาศัยตัววิเคราะห์ฮาร์โมนิก (Harmonic Analyzer) ของเอาต์พุตที่มาจากส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น กระบวนการนี้จะคล้ายกับการพิจารณาจากการทดลอง (Experimental Determination) ของฟังก์ชันถ่ายโอนในระบบเชิงเส้น แต่ต่างกันที่แอมพลิจูดและของความถี่อินพุตสามารถปรับค่าได้ ผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลองเป็นเส้นกราฟ เดสไครบิงฟังก์ชัน $D(A, \omega)$ บนระนาบเชิงซ้อน

2.3 ตัวอย่างความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่างๆ

ในหัวข้อนี้อธิบายถึงความไม่เป็นเชิงเส้นในระบบควบคุมต่างๆ โดยพิจารณาบล็อกไดอะแกรมที่แสดงไว้ในรูปที่ 2.7 ซึ่งประกอบไปด้วยสี่ส่วน ดังนี้ หนึ่งระบบ (Plant) ที่ควบคุม สองเซนเซอร์ที่ใช้ในการวัดค่าต่างๆ สามตัวดำเนินการ (Actuator) และสี่ตัวควบคุม (Controller) ซึ่งระบบในรูปที่ 2.7 เป็นการทดลองที่เกิดขึ้น โดยใช้คอมพิวเตอร์ ความไม่เป็นเชิงเส้นต่างๆ สามารถเกิดขึ้นได้กับทุกส่วนในระบบ ดังนั้นระบบนี้คือระบบควบคุมแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Control System)

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบต่อเนื่องและแบบไม่ต่อเนื่อง

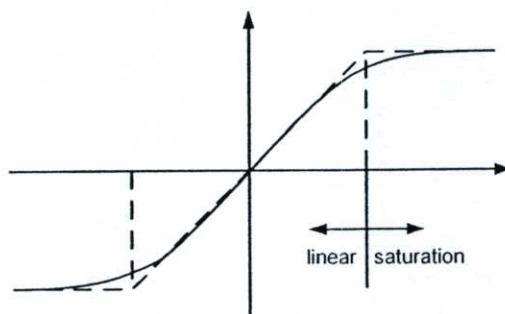
ความไม่เป็นเชิงเส้นนั้นสามารถแบ่งได้เป็นสองประเภท คือ ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบต่อเนื่อง (Continuous Nonlinearities) และความไม่เป็นเชิงเส้นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Nonlinearities) เนื่องจากฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function) ไม่สามารถประมาณค่าความไม่เป็นเชิงเส้นแบบไม่ต่อเนื่องได้ ดังนั้นความไม่เป็นเชิงเส้นแบบไม่ต่อเนื่องจะถูกเรียกว่า ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบหยาบ (Hard Nonlinearities) ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบหยาบมักจะถูกพบในระบบควบคุมต่างๆ ทั้งในระบบที่ทำงานในช่วงแคบ (Small Range Operation) และระบบที่ทำงานในช่วงกว้าง (Large Range Operation) โดยเฉพาะระบบที่ทำงานในช่วงแคบระบบจะถูกจัดให้เป็นระบบเชิงเส้นหรือเป็นระบบไม่เป็นเชิงเส้นนั้นขึ้นอยู่กับขนาด (Magnitude) ของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบหยาบและขอบเขตของผลกระทบที่มีต่อประสิทธิภาพของระบบ



รูปที่ 2.7 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุม

ภาวะอิ่มตัว (Saturation)

ภาวะอิ่มตัวเป็นสิ่งที่พบได้มากที่สุดสิ่งหนึ่งในวิศวกรรมระบบควบคุม ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว (Saturation Nonlinearity) มักจะเกิดจากหลายสาเหตุเช่น ข้อจำกัดด้านขนาดของอุปกรณ์, คุณสมบัติของวัสดุและกำลังไฟฟ้าที่ใช้ได้ ภาวะอิ่มตัวที่เกิดขึ้นมักเกี่ยวข้องกับตัวขยายและตัวดำเนินการ (Actuator) ซึ่งเป็นส่วนประกอบสำคัญของระบบควบคุม วงจรขยายของทรานซิสเตอร์ และวงจรขยายทางแม่เหล็ก (Magnetic Amplifier) เอาท์พุทที่แปรตามอินพุทอย่างเป็นเชิงเส้นจะเกิดขึ้นในช่วงที่แอมพลิจูดของอินพุทมีค่าน้อยๆ เมื่อแอมพลิจูดของอินพุทมีขนาดเพิ่มขึ้นจนเกินช่วงที่เป็นเชิงเส้นจะทำให้เอาท์พุทเปลี่ยนแปลงลงน้อยมากและลู่เข้าสู่ค่าสูงสุดค่าหนึ่ง ตัวอย่างกราฟที่แสดงลักษณะของภาวะอิ่มตัวแสดงไว้ในรูปที่ 2.8 โดยเส้นที่บดคือภาวะอิ่มตัวที่เกิดขึ้นจริง และเส้นประคือภาวะอิ่มตัวทางอุดมคติ



รูปที่ 2.8 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว

ตัวดำเนินการ (Actuator) ส่วนใหญ่เป็นตัวแสดงลักษณะภาวะอิ่มตัว (Saturation Characteristic) ยกตัวอย่างเช่น แรงบิดของเซอร์โวมอเตอร์ (Servo Motor) แบบสองเฟสไม่สามารถเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จนไม่มีที่สิ้นสุดแต่จะเพิ่มขึ้นไปจนถึงผู้เข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่ง อันเป็นผลมาจากสมบัติของวัสดุที่นำมาผลิตเป็นเซอร์โวมอเตอร์ และไฮดรอลิกเซอร์โวมอเตอร์ (Hydraulic Servo Motor) ที่ควบคุมด้วยวาล์วจะเกิดภาวะอิ่มตัวเมื่ออัตราการไหลถึงจุดสูงสุด

ภาวะอิ่มตัวยังสามารถมีผลกระทบที่ซับซ้อนต่อประสิทธิภาพของระบบควบคุม กล่าวคือ ภาวะอิ่มตัวส่งผลให้เกนของส่วนประกอบ (เช่น วงจรขยาย) มีค่าลดลงแม้ว่าสัญญาณอินพุตถูกทำให้มีค่ามากขึ้นก็ตาม จากผลลัพธ์ที่ได้ถ้าระบบไม่เสถียรในช่วงที่เป็นเชิงเส้นก็อาจทำให้ระบบเกิดภาวะการสั่นคงที่ด้วยตัวเอง (Self Sustained Oscillation) หรืออีกนัยหนึ่งถ้าระบบที่ความเสถียร ภาวะอิ่มตัวจะทำให้ผลตอบสนองของระบบช้าลงเพราะเกนของระบบมีค่าลดลง

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด (On - Off Nonlinearity)

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด หรือความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปลี่ยนแปลงทันทีทันใด (Relay Nonlinearity) เกิดเมื่อช่วงที่เป็นเชิงเส้นน้อยลงเข้าใกล้ศูนย์ และเส้นกราฟในช่วงที่เป็นเชิงเส้นมีความชันในแนวตั้งมากขึ้น ตัวอย่างความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด คือ เอาท์พุท จากแรงขับของแก๊สที่ใช้ในการควบคุมยานอวกาศและวงจรรีเลย์ทางอิเล็กทรอนิกส์ (Electrical Relay) เป็นต้น อย่างไรก็ตามความไม่เป็นเชิงเส้นแบบเปิด - ปิด มีผลกระทบต่อระบบที่คล้ายกับความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากภาวะอิ่มตัว

จุดบอด (Dead - Zone)

ในเครื่องมือทางกายภาพหลายๆ อย่าง เอาท์พุทที่ออกมามีค่าเป็นศูนย์จนกระทั่งขนาดของอินพุทมีค่าเกินค่าคงที่ค่าหนึ่งจึงจะทำให้เอาท์พุทไม่เป็นศูนย์ ตัวอย่างเช่น พิจารณามอเตอร์กระแสตรงด้วยการวิเคราะห์แบบระบบเชิงเส้น สมมติว่าจ่ายแรงดันที่มีค่าใดๆ เข้าสู่ขดลวดอาร์เมเจอร์ (Armature Winding) จะทำให้เกิดกระแสอาร์เมเจอร์คงที่เหนี่ยวนำให้ขดลวดหมุน แต่ในสถานการณ์จริงเนื่องจากมีแรงเสียดทานเกิดขึ้นที่แกนของมอเตอร์ ดังนั้นมอเตอร์จะหมุนก็

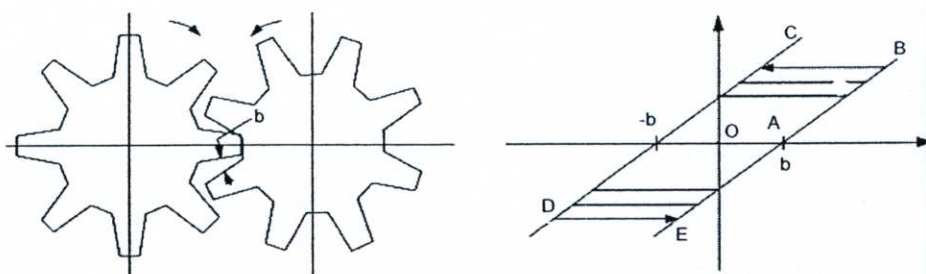
ต่อเมื่อแรงดันที่ป้อนเข้ามอเตอร์มากพอที่จะทำให้เกิดแรงหมุนและเอาชนะแรงเสียดทานที่แกนของมอเตอร์ได้ สิ่งที่เกิดขึ้นกับสัญญาณแรงดันขนาดเล็กนี้เรียกว่า จุดบอด ปรากฏการณ์จุดบอด (Dead-Zone Phenomena) ยังเกิดกับตัวควบคุมวาล์วแบบใช้ลม (Valve Controller Pneumatic Actuator) และอุปกรณ์ไฮดรอลิกต่างๆ

โดยทั่วไปความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอดอาจเกิดขึ้นได้กับอุปกรณ์หลายประเภทในระบบควบคุม เช่น เซนเซอร์, วงจรขยาย และตัวดำเนินการ (Actuator) จุดบอดสามารถทำให้เกิดผลกระทบต่างๆ ในระบบควบคุมได้ ผลกระทบที่พบบ่อยที่สุดอย่างหนึ่งคือความแม่นยำของเอาต์พุตลดลง ซึ่งจะนำไปสู่ภาวะที่ลิมิตไซเคิลหรือระบบไม่เสถียร ในบางกรณีการลดความแม่นยำของเอาต์พุตอาจเป็นการทำให้ระบบมีเสถียรภาพหรือหยุดการสั่น (Self - Oscillation) ของระบบได้ เช่น ถ้าจุดบอด (Dead-zone) ร่วมกับรีเลย์ทางอุดมคติ (Ideal Relay) จะสามารถหลีกเลี่ยงการสั่นที่เกิดขึ้นตรงผิวสัมผัสของรีเลย์นั้นได้เป็นการกำจัดประกายไฟ (Spark) และลดการสึกกร่อนที่จุดสัมผัสได้ด้วย

การเกิดระยะคลอนและปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิส

(Backlash and Hysteretic)

การเกิดระยะคลอน (Backlash) คือ ความไม่เป็นเชิงเส้นที่พบในส่วนประกอบควบคุม (Control Component) โดยส่วนใหญ่เป็นอุปกรณ์ที่เกี่ยวข้องกับเครื่องยนต์กลไกต่างๆ และการเกิดระยะคลอนมักจะเกิดขึ้นจากช่องว่างเล็กๆ ในระบบกลไกต่างๆ เช่น ในระบบเกียร์ จะมีช่องว่างเล็กๆ ระหว่างฟันเฟือง (ดังแสดงในรูปที่ 2.9) เนื่องจากความผิดพลาดที่หลีกเลี่ยงไม่ได้จากการผลิตและการประกอบ พิจารณาจากรูปที่ 2.9 เมื่อเฟืองตัวหนึ่งหมุนไปในทิศทางที่น้อยกว่าช่องว่าง b เฟืองอีกตัวหนึ่งจะยังไม่หมุนตามซึ่งเป็นลักษณะเดียวกันกับจุดบอด (ส่วนเส้นตรง OA ในรูปที่ 2.9) เมื่อฟันเฟืองสัมผัสกันและหมุนไปข้างหน้า จะทำให้ระบบเกียร์ทำงานอย่างเป็นเชิงเส้น (ส่วนเส้นตรง AB) ในขณะเดียวกันเมื่อเฟืองหมุนไปในทิศทางตรงข้ามเป็นระยะ $2b$ ระบบเกียร์จะยังไม่ทำงาน (ส่วนเส้นตรง BC ในรูปที่ 2.9) แต่หลังจากฟันเฟืองสัมผัสกันอีกครั้ง ระบบเกียร์ก็จะหมุนไปข้างหลังอย่างเป็นเชิงเส้น (ส่วนเส้นตรง CD) ดังนั้นถ้าระบบเกียร์ทำงานเป็นจังหวะดังกล่าวข้างต้น จะได้รูปแบบการทำงานเป็นไปตามทางโคจร EBCD ในรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 ความไม่เป็นเชิงเส้นที่เกิดจากระยะคลอน

รูปแบบที่เห็นได้ชัดของการเกิดระยะคลอน คือที่อินพุตค่าหนึ่งอาจให้อเอาต์พุตออกมาสองค่า ส่วนจะได้ค่าใดออกมานั้นขึ้นอยู่กับความเป็นมาของอินพุต ส่วนความไม่เป็นเชิงเส้นที่มีหลายค่า (Multi – Valued Nonlinearity) ที่คล้ายกับการเกิดระยะคลอน คือ ปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิสซึ่งพบบ่อยในอุปกรณ์ประเภทรีเลย์ การเกิดระยะคลอนและปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิส มักจะนำไปสู่การสะสมพลังงานในระบบ การสะสมพลังงานเป็นสาเหตุของความไม่เสถียรและเกิดการสั่น (Self – Sustained Oscillation) ขึ้นในระบบ

2.4 เคสไครบิงฟังก์ชัน ของความที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั่วไป

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคำนวณเคสไครบิงฟังก์ชันสำหรับความที่ไม่เป็นเชิงเส้นทั่วไปต่างๆ อีกทั้งยังพูดถึงคุณสมบัติต่างๆ ของความที่ไม่เป็นเชิงเส้นบน โดเมนความถี่และพูดถึงตัวอย่างการคำนวณเคสไครบิงฟังก์ชันสำหรับส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น

2.4.1 ภาวะอิ่มตัว (Saturation)

ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต – เอาต์พุตสำหรับความที่ไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัว (Saturation Nonlinearity) ได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.10 โดยที่ a คือ ช่วงของความไม่เป็นเชิงเส้น และ k คือความชันของเส้นกราฟ จากความที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่เป็นค่าเดียว (Single Valued) จะทำให้ได้เคสไครบิงฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันค่าจริง (Real Function) ที่ขึ้นอยู่กับแอมพลิจูดของอินพุต

พิจารณาอินพุต $e(t) = A\sin(\omega t)$ ถ้า $A \leq a$ ดังนั้นอินพุตจะยังคงอยู่ในช่วงที่เป็นเชิงเส้น และจะได้เอาต์พุตเป็น $y(t) = kA\sin(\omega t)$ เพราะฉะนั้นเคสไครบิงฟังก์ชันเป็นค่าคงที่ k และสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันได้ดังต่อไปนี้

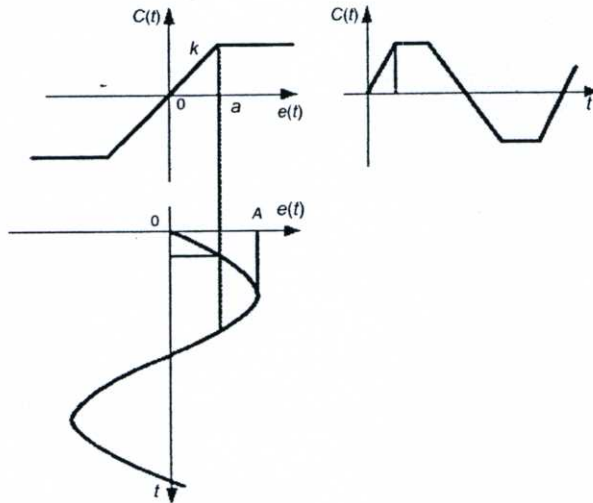
$$c(t) = \begin{cases} kA\sin(\omega)t & 0 \leq \omega t \leq \omega t_1 \\ ka & \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}$$

โดยที่ $\omega t_1 = \sin^{-1}(a/A)$ และเนื่องจาก $c(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นจะทำให้ $a_1 = 0$ และกราฟมีลักษณะสมมาตรทั้งสี่ควอดอร์ทำให้ได้

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} c(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\omega t_1} kA \sin^2(\omega t) d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} ka \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{2kA}{\pi} \left[\omega t_1 + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \end{aligned} \tag{2.10}$$

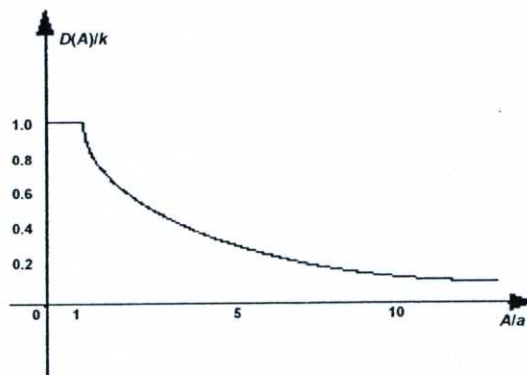
ดังนั้นจะได้เดสไครบิงฟังก์ชันเป็น

$$D(A) = \frac{b_1}{A} = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \quad (2.11)$$



รูปที่ 2.10 ความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัวและความสัมพันธ์ระหว่าง อินพุต-เอาต์พุตที่เกี่ยวข้อง

รูปกราฟของเดสไครบิงฟังก์ชัน $D(A)/k$ ได้ถูกเขียนและแสดงไว้ในรูปที่ 2.11 จากกราฟสามารถบอกได้ว่าภาวะอิ่มตัว (Saturation) สามารถถูกอธิบายได้ด้วยเกณฑ์ที่ขึ้นกับแอมพลิจูด โดยถ้าแอมพลิจูด A ของอินพุตมีค่าน้อยกว่าช่วงที่เป็นเชิงเส้นจะทำให้ $D(A)/k$ มีค่าคงที่ k และ $D(A)/k$ จะมีค่าลดลงเมื่อ A/a มีค่ามากขึ้นความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัวไม่ทำให้เกิดการเลื่อนเฟสเพราะว่า $D(A)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง



รูปที่ 2.11 กราฟเดสไครบิงฟังก์ชันของภาวะอิ่มตัวของความไม่เป็นเชิงเส้นจากภาวะอิ่มตัว

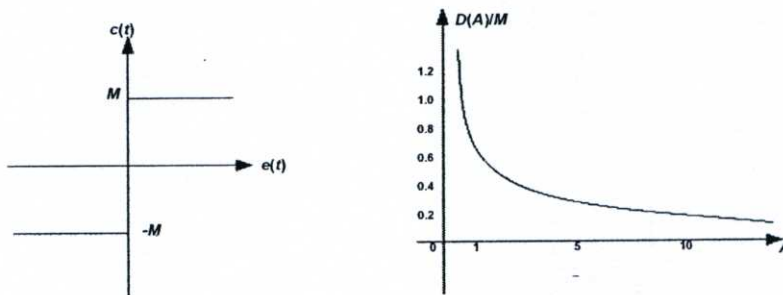
ในกรณีเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นประเภทรีเลย์ (เปิด - ปิด) ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.12 กรณีนี้เกี่ยวข้องกับการลดลงเข้าใกล้ศูนย์ของช่วงที่เป็นเชิงเส้นของฟังก์ชันนั้นคือ $a \rightarrow 0$ หรือ $k \rightarrow \infty$ แต่ $ka = M$ ดังนั้น b_1 จะได้จากลิมิตของสมการที่ 2.10 ดังนี้

$$b_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} M \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} M$$

ดังนั้นเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์ คือ

$$D(A) = \frac{4M}{\pi A} \quad (2.12)$$

รูปที่ 2.12 เป็นกราฟเดสไครบิงฟังก์ชัน (D/M) ซึ่งเป็นฟังก์ชันแอมพลิจูดของอินพุต ส่วนของเส้นตรงแนวราบที่เห็นในรูปที่ 2.11 หายไปเพราะความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์อย่างสมบูรณ์ อย่างไรก็ตามกราฟเดสไครบิงฟังก์ชันยังลดลงตามอินพุตที่เพิ่มขึ้นเหมือนเดิม



รูปที่ 2.12 ความไม่เป็นเชิงเส้นและกราฟเดสไครบิงฟังก์ชันของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบรีเลย์

2.4.2 จุดบอด (Dead - Zone)

ลักษณะของจุดบอดแสดงไว้ในรูปที่ 2.13 โดยความกว้างของจุดบอดมีค่า 2δ และความชัน k ผลตอบสนองที่ได้จากอินพุตรูปแบบไซน์ $e(t) = A \sin(\omega t)$ ของจุดบอดโดยที่ $A \geq \delta$ และจากคุณลักษณะของฟังก์ชันคือ $a = 0$ ผลตอบสนองที่ได้เป็นลักษณะสมมาตรบนควอดเรอร์ทั้งสี่ เช่น เมื่อ $0 \leq \omega t \leq \pi/2$ จะได้

$$c(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq \omega t \leq \omega t_1 \\ k(A \sin(\omega t) - \delta) & \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases} \quad (2.13)$$

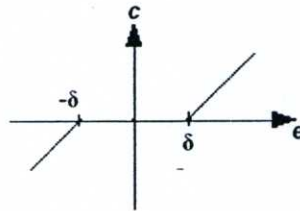
ซึ่ง $\omega t_1 = \sin^{-1}(\delta/A)$ และสัมประสิทธิ์ b_1 สามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} c(t) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} k(A \sin(\omega t) - \delta) \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{2kA}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\delta}{A} - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

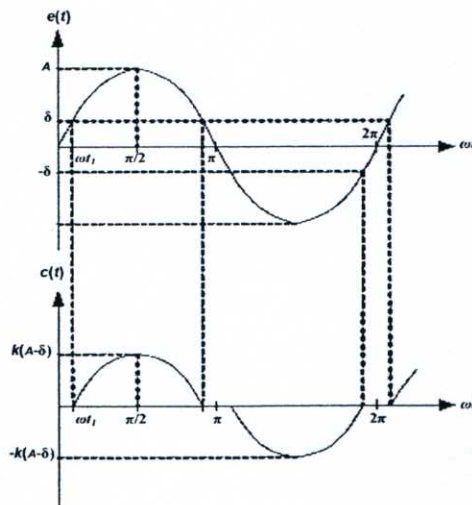
ดังนั้นเคสไครบิงฟังก์ชันที่ได้เป็นดังนี้

$$D(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \frac{\delta}{A} - \frac{\delta}{A} \sqrt{1 - \frac{\delta^2}{A^2}} \right] \quad (2.15)$$

เคสไครบิงฟังก์ชัน $D(A)$ ของจุดบอดเป็นฟังก์ชันค่าจริง ดังนั้นจะไม่มี การเลื่อนเฟสและ จะเห็นได้ว่า D/k เป็นศูนย์เมื่อ $A/\delta < 1$ และค่อยๆ เพิ่มขึ้นเป็นหนึ่งด้วย A/δ การเพิ่มขึ้นของ D/k บ่งบอกว่าผลกระทบของจุดบอดลดลงตามแอมพลิจูดของอินพุตที่เพิ่มขึ้น



รูปที่ 2.13 ลักษณะของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอด



รูปที่ 2.14 อินพุตและเอาต์พุต ของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบจุดบอด

2.4.3 การเกิดระยะคลอน (Backlash)

ความไม่เป็นเชิงเส้นแบบการเกิดระยะคลอน นำเสนอโดยรูปที่ 2.15 โดยมีความชัน k และความกว้าง 2δ เมื่ออินพุตเป็น $e(t) = A\sin(\omega t)$ โดยที่ $A \geq \delta$ ได้เอาต์พุต $c(t)$ ของความไม่เป็นเชิงเส้นดังแสดงในรูป ในหนึ่งรอบฟังก์ชัน $c(t)$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} c(t) &= (A - \delta)k & \frac{\pi}{2} \leq \omega t \leq \pi - \omega t_1 \\ c(t) &= (A \sin(\omega t) + \delta)k & \pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \frac{3\pi}{2} \\ c(t) &= -(A - \delta)k & \frac{3\pi}{2} \leq \omega t \leq 2\pi - \omega t_1 \\ c(t) &= (A \sin(\omega t) - \delta)k & 2\pi - \omega t_1 \leq \omega t \leq \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

ฟังก์ชัน $c(t)$ ในหัวข้อนี้ไม่เหมือนความไม่เป็นเชิงเส้นก่อนหน้าตรงที่ $c(t)$ ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ดังนั้น a_1 และ b_1 ไม่เป็นศูนย์ทั้งคู่ จากสมการ 2.7ข และ 2.7ค จะได้

$$a_1 = \frac{4k\delta}{\pi} \left(\frac{\delta}{A} - 1 \right) \quad (2.16)$$

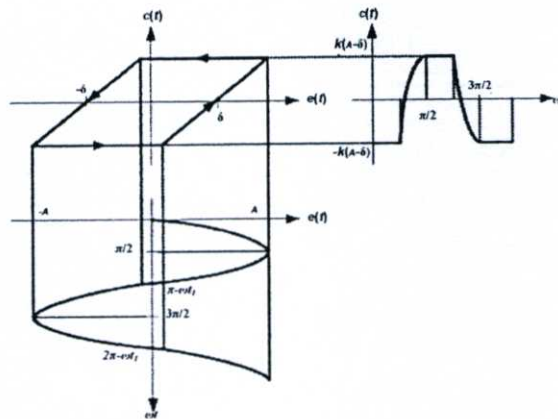
$$b_1 = \frac{Ak}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \left(\frac{2\delta}{A} - 1 \right) - \left(\frac{2\delta}{A} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{2\delta}{A} - 1 \right)^2} \right] \quad (2.17)$$

ดังนั้นเดสไครบิงฟังก์ชันของการเกิดระยะคลอน (backlash) คือ

$$|D(A)| = \frac{1}{A} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.18)$$

$$\angle D(A) = \tan^{-1}(a_1 / b_1) \quad (2.19)$$

หมายเหตุ : การเลื่อนเฟส (ไม่เกิน 90°) ทำให้สัญญาณอินพุตใหญ่ขึ้น และภาวะตามเฟส (Phase Lag) อาจก่อปัญหาให้กับเสถียรภาพของระบบควบคุมแบบป้อนกลับได้



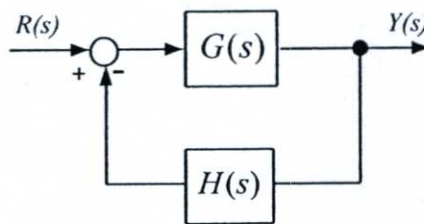
รูปที่ 2.15 อินพุตและรูปคลื่นเอาต์พุตของความไม่เป็นเชิงเส้นแบบการเกิดระยะคลอน

2.5 บทวิเคราะห์เดสไคริบิงฟังก์ชันของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำเดสไคริบิงฟังก์ชันไปใช้งาน โดยเฉพาะอย่างยิ่ง การนำเสนอเดสไคริบิงฟังก์ชันไปทำนายการเกิดลิมิต ไซเคิล และพิจารณาเสถียรภาพของระบบ อีกทั้งยังพูดถึงหลักการของไนควิสต์ (Nyquist criterion) ที่ใช้ในระบควบคุมแบบคลาสสิก (Classical Control)

2.5.1 หลักการของไนควิสต์ (Nyquist Criterion) และการนำไปใช้งาน

จากกระบวนการเดสไคริบิงฟังก์ชันซึ่งเป็นหลักการทั่วไปของการวิเคราะห์ไนควิสต์ ทำให้สามารถใช้ หลักการไนควิสต์มาอธิบายหลักการเดสไคริบิงฟังก์ชันได้เป็นอย่างดี



รูปที่ 2.16 ระบบเชิงเส้นวงปิด

พิจารณาระบบในรูปที่ 2.16 ได้สมการคุณลักษณะของระบบเป็น

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = 1 + G(s)H(s) = 0$$

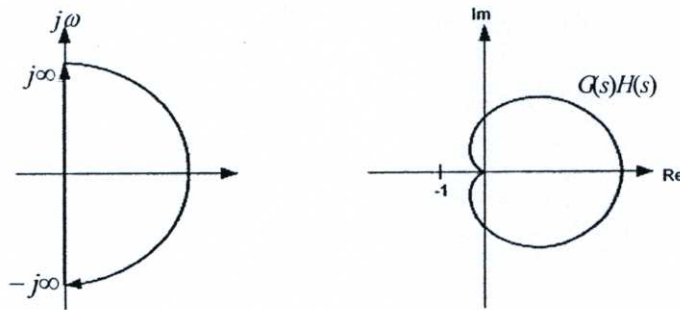
หมายเหตุ : $\frac{Y(s)}{R(s)}$ มักถูกเรียกว่า ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิด (Loop Transfer Function) ซึ่งเป็นฟังก์ชันอัตราส่วนของตัวแปร s โดยมีซีโร (Zero) เป็นโพลของระบบวงปิด และมีโพล(Pole)เป็นโพลของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบวงเปิด $G(s)H(s)$ ดังนั้นสามารถเขียนสมการคุณลักษณะใหม่ได้เป็น

$$G(s)H(s) = -1$$

จากสมการข้างต้น หลักการของไนควิสต์ สามารถแจกแจงได้โดยทฤษฎีของ เกาซี (Cauchy) ด้วยการวิเคราะห์แบบเชิงซ้อน ซึ่งมีกระบวนการเป็นขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. เขียนกราฟ ของไนควิสต์ ที่ล้อมรอบฝั่งขวา ลงบนระนาบ s
2. ทำการแปลง (Map) กราฟให้ไปอยู่บนระนาบเชิงซ้อนอื่น โดยผ่านทางฟังก์ชัน $G(s)H(s)$
3. พิจารณา N ซึ่งเป็นจำนวนรอบตามเข็มนาฬิกาของกราฟ $G(s)H(s)$ รอบจุด $(-1,0)$
4. คำนวณค่า Z ซึ่งเป็นค่าซีโร ของฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิด $\delta(s)$ ด้านขวาของระนาบ โดย $Z = N + P$ เมื่อ P คือโพลที่ไม่เสถียร $\delta(s)$

ดังนั้น Z คือโพลที่ไม่เสถียรของระบบควบคุมวงปิดตัวอย่างรูปกราฟไนควิสต์ บนระนาบ s และกราฟของ $G(s)H(s)$ บนระนาบ GH แสดงไว้ในรูปที่ 2.17 ซึ่ง $G(s)H(s) = 6/[(s+1)(s+2)]$



รูปที่ 2.17 กราฟของไนควิสต์

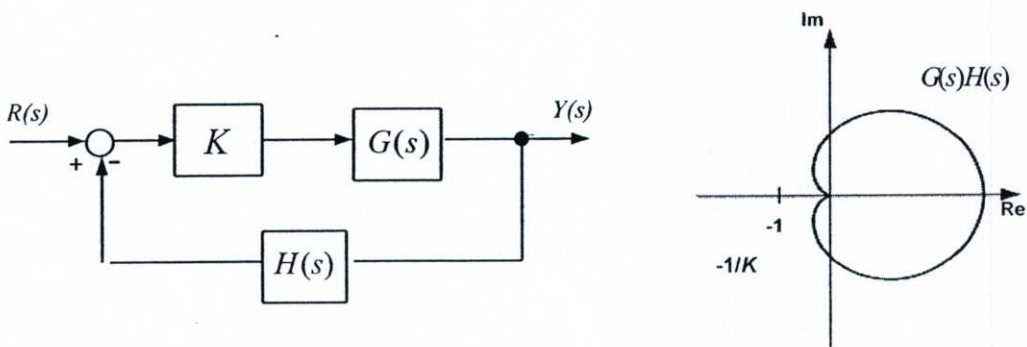
ในกรณีที่มีค่าค่างที่ K (หรืออาจเป็นจำนวนเชิงซ้อน) รวมอยู่ในส่วนไปข้างหน้า (Forward Path) ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.18 ก็ยังสามารถใช้หลักการของไนควิสต์ ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของลิมิตไซเคิลโดยใช้กระบวนการเดสโครบิงฟังก์ชันได้ ดังนั้นจากระบบในกรณีข้างต้นจะได้ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดเป็น

$$\delta(s) = 1 + KG(s)H(s)$$

และมีสมการคุณลักษณะเป็น

$$G(s)H(s) = -1/K$$

ส่วนกระบวนการพิจารณา หลักการของไนควิสต์ นั้นคล้ายกันต่างกันเพียงเรื่องการคำนวณค่า Z กล่าวคือ ค่า Z ในกรณีนี้เป็นจำนวนรอบตามเข็มนาฬิกาของกราฟ $G(s)H(s)$ รอบจุด $-1/K$ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.18



รูปที่ 2.18 หลักการของไนควิสต์ของระบบที่มีค่าคงที่

2.5.2 การมีอยู่จริงของลิมิตไซเคิล

สมมติว่าระบบมีการสั่น (Self - Sustained Oscillation) ด้วย แอมพลิจูด A และความถี่ ω ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.19 ดังนั้นจะได้สมการต่างๆ ของระบบเป็น

$$e = -y$$

$$c = D(a, \omega)e$$

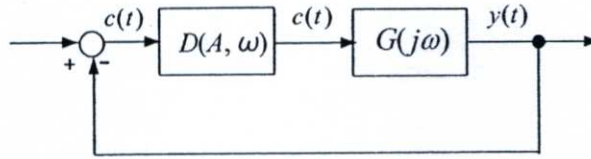
$$y = G(j\omega)c$$

โดยที่ $y = G(j\omega)D(A, \omega)(-y)$ ถ้า $y \neq 0$ จะได้

$$G(j\omega)D(a, \omega) + 1 = 0 \quad (2.20)$$

และสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$G(j\omega) = -\frac{1}{D(A, \omega)} \quad (2.21)$$



รูปที่ 2.19 ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ดังนั้นแอมพลิจูด A และความถี่ ω ของลิมิตไซเคิลในระบบจะต้องรองรับสมการที่ 2.21 ถ้าสมการดังกล่าวไม่มีคำตอบจะทำให้ระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนี้ไม่มีลิมิตไซเคิล

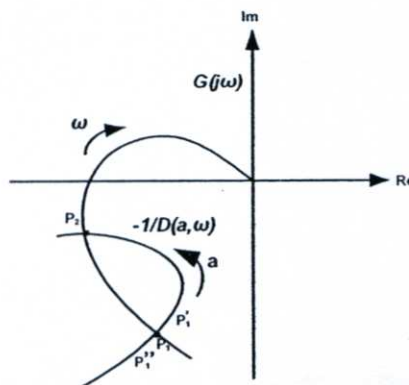
จากสมการ 2.21 ได้นำเสนอสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น 2 สมการ (ส่วนจริงและส่วนจินตภาพ) โดยมีตัวแปร 2 ตัวคือ A และ ω ซึ่งโดยส่วนใหญ่จะมีเพียงไม่กี่วิธีในการหาคำตอบของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นนี้เพราะเป็นการยากในการแก้สมการเนื่องจากบางระบบเป็นระบบอันดับสูง ดังนั้นการแก้ปัญหาแบบที่นำสมการ 2.21 ไปเขียนกราฟแล้วหาจุดตัดเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบเป็นวิธีการที่ได้รับความนิยม

เดสไครบิงฟังก์ชันที่เป็นอิสระจากความถี่

ขั้นแรกพิจารณาเดสไครบิงฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันของเกนเพียงอย่างเดียว นั่นคือ $D(A, \omega) = D(A)$ ซึ่งเดสไครบิงฟังก์ชันเหล่านี้รวมถึงความไม่เป็นเชิงเส้นแบบค่าเดียวและความไม่เป็นเชิงเส้นแบบสองค่า (Double – Valued Nonlinearities) เช่น การเกิดระยะคลอนและปรากฏการณ์ฮิสเทอรีซิส จะได้สมการเป็น

$$G(j\omega) = -\frac{1}{D(A)} \quad (2.22)$$

จากนั้นเขียนกราฟของฟังก์ชันผลตอบสนองเชิงความถี่ $G(j\omega)$ (โดยแปรค่าความถี่ ω) และเขียนกราฟของเดสไครบิงฟังก์ชัน $(-1/D(A))$ (โดยแปรค่าแอมพลิจูด A) ลงบนระนาบเชิงซ้อนดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.20

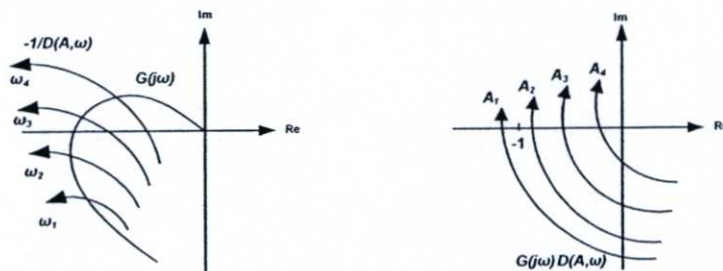


รูปที่ 2.20 กราฟแสดงการเกิดลิมิตไซเคิล

ถ้ากราฟทั้งสองเส้นตัดกันแสดงว่าเกิดลิมิตไซเคิลขึ้นในระบบคั้งนั้นค่าแอมพลิจูด A และความถี่ ω ที่จุดตัดของกราฟเป็นคำตอบของสมการ 2.22 ถ้ากราฟตัดกัน n จุดแสดงว่ามี n ลิมิตไซเคิลเกิดขึ้นในระบบ คั้งนั้นจากรูปที่ 2.20 กราฟทั้งสองเส้นตัดกันที่จุด k เพียงจุดเดียว นั้นแสดงว่าระบบเกิดลิมิตไซเคิลเดียว โดยลิมิตไซเคิลที่ได้มีแอมพลิจูดเป็น A_k ซึ่งก็คือแอมพลิจูดที่จุดตัดของกราฟ $-1/D(A)$ และมีความถี่เป็น ω_k ซึ่งก็คือความถี่ที่จุดตัดของกราฟ $G(j\omega)$ ด้วย เช่นเดียวกัน สำหรับระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นค่าเดียว (Single - Valued Nonlinearity) เดสไครบิงฟังก์ชัน D ของระบบจะเป็นค่าจริง และเมื่อนำไปเขียนกราฟก็จะได้กราฟที่อยู่บนแกนจริงเท่านั้น กระบวนการข้างต้นดังกล่าวเป็นเพียงการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลเท่านั้น ส่วนความแม่นยำและความสมบูรณ์แบบของการทำนายอาจใช้การจำลองทางคอมพิวเตอร์มาช่วยได้

เดสไครบิงฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับความถี่

โดยทั่วไปเดสไครบิงฟังก์ชันจะขึ้นอยู่กัแอมพลิจูดและความถี่ของสัญญาณอินพุท ($D = D(A, \omega)$) ส่วนขวามือของสมการ 2.21 ($-1/D(A, \omega)$) ที่เกี่ยวข้องกักราฟบนระนาบเชิงซ้อน โดย ω คงที่ในกราฟแต่ละเส้นและเส้นกราฟทั้งหมดคั้งตาม A ดังแสดงไว้ทางด้านซ้ายมือของรูปที่ 2.21 และจะเห็นได้ว่าจุดตัดระหว่าง $G(j\omega)$ กั $-1/D(A, \omega)$ มีไม่จำกัด แต่มีค่าความถี่(ω)ที่เหมาะสมเพียงไม่กี่ค่าเท่านั้นที่บ่งบอกการเกิดลิมิตไซเคิลได้

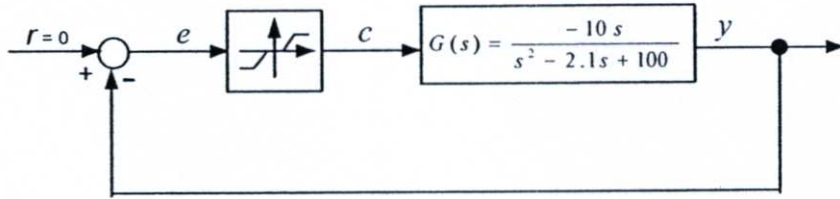


รูปที่ 2.21 การเกิดลิมิตไซเคิลสำหรับเดสไครบิงฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กัความถี่

เพื่อหลีกเลี่ยงความยุ่งยากในการหาความถี่ที่เหมาะสมตรงจุดตัด พิจารณาคำตอบของสมการ 2.21 ซึ่งสามารถเขียนกราฟ $G(j\omega)D(A, \omega)$ โดยคงค่าแอมพลิจูด A ในกราฟแต่ละเส้นและแปรค่าความถี่จาก 0 ถึง ∞ ดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.21 ทางด้านขวามือ จากรูปจะเห็นได้ว่ากราฟวิ่งผ่านจุด $(-1, 0)$ บนระนาบเชิงซ้อน ซึ่งแสดงว่าเกิดลิมิตไซเคิลโดยพิจารณาค่าแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลได้ที่จุด $(-1, 0)$ ซึ่งเทคนิคการเขียนกราฟทางด้านขวามือของรูปที่ 2.21 สามารถทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลได้ดีกว่า เทคนิคการเขียนกราฟในด้านซ้ายมือของรูปที่ 2.21 แต่ต้องอาศัยการคำนวณหา $G(j\omega)$ หลายครั้งซึ่งสามารถทำได้ง่ายในคอมพิวเตอร์ ตัวอย่างที่จะแสดงดังต่อไปนี้เป็นการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลสำหรับระบบที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นอย่างรุนแรง (Hard Nonlinearity)

ตัวอย่างที่ 2.3

พิจารณาระบบในรูปที่ 2.22 ซึ่งเป็นระบบของเครื่องกำเนิดสัญญาณแบบอิเล็กทรอนิกส์ที่ใช้ในห้องทดลอง



รูปที่ 2.22 บล็อกไดอะแกรมของเครื่องกำเนิดสัญญาณ

จากบล็อกไดอะแกรมสามารถหาค่าเกินโดยกำหนด $\omega = 10$ เรเดียน/วินาที ได้ดังนี้

$$G(j10) = \frac{-100j}{-100 + 21j + 100} = -4.76$$

และสามารถนำ $G(j10)$ ไปเขียนกราฟดังแสดงไว้ในรูปที่ 2.23 โดยกราฟของ $G(j10)$ ตัดแกนจริงที่จุด $(-4.76, 0)$ ส่วนเคสโครบิงฟังก์ชันของส่วนอิมิตัว (Saturation Element) เป็นไปตามสมการที่ 2.11 ดังนี้

$$D(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\sin^{-1} \frac{1}{A} + \frac{1}{A} \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} \right]$$

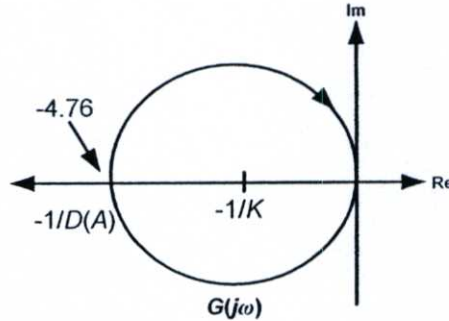
ซึ่งกราฟของ $-1/D(A)$ มีลักษณะเป็นเส้นตรงบนแกนจริงฝั่งลบ โดยมีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ $(-1/k, 0)$ เพราะ $D(A) < k, \forall A > 0$, ดังนั้นกราฟของ $-1/D(A)$ จะตัดกับกราฟของ $G(j\omega)$ ก็ต่อเมื่อ $1/k < 4.76$ นั่นคือ $k > 0.21$ ดังนั้นกำหนด $k = 0.25$ และหาแอมพลิจูดของลิมิตไซเคิลได้จากจุดตัดดังนี้

$$-\frac{1}{D(A)} = G(10j) = -4.76$$

จากกราฟในรูปที่ 2.11 จะได้ค่า $D(A)/k$ เท่ากับ 0.84 และได้ค่า A ประมาณ 1.36 เมื่อกำหนด $a = 1$ ดังนั้น การวิเคราะห์ห้ระบบด้วยเคสโครบิงฟังก์ชันได้ทำนายให้ระบบมีแอมพลิจูดเป็น 1.36 และมีความถี่เป็น 10 นั่นคือ $e(t) = 1.36 \sin(10t)$

อีกอย่างหนึ่งที่น่าสนใจคือการหาว่าระบบเกิดลิมิตไซเคิลได้อย่างไร สมมติว่าให้ระบบเริ่มทำงานที่สถานะเริ่มต้นน้อยๆ (Small Initial State) นั่นคือ สัญญาณอยู่ในระดับต่ำกว่าระดับอิ่มตัว (Saturation Level) คังนั้นจะได้สมการวงปิดของระบบเป็น

$$\ddot{y} + (2.1 - 10k)\dot{y} + 100y = 0$$

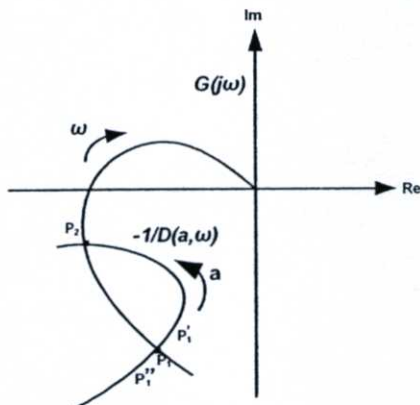


รูปที่ 2.23 กราฟเดสไครบิงฟังก์ชัน

ถ้า $k > 0.21$ จะทำให้ระบบเป็นแบบการหน่วงเชิงลบ (Negative Damping) นั่นคือ การทำงานในช่วงสัญญาณขนาดเล็กจะไม่เสถียรและส่งผลให้สัญญาณที่เกิดขึ้นลู่ออก (Diverge) อย่างไรก็ตามสัญญาณไม่สามารถลู่ออกได้ตลอดไปเนื่องมาจากการอิ่มตัวของระบบ สัญญาณ $c(t)$ สามารถอยู่ในระดับอิ่มตัวได้หรือไม่ คำตอบคือไม่เพราะว่าเอาท์พุทของส่วนที่เป็นเชิงเส้นจะค่อยๆ ลดลงจนมีเป็นศูนย์ จะเห็นได้จากทฤษฎีค่าสุดท้าย (Final - Value Theorem) หรือจากการสังเกตค่าของตัวดิฟเฟอเรนเชียล (Differentiator) “s” จากจำนวนที่เป็นเศษในตัวเลขเศษส่วน (Numerator) ของ $G(s)$ ดังนั้นสัญญาณของระบบจะไม่เป็นสัญญาณที่มีค่าน้อย (Small Value) เนื่องจากค่า $c(t)$ ลดลงเข้าสู่ศูนย์ ด้วยเหตุนี้ระบบจึงเกิดการสั่นและเกิดลิมิตไซเคิล การวิเคราะห์ระบบด้วยเดสไครบิงฟังก์ชัน (Describing Function Analysis) จึงเป็นสิ่งที่สามารถยืนยันการเกิดวัฏจักรลิมิตไซเคิล (Limit Cycle) ได้

2.5.3 เสถียรภาพของลิมิตไซเคิล

พิจารณากราฟผลตอบสนองเชิงความถี่ และส่วนกลับของเดสไครบิงฟังก์ชัน $(-1/D(A, \omega))$ ในรูปที่ 2.24 จากกราฟจะพบจุดตัดสองจุดดังนั้นสามารถทำนายได้ว่าเกิดลิมิตไซเคิล 2 จุด และค่า A จากจุด P_1 มีค่าน้อยกว่า ค่า A จากจุด P_2 เพื่อให้ง่ายต่อการพิจารณาสมมติให้ฟังก์ชันถ่ายโอนเชิงเส้น $G(j\omega)$ ไม่มีโพลที่ไม่เสถียร



รูปที่ 2.24 เสถียรภาพของลิมิตไซเคิล

สมมติว่าระบบเริ่มทำงานที่จุด P_1 โดยลิมิตไซเคิลมีค่าแอมพลิจูดเป็น A_1 และมีค่าความถี่เป็น ω_1 เนื่องจากแอมพลิจูดของอินพุตที่เข้าสู่ส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear Element) จะค่อยๆ เพิ่มขึ้นทำให้จุดที่ระบบทำงาน ย้ายจากจุด P_1 ไปยังจุด P_1' ทำให้จุด P_1 ถูกล้อมรอบด้วยกราฟของ $G(j\omega)$ จากเกณฑ์ของไนควิสต์ (Nyquist Criterion) ทำให้สรุปได้ว่าระบบไม่เสถียรที่จุดนี้ ดังนั้นจุดที่ระบบทำงาน (Operating Point) จะยังคงเคลื่อนไปตามกราฟ $-1/D(A)$ จุดที่เกิดลิมิตไซเคิลต่อไปนั่นคือจุด P_2 นั่นเอง อีกนัยหนึ่งถ้าระบบถูกรบกวนแล้วทำให้แอมพลิจูด A ลดลงและทำให้จุดที่ระบบทำงานย้ายไปยังจุด P_1 ดังนั้น A ก็จะมีค่าลดลงเรื่อยๆ และจุดที่ระบบทำงานก็จะย้ายออกไปจากจุด P_1 ในทิศทาง A ลดลงด้วยเหตุนี้ P_1 จึงไม่ถูกล้อมรอบด้วยกราฟ $G(j\omega)$ ดังนั้นความไม่เสถียรภาพก็จะไม่เกิดขึ้นกับระบบ จากการวิเคราะห์ข้างต้นทำให้บ่งบอกได้ว่าการรบกวนระบบที่จุด P_1 สามารถทำลายการสั่น (Oscillation) ของระบบได้และส่งผลให้ลิมิตไซเคิล ณ จุดดังกล่าวไม่มีเสถียรภาพและจากการวิเคราะห์ด้วยหลักการเดียวกันทำให้บอกได้ว่าที่จุด P_2 เกิดลิมิตไซเคิลที่มีเสถียรภาพ

จากการสรุปข้างต้นและจากผลที่ได้ในหัวข้อย่อก่อนหน้านี้ทำให้ได้หลักเกณฑ์ในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลและสามารถวิเคราะห์เสถียรภาพของลิมิตไซเคิลได้

หลักเกณฑ์การวิเคราะห์ลิมิตไซเคิล

จุดตัดใดๆ ระหว่างกราฟ $G(j\omega)$ และกราฟ $-1/D(A)$ ที่ทำให้เกิดลิมิตไซเคิลถ้าจุดที่อยู่ใกล้จุดตัดและอยู่ทางด้าน $-A$ ที่เพิ่มขึ้น (Increasing- A Side) ของกราฟ $-1/D(A)$ และไม่ถูกล้อมรอบด้วยกราฟ $G(j\omega)$ จะทำให้จุดนั้นเกิดลิมิตไซเคิลที่มีเสถียรภาพนอกเหนือจากนี้ลิมิตไซเคิลที่เกิดขึ้นจะไม่มีเสถียรภาพ

2.5.4 ความน่าเชื่อถือของการวิเคราะห์ด้วยเดสไครบิงฟังก์ชัน

จากหลักฐานที่ได้จากประสบการณ์ หรือการทดลองมากกว่าสามทศวรรษและเหตุผลข้อเท็จจริงทางทฤษฎีชั้นล่าสุดบ่งบอกว่าวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชัน (Describing Function Method) สามารถแก้ปัญหาคอมพิวเตอร์เชิงปฏิบัติการ (Practical Control) ที่เกี่ยวกับลิมิตไซเคิลได้อย่างมีประสิทธิภาพ อย่างไรก็ตามอย่างไรก็ตามจากเทคนิคที่เป็นเพียงการประมาณค่าทำให้บางครั้งการวิเคราะห์ระบบไม่มีความแม่นยำ ซึ่งอาจเกิดจากสาเหตุสามประการดังนี้

1. ค่าแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลที่ถูกลำเลียงไว้ไม่มีความแม่นยำ
2. ลิมิตไซเคิลที่ถูกลำเลียงไว้ไม่ได้เกิดขึ้นจริง
3. ลิมิตไซเคิลที่ไม่ได้ถูกลำเลียง

จากข้อที่ 1 ซึ่งเป็นความไม่แม่นยำที่พบบ่อยที่สุด ขนาดแอมพลิจูดและความถี่ของลิมิตไซเคิลที่ได้จากการทำนายมักจะเบี่ยงเบนไปจากค่าจริงเสมอซึ่งค่าที่ได้จากการทำนายจะใกล้เคียงกับค่าจริงแค่ไหนนั้นขึ้นอยู่กับความสอดคล้องกันระหว่างระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับสมมติฐานของเดสไครบิงฟังก์ชัน ในการสังเกตค่าความแม่นยำของลิมิตไซเคิลที่ได้จากการทำนาย ต้องอาศัยการจำลองของระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อให้ได้มาซึ่งค่าลิมิตไซเคิลที่มีความแม่นยำถูกต้องมากที่สุด

ส่วนภาวะความไม่แม่นยำที่เกิดขึ้นในข้อ 2 และข้อ 3 แม้จะเกิดขึ้นไม่บ่อยนักแต่มีผลกระทบโดยตรงต่อระบบ โดยส่วนใหญ่แล้วสิ่งที่เกิดขึ้นจะถูกตรวจพบโดยการทดสอบผลตอบสนองเชิงความถี่ของส่วนที่เป็นเชิงเส้น (Linear Element) และทดสอบตำแหน่งที่เกี่ยวข้อง (Relative Position) ของกราฟ G และกราฟ $-1/D(A)$

การฝ่าฝืนของสมมติฐานการกรองสัญญาณ

การนำไปใช้ได้ (Validity) ของวิธีการเดสไครบิงฟังก์ชันจะอาศัยสมมติฐานการกรองสัญญาณซึ่งแสดงไว้ในสมการที่ 2.5 ซึ่งในบางระบบส่วนที่เป็นเชิงเส้น (Linear Element) ไม่สอดคล้องกับสมมติฐานทำให้เกิดข้อผิดพลาดในการวิเคราะห์ระบบด้วยเดสไครบิงฟังก์ชัน กล่าวคือ ตรงส่วนที่เป็นเชิงเส้นเกิดเรโซแนนซ์สูงสุด (Resonant Peak) ขึ้นภายในผลตอบสนองเชิงความถี่ของ $G(j\omega)$

เงื่อนไขทางด้านกราฟฟิค

ถ้าเส้นกราฟ $G(j\omega)$ สัมผัสหรือเกือบสัมผัสกับเส้นกราฟ $-1/D$ อาจทำให้ข้อสรุปจากการวิเคราะห์ด้วยเดสไครบิงฟังก์ชันกลายเป็นสิ่งที่ผิดเพราะผลจากการละเลยฮาร์โมนิกอันดับสูง หรือความไม่แน่นอนจากโมเดลของระบบอาจเป็นสาเหตุของการเปลี่ยนแปลงของสภาวะการตัดกันของเส้นกราฟ (Intersection Situation) โดยทั่วไปแล้วเมื่อการกรองของส่วนที่เป็นเชิงเส้นบกพร่อง อาจทำให้เกิดความไม่แน่นอนในข้อ 2 และข้อ 3 ดังที่กล่าวไว้แล้วข้างต้น กรณีศึกษาตัวอย่างเช่น

การศึกษาของนิโคล (Nichols) ในเรื่อง “Second – Order Servo with Backlash” ในขณะที่การวิเคราะห์ด้วยเคสไครบิงฟังก์ชันทำนายว่าเกิดลิมิตไซเคิล 2 จุด (ลิมิตไซเคิลที่มีเสถียรภาพ ณ ความถี่สูง และลิมิตไซเคิลที่ไม่มีเสถียรภาพ ณ ความถี่ต่ำ) และสามารถแสดงได้ว่าลิมิตไซเคิลที่ไม่เสถียร ณ ความถี่ต่ำ ไม่ได้เกิดขึ้น

ในทางกลับกัน ถ้ากราฟ $-1/D$ ตัดกับกราฟ G ในลักษณะเกือบจะตั้งฉากกันจะทำให้ผลที่ได้จากเคสไครบิงฟังก์ชันมีความถูกต้องแม่นยำ และมีประสิทธิภาพในการทำนาย

บทที่ 3

วงจรกรองความถี่แบบแอคทีฟ

3.1 บทนำ

วงจรกรองความถี่คือวงจรที่เลือกความถี่ซึ่งยอมให้สัญญาณความถี่ที่กำหนดผ่านได้และลดทอนสัญญาณนอกเหนือจากความถี่ที่กำหนด โดยวงจรกรองความถี่นี้สามารถแบ่งออกเป็น 2 แบบใหญ่ๆ คือ วงจรกรองความถี่แบบแบบพาสซีฟ (Passive Filter) และวงจรกรองความถี่แบบแอคทีฟ (Active Filter) โดยแบบพาสซีฟนั้นจะใช้อุปกรณ์อย่างเช่น ตัวต้านทาน (Resistor) ตัวเก็บประจุ (Capacitor) ตัวนำ (Inductor) ส่วนแบบแอคทีฟนั้นจะใช้อุปกรณ์เช่น ทรานซิสเตอร์ (Transistor) ออปแอมป์ (Op-Amp) ต่อร่วมกับตัวเก็บประจุ ตัวต้านทาน ซึ่งวงจรกรองความถี่แบบแอคทีฟนี้สามารถแบ่งออกเป็ยชนิดตามหน้าที่การทำงานได้อีก 4 ชนิด ได้แก่

- วงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน (Lowpass Filter, LPF)
- วงจรกรองความถี่สูงผ่าน (Highpass Filter, HPF)
- วงจรกรองความถี่แถบผ่าน (Bandpass Filter, BPF)
- วงจรกรองความถี่แถบตัด (Notch Filter หรือ Band Eliminate Filter, BEF)

3.2 ชนิดของวงจรกรองความถี่แบบแอคทีฟ

กำหนดให้ป้อนแรงดันอินพุต $v_s < 0$ ให้กับวงจรกรองความถี่ตามรูปที่ 3.1 จะได้แรงดันเอาต์พุต v_o และเฟส θ ซึ่งขึ้นกับความถี่อินพุต ω ทำการแปลงลาปลาซแรงดันอินพุตและเอาต์พุต และอัตราส่วนระหว่างแรงดันเอาต์พุตต่ออินพุต ก็คือ ฟังก์ชันถ่ายโอนแรงดัน $H(s)$ (Voltage Transfer Function)

$$H(s) = \frac{v_o(s)}{v_s(s)}$$

รูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

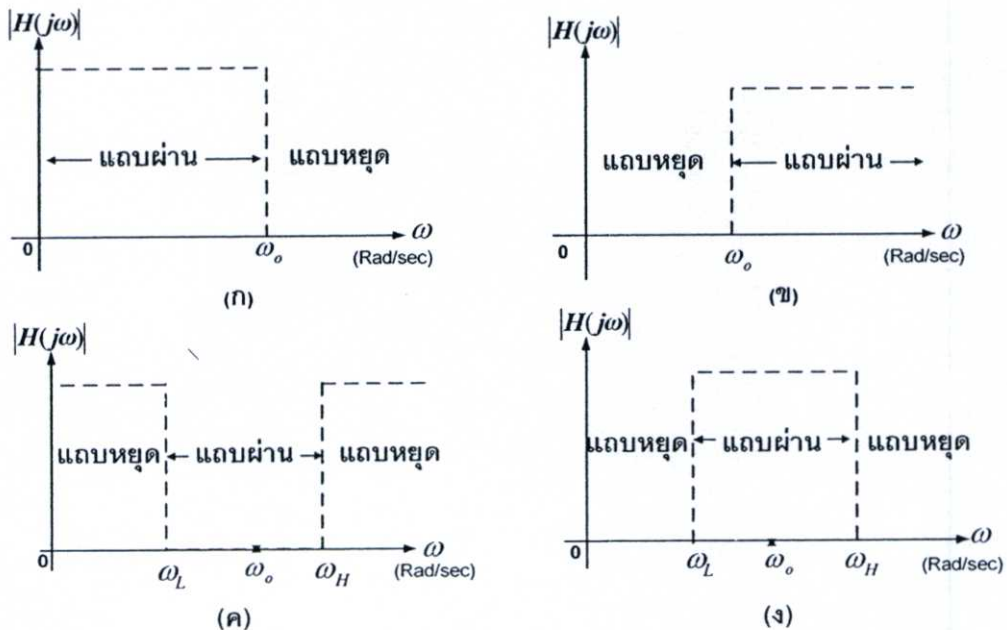
$$H(s) = \frac{a_m s^m + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^n + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} \quad n \geq m \quad (3.1)$$



รูปที่ 3.1 วงจรกรองความถี่

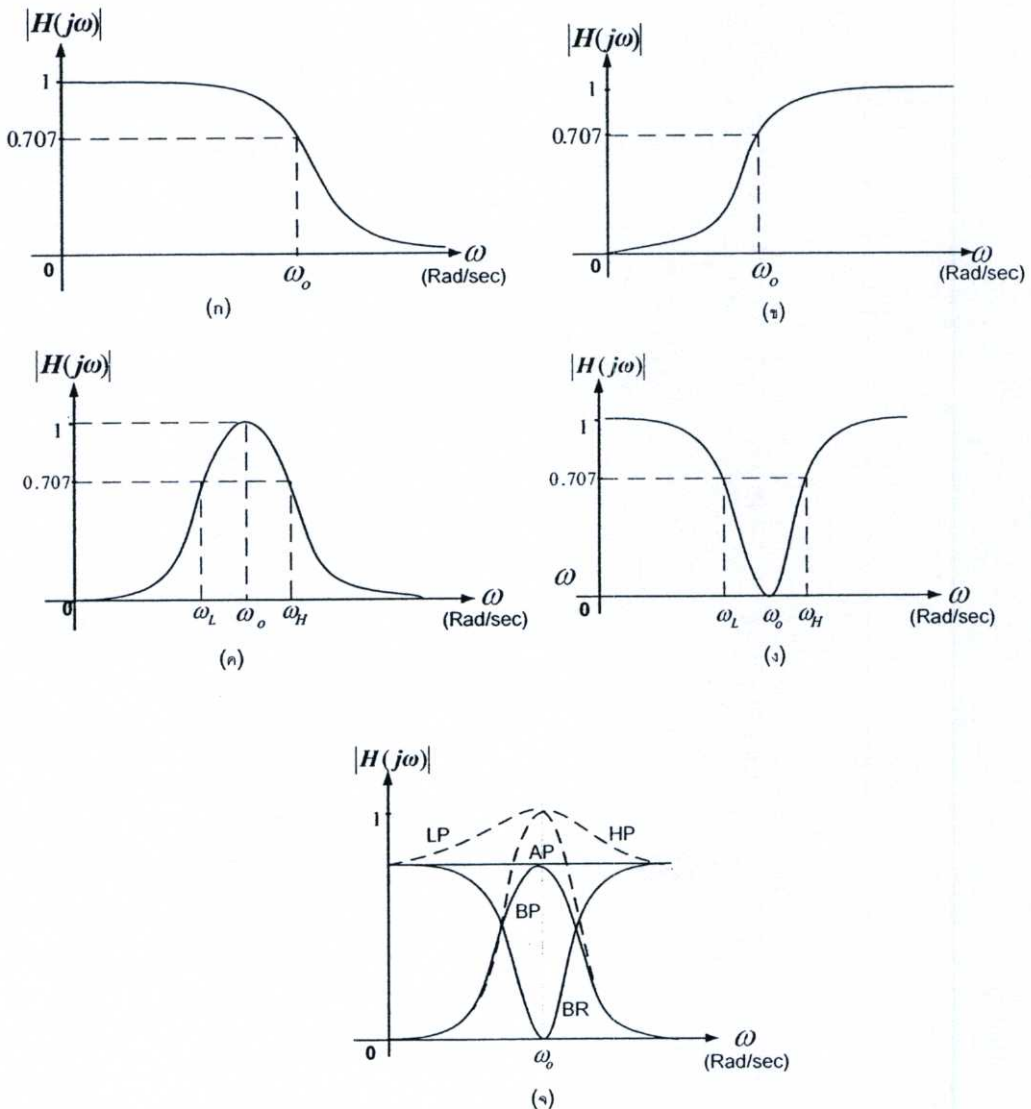
สัมประสิทธิ์ทั้งหมดคำนวณได้จากข้อกำหนดของวงจกรองความถี่ตามต้องการ แทน $s = j\omega$ จะได้ $H(j\omega)$ ซึ่งมีขนาดลดลงและเฟสเลื่อนไป โดยที่ค่าดังกล่าวขึ้นกับข้อกำหนดตามความต้องการ

รูปที่ 3.2 แสดงให้เห็นผลตอบสนองความถี่อุดมคติของวงจกรองความถี่ทั้งหมด โดยวงจกรองความถี่ต่ำผ่านในรูปที่ 3.2 (ก) ย่อมให้ความถี่ตั้งแต่ซีจนถึงความถี่ตามต้องการผ่านได้ f_c และลดทอนความถี่ที่มีค่าสูงกว่า f_c ซึ่งเรียกว่าความถี่คัทออฟ (Cutoff Frequency) ช่วงความถี่ต่ำจาก 0 ถึง f_c เรียกว่า แถบผ่าน (Pass Band) หรือ แบนด์วิดท์ (Band Width, BW) และช่วงความถี่สูงกว่า f_c เรียกว่า แถบหยุด (Stop Band) กรณียของวงจกรองความถี่สูงในรูปที่ 3.2 (ข) จะตรงข้ามกับวงจกรองความถี่ต่ำผ่าน นั่นคือช่วงความถี่จาก 0 ถึง f_c เรียกว่า แถบหยุด และช่วงความถี่จาก f_c ถึง ∞ เรียกว่า แถบผ่าน และกรณียของวงจกรองความถี่แถบผ่านในรูปที่ 3.2 (ค) ย่อมให้ความถี่จาก f_L ถึง f_H ผ่านได้ แต่ไม่ยอมให้ ความถี่ต่ำกว่า f_L และสูงกว่า f_H ผ่าน ซึ่งตรงข้ามกับวงจกรองความถี่แถบตัดในรูปที่ 3.2(ง) นั่นคือจะลดทอนความถี่ช่วง f_L ถึง f_H แต่ยอมให้ความถี่ต่ำกว่า f_L และสูงกว่า f_H ผ่านได้



รูปที่ 3.2 ผลตอบสนองความถี่อุดมคติของวงจกรองความถี่ (ก) ความถี่ต่ำผ่าน (ข) ความถี่สูงผ่าน (ค) ความถี่แถบผ่าน (ง) ความถี่แถบตัด

ในรูปที่ 3.3 (ก) (ข) (ค) และ (ง) แสดงให้เห็นถึงผลตอบสนองความถี่จริงๆของวงจรกรองความถี่ทั้งหมด ส่วนผลรวมของผลตอบสนองความถี่ดังรูปที่ 3.3 (จ) ความถี่คัทออฟคือความถี่ที่ทำให้อัตราขยายสูงสุดถึง 70.7% รูปแบบของการเปลี่ยนจากแถบผ่านไปยังแถบหยุดหรือแถบหยุดไปยังแถบผ่านซึ่งก็คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของผลตอบสนองความถี่ที่เรียกว่า อัตราการลดลงอย่างราบรื่น (Roll-Off rate หรือ Fall-Off rate) ถ้าทำการเขียนกราฟผลตอบสนองเชิงความถี่บนสเกลลอการิทึม วิธีการเขียนกราฟดังกล่าวเรียกว่า การพล็อตโบด (Bode plot) และวัดความชันของเส้นกำกับ (Asymptotic slope) หรืออัตราการลดลงหรือเพิ่มขึ้นเท่ากับ ± 20 dB/decade (-20 dB/decade หมายถึงอัตราขยายลดลง 20 dB เมื่อความถี่เพิ่มขึ้น 10 เท่า ในทำนองเดียวกันกรณี $+20$ dB หมายถึงอัตราขยายเพิ่มขึ้น 20 dB เมื่อความถี่เพิ่มขึ้น 10 เท่า)



รูปที่ 3.3 ผลตอบสนองเชิงความถี่จริงๆ ของวงจรกรองความถี่

- (ก) ความถี่ต่ำผ่าน (ข) ความถี่สูงผ่าน (ค) ความถี่แถบผ่าน
 (ง) ความถี่แถบตัด (จ) รวมผลตอบสนองความถี่ทั้งหมด

3.3 วงจรกรองความถี่แถบผ่าน (Band pass Filter)

วงจรกรองความถี่แถบผ่านมีแถบผ่านระหว่างความถี่คัทออฟ 2 ความถี่ คือ f_L และ f_H โดยที่ $f_H > f_L$ ความถี่ที่ต่ำกว่า f_L และสูงกว่า f_H จะถูกลดทอน เขียนฟังก์ชันถ่ายโอนทั่วไป ของวงจรกรองความถี่แถบผ่าน ได้ดังนี้

$$H(s) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{K_{PB}(\omega_c / Q)s}{s^2 + (\omega_c / Q)s + \omega_c^2}$$

โดยที่

K_{PB} คืออัตราขยายแถบผ่าน (pass band gain)

ω_c คือความถี่กึ่งกลาง(center frequency) มีหน่วยเป็น rad/s

Q คือตัวแปรคุณภาพ

วงจรกรองความถี่แถบผ่านนั้นมี 2 ชนิดคือ วงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง (Wide Band Pass) และวงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ (Narrow Band Pass) การจำแนกชนิดของวงจรกรองความถี่อาศัยหลักเกณฑ์ของค่า Q ถ้า $Q \leq 10$ จะเป็นวงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง แต่ถ้า $Q \geq 10$ จะเป็นวงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ จะเห็นว่าถ้าค่า Q มีค่าสูงขึ้น จะทำให้แบนด์วิดท์ของวงจรกรองความถี่มีค่าแคบลง นั่นคือค่า Q เป็นตัววัดความสามารถในการเลือกความถี่ของวงจรกรองความถี่ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์ของค่า คอ แบนด์วิดท์ 3 dB และค่าความถี่กึ่งกลาง f_c ดังนี้

$$Q = \frac{\omega_c}{BW} = \frac{f_c}{f_H - f_L}$$

กรณีวงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง

$$f_c = \sqrt{f_H f_L}$$

โดยที่

f_L คือค่าความถี่คัทออฟด้านต่ำ (Low Cutoff Frequency) มีหน่วยเป็น Hz

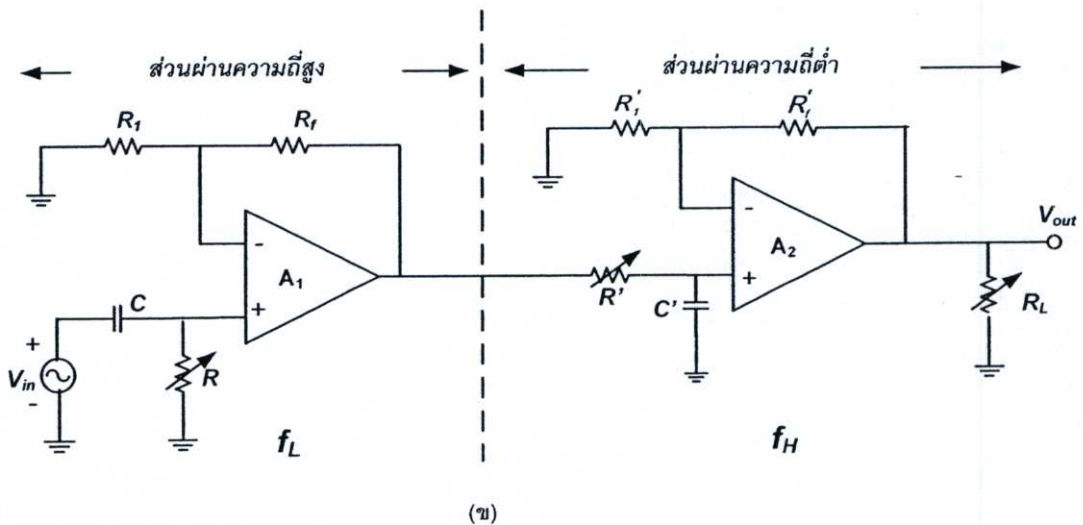
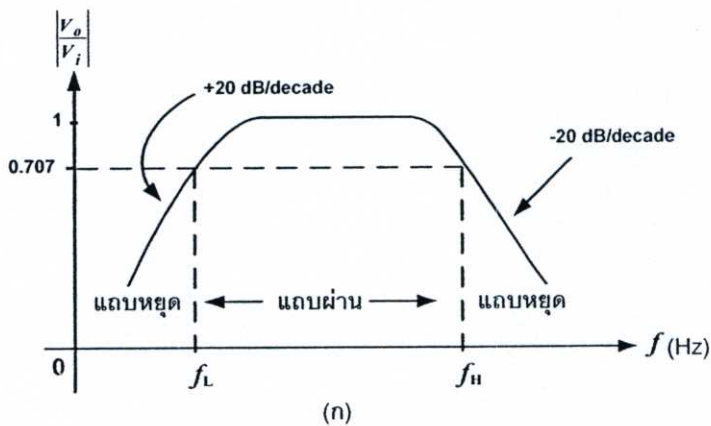
f_H คือความถี่คัทออฟด้านบน (High Cutoff Frequency) มีหน่วยเป็น Hz

ส่วนกรณีวงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ จะได้เอาท์พุทสูงสุดที่ความถี่กึ่งกลาง

3.3.1 วงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง (Wide Band pass Filter)

รูปที่ 3.4 (ก) แสดงให้เห็นผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้าง เท่ากับ ± 20 dB เมื่อ $f_H > f_L$ ซึ่งอาจทำให้อัตราขยายแถบกลางไม่ราบเรียบ ตลอดความกว้างของแบนด์วิดท์ โดยวงจรกรองความถี่ผ่านแถบกว้างนั้นจะใช้วงจรกรองความถี่ 2 ชุด คือวงจรกรอง

ความถี่ต่ำผ่านและวงจรรองความถี่สูงผ่านซึ่งมีการนำวงจรทั้งสองมาต่อกันแบบคาสเคดกันตามรูปที่ 3.4 (ข) โดยอันดับของวงจรรองความถี่แถบผ่านนั้น จะขึ้นกับอันดับของวงจรรองความถี่ต่ำผ่านและวงจรรองความถี่สูงผ่าน เช่นถ้า ใช้วงจรรองความถี่ต่ำผ่านอันดับที่หนึ่ง และวงจรรองความถี่สูงผ่านอันดับที่สอง จะได้วงจรรองความถี่แถบผ่านอันดับที่สาม เป็นต้น ข้อดีของวงจรรองความถี่แถบผ่านจากการนำวงจรรองความถี่แถบสูงผ่านและนำวงจรรองความถี่แถบต่ำผ่านมาต่อกันแบบคาสเคดกันนั้น คือสามารถเลือกค่าอัตราการลดลงและเพิ่มขึ้นและอัตราขยายแถบกลาง ได้อย่างอิสระ โดยไม่ขึ้นต่อกัน แต่จะต้องใช้อุปกรณ์ ตัวเก็บประจุ ตัวต้านทานมากขึ้น

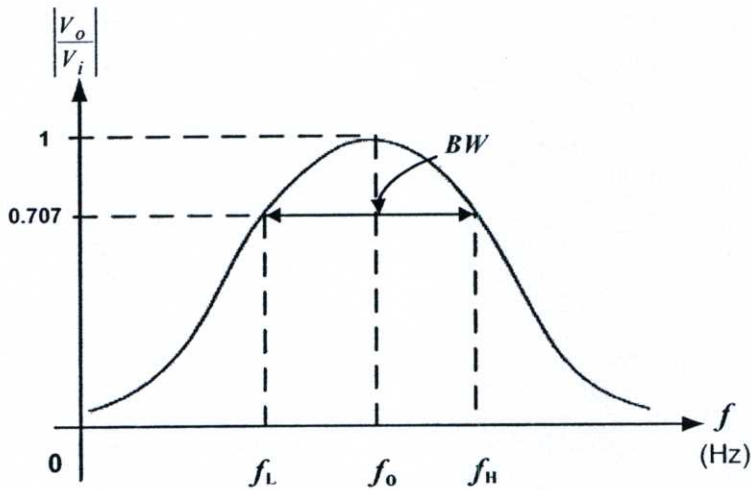


รูปที่ 3.4 (ก) ผลตอบสนองความถี่ของวงจรรองความถี่ผ่านแถบกว้าง

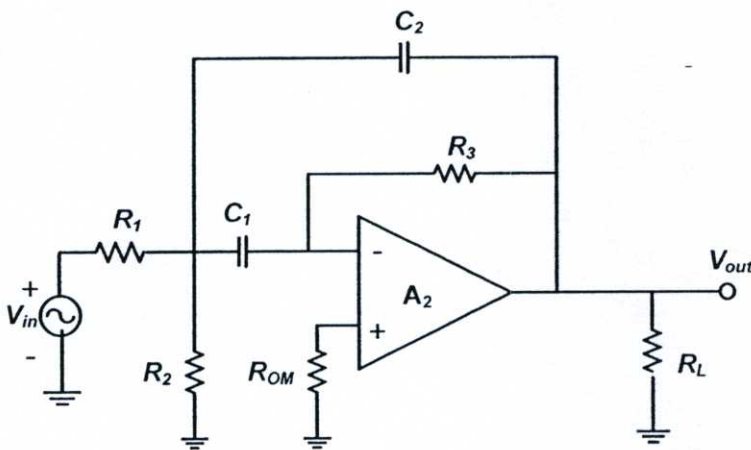
(ข) ส่วนประกอบของวงจรรองความถี่ผ่านแถบกว้าง

3.3.2 วงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ (Narrow Band pass Filter)

รูปที่ 3.5 (ก) แสดงให้เห็นผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบซึ่งผลตอบสนองความถี่ดังกล่าวได้จากการกำหนดให้ Q ของวงจรกรองความถี่มีค่าสูง ดังรูปที่ 3.5 (ข) ประกอบด้วยออปแอมป์เพียงตัวเดียวทำงานในรูปวงจรมัลติฟีดแบ็กสัญญาณ แต่เนื่องจากการป้อนกลับสัญญาณ 2 ส่วนจึงเรียกว่าวงจรป้อนกลับแบบหลายส่วน (Multiple Feedback Filter) ซึ่งโดยทั่วไปของการออกแบบวงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบนั้นจะต้องกำหนดค่าของ R_1 และ R_2 และ R_3 และ C_1 และ C_2



(ก)



(ข)

รูปที่ 3.5 (ก) ผลตอบสนองความถี่ของวงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ

(ข) วงจรกรองความถี่ผ่านแถบแคบ

บทที่ 4

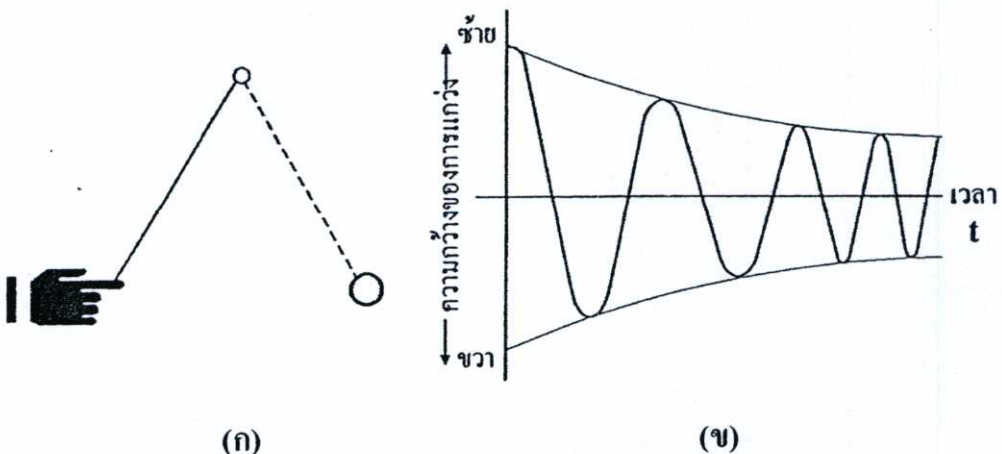
หลักการเบื้องต้นของการออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณ

4.1 บทนำ

วงจรออสซิลเลเตอร์ หรือวงจรกำเนิดสัญญาณ คือวงจรไฟฟ้าที่ทำหน้าที่ผลิตสัญญาณไฟฟ้าที่มีการเปลี่ยนแปลงตามเวลา ซึ่งลักษณะของสัญญาณไฟฟ้าที่สร้างขึ้นมานี้เรียกว่า “รูปคลื่น” โดยวงจรออสซิลเลเตอร์แบ่งออกได้เป็นวงจรออสซิลเลเตอร์คลื่นรูปไซน์ และวงจรออสซิลเลเตอร์ที่ไม่ใช่คลื่นรูปไซน์ เช่น รูปสี่เหลี่ยม รูปสามเหลี่ยม รูปฟันเลื่อย เป็นต้น ในวิทยานิพนธ์นี้จะเน้นเฉพาะวงจรออสซิลเลเตอร์คลื่นรูปไซน์ ซึ่งจะให้กำเนิดสัญญาณคลื่นรูปไซน์ออกมาที่จุดสัญญาณออก โดยมีความถี่ที่ ทั้งนี้เพราะสัญญาณคลื่นรูปไซน์นั้นเป็นสัญญาณที่เป็นรูปแบบตามธรรมชาติ และได้มีการนำไปใช้อย่างกว้างขวาง ซึ่งมีบทบาทในวงจรระบบอนาล็อก เช่น สัญญาณเสียง เป็นต้น นอกจากนี้ยังเป็นวงจรที่ใช้งาน และพบบ่อยมากในวงจรหนึ่ง นอกจากวงจรขยายสัญญาณ ทั้งทางด้านโทรคมนาคม อิเล็กทรอนิกส์ ในอุปกรณ์ไฟฟ้า และเครื่องมือวัดชนิดต่างๆ เช่น วิทยุ โทรทัศน์ คอมพิวเตอร์ ฯลฯ

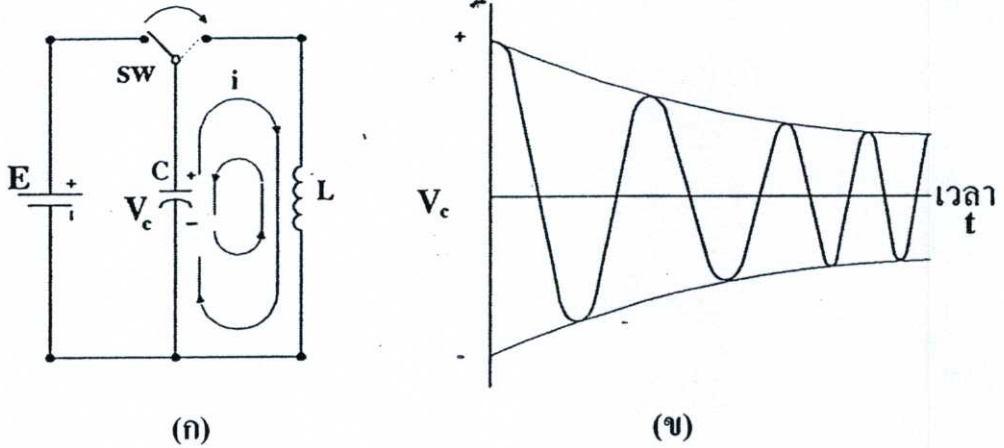
4.2 หลักการเบื้องต้นของการออสซิลเลตหรือการกำเนิดสัญญาณ

ตามรูป 4.1(ก) เมื่อลูกตุ้มนาฬิกาถูกปล่อยจากมือจะเกิดการแกว่งหรือการออสซิลเลตด้วยคาบที่คงที่ ดังรูปที่ 4.2 (ข) แต่ต่อมาขนาดหรือระยะทางของการแกว่งจะลดลงเรื่อยๆจนกระทั่งหยุดลง เนื่องจากผลของการต้านอากาศและความฝืดของจุดที่ยึดลูกตุ้มไว้ ด้วยลักษณะแนวคิดนี้สามารถนำมาใช้กับวงจรไฟฟ้าดังรูปที่ 4.2 ได้เหมือนกัน



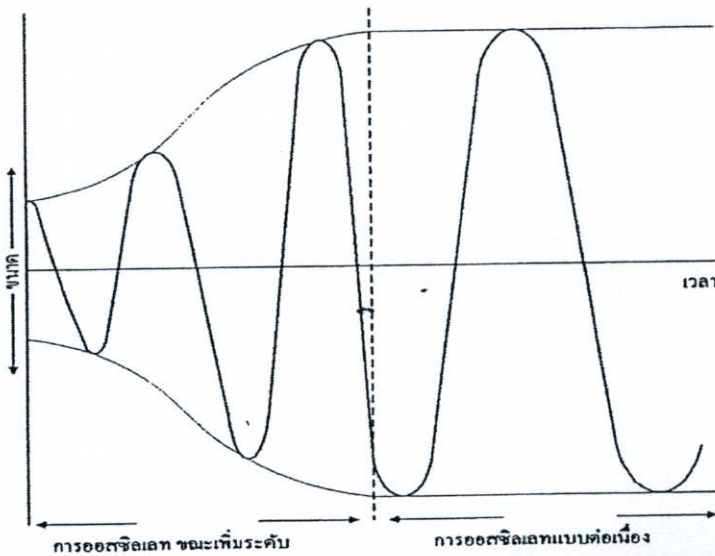
รูปที่ 4.1 แสดงการกำเนิดสัญญาณทางกล (ก) ความกว้างของการแกว่ง

(ข) การกำเนิดสัญญาณแบบแอมป์



รูปที่ 4.2 แสดงการกำเนิดสัญญาณทางค่านวจรไฟฟ้า

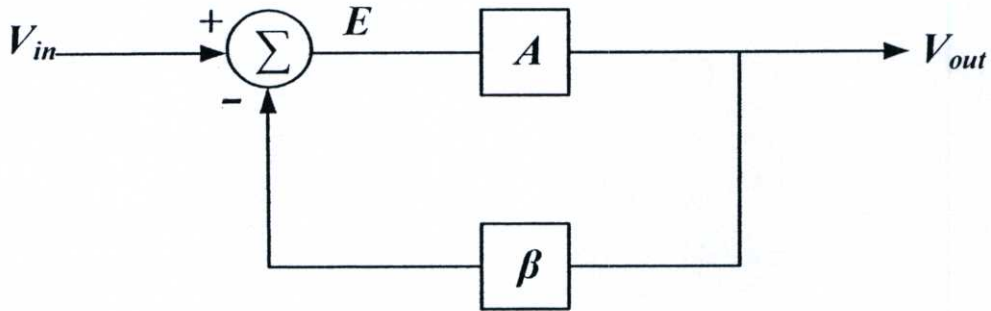
จากรูปที่ 4.2(ก) ถ้าสวิตช์ถูกเลื่อนออกมาทางด้านขวา หลังจากที่ทำกรประจุตัวเก็บประจุ C เต็มแล้ว กระแส i จะเริ่มไหลออกจากตัวเก็บประจุ ผ่านไปยังขดลวด L แต่เนื่องจากขดลวดมีคุณสมบัติของการเฉื่อยหรือไม่สามารถที่จะเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดได้ ดังนั้น เมื่อกระแสที่ไหลจากตัวเก็บประจุ C ไปยังขดลวด L หหมดแล้ว (คายประจุจนเป็นศูนย์) ก็จะเกิดกระแสไหลย้อนกลับทางทิศทางแรกเข้าไปทำการประจุอีกครั้ง กลับไปกลับมาเช่นนี้ สถานะการไหลของการออกซิเลทจะเป็นดังที่ได้กล่าวมาแล้ว และเนื่องจากผลของความต้านทาน R ภายในวงจร ทำให้เกิดสูญเสียกำลังงานไปเป็น i^2R นั้นหมายความว่า การออกซิเลทจะถูกลดทอนลง ค่าศักดาที่ตกคร่อมตัวเก็บประจุ C จะสามารถเขียนได้เป็นกราฟดังรูปที่ 4.2 (ข) ซึ่งอาจเหมือนกับการกำเนิดสัญญาณทางกล



รูปที่ 4.3 แสดงการกำเนิดสัญญาณในช่วงเริ่มแรกและแบบต่อเนื่อง

การออสซิลเลทในลักษณะนี้เรียกว่าการออสซิลเลทแบบแอมป์(Damped Oscillation)เพื่อที่จะช่วยให้การออสซิลเลทเป็นไปอย่างต่อเนื่อง จะต้องใส่กำลังเข้าไปในระบบมีค่าเท่ากับกำลังที่สูญเสียไปลักษณะของการออสซิลเลทในช่วงเริ่มแรกและการเพิ่มหรือใส่กำลังเข้าไปเพื่อให้ขนาดของสัญญาณมีค่าคงที่แสดงได้ดังรูปที่ 4.3

วงจรถ่ายทอดสัญญาณและคุณสมบัติ



รูปที่ 4.4 ระบบป้อนกลับแบบลบ

ในรูปที่ 4.4 ซึ่งเป็นการแสดงบล็อกไดอะแกรมของระบบโดยมีอินพุตคือ V_{in} ส่วน V_{out} คือเอาต์พุตของส่วนขยาย (Amplifier) ซึ่งหมายถึงบล็อก (A) และ (β) ถูกเรียกว่า ส่วนป้อนกลับซึ่งทำหน้าที่นำสัญญาณเอาต์พุตป้อนกลับเข้าสู่จุดรวม (Summing Junction) และ E คือผลต่างระหว่าง สัญญาณอินพุตและสัญญาณป้อนกลับ

เราสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนของบล็อกไดอะแกรมในรูปที่ 4.4 ได้ดังนี้

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{A}{1 + A\beta} \quad (4.1)$$

วงจรถ่ายทอดสัญญาณโดยทั่วไปไม่ต้องการสัญญาณอินพุตจากภายนอกเพราะสามารถนำส่วนของสัญญาณเอาต์พุตมาป้อนกลับแล้วเปลี่ยนเป็นสัญญาณอินพุตได้ โดยเงื่อนไขของการสั่น(Oscillation) เกิดจากระบบป้อนกลับไม่สามารถมี สภาวะคงตัวที่เสถียรได้เพราะฟังก์ชันถ่ายโอนหาค่าไม่ได้ ระบบจะเข้าสู่สภาวะไม่เสถียรเมื่อตัวส่วนของสมการที่มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ $1 + A\beta = 0$ หรือ $A\beta = -1$ ซึ่งหลักในการออกแบบเครื่องกำเนิดสัญญาณคือการทำให้ $A\beta = -1$ ซึ่งเรียกว่า “หลักเกณฑ์ของบาร์คฮูเซ่น (Barkhausen Criterion)” ในการออกแบบระบบให้เป็นไปตามหลักเกณฑ์ของบาร์คฮูเซ่นนั้น ระบบจะต้องมีขนาดเป็นหนึ่งหน่วยและมีมุมเฟสระหว่าง A และ β ซึ่งเป็นที่มาของเครื่องหมายลบ โดยสามารถเขียนระบบให้อยู่ในรูปเชิงซ้อนได้

เป็น $A\beta = 1 \angle \pm 180^\circ$ สำหรับระบบป้อนกลับแบบบวกสามารถเขียนได้เป็น $A\beta = 1 \angle 0^\circ$ ซึ่ง $A\beta$ ในสมการ 4.1 จะกลายเป็นเครื่องหมายลบ

จากกระบวนการเลื่อนเฟส 180° และขนาด $|A\beta| \rightarrow 1$ ทำให้สัญญาณเอาต์พุทของระบบ (ซึ่งกลายเป็นระบบที่ไม่เสถียร) ลู่อเข้าสู่ค่าอนันต์ แต่ในความเป็นจริงระบบจะลู่อเข้าสู่ค่าใดค่าหนึ่งเนื่องจากข้อจำกัดของไฟเลี้ยงที่ป้อนให้กับอุปกรณ์ของระบบและยังสามารถทำให้ค่าเกนของตัวขยาย A เปลี่ยนไป และส่งผลให้เทอมของ $A\beta$ เปลี่ยนไป จากค่าเอกลักษณ์ $|A\beta| \neq 1$ และทำให้สัญญาณที่ลู่อเข้าสู่ค่าอนันต์เกิดภาวะเลื่อนช้าและหยุดลงในที่สุด ในสถานะดังกล่าวอาจเกิดภาวะใดภาวะหนึ่งในสามภาวะนี้

1. ความไม่เป็นเชิงเส้นในภาวะอิ่มตัว (Saturation) หรือภาวะตัด (Cut-Off) เป็นสาเหตุให้ระบบมีเสถียรภาพและเป็นไปตามอย่างที่ต้องการตามระดับของไฟเลี้ยงที่ป้อนให้กับอุปกรณ์ในระบบ

2. สภาวะเริ่มต้นมีการเปลี่ยนแปลงซึ่งเป็นสาเหตุให้ระบบเกิดภาวะอิ่มตัว (ภาวะตัด) และคงตัวอยู่เป็นเวลานานก่อนจะกลายเป็นเชิงเส้นและสัญญาณจะมุ่งไปทางทิศตรงข้ามกับระดับไฟเลี้ยง (Power Rail)

3. ระบบอยู่ในสภาวะเชิงเส้นและเกิดการกลับสัญญาณเข้าสู่ในทิศทางตรงข้ามกับระดับไฟเลี้ยง

ในข้อที่สองทำให้เกิดการสั่นที่มีการลดสัญญาณสูง (สัญญาณที่เกิดขึ้นคล้ายสัญญาณสี่เหลี่ยม) ซึ่งสามารถเรียกเครื่องกำเนิดสัญญาณประเภทนี้ว่า เครื่องกำเนิดสัญญาณแบบรีแลกเซชัน (Relaxation Oscillator) ส่วนในข้อที่สามเป็นเครื่องกำเนิดสัญญาณรูปแบบไซน์

4.3 หน้าที่สำคัญของวงจรรอสซิลเลเตอร์หรือวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ

หน้าที่สำคัญของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบ่งได้ดังนี้

- 1) สร้างสัญญาณไฟฟ้าที่ใช้ในการควบคุมการทำงานของระบบไฟฟ้าอิเล็กทรอนิกส์เช่น ออสซิลโลสโคป ฯลฯ
- 2) ให้จังหวะและช่วงเวลาที่ถูกต้องแน่นอนแก่วงจรทางอิเล็กทรอนิกส์
- 3) ให้สัญญาณความถี่ในย่านต่างๆเพื่อใช้ในการทำงานของวงจรรวม

โดยมีเงื่อนไขที่วงจรถูกกำเนิดสัญญาณจะทำการสร้างสัญญาณออกมาได้ก็ต่อเมื่อ

- ก) ต้องมีแหล่งจ่ายไฟให้แก่วงจรกำเนิดสัญญาณ
- ข) ต้องมีวงจรถูกกำหนดความถี่ที่แน่นอนในการกำเนิดสัญญาณออกมา เช่น อาจจะเป็น 1Hz ถึง 1MHz
- ค) ต้องมีอัตราขยายแรงดันที่มากพอที่จะทำให้สัญญาณเอาต์พุทออกมาตามที่กำหนดได้

- ง) วงจรนั้นต้องมีส่วนขยายของวงจรป้อนกลับ หรือวงจรป้อนกลับจากทางเอาต์พุตกลับมาเข้าที่

4.4 ลักษณะของวงจรกำเนิดสัญญาณที่ดี

วงจรกำเนิดสัญญาณที่ดีต้องประกอบไปด้วยองค์ประกอบดังต่อไปนี้

4.4.1 มีความเพี้ยนของรูปสัญญาณคลื่นต่ำ (Low Distortion)

ลักษณะของความเพี้ยนมีได้หลายประการด้วยกันคือถ้าเป็นคลื่นรูปไซน์ จะเรียกว่าความเพี้ยนฮาร์โมนิกส์ (Harmonic Distortion) คือถ้าสัญญาณเพี้ยนจะไม่เหมือนรูปไซน์ มักจะบิดเบี้ยวหรือผิดรูปไป ตามความเพี้ยนว่ามีมากหรือน้อย สาเหตุอาจเกิดขึ้นได้จากลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของวงจรขยาย หรือถ้าหากค่าตัวเก็บประจุ ค่าความเหนี่ยวนำผิดพลาดหรือผิดค่า ก็ล้วนแต่มีผลทำให้สัญญาณผิดเพี้ยนไปได้ลักษณะความเพี้ยนของสัญญาณเมื่อเทียบกับคลื่นในทางอุดมคติ จะเห็นว่าในกรณีของสัญญาณรูปคลื่นสี่เหลี่ยม ความเพี้ยนของสัญญาณจะเกิดขึ้นบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงแรงดันไฟฟ้าซึ่งอาจทำให้เกิดความเพี้ยนในลักษณะที่ไม่ทำให้เรียบขึ้นหรือทำให้เกิดโอเวอร์ชูท (Over Shoot) อย่างใดอย่างหนึ่งหรืออาจทำให้ความห่างของลูกคลื่นไม่สม่ำเสมอ นั่นคือ เกิดความผิดเพี้ยนทางเวลาขึ้น

ส่วนในรูปคลื่นแบบฟันเลื่อย จะเกิดความเพี้ยนในลักษณะที่ไม่เป็นเส้นตรง และเวลาในการลดระดับสัญญาณลงมานั้นไม่ตั้งฉากแต่จะเกิดเวลาหน่วง (Delay Time) ของสัญญาณอยู่บ้าง

4.4.2 มีเสถียรภาพทางขนาดสัญญาณ (Amplitude Stability)

ขนาดหรือแอมพลิจูด ของสัญญาณจะต้องไม่ขึ้นๆลงๆกล่าวคือ ก่อนข้างจะคงที่ทำได้โดยออกแบบให้มีวงจรปรับอัตราขยาย (Gain) ให้คงที่ด้วยวิธีต่างๆ

4.4.3 มีเสถียรภาพทางความถี่ (Frequency Stability)

ในการใช้งานวงจรกำเนิดสัญญาณ ร่วมกับวงจรอื่นๆนั้นจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องให้ความสำคัญสัญญาณมีค่าคงที่แน่นอน แต่องค์ประกอบหลายประการที่ประกอบกันขึ้นเป็นวงจรรวมนั้นมีผลทำให้ความถี่คลาดเคลื่อนไปได้ ดังเช่น

- ขนาดของสัญญาณที่ได้จะเกิดการเปลี่ยนแปลง เนื่องจากอัตราขยายมากเกินไปหรือส่วนควบคุมผิดปกติ
- แรงดันของแหล่งจ่ายไฟเปลี่ยนแปลง เช่น ไฟตก เป็นต้น
- โหลดของวงจรเปลี่ยนแปลงไป
- ค่าอุปกรณ์ที่มีผลกระทบต่อการกำหนดค่าความถี่เปลี่ยนแปลง เช่น อุปกรณ์ R, C, L มีคุณภาพไม่มีค่าไม่ตรงกับที่กำหนดครห้สบนตัวอุปกรณ์

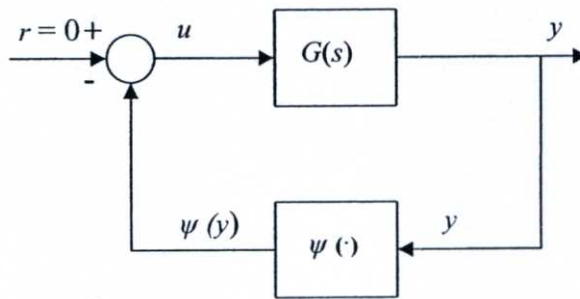
ดังนั้นในการออกแบบจึงต้องคำนึงถึงผลดังกล่าวซึ่งต้องพยายามเอาแหล่งจ่ายที่มีปรับระดับแรงดันทางเอาต์พุทหรือแรงดันเรกกูเลท (Regulated) มาใช้ซึ่งค่าสัญญาณเอาต์พุทไม่ขึ้นกับคุณสมบัติวงจรขยายมากนัก หรือเพิ่มเติมวงจรบัฟเฟอร์เข้าไประหว่างวงจรกำเนิดสัญญาณกับโหลด หรือใช้อุปกรณ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง และทนทานมีอายุการใช้งานได้นานในส่วนที่เกี่ยวข้องกับวงจรกำหนดความถี่เช่น ค่าไม่แปรเปลี่ยนตามอุณหภูมิ เป็นต้น หรือ เปลี่ยนมาใช้วงจรกำเนิดสัญญาณที่มีผลึกคริสตอล เป็นตัวกำหนดความถี่ ซึ่งจะให้ได้ความเที่ยงตรงสูงถึง 1 ใน 10 ล้าน ส่วน เป็นต้น

บทที่ 5

การออกแบบวงจรกำเนิดสัญญาณที่ไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไบแซน

5.1 บทนำ

การต่อแบบป้อนกลับในรูปที่ 5.1 ประกอบด้วยสองส่วนคือส่วนที่เป็นเชิงเส้นซึ่งใช้ตัวกรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง $G(s)$ ที่สามารถปรับค่าได้ และส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นซึ่งใช้โอทีเอ (OTA: Operational Transconductance Amplifier) เป็น $\psi(\cdot)$



รูปที่ 5.1 การต่อแบบป้อนกลับ (Feedback Connection)

5.2 กระบวนการและวิธีการ

ในการพัฒนารูปแบบพื้นฐานของวิธีเคสโครบิงฟังก์ชันนั้นต้องสอดคล้องกับสมมติฐานดังนี้

1. มีส่วนประกอบที่ไม่เป็นเชิงเส้นเพียงส่วนเดียวเท่านั้น
2. ความไม่เป็นเชิงเส้นต้องไม่ขึ้นกับเวลา
3. จากอินพุตรูปแบบไบแซนซึ่งได้แสดงไว้ในรูปที่ 2.3 คือ $e = A\sin(\omega t)$ พิจารณาเฉพาะส่วนประกอบที่มีความถี่เป็นความถี่เดียวกับความถี่ของสัญญาณ (Fundamental Component) $c_1(t)$ ของเอาต์พุต $c(t)$ เท่านั้น
4. ความไม่เป็นเชิงเส้นต้องเป็นฟังก์ชันคี่

5.2.1 ฟังก์ชันคาบ (Periodic Function)

กำหนดให้ V เป็นปริภูมิฮิลเบิร์ต (Hilbert Space) ของฟังก์ชันคาบ โดยมีคาบเป็น $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ และมีเซตเชิงตั้งฉากปกติแบบสมบูรณ์ (Complete Orthonormal Set) ในปริภูมิ V ดังนี้ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots \right\}$ โดยมีหลักผลคูณภายในเป็น

$$\langle f(t), g(t) \rangle := \frac{2}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t)g(t)dt. \quad \forall f, \forall g \in V$$

ประพจน์เกี่ยวกับการกระจายแบบฟูรีเยร์หรือการกระจายเชิงตั้งฉากปกติ

(Fourier Series or Orthonormal Expansion)

กำหนดให้ $\{x_k\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติแบบสมบูรณ์ในปริภูมิฮิลเบิร์ต ดังนั้นค่า x แต่ละตัวสามารถเขียนได้เป็น

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k \quad (5.1)$$

จากสมการที่(5.1) ค่า x เทียบได้กับเอาท์พุท $w(t)$ และเรียก $\langle x, x_k \rangle$ ว่าเป็นสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series coefficients) ของ x จาก $\sin(\omega_0 t)$ และ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ นั่นคือ $\sin(\omega_0 (t+T)) = \sin(\omega_0 t)$ ดังนั้น

$$\psi(a \sin(\omega_0(t+T))) = \psi(a \sin(\omega_0 t)) = w(t) \quad (5.2)$$

ดังนั้น $w(t) = \psi(a \sin(\omega_0 t))$ จะเป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบคือ T และจากเซตเชิงตั้งฉากปกติแบบสมบูรณ์ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots \right\}$ เราสามารถเขียนเอาท์พุท $w(t)$ ได้เป็น

$$\begin{aligned} w(t) &= \langle w(t), x_1 \rangle x_1 + \langle w(t), x_2 \rangle x_2 + \langle w(t), x_3 \rangle x_3 + \langle w(t), x_4 \rangle x_4 + \dots \\ &= \langle w(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle \cos(\omega_0 t) + \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle \sin(\omega_0 t) + \\ &\quad \langle w(t), \cos(2\omega_0 t) \rangle \cos(2\omega_0 t) + \langle w(t), \sin(2\omega_0 t) \rangle \sin(2\omega_0 t) + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

หรือ

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (5.4)$$

โดยที่ $a_0 = \langle w(t), 1 \rangle$, $a_n = \langle w(t), \cos(n\omega_0 t) \rangle$, $b_n = \langle w(t), \sin(n\omega_0 t) \rangle$

จาก $G(s)$ ซึ่งเป็นคุณลักษณะของตัวกรองความถี่แถบผ่านที่มีค่า Q สูง (Q : Quality Factor) นั้นหมายความว่ามีส่วนประกอบที่ความถี่เป็นความถี่เดียวกับความถี่ของสัญญาณ (Fundamental Component) $w_1(t)$ เท่านั้นที่จะถูกนำมาพิจารณา ดังนี้

$$w(t) \approx w_1(t) = \langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle \cos(\omega_0 t) + \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle \sin(\omega_0 t) \quad (5.5)$$

$$= M \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (5.6)$$

ซึ่ง

$$M(A, \omega_0) = \sqrt{\langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle^2 + \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle^2} \quad (5.7)$$

$$\phi(A, \omega_0) = \tan^{-1}(\langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle / \langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle) \quad (5.8)$$

และสามารถเขียนอยู่ในรูปฟังก์ชันเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$w_1(t) = M e^{j(\omega_0 t + \phi)} = (\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle + j \langle w(t), \cos(\omega_0 t) \rangle) e^{j(\omega_0 t)} \quad (5.9)$$

5.2.2 วิธีการเคสโครบิงฟังก์ชัน

เคสโครบิงฟังก์ชันของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ถูกนำเสนอในรูปแบบของอัตราส่วนเชิงซ้อนของส่วนประกอบที่มีความถี่เดียวกับความถี่ของสัญญาณ ระหว่างเอาต์พุตของส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นกับอินพุตในรูปแบบไซน์ นั่นคือ

$$D(A, \omega_0) = \frac{M e^{j(\omega_0 t + \phi)}}{A e^{j(\omega_0 t)}} = \frac{(b_1 + j a_1) e^{j(\omega_0 t)}}{A e^{j(\omega_0 t)}} = \frac{1}{A} (b_1 + j a_1) \quad (5.10)$$

เนื่องจาก $a_1 = \langle w(t), \cos(n\omega_0 t) \rangle$ และ $w(t)$ เป็นฟังก์ชันคี่จะได้

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \cos(\omega_0 t) d(\omega_0 t) = 0$$

ดังนั้น

$$D(A, \omega_0) = \frac{b_1}{A} = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin(\omega_0 t) d(\omega_0 t) \quad (5.11)$$

สำหรับกรณีความไม่เป็นเชิงเส้นแบบค่าเดียว (Single Valued Nonlinearities) ทำให้ค่าเคสโครบิงฟังก์ชัน D เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับค่าแอมพลิจูด A อย่างเดียว นั่นคือ $D(A, \omega_0) = D(A)$

$$D(A) = \frac{1}{A\pi} \int_{-\pi}^{\pi} w(t) \sin(\theta) d(\theta); \quad \theta = \omega_0 t$$

5.2.3 การนำเดสไครบิงฟังก์ชันไปใช้งาน

จากระบบที่ไม่เป็นเชิงเส้นในรูปที่ 5.1 ซึ่งมีคุณลักษณะของตัวกรองความถี่แถบผ่านเป็นดังนี้

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$$

โดยค่า ω_0 คือค่าความถี่เรโซแนนซ์ (Resonant Frequency) และค่า 2α เป็นช่วงความถี่ (Bandwidth) ที่มีหน่วยเป็น เรเดียน/วินาที (rad/sec) และถ้าการสั่นแบบกระตุ้นตัวเอง (Self Excited Oscillation) โดยมีความถี่ $\omega = \omega_0$ จะได้

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \quad ; s = j\omega$$

$$G(j\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2\alpha} = -Q \quad (5.12)$$

ดังนั้นเงื่อนไขของการสั่นหรือเงื่อนไขของการเกิดลิมิตไซเคิลเป็นดังนี้

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} = -\frac{1}{G(j\omega_0)} = D(A) \quad (5.13)$$

โดย Q เป็นตัวประกอบคุณภาพ (Quality Factor) ของตัวกรองความถี่แถบผ่าน ค่า $D(A)$ คือเดสไครบิงฟังก์ชันของฟังก์ชัน $\psi(\cdot)$ และขึ้นอยู่กับขนาดของการสั่นอย่างเดียวโดยแสดงได้ดังนี้

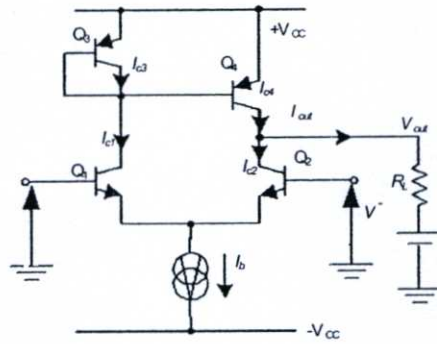
$$D(A) = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle}{A} = \frac{2}{A\pi} \int_0^\pi \psi(A \sin \theta) \sin \theta d(\theta) \quad (5.14)$$

สำหรับเดสไครบิงฟังก์ชันที่สามารถกำหนดค่า α และ ω_0 ได้นั้นจะเหลือเพียงตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเพียงตัวเดียวนั้นคือค่า A และด้วยประสิทธิภาพของโปรแกรมคอมพิวเตอร์สมัยใหม่เราจึงสามารถคำนวณหาค่าลิมิตไซเคิลตามเงื่อนไขที่กำหนดได้และยังสามารถนำข้อมูลจากสมการ 5.14 มาเขียนกราฟระหว่าง $D(A)$ และ A ได้อีกด้วย ดังนั้นสามารถเขียนเงื่อนไขของการเกิดลิมิตไซเคิลได้ดังนี้

$$0 < \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} < D_{\max} = D(0) \quad (5.15)$$

ซึ่งกราฟ $D(A)$ และ A จะนำเสนอในบทถัดไป พร้อมทั้งตัวอย่างการคำนวณและการออกแบบระบบ

5.2.4 ลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของอุปกรณ์ไอทีเอ



รูปที่ 5.2 วงจรสมมูลของอุปกรณ์ไอทีเอ

จากรูปที่ 5.2 แสดงวงจรสมมูลของไอทีเอโดยมีค่าความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตได้ดังนี้

$$i_{out} = I_b \frac{\exp\left(\frac{qv}{kT}\right) - 1}{\exp\left(\frac{qv}{kT}\right) + 1} = I_b \tanh\left(\frac{v}{2V_T}\right) \quad (5.16)$$

ซึ่ง $v = v^+ - v^-$ และ $V_T = \frac{kT}{q}$

โดย V_T คือ ค่าแรงดันที่ขึ้นอยู่กัอุณหภูมิ

k คือ ค่าคงที่โบลต์ซมันด์ (1.381×10^{-23} J/°K)

q คือ ค่าประจุไฟฟ้า (1.6×10^{-19} C)

บทที่ 6

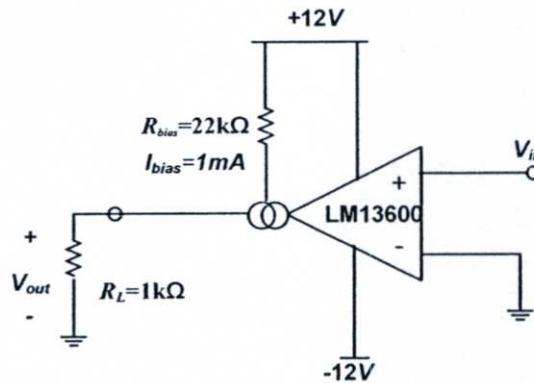
ตัวอย่างและผลการทดลอง

6.1 การออกแบบระบบ

พิจารณาการออกแบบระบบและคำนวณระบบดังต่อไปนี้

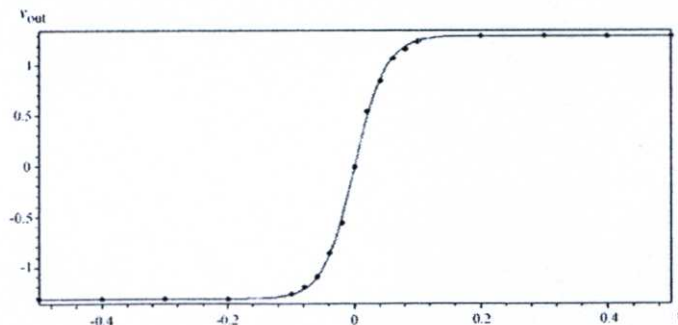
กำหนดค่าความถี่ของการสั่น $\omega_0 = 100$ เรเดียน/วินาที และปรับค่าแอมพลิจูดของการสั่นให้เป็น 100, 200 และ 300 มิลลิโวลต์ตามลำดับ

ขั้นแรกทำการทดสอบวงจร โอทีเอ โดยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้วงจรรวมสำเร็จรูปเบอร์ LM13600 เป็นส่วนที่ไม่เป็นเชิงเส้นของวงจรกำเนิดสัญญาณที่แสดงไว้ในรูปที่ 5.1 ซึ่งทำการทดสอบระหว่างอินพุตและเอาต์พุตโดยการป้อนสัญญาณอินพุตให้กับวงจร โอทีเอแล้ววัดสัญญาณเอาต์พุตที่ออกมาดังที่แสดงไว้ในรูปที่ 6.1



รูปที่ 6.1 วงจรทดสอบโอทีเอ

จากความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตสามารถนำมาเขียนกราฟ xy ดังรูปที่ 6.2 โดยแกนแนวราบแทน v_{in} กับแกนแนวตั้งแทน v_{out}



รูปที่ 6.2 การปรับข้อมูล (Data Fitting) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method)

$$\begin{bmatrix} t_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{in} \\ v_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 & -0.3 & -0.2 & -0.1 & -0.08 & -0.06 & -0.04 & -0.02 & 0 \\ -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.25 & -1.18 & -1.08 & -0.85 & -0.55 & 0 \\ 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.08 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.55 & 0.85 & 1.08 & 1.18 & 1.25 & 1.3 & 1.3 & 1.3 & 1.3 \end{bmatrix}$$

จากข้อมูลในเมทริกซ์ข้างบนสามารถทำการปรับค่าข้อมูล (Fitting Data) โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method)

$$\min_x \sum_{i=1}^m (y_i - f(t_i, x))^2 \quad (6.1)$$

โดยที่ x คือ ฟังก์ชันของการปรับค่าข้อมูล

t_i คือ สัญญาณอินพุต (v_{in})

y_i คือ สัญญาณเอาต์พุต (v_{out})

เมื่อ a เทียบได้กับค่ากระแสไบอัส (I_b) และ b เทียบได้กับค่าเกนที่ได้จากการปรับค่าข้อมูลแล้วของโอทีเอ

$$f(t, a, b) = a \tanh(bt); \quad a = 0.0013$$

$$f(t, b) = 1.3 \tanh(bt) \quad (6.2)$$

จากข้อมูลในเมทริกซ์ข้างต้นทำให้สามารถเขียนกระจายสมการที่ 6.1 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} S &= (y_1 - f(t_1, b))^2 + (y_2 - f(t_2, b))^2 + \dots + (y_{19} - f(t_{19}, b))^2 \\ &= (-1.3 - f(-0.5, b))^2 + (-1.3 - f(-0.4, b))^2 + \dots + (1.3 - f(0.5, b))^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

จากนั้นทำการหาค่าอนุพันธ์ (Differentiate) จากสมการที่ 6.3 โดยใช้โปรแกรม MAPLE เพื่อหาจุดต่ำสุด

$$\frac{dS(b)}{db} = 0 \quad \Rightarrow \quad b \approx 20.0215829$$

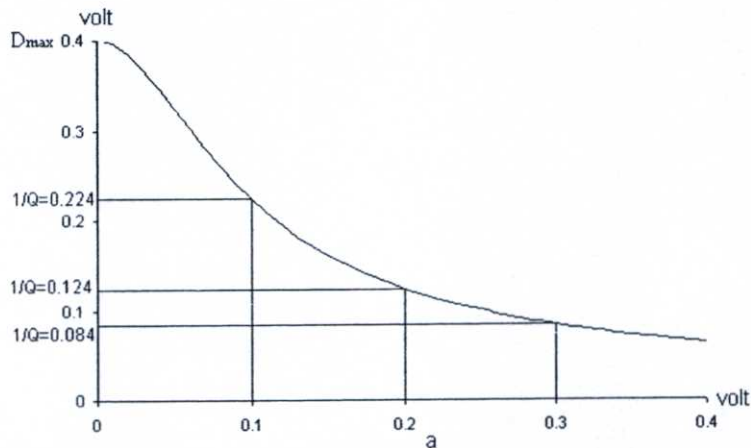
$$\frac{d^2S(b)}{d^2b} = 0.008308718086 > 0$$

หมายเหตุในการหาค่าอนุพันธ์อันดับสองข้างต้น เพื่อที่จะยืนยันว่า $b = 20.0215829$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

จากลักษณะความไม่เป็นเชิงเส้นของโอทีเอทางอุดมคติในสมการที่ 5.16 โดยมีกระแสไบอัสเป็น 1 มิลลิแอมป์ทำให้เอาท์พุททางอุดมคติจะเป็น $i_{out} = 0.001 \tanh(20v)$ และเพื่อที่จะให้ได้ค่าฟังก์ชันถ่ายโอนเป็น $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ สามารถทำได้ด้วยการต่อโอทีเอด้วยเกน 20 แต่ในทางปฏิบัติจากการปรับค่าข้อมูลให้เป็นกราฟของฟังก์ชันแทนไฮเพอร์โบลิกรวมทั้งการหาค่าอนุพันธ์ข้างต้นทำให้ได้สมการซึ่งแสดงคุณลักษณะของโอทีเอได้ดังนี้

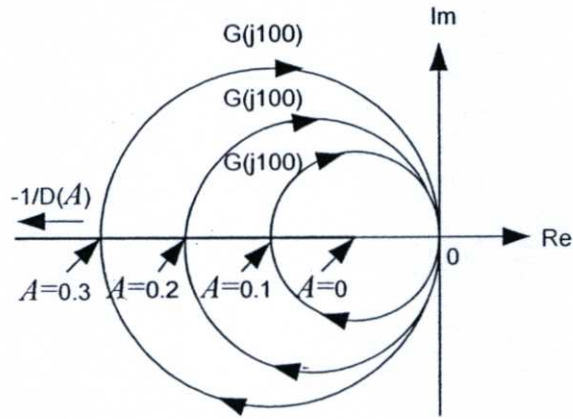
$$v_{out} = 0.0013 \tanh(20v) \quad (6.4)$$

ดังนั้นสามารถหาค่าฟังก์ชันถ่ายโอน $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$ ได้โดยการต่อโอทีเอด้วยเกน 15.385 จากสมการ 5.14 สามารถเขียนกราฟระหว่าง $D(A)$ และ A ได้ดังต่อไปนี้



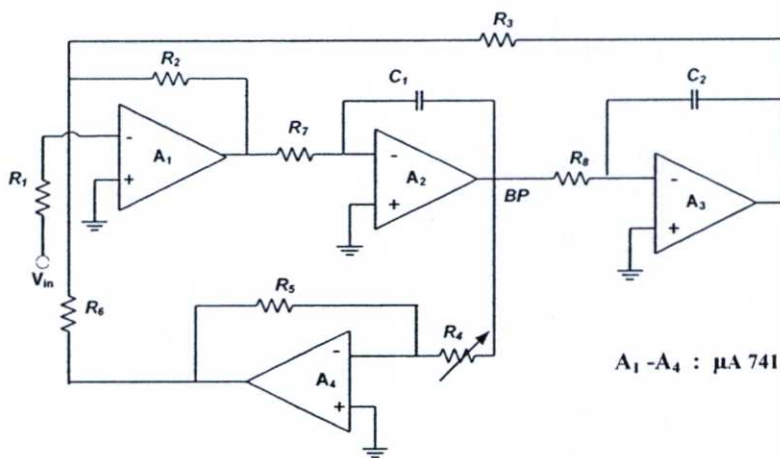
รูปที่ 6.3 เคสไครบิงฟังก์ชัน $D(A)$ ของฟังก์ชันถ่ายโอน $\psi(y) = \frac{1}{50} \tanh(20y)$

จากกราฟ $G(j\omega)$ และกราฟของ $-1/D(A)$ ในรูปที่ 6.4 แสดงให้เห็นว่าที่ความถี่ (ω) เท่ากับ 100 เรเดียน/วินาที กราฟ $G(j100)$ ตัดกับกราฟ $-1/D(A)$ ที่ค่าแอมพลิจูด (A) เท่ากับ 100, 200 และ 300 มิลลิโวลต์ ตามลำดับ ซึ่งทำให้ได้ค่า $-1/D(A) \approx -4.464, -8.064$ และ -11.90 ตามลำดับเช่นกัน ส่วนลิมิตไซเคิลที่เกิดขึ้นทั้งสามจุดเป็นลิมิตไซเคิลที่มีเสถียรภาพทั้งหมดเนื่องจากจุดที่อยู่ใกล้จุดตัดตามด้าน A ที่เพิ่มขึ้นของกราฟ $-1/D(A)$ ไม่ได้ถูกล้อมรอบด้วย $G(j\omega)$



รูปที่ 6.4 กราฟของ $G(j\omega)$ และ $-1/D(A)$

6.2 วงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับที่สอง



รูปที่ 6.5 วงจรกรองความถี่แถบผ่านอันดับที่สอง [13]

จากบล็อกไดอะแกรมรูปที่ 5.1 $G(s)$ คือตัวกรองความถี่แถบผ่านอันดับที่สอง ซึ่งในรูปที่ 6.5 ตัวกรองความถี่แถบผ่านอันดับสองมีสมการแสดงคุณลักษณะดังนี้

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2} \quad (6.5)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad (6.6)$$

$$Q = \frac{R_4}{R_5} \quad (6.7)$$

จากสมการ 6.6 ซึ่งกำหนดค่า $\omega_0 = 100$ เรเดียน/วินาที และกำหนดค่าอุปกรณ์ต่างๆเป็น $C_1 = C_2 = 4.7$ ไมโครฟารัด และ $R_1 = R_2 = R_3 = R_6 = 100$ กิโลโอห์ม ดังนั้นสามารถแทนค่าได้เป็น

$$100 = \frac{1}{4.7 \cdot 10^{-6} R}$$

โดยที่ $R = R_7 = R_8 = 212.765$ กิโลโอห์มและ $R_5 = 1$ กิโลโอห์ม

จากสมการที่ 5.13 สามารถคำนวณหาค่า Q โดย $A = 100, 200$ และ 300 มิลลิโวลต์ ตามลำดับ ซึ่งสามารถนำเสนอได้ดังตารางต่อไปนี้

A (mv)	$D(A) = 1/Q$	Q
0.1	0.224	4.464
0.2	0.124	8.064
0.3	0.084	11.90

ตารางที่ 6.1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $A, D(A)$ และ Q .

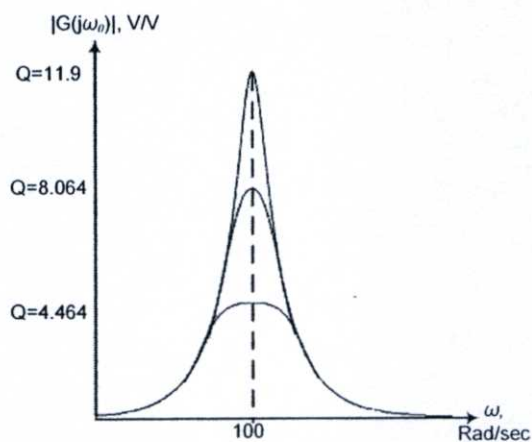
พิจารณาค่าพารามิเตอร์ R_4 ของวงจรกรองความถี่แถบผ่านในสมการที่ 6.7 โดยกำหนดค่า $R_5 = 1\text{k}\Omega$ และปรับค่า $Q = 4.464, 8.064, 11.90$ ตามลำดับ ซึ่งแสดงไว้ตามตารางที่ 6.2.

A (mv)	Q	$R_4 = R_5 * Q$ ($\text{k}\Omega$)
0.1	4.464	4.464
0.2	8.064	8.064
0.3	11.90	11.9

ตารางที่ 6.2 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง A, R_4 และ Q

วงจรกรองความถี่ผ่านอันดับที่สอง

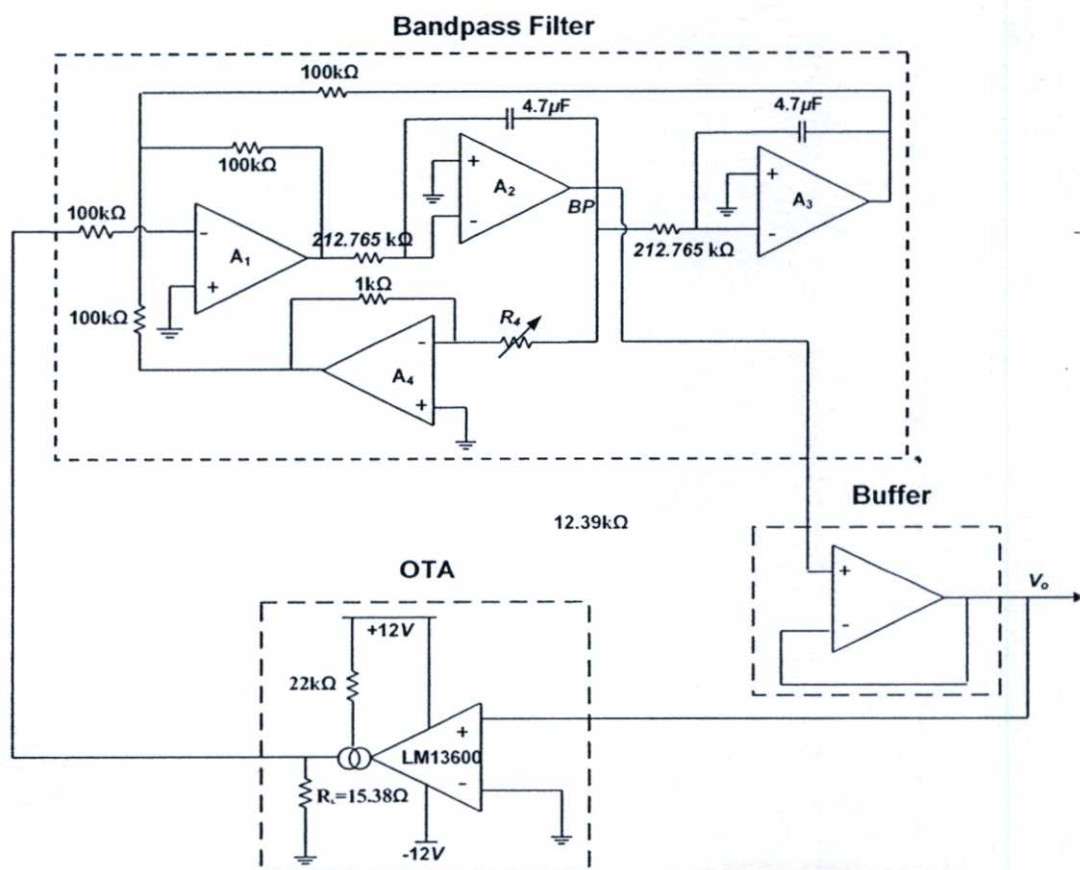
เมื่อป้อนสัญญาณรูปแบบไซน์ซึ่งเป็นสัญญาณกระแสสลับให้กับตัวกรองความถี่แถบผ่านในรูปที่ 6.5 โดยสัญญาณอินพุตมีค่าความถี่ 100 เรเดียน/วินาที และปรับแอมพลิจูดของสัญญาณเป็น $100, 200$ และ 300 มิลลิโวลต์ ตามลำดับ ผลตอบสนองเชิงความถี่ที่เกิดขึ้นได้ถูกแสดงไว้ในรูปที่ 6.6



รูปที่ 6.6 ตัวกรองความถี่ผ่านอันดับที่สองที่ค่า Q ต่างๆ

6.3 เครื่องกำเนิดสัญญาณที่ใช้ในการทดลอง

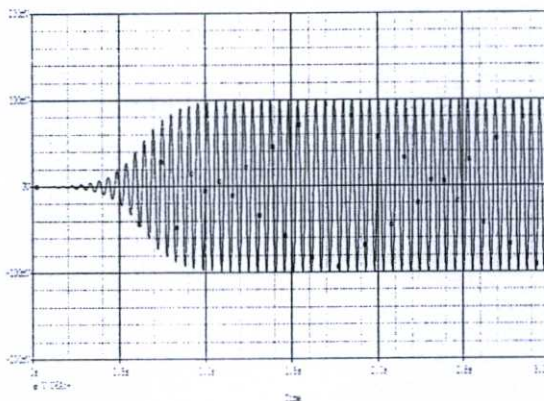
ระบบโดยรวมที่ใช้ในการทดลองคือการต่อแบบป้อนกลับระหว่างวงจรความถี่แถบผ่าน $G(s)$ ในรูปที่ 6.5 และวงจรโอทีเอในรูปที่ 5.2 โดยมีวงจรบัฟเฟอร์ (Buffer) ต่ออยู่ในส่วนป้อนไปข้างหน้า (Feed Forward Path) เพื่อป้องกันผลกระทบของการโหลด (Loading Effect) ซึ่งวงจรรวมทั้งหมดได้แสดงไว้ในรูปที่ 6.7



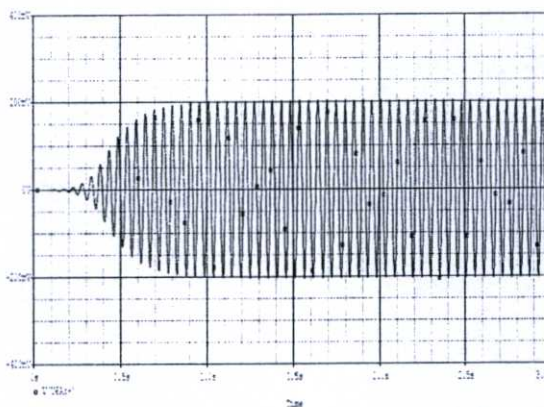
รูปที่ 6.7 วงจรเครื่องกำเนิดสัญญาณ

6.4 ผลลัพธ์ที่ได้จากการจำลองระบบ

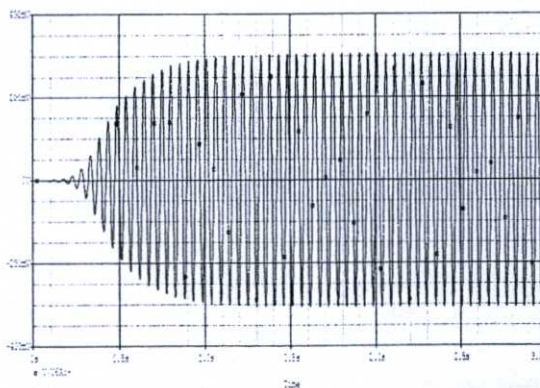
เครื่องกำเนิดสัญญาณไม่เป็นเชิงเส้นรูปแบบไซน์ได้ถูกจำลองโดยใช้โปรแกรม ORCAD CAPTURE 9.1 ซึ่งเป็นโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์วงจรอิเล็กทรอนิกส์และสามารถเขียนกราฟของสัญญาณเอาต์พุตได้โดยกำหนดความถี่ของสัญญาณเป็น 100 เรเดียน/วินาที



รูปที่ 6.8 สัญญาณเอาต์พุตรูปแบบไซน์ที่ $Q = 4.464$



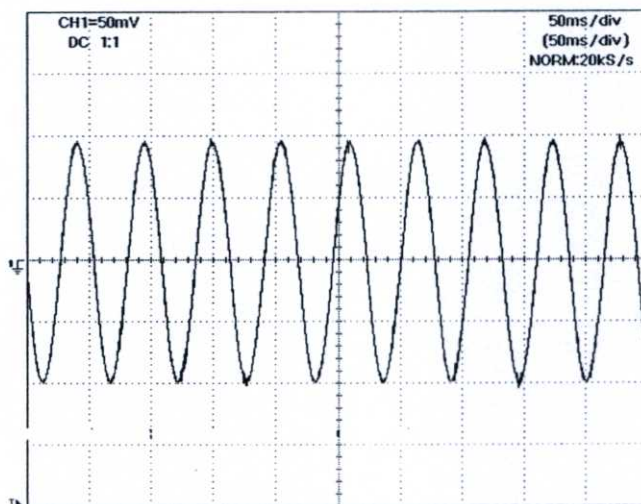
รูปที่ 6.9 สัญญาณเอาต์พุตรูปแบบไซน์ที่ $Q = 8.064$



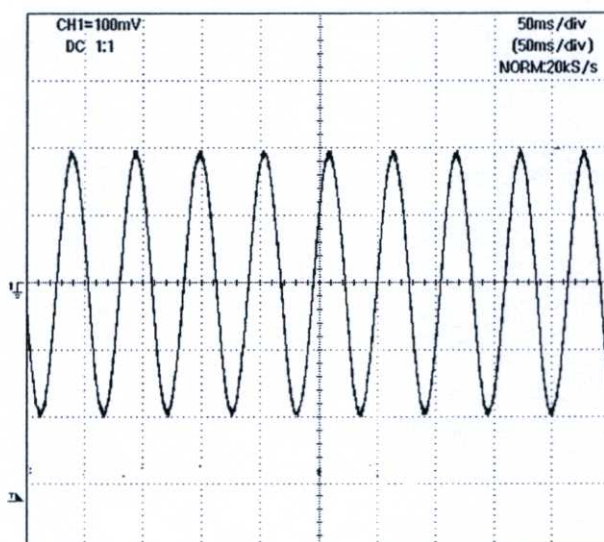
รูปที่ 6.10 สัญญาณเอาต์พุตรูปแบบไซน์ที่ $Q = 11.905$

6.5 ผลลัพธ์ที่ได้จากการต่อวงจรจริง

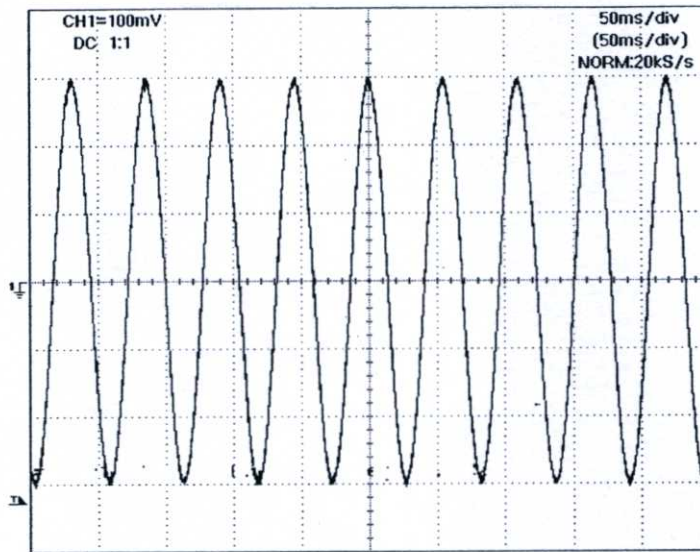
การกำเนิดสัญญาณเกิดขึ้นเมื่อทำการจ่ายไฟเลี้ยงให้กับอุปกรณ์ต่างๆ โดยไม่มีการป้อนสัญญาณอินพุตจากภายนอก กระบวนการปรับค่าแอมพลิจูดของสัญญาณเอาต์พุตทำได้โดยการปรับค่า R_4 ของวงจรรองความถี่แถบผ่านอันดับสอง ซึ่งทำให้ได้สัญญาณเอาต์พุตเป็นดังรูปที่ 6.11, 6.12 และ 6.13 ตามลำดับดังนี้



รูปที่ 6.11 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 4.464$ (ค่าแอมพลิจูด = 100 mV)



รูปที่ 6.12 สัญญาณเอาต์พุตที่ $Q = 8.064$ (ค่าแอมพลิจูด = 200 mV)



รูปที่ 6.13 สัญญาณเอ๊าท์พุทที่ $Q = 11.905$ (ค่าแอมพลิจูด = 300 mV)

บทที่ 7

สรุปผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ

7.1 บทสรุปและวิจารณ์

จากการทดลองด้วยการต่อวงจรจริงและการจำลองด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ผลลัพธ์คือ สัญญาณรูปแบบไซน์ที่สามารถปรับค่าแอมพลิจูดของสัญญาณได้โดยปรับค่าตัวแปรคุณภาพ (Q) ของตัวกรองสัญญาณแถบความถี่ผ่านอันดับสองซึ่งอยู่ภายในเครื่องกำเนิดสัญญาณ และจากการเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณจากวงจรจริงและสัญญาณจากการจำลอง พบว่าสัญญาณที่ได้มีความคล้ายคลึงกันมาก และผลการทดลองสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ โดยวิธีการเคสโครบิง ฟังก์ชันเป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการทำนายการเกิดลิมิตไซเคิลรวมไปถึงการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบด้วย

7.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการวิจัยในการพัฒนาต่อ

เป็นที่รู้กันว่าไม่มีสิ่งใดเกินความสามารถของมนุษย์ เราสามารถศึกษาและพัฒนาองค์ความรู้ต่อไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ดังในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ยังมีปัญหาที่รอการพัฒนาต่อไป นั่นคือ ค่าอัตราขยายความนำ (g_m) ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ โดยมีแนวทางในการพัฒนาต่อคือ การออกแบบวงจรที่มีการชดเชยอุณหภูมิสำหรับตัวโอทีเอหรือเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาที่เกิดจากตัวโอทีเออาจทำการเปลี่ยนอุปกรณ์ในส่วนนี้ อาจใช้อุปกรณ์ตัวอื่นที่มีคุณสมบัติคล้ายโอทีเอเช่น CFOA เป็นต้น

สัญญาณเอ๊าท์พุทที่เกิดขึ้นเป็นเพียงสัญญาณต้นแบบเท่านั้น เพื่อความถูกต้องในการพัฒนาขั้นต่อไปควรมานำสัญญาณเอ๊าท์พุทที่ได้ไปเปรียบเทียบกับสัญญาณมาตรฐานที่เป็นที่ยอมรับโดยสากลและสามารถนำสัญญาณที่ถูกต้องไปใช้ประโยชน์ได้ต่อไป

บรรณานุกรม

- [1] ณรงค์ บวบทอง. “การออกแบบวงจรกรองความถี่ที่ใช้โพลซ็อน โพลจริงและโพลวิกฤติ.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2538.
- [2] เจษฎาพร สถานทรัพย์. “การออกแบบวงจรกรองสัญญาณหลายฟังก์ชันโดยใช้โอปแอมป์และอทีเอเป็นอุปกรณ์แอคทีฟหลัก.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2550.
- [3] ลักรียา ชิตวงศ์. “วิศวกรรมอิเล็กทรอนิกส์.” ภาควิชาวิศวกรรมวัดคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2544.
- [4] อิศราวุธ สีคาดาน. “การออกแบบวงจรออสซิลเลเตอร์แบบ Sinusoidal Quadrature โดยใช้วงจรกรองสัญญาณผ่านทั้งหมดชนิดมีมุมองศาหน้า (Phase-Lead) แบบสมมาตรและปรับค่าความถี่ได้กว้างโดยการปรับค่ากระแส.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2545.
- [5] สมเกียรติ แสดงฤทธิ์. “การออกแบบวงจรออสซิลเลเตอร์แบบ Sinusoidal Quadrature โดยใช้วงจรกรองสัญญาณผ่านทั้งหมดชนิดมีมุมองศาหน้า (Phase-Lead) แบบสมมาตรและปรับค่าความถี่ได้กว้างโดยการปรับค่ากระแส.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า บัณฑิตวิทยาลัย, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2541.
- [6] Slotine J.J.E., Li W. **Applied Nonlinear Control**. New Jersey : Prentice Hall, Inc., 1991.
- [7] Ogata K. **Modern Control Engineering**. 2nd ed., Prentice Hall International Inc., 1995.
- [8] Pranayanuntana P., Kaewsaiha P. “Design of sinusoidal oscillator with controllable amplitude using describing function method.” Masterthesis ControlEngineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang. School of Graduate Studies. 2008.
- [9] Khalil, H. K. **Nonlinear Systems**. New Jersey : Prentice-Hall, Inc. 2002.
- [10] Ramakant A.G. **Op-amps and linear integrated circuits**. Englewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, Inc. 1988
- [11] Schilling and Hua Lee, **Engineering Analysis: A Vector Space Approach**, New York: Jhon Wiley & Sons, Inc., 1988.

- [12] National Semiconductor. **LM13600 Dual Operational Transconductance Amplifiers with Linearizing Diodes and Buffers**. [Online]. Available : [http:// www.datasheet catalog.com](http://www.datasheetcatalog.com). 1995.
- [13] Hall J.W., Connelly J.A. "An Electronically Adjustable Bandpass Filter." **IEEE Transconductance on Circuits and system.**, vol. 2, Aug 1992. pp.1116-1119.
- [14] Adel S. Sedra and Kenneth C. Smith. **Microelectronic Circuits**. New York : Oxford University Press, Inc., 1998.
- [15] Williams J. **Analog Circuit Design: Art, Science and Personalities**. 1st Edition. Boston: Newnes, Inc., 1998.
- [16] SGS Thomson Microelectronics. **UA741 General Purpose Single Operational Amplifier**. [online] Available : [http:// www.datasheetcatalog.org/datasheet/SGSThompson Microelectronics/SGSThompsonMicroelectronics/mXyywtw.pdf](http://www.datasheetcatalog.org/datasheet/SGSThompsonMicroelectronics/SGSThompsonMicroelectronics/mXyywtw.pdf)

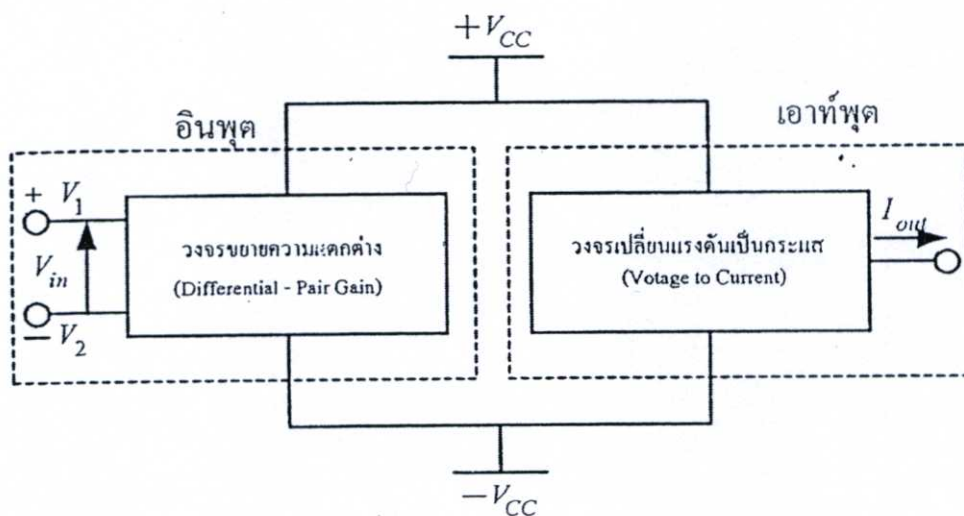
ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

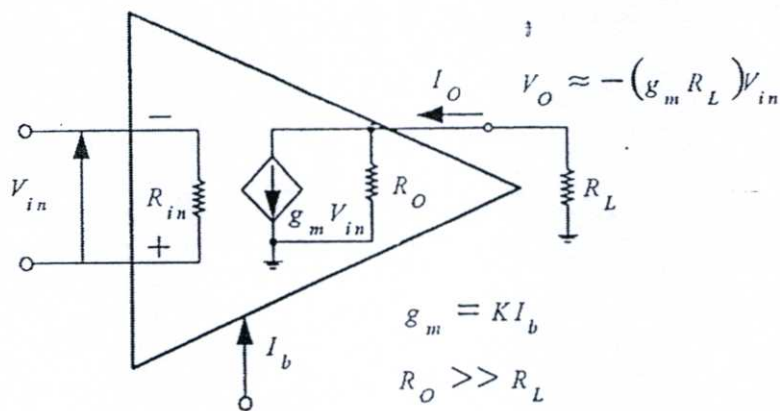
ทฤษฎีและหลักการทำงานของวงจรรขยายโอทีเอ(OTA)

ก.1 หลักการทำงานพื้นฐานของวงจรรขยายโอทีเอ(OTA)

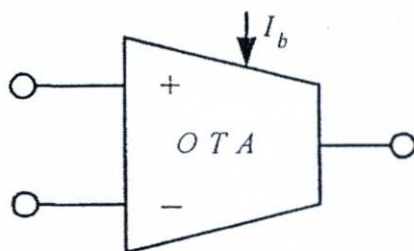
วงจรรขยายโอทีเอจัดเป็นวงจรรขยายแบบแอกทีฟประเภทหนึ่ง ที่ให้กำเนิดสัญญาณกระแสที่ด้านเอาต์พุตของวงจร นั่นคือวงจรรขยายโอทีเอจะมีลักษณะเป็นแหล่งจ่ายกระแส ที่ควบคุมด้วยแรงดัน (Voltage Control Current Source : VCCS) โดยที่ค่ากระแสเอาต์พุตของวงจร (Output Current : I_o) ของวงจรมีค่าขึ้นอยู่กับผลต่างของแรงดันอินพุต (Input Voltage : V_{in}) และมีค่าอัตราขยายความนำหรือค่าอัตราขยายทรานส์คอนดักแตนซ์ (Transconductance Gain : g_m) ของวงจร เป็นค่าอัตราส่วนระหว่างกระแสเอาต์พุต ต่อค่าผลต่างของแรงดันอินพุต ซึ่งอัตราขยายทรานส์คอนดักแตนซ์ ของวงจรรขยายโอทีเอสามารถควบคุมได้ด้วยกระแสจากภายนอก จึงทำให้เกิดการพัฒนาไปสู่วงจรที่สามารถควบคุมได้ทางอิเล็กทรอนิกส์ (Electronic Tunable) โดยสามารถเขียนบล็อกไดอะแกรมได้ดังโครงสร้างพื้นฐานของวงจรรขยายโอทีเอ วงจรสมมูลทางอุดมคติของวงจรรขยายโอทีเอ และสัญลักษณ์แทนวงจรรขยายโอทีเอ ได้ดังรูปที่ ก.1 ก.2 ก.3 ตามลำดับ



รูปที่ ก.1 บล็อกไดอะแกรมแสดงโครงสร้างพื้นฐานของวงจรรขยายโอทีเอ

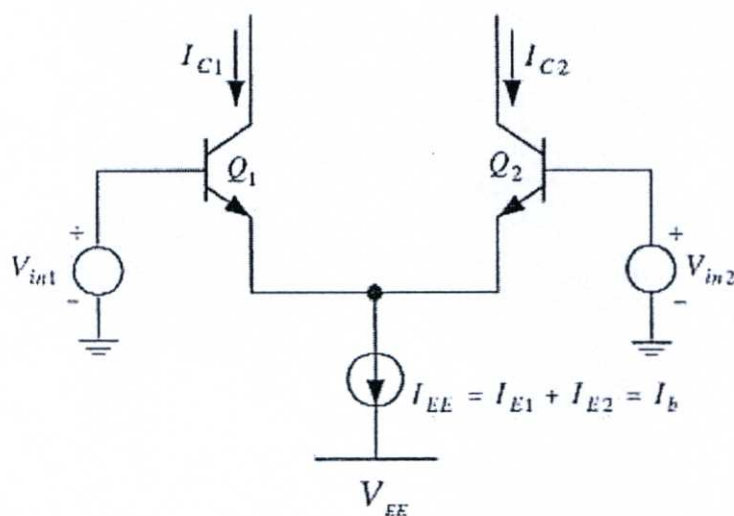


รูปที่ ก.2 วงจรสมมูลย์ทางอุดมคติของวงจรรขยายโอทีเอ



รูปที่ ก.3 สัญลักษณ์แทนวงจรรขยายโอทีเอ

ก.2 การวิเคราะห์หาค่าอัตราขยาย g_m สำหรับวงจรรขยายแบบดิฟเฟอเรนเชียล



รูปที่ ก.4 วงจรรขยายแบบดิฟเฟอเรนเชียล

สมมติให้ I_{EE} เป็นแหล่งจ่ายกระแสไบอัสทางอุดมคติ จ่ายเข้าที่ขาคอมมอนขีมิเตอร์ของ วงจร(Common-Emitter) ซึ่งสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ของกระแสไบอัส I_b ได้ดังนี้

$$I_{E1} + I_{E2} = \frac{I_{C1}}{\alpha_F} + \frac{I_{C2}}{\alpha_F} = I_b \quad (ก.1)$$

และเนื่องจาก

$$I_C = I_s e^{\left(\frac{qV_{BE}}{kT}\right)}$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$I_C = I_s e^{\left(\frac{qV_{BE1}}{kT}\right)} \quad (ก.2)$$

$$I_C = I_s e^{\left(\frac{qV_{BE2}}{kT}\right)} \quad (ก.3)$$

เมื่อวิเคราะห์รูปแรงดันที่ขาเบส-อีมิเตอร์ของทรานส์ซิสเตอร์ Q_1 และ Q_2 จะได้ว่า

$$-V_{in1} + V_{BE1} - V_{BE2} + V_{in2} = 0 \quad (ก.4)$$

$$V_{BE1} - V_{BE2} = V_{in1} - V_{in2} = V_{in} \quad (ก.5)$$

โดยที่ V_{in} เป็นค่าผลต่างของแรงดันอินพุต

และจากสมการที่ (ก.2) และ (ก.3) จะได้สมการแสดงอัตราส่วนระหว่างกระแส I_{C1} และ I_{C2} ดังนี้

$$\frac{I_{E1} + I_{E2}}{I_{C2}} = \frac{I_{C1}}{I_{C2}} = e^{q(V_{BE1} - V_{BE2})/kT} = e^{qV_{in}/kT} \quad (ก.6)$$

จากสมการ(ก.1)จะได้ว่า

$$I_{C1} = \frac{\alpha_F I_{EE}}{1 + e^{-qV_{in}/kT}} \quad \text{และ} \quad I_{C2} = \frac{\alpha_F I_{EE}}{1 + e^{qV_{in}/kT}}$$

ดังนั้น I_O สามารถหาค่ากระแสเอาต์พุตซึ่งมีค่าเท่ากับผลต่างของกระแสคอลเลคเตอร์ I_{C1} และ I_{C2} นั่นคือ $I_O = I_{C1} - I_{C2}$ ได้จากสมการ

$$I_O = \alpha_F I_{EE} \left(\frac{1}{1 + e^{-qV_{in}/kT}} - \frac{1}{1 + e^{qV_{in}/kT}} \right) \quad (ก.7)$$

$$I_O = \alpha_F I_{EE} \tanh\left(\frac{qV_{in}}{kT}\right) \quad (\text{ก.8})$$

เนื่องจาก $\alpha_F \approx 1$

$$I_O \approx I_{EE} \tanh\left(\frac{V_{in}}{2V_T}\right) \quad (\text{ก.9})$$

เนื่องจาก

$$g_m = \frac{dI_o}{dV_{in}} = \frac{I_{EE}}{2V_T} \operatorname{sech}^2\left(\frac{V_{in}}{2V_T}\right) \quad (\text{ก.10})$$

$$g_m = \left. \frac{dI_o}{dV_{in}} \right|_{V_{in}=0} = \frac{I_{EE}}{2V_T} \quad (\text{ก.11})$$

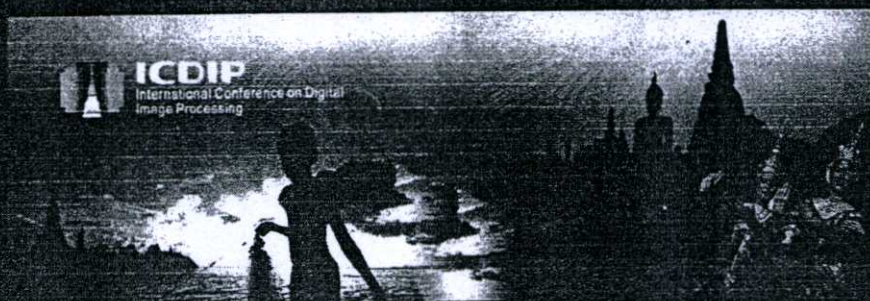
และกำหนดให้เป็นกระแสไบอัสที่ป้อนเข้าสู่วงจรนั้นจากสมการที่ (ก.11) จะได้สมการแสดงค่าอัตราขยายทรานส์คอนดักแตนซ์ของวงจรโอทีเอเป็น

$$g_m = \left. \frac{dI_o}{dV_{in}} \right|_{V_{in}=0} = \frac{I_{bias}}{2V_T} \quad (\text{ก.12})$$

ภาคผนวก ข
ผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

International Conference on Digital Image Processing

(ICDIP 2009)



Bangkok, Thailand 7-9 March 2009



IACSIT

An Electronically Adjustable Amplitude of OTA-Based Sinusoidal Nonlinear Oscillator

Poramate Pranayanuntana

Dept. of Control Engineering, Faculty of Engineering
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Bangkok, Thailand
E-mail: kpporama@kmitl.ac.th

Weerawat Khwankaew

Graduate School, Faculty of Engineering
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Bangkok, Thailand
E-mail: werawat_11@hotmail.com

Abstract— A systematic approach to adjust the amplitude of a sinusoidal nonlinear oscillator is discussed in this paper. Operational transconductance amplifier (OTA) and adjustable high- Q , second order bandpass filter are nonlinear element and linear element, respectively. The describing function method is used to find periodic solutions for nonlinear system. Experimental and simulation results are simulated using ORCAD CAPTURE, while, the numerical results are obtained using MAPLE and MATLAB.

Keywords ; OTA, describing function, nonlinear oscillator, orthonormal expansion

I. INTRODUCTION

Feedback connection in Figure 1 consists of two parts, the lower block is a time-invariant nonlinear element using an operational transconductance amplifier (OTA), and the upper block is a linear element using an adjustable second order bandpass filter. This is a kind of nonlinear system that can adjust the amplitude of oscillation by varying the value of quality factor Q in the circuit.

The describing function method is used for predicting the existence of limit cycles and analyzing its stability. This method applies to a system shown in Figure 1, with the linear element $G(s)$ and time-invariant nonlinear element $\psi(y)$. The numerical integration is used to obtain the describing function $D(a)$ as a function of amplitude of oscillation a using some computer softwares such as MATLAB or MAPLE. Simulation of the circuit design are simulated using ORCAD CAPTURE.

II. APPROACH AND METHODS

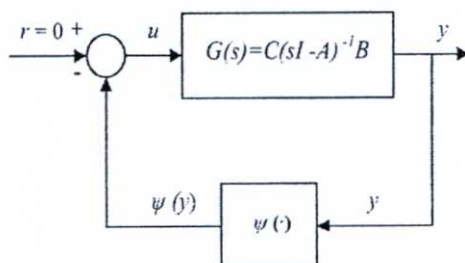


Figure 1. Feedback Connection

To develop the basic version of the describing function method, the system has to satisfy the following four assumptions:

1. There is only a single nonlinear component.
2. The nonlinear component is time-invariant.
3. Corresponding to a sinusoidal input $y = a \sin(\omega_d t)$ only the fundamental component $w_1(t)$ in the output $w(t) = \psi(a \sin(\omega_d t))$ has to be considered.
4. The nonlinearity is odd.

A. Periodic Function

Let V be a Hilbert space of periodic functions with period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

The set $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_d t), \sin(\omega_d t), \cos(2\omega_d t), \sin(2\omega_d t), \dots \right\}$

is a complete orthonormal set in V with the inner product defined as

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t)g(t)dt, \quad \text{for all } f, g \in V. \quad (1)$$

Proposition (Fourier or orthonormal expansion)

Let $\{x_k\}$ be a complete orthonormal set in the Hilbert space V above. Then each x in V can be expressed as

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k \quad (2)$$

where the equality in (2) is in l_2 sense. We call $\langle x, x_k \rangle$ the Fourier series coefficients of x .

Since $\sin(\omega_d t)$ has period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, that is $\sin(\omega_d(t+T)) = \sin(\omega_d t)$, then

$$\psi(a \sin(\omega_d(t+T))) = \psi(a \sin(\omega_d t)) \quad (3)$$

Therefore, $w(t) = a \sin(\omega_c t)$ is a periodic function with period T , and with the set $\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(\omega_c t), \sin(\omega_c t),$

$$\begin{aligned} & \cos(2\omega_c t), \sin(2\omega_c t), \dots \} \text{ we can write} \\ w(t) &= \langle w(t), x_1 \rangle x_1 + \langle w(t), x_2 \rangle x_2 + \langle w(t), x_3 \rangle x_3 + \dots \\ &= \langle w(t), \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \langle w(t), \cos(\omega_c t) \rangle \cos(\omega_c t) \\ &+ \langle w(t), \sin(\omega_c t) \rangle \sin(\omega_c t) \\ &+ \langle w(t), \cos(2\omega_c t) \rangle \cos(2\omega_c t) \\ &+ \langle w(t), \sin(2\omega_c t) \rangle \sin(2\omega_c t) + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

or

$$w(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_c t) + b_n \sin(n\omega_c t)] \tag{5}$$

where

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle w(t), 1 \rangle, \quad a_n = \langle w(t), \cos(n\omega_c t) \rangle, \\ b_n &= \langle w(t), \sin(n\omega_c t) \rangle \end{aligned}$$

Furthermore, since $G(s)$ used has high- Q bandpass characteristics, this implies that only the fundamental component $w_1(t)$ is needed to be considered, namely

$$\begin{aligned} w(t) = w_1(t) &= \langle w(t), \cos(\omega_c t) \rangle \cos(\omega_c t) \\ &+ \langle w(t), \sin(\omega_c t) \rangle \sin(\omega_c t) \\ &= M \sin(\omega_c t + \theta) \end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\begin{aligned} M(a, \omega_c) &= \sqrt{\langle w(t), \cos(\omega_c t) \rangle^2 + \langle w(t), \sin(\omega_c t) \rangle^2} \tag{8} \\ \theta(a, \omega_c) &= \tan^{-1}(\langle w(t), \cos(\omega_c t) \rangle / \langle w(t), \sin(\omega_c t) \rangle) \tag{9} \end{aligned}$$

This sinusoidal can be written in complex form as

$$\begin{aligned} w_1(t) &= M e^{j(\omega_c t + \theta)} \\ &= \langle w(t), \sin(\omega_c t) \rangle + j \langle w(t), \cos(\omega_c t) \rangle e^{j(\omega_c t)} \end{aligned} \tag{10}$$

B. Describing Function Method

The describing function of the nonlinear element is defined to be the complex ratio of the fundamental component of the output of the nonlinear element by the input sinusoidal, i.e.,

$$D(a, \omega_c) = M e^{j(\omega_c t + \theta)} = \frac{(b + ja_1) e^{j(\omega_c t)}}{a e^{j(\omega_c t)}} \tag{11}$$

For the case of single-valued nonlinearities as

$$D(a) = \frac{b}{a} = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_c t) \rangle}{a} \tag{12}$$

since $w(t)$ is an odd function, a_1 is zero.

In order for a self-sustained oscillation of amplitude a and frequency ω_c in the system of Figure 1 to exist the variables in the loop must satisfy the following relations:

$$\begin{aligned} w &= D(a)w \\ y &= -G(j\omega_c)w \end{aligned}$$

Therefore, we have $y = -G(j\omega_c)D(a)w$. Because $y = w$, this implies

$$G(j\omega_c)D(a) + 1 = 0 \tag{13}$$

which can be written as

$$G(j\omega_c) = \frac{-1}{D(a)} \tag{14}$$

Equation (14) is the condition of oscillation or so call the condition for existence of limit cycles.

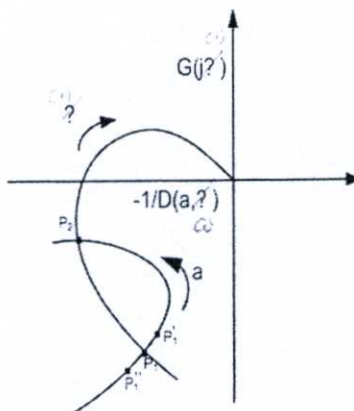


Figure 2. Detection of limit cycles

Plots of both the frequency response function $G(j\omega)$ (varying ω) and the negative inverse describing function $(-1/D(a))$ (varying a) in the complex plane are investigated. If the two curves intersect, then there exist limit cycles.

Each intersection point of the curve $G(j\omega)$ and the curve $(-1/D(a))$ corresponds to a limit cycle. If points near the intersection and along the increasing- a side of the curve $(-1/D(a))$ are not encircled by the curve $G(j\omega)$, then the corresponding limit cycle is stable. Otherwise, the limit cycle is unstable. For example, in Figure 2, there exist two limit cycles. Points P_1 and P_2 correspond to the existing limit cycles of a system. P_1 corresponds to the unstable limit cycle, while P_2 refers to the stable one.

C. OTA Nonlinear Behavior

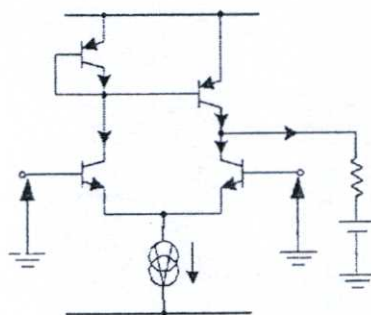


Figure 3. OTA equivalent circuit

The simplified equivalent circuit diagram of an OTA is given in Figure 3. The input-output relation with

$$i_{out} = I \frac{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right) - 1}{\exp\left(\frac{qV}{kT}\right) + 1} = I \tanh\left(\frac{V}{2V_T}\right) \quad (15)$$

where $v = v^+ - v^-$, and $V_T = \frac{kT}{q}$.

D. Obtaining a Mathematical Model of an OTA from an Experiment.

The OTA IC LM13600 is used as a nonlinear element for a nonlinear oscillator system in Figure 1. An OTA is tested for its input-output characteristic by applying a triangular signal to the input of the OTA and measuring its output as shown in Figure 4.

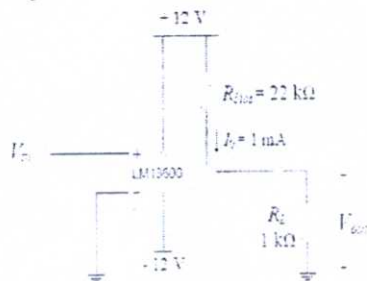


Figure 4. OTA test circuit.

The input-output relationship obtained as an xy -graph shown in Figure 5, where x -axis and y -axis represents V_{in} and V_{out} respectively. Measured data from the graph of Figure 5 is shown as follows.

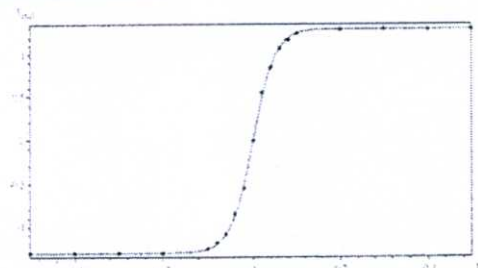


Figure 5. Data fitting using a least squares method.

$$\begin{bmatrix} V_{in} \\ V_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.4 & -0.3 & -0.2 & -0.1 & -0.08 & -0.06 \\ -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.3 & -1.25 & -1.18 & -1.08 \\ -0.04 & -0.02 & 0 & 0.02 & 0.04 & 0.06 & 0.08 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ -0.85 & -0.55 & 0 & 0.55 & 0.85 & 1.08 & 1.18 & 1.25 & 1.3 & 1.3 & 1.3 & 1.3 \end{bmatrix}$$

Fitting data by using least squares method

$$\min_x \sum_{i=1}^n (y_i - f(t_i, x))^2 \quad (16)$$

where $x = (a, b)$ and

$$\begin{aligned} f(t, a, b) &= a \tanh(bt); \quad a = 1.3 \\ f(t, b) &= 1.3 \tanh(bt). \end{aligned} \quad (17)$$

With the data from matrix above, summation in (16) can be expanded as

$$\begin{aligned} S &= (y_1 - f(t_1, b))^2 + (y_2 - f(t_2, b))^2 + \dots + (y_{10} - f(t_{10}, b))^2 \\ &= (-1.3 - f(-0.5, b))^2 + (-1.3 - f(-0.4, b))^2 + \dots \\ &\quad + (1.3 - f(0.5, b))^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Then differentiate (18) to find a minimum point (Solution by MAPLE)

$$\begin{aligned} \frac{dS(b)}{db} &= 0 \Rightarrow b = 20.02158269 \\ \frac{d^2S(b)}{db^2} &= 0.008308718086 > 0. \end{aligned}$$

Note that the second derivative test above confirms that $b = 20.02158269$ is the minimum point.

By fitting the data to a graph of tanh function, and from the derivation above, we obtain a practical OTA characteristic as

$$v_{out} = 1.3 \tanh(20v). \quad (19)$$

So we can obtain our desired transfer function of $v_{out}(v) = \frac{1}{50} \tanh(20v)$ by cascading the OTA with amplifier with gain 15.385 V/A.

E. Bandpass Filter Design

The second order bandpass filter in Figure 6, has bandpass filter characteristics of the form

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\zeta s + \omega_0^2} \quad (20)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{CR} \quad (21)$$

$$Q = \frac{R_2}{R_1} \quad (22)$$

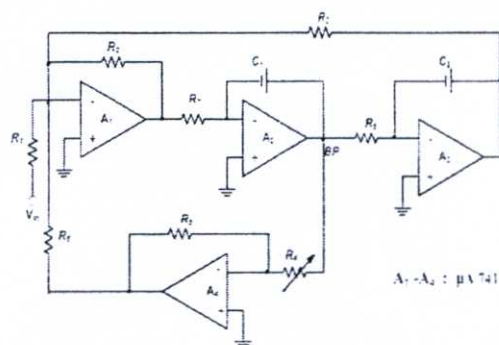


Figure 6. Second order bandpass filter circuit [3]

where ω_0 is the resonant frequency in rad/sec and 2α is the bandwidth in rad/sec of the bandpass filter. Passive component values are chosen as $R_1 = R_2 = R_3 = 100\text{k}\Omega$, $C_1 = C_2 = 4.7\ \mu\text{F}$, $R_4 = R_5 = 212.765\ \text{k}\Omega$ and $R_6 = 1\ \text{k}\Omega$ and R_9 may be adjusted to obtain the value of Q desired.

F. Design Procedure

For the linear system in Figure 1 having bandpass filter characteristics of the form $G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2}$, where ω_0 is the resonant frequency and 2α is the bandwidth. If a self-excited oscillation exists with the frequency of oscillation at $\omega = \omega_0$, then

$$G(j\omega_0) = -\frac{\omega_0}{2\alpha} = -Q \quad (23)$$

Therefore the condition of oscillation, or condition for existence of limit cycle of equation (14) becomes

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} = -\frac{1}{G(j\omega_0)} = D(a) \quad (24)$$

where Q is the quality factor of the bandpass filter. The far right-hand side of (24) is the describing function of the function $\psi(\cdot)$, and for a fixed $\psi(\cdot)$, it depends only on the magnitude of oscillation as follows:

$$D(a) = \frac{\langle w(t), \sin(\omega_0 t) \rangle}{a} = \frac{2}{a\pi} \int_0^\pi \psi(a \sin \theta) \sin \theta d(\theta) \quad (25)$$

For known values of a and ω_0 , $D(a)$ is an equation in only one unknown variable, a , and with the aid of modern computers, one can solve numerically for a given the condition for existence of limit cycle or one can plot $D(a)$ against a . From (24), in order for the limit cycle to exist it is required that

$$0 < \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0} < D_{max} = D(0) \quad (26)$$

as can be seen in Figure 7.

III. EXAMPLE

Given the specifications on the frequency of oscillation $\omega_0 = 100\ \text{rad/s}$ and adjust amplitude of oscillation at $a = 0.1, 0.2, 0.3$ volts, respectively.

First, consider the OTA nonlinear behavior in (15) with $I = 1\ \text{mA}$, we should obtain $i_{out} = 0.001 \tanh(20v)$, but instead we have obtained from Figure 4 and Equation (19) by experiment

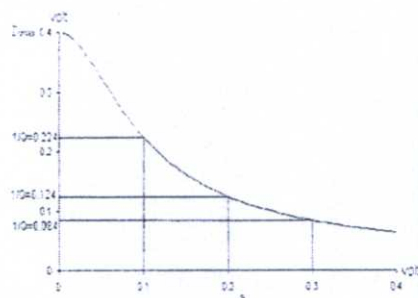
$$i_{out} = 0.0013 \tanh(20v)$$

Then, $\psi(v) = \frac{1}{50} \tanh(20v)$ can be obtained with an additional amplifier of gain 15.385V/A at the output of the OTA.

If there is no error in the equivalent circuit of Figure 3 then $i_{out} = 0.001 \tanh(20v)$ therefore $\psi(v) = \frac{1}{50} \tanh(20v)$

can be obtained with additional amplifier of gain 20 V/A at the output of the OTA instead.

From (25), plot $D(a)$ with respect to a , as shown below in Figure 7.

Figure 7. $D(a)$ for $\psi(v) = \frac{1}{50} \tanh(20v)$

With $\omega_0 = 100\ \text{rad/s}$, we can calculate Q at $a = 0.1, 0.2, 0.3$ volts from (24), as shown in Table 1, for

a (mv)	$D(a) = 1/Q$	Q
0.1	0.224	4.464
0.2	8.064	8.064
0.3	11.9	11.90

Table 1. Value of amplitude a , describing function $D(a)$ and values of quality factor Q .

Second, determine bandpass filter parameter R_9 with $\omega_0 = 100\ \text{rad/s}$ and $Q = 4.464, 8.064, 11.90$, as shown in Table 2

Table 2 Relationship between resistance R_L and the values of quality factor Q .

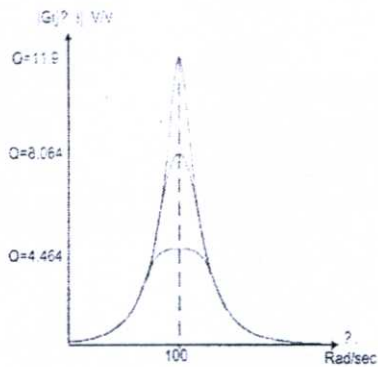


Figure 8. Bandpass Filter with different Q

The plot of $G(j\omega)$ and various $-1/D(a)$ of the obtained sinusoidal nonlinear oscillator is shown in Figure 9. The graphs in Figure 9 intersect at $\omega = 100$ rad/sec and $a = 0.1, 0.2, 0.3$ volts, at these points $G(j100) = 4.464, 8.064, 11.90$ respectively. The corresponding limit cycles are stable since points near the intersections and along the increasing-side of the curves $-1/D(a)$ are not encircled by the curve $G(j\omega)$.

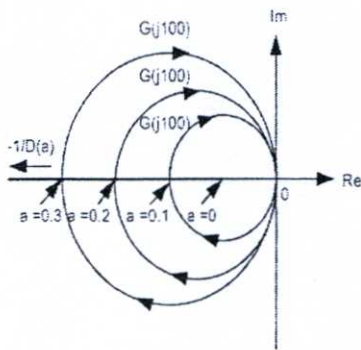


Figure 9. Plots of $G(j\omega)$ and $-1/D(a)$

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

The oscillation starts when applying a supply voltage to the circuit without any external excitation. Adjustment in amplitude of oscillation is done by varying R_L . The oscillation was implemented and recorded in ORCAD CAPTURE as shown in Figure 10-12.

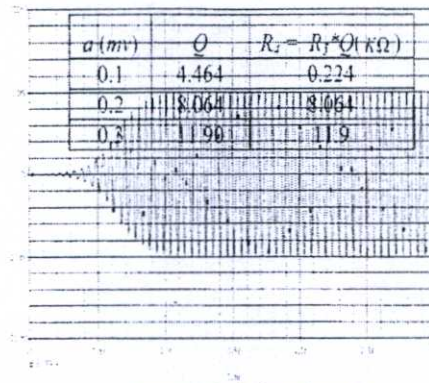


Figure 10. Oscillation at $Q = 4.464$

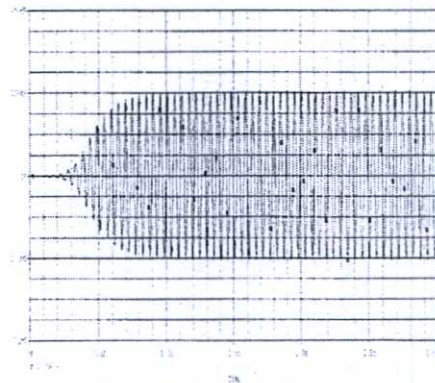


Figure 11. Oscillation at $Q = 8.064$

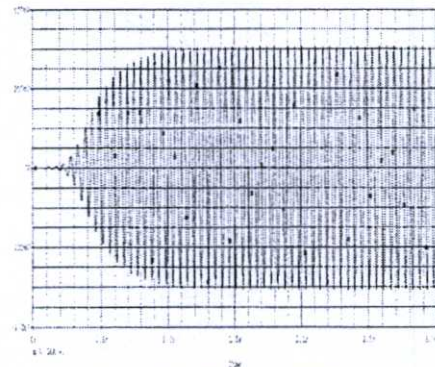


Figure 12. Oscillation at $Q = 11.905$

V. CONCLUSION.

Experimental and simulation results show that the nonlinear oscillators designed by this method oscillate at the desired frequency of oscillation, while the amplitude of oscillation can be independently adjusted by varying the value of quality factor in the second order high- Q bandpass filter. The results from real circuit are similar to all simulation results from ORCAD CAPTURE and MATLAB.

These satisfy the design specifications on amplitude and frequency of oscillation.

REFERENCES

- [1] J.J.E.Slotine, W.Li. "Applied Nonlinear Control", Prentice-Hall, Inc. 1991
- [2] H.K. Khalil. "Nonlinear System". New Jersey : Prentice- Hall, Inc. 2002
- [3] Jefferson W. Hall, J.Alvin Connelly " An Electronically Adjustable Bandpass Filter", IEEE-CNF 9-12 Aug. 1992 Page(s):1116 - 1119 vol.2
- [4] P.Pranayanuntana, P.Kaewsaiha. "A design of an OTA-based Sinusoidal Nonlinear Oscillator" The Proceedings of the 29th Electrical Engineering Conference, Chonburi, November 9-10, 2006
- [5] M.Stoll,Introduction to Real Analysis. Addison Wesley Longman, Inc.2001.
- [6] Robert J. Schilling, Hau Lee. "Engineering Analysis (A Vector Space Approach)", John Wiley & Sons, Inc.1947

ประวัติผู้เขียน

นายวีรวัฒน์ ขวัญแก้ว เกิดเมื่อวันเสาร์ที่ 1 ธันวาคม พ.ศ.2527 ที่จังหวัดตรัง ประเทศไทย จบปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม ณ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง เมื่อปี 2550 และเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโท หลักสูตรวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ในปีการศึกษา 2550