สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การหาผลเฉลยของระบบสมการ

ห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์ สจล.
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

1. นาย กิตติชัย พิศาลวงศ์วาน รหัส 33501001
2. น.ส. จินตนา ลิขิตโสตถิตวงศ์ รหัส 33501003
3. น.ส. สิรินธร มีวันดี รหัส 33501035
4. นาย อติเทพ กระพี้สัตย์ รหัส 33501037

ปพ.
ก673ก
2536

เลขหมู่....................
เลขทะเบียน....................
วัน,เดือน,ปี....................

6.12533646

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า เจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2536

SOLUTION OF SYSTEM OF EQUATIONS

BY

1. MR KITTICHAI PISANWONGWAN

2. MISS JINTANA LIKHITSOTTHIWONG

3. MISS SIRINTON MEEWANDEE

4. MR ATITHEP KRAPEESATAYA

A System Project Submitted in Partial Fulfillment
of the Requirement for the Degree of bachelor of Science

Department of Mathmatics and Computer Science
Faculty of Science

King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
1993

การหาผลเฉลยของระบบสมการ

1.	นาย	กิตติชัย	พิศาลวงศ์วาน	รหัส 33501001
2.	น.ส.	จินตนา	ลิขิตโสตถิวงศ์	รหัส 33501003
3.	น.ส.	สิรินธร	มีวันดี	รหัส 33501035
4.	นาย	อติเทพ	กระพี้สีตย์	รหัส 33501038

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า เจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2536

ชื่อหัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยของระบบสมการ
โดย	1. นาย กิตติชัย พิศาลวงศ์วาน
	2. น.ส. จินตนา ลิขิตโสตถิวงศ์
	3. น.ส. สิรินธร มีวันดี
	4. นาย อดิเทพ กระพี้สัตย์
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
อาจารย์ที่ปรึกษา	1. รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข
	2. รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร
	3. รศ. ภัคคินี ยิมเรวัต

ภาควิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า เจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับโครงงานพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต

(รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข) หัวหน้าภาควิชาฯ

คณะกรรมการโครงงานพิเศษ

(อาจารย์ สุพร พบสุข) ประธานกรรมการสอบปัญหาพิเศษ

(อาจารย์ กฤษฎา ไตรสุรัตน์) กรรมการสอบปัญหาพิเศษ

(รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข) อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ

(รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร) อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ

(รศ. ภัคคินี ยิมเรวัต) อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษ

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

ชื่อหัวข้อพิเศษ	การหาผลเฉลยของระบบสมการ			
นักศึกษา	1. นาย	กิตติชัย	พิศาลวงศ์วาน	รหัส 33501001
	2. น.ส.	จินตนา	ลิขิตโสตถิวงศ์	รหัส 33501003
	3. น.ส.	สิรินธร	มีวันดี	รหัส 33501035
	4. นาย	อติเทพ	กระพี้สัตย์	รหัส 33501037
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.	ไมตรี	โพธิ์สุข	
	รศ.	อุบลวรรณา	เงินวิจิตร	
	รศ.	ภัคคินี	ยิมเรวัต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์และวิทยาการคอมพิวเตอร์			
ปีการศึกษา	2536			

การหาผลเฉลยของระบบสมการ ถ้ากระทำด้วยมือจะมีความยุ่งยากมาก เพราะเป็นการคำนวณค่าของตัวเลขที่ค่อนข้างละเอียด ทำให้เกิดความผิดพลาดคลาดเคลื่อนได้ง่าย และใช้เวลาในการแก้ปัญหามาก ฉะนั้นจึงนำระบบคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ในการแก้ปัญหาเหล่านี้ เพื่อที่จะทำให้การแก้ปัญหาเร็วขึ้น และลดความคลาดเคลื่อนลงเพื่อให้ได้ค่าของผลเฉลยที่มีความถูกต้องใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด

ระบบสมการที่ศึกษาในที่นี้ คือ

1.ระบบสมการเชิงเส้น (LINEAR EQUATION)

2.ระบบสมการไม่เชิงเส้น (NONLINEAR EEQUATION)

3.การโปรแกรมเชิงเส้น (LINEAR PROGRAMMING)

โดยจะอธิบายถึงวิธีการคำนวณผลเฉลย พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างและรวมถึงการแสดงรายละเอียดต่างๆของโปรแกรมสำเร็จรูป นอกจากนี้ยังจัดทำคู่มือการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเพื่อเป็นเอกสารประกอบการใช้งานแต่ละขั้นจนจบการทำงาน และมีตัวอย่างการทดสอบโปรแกรมสำเร็จรูปที่สร้างขึ้น และยังมีแผนผังโปรแกรมเพื่อที่ผู้สนใจจะได้นำโปรแกรมไปพัฒนาต่อไป

ABSTRACT

To finding the answer of the system of equations, if using manual will have a lot of difficult because the calculation of number is quit very fine, so it can cause the error and easily deviation. Also it will take a long time to solve the problem. Therefore we will use computer to solve there problems , so it will solve the problems faster and decrease the deviation and get the answer which is correct and closet to the real answer.

The system of equations which studied here are :

1. SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS
2. SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS
3. LINEAR PROGRAMMING

By explaining how to calculate the answer including show the examples and detail of the application program. Moreover we will provide the user's guide of the application program as a document to show the step of command from the begining to end and the examples for testing the application program. Also we will provide the flowchart of the application program for the persons who are interested to continue develop this programs.

กิติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่อง การหาผลเฉลยของระบบสมการ สามารถสำเร็จลุล่วงได้ด้วยดีนั้น เนื่องจากความช่วยเหลือของหลายๆท่าน ดังนั้นผู้จัดทำปัญหาพิเศษเรื่องนี้ต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร ไมตรี โพธิ์สุข , รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร และรศ. ภัคคินี ยิมเรวัต ซึ่งท่านอาจารย์เป็นผู้ให้คำปรึกษาและคำแนะนำต่างๆ และขอขอบคุณเพื่อนๆทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือ

นาย กิตติชัย พิศาลวงศ์วาน
น.ส. จินตนา ลิขิตโสตถิวงศ์
น.ส. สิรินธร มีวันดี
นาย อติเทพ กระพี้สัตย์

ผู้จัดทำปัญหาพิเศษ

สารบัญ

บทนำ

ปัจจุบันการหาผลเฉลยของระบบสมการ มีบทบาททางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์เกือบทุกสาขา ถ้างานที่ต้องการความรวดเร็วและความละเอียดมาก ถ้ากระทำด้วยมือจะไม่สามารถได้ผลตามต้องการ

แนวทางการแก้ปัญหา

จะใช้คอมพิวเตอร์เข้ามาช่วย เพื่อลดความคลาดเคลื่อนให้ได้ค่าของผลเฉลยที่มีความถูกต้องใกล้เคียงความเป็นจริงมากที่สุด และใช้เวลาในการแก้ปัญหาน้อยลง

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น, ระบบสมการไม่เชิงเส้น, การโปรแกรมเชิงเส้นและสร้างโปรแกรมสำเร็จรูปใช้สำหรับแก้ปัญหา

ขั้นตอนในการดำเนินการ

1. ศึกษาลักษณะของระบบสมการเชิงเส้น, ระบบสมการไม่เชิงเส้น, การโปรแกรมเชิงเส้น
2. ศึกษาการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์
3. เขียนโปรแกรมการหาผลเฉลยระบบสมการ
4. ทดลองใช้งานและเปรียบเทียบผลที่ได้ว่าถูกต้องหรือไม่
5. ปรับปรุงและพัฒนาโปรแกรมให้เหมาะสม

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สามารถนำโปรแกรมสำเร็จรูปนี้ไปใช้ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น, ระบบสมการไม่เชิงเส้น, การโปรแกรมเชิงเส้น และเป็นแนวทางให้ผู้ที่สนใจนำไปศึกษาและพัฒนาต่อไป

บทที่ 1
ระบบสมการเชิงเส้น
(SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS)

1.1 <u>บทนำ</u>

การแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น คือการหาค่า X_1, X_2, X_3, $\ldots, X_n$ จากระบบสมการ

$$\begin{array}{lllll}
a_{11}X_1 & +a_{12}X_2 & +a_{13}X_3 \ldots & +a_{1n}X_n & = b_1 \\
a_{21}X_1 & +a_{22}X_2 & +a_{23}X_3 \ldots & +a_{2n}X_n & = b_2 \\
 & \vdots & & & \vdots \\
a_{m1}X_1 & +a_{m2}X_2 & +a_{m3}X_3 \ldots & +a_{mn}X_n & = b_m
\end{array}$$

ซึ่งเป็นระบบสมการ m สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า n ค่า สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์

$$AX = b$$

เมื่อ A คือ เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์

$$A = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\
 & \vdots & & \\
a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn}
\end{bmatrix}$$

X คือ เวกเตอร์ของตัวไม่ทราบค่าที่ต้องการหา

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix}$$

b คือ เวกเตอร์จำนวนจริง

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์แต่งเติม(augumented matrix) คือเมตริกซ์ที่เกิดจากการรวมเมตริกซ์ A และเวกเตอร์ b เป็น

$$[A:b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & & & \cdot \\ & \cdot & & & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ระบบสมการเชิงเส้นจะมีคำตอบหรือไม่เป็นไปตามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

1. ถ้า $m<n$ แล้วระบบสมการเชิงเส้นจะมีคำตอบเสมอ และมีคำตอบหลายชุด
2. ถ้า $m>=n$ แบ่งได้เป็น 3 กรณี
   - 2.1 ถ้าแรงค์ A = แรงค์[A:b] = n แล้วระบบสมการเชิงเส้นจะมีคำตอบเพียงชุดเดียว
   - 2.2 ถ้าแรงค์ A = แรงค์[A:b] < n แล้วระบบสมการเชิงเส้นจะมีคำตอบเสมอ และ มีค่าคำตอบหลายชุด
   - 2.3 ถ้าแรงค์ A < แรงค์[A:b] แล้วระบบสมการจะไม่มีคำตอบเลย

การแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีค่า m และ nใหญ่ๆเป็นสิ่งที่ยุ่งยากและใช้เวลามาก จึงทำให้มีการนำคอมพิวเตอร์มาช่วยแก้ปัญหา สำหรับในที่นี้เราจะแก้ปัญหาเฉพาะกรณีที่ $m = n$ เท่านั้น

ก่อนที่จะศึกษาวิธีการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นจะกล่าวถึงการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถว (ELEMENTARY ROW OPERATIONS) ของเมตริกซ์หมายถึงการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่ง ต่อไปนี้

1. สลับที่กันระหว่างแถวที่ i กับแถวที่ j
2. คูณแถวที่ i ด้วย k ซึ่ง $k \neq 0$ ให้เป็นแถวที่ i ใหม่
3. นำ kไปคูณกับแถวที่ j แล้วนำผลที่ได้ไปรวมกับแถวที่ i ให้เป็นแถวที่ i ใหม่

วิธีการแก้ระบบสมการมีหลายวิธี แต่จะศึกษาดังนี้

1.2 วิธีการกำจัดของเกาส์(GAUSS ELIMINATION METHOD)

วิธีการกำจัดของเกาส์เป็นวิธีการเปลี่ยนรูปจากระบบสมการ AX = b

$$
\begin{aligned}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \ldots + a_{1n}X_n &= b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \ldots + a_{2n}X_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 \ldots + a_{nn}X_n &= b_n
\end{aligned}
$$

เป็นระบบสมการ $UX = b'$ ซึ่ง U คือเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (UPPER TRIANGULAR MATRIX)

$$
\begin{aligned}
a'_{11}X_1 + a'_{12}X_2 + a'_{13}X_3 + a'_{14}X_4 + a'_{15}X_5 \ldots + a'_{1n}X_n &= b'_1 \\
a'_{22}X_2 + a'_{23}X_3 + a'_{24}X_4 + a'_{25}X_5 \ldots + a'_{2n}X_n &= b'_2 \\
a'_{33}X_3 + a'_{34}X_4 + a'_{35}X_5 \ldots + a'_{3n}X_n &= b'_3 \\
\vdots \qquad & \quad \vdots \\
a'_{n-1,n-1}X_{n-1} + a'_{n-1,n}X_n &= b'_{n-1} \\
a'_{nn}X_n &= b'_n
\end{aligned}
$$

จากระบบสมการ $UX = b'$ นี้จะสามารถหาค่า X_n ได้ทันที ต่อจากนั้นจึงใช้ค่า X_n แทนในสมการถัดขึ้นไปได้ค่า X_{n-1} และนำเอาค่าที่ได้แทนในสมการถัดขึ้นไปเรื่อยๆจนได้ค่าของ X ทุกค่า วิธีการแทนค่าในสมการถัดไปนี้ เรียกว่า การแทนค่าแบบย้อนกลับ (BACK SUBSTITUTION) ด้วยเหตุนี้จึงมีผู้เรียกวิธีนี้ว่า การกำจัดของเกาส์และการแทนค่าย้อนกลับ (GAUSS-ELIMINATION AND BACK SUBSTITUTION)

วิธีการกำจัดของเกาส์มีขั้นตอนต่างๆดังนี้

1. สร้างเมตริกซ์แต่งเติม [A:b]
2. ทำการสลับแถว(ถ้าจำเป็น) เพื่อให้ได้เมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติว่าสมาชิกที่ตำแหน่งแถวที่ 1 หลักที่ 1 มีค่าสมบูรณ์มากที่สุดในหลักที่ 1 นั้น และถ้าค่านั้นไม่เท่ากับศูนย์เราจะคำนวณต่อไป

3. ทำการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถวกับเมตริกซ์ที่ได้เพื่อให้สมาชิกในหลักที่ 1ของแถวที่ 2,3,4, ...,n เป็นศูนย์ทุกตัว ได้เมตริกซ์$[A:b]^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \ldots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

4. กระทำเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 2 กับเมตริกซ์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 โดยทำการสลับแถว (ถ้าจำเป็น)ระหว่างแถวที่ 2, 3, ...,n เพื่อให้ได้เมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติว่าสมาชิกในตำแหน่งในแถวที่ 2 หลักที่ 2 มีค่าสมบูรณ์มากที่สุดในหลักที่ 2 ถ้าค่านั้นไม่เป็นศูนย์ เราจะคำนวณต่อไป
5. ทำการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถวกับเมตริกซ์ที่ได้ เพื่อให้สมาชิกในหลักที่ 2 ของแถวที่ 3, 4, ...,n เป็นศูนย์ทุกตัว ได้เมตริกซ์$[A:b]^{(2)}$เป็น

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array}\right]$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อทำต่อไปและ $a_{ii}^{(i)} \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$
เราจะได้เมตริกซ์ของระบบสมการเป็น

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} & b_1^{(k)} \\
0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} & b_2^{(k)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(k)} & \dots & a_{3n}^{(k)} & b_3^{(k)} \\
 & & \cdot & & & \cdot \\
 & & \cdot & & & \cdot \\
 & & \cdot & & & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)}
\end{array}\right]$$

โดยการแทนค่าย้อนกลับจะได้

$$\begin{aligned}
X_n &= b_n^{(k)} / a_{nn}^{(k)} \\
X_{n-1} &= (b_{n-1}^{(k)} - a_{n-1,n}^{(k)} X_n)/a_{n-1,n-1}^{(k)} \\
&\;\;\vdots \\
X_2 &= (b_2^{(k)} - a_{23}^{(k)} X_3 - a_{24}^{(k)} X_4 \dots - a_{2n}^{(k)} X_n)/a_{22}^{(k)} \\
X_1 &= (b_1^{(k)} - a_{12}^{(k)} X_2 - a_{13}^{(k)} X_3 \dots - a_{1n}^{(k)} X_n)/a_{11}^{(k)}
\end{aligned}$$

หมายเหตุ $a_{11}^{(1)}$, $a_{22}^{(2)}$, $a_{33}^{(3)}$, $\dots, a_{kk}^{(k)}$ ในแต่ละขั้นตอนที่ได้เรา เรียกว่าสมาชิกหลัก (PIVOT ELEMENT)

ตัวอย่าง 1.2.1

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned}
3X_1 + 18X_2 + 9X_3 &= 18 \\
2X_1 + 3X_2 + 3X_3 &= 117 \\
4X_1 + X_2 + 2X_3 &= 283
\end{aligned}$$

วิธีทำ ขั้นแรกจัดเมตริกซ์แต่งเติมขนาด 3x4 ของสัมประสิทธิ์และค่าคงที่

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 2 & 3 & 3 & 117 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

หารแถวที่ 1 ด้วย 3 และคูณด้วย 2 และนำไปลบกับแถวที่ 2 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

หารแถวที่ 1 ด้วย 3 และคูณด้วย 4 และนำไปลบกับแถวที่ 3 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

เราจะทำเป็นเมตริกซ์ สามเหลี่ยมบน โดยหารแถวที่ 2 ด้วย -9 และคูณด้วย -23 และนำไปลบกับแถวที่ 3 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -7/3 & -28/3 \end{array}\right]$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{array}{rcll} 3X_1 + 18X_2 + 9X_3 & = & 18 & (1) \\ -9X_2 - 3X_3 & = & 105 & (2) \\ -7/3X_3 & = & -28/3 & (3) \end{array}$$

จากนั้นแทนค่าย้อนกลับ

$$X_3 = \frac{-28/3}{-7/3} = 4$$

แทนค่า X_3 ในสมการที่ 2 ได้

$$X_2 = \frac{105 + 3(4)}{-9} = -13$$

แทนค่า X_3 และ X_2 ในสมการที่ 1 ได้

$$X_1 = \frac{18 - 9(4) - 18(-13)}{3} = 72$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.2.2

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2X_2 \quad\quad + X_4 &= 0 \\ 2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4 &= -2 \\ 4X_1 - 3X_2 \quad\quad + X_4 &= -7 \\ 6X_1 + X_2 - 6X_3 - 5X_4 &= 6 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u> สร้างเมตริกซ์แต่งเติม

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \end{array}\right]$$

เราไม่ให้ตำแหน่งที่ a_{11} เป็น 0 เพราะว่าเป็นสมาชิกหลักเราสามารถสลับแถวที่ 1 กับแถวอื่น เพื่อหลีกเลี่ยงการหารด้วยศูนย์ จึงเลือกสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 4

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ทำการลดรูปหลักที่ 1 โดยทำการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถว จะได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

สลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ทำการลดรูปหลักที่ 2 โดยการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถว จะได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & -9.0001 \\ 0 & 0 & 2.1818 & 3.3636 & -5.9999 \end{array}\right]$$

ทำการลดรูปหลักที่ 3 ได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 1 & -6 & -5 & 6 \\ 0 & -3.6667 & 4 & 4.3333 & -11 \\ 0 & 0 & 6.8182 & 5.6364 & -9.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5600 & -3.1199 \end{array}\right]$$

แทนค่าย้อนกลับได้

$$X_4 = \frac{-3.1199}{1.5600} = -1.9999$$

$$X_3 = \frac{-9.0001 - 5.6364(-1.9999)}{6.8182} = 0.33325$$

$$X_2 = \frac{-11 - 4.3333(-1.9999) - 4(0.33325)}{-3.6667} = 1.0000$$

$$X_1 = \frac{6 - (-5)(1.9999) - (-6)(0.33325) - (1)(1.0000)}{6}$$

$$= -0.5000$$

วิธีการกำจัดของเกาส์จะใช้เมตริกซ์ขนาด (n)x(n+1) และสูตรที่ใช้ในการคำนวณนั้นจะแบ่งออกเป็น 3 ส่วน

ส่วนที่ 1 : กำหนดค่าเริ่มต้น

$a_{ij}^{(o)} = a_{ij}$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$a_{ij}^{(o)} = b_i$, $j = n+1$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

ส่วนที่ 2 : การกำจัดของเกาส์

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)}$$

โดยที่ $j = n+1, n, ..., k$

$i = k+1, k+2, ..., n$

$k = 1, 2, 3, ..., n-1$ $\quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$

ค่า k คือ จำนวนครั้งที่วนภายในลูปของการกระทำการกำจัดของเกาส์

ค่า a_{kk} คือ สมาชิกหลักต้องไม่เท่ากับศูนย์ มิฉะนั้นโปรแกรมคอมพิวเตอร์จะให้ผลลัพธ์ OVERFLOW

เมื่อเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนแล้วจะทำการแทนค่าย้อนกลับ

ส่วนที่ 3 : การแทนค่าย้อนกลับ

$$X_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{n,n}}$$

$$X_i = (a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}X_j) / a_{ii}$$

โดยที่ $i = n-1, n-2, n-3, ..., 1$

เราสามารถเขียนโปรแกรมจัดการปัญหานี้ได้โดยเลือกแถวที่มีค่าสมาชิกหลักมากที่สุด วิธีนี้เรียกว่า การเลือกแถวหลัก(ROW PIVOTING หรือ PARTIAL PIVOTING)จะทำการสลับเฉพาะแถว ดังตัวอย่างที่ 1.2.1 เป็นผลให้ขบวนการการกำจัดของเกาส์ลดปัญหาที่จะถูกหารด้วยศูนย์และทำให้ได้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำมากยิ่งขึ้น ถ้ามีการสลับทั้งแถวและหลักจะเรียกว่า การเลือกแถวและสดมภ์หลัก(ROW AND COLUMN PIVOTING หรือ COMPLETE PIVOTING) ถ้าในการทำ PIVOTING โปรแกรมไม่สามารถหาสมาชิกหลักที่ไม่เท่ากับศูนย์ได้นั่นคือเมตริกซ์นั้นเป็น SINGULAR ดังนั้นโปรแกรมจะกำหนดค่าที่ต้องการหาเท่ากับ n-rank ให้เท่ากับ 1 และทำการหาค่าที่เหลือ

หมายเหตุ ข้อดี วิธีนี้ได้ค่าจริงออกมาเลย ไม่มีค่าคลาดเคลื่อน

ข้อเสีย ใช้เวลาในการคำนวณมาก เพราะว่าเมื่อกำจัดตัวแปรของเกาส์แล้วต้องแทนค่าย้อนกลับอีก

1.3 วิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน(GAUSS-JORDAN METHOD)

วิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน เป็นการดัดแปลงวิธีกำจัดของเกาส์ซึ่งเป็นวิธีการที่เปลี่ยนรูปจากระบบสมการ $AX=b$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \ \ldots \ + a_{1n}X_n = b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \ \ldots \ + a_{2n}X_n = b_2 \\
\quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + a_{n3}X_3 \ \ldots \ + a_{nn}X_n = b_n
\end{array}
$$

เป็นระบบสมการ

$$IX = b'$$

โดยที่ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์

หรือเขียนเป็น $X = b'$

นั่นคือ

$$
\begin{array}{l}
X_1 = b'_1 \\
X_2 = b'_2 \\
\quad \vdots \\
X_n = b'_n
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_1 \\
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & b'_2 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & b'_3 \\
 & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & b'_n
\end{array}\right]
$$

วิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดนมีขั้นตอนต่างๆดังนี้

1. สร้างเมตริกซ์แต่งเติม[A:b]
2. ทำการสลับแถว(ถ้าจำเป็น)เพื่อให้ได้เมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติว่าสมาชิกที่ตำแหน่งแถวที่ 1 หลักที่ 1 มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในหลักที่ 1 และค่านั้นไม่เป็นศูนย์ เราจะทำการคำนวณต่อไป โดยการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถวเพื่อให้สมาชิกที่ตำแหน่งแถวที่ 1 หลักที่ 1 นั้นมีค่าเท่ากับ 1
3. ทำการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถวกับเมตริกซ์ที่ได้เพื่อให้สมาชิกในหลักที่ 1 ของแถวที่ 2, 3, ...,n เป็นศูนย์ทุกตัวจะได้เมตริกซ์ $[A:b]^{(1)}$ เป็น

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]$$

4. กระทำการเช่นเดียวกับขั้นตอนที่ 2 กับเมตริกซ์ที่ได้ในขั้นตอนที่ 3 โดยทำการสลับแถว (ถ้าจำเป็น)ระหว่างแถวที่ 2, 3, ...,n เพื่อให้ได้เมตริกซ์ที่มีคุณสมบัติว่าสมาชิกที่ตำแหน่งแถวที่ 2 หลักที่ 2 มีค่าสัมบูรณ์มากที่สุดในหลักที่ 2 ถ้าค่านั้นไม่เป็นศูนย์เราจะคำนวณต่อไป โดยการดำเนินการเชิงมูลธาตุแบบแถวให้สมาชิกที่ตำแหน่งแถวที่ 2 หลักที่ 2 นั้นกลายเป็น 1

5. ทำการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถว กับเมตริกซ์ที่ได้เพื่อให้สมาชิกของหลักที่ 2 แถวที่ 1, 3, ...,n เป็นศูนย์ จะได้เมตริกซ์ $[A:b]^{(2)}$ เป็น

$$\left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & & b_1^{(2)} \\
0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & & b_2^{(2)} \\
0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & & b_3^{(2)} \\
 & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & & b_n^{(2)}
\end{array}\right]$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อคำนวณต่อไป และ

$$a_{ii}^{(k)} \neq 0 \ , i = 1, 2, 3, \dots ,n$$

เราจะได้เมตริกซ์

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(k)} \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2^{(k)} \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2^{(k)} \\
 & & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(k)}
\end{array}\right]$$

ดังนั้น $X_i = b_i^{(k)}$

ห้องสมุดคณะวิทยาศาสตร์ สจล.
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

<u>ตัวอย่าง</u> 1.3.1

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$3X_1 + 18X_2 + 9X_3 = 18$$
$$2X_1 + 3X_2 + 3X_3 = 117$$
$$4X_1 + X_2 + 2X_3 = 283$$

<u>วิธีทำ</u> ขั้นแรกสร้างเมตริกซ์แต่งเติมขนาด 3x4 ของสัมประสิทธิ์และค่าคงที่

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 18 & 9 & 18 \\ 2 & 3 & 3 & 117 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

หารแถวที่ 1 ด้วย 3 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 117 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่ 1 ด้วย 2 และนำไปลบกับแถวที่ 2 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 4 & 1 & 2 & 283 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่ 1 ด้วย 4 และนำไปลบกับแถวที่ 3 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & -9 & -3 & 105 \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

หารแถวที่ 2 ด้วย -9 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1/3 & -35/3 \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่ 2 ด้วย 6 และนำไปลบกับแถวที่ 1 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 76 \\ 0 & 1 & 1/3 & -35/3 \\ 0 & -23 & -10 & 259 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่ 2 ด้วย -23 และนำไปลบกับแถวที่ 3 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 76 \\ 0 & 1 & 1/3 & -35/3 \\ 0 & 0 & -7/3 & -28/3 \end{array}\right]$$

หารแถวที่ 3 ด้วย -7/3 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 76 \\ 0 & 1 & 1/3 & -35/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง)

คูณแถวที่ 3 ด้วย 1 และนำไปลบกับแถวที่ 1 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & 1 & 1/3 & -35/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

คูณแถวที่ 3 ด้วย 1/3 และนำไปลบกับแถวที่ 2 จะได้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 72 \\ 0 & 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

จะได้ $IX = b'$

เวกเตอร์ b คือหลักสุดท้ายของเมตริกซ์ลดรูปนั่นคือ ผลเฉลยของสมการ ดังนั้น

$$X_1 = 72$$
$$X_2 = -13$$
$$X_3 = 4$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.3.2

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
2X_2 + \qquad\qquad X_4 &= 0 \\
2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + 2X_4 &= -2 \\
4X_1 - 3X_2 \qquad\quad + X_4 &= -7 \\
6X_1 + X_2 - 6X_3 - 5X_4 &= 6
\end{aligned}
$$

<u>วิธีทำ</u> สร้างเมตริกซ์แต่งเติม

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
2 & 2 & 3 & 2 & -2 \\
4 & -3 & 0 & 1 & -7 \\
6 & 1 & -6 & -5 & 6
\end{array}\right]
$$

สลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 4 และหารแถวที่ 1 ด้วย 6 และลดรูปหลักที่ 1 โดยทำการดำเนินการเชิงธาตุมูลแบบแถวให้สมาชิกตัวอื่นในหลักที่ 1 เป็นศูนย์ จะได้

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0.16667 & -1 & -0.83335 & 1 \\
0 & 1.6667 & 5 & 3.6667 & -4 \\
0 & -3.6667 & 4 & 4.33347 & 11 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
$$

สลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3 และหารแถวที่ 2 ด้วย -3.6667 และลดรูปหลักที่ 2 จะได้

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -1.5000 & -1.2000 & 1.4000 \\
0 & 1 & 2.9999 & 2.2000 & -2.4000 \\
0 & 0 & 15.0000 & 12.4000 & -19.8000 \\
0 & 0 & -5.9998 & -3.4000 & 4.8000
\end{array}\right]
$$

หารแถวที่ 3 ด้วย 15.000 และลดรูปหลักที่ 3 จะได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.04005 & -0.5800 \\ 0 & 1 & 0 & -0.27993 & 1.5599 \\ 0 & 0 & 1 & 0.82667 & -1.3200 \\ 0 & 0 & 0 & 1.55990 & -3.1197 \end{array}\right]$$

หารแถวที่ 4 ด้วย 1.5599 และลดรูปหลักที่ 4 จะได้

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.49999 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1.00010 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.33326 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1.99990 \end{array}\right]$$

ดังนั้น จะได้

$$X_1 = -0.49999$$
$$X_2 = 1.0001$$
$$X_3 = 0.33326$$
$$X_4 = -1.9999$$

วิธีกำจัดของเกาส์-จอร์แดน จะใช้เมตริกซ์ขนาด (n)x(n+1) และสูตรที่ใช้ในการคำนวณนั้นแบ่งออกเป็น 2 ส่วน

ส่วนที่ 1 : การกำหนดค่าเริ่มต้น

$a_{ij}^{(o)} = a_{ij}$, j = 1, 2, 3, ...,n , i = 1, 2, 3, ...,n

$a_{ij}^{(o)} = b_i$, j = n+1 , i = 1, 2, 3, ...,n

ส่วนที่ 2 : การลดรูป

$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad , \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}$$

โดยที่ $i = 1, 2, 3, \ldots, n \; , \quad i \neq k$

$j = n+1, n, n-1, \ldots, k$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$

เราจะให้ค่าเริ่มต้นลงในหลักที่ 1 ถึง n ของเมตริกซ์แต่งเติม และใส่เวกเตอร์และค่าคงที่ลงในหลักที่n+1การลดรูปเมตริกซ์จะหารแต่ละแถวด้วยสมาชิกหลักทำให้สมาชิกในเส้นทแยงของส่วนสัมประสิทธิ์แต่งเติมกลายเป็นเอกลักษณ์ ในที่สุดการลดรูปจะทำให้สมาชิกตัวอื่นในส่วนของสัมประสิทธิ์ยกเว้นในแนวเส้นทแยงมุมเป็นศูนย์หมด

หมายเหตุ ข้อดี เหมาะสำหรับเมตริกซ์ที่มีศูนย์จำนวนมาก จะใช้เวลาในการคำนวณน้อยเพียงไม่กี่ขั้นตอน

ข้อเสีย ถ้าเมตริกซ์มีศูนย์จำนวนน้อยจะใช้เวลาในการคำนวณมากยิ่งถ้าเป็นเมตริกซ์ขนาดใหญ่

1.4 วิธีของเกาส์-ไซเดิล(GAUSS-SEIDEL METHOD)

วิธีของเกาส์-ไซเดิล เป็นวิธีซ้ำ(ITERATIVE METHOD)วิธีหนึ่งโดยใช้ค่าประมาณของผลเฉลยของระบบสมการที่ได้ในแต่ละขั้นตอนไปแทนในระบบสมการในขั้นตอนต่อไปทำเช่นนี้ซ้ำไปเรื่อยๆ

ตัวอย่าง 1.4.1

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$8X_1 + X_2 - X_3 = 8 \qquad (1)$$
$$2X_1 + 9X_2 + X_3 = 12 \qquad (2)$$
$$X_1 - 7X_2 + 2X_3 = -4 \qquad (3)$$

วิธีทำ จัดสมการเสียใหม่

จาก (1) $X_1 = 1 \quad -0.125X_2 + 0.125X_3$

จาก (2) $X_2 = 0.571 + 0.143X_1 \quad + 0.286X_3$

จาก (3) $X_3 = 1.333 - 0.222X_1 - 0.111X_2$

เริ่มแรกเราต้องกำหนดค่าเริ่มต้นให้ X_2 และ X_3 เพื่อที่จะแทนลงในสมการที่(1)

กำหนดให้ $X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = X_3^{(0)} = 0$

$$X_1^{(1)} = 1 \quad -0.125(0) \quad +0.125(0) = 1$$
$$X_2^{(1)} = 0.571 + 0.143(1) \quad +0.286(0) = 0.714$$
$$X_3^{(1)} = 1.333 - 0.222(1) - 0.111(0.714) = 1.032$$

$$X_1^{(2)} = 1 \quad -0.125(0.714) \quad +0.125(1.032) = 1.041$$
$$X_2^{(2)} = 0.571 + 0.143(1.041) \quad +0.286(1.032) = 1.014$$
$$X_3^{(2)} = 1.333 - 0.222(1.041) - 0.111(1.014) = 0.990$$

$$X_1^{(m+1)} = 1 \qquad\qquad -0.125X_2^{(m)} +0.125X_3^{(m)}$$
$$X_2^{(m+1)} = 0.571 +0.143X_1^{(m+1)} \qquad +0.286X_3^{(m)}$$
$$X_3^{(m+1)} = 1.333 -0.222X_1^{(m+1)} -0.111X_2^{(m+1)}$$

เมื่อคำนวณต่อไปได้ดังนี้

m	$X_1^{(m)}$	$X_2^{(m)}$	$X_3^{(m)}$
0	0	0	0
1	1.000	0.714	1.032
2	1.041	1.014	0.990
3	0.997	0.996	1.002
4	1.001	1.000	1.000
5	1.000	1.000	1.000

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการนั้นคือ

$$X_1 = 1 \quad , \qquad X_2 = 1 \quad , \qquad X_3 = 1$$

วิธีของเกาส์-ไซเดิล จะใช้สูตรในการคำนวณดังนี้

$$X_i^{(m+1)} = (b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}X_j^{(m+1)} - \sum_{j=j+1}^{n} a_{ij}X_j^{(m)})/a_{ii}$$

เราต้องให้ค่าเริ่มต้นในการคำนวณ คือ $X_i^{(o)}$, $i = 2, 3, \ldots, n$

และจะหยุดเมื่อ $\sum_{i=1}^{n} \left| X_i^{(m+1)} - X_i^{(m)} \right| < EPS$

EPS คือ ค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (CONVERGENCE CRITERION)

ตัวอย่าง 1.4.2

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$X_1 + 4X_2 + X_3 = 5$$
$$2X_1 + X_2 + 4X_3 = 1$$
$$3X_1 - X_2 + X_3 = 4$$

โดยค่าเริ่มต้น $X_1^{(0)} = X_2^{(0)} = X_3^{(0)} = 0$

และจะหยุดเมื่อ $\sum_{i=1}^{3} \left| X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)} \right| < 0.00001$

ค่าคำตอบที่แท้จริง คือ $x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

วิธีทำ เมื่อคำนวณค่าจะได้ดังต่อไปนี้

k	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$\sum_{i=1}^{3} \left\| X_i^{(k)} - X_i^{(k-1)} \right\|$
0	0	0	0	-
1	5	-9	-20	34
2	61	-41	-220	288
3	389	103	-1060	1321
4	653	2935	960	5136
5	-12715	21511	59660	50624
6	-145699	52759	489860	594432
7	-700891	-557657	1545020	2220768
8	685613	-7551305	-9608140	1953312
9	39813365	-41194169	-160634260	223796736
10	325410941	-8284841	-984517660	1142390300

จะเห็นว่าค่าลู่ออก(DIVERGE)คือไม่สามารถหาค่าตอบได้

วิธีของเกาส์-ไซเดิล จะลู่เข้า(CONVERGE)สู่ผลเฉลยของระบบสมการเมื่อผลรวมของค่าสัมบูรณ์ในแนวเส้นทแยงของเมตริกซ์มีค่ามากที่สุด ดังนั้นเราควรจะสลับสมการเสียก่อน

ตัวอย่าง 1.4.3

จากตัวอย่างที่ 1.4.2 เรียงระบบสมการใหม่เป็น

$$3X_1 - X_2 + X_3 = 4$$
$$X_1 + 4X_2 + X_3 = 5$$
$$2X_1 + X_2 + 4X_3 = 1$$

วิธีทำ เมื่อคำนวณค่าจะได้ดังนี้

k	$X_1^{(k)}$	$X_2^{(k)}$	$X_3^{(k)}$	$\sum_{i=1}^{3}\left\|X_i^{(k)}-X_i^{(k-1)}\right\|$
0	0	0	0	-
1	1.33333333	0.916666667	-0.645333333	2.89583334
2	1.85416667	0.947916667	-0.9140625	0.8203125
3	1.95399306	0.990017361	-0.974500868	0.202365452
4	1.98817274	0.996582031	-0.99323188	0.059475369
5	1.99660464	0.999156811	-0.998091521	0.0158663145
6	1.99908278	0.999752186	-0.999479435	0.004461430
7	1.99974387	0.999933891	-0.99935541	0.0012187753
8	1.99992977	0.999981411	-0.999960236	0.000338240
9	1.99998055	0.999994922	-0.99998005	0.000093062
10	1.99999464	0.999998591	-0.999996969	0.000025726
11	1.99999852	0.999999613	-0.999999163	0.000007093

ดังนั้นผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$X_1 = 1.99999852$$
$$X_2 = 0.999999613$$
$$X_3 = -0.999999163$$

หมายเหตุ ข้อดี ใช้ได้กับทุกกรณี

ข้อเสีย บางกรณีเกิดการลู่ออกของผลเฉลย จึงต้องทำการสลับสมการยิ่งถ้าสมการมีจำนวนมาก จะต้องใช้เวลามากในการทดลองสลับสมการ

บทที่ 2
ระบบสมการไม่เชิงเส้น
(SYSTEM OF NONLINEAR EQUATIONS)

2.1 บทนำ

สมการไม่เชิงเส้นจะอยู่ในรูปแบบ

$$f(x) = 0$$

โดยที่ x และ f(x) อาจเป็นเวกเตอร์ที่มีมิติเป็นหนึ่งหรือมากกว่าหนึ่ง ถ้ามีมิติเป็นหนึ่งจะแก้ปัญหาไม่เชิงเส้นตัวแปรเดียวเพียงหนึ่งสมการ ถ้ามีมิติเป็น $k>1$ จะเป็นการแก้สมการที่ไม่เชิงเส้นที่มี n ตัวแปร เป็นจำนวน m สมการ คือระบบสมการไม่เชิงเส้น

ระบบสมการไม่เชิงเส้นจะอยู่ในรูปแบบ

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots,x_n) &= 0\\
f_2(x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots,x_n) &= 0\\
f_3(x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots,x_n) &= 0\\
&\vdots\\
f_m(x_1,\ x_2,\ x_3\ \ldots,x_n) &= 0
\end{aligned}$$

สำหรับในที่นี้เราศึกษาเฉพาะ $m = n$

การหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้นโดยวิธีการทำซ้ำนี้ การลู่เข้าหรือการลู่ออกของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับปัจจัยบางอย่าง เช่น

1. คุณลักษณะของสมการทุกสมการในระบบ
2. การเลือกว่าจะให้ตัวแปรใดเป็นตัวแปรตัวที่ 1, 2, 3, ...,n ตามลำดับ
3. การเลือกว่าจะให้สมการใดเป็นสมการที่ 1, 2, 3, ...,n ตามลำดับ
4. การกำหนดค่าเริ่มต้นที่จะใช้ในการกระทำซ้ำ

ดังนั้นถ้าเกิดปัญหาลู่ออกของผลเฉลย ควรเปลี่ยนลำดับของตัวแปรหรือสมการ หรือกำหนดค่าเริ่มต้นใหม่

2.2 <u>วิธีของนิวตันปรับปรุงใหม่</u> (MODIFIED NEWTON METHOD)

วิธีนี้เป็นการดัดแปลงวิธีของนิวตันสำหรับฟังก์ชันตัวแปรเดียวมาใช้กับฟังก์ชันหลายตัวแปร

$$x_1^{(m+1)} = x_1^m - \frac{f_1(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}{f_{11}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}$$

$$x_2^{(m+1)} = x_2^m - \frac{f_2(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}{f_{22}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(m+1)} = x_n^m - \frac{f_n(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}{f_{nn}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}$$

ดังนั้นจะได้

$$x_i^{(m+1)} = x_i^m - \frac{f_i(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}{f_{ii}(x_1^m, x_2^m, x_3^m, \ldots, x_n^m)}$$

โดย $f_{ii} = \partial f_i / \partial x_i$

รูปแบบนี้อาจดัดแปลงเพื่อให้การคำนวณได้เร็วขึ้น และผลที่ได้จะดีขึ้นกว่าเดิม ดังนี้

$$x_1^{(m+1)} = x_1^m - \frac{f_1(x_1^m,\ x_2^m,\ x_3^m,\ \ldots, x_n^m)}{f_{11}(x_1^m,\ x_2^m,\ x_3^m,\ \ldots, x_n^m)}$$

$$x_2^{(m+1)} = x_2^m - \frac{f_2(x_1^{(m+1)},\ x_2^m,\ x_3^m,\ \ldots, x_n^m)}{f_{22}(x_1^{(m+1)},\ x_2^m,\ x_3^m,\ \ldots, x_n^m)}$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(m+1)} = x_n^m - \frac{f_n(x_1^{(m+1)},\ x_2^{(m+1)},\ \ldots, x_{n-1}^{(m+1)}, x_n^m)}{f_{nn}(x_1^{(m+1)},\ x_2^{(m+1)},\ \ldots, x_{n-1}^{(m+1)}, x_n^m)}$$

ดังนั้นจะได้

$$x_i^{(m+1)} = x_i^m - \frac{f_i(x_1^{(m+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(m+1)},\ \ldots, x_i^{(m)}, x_n^m)}{f_{ii}(x_1^{(m+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(m+1)},\ \ldots, x_i^{(m)}, x_n^m)}$$

โดย $f_{ii} = \partial f_i / \partial x_i$

ต้องกำหนดค่าเริ่มต้นให้ x_i และกระทำซ้ำจะหยุดเมื่อ $\sum_{i=1}^{n} \left| f_i \right| < EPS$

หรือ $\sum_{i=1}^{n} \left| x_i^{(m+1)} - x_i^m \right| < EPS$, EPS คือค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1.1

จงหาผลเฉลยของ

$$x^2 - y^2 = 4$$
$$e^{(-x)} + y = 1$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้นเป็น $x_o = 2$, $y_o = 1$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x,y) = x^2 - y^2 - 4$

$g(x,y) = e^{(-x)} + y - 1$

$f_x = 2x$

$g_y = 1$

ขั้นตอนการหาค่า x, y

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o,y_o)}{f_x(x_o,y_o)}$$
$$= 2 - \frac{(4-1-4)}{4} = 2.25$$

$$y_1 = y_o - \frac{g(x_1,y_o)}{g_y(x_1,y_o)}$$
$$= 1 - \frac{(0.105399+1-1)}{1} = 0.894601$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1,y_1)}{f_x(x_1,y_1)}$$
$$= 2.25 - \frac{(5.06025-0.800309-4)}{4.5} = 2.191735$$

$$y_2 = y_1 - \frac{g(x_2,y_1)}{g_y(x_2,y_1)}$$

$$= 0.894601 - \frac{(0.11722+0.8946-1)}{1} = 0.888277$$

โดยการคำนวณต่อไปได้ดังนี้

n	x	y
0	2.000000	1.000000
1	2.250000	0.894621
2	2.171935	0.888277
3	2.188389	0.887902
4	2.188234	0.887885
5	2.188227	0.887885
6	2.188227	0.887885

ผลเฉลยของระบบสมการคือ x = 2.188227 และ y = 0.887885

หมายเหตุ ข้อดี การคำนวณง่าย

ข้อเสีย สมการต้องหาอนุพันธ์ได้ง่าย และถ้าอนุพันธ์ใกล้เคียงศูนย์จะเกิด OVERFLOW

บทที่ 3
การโปรแกรมเชิงเส้นตรง
(LINEAR PROGRAMMING)

3.1 บทนำ

ความหมายของ "**การโปรแกรมเชิงเส้นตรง**" จะแยกพิจารณาได้เป็น 2 ส่วน คือ คำว่า "**โปรแกรม**" หมายถึงวิธีการหรือขั้นตอนการคำนวณเพื่อแก้ปัญหาของกลุ่มสมการหรืออสมการที่กำหนดให้ และคำว่า "**เชิงเส้นตรง**" หมายถึง ความสัมพันธ์ระหว่างค่าตัวแปรต่างๆ อยู่ในลักษณะการแปรผันตรง หรือ ในทางคณิตศาสตร์ ก็คือสัมประสิทธิ์แสดงกำลังของทุกค่าตัวแปรต้องมีค่าเป็นหนึ่ง

การโปรแกรมเชิงเส้นตรงเป็นเทคนิคในการแก้ไขปัญหาทางการจัดสรรทรัพยากรที่มีลักษณะความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องเป็นเชิงเส้นตรงทั้งสิ้น (all linear function) **โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อแก้ปัญหาและตัดสินใจให้เกิดผลตามแนวทางการดำเนินงานที่ดีที่สุด** (optimal) เช่น กำไรสูงสุด ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดและแนวทางการดำเนินงานอื่น ๆ ที่ให้ผลประโยชน์มากที่สุดต่อระบบนั้นๆโดยมีเงื่อนไขที่กำหนดให้เช่น สภาวะตลาด การขาดแคลนวัตถุดิบ กำลังคน เครื่องจักร เงินทุน สถานที่ ความรู้ ข้อกำหนดของกฎหมายและระเบียบต่างๆ ของสังคม นโยบายของฝ่ายบริหาร ขอบข่ายของธุรกิจที่ดำเนินอยู่และอื่น ๆ ลักษณะเฉพาะของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง คือ ฟังก์ชั่นที่แทนเป้าหมายและข้อจำกัดต่าง ๆ เป็นแบบเชิงเส้นทั้งสิ้น

3.2 องค์ประกอบในการสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

1. ตัวแปรหลักหรือตัวแปรสำหรับการตัดสินใจของปัญหา ต้องมีค่าไม่ติดลบ(มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์)
2. สมการเป้าหมายจะต้องเขียนเป็นสมการเส้นตรงที่มีตัวแปรสำหรับตัดสินใจร่วมอยู่และต้องกำหนดด้วยว่าเป้าหมายเป็นแบบ ต่ำสุด หรือ สูงสุด
3. เงื่อนไขหรือขอบข่ายจะต้องเป็นสมการหรืออสมการเส้นตรง ที่มีตัวแปรสำหรับตัดสินใจร่วมอยู่
4. จะต้องประกอบด้วยค่าพารามิเตอร์ 3 ชนิด คือ

   C_j = ผลประโยชน์ต่อหน่วยของตัวแปรสำหรับตัดสินใจในสมการเป้าหมาย

   b_j = จำนวนทรัพยากรที่จัดหามาได้

   a_{ij} = ทรัพยากรที่ใช้ต่อหน่วยของตัวแปรสำหรับตัดสินใจในสมการ หรืออสมการเงื่อนไข

5. ตัวแปรสำหรับตัดสินใจจะต้องมีค่าเป็นแบบต่อเนื่อง หรือค่าเป็นเลขทศนิยม

3.3 ขั้นตอนในการสร้างรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

1. กำหนดตัวแปรสำหรับตัดสินใจพร้อมทั้งหน่วยวัดจากปัญหา และเป็นตัวแปรที่ต้องการคำนวณค่า เช่น ผลิตสินค้าแต่ละแบบจำนวนเท่าไร

2. สร้างสมการเป้าหมายให้อยู่ในรูปสมการเส้นตรงซึ่งเป้าหมายอาจจะเป็นแบบสูงสุดหรือต่ำสุดก็ได้ขึ้นอยู่กับปัญหานั้น ๆ

3. สร้างเงื่อนไขจากสิ่งต่อไปนี้

    ก. จำนวนทรัพยากรที่จัดหามาได้ เช่น วัตถุดิบแรงงานที่ใช้ในการผลิต

    ข. ความต้องการทรัพยากรต่อหน่วยของตัวแปรสำหรับตัดสินใจเช่นจำนวน วัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตสินค้าต่อหน่วย จำนวนแรงงานที่ใช้ในการผลิตสินค้าต่อหน่วย

    ค. สร้างเงื่อนไขให้อยู่ในรูปสมการ หรืออสมการเส้นตรง ด้วยการนำเอาความต้องการทรัพยากรมาเปรียบเทียบกับจำนวนทรัพยากรที่จัดหามาได้

3.4 รูปแบบทางคณิตศาสตร์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยทั่วไป

สมการเป้าหมาย ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ

$$Z = c_j X_j \qquad \ldots(1)$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$a_{ij} X_j \ (*) \ b_i \quad : i = 1,2,\ldots,m \qquad \ldots(2)$$

$$X_j >= 0 \quad : j = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots(3)$$

สมการที่ (1),(2) และ (3) เป็นรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของโปรแกรมเชิงเส้นตรง

X_j เป็นตัวแปรสำหรับการตัดสินใจ

c_j และ a_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรสำหรับตัดสินใจในสมการเป้าหมาย, ในสมการหรืออสมการเงื่อนไข (*) แทนเครื่องหมาย <= , = และ >=

n, m เป็นเลขจำนวนเต็มบวกที่บอกจำนวนตัวแปรสำหรับตัดสินใจและจำนวนสมการหรืออสมการเงื่อนไขตามลำดับ

3.5 ขั้นตอนการดำเนินการของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

วิธีการใช้เทคนิคทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรงในการแก้ปัญหาต่าง ๆ ซึ่งพอสรุปขั้นตอนการทำงานได้ดังนี้

การจัดตั้งรูปแบบแทนระบบของปัญหา (Model Formulation)

ก่อนอื่นต้องศึกษาข้อมูลองค์ประกอบของปัญหาให้เข้าใจโดยเลือกเฉพาะองค์ประกอบที่สำคัญและมีอิทธิพลมาก แล้วจึงตั้งตัวแปรแทนส่วนประกอบของปัญหานั้น ๆ ให้ถูกต้องจนสามารถจัดตั้งส่วนประกอบดังนี้

** สมการกำหนดเป้าหมาย **

สมการเป้าหมายนี้ต้องมีลักษณะเป็นสมการแบบเส้นตรง โดยมีเป้าหมายที่ต้องการหาค่าที่เหมาะสมจะเป็นต่ำสุด หรือ สูงสุดก็ได้ต้องเป็นสมการเป้าหมายเดียวคือ ต้องการหากำไรสูงสุดหรือต้องการหาต้นทุนต่ำสุด **สมการเป้าหมาย** เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรที่ต้องการทราบค่ากำไรหรือต้นทุน

** สร้างเงื่อนไข **

เนื่องจากรายละเอียดที่มีอยู่นั้น จะต้องมีทางเลือกปฏิบัติได้หลายทางประกอบกับทรัพยากรมีจำกัดประการหนึ่ง เช่น จำนวนชั่งโมงเครื่องจักรมีจำกัด วัตถุดิบก็ดีหรือแรงงานก็ดีต้องรวบรวมดูว่าปัญหาที่เกิดขึ้นนั้นมีจำกัดอย่างใดบ้าง นำเงื่อนไขหรือขอบข่ายเหล่านี้มาสร้างในรูปสมการแบบเส้นตรง หรือ อสมการแบบเส้นตรง

รูปสมการแบบเส้นตรงได้แก่

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1$$

รูปอสมการแบบเส้นตรงได้แก่

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n <= b_1$$

หรือ

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n >= b_1$$

** พิจารณาให้ตัวแปรทุกตัวมีค่าไม่ติดลบ **

คือ มีค่าเท่ากับศูนย์หรือมากกว่าศูนย์ การให้ค่าตัวแปรทุกตัวที่กำหนดขึ้นมานั้นมีค่าไม่ติดลบถือเป็นเงื่อนไขหรือขอบข่ายที่ไม่ติดลบ เช่น

$$X_i >= 0 \quad : \quad i = 1,2,\ldots,n$$

การหาผลลัพธ์ของรูปแบบแทนระบบของปัญหา (Model Solution)

เมื่อสามารถจัดปัญหาเข้ารูปแบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรงเรียบร้อยแล้วเราสามารถหาผลลัพธ์จากรูปแบบแทนระบบด้วยวิธีการดังกล่าวต่าง ๆ ดังนี้

ก. ในกรณีที่เป็นปัญหาที่มีตัวแปรเป็น 2 ตัว

1. วิธีขจัดตัวแปรของคำตอบ (direct elimination method)
2. วิธีอนุมานทางคณิตศาสตร์ (mathematical deduction method)
3. วิธีกราฟ (graphical method)

ข. ในกรณีที่เป็นปัญหามีตัวแปรมากกว่า 2 ตัว

1. วิธีทางพีชคณิตทั่ว ๆ ไป (general algebraic method)
2. วิธีซิมเพลก (simplex method)

แต่ในที่นี้จะศึกษาเพียงวิธีซิมเพลก

3.6 <u>**การจัดตั้งรูปแบบแทนระบบของปัญหา**</u> (Model Fomulation)

การใช้เทคนิคทางการโปรแกรมเชิงเส้นตรง จะต้องรวบรวมปัญหาแล้วจัดเข้าสู่รูปแบบให้มีโครงสร้างดังที่กล่าวมาแล้ว ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการจัดตั้งรูปแบบของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

ตัวอย่าง 3.6.1 (วางแผนการผลิต)

โรงงานเล็กๆโรงงานหนึ่งผลิตสินค้า 2 ชนิด คือ A และB ความต้องการของตลาดคือต้องการสินค้า 2 ชนิดนี้เท่าที่ความสามารถของโรงงานจะผลิตได้ถ้าผลผลิตของแต่ละชนิดต้องใช้เวลาผลิตใน 3 แผนกต่างๆกันดังตารางที่ 1 แต่ละแผนกมีกำลังคนในแต่ละสัปดาห์จำกัดดังตารางที่ 2 สมมติว่าขายสินค้าชนิดที่ A 1 ชิ้นได้กำไร 10 บาท และขายสินค้าชนิด B 1 ชิ้นได้กำไร 15 บาท ทางฝ่ายวางแผนของ

โรงงานจะต้องวิเคราะห์ดูว่าจะผลิตสินค้าอย่างไรเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด และสอดคล้องกับข้อจำกัดที่มีอยู่

สินค้า	เวลาที่ใช้ในการผลิต(ชั่วโมง)		
	แผนก 1	2	3
A	2	1	4
B	2	2	2

ตารางที่ 1 แสดงเวลาที่แต่ละแผนกใช้ผลิตสินค้าแต่ละชนิด 1 ชิ้น

แผนก	กำลังคน (ชั่วโมง)/สัปดาห์
1	160
2	120
3	280

ตารางที่ 2 กำลังคนที่มีอยู่ในแต่ละแผนกต่อสัปดาห์

วิธีทำ

เป้าหมาย คือ กำไรสูงสุด

ตัวแปรตัดสินใจคือจำนวนสินค้าที่จะผลิต

ข้อจำกัด คือ กำลังคนในแต่ละแผนกต่อสัปดาห์

ให้ X_1 = จำนวนสินค้าชนิด A ที่จะผลิต

X_2 = จำนวนสินค้าชนิด B ที่จะผลิต

Z = กำไร

สมการเป้าหมายคือ

กำไร = (กำไรของสินค้า A 1หน่วย)*(จำนวนสินค้า A)+(กำไรของสินค้า B 1หน่วย)*(จำนวนสินค้า B)

$$Z = 10X_1 + 15X_2$$

เงื่อนไขกำลังคนในแต่ละแผนกต่อสัปดาห์มีจำกัด

เวลาที่ใช้ผลิตในแผนกที่ 1 = (เวลาที่ใช้ผลิตสินค้า A 1 หน่วย)*(จำนวนสินค้า A) +(เวลาที่ใช้ในการผลิต B 1 หน่วย)*(จำนวนสินค้า B)

$= 2X_1 + 2X_2$

จากตารางที่ 2 กำลังคนในแผนกที่ 1ไม่เกิน 160 ชั่วโมงต่อสัปดาห์
ดังนั้น

$$2X_1 + 2X_2 <= 160$$

ในทำนองเดียวกันกำลังคนในแผนกที่ 2 และ 3 ไม่เกิน 120 ชั่วโมง และ 280 ชั่วโมง ตามลำดับจะได้

$$X_1 + 2X_2 <= 120$$
$$4X_1 + 2X_2 <= 280$$

เมื่อ X_1 และ X_2 แทนจำนวนสินค้า ค่า X_1 และ X_2 จึงติดลบไม่ได้
นั่นคือ $X_1 >= 0$ และ $X_2 >= 0$

จากสมการเป้าหมายของข้อจำกัดที่ได้ล้วนเป็นแบบเชิงเส้นทั้งสิ้น รูปแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหานี้คือ

หาค่ามากสุดของ $Z = 10X_1 + 15X_2$

โดยมีเงื่อนไขคือ

$$
\begin{aligned}
2X_1 + 2X_2 &<= 160 \\
X_1 + 2X_2 &<= 120 \\
4X_1 + 2X_2 &<= 280 \\
X_1 &>= 0 \\
X_2 &>= 0
\end{aligned}
$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.6.2 (การให้อาหารสัตว์)

อาหารสัตว์ 3 ชนิด หินปูน ข้าวโพด และถั่วเหลือง ซึ่งมีส่วนประกอบของธาตุอาหารต่อ 1 ปอนด์ต่างๆกันดังตารางที่ 3 ค่าใช้จ่ายของอาหารแต่ละชนิดต่อ 1 ปอนด์

ดังตารางที่ 3 สมมติว่า 1 วันต้องให้อาหารสัตว์ทั้งหมด 100 ปอนด์ โดยที่ต้องได้ธาตุอาหารดังต่อไปนี้

แคลเซียมอย่างน้อย 0.8% แต่ไม่เกิน 1.2%

โปรตีนอย่างน้อย 22%

ธาตุอาหารอื่นๆไม่เกิน 5%

อาหาร	ส่วนประกอบต่อ 1 ปอนด์			ค่าใช้จ่ายต่อ 1 ปอนด์ (บาท)
	แคลเซียม	โปรตีน	ธาตุอื่นๆ	
หินปูน	0.380	0.00	0.00	16
ข้าวโพด	0.001	0.09	0.02	20
ถั่วเหลือง	0.002	0.50	0.08	18

<u>ตารางที่ 3</u> แสดงส่วนประกอบของอาหารแต่ละชนิดต่อ 1 ปอนด์ และต้นทุน 1 ปอนด์

จงหาว่าควรจะให้อาหารแต่ละชนิดจำนวนเท่าใดเพื่อให้เสียค่าใช้จ่ายน้อยสุดและได้ธาตุอาหารตามที่กำหนด

วิธีทำ

เป้าหมายคือค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด

ตัวแปรตัดสินใจคือจำนวนอาหารแต่ละชนิดที่ให้ในแต่ละวัน

เงื่อนไขคือปริมาณธาตุอาหารแต่ละวัน

ให้ Z = ค่าใช้จ่าย

X_1 = จำนวนหินปูน(ปอนด์)ที่ให้แต่ละวัน

X_2 = จำนวนข้าวโพด(ปอนด์)ที่ให้แต่ละวัน

X_3 = จำนวนถั่วเหลือง(ปอนด์)ที่ให้แต่ละวัน

โดยที่ $X_1 + X_2 + X_3 = 100$ ปอนด์

สมการเป้าหมายคือ $Z = 16X_1 + 20X_2 + 18X_3$

ข้อจำกัดของปริมาณธาตุอาหารที่ต้องให้ในแต่ละวันดังนี้

ปริมาณแคลเซียมที่ได้ในแต่ละวันจากอาหาร 3 ชนิด คือ

$$0.380X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3$$

ในแต่ละวันจะต้องได้แคลเซียมอย่างน้อย 0.8% แต่ไม่เกิน 1.2%

$$0.380X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 <= 1.2$$

$$0.380X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 >= 0.8$$

ในแต่ละวันต้องได้โปรตีนอย่างน้อย 22%

$$0.00X_1 + 0.09X_2 + 0.5X_3 >= 22$$

ในแต่ละวันต้องได้ธาตุอาหารอื่นๆ ไม่เกิน 5%

$$0.00X_1 + 0.02X_2 + 0.08X_3 <= 5$$

ดังนั้นกำหนดการเชิงเส้นของปัญหานี้คือ

หาค่าน้อยที่สุดของ $Z = 16X_1 + 20X_2 + 18X_3$

โดยมีเงื่อนไข $X_1 + X_2 + X_3 = 100$

$$0.380X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 <= 1.2$$

$$0.380X_1 + 0.001X_2 + 0.002X_3 >= 0.8$$

$$0.09X_2 + 0.5X_3 >= 22$$

$$0.02X_2 + 0.08X_3 <= 5$$

$$X_1 >= 0, X_2 >= 0, X_3 >= 0$$

ตัวอย่างที่ 3.6.3 (การจัดขนมปัง)

โรงงานทำขนมปังแห่งหนึ่งได้มีการตัดสินใจที่จะจัดหีบห่อขนมปัง 4 แบบ คือ แบบ A,B,C,D แต่ละแบบจะประกอบด้วยขนมปัง 3 ชนิด คือ ขนมปังครีมรสส้ม(O.C.)ขนมปังครีมช็อคโกแลต(C.C.) และขนมปังเวเฟอร์(W) ในปริมาณต่างๆกัน ดังตารางที่ 4 ปริมาณของขนมปังแต่ละชนิดที่ได้ต่อวันและต้นทุนการผลิตดังตารางที่ 5

จงหารูปแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหานี้ว่าควรจะจัดขนมปังแต่ละหีบห่ออย่างไร เพื่อให้ได้กำไรสูงสุด โดยที่ในด้านการตลาดไม่มีข้อกำจัดใดๆทั้งสิ้น

หีบห่อ	ส่วนประกอบ	ราคาขาย/ก.ก(บาท)
A	O.C. อย่างน้อย 40%	20
	C.C. น้อยกว่า 20%	
	W ไม่จำกัด	
B	O.C. อย่างน้อย 20%	25
	C.C. อย่างมาก 40%	
	W ไม่จำกัด	
C	O.C. มากกว่า 50%	22
	C.C. น้อยกว่า 10%	
	W ไม่จำกัด	
D	ไม่จำกัด	12

ตารางที่ 4 แสดงปริมาณขนมปังในแต่ละหีบห่อและราคาขายของแต่ละหีบห่อ คิดราคาต่อกิโลกรัม

ขนมปัง	จำนวนที่ผลิตต่อวัน (กิโลกรัม)	ต้นทุนการผลิตต่อกิโลกรัม(บาท)
O.C	200	8
C.C	200	9
W	150	7

ตารางที่ 5 แสดงปริมาณขนมปังแต่ละชนิดที่ผลิตต่อวันและต้นทุนการผลิตต่อกิโลกรัมของขนมปังแต่ละชนิด

วิธีทำ เป้าหมายคือกำไรสูงสุด ตัวแปรตัดสินใจคือขนมปังแต่ละชนิดในแต่ละหีบห่อ ข้อจำกัดคือปริมาณที่ผลิตต่อวันและปริมาณที่จัดลงแต่ละหีบห่อแบบต่างๆดังนี้

หีบห่อแบบ A : X_{A1} = ปริมาณ O.C.
X_{A2} = ปริมาณ C.C.
X_{A3} = ปริมาณ W

หีบห่อแบบ B : X_{B1} = ปริมาณ O.C.
X_{B2} = ปริมาณ C.C.
X_{B3} = ปริมาณ W

หีบห่อแบบ C : X_{C1} = ปริมาณ O.C.
X_{C2} = ปริมาณ C.C.
X_{C3} = ปริมาณ W

หีบห่อแบบ D : X_{D1} = ปริมาณ O.C.
X_{D2} = ปริมาณ C.C
X_{D3} = ปริมาณ W

เงื่อนไขด้านความสามารถในการผลิตขนมปังแต่ละชนิด เช่น ขนมปังครีมรสส้มผลิตได้อย่างมาก 200 ก.ก. ดังนั้น

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} + X_{D1} <= 200$$

ขนมปังครีมรสช็อกโกแลตและเวเฟอร์ผลิตได้อย่างมาก 200ก.ก. และ 150 ก.ก. ตามลำดับ

$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} + X_{D2} <= 200$$

$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3} <= 150$$

เงื่อนไขด้านส่วนประกอบของหีบห่อแต่ละแบบ ดังนี้

หีบห่อ A : $X_{A1} >= 0.4(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3})$

$X_{A2} <= 0.2(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3})$

หีบห่อ B : $X_{B1} >= 0.2(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3})$

$X_{B2} <= 0.4(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3})$

หีบห่อ C : $X_{C1} >= 0.5(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$

$x_{C2} <= 0.1(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$

หีบห่อ D : ไม่จำกัดจำนวนขนมปังแต่ละชนิด

สมการเป้าหมายคือกำไรสูงสุด ถ้า Z = กำไร = ราคาขาย - ต้นทุน จะได้

$$Z = 20(X_{A1} + X_{2} + X_{A3}) + 25(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) + 22(X_{C1} + X_{C2} + X_{C3})$$
$$+12(X_{D1} + X_{D2} + X_{D3}) - 8(X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} + X_{D1})$$
$$-9(X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} + X_{D2}) - 7(X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3})$$

ดังนั้นจะได้กำหนดการเชิงเส้นของปัญหานี้ คือ

หาค่าสูงสุดของ $Z = 12X_{A1} + 11X_{A2} + 13X_{A3} + 17X_{B1} + 16X_{B2} + 18X_{B3} + 14X_{C1}$
$+13X_{C2} + 15X_{C3} + 4X_{D1} + 3X_{D2} + 5X_{D3}$

เงื่อนไข

$$X_{A1} + X_{B1} + X_{C1} + X_{D1} <= 200$$
$$X_{A2} + X_{B2} + X_{C2} + X_{D2} <= 200$$
$$X_{A3} + X_{B3} + X_{C3} + X_{D3} <= 150$$
$$0.6X_{A1} - 0.4X_{A2} - 0.4X_{A3} >= 0$$
$$-0.2X_{A1} + 0.8X_{A2} - 0.2X_{A3} <= 0$$
$$0.8X_{B1} - 0.2X_{B2} - 0.2_{XB3} >= 0$$
$$-0.4X_{B1} + 0.6X_{B2} - 0.4X_{B3} <= 0$$
$$0.5X_{C1} - 0.5X_{C2} - 0.5X_{C3} >= 0$$
$$-0.1X_{C1} + 0.9X_{C2} - 0.1X_{C3} <= 0$$
$$X_{Ai}, X_{Bi}, X_{Ci} >= 0 , i=1,2,3,...$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.6.4 (การจัดเวรยาม)

โรงพยาบาลแห่งหนึ่งมีการจัดเวรยามนางพยาบาลตลอด 24 ชั่วโมงโดยแบ่งออกเป็น 6 ช่วงเวลา ช่วงเวลาละ 4 ชั่วโมงในวันหนึ่งๆจะต้องมีพยาบาลอยู่เวรในแต่ละช่วงเวลาอย่างน้อยที่สุดดังนี้

ช่วงเวลาที่ 1	6.00 น. - 10.00 น.	มีอย่างน้อย 60 คน
ช่วงเวลาที่ 2	10.00 น. - 14.00 น.	มีอย่างน้อย 70 คน
ช่วงเวลาที่ 3	14.00 น. - 18.00 น.	มีอย่างน้อย 60 คน
ช่วงเวลาที่ 4	18.00 น. - 22.00 น.	มีอย่างน้อย 50 คน
ช่วงเวลาที่ 5	22.00 น. - 02.00 น.	มีอย่างน้อย 20 คน
ช่วงเวลาที่ 6	02.00 น. - 06.00 น.	มีอย่างน้อย 30 คน

พยาบาลแต่ละคนต้องเข้าเวร 8 ชั่วโมงติดต่อกันจึงออกเวรได้ โรงพยาบาลต้องการประหยัดค่าใช้จ่ายโดยการจ้างพยาบาลให้มีจำนวนน้อยที่สุดและยังคงเพียงพอกับความต้องการในแต่ละเวลาจงสร้างรูปแบบการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

<u>วิธีทำ</u> เป้าหมายคือจำนวนพยาบาลน้อยที่สุด ตัวแปรตัดสินใจคือ จำนวนพยาบาลที่เข้าเวรช่วงที่ i ข้อจำกัดคือพยาบาลในแต่ละช่วง

ให้ X_1 = จำนวนพยาบาลที่เริ่มเข้าเวรช่วงที่ 1

X_2 = จำนวนพยาบาลที่เริ่มเข้าเวรช่วงที่ 2

X_i = จำนวนพยาบาลที่เริ่มเข้าเวรช่วงที่ i

Z = จำนวนพยาบาลทั้งหมด

สมการเป้าหมายคือ หาค่าน้อยที่สุดของ $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

ข้อจำกัดคือจำนวนพยาบาลแต่ละช่วงต้องมีอย่างน้อยตามกำหนด

<u>ช่วงที่1</u> : จำนวนพยาบาลที่มีอยู่ คือพยาบาลที่เข้าเวรช่วงที่ 6 บวกกับจำนวนพยาบาลที่เริ่มเข้าเวรช่วงที่ 1

$$X_6 + X_1 >= 60$$

<u>ช่วงที่2</u> : จำนวนพยาบาลเท่ากับจำนวนพยาบาลที่เข้าเวรช่วงที่ 1 บวกกับ
จำนวนพยาบาลที่เริ่มเข้าเวรช่วงที่ 2

$X_1 + X_2 >= 70$

ในทำนองเดียวกันช่วงที่ 3 ถึงช่วงที่ 6 จะได้สมการดังนี้

$X_2 + X_3 = 60$

$X_3 + X_4 >= 50$

$X_4 + X_5 >= 20$

$X_5 + X_6 >= 30$

โดยที่ $X_i >= 0;\ i=1,2,...,6$

ดังนั้นรูปแบบกำหนดการเชิงเส้นของปัญหานี้ คือ

หาค่าน้อยที่สุดของ $Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$

โดยมีข้อจำกัด $X_6 + X_1 >= 60$

$X_1 + X_2 >= 70$

$X_2 + X_3 >= 60$

$X_3 + X_4 >= 50$

$X_4 + X_5 >= 20$

$X_5 + X_6 >= 30$

$X_i >= 0\ ,\ i=1,2,...,6$

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.6.5 (การผลิตสินค้า)

ผู้ผลิตสินค้ารายหนึ่งผลิตสินค้า 3 ชนิด คือชนิดที่ 1,2 และ 3 โดยใช้วัตถุดิบ 2 ชนิด คือ A 2000 หน่วย และวัตถุดิบ B 3000 หน่วย สินค้าแต่ละชนิดต่อ 1 หน่วย ใช้วัตถุดิบ ดังตารางที่ 6

สินค้า / วัตถุดิบ	1	2	3
A	2	3	5
B	4	2	4

<u>ตารางที่ 6</u> แสดงจำนวนวัตถุดิบที่ใช้ต่อ 1 หน่วยของสินค้า

เวลาที่ใช้ในการผลิตแต่ละหน่วยของสินค้าชนิดที่ 1 เป็น 2 เท่าของสินค้าชนิดที่ 2 และเป็น 3 เท่าของสินค้าชนิดที่ 3 เวลาที่ใช้ในการผลิตทั้งหมด ถ้าผลิตสินค้าชนิดที่ 1 เพียงอย่างเดียวจะผลิตได้ 700 ชิ้น ในการสำรวจตลาดพบว่าความต้องการอย่างน้อยที่สุดของสินค้าชนิดที่ 1,2 และ 3 เป็น 200,200 และ 150 ชิ้น ตามลำดับ และอัตราส่วนของจำนวนสินค้าชนิดที่ 1,2 และ 3 ที่ผลิตต้องเท่ากับ 3:2:5 ถ้ากำไรต่อชิ้นของสินค้าชนิด 1,2 และ 3 เป็น 600,400 และ 1000 บาท ตามลำดับ จงสร้างรูปแบบปัญหาเพื่อหาจำนวนชิ้นของสินค้าแต่ละชนิดที่จะผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุด

<u>วิธีทำ</u> เป้าหมายคือกำไรสูงสุด ตัวแปรตัดสินใจคือจำนวนสินค้าที่ต้องการผลิต

ข้อจำกัดคือ 1. วัตถุดิบจำกัด

2. เวลาที่ใช้ในการผลิต

3. ด้านการตลาด

4. ด้านอัตราส่วนของจำนวนสินค้าที่ผลิต

ให้ Z = กำไร

X_i = จำนวนสินค้าชนิด i

สมการเป้าหมายคือ หาค่าสูงสุดของ $Z = 600X_1 + 400X_2 + 1000X_3$

ข้อจำกัดด้านปริมาณวัตถุดิบ

$$2X_1 + 3X_2 + 5X_3 <= 2000$$

$$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 <= 3000$$

ข้อจำกัดด้านเวลาการผลิต

ถ้าการผลิตสินค้าชนิดที่ 1 จำนวน 1 ชิ้น ใช้เวลา 1 หน่วยเวลา จะได้ว่า การผลิตสินค้าชนิดที่ 2 จำนวน 1 ชิ้น ใช้เวลา 1/2 หน่วยเวลา และ การผลิตสินค้าชนิดที่ 3 จำนวน 1 ชิ้น ใช้เวลา 1/3 หน่วยเวลา

ถ้าผลิตสินค้าชนิดที่ 1 700 ชิ้น จะใช้เวลา 700 หน่วยเวลา ถ้าผลิตสินค้าชนิด 1 X_1 ชิ้น ชนิดที่ 2 X_2 ชิ้น และชนิดที่ 3 X_3 ชิ้น จะใช้เวลาทั้งหมดเท่ากับ

$$X_1 + 1/2X_2 + 1/3X_3 \quad \text{หน่วยเวลา}$$

เวลาที่ใช้จะต้องไม่เกิน 700 หน่วยเวลา ดังนั้น

$$X_1 + 1/2X_2 + 1/3X_3 <= 700$$

ข้อจำกัดด้านการตลาด

$$X_1 >= 200 \ , \ X_2 >= 200 \ , \ X_3 >= 150$$

ข้อจำกัดด้านการผลิต

$$X_1/X_2 = 3/2 \ , \ X_2/X_3 = 2/5$$

ดังนั้นรูปแบบกำหนดการเชิงเส้น คือ

หาค่าสูงสุด $Z = 600X_1 + 400X_2 + 1000X_3$

เงื่อนไข $2X_1 + 3X_2 + 5X_3 <= 2000$

$4X_1 + 2X_2 + 4X_3 <= 3000$

$X_1 + 1/2X_2 + 1/3X_3 <= 700$

$X_1 >= 200 \ , \ X_2 >= 200 \ , \ X_3 >= 150$

$X_1/X_2 = 3/2 \ , \ X_2/X_3 = 2/5$

3.7 วิธีซิมเพลก

ในการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ถ้ามีตัวแปรที่ต้องการตัดสินใจเพียง 2 ตัว เราสามารถที่จะแก้ปัญหาเพื่อหาค่าตอบโดยวิธีกราฟได้แต่ในทางปฏิบัติหรือในแบบจำลองทั่ว ๆ ไปแล้ว ตัวแปรในแบบจำลองมิได้มีเพียงสองตัวเท่านั้น แต่มีจำนวนมาก นอกจากนี้ยังมีสมการจำกัดขอบข่ายอีกหลายสมการ ซึ่งเราไม่อาจใช้วิธีแก้สมการโดยวิธีกราฟได้อีกต่อไป จึงได้มีการสร้างวิธีแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงโดยใช้หลักพีชคณิตเมตริกซ์ ซึ่งเป็นวิธีที่เฉพาะสำหรับปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง และเรียกวิธีแก้ปัญหาดังกล่าวนี้ว่า "วิธีซิมเพลก" (simplex method)

ก่อนที่เราจะกล่าวถึงพื้นฐานในเชิงทฤษฎีของวิธีซิมเพลก ซึ่งนับว่าเป็นวิธีการที่ง่ายหากได้ศึกษาและเข้าใจในตัวทฤษฎีอย่างละเอียดแล้วก็จะสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้มากขึ้น เราจะต้องกล่าวถึงสิ่งที่เกี่ยวข้องกับวิธีซิมเพลกแล้วจึงจะกล่าวถึงทฤษฎีและวิธีดำเนินการต่อไป

3.8 ตัวแปรขาดและตัวแปรเกิน (slack variable and surplus variable)

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว การจัดการหรือการดำเนินการต่าง ๆ โดยใช้สมการนั้นเป็นการสะดวกต่อการใช้อสมการมาก ดังนั้นเมื่อเรามีชุดของข้อจำกัดขอบข่ายที่เป็นอสมการ เราจึงต้องแปรรูปให้เป็นสมการเสียก่อน หรือ พูดง่าย ๆ ก็คือ พยายามเปลี่ยนจากเครื่องหมาย <= หรือ เครื่องหมาย >= ให้เป็นเครื่องหมาย = ซึ่งการเปลี่ยนแปลงดังกล่าวเราสามารถทำได้โดยการเพิ่มตัวแปรเพื่อชดเชยส่วนขาดหรือตัวแปรเพื่อลดส่วนเกิน ตัวแปรดังกล่าวนี้เราเรียกว่า ตัวแปรขาดหรือตัวแปรเกิน

ตัวแปรขาด (slack variables) คือตัวแปรที่เพิ่มเข้าไปด้านซ้ายของสมการเพื่อเปลี่ยนเครื่องหมาย <= ให้เป็นเครื่องหมาย =

ตัวแปรเกิน (surplus variables) คือตัวแปรที่ลบออกจากด้านซ้ายของสมการเพื่อเปลี่ยนเครื่องหมาย >= ให้เป็นเครื่องหมาย =

3.9 การหาผลลัพธ์ด้วยวิธีซิมเพลก

การหาผลลัพธ์ด้วยวิธีซิมเพลกนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ลักษณะ ตามเงื่อนไขของปัญหาดังนี้

1. เงื่อนไขของปัญหาเป็นอสมการที่มีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับทั้งหมด จากรูปแบบทั่วไปของโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่มีสมการเป้าหมายเป็นแบบสูงสุดและอสมการเงื่อนไขมีเครื่องหมายน้อยกว่าหรือเท่ากับทั้งหมด สามารถเขียนได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย

$$\max Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n$$

อสมการเงื่อนไข

$$
\begin{array}{l}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \quad <= \quad b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \quad <= \quad b_2 \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \quad <= \quad b_m \\
\qquad X_j >= 0 \quad : \quad j = 1,2,\dots,n \\
\qquad b_i >= 0 \quad : \quad i = 1,2,\dots,m
\end{array}
$$

จัดรูปแบบปัญหาเดิมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน และนำส่วนทางขวามือของสมการเป้าหมายลบทั้งสองข้างเพื่อให้ทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเป็น "ศูนย์"

$$
\begin{array}{lcl}
Z - c_1X_1 - c_2X_2 - \dots - c_nX_n - 0S_1 - 0S_2 - \dots - 0S_m & = & 0 \\
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + S_1 & = & b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \qquad + S_2 & = & b_2 \\
\cdot & & \cdot \\
\cdot & & \cdot \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n + S_m & = & b_m \\
X_j >= 0 \quad ; \; S_i >= 0, \; b_i >= 0 & & \\
i = 1,2,\dots,m \; , \; j = 1,2,\dots,n & &
\end{array}
$$

2. เงื่อนไขของปัญหาเป็นอสมการที่มีเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับทั้งหมด จากรูปแบบทั่วไปของโปรแกรมเชิงเส้นตรงที่มีสมการเป้าหมายเป็นแบบสูงสุดและอสมการเงื่อนไขมีเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับทั้งหมด สามารถเขียนได้ดังนี้

สมการเป้าหมาย

$$\max Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$$

อสมการเงื่อนไข

$$\begin{array}{lcl}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n & >= & b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n & >= & b_2 \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & . \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n & >= & b_m
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
X_j >= 0 & : & j = 1,2,\ldots,n \\
b_i >= 0 & : & i = 1,2,\ldots,m
\end{array}$$

จัดรูปแบบปัญหาเดิมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน และนำส่วนทางขวามือของสมการเป้าหมายลบทั้งสองข้างเพื่อให้ทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเป็น "ศูนย์"

$$\begin{array}{lcl}
Z - c_1X_1 - c_2X_2 - \ldots - c_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \ldots + 0S_m & = & 0 \\
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n - S_1 & = & b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n \quad - S_2 & = & b_2 \\
. & & . \\
. & & . \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n \qquad - S_m & = & b_m
\end{array}$$

$X_j >= 0 \quad ; S_i >= 0,\ b_i >= 0$

$i = 1,2,\ldots,m \quad ; j = 1,2,\ldots,n$

3.10 ขั้นตอนการคำนวณของวิธีซิมเพลก

จัดรูปแบบปัญหาเดิมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน และย้ายข้างสมการเป้าหมายเพื่อให้ทางด้านขวามือของเครื่องหมายเท่ากับมีค่าเป็น "ศูนย์" เสร็จแล้วก็นำไปสร้างเป็นตารางผลลัพธ์เบื้องต้นดังนี้

ตัวแปรของผลลัพธ์	ค่าเป้าหมาย	ตัวแปรไม่เป็นมูลฐาน	ตัวแปรเกิน	ผลลัพธ์
ตัวแปรมูลฐาน	Z	X_1 X_2 ... X_n	S_1 S_2 ... S_m	ค่าคงที่
Z	1	$-c_1$ $-c_2$ ... $-c_n$	0 0 ... 0	0
S_1	0	a_{11} a_{12} ... a_{1n}	1 0 ... 0	b_1
S_2	0	a_{21} a_{22} ... a_{2n}	0 1 ... 0	b_2
.	.	. . ... .	. . ... .	.
.	.	. . ... .	. . ... .	.
.	.	. . ... .	. . ... .	.
S_m	0	a_{m1} a_{m2} ... a_{mn}	0 0 ... 1	b_m

พิจารณาจากค่าต่าง ๆ บนตาราง ซึ่งถือว่าเป็นผลลัพธ์เบื้องต้นได้ดังนี้

- เริ่มค่าตัวแปรไม่เป็นมูลฐาน เปลี่ยนเป็นศูนย์คือ X_1 ,X_2 ,... ,X_n เพื่อเป็นจุดเริ่มต้นที่มั่นใจได้ว่าตัวแปรทุกตัวมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
- ค่าของสมการเป้าหมายซึ่งได้จาก

$$Z - c_1X_1 - c_2X_2 - \dots - c_nX_n = 0$$

จะมีค่า $Z = 0$ ด้วย

- ค่าตัวแปรเกินต่าง ๆ อ่านจากผลลัพธ์ค่าตัวแปรของผลลัพธ์ได้ดังนี้

$$S_1 = b_1,\ S_2 = b_2,\ \dots,\ S_m = b_m$$

พิจารณาทดสอบผลลัพธ์ว่าดีที่สุดแล้วหรือยัง การทดสอบผลลัพธ์ในขั้นนี้เรียกว่า **การทดสอบหลักเกณฑ์ผลลัพธ์ที่ดีที่สุด** จะเห็นได้ว่าในบางครั้งแม้แต่ผลลัพธ์เบื้องต้น ก็อาจเป็นผลลัพธ์ที่ดีที่สุดอยู่แล้ว แต่โดยมากเรามักจะหาผลลัพธ์ที่ดีกว่าได้โดยใช้หลักเกณฑ์ทดสอบผลลัพธ์ที่ดีที่สุด

จากสมการเป้าหมาย $Z - c_1X_1 - c_2X_2 - ... - c_nX_n = 0$ โดยการเริ่มแรกด้วย $X_1, X_2, ..., X_n = 0$ มีผลทำให้ $Z = 0$ จะเห็นได้ว่าถ้าเราเพิ่มค่าของตัวแปร X_i : $i = 1, 2, ..., n$ ตัวหนึ่งตัวใดจะมีผลทำให้ค่า Z สูงขึ้น จากข้อสังเกตนี้เองจะเห็นได้ว่า ถ้าค่าสัมประสิทธิ์ตารางที่เป็นสมการเป้าหมายยังมีค่าเป็นลบอยู่ในตาราง การเพิ่มค่าตัวแปรของสัมประสิทธิ์นั้น ๆ จะมีผลให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้น หรืออาจจะกล่าวได้ว่าถ้าค่า $c_1, c_2, ..., c_n$ ดังกล่าวยังติดเครื่องหมายลบอยู่การดำเนินการเพื่อหาผลลัพธ์ที่ดีขึ้นยังต้องทำกันต่อไป

จากนั้นก็ใช้ขั้นตอนต่อไปนี้หาผลลัพธ์

1. เลือกสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่า "ลบ" ในแถวนอนของสมการเป้าหมายที่มีค่า "น้อยที่สุด" ในกรณีเป้าหมายเป็นแบบสูงสุดหรือเลือกสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่มีค่า "บวก" ในแถวนอนของสมการเป้าหมายที่มีค่า "มากที่สุด" ในกรณีเป้าหมายเป็นแบบต่ำสุดแล้วเรียกค่านี้ว่า C_k สำหรับแถวตั้งที่ k เรียกว่า "สดมภ์หลัก (pivot column)" ส่วนตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เท่ากับ C_k นี้จะเป็นตัวแปรเข้า(entering variable) ที่เข้าไปแทนตัวแปรมูลฐานบางตัวในตารางถัดไป

2. เลือกผลลัพธ์จากการหาร หรืออัตราส่วนที่มีค่าน้อยที่สุดของ b_i/a_{in} ซึ่งอัตราส่วนที่มีค่าน้อยที่สุดนี้คือ b_m/a_{mn} และเรียกแถวที่ m นี้ว่า "แถวหลัก (pivot row)" ส่วนค่า a_{mn} นี้จะเรียกว่า "สมาชิกหลัก (pivot element)" จะเป็นตัวแปรออก (leaving variable) เพื่อให้ตัวแปรเข้าไปแทนในตารางถัดไป และถ้าทุกค่าของ $a_{in} <= 0$ ปัญหานี้ผลลัพธ์หาค่าไม่ได้ (Unbounded Solution)

3. หารทุกค่าในแถวหลัก หรือแถวที่ m ด้วยสมาชิกหลัก หรือ a_{mn} ซึ่งจะได้แถวหลักใหม่ หรือ a_{mn} ใหม่ มีค่าเป็น "1"

4. ทำทุกค่าในสดมภ์หลัก หรือ สดมภ์ที่ C_k ให้เป็น "ศูนย์" หมดทุกตัว ยกเว้นสมาชิกหลักใหม่ โดยใช้สูตรต่อไปนี้

ค่าในแถวใหม่ของ Z = ค่าในแถวเก่าของ Z - (C_k)(ค่าในแถวหลักใหม่)

และค่าในแถวใหม่ที่ i = ค่าในแถวเก่าที่ i - (a_{in})(ค่าในแถวหลักใหม่)

5. ตรวจสอบว่าได้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมแล้วหรือยัง การตรวจสอบกระทำดังนี้

ก. ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในแถวนอนของสมการเป้าหมายเป็น "บวก" หมดทุกค่า หรือทุกค่า $C_j >= 0$ แสดงว่าได้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมแล้วในกรณีเป้าหมายเป็นแบบ "สูงสุด" หรือถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในแถวของสมการเป้าหมายเป็น "ลบ" หมดทุกค่า หรือทุกค่า $C_j <= 0$ แสดงว่าได้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมแล้วในกรณีเป้าหมายเป็นแบบ "ต่ำสุด"

ข. ถ้าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในแถวนอนของสมการเป้าหมายยังเป็น"บวก" หรือ "ลบ" ไม่หมดทุกค่าแสดงว่ายังไม่ได้ผลลัพธ์ที่เหมาะสม ให้กลับไปคำนวณยังขั้นตอนที่ 1 ใหม่

จากขั้นตอนทั้งหมดที่กล่าวมา ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงด้วยวิธีซิมเพลก

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.10.1

สมการเป้าหมาย MAX $Z = 3X_1 + 5X_2$

เงื่อนไข

$$\begin{aligned} X_1 \quad\quad &\le 4 \\ 2X_2 &\le 12 \\ 3X_1 + 2X_2 &\le 18 \\ X_1, X_2 \quad &\ge 0 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u>

สมการขยาย

$$\begin{aligned} Z - 3X_1 - 5X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 &= 0 \\ X_1 + S_1 &= 4 \\ 2X_2 + S_2 &= 12 \\ 3X_1 + 2X_2 + S_3 &= 18 \\ X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
S_2	2	0	0	2	0	1	0	12
S_3	3	0	3	2	0	0	1	18

<u>ตารางที่ 7</u> ตารางซิมเพลกของโปรแกรมเชิงเส้นตรง

1. การเลือกตัวแปรเข้า จากสัมประสิทธิ์ของสมการเป้าหมายที่ติดลบมากที่สุด คือ -5 ดังนั้นควรเลือก X_2 เป็นตัวแปรเข้า เพราะเมื่อตัวแปรเพิ่มค่าจาก 0 เป็นค่าบวกจะทำให้เพิ่มค่า Z ได้เร็วที่สุด เช่น $Z - 3X_1 - 5X_2 = 0$ เริ่มต้นให้ $X_1 = X_2 = 0$ จะมีผลทำให้ Z = 0 เมื่อเพิ่มค่าของตัวแปร X_1, X_2 จะมีผลให้ค่า Z สูงขึ้น

เช่น

ถ้าเพิ่มค่า X_1 โดยที่ $X_2 = 0$ จะมีผลให้ $Z = 3X_1$

ถ้าเพิ่มค่า X_2 โดยที่ $X_1 = 0$ จะมีผลให้ $Z = 5X_2$

กำหนดให้เป็นสมการ (1)

การเพิ่มค่าตัวแปรใดจึงต้องดูค่าสัมประสิทธิ์ที่เป็นลบ เพราะเมื่อย้ายข้างจะเป็นบวก และจากสมการ (1) จะได้ว่าต่อหนึ่งหน่วยที่ เพิ่มค่า X_2 จะได้ค่า Z เพิ่มขึ้นเร็วกว่าเพิ่มค่า X_1 1 หน่วยที่เพิ่มค่า X_2 จะได้ค่า Z ถึงจุดเป้าหมายเร็วที่สุดจึงเลือกตัวแปรเข้าที่มีสัมประสิทธิ์ติดลบมากที่สุด

2. ตัวแปรออก พิจารณาดังนี้

2.1 เลือกสัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลักที่มีค่ามากกว่า 0

2.2 หารค่าคงที่ทางขวามือด้วยสัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลักที่มีค่ามากกว่า 0 และอยู่ในแถวเดียวกัน ดูจากตารางที่ 8

2.3 เลือกสมการที่ให้ผลหารน้อยที่สุด คือ 6 ดังนั้นเลือก S_2 เป็นตัวแปรออก และค่า 2 เป็นสมาชิกหลัก

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0	
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4	
S_2	2	0	0	2	0	1	0	12	12/2=6
S_3	3	0	3	2	0	0	1	18	18/2=9

<u>ตารางที่ 8</u>

3. หารทุกค่าในแถวนอนหมุนด้วย 2 เพื่อต้องการให้สมาชิกหลัก (เรียกแถวนี้ว่าแถวหลักใหม่)

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
Z	0	1						
S_1	1	0						
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
S_3	3	0						

ตารางที่ 9 แสดงสัมประสิทธิ์ทุกตัวในแถวหลักใหม่

4. ทำสัมประสิทธิ์ของ X_2 ในแถวอื่นๆให้เป็น 0 โดย

แถวใหม่ = แถวเดิม - (สัมประสิทธิ์ในสดมภ์หลัก * แถวหลักใหม่)

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
S_3	3	0	3	0	0	-1	1	6

ตารางที่ 10 แสดงค่าตัวแปรมูลฐานใหม่

5. เนื่องจากในสมการที่ (0) ยังมีค่าติดลบ จึงต้องย้อนกลับไปทำในขั้นตอนที่ 1-4 ใหม่ ดังตารางต่อไปนี้

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
Z	0	1	-3	0	0	5/2	0	30	
S_1	1	0	1	0	1	0	0	4	4/1=4
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	6	
S_2	3	0	3	0	0	-1	1	6	6/3=2

<u>ตารางที่ 11</u> แสดงตัวแปรเข้าคือ x_1 ตัวแปรออกคือ s_3

ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
Z	0	1	0	0	0	3/2	0	36
S_1	1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
X_1	3	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

<u>ตารางที่ 12</u> แสดงค่าตัวแปรมูลฐานใหม่

จากตารางที่ 12 เนื่องจากค่าในสมการที่ (0) มีค่าเป็นบวกหมดทุกค่าแสดงว่าเป็นผลลัพธ์ที่เหมาะสมแล้ว

สำหรับตารางซิมเพลกที่สมบูรณ์ของปัญหานี้แสดงดังตาราง ที่ 13

การทำซ้ำครั้งที่	ตัวแปรมูลฐาน	สมการที่	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ขวามือ
			Z	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
	Z	0	1	-3	-5	0	0	0	0
1	S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
	S_2	2	0	0	2	0	1	0	12
	S_3	3	0	3	2	0	0	1	18
	Z	0	1	0	0	0	3/2	0	30
2	S_1	1	0	1	0	1	0	0	4
	X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
	S_3	3	0	3	0	0	-1	1	6
	Z	0	1	0	0	0	3/2	0	36
3	S_1	1	0	0	0	1	1/3	-1/3	2
	X_2	2	0	0	1	0	1/2	0	6
	X_1	3	0	1	0	0	-1/3	1/3	2

ตารางที่ 13 แสดงตารางซิมเพลกที่สมบูรณ์ในการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรง ดังนั้นคำตอบที่เหมาะสมสำหรับปัญหานี้คือ $X_1 = 2$, $X_2 = 6$ ค่าของสมการเป้าหมาย $Z = 36$

หมายเหตุ ถ้าปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นอยู่ในรูปการหาค่าต่ำสุดของ

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

และอสมการข้อจำกัดอยู่ในรูป <= โดยที่ $x_i >= 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$

การแก้ปัญหาโดยวิธีซิมเพลก สามารถเปลี่ยนรูปแบบสมการเป็นการหาค่าสูงสุดของ

$$Z' = -Z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$$

โดยมีข้อจำกัดเดิม และแทนค่า Z ในตารางด้วย Z' และเมื่อได้คำตอบที่เหมาะสมของ Z' แล้ว ค่า Z ที่ต่ำสุดคือ -Z'

3.11 เทคนิคการใช้ตัวแปรเทียม

วิธีซิมเพลกเป็นปัญหาที่มีเงื่อนไขของสมการขอบข่ายในรูปของอสมการ ซึ่งมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ (<=) ซึ่งจะทำให้เกิดสมการของขอบข่ายได้โดยเพียงแต่เพิ่มค่าตัวแปรเพิ่มที่เรียกว่า ตัวแปรขาด ก็จะสามารถแก้ปัญหาจนได้ผลลัพธ์

มีอีกสองกรณี ซึ่งจะต้องเพิ่มค่าตัวแปรซึ่งเป็นค่าที่ไม่มีความหมายในเชิงตัวเลขโดยเป็นเพียงตัวแปรที่จัดเข้ามาเพื่อช่วยในการคำนวณหาผลลัพธ์ได้ถูกต้องขึ้น กรณีของอสมการเงื่อนไขทั้งสองกรณีคือ กรณีที่อสมการอยู่ในลักษณะของสมการอยู่แล้ว (=) หรืออยู่ในลักษณะมากกว่าหรือเท่ากับ (>=) ซึ่งตัวแปรที่ไม่มีความหมายในเชิงตัวเลขที่เรียกว่า **ตัวแปรเทียม** จะถูกนำมาเข้าตารางประกอบเป็นส่วนของเมตริกซ์เอกลักษณ์ช่วยให้ขั้นตอนในการหาผลลัพธ์ การใช้วิธีซิมเพลกจะไม่สามารถหาผลลัพธ์ออกมาได้ จึงจำเป็นต้องอาศัยวิธีการที่พัฒนามาใช้หาโดยเฉพาะวิธีการสองแบบในการหาผลลัพธ์คือ วิธี บิ๊ก-เอ็ม (Big-M method) และ วิธีทูเฟส (Two-phase method) แต่ในที่นี้จะศึกษาวิธีเดียวคือ วิธี บิ๊ก-เอ็ม

3.12 วิธีบิ๊ก-เอ็ม

วิธีนี้มีความจำเป็นก็ต่อเมื่ออสมการเงื่อนไขมีเครื่องหมายเป็น >= และ = ซึ่งโดยความหมายของ **ตัวแปรเทียม** จะเป็นตัวแปรที่ไม่มีความหมายทางตัวเลข ดังนั้นค่าของตัวแปรชนิดนี้จะเป็นอื่นไม่ได้นอกจากศูนย์ ค่า M คือ **ค่าสมมติที่มีค่าสูงมาก** ใช้ประกอบเป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปรชนิด ตัวแปรเทียม และบรรจุในสมการเป้าหมายถ้าสมการเป้าหมายต้องการหาค่าสูงสุดจะใช้ -M แต่ถ้าเป้าหมายคือ การหาค่าต่ำสุด จะใช้ M โดยที่ M >= 0

เทคนิคของวิธี บิ๊ก-เอ็ม กล่าวโดยย่อมีดังนี้คือ

1. จัดปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน ถ้าปัญหามีจำนวนเงื่อนไขหรือ ขอบข่าย = m และจำนวนตัวแปร = n

$$\text{Maximize } Z = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_nX_n$$

อสมการเงื่อนไข

$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n & <= & b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n & >= & b_2 \\
a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + \dots + a_{3n}X_n & = & b_3 \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & . \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n & = & b_m
\end{array}
$$

$$X_j >= 0 : j = 1,2,3,\dots,n$$

$$b_i >= 0 : i = 1,2,3,\dots,m$$

2. บวกตัวแปรที่ไม่ติดลบทางซ้ายมือของแต่ละสมการโดยขึ้นกับเงื่อนไขหรือขอบข่ายที่มีเครื่องหมาย >= และ = ซึ่งตัวแปรดังกล่าวก็คือ ตัวแปรเทียม

$$Z - c_1X_1 - c_2X_2 - \dots - c_nX_n - OS_1 + OS_2 + MR_2 + \dots + MR_m = 0$$

อสมการเงื่อนไขปัญหา

$$
\begin{array}{lcl}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + S_1 & = & b_1 \\
a_{21}X_2 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n - S_2 + R_2 & = & b_2 \\
a_{31}X_3 + a_{32}X_3 + \dots + a_{3n}X_n \quad + R_3 & = & b_3 \\
. & . & \\
. & . & \\
. & . & \\
a_{m1}X_m + a_{m2}X_m + \dots + a_{mn}X_n \quad + R_m & = & b_m
\end{array}
$$

$$X_j >= 0 : j = 1,2,3,\dots,n$$

$$b_i >= 0 : i = 1,2,3,\dots,m$$

$$S_j >= 0 : j = 1,2$$

$$R_k >= 0 : k = 2,3,4,\dots,m$$

$$M >= 0$$

<u>หมายเหตุ</u> : จากข้อ 1 และ 2 เป็นการหาผลลัพธ์ซึ่งสมการเป้าหมายเป็นการหาค่าสูงสุดเครื่องหมายของตัวแปรเทียมมีค่าเป็นลบ ถ้าเป็นการหาผลลัพธ์ซึ่งสมการเป้าหมายเป็นการหาค่าต่ำสุดเครื่องหมายของตัวแปรเทียมมีค่าเป็นบวก

เนื่องจากเป้าหมายคือการหาค่าสูงสุด ดังนั้นจึงไม่ต้องการให้ตัวแปรเทียมเข้ามาอยู่ในผลลัพธ์ เพราะต้องการเลือกตัวแปรที่ทำให้ค่า Z มีค่าเพิ่มขึ้นเร็วที่สุด ดังนั้นการที่นำเอาตัวแปรเทียมเข้ามาอยู่ในผลลัพธ์จะทำให้ค่า Z ลดลง เนื่องจากค่า -M มีค่าต่ำมาก

แต่ถ้าทำการคำนวณโดยวิธีซิมเพลกแล้วปรากฏว่า ในตารางผลลัพธ์สุดท้ายตัวแปรเทียมบางตัวหรือทั้งหมดอยู่ในผลลัพธ์ จะทำให้ค่า Z ที่ได้ไม่ใช่ค่าสูงสุดที่แท้จริง ดังนั้นค่าของตัวแปรเทียมทุกตัวในตารางผลลัพธ์สุดท้ายควรจะเป็น 0 หรือไม่อยู่ในผลลัพธ์ อาจจะเป็นไปได้ที่ค่าของสมการเป้าหมายไม่สามารถสามารถเพิ่มขึ้นได้อีกแล้ว (สัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ไม่ได้อยู่ในผลลัพธ์ทุกตัวมีค่าไม่ติดลบ) แต่มีตัวแปรเทียมบางตัวมีค่ามากกว่า 0 เราจะถือว่าปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นนั้นไม่มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ นั่นก็คือ ไม่สามารถแก้ปัญหาได้

3. ใช้ตัวแปรเทียมดังกล่าวกับผลลัพธ์แรกเริ่มแล้วใช้วิธีซิมเพลกจนกระทั่งได้คำตอบจากขั้นตอนทั้งหมดที่กล่าวมา ต่อไปนี้จะเป็นตัวอย่างการแก้ปัญหาการโปรแกรมเชิงเส้นตรงด้วยวิธี บิ๊ก-เอ็ม

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.12.1

จงหาค่าสูงสุดของ $Z = 3X_1 + 5X_2$

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
X_1 \quad\quad & <= 4 \\
2X_2 & <= 12 \\
3X_1 + 2X_2 & = 18 \\
X_1 , X_2 & >= 0
\end{aligned}
$$

ขั้นที่ 1 เขียนสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐานคือ

หาค่าสูงสุดของ Z

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
(0) \quad & Z - 3X_1 - 5X_2 = 0 \\
(1) \quad & X_1 + S_1 = 4 \\
(2) \quad & 2X_2 + S_2 = 12 \\
(3) \quad & 3X_1 + 2X_2 = 18 \\
& X_1, X_2 >= 0 \;,\; S_1, S_2 >= 0
\end{aligned}
$$

ขั้นที่ 2 ให้ R >= 0 เป็นตัวแปรเทียมบวกเข้าทางซ้ายมือของสมการเงื่อนไขเดิมคือ

$$3X_1 + 2X_2 = 18$$

จะได้

$$3X_1 + 2X_2 + R = 18$$

ขั้นที่ 3 เปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมายเดิมจากการหาค่าสูงสุดของ $Z = 3X_1 + 5X_2$ เป็นการหาค่าสูงสุดของ $Z = 3X_1 + 5X_2 - MR$ เมื่อ M เป็นค่าบวกที่ใหญ่มากๆดังนั้นค่าสูงสุดของ Z จะมีได้ก็ต่อเมื่อ R = 0 เขียนการโปรแกรมเชิงเส้นตรงได้ใหม่เป็น

หาค่าสูงสุดของ Z

เงื่อนไข

$$\begin{aligned}
(0)\quad & Z - 3X_1 - 5X_2 + MR = 0 \\
(1)\quad & X_1 + S_1 = 4 \\
(2)\quad & 2X_2 + S_2 = 12 \\
(3)\quad & 3X_1 + 2X_2 + R = 18
\end{aligned}$$

$$X_1, X_2 >= 0 \ , \ S_1, S_2, R >= 0$$

ขั้นที่ 4 คำตอบมูลฐานเบื้องต้นที่เป็นไปได้ของปัญหานี้คือ $(X_1, X_2, S_1, S_2, R) = (0, 0, 4, 12, 18)$ โดยที่ตัวแปรเดิม X_1, X_2 เป็น 0 และ S_1, S_2, R เป็นตัวแปรมูลฐานเริ่มต้น

ต่อไปทำให้สัมประสิทธิ์ของ R ในเงื่อนไข (0) เป็น 0 ดังนี้

จากเงื่อนไข (3) , $R = 18 - 3X_1 - 2X_2$ แทนในเงื่อนไข (0)

จะได้

$$Z - 3X_1 - 5X_2 + M(18 - 3X_1 - 2X_2) = 0$$

$$Z - (3M + 3)X_1 - (2M + 5)X_2 = -18M$$

ขั้นที่ 5 สร้างตารางซิมเพลกซ์เริ่มต้น แล้ววิเคราะห์หาตัวแปรเข้าและตัวแปรออกเพื่อปรับปรุงค่า Z ให้ดีขึ้นจนกระทั่งได้ข้อจำกัด (0) สัมประสิทธิ์ตัวแปรไม่เป็นมูลฐาน มีค่าเป็น 0 หรือ + แสดงว่าไม่สามารถหาตัวแปรใหม่เข้าเป็นตัวแปรมูลฐานได้อีก คำตอบที่ได้จึงเป็นคำตอบที่เหมาะสม

ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของ						ค่าคงที่ทางขวามือ	อัตราส่วน
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	R		
Z	1	-3M-3	-2M-5	0	0	0	-18M	
S_1	0	1	0	1	0	0	4	4/1=4
0 S_1	0	0	2	0	1	0	12	
R	0	3	2	0	0	1	18	18/3=6
Z	1	0	-2M-5	3M+3	0	0	-6M+12	
X_1	0	1	0	1	0	0	4	
1 S_2	0	0	2	0	1	0	12	12/2=6
R	0	0	2	-3	0	1	6	6/2=3
Z	1	0	0	9/2	0	M+5/2	27	
X_1	0	1	0	1	0	0	4	4/1=4
2 S_2	0	0	0	3	1	-1	6	
X_2	0	0	1	-3/2	0	0	3	6/3=2
Z	1	0	0	0	3/2	M+1	36	
X_1	0	1	0	0	1/3	1/3	2	
3 S_1	0	0	0	1	1/3	1/3	2	
X_2	0	0	1	0	1/2	0	6	

ตารางที่ 14 แสดงตารางซิมเพลกสมบูรณ์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

จากตารางที่ 14 เมื่อเลือกตัวแปรมูลฐานเข้าและออกทั้งหมด 3 ครั้งจะได้ว่าไม่สามารถปรับปรุงค่าให้ดีขึ้นได้อีก นั่นคือค่าตอบที่เหมาะสมของปัญหานี้เป็น $X_1 = 2$, $X_2 = 6$, $S_1 = 2$, $S_2 = 0$ และ $Z = 36$

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.12.2

จงหาค่าต่ำสุดของ $Z = 4X_1 + X_2$

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
3X_1 + X_2 &= 3 \\
4X_1 + 3X_2 &>= 6 \\
X_1 + 2X_2 &<= 3 \\
X_1,\ X_2 &>= 0
\end{aligned}
$$

<u>วิธีทำ</u> เขียนกำหนดการเชิงเส้นในรูปมาตรฐานคือ

หาค่าต่ำสุดของ Z

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
(0)\quad & Z - 4X_1 - X_2 = 0 \\
(1)\quad & 3X_1 + X_2 = 3 \\
(2)\quad & 4X_1 + 3X_2 - s_1 = 6 \\
(3)\quad & X_1 + 2X_2 + s_2 = 3 \\
& x_1, x_2 >= 0\ ,\ s_1, s_2 >= 0
\end{aligned}
$$

โดยที่ S_1 เป็นตัวแปรเกิน, S_2 เป็นตัวแปรขาด

ให้ R_1, R_2 เป็นตัวแปรเทียม บวกเข้าทางซ้ายมือของข้อจำกัด (1) และ (2) จะได้

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & 3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \\
(2)\quad & 4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6
\end{aligned}
$$

และเปลี่ยนฟังก์ชันเป้าหมายเดิมจากการหาค่าต่ำสุด $Z = 4X_1 + X_2$ เป็นการหาค่าต่ำสุดของ

$$Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2 \text{ หรือ } Z - 4X_1 - X_2 - MR_1 - MR_2 = 0$$

เมื่อ M เป็นค่าบวกมากๆเขียนกำหนดการเชิงเส้นใหม่ได้เป็น

หาค่าต่ำสุดของ Z

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
(0)\quad & Z - 4X_1 - X_2 - MR_1 - MR_2 = 0 \\
(1)\quad & 3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \\
(2)\quad & 4X_1 + 3X_2 - S_1 + R_2 = 6 \\
(3)\quad & X_1 + 2X_2 + S_2 = 3 \\
& X_1, X_2 >= 0\ ,\ S_1, S_2 >= 0\ ,\ R_1, R_2 >= 0
\end{aligned}
$$

คำตอบมูลฐานเริ่มต้นที่เป็นไปได้สำหรับปัญหานี้คือ

$$(X_1,X_2,S_1,R_1,R_2,S_2) = (0,0,0,3,6,3)$$

ทำให้สัมประสิทธิ์ของ R_1,R_2 ในข้อจำกัด (0) เป็น 0 ดังนี้

จากเงื่อนไข (1) $R_1 = 3 -3X_1 -X_2$

(2) $R_2 = 6 -4x_1 -3X_2 +S_1$

แทนค่า R_1,R_2 ในข้อจำกัด (0) จะได้

$$Z -4X_1 -X_2 -M(3 -3X_1 -X_2) -M(6 -4X_1 -3X_2 +S_1) = 0$$

$$Z +(7M -4)X_1 +(4M -1)X_2 -MS_1 = 9M$$

สร้างตารางเริ่มต้น แล้ววิเคราะห์หาตัวแปรมูลฐานเข้าและตัวแปรมูลฐานออกเพื่อหาค่า Z น้อยสุด โดยดูสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในเงื่อนไข (0) ที่เป็นค่าบวกมากที่สุด ให้ตัวแปรนั้นเป็นตัวแปรเข้า แล้ววิเคราะห์จนกระทั่งในเงื่อนไข(0)สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเดิม,ตัวแปรขาดและตัวแปรเกินเป็น 0 หรือ - ทั้งหมด แสดงว่าได้คำตอบเหมาะสมแล้ว สำหรับตัวแปรเทียมนั้นเมื่อออกจากการเป็นตัวแปรมูลฐานแล้วจะไม่มีการพิจารณาเข้าเป็นตัวแปรมูลฐานอีก ตารางซิมเพลกจะได้ดังตารางที่ 15

ตัวแปร มูลฐาน		สัมประสิทธิ์ของ							ค่าคงที่ ขวามือ	อัตรา ส่วน
		Z	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2		
	Z	1	7M-4	4M-1	-M	0	0	0	9M	
0	R_1	0	3	1	0	1	0	0	3	3/3=1
	R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6	6/4
	S_2	0	1	2	0	0	0	1	3	3
	Z	1	0	(5M+1)/3	-M	(4-7M)/3	0	0	4+2M	
1	X_1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1	3
	R_2	0	0	5/3	-1	-4/3	1	0	2	6/5
	S_2	0	1	5/3	0	1/3	0	1	2	6/5
	Z	1	0	0	1/5	(8/5)-M	(-1/5)-M	0	18/5	
2	X_1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5	3
	X_2	0	0	1	3/5	4/5	3/5	0	6/5	
	S_2	0	0	0	1	1	-1	1	0	0
	Z	1	0	0	0	(7/5)-M	-M	-1/5	18/5	
3	X_1	0	1	0	0	2/5	0	1/5	3/5	
	X_2	0	0	1	0	-1/5	0	3/5	6/5	
	S_1	0	0	0	1	1	-1	1	0	

<u>ตารางที่ 15</u> ตารางแสดงซิมเพลกที่สมบูรณ์ของการโปรแกรมเชิงเส้นตรง

จากตารางที่ 15 ค่าตอบที่เหมาะสมของปัญหานี้คือ

$X_1 = 3/5$, $X_2 = 6/5$,ค่า Z ที่น้อยที่สุดคือ 18/5

หมายเหตุ วิธี ซิมเพลก

ข้อดี ใช้เวลาในการคำนวณน้อย

ข้อเสีย ใช้ได้เฉพาะเงื่อนไขที่มีรูปแบบ <= เท่านั้น

วิธี บิ๊ก-เอ็ม

ข้อดี ใช้ได้กับเงื่อนไขทุกกรณี

ข้อเสีย ถ้าเงื่อนไขมีรูปแบบ <= เท่านั้น จะเสียเวลาในการคำนวณ โดยจำเป็น ควรจะใช้วิธีซิมเพลก

3.13 ลักษณะของผลลัพธ์ด้วยวิธีซิมเพลก

คุณสมบัติของผลลัพธ์ด้วยวิธีซิมเพลก นอกจากผลลัพธ์ที่เหมาะสมด้วยจำนวนผลลัพธ์เพียงจำนวนเดียวแล้ว ยังมีเพิ่มเติมดังนี้คือ

1. การย้อนซ้ำ (degeneracy)
2. ผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต (unbounded solutions)
3. ผลลัพธ์ที่เหมาะสมหลายผลลัพธ์ (alternative optimal solutions)
4. ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ไม่เกิดขึ้น (nonexiting feasible solutions)

<u>การย้อนซ้ำ</u> (degeneracy)

ในการพิจารณาเงื่อนไขที่เป็นไปได้ของระเบียบวิธีซิมเพลก ถ้าปรากฏว่ามีตัวแปรนำออก 2 ตัว หรือมากกว่ามีสิทธิเสมอกัน ให้เลือกตัวใดตัวหนึ่งจากผลลัพธ์ได้ ซึ่งจะมีผลทำให้ได้ค่าของตัวแปรบางตัวในรอบถัดไปมีค่าเท่ากับ 0 จึงทำให้ไม่แน่ใจว่าค่าของสมการเป้าหมายจะดีขึ้น(เพิ่มขึ้นหรือลดลง) ตามทฤษฎีอาจจะเป็นไปได้ที่จะเกิดการย้อนซ้ำของผลลัพธ์ซึ่งไม่อาจทำให้ได้ผลลัพธ์ที่เหมาะสมหรือดีที่สุด หรือ อาจจะกล่าวได้ว่า ปัญหานี้เกิดวัฏจักร (cycling) คือเกิดการย้อนซ้ำของขั้นตอนอย่างชนิดที่ไม่มีที่สิ้นสุด แต่ก็มีบางกรณีที่เกิดการย้อนซ้ำชั่วคราว (Temporary Degenerate) ซึ่งในที่สุดจะสามารถหาผลลัพธ์ที่เหมาะสมได้

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.12.3 (กรณีการย้อนซ้ำ)

จงหาค่าสูงสุดของ $Z = 0.75X_1 - 150X_2 + 0.02X_3 - 6X_4$

เงื่อนไข

$$0.25X_1 - 0.6X_2 - 0.04X_3 - 9X_4 <= 0$$
$$0.5X_1 - 90X_2 - 0.02X_3 + 3X_4 <= 0$$
$$X_3 <= 0$$
$$\bar{X} >= 0,\ i=1,2,3,4$$

<u>วิธีทำ</u> หาค่าสูงสุดของ Z

เงื่อนไข (0) $Z -0.75X_1 +150X_2 -0.02X_3 +6X_4 = 0$

(1) $0.25X_1 - 60X_2 -0.04X_3 +9X_4 +S_1 = 0$

(2) $0.50X_1 - 90X_2 -0.02X_3 +3X_4 +S_2 = 0$

(3) $S_3 = 1$

$X_i >= 0;\ i=1,2,3,4\ ,\ S_1,S_2,S_3 >= 0$

แก้ปัญหาโดยใช้ตารางซิมเพลก ดังตารางที่ 16

ตัวแปรมูลฐาน		สัมประสิทธิ์ของตัวแปร								ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	
	Z	1	-0.75	150	-0.2	6	0	0	0	0
	S_1	0	0.25	-60	-0.04	9	1	0	0	0
0	S_2	0	0.5	-90	-0.02	3	0	1	0	0
	S_3	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	Z	1	0	-304	-0.14	33	3	0	0	0
	X_1	0	1	-240	-0.16	36	4	0	0	0
1	S_2	0	0	30	0.06	-15	-2	1	0	0
	S_3	0	0	0	0	1	0	0	0	1
	Z	1	0	0	-0.08	18	1	0	0	0
	X_1	0	1	0	0.32	-84	-12	8	0	0
2	X_2	0	0	1	0.002	-0.5	-0.067	0.003	0	0
	S_3	0	0	0	1	0	0	0	1	1

	Z	1	0.25	0	0	-34	-2	-3	0	0
	X_3	0	3.12	1	1	-263	-37.5	25	0	0
3	X_2	0	-0.006	0	0	0.25	1/120	-0.16	0	0
	S_3	0	3.12	0	0	263	37.5	-25	1	1
	Z	1	-0.5	120	0	0	1	1	0	0
	X_3	0	62.5	10500	1	0	50	-150	0	0
4	X_4	0	0.25	40	0	1	0.33	-0.67	0	0
	S_3	0	62.5	-10500	0	0	-50	150	1	1
	Z	1	-1.75	330	0.02	0	0	-2	0	0
	S_1	0	-1.25	210	0.02	0	1	-3	0	0
5	X_4	0	0.167	-30	0.0067	1	0	0.33	0	0
	S_3	0	0	0	1	0	0	0	1	1
	Z	1	-0.75	150	-0.02	6	0	0	0	0
	S_1	0	0.25	-60	-0.04	9	1	0	0	0
6	S_2	0	0.5	-90	-0.02	3	0	1	0	0
	S_3	0	0	0	1	0	0	0	1	1

ตารางที่ 16 แสดงตารางซิมเพลกซ์กรณีเกิดวัฏจักร

จากตารางที่ 16 การทำซ้ำครั้งที่ 6 จะได้ตารางเหมือนกับตารางเริ่มต้นซึ่งยังไม่ได้คำตอบเหมาะสม เพราะเกิดวัฏจักร

<u>ผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขต</u> (unbounded solution)

การที่ผลลัพธ์ไม่มีขอบเขต อาจเกิดจากการที่พื้นที่ของค่าของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ไม่มีขอบเขตซึ่งอาจจะให้ค่าของสมการเป้าหมายเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างไม่มีขีดจำกัด

<u>ตัวอย่าง</u> 3.12.4 (กรณีผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขต)

หาค่าสูงสุดของ $Z = 2X_1 + X_2$

เงื่อนไข $X_1 - X_2 \quad <= 10$

$2X_1 - X_2 \quad <= 40$

$X_1, X_2 >= 0$

<u>วิธีทำ</u> เขียนรูปแบบปัญหาใหม่ เพื่อสร้างตารางซิมเพลก ดังนี้

หาค่าสูงสุดของ Z

เงื่อนไข (0) $Z - 2X_1 - X_2 = 0$

(1) $X_1 - X_2 + S_1 = 10$

(2) $2X_1 - X_2 + s_2 = 40$

$X_1, X_2 >= 0 \ , \ S_1, S_2 >= 0$

ตัวแปรมูลฐาน		สัมประสิทธิ์ของตัวแปร					ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
	Z	1	-2	-1	0	0	0
0	S_1	0	1	-1	1	0	10
	S_2	0	2	-1	0	1	40
	Z	1	0	-3	2	0	20
	X_1	0	1	-1	1	0	10
1	S_2	0	0	1	-2	1	20

	Z	1	0	0	-4	3	80
	X_1	0	1	0	-1	1	30
2	X_2	0	0	1	-2	1	20

ตารางที่ 17 ตารางซิมเพลกซ์ของรูปแบบปัญหา

จากตารางสุดท้ายของตารางที่ 17 เมื่อพิจารณาให้ S_1 เป็นตัวแปรมูลฐานเข้าจะไม่สามารถหาตัวแปรออกเพื่อเพิ่มค่า Z ได้อีก รูปแบบปัญหานี้จึงไม่สามารถหาขอบเขตของคำตอบที่เหมาะสมได้

ผลลัพธ์ที่เหมาะสมหลายผลลัพธ์ (alternative optimal solutions)

ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นบางปัญหาอาจมีผลลัพธ์ที่เหมาะสมหรือดีที่สุดหลายผลลัพธ์ซึ่งเกิดจากการที่สมการเป้าหมายขนานกับเงื่อนไขที่มีอยู่ ในกรณีอย่างนี้ค่าของตัวแปรจะต่างกันออกไป แต่จะได้ค่าสมการเป้าหมายเดียวกัน นั่นก็หมายความว่าจะมีจำนวนผลลัพธ์มากจนนับไม่ถ้วนโดยที่แต่ละผลลัพธ์จะให้ค่าเป้าหมายค่าเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 3.12.5 (กรณีหาผลลัพธ์ที่เหมาะสมได้หลายผลลัพธ์)

จงหาค่าสูงสุดของ $Z = 4X_1 + 14X_2$

เงื่อนไข $2X_1 + 7X_2 <= 21$

$7X_1 + 2X_2 <= 21$

$X_1, X_2 >= 0$

<u>วิธีทำ</u> ใช้ตารางซิมเพลกวิเคราะห์ปัญหาจะได้ดังตารางที่ 18

ตัวแปรมูลฐาน		สัมประสิทธิ์ของตัวแปร					ค่าคงที่ขวามือ
		Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
	Z	1	-4	-14	0	0	0
0	S_1	0	2	7	1	0	21
	S_2	0	7	2	0	1	21
	Z	1	0	0	2	0	42
	X_2	0	2/7	1	1/7	0	3
1	S_2	0	45/7	0	-2/7	1	15

<u>ตารางที่ 18</u> ตารางซิมเพลกซ์ของปัญหา

จากตารางที่ 18 ตารางสุดท้ายจะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของ x_1 ในข้อจำกัด(0)ซึ่งไม่ได้เป็นตัวแปรมูลฐานมีค่า 0 ดังนั้นถ้าจะพิจารณาให้ x_1 เป็นตัวแปรมฐานเข้าสามารถทำได้แต่ไม่ทำให้ค่า Z ดีขึ้น ดังตารางที่ 20

ตัวแปรมูลฐาน	สัมประสิทธิ์ของตัวแปร					ค่าคงที่ขวามือ
	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	
Z	1	0	0	2	0	42
X_2	0	0	1	7/45	-2/45	7/3
X_1	0	1	0	-2/45	7/45	7/3

<u>ตารางที่ 19</u> แสดงคำตอบเหมาะสม Z = 42 เมื่อ X_1 = 7/3 , X_2 = 7/3

หมายเหตุ ตารางสุดท้ายของตารางซิมเพลกที่มีคำตอบเหมาะสมของปัญหาถ้าปรากฏว่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ไม่เป็นมูลฐานในสมการ (0) เป็น 0 แสดงว่ารูปแบบปัญหานั้นมีคำตอบได้มากกว่า 1 คำตอบ

ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ไม่เกิดขึ้น (nonexisting feasible solutions)

กรณีนี้จะเกิดขึ้นเมื่อไม่มีผลลัพธ์ใดเลยที่เป็นไปได้ภายใต้เงื่อนไขทั้งหมด นั่นคือไม่สามารถหาผลลัพธ์ได้เลย เนื่องจากไม่มีพื้นที่แสดงขอบเขตของผลลัพธ์ ซึ่งการแก้ปัญหาที่มีรูปแบบ การโปรแกรมเชิงเส้นจะชี้ให้เห็นว่าปัญหานั้นเป็นปัญหาที่ไม่มีผลลัพธ์อย่างชัดเจน

ตัวอย่างที่ 3.12.6 (กรณีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ไม่เกิดขึ้น)

จงหาค่าต่ำสุดของ $Z = 3X_1 + 5X_2$

เงื่อนไข

$$
\begin{aligned}
X_1 &\le 1 \\
2X_2 &= 12 \\
3X_1 + 2X_2 &\ge 18 \\
X_1, X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

วิธีทำ เขียนรูปแบบปัญหาใหม่จะได้ดังนี้

หาค่าต่ำสุดของ Z

เงื่อนไข

$$
\begin{array}{llcl}
(0) & Z - 3X_1 - 5X_2 - MR_1 - MR_2 & = & 0 \\
(1) & X_1 + S_1 & = & 1 \\
(2) & 2X_2 + R_1 & = & 12 \\
(3) & 3X_1 + 2X_2 - S_2 + R_2 & = & 18
\end{array}
$$

$$X_1, X_2 \ge 0 \;,\; S_1, S_2 \ge 0 \;,\; R_1, R_2 \ge 0$$

คำตอบมูลฐานที่เป็นไปได้ คือ

$$S_1 = 1,\ R_1 = 12,\ R_2 = 18,\ X_1 = X_2 = S_2 = 0$$

ทำให้สัมประสิทธิ์ของ R_1, R_2 ในเงื่อนไข (0) เป็น 0 ดังนี้

จากเงื่อนไข (2) $R_1 = 12 - 2X_2$

(3) $R_2 = 18 - 3X_1 - 2X_2 + S_2$

แทนในเงื่อนไข (0) จะได้

$$Z - 3X_1 - 5X_2 - M(12 - 2X_2) - M(18 - 3X_1 - 2X_2 + S_2) = 0$$

$$Z + (3M - 3)X_1 + (4M - 5)X_2 - MS_2 = 30M$$

เขียนรูปแบบการโปรแกรมเชิงเส้น

หาค่าต่ำสุดของ Z

โดยมีเงื่อนไข

$$
\begin{array}{llllllll}
(0) & Z + (3M-3)X_1 + (4M-5)X_2 & & & -MS_2 & & = & 30M \\
(1) & X_1 & +S_1 & & & & = & 1 \\
(2) & 2X_2 & & +R_1 & & & = & 12 \\
(3) & 3X_1 + 2X_2 & & & -S_2 & +R_2 & = & 18
\end{array}
$$

$$X_1, X_2 >= 0,\ S_1, S_2 >= 0,\ R_1, R_2 >= 0$$

สร้างตารางซิมเพลกเริ่มต้น แล้ววิเคราะห์ปัญหาโดยเลือกตัวแปรมูลฐานเข้าที่มีสัมประสิทธิ์ในเงื่อนไข (0) เป็นบวกมากที่สุด เพื่อลดค่า Z ได้เร็วที่สุด ดังตารางที่ 20

ตัวแปรมูลฐาน		สัมประสิทธิ์ของ								ค่าคงที่ขวามือ	อัตราส่วน
		Z	X_1	X_2	S_1	R_1	R_2	S_2			
	Z	1	3M-3	4M-5	0	0	-M	0		30M	
	S_1	0	1	0	1	0	0	0		1	
0	R_1	0	0	2	0	1	0	0		12	12/2=6
	R_2	0	3	2	0	0	-1	1		18	18/2=9
	Z	1	3M-3	0	0	(5/2)-2M	-M	0		6M+30	
	S_1	0	1	0	1	0	0	0		1	1
1	X_2	0	0	1	0	1/2	0	0		6	
	R_2	0	3	0	0	-1	-1	1		6	2

บทที่ 4
รายละเอียดและขั้นตอนการใช้งานโปรแกรม

4.1 <u>บทนำ</u>

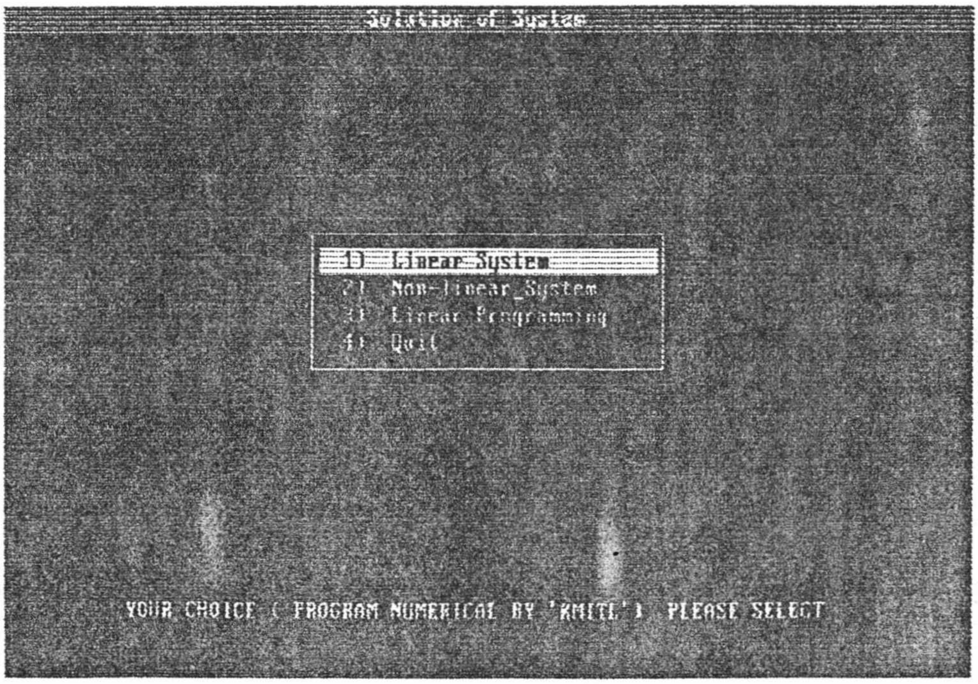
ในบทนี้จะเป็นการอธิบายรายละเอียดต่างๆของโปรแกรมสำเร็จรูป ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนการใช้งาน วิธีการนำเข้า ในแต่ละขั้นตอนจะมีรูปประกอบคำอธิบายเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ และตัวอย่างจากการคำนวณโดยคอมพิวเตอร์

4.2 <u>การเรียกเข้าโปรแกรม</u>

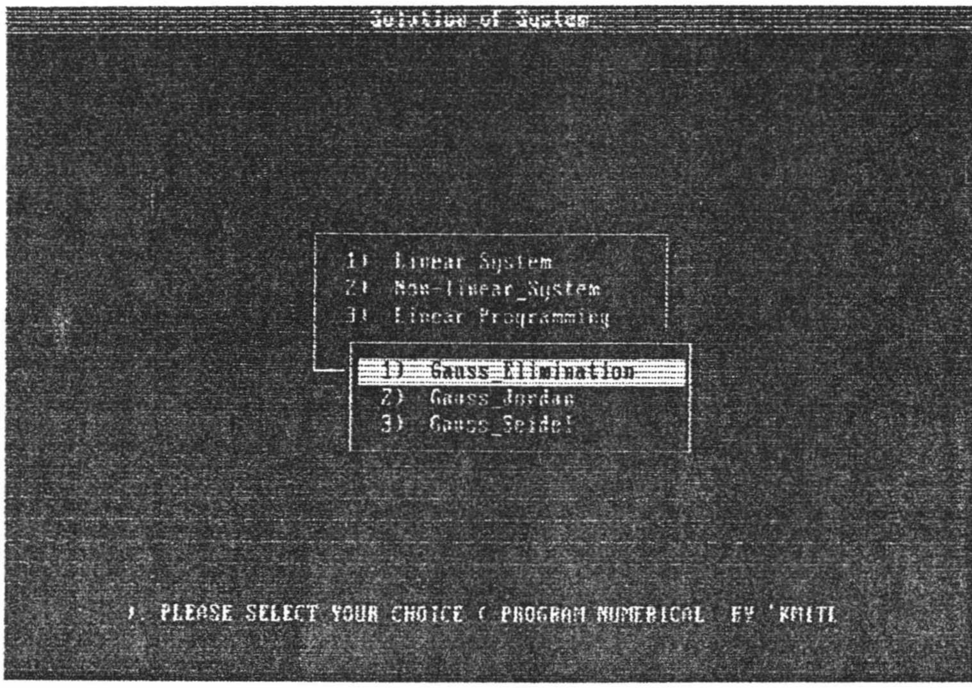
เมื่อเปิดเครื่องคอมพิวเตอร์ ถ้าใส่แผ่นดิสเก็ตลงไปในไดรฟ์ A จะเรียกโปรแกรมโดยใส่ชื่อโปรแกรมว่า NUMER และกด Enter

A > NUMER   < Enter >

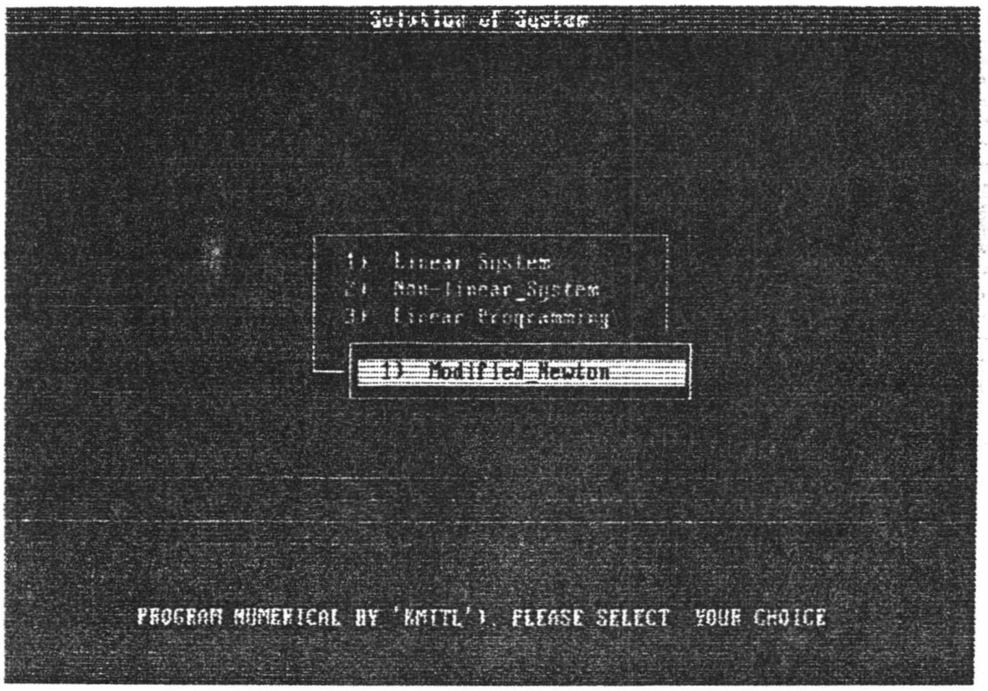
แล้วจะนำเข้าสู่เมนูหลัก



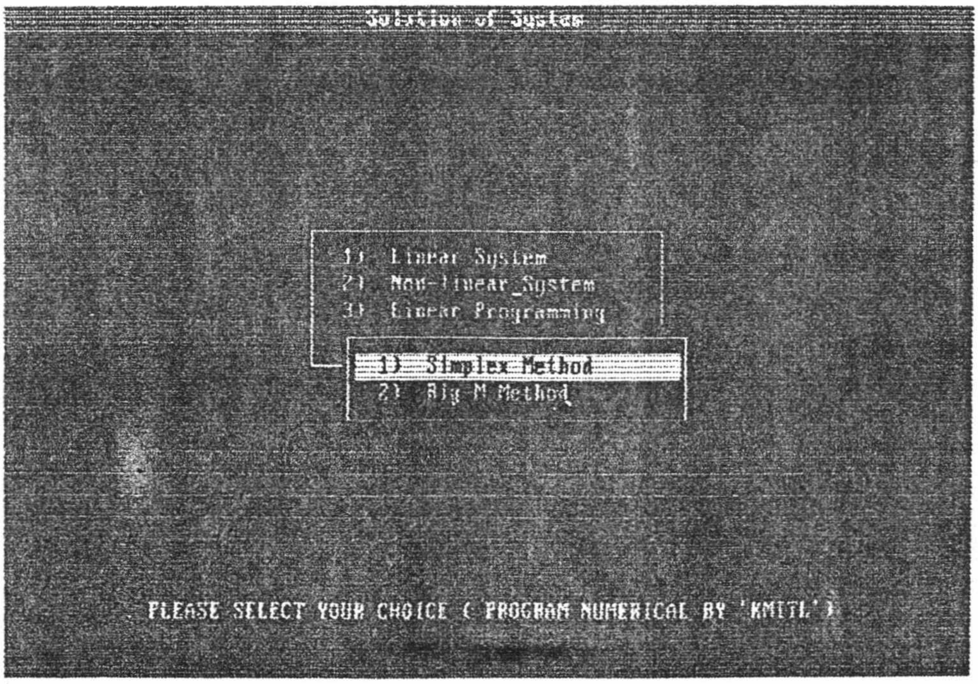
การที่จะเลือกหัวข้อใดทำโดยการเลื่อนแถบแสง แล้วกด Enter จะได้เมนูย่อยขึ้นมาและจะเลือกหัวข้อย่อยก็ทำเช่นเดียวกัน คือ เลื่อนแถบแสง แล้วกด Enter เมื่อจะออกจากเมนูย่อยก็กด Esc ถ้าต้องการเลิกการทำงานให้เลือกข้อ 4) Quit



รูป เมื่อเลือก 1)ระบบสมการเชิงเส้น



รูป เมื่อเลือก 2) ระบบสมการไม่เชิงเส้น

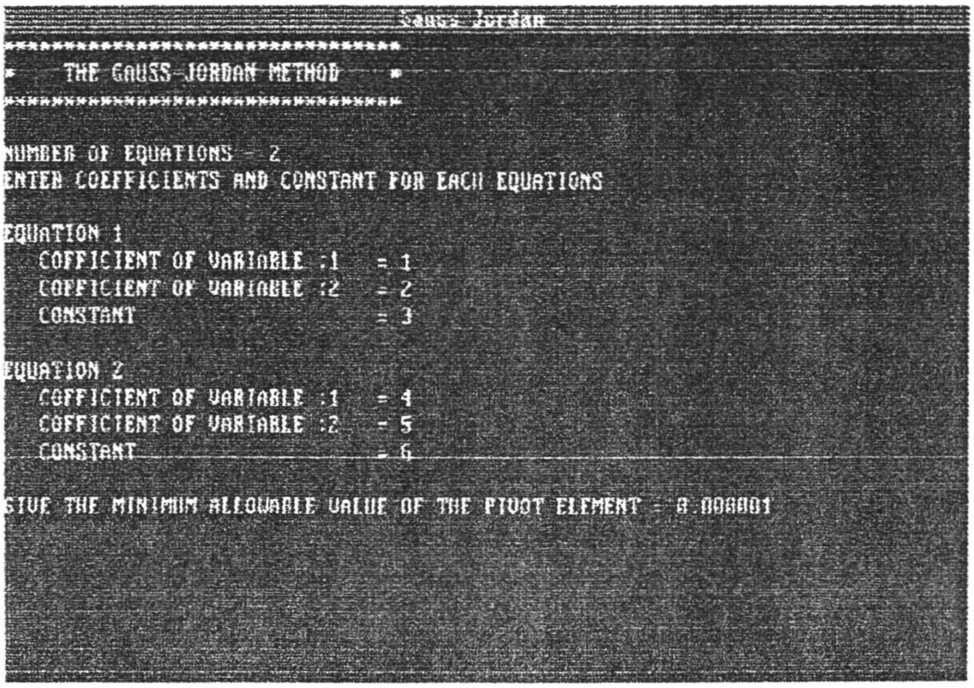


รูป เมื่อเลือก 3) การโปรแกรมเชิงเส้น

4.3 ขั้นตอนการรับข้อมูลของระบบสมการเชิงเส้น

การรับข้อมูลของแต่ละวิธีในระบบสมการเชิงเส้นจะคล้ายๆ กัน คือ

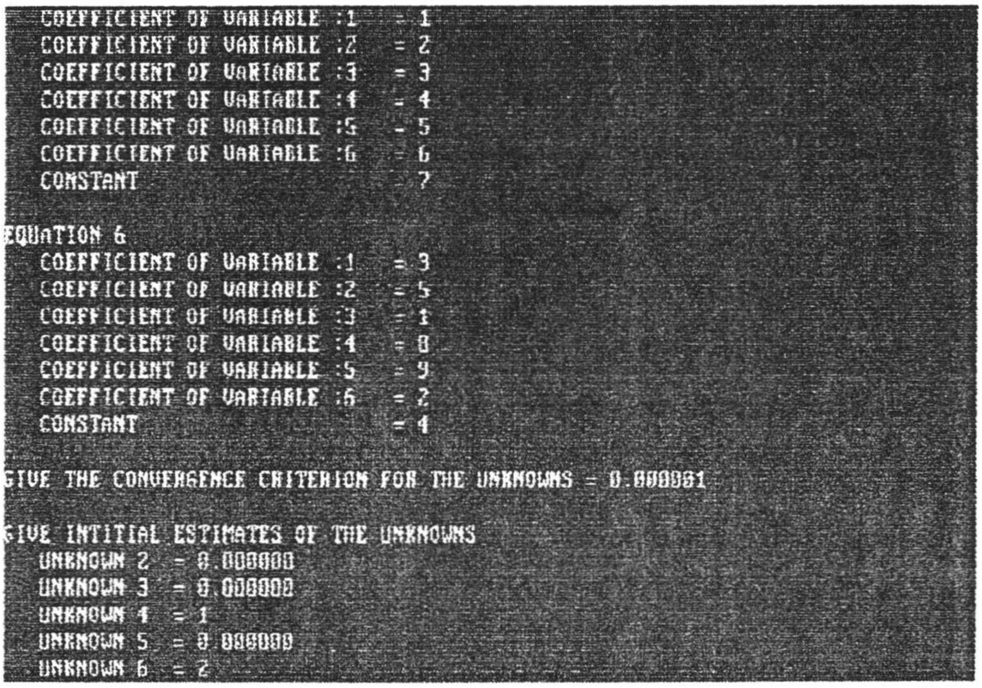
1) รับจำนวนสมการ จะรับจำนวนเท่าไรก็ได้ขึ้นอยู่กับขนาดของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์



2) รับค่าสัมประสิทธิ์และค่าคงที่ของแต่ละสมการ

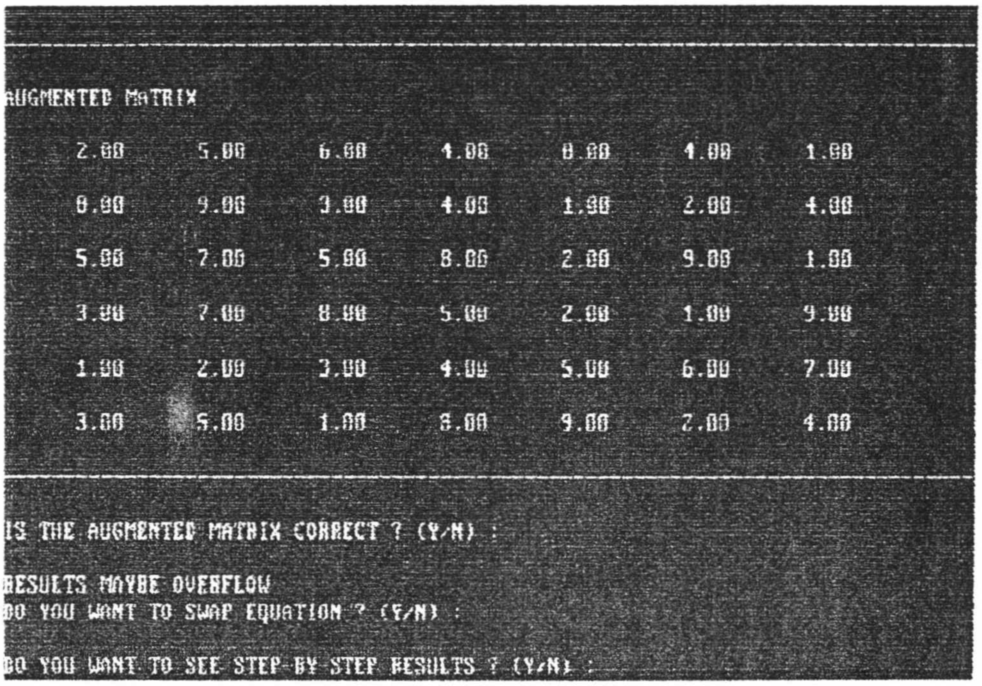
3) ถ้าเป็น GAUSS ELIMINATION และ GAUSS-JORDAN จะรับค่าสมาชิกหลักที่น้อยที่สุดที่ยอมรับได้

4) ถ้าเป็น GAUSS-SEIDEL จะรับค่าคลาดเคลื่อนที่น้อยที่สุดที่ยอมรับได้
และค่าเริ่มต้น



```
   COEFFICIENT OF VARIABLE :1   = 1
   COEFFICIENT OF VARIABLE :2   = 2
   COEFFICIENT OF VARIABLE :3   = 3
   COEFFICIENT OF VARIABLE :4   = 4
   COEFFICIENT OF VARIABLE :5   = 5
   COEFFICIENT OF VARIABLE :6   = 6
   CONSTANT                     = 7

EQUATION 6
   COEFFICIENT OF VARIABLE :1   = 3
   COEFFICIENT OF VARIABLE :2   = 5
   COEFFICIENT OF VARIABLE :3   = 1
   COEFFICIENT OF VARIABLE :4   = 8
   COEFFICIENT OF VARIABLE :5   = 9
   COEFFICIENT OF VARIABLE :6   = 2
   CONSTANT                     = 4

GIVE THE CONVERGENCE CRITERION FOR THE UNKNOWNS = 0.000001

GIVE INTITIAL ESTIMATES OF THE UNKNOWNS
   UNKNOWN 2  = 0.000000
   UNKNOWN 3  = 0.000000
   UNKNOWN 4  = 1
   UNKNOWN 5  = 0.000000
   UNKNOWN 6  = 2
```

5) แสดงเมตริกซ์แต่งเติมเพื่อทวนความถูกต้อง และให้แก้ไขได้



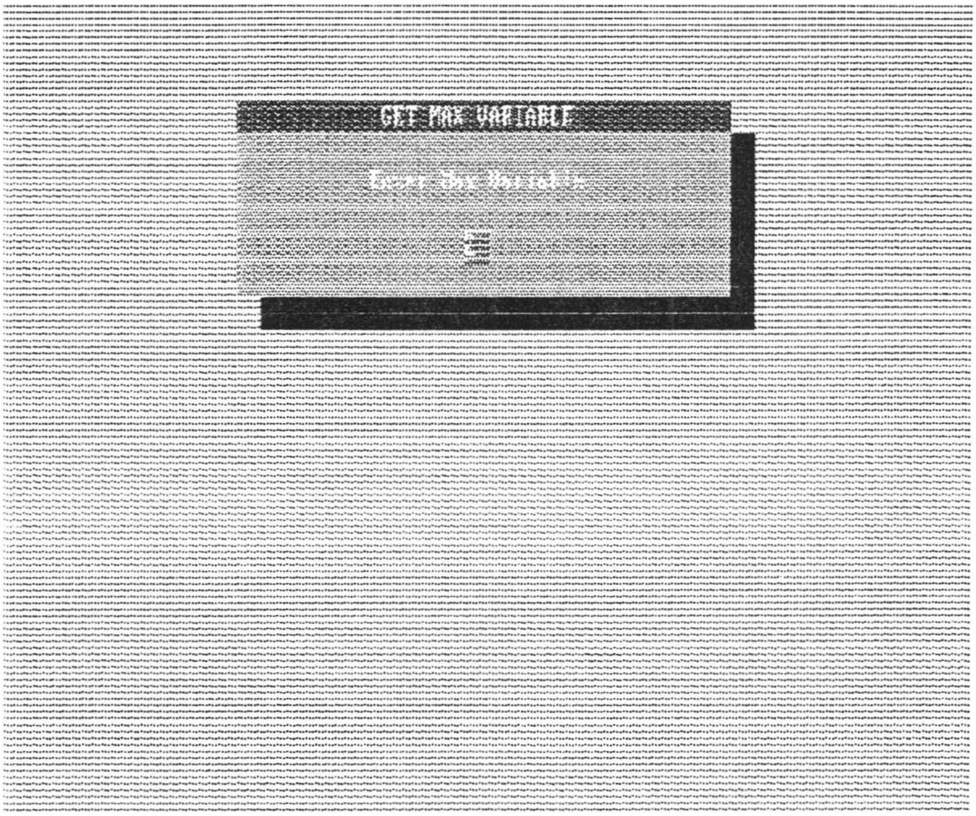
5) สำหรับ GAUSS-SEIDEL ถ้าจำนวนตัวแปรมากกว่า 4 จะถามว่าต้องการสลับสมการหรือไม่ เพราะว่าอาจเกิดการลู่ออก ถ้าจำนวนตัวแปรน้อยกว่า 5 โปรแกรมจะสลับสมการให้เอง
6) ถามว่าต้องการดูผลลัพธ์เป็น step หรือไม่ ตอบ Y หรือ N
7) ถามว่าต้องการพิมพ์ออกกระดาษหรือไม่ ตอบ Y หรือ N และต้องการพิมพ์เป็น step หรือไม่

หลังจากรับข้อมูลเข้าแล้วโปรแกรมจะทำการคำนวณและแสดงผลลัพธ์

```
AUGMENTED MATRIX

      1.00      2.00      3.00

      4.00      5.00      6.00
------------------------------------------------------------
IS THE AUGMENTED MATRIX CORRECT ? (Y/N) :

DO YOU WANT TO SEE STEP-BY-STEP RESULTS ? (Y/N) :

DO YOU WANT TO PRINT RESULTS ? (Y/N) :
------------------------------------------------------------
RESULT

 X[1] = -1.000000
 X[2] = 2.000000
------------------------------------------------------------
```

4.4 <u>ขั้นตอนการรับข้อมูลของระบบสมการไม่เชิงเส้น</u>

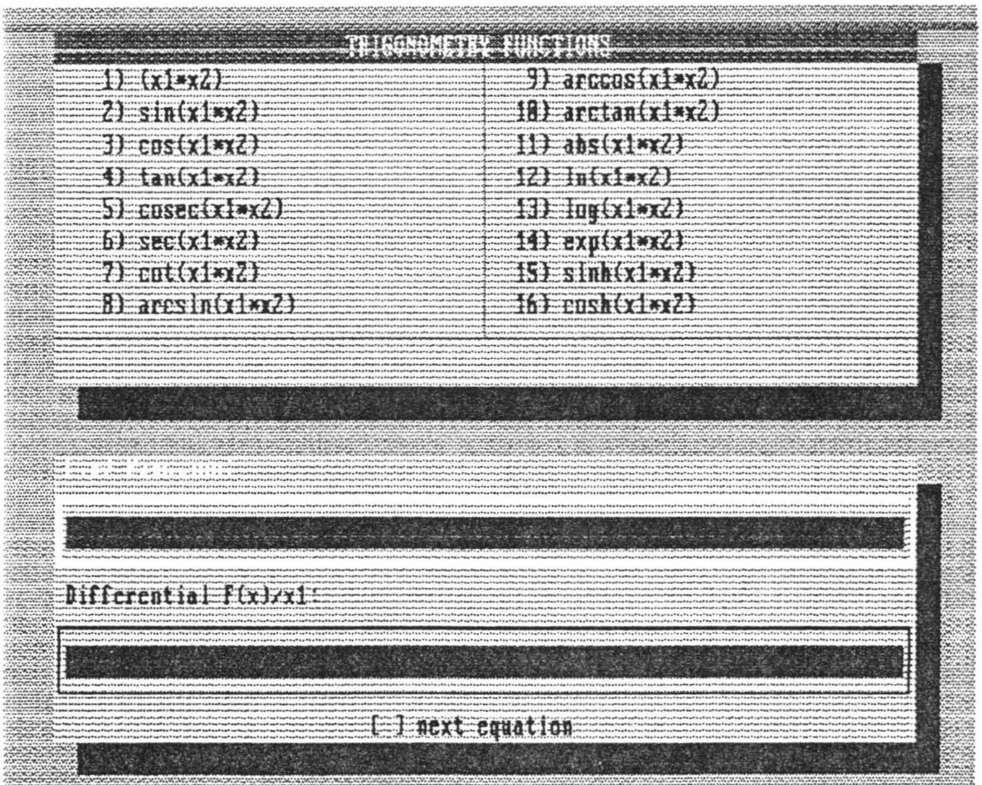
1) รับจำนวนสมการ ข้อจำกัดของโปรแกรมจะรับได้ไม่เกิน 5 สมการ

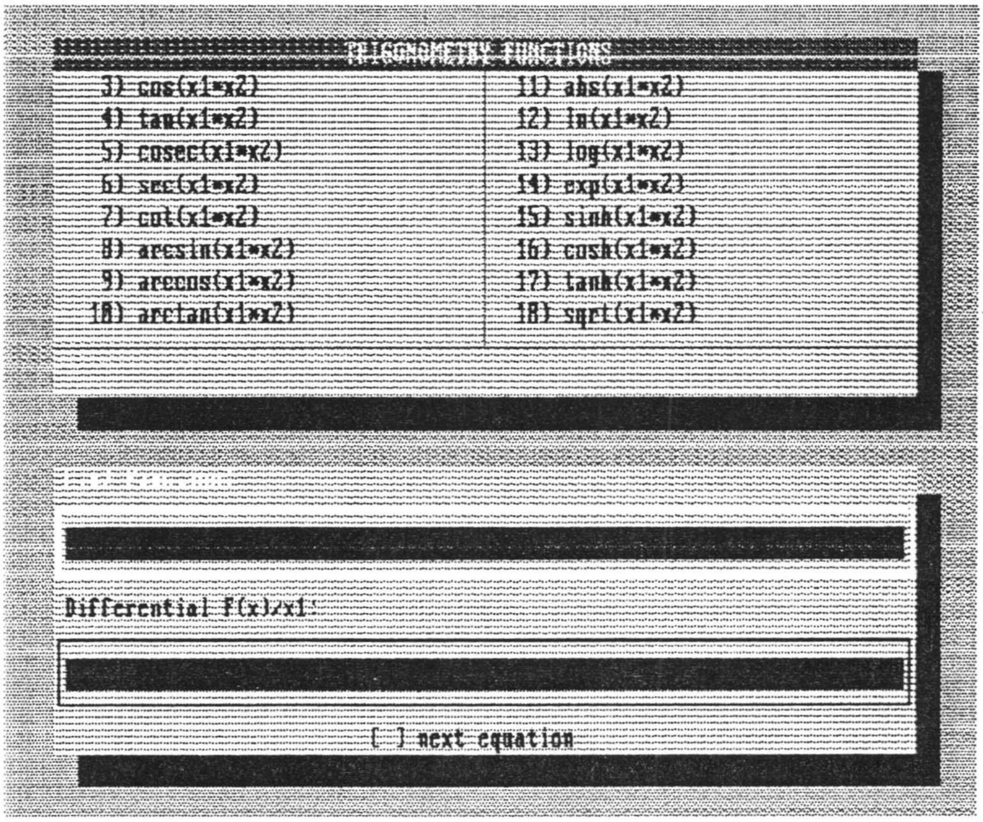


2) ป้อนสมการโดยถ้าเป็นค่าคงที่จะใส่ค่าเข้าไปเลย ส่วนที่เป็นฟังก์ชันจะเข้าไปเลือกโดยกด tab แล้วเลื่อนแถบแสงไปยังฟังก์ชันที่ต้องการ แล้วกด Enter เช่น เลือกฟังก์ชัน 1 คือ (x_1,x_2) สมมติว่าเราจะเอา (x_1) จะทำโดยเลื่อนแถบแสงไปที่(x_1,x_2) แล้วกด Enter และกดเลข 1 ถ้าเอา (x_1,x_2) ก็กดเลข 1 และ เลข 2 หรือถ้าเอาเฉพาะ (x_2) ก็กดเฉพาะเลข 2 ถ้ากดเลขยกกำลัง เช่น x_1^2 จะเลือก x_1 ดังที่กล่าวมาแล้ว และใส่เครื่องหมาย ^ และใส่เลข 2 จะได้ x_1^2

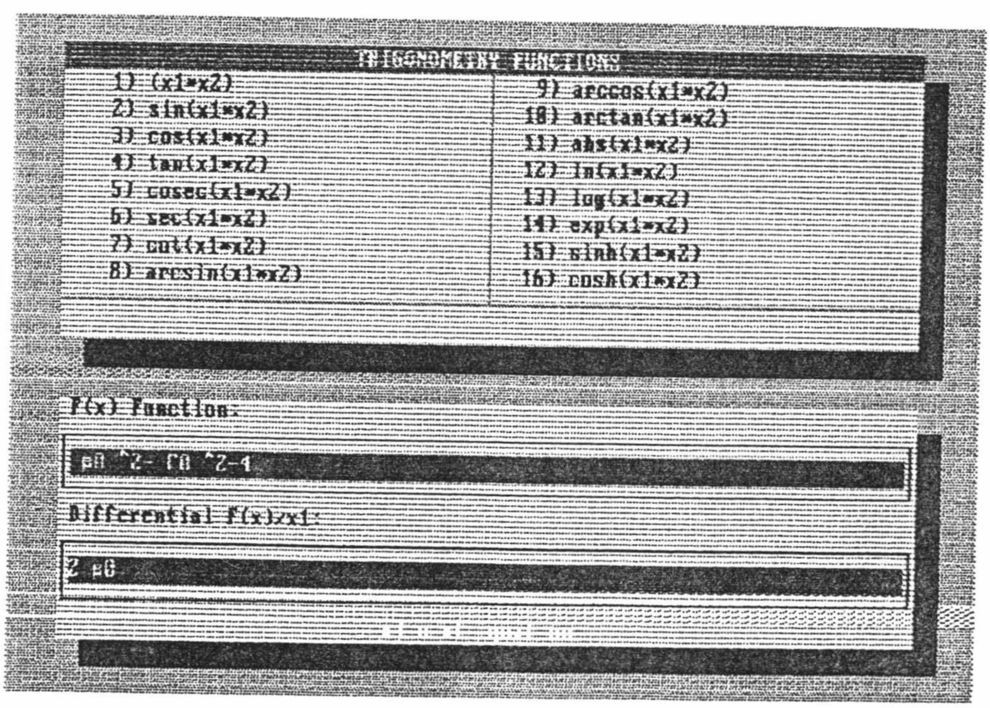
หมายเหตุ มีฟังก์ชันให้เลือกทั้งหมด 18 ฟังก์ชัน

และเมื่อป้อนสมการเสร็จ กด Enter และจะเข้าไปป้อนสมการอนุพันธ์ ทำเช่นเดียวกับที่กล่าวข้างต้น





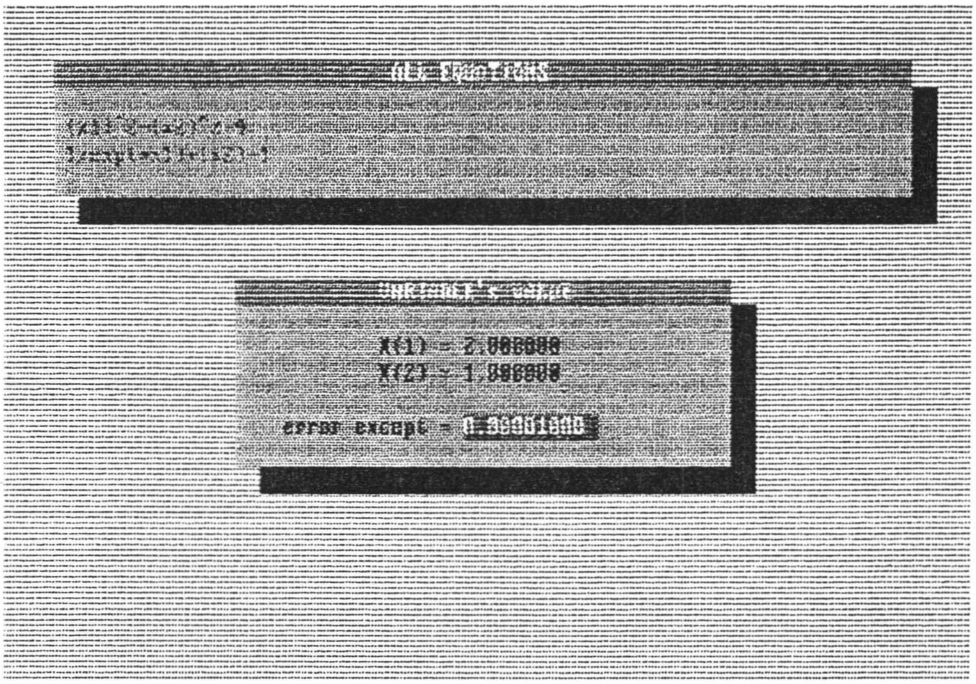
TRIGONOMETRY FUNCTIONS
3) cos(x1*x2)
4) tan(x1*x2)
5) cosec(x1*x2)
6) sec(x1*x2)
7) cot(x1*x2)
8) arcsin(x1*x2)
9) arccos(x1*x2)
10) arctan(x1*x2)
11) abs(x1*x2)
12) ln(x1*x2)
13) log(x1*x2)
14) exp(x1*x2)
15) sinh(x1*x2)
16) cosh(x1*x2)
17) tanh(x1*x2)
18) sqrt(x1*x2)
Differential F(x)/x1:
[ ] next equation



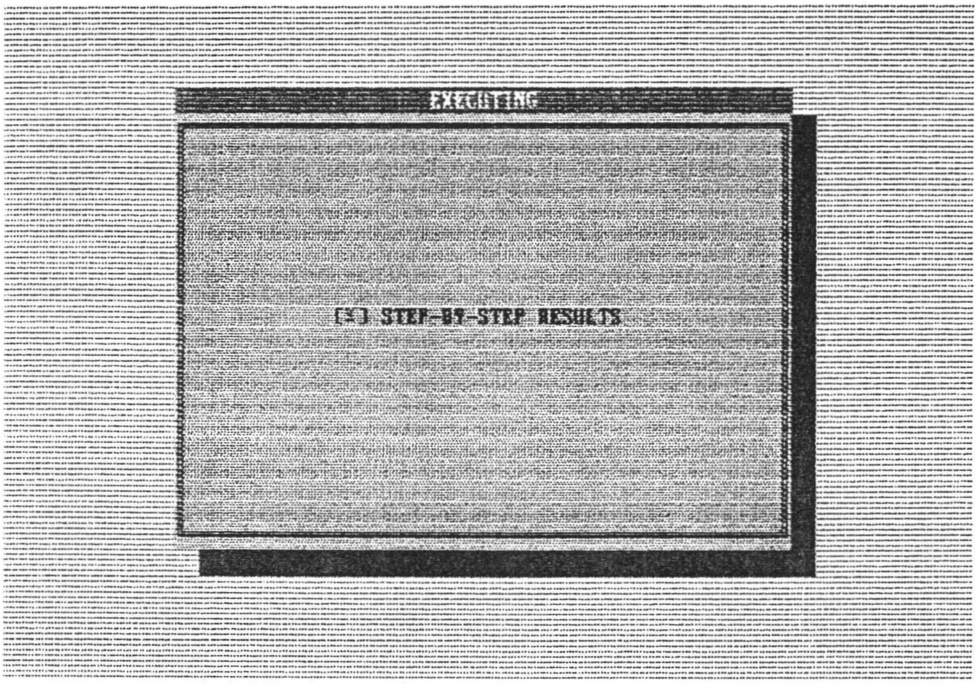
TRIGONOMETRY FUNCTIONS
1) (x1*x2)
2) sin(x1*x2)
3) cos(x1*x2)
4) tan(x1*x2)
5) cosec(x1*x2)
6) sec(x1*x2)
7) cot(x1*x2)
8) arcsin(x1*x2)
9) arccos(x1*x2)
10) arctan(x1*x2)
11) abs(x1*x2)
12) ln(x1*x2)
13) log(x1*x2)
14) exp(x1*x2)
15) sinh(x1*x2)
16) cosh(x1*x2)
F(x) Function:
p0 ^2- r0 ^2-4
Differential F(x)/x1:
2 p0

และจะแสดงสมการที่เราป้อนเข้าไป

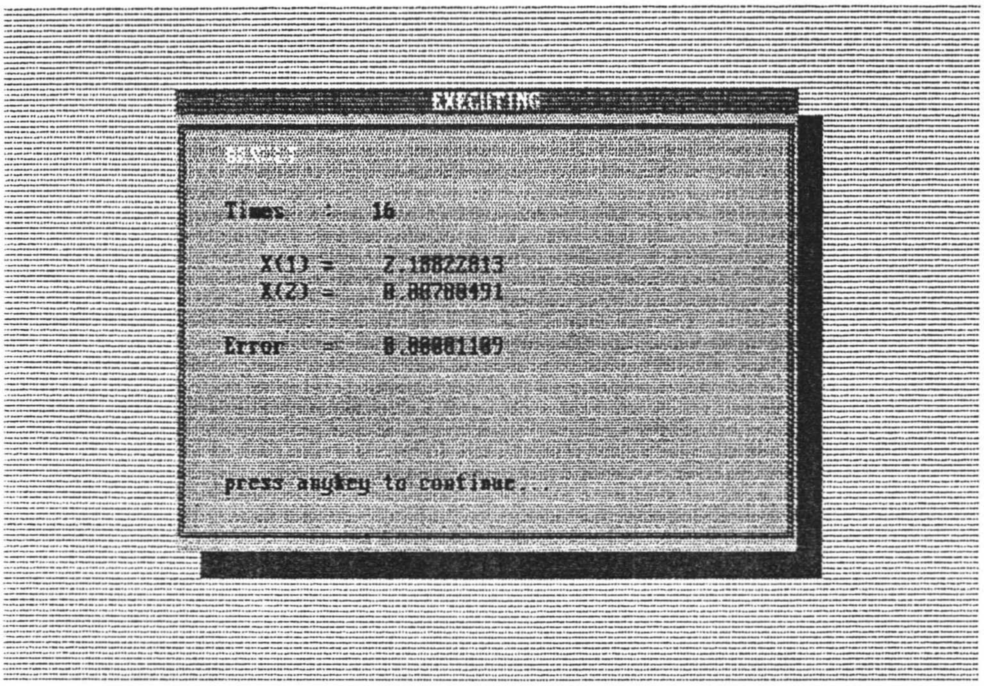
3) ป้อนค่าเริ่มต้นและค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้



4) ถามว่าต้องการดูผลลัพธ์เป็น step หรือไม่ ให้กด Space bar ถ้ามีเครื่องหมาย X แสดงว่า จะแสดงผลลัพธ์แต่ละ step เครื่องหมาย X จะมีหรือไม่มี เกิดจากการกด Space bar สลับไปมา

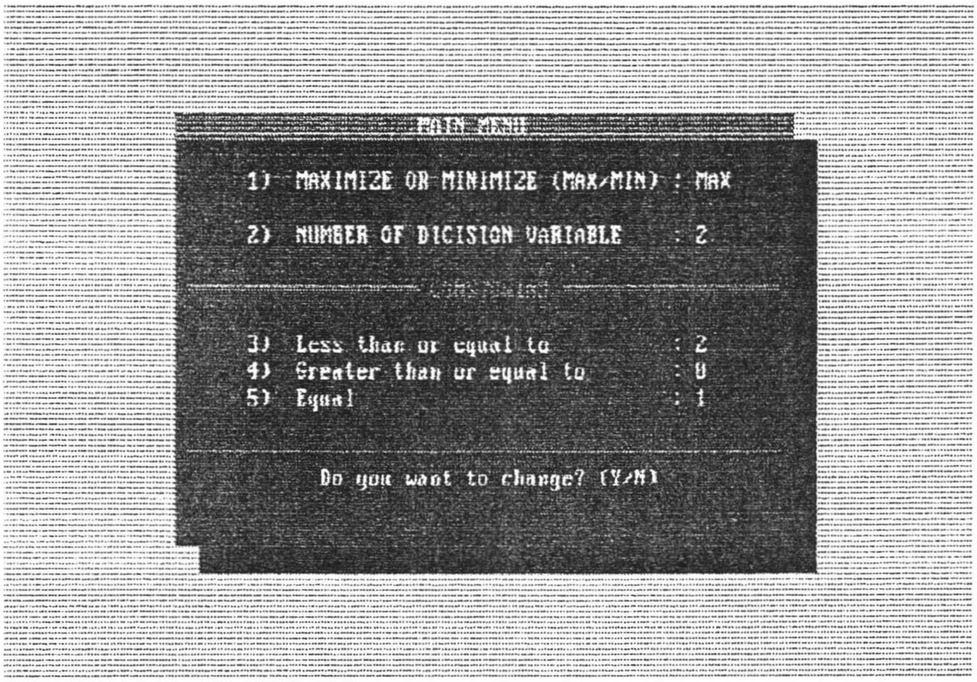


หลังจากรับข้อมูลเข้าแล้วโปรแกรมจะทำการคำนวณและแสดงผลลัพธ์

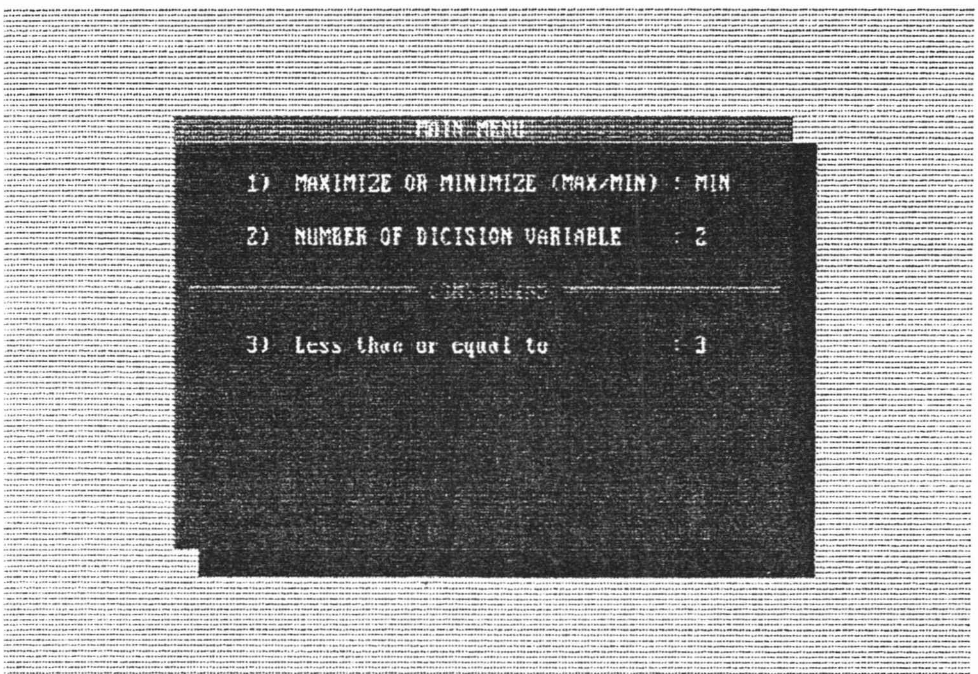


4.5 ขั้นตอนการรับข้อมูลของการโปรแกรมเชิงเส้น

1) รับรูปแบบของสมการเป้าหมายว่าเป็นแบบสูงสุดหรือต่ำสุด โดยใส่ MAX สำหรับแบบสูงสุด และ MIN สำหรับแบบต่ำสุด
2) รับจำนวนตัวแปร จะรับจำนวนเท่าไรก็ได้ขึ้นอยู่กับขนาดของหน่วยความจำของเครื่องคอมพิวเตอร์
3) สำหรับ BIG-M รับจำนวนเงื่อนไข <=
4) สำหรับ BIG-M รับจำนวนเงื่อนไข >=
5) สำหรับ BIG-M รับจำนวนเงื่อนไข =

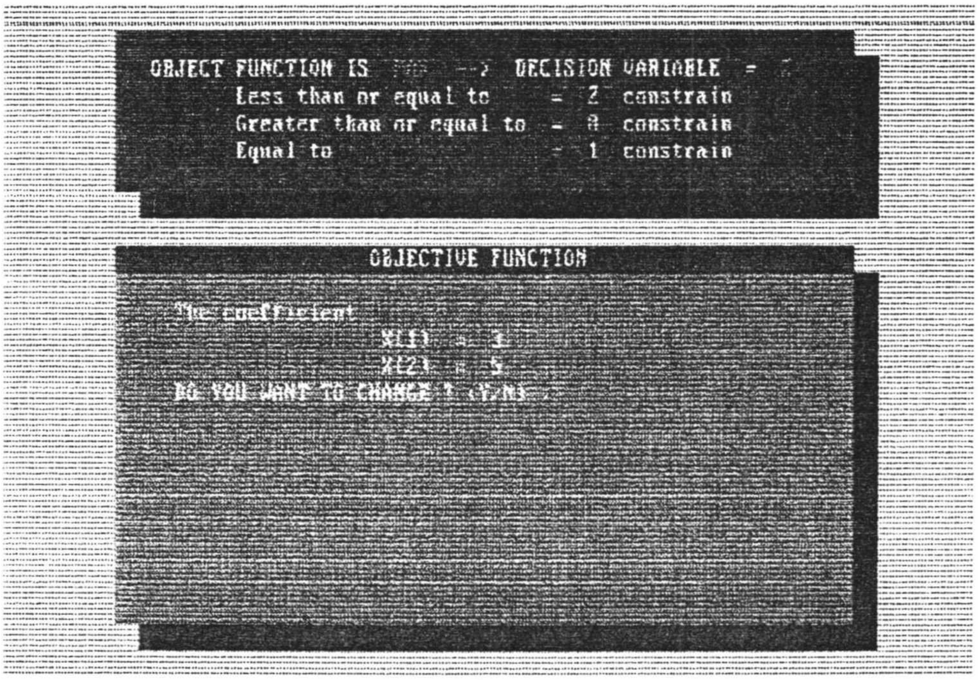


สำหรับ SIMPLEX รับจำนวนเงื่อนไข <= อย่างเดียว

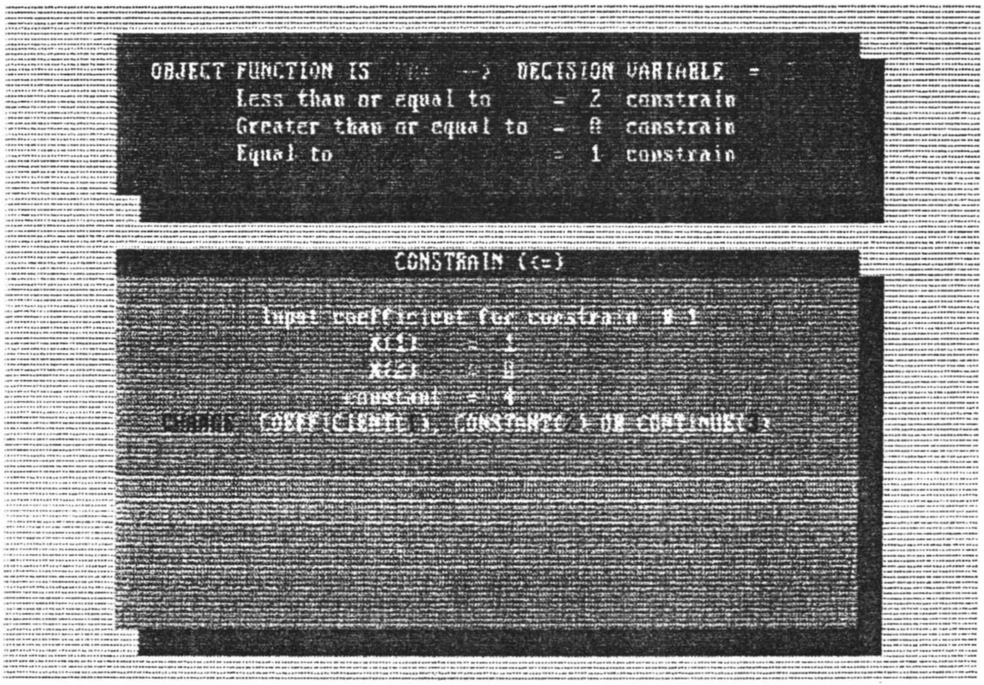


6) รับค่าสัมประสิทธิ์ของสมการเป้าหมาย

และถามความถูกต้อง ถ้าไม่ถูกต้องจะให้แก้ไข

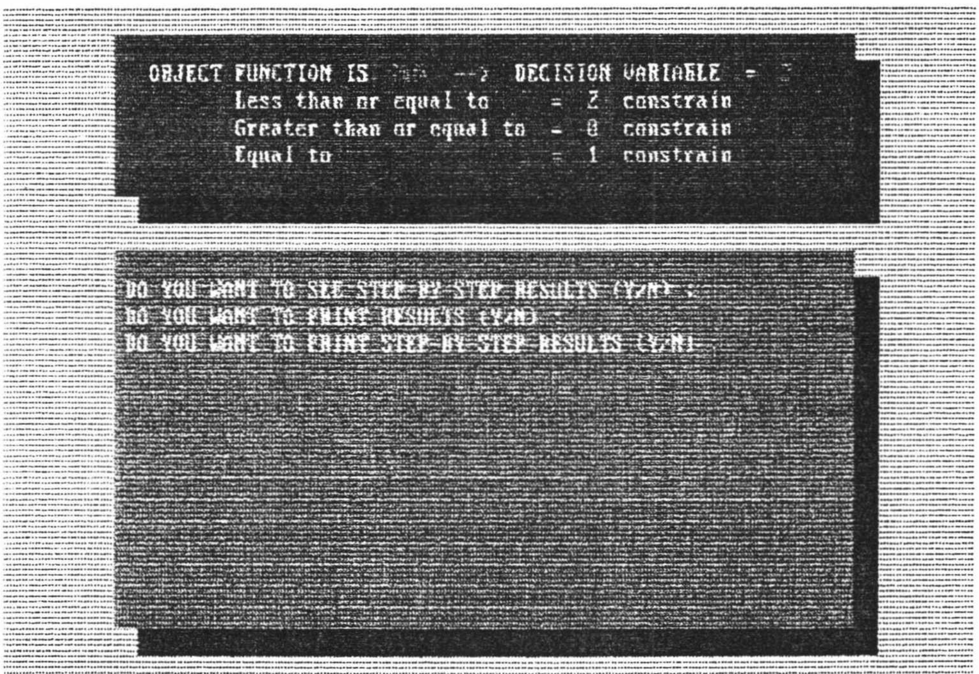


7) รับค่าสัมประสิทธิ์และค่าคงที่ของแต่ละเงื่อนไข โดยจะเริ่มรับจากเงื่อนไข <=, >=, = ตามลำดับ

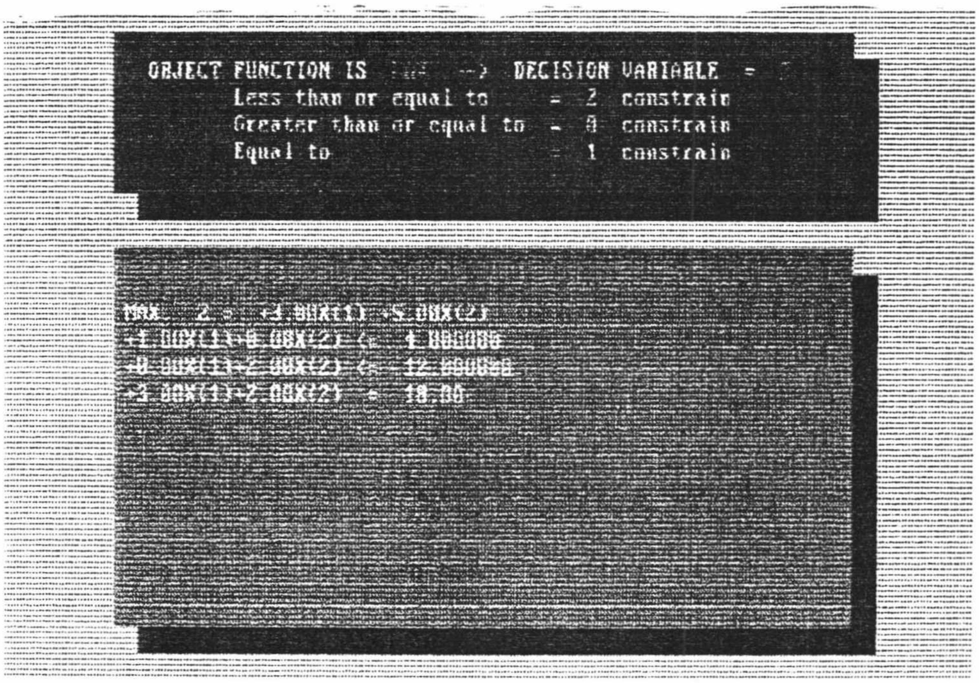


8) ถามว่าต้องการดูผลลัพธ์เป็น step หรือไม่ ตอบ Y หรือ N

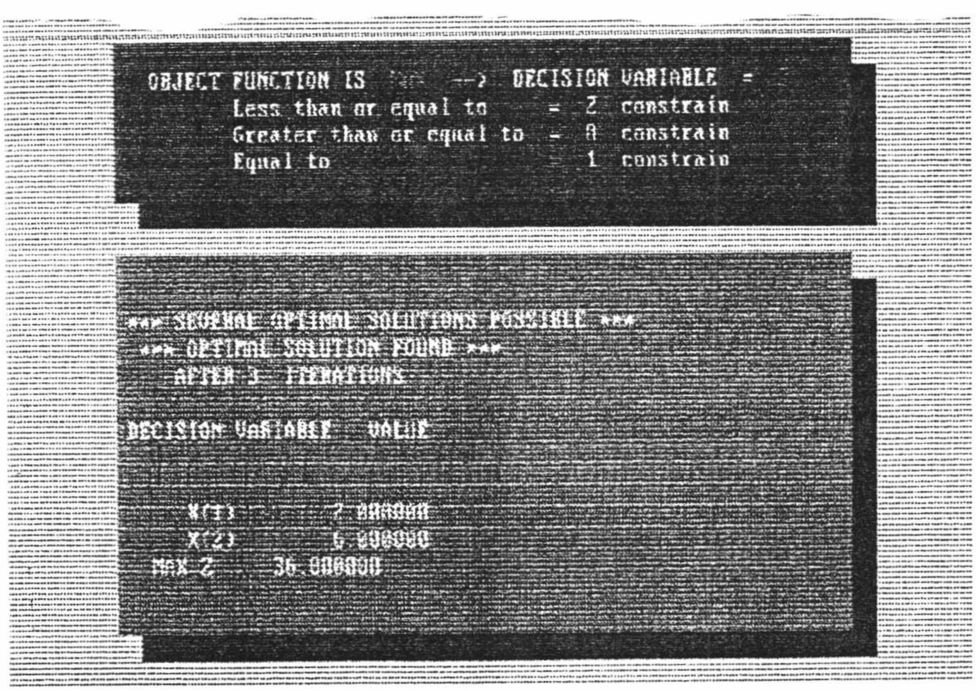
9) ถามว่าต้องการพิมพ์ออกกระดาษหรือไม่ ตอบ Y หรือ N และต้องการพิมพ์เป็น step หรือไม่



และจะแสดงสมการที่เราป้อนเข้าไป



หลังจากรับข้อมูลเข้าแล้วโปรแกรมจะทำการคำนวณและแสดงผลลัพธ์



บทที่ 5

ตัวอย่างที่คำนวณโดยคอมพิวเตอร์

5.1 ตัวอย่างของระบบสมการเชิงเส้น

จากตัวอย่างที่ 1.2.1 (GAUSS ELIMINATION METHOD)

```
THE GAUSS ELIMINATION METHOD

  +3.00 x(1)  +18.00 x(2)  +9.00 x(3)   =  +18.00
  +2.00 x(1)  +3.00 x(2)  +3.00 x(3)   =  +117.00
  +4.00 x(1)  +1.00 x(2)  +2.00 x(3)   =  +283.00

-----------------------------------------------------------------

PIVOTING COLUMNS:
INTERCHANGE COLUMNS 2 AND 1

     18.00       3.00       9.00      18.00

      3.00       2.00       3.00     117.00

      1.00       4.00       2.00     283.00

-----------------------------------------------------------------

PERFORM ELIMINATION:
DEVIDE ROW 1 BY 18.000000
MULTIPLY ROW 1 BY 3.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 2

     18.00       3.00       9.00.     18.00

     -0.00       1.50       1.50     114.00

      1.00       4.00       2.00     283.00

-----------------------------------------------------------------

DEVIDE ROW 1 BY 18.000000
MULTIPLY ROW 1 BY 1.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 3

     18.00       3.00       9.00      18.00

     -0.00       1.50       1.50     114.00

     -0.00       3.83       1.50     282.00

-----------------------------------------------------------------
```

PIVOTING ROWS:
INTERCHANGE ROWS 3 AND 2

18.00	3.00	9.00	18.00
-0.00	3.83	1.50	282.00
-0.00	1.50	1.50	114.00

PERFORM ELIMINATION:
DEVIDE ROW 2 BY 3.833333
MULTIPLY ROW 2 BY 1.500000 AND SUBTRACT FROM ROW 3

18.00	3.00	9.00	18.00
-0.00	3.83	1.50	282.00
-0.00	0.00	0.91	3.65

RANK = 3

RESULTS BY BACK SUBSTITUTION

X(1) = 72.000000
X(2) = -13.000000
X(3) = 4.000001

จากตัวอย่างที่ 1.2.2 (GAUSS ELIMINATION METHOD)

```
 +0.00 x(1)  +2.00 x(2)  +0.00 x(3)  +1.00 x(4)    =   +0.00
+2.00 x(1)  +2.00 x(2)  +3.00 x(3)  +2.00 x(4)    =   -2.00
+4.00 x(1)  -3.00 x(2)  +0.00 x(3)  +1.00 x(4)    =   -7.00
+6.00 x(1)  +1.00 x(2)  -6.00 x(3)  -5.00 x(4)    =   +6.00
```

PIVOTING ROWS:
INTERCHANGE ROWS 4 AND 1

6.00	1.00	-6.00	-5.00	6.00
2.00	2.00	3.00	2.00	-2.00
4.00	-3.00	0.00	1.00	-7.00
0.00	2.00	0.00	1.00	0.00

PERFORM ELIMINATION:
DEVIDE ROW 1 BY 6.000000
MULTIPLY ROW 1 BY 2.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 2

6.00	1.00	-6.00	-5.00	6.00
-0.00	1.67	5.00	3.67	-4.00
4.00	-3.00	0.00	1.00	-7.00
0.00	2.00	0.00	1.00	0.00

DEVIDE ROW 1 BY 6.000000
MULTIPLY ROW 1 BY 4.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 3

6.00	1.00	-6.00	-5.00	6.00
-0.00	1.67	5.00	3.67	-4.00
-0.00	-3.67	4.00	4.33	-11.00
0.00	2.00	0.00	1.00	0.00

DEVIDE ROW 1 BY 6.000000
MULTIPLY ROW 1 BY 0.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 4

6.00	1.00	-6.00	-5.00	6.00
-0.00	1.67	5.00	3.67	-4.00
-0.00	-3.67	4.00	4.33	-11.00
-0.00	2.00	0.00	1.00	-0.00

PIVOTING COLUMNS:
INTERCHANGE COLUMNS 3 AND 2

6.00	-6.00	1.00	-5.00	6.00
-0.00	5.00	1.67	3.67	-4.00
-0.00	4.00	-3.67	4.33	-11.00
-0.00	0.00	2.00	1.00	-0.00

PERFORM ELIMINATION:
DEVIDE ROW 2 BY 5.000000
MULTIPLY ROW 2 BY 4.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 3

6.00	-6.00	1.00	-5.00	6.00
-0.00	5.00	1.67	3.67	-4.00
-0.00	-0.00	-5.00	1.40	-7.80
-0.00	0.00	2.00	1.00	-0.00

DEVIDE ROW 2 BY 5.000000
MULTIPLY ROW 2 BY 0.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 4

6.00	-6.00	1.00	-5.00	6.00
-0.00	5.00	1.67	3.67	-4.00
-0.00	-0.00	-5.00	1.40	-7.80
-0.00	-0.00	2.00	1.00	0.00

```
PERFORM ELIMINATION:
DEVIDE ROW 3 BY -5.000000
MULTIPLY ROW 3 BY 2.000000 AND SUBTRACT FROM ROW 4

    6.00    -6.00     1.00    -5.00     6.00

   -0.00     5.00     1.67     3.67    -4.00

   -0.00    -0.00    -5.00     1.40    -7.80

   -0.00    -0.00    -0.00     1.56    -3.12

-----------------------------------------------------------------

RANK = 4

-----------------------------------------------------------------

RESULTS BY BACK SUBSTITUTION

   X(1) = -0.500000
   X(2) = 1.160000
   X(3) = 0.400000
   X(4) = -2.000000

-----------------------------------------------------------------
```

จากตัวอย่างที่ 1.3.1 (GAUSS-JORDAN METHOD)

```
+3.00 x(1)  +18.00 x(2)  +9.00 x(3)  +18.00
+2.00 x(1)  +3.00 x(2)  +3.00 x(3)  +117.00
+4.00 x(1)  +1.00 x(2)  +2.00 x(3)  +283.00
```

PARTIAL PIVOTING
INTERCHANG ROWS 3 AND 1

4.00	1.00	2.00	283.00
2.00	3.00	3.00	117.00
3.00	18.00	9.00	18.00

PERFORM NORMALIZATION
DEVIDE ROWS 1 BY 4.000000

1.00	0.25	0.50	70.75
2.00	3.00	3.00	117.00
3.00	18.00	9.00	18.00

PERFORM REDUCTION
MULTIPLE ROW 1 BY 2.000000
AND SUBTRACT FROM ROW 2

1.00	0.25	0.50	70.75
0.00	2.50	2.00	-24.50
3.00	18.00	9.00	18.00

MULTIPLE ROW 1 BY 3.000000
AND SUBTRACT FROM ROW 3

1.00	0.25	0.50	70.75
0.00	2.50	2.00	-24.50
0.00	17.25	7.50	-194.25

PARTIAL PIVOTING
INTERCHANG ROWS 3 AND 2

1.00	0.25	0.50	70.75
0.00	17.25	7.50	-194.25
0.00	2.50	2.00	-24.50

PERFORM NORMALIZATION
DEVIDE ROWS 2 BY 17.250000

1.00	0.25	0.50	70.75
0.00	1.00	0.43	-11.26
0.00	2.50	2.00	-24.50

PERFORM REDUCTION
MULTIPLE ROW 2 BY 0.250000
AND SUBTRACT FROM ROW 1

1.00	0.00	0.39	73.57
0.00	1.00	0.43	-11.26
0.00	2.50	2.00	-24.50

MULTIPLE ROW 2 BY 2.500000
AND SUBTRACT FROM ROW 3

1.00	0.00	0.39	73.57
0.00	1.00	0.43	-11.26
0.00	0.00	0.91	3.65

PERFORM NORMALIZATION
DEVIDE ROWS 3 BY 0.913043

1.00	0.00	0.39	73.57
0.00	1.00	0.43	-11.26
0.00	0.00	1.00	4.00

PERFORM REDUCTION
MULTIPLE ROW 3 BY 0.391304
AND SUBTRACT FROM ROW 1

1.00	0.00	0.00	72.00
0.00	1.00	0.43	-11.26
0.00	0.00	1.00	4.00

MULTIPLE ROW 3 BY 0.434783
AND SUBTRACT FROM ROW 2

1.00	0.00	0.00	72.00
0.00	1.00	0.00	-13.00
0.00	0.00	1.00	4.00

RESULT

```
X[1] = 72.000000
X[2] = -13.000001
X[3] = 4.000001
```

จากตัวอย่างที่ 1.3.2 (GAUSS-JORDAN METHOD)

```
 +0.00 x(1)  +2.00 x(2)  +0.00 x(3)  +1.00 x(4)     =   +0.00
+2.00 x(1)  +2.00 x(2)  +3.00 x(3)  +2.00 x(4)     =   -2.00
+4.00 x(1)  -3.00 x(2)  +0.00 x(3)  +1.00 x(4)     =   -7.00
+6.00 x(1)  +1.00 x(2)  -6.00 x(3)  -5.00 x(4)     =   +6.00
```

RESULT

```
 X[1] = -0.500000
 X[2] = 1.000000
 X[3] = 0.333334
 X[4] = -2.000000
```

จากตัวอย่างที่ 1.4.1 (GAUSS-SEIDEL METHOD)

ให้ค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ = 0.000001

```
THE GAUSS-SEIDEL METHOD

  +8.00 x(1)  +1.00 x(2)  -1.00 x(3)   =  +8.00
  +2.00 x(1)  +9.00 x(2)  +1.00 x(3)   =  +12.00
  +1.00 x(1)  -7.00 x(2)  +2.00 x(3)   =  -4.00

------------------------------------------------------------

RESULT

   x(1) = 1.000000
   x(2) = 1.111111
   x(3) = 1.388889

------------------------------------------------------------

RESULT

   x(1) = 1.034722
   x(2) = 0.949074
   x(3) = 0.804398

------------------------------------------------------------

RESULT

   x(1) = 0.981915
   x(2) = 1.025752
   x(3) = 1.099175

------------------------------------------------------------

RESULT

   x(1) = 1.009178
   x(2) = 0.986941
   x(3) = 0.949704

------------------------------------------------------------

RESULT

   x(1) = 0.995345
   x(2) = 1.006623
   x(3) = 1.025507

------------------------------------------------------------
```

```
RESULT

    x(1)  =  1.002361
    x(2)  =  0.996641
    x(3)  =  0.987064

------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  0.998803
    x(2)  =  1.001703
    x(3)  =  1.006560

------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.000607
    x(2)  =  0.999136
    x(3)  =  0.996673

------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  0.999692
    x(2)  =  1.000438
    x(3)  =  1.001687

------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.000156
    x(2)  =  0.999778
    x(3)  =  0.999144

------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  0.999921
    x(2)  =  1.000113
    x(3)  =  1.000434

------------------------------------------------------------------
```

```
RESULT

    x(1)  =  1.000040
    x(2)  =  0.999943
    x(3)  =  0.999780

-----------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  0.999980
    x(2)  =  1.000029
    x(3)  =  1.000112

-----------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.000010
    x(2)  =  0.999985
    x(3)  =  0.999943

-----------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  0.999995
    x(2)  =  1.000008
    x(3)  =  1.000029

-----------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.000003
    x(2)  =  0.999996
    x(3)  =  0.999985

-----------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  0.999999
    x(2)  =  1.000002
    x(3)  =  1.000007

-----------------------------------------------------------------------
```

```
RESULT

    x(1)  =  1.000001
    x(2)  =  0.999999
    x(3)  =  0.999996

------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.00000
    x(2)  =  1.000000
    x(3)  =  1.000002

------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.000000
    x(2)  =  1.00000
    x(3)  =  0.999999

------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.00000
    x(2)  =  1.000000
    x(3)  =  1.000000

------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.000000
    x(2)  =  1.00000
    x(3)  =  1.00000

------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1)  =  1.000000
    x(2)  =  1.000000
    x(3)  =  1.000000

------------------------------------------------------------
```

จากตัวอย่างที่ 1.4.2 (GAUSS-SEIDEL METHOD)

```
THE GAUSS-SEIDEL METHOD

  +1.00 x(1)  +4.00 x(2)  +1.00 x(3)   =  +5.00
  +2.00 x(1)  +1.00 x(2)  +4.00 x(3)   =  +1.00
  +3.00 x(1)  -1.00 x(2)  +1.00 x(3)   =  +4.00

-------------------------------------------------------------------

RESULT

    x(1) = 2.000000
    x(2) = 1.000000
    x(3) = -1.000000

-------------------------------------------------------------------
```

5.2 ตัวอย่างของระบบสมการไม่เชิงเส้น

จากตัวอย่างที่ 2.1.1 (MODIFIED NEWTON METHOD)

```
------------------------
RESULTS

   X(1) =     2.0000000000
   X(2) =     1.0000000000

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =     2.2500000000
   X(2) =     0.8946007490

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =     2.1917357445
   X(2) =     0.8882773519

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =     2.1883893013
   X(2) =     0.8879028559

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =     2.1882348061
   X(2) =     0.8878855109

-----------------------------------------------------------------
```

```
RESULTS

   X(1) =     2.1882276535
   X(2) =     0.8878847361

-------------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =     2.1882274151
   X(2) =     0.8878846765

-------------------------------------------------------------------
```

ตัวอย่าง (MODIFIED NEWTON METHOD)

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$x^2y + xy - x + y - 0.125 = 0$$

$$xy - x^2 - y^2 + 0.5y + 0.5 = 0$$

กำหนดค่าเริ่มต้น $x_o = 0$, $y_o = 0$

ให้ค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ = 0.000001

```
RESULTS

   X(1) =     0.0000000000
   X(2) =     0.0000000000

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =    -0.1250000000
   X(2) =    -1.2916666269

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =    -0.7093253732
   X(2) =    -0.7014552355

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =    -0.6703945398
   X(2) =    -0.4402463138

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =    -0.4322357476
   X(2) =    -0.5346537232

-----------------------------------------------------------------
RESULTS

   X(1) =    -0.5219449997
   X(2) =    -0.4902104437

-----------------------------------------------------------------
```

```
RESULTS

    X(1) =    -0.4922551215
    X(2) =    -0.5039551258

---------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.5029133558
    X(2) =    -0.4985576868

---------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.4989108741
    X(2) =    -0.5005464554

---------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.5004088283
    X(2) =    -0.4997958541

---------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.4998467565
    X(2) =    -0.5000766516

---------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.5000574589
    X(2) =    -0.4999712706

---------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.4999784529
    X(2) =    -0.5000107884

---------------------------------------------------------------------
```

```
RESULTS

    X(1) =    -0.5000081062
    X(2) =    -0.4999959469

--------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.4999969602
    X(2) =    -0.5000015497

--------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.5000011325
    X(2) =    -0.4999994338

--------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.4999995828
    X(2) =    -0.5000002384

--------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.5000001788
    X(2) =    -0.4999999106

--------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.4999999404
    X(2) =    -0.5000000596

--------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.5000000596
    X(2) =    -0.4999999702

--------------------------------------------------------------------
RESULTS

    X(1) =    -0.4999999702
    X(2) =    -0.5000000000

--------------------------------------------------------------------
```

RESULTS

```
X(1) =    -0.5000000000
X(2) =    -0.5000000000
```

5.3 ตัวอย่างของการโปรแกรมเชิงเส้น

จากตัวอย่างที่ 3.10.1 (SIMPLEX METHOD)

```
MAX.    Z =  +3.00 X(1) +5.00 X(2)
+1.00 X(1) +0.00 X(2)   <=  4.00
+0.00 X(1) +2.00 X(2)   <=  12.00
+3.00 X(1) +2.00 X(2)   <=  18.00
```

ITERATION # 0

BASIC VARIABLES	VALUE
x(3)	4.000000
x(4)	12.000000
x(5)	18.000000
ECONOMIC FUNCTION Z =	0.000000

ITERATION # 1

BASIC VARIABLES	VALUE
x(3)	4.000000
x(2)	6.000000
x(5)	6.000000
ECONOMIC FUNCTION Z =	-30.000000

ITERATION # 2

BASIC VARIABLES	VALUE
x(3)	2.000000
x(2)	6.000000
x(1)	2.000000
ECONOMIC FUNCTION Z =	-36.000000

*** OPTIMAL SOLUTION FOUND ***
AFTER 2 ITERATIONS

DECISION VARIABLE	VALUE
X(1)	2.000000
X(2)	6.000000
MAX Z	36.000000

จากตัวอย่างที่ 3.12.2 (BIG-M METHOD)

```
MIN.   Z =  +4.00 X(1) +1.00 X(2)
+1.00 X(1) +2.00 X(2)   <=  3.00
+4.00 X(1) +3.00 X(2)   >=  6.00
+3.00 X(1) +1.00 X(2)   =  3.00
```

ITERATION # 0

BASIC VARIABLES	VALUE
x(3)	3.000000
x(4)	6.000000
x(5)	3.000000
ECONOMIC FUNCTION Z =	8991.000000

ITERATION # 1

BASIC VARIABLES	VALUE
x(3)	2.000000
x(4)	2.000000
x(1)	1.000000
ECONOMIC FUNCTION Z =	2002.000000

ITERATION # 2

BASIC VARIABLES	VALUE
x(2)	1.200000
x(4)	0.000000
x(1)	0.600000
ECONOMIC FUNCTION Z =	3.600000

```
 *** OPTIMAL SOLUTION FOUND ***
     AFTER 2  ITERATIONS
```

DECISION VARIABLE	VALUE
X(1)	0.600000
X(2)	1.200000
MIN Z	3.600000

จากตัวอย่างที่ 3.12.3 (กรณีการย้อนซ้ำ)

```
MAX.    Z =  +0.75 X(1) -150.00 X(2) +0.02 X(3) -6.00 X(4)
+0.25 X(1) -0.60 X(2) -0.04 X(3) -9.00 X(4)    <=   0.00
+0.50 X(1) -90.00 X(2) -0.02 X(3) +3.00 X(4)    <=   0.00
+0.00 X(1) +0.00 X(2) +1.00 X(3) +0.00 X(4)    <=   0.00
```

*** DEGENERATION SOLUTION ***

จากตัวอย่างที่ 3.12.4 (กรณีผลลัพธ์ที่ไม่มีขอบเขต)

```
LINEAR PROGRAMMING

MAX.    Z =  +2.00 X(1) +1.00 X(2)
+1.00 X(1) -1.00 X(2)   <=  10.00
+2.00 X(1) -1.00 X(2)   <=  40.00


*** UNBOUNDED SOLUTION ***
```

จากตัวอย่างที่ 3.12.5 (กรณีผลลัพธ์มีได้หลายผลลัพธ์)

```
LINEAR PROGRAMMING

MAX.    Z =  +4.00 X(1) +14.00 X(2)
+2.00 X(1) +7.00 X(2)   <=  21.00
+7.00 X(1) +2.00 X(2)   <=  21.00


*** SEVERAL OPTIMAL SOLUTIONS POSSIBLE ***
 *** OPTIMAL SOLUTION FOUND ***
     AFTER 1  ITERATIONS
-----------------------------------------------------------------
DECISION VARIABLE                       VALUE
-----------------------------------------------------------------

        X(1)                            0
        X(2)                            3.000000
-----------------------------------------------------------------
   MAX Z                                42.000000
-----------------------------------------------------------------
```

จากตัวอย่างที่ 3.12.6 (กรณีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ไม่เกิดขึ้น)

```
MIN.    Z =  +3.00 X(1) +5.00 X(2)
+1.00 X(1) +0.00 X(2)   <=  1.00
+3.00 X(1) +2.00 X(2)   >=  18.00
+0.00 X(1) +2.00 X(2)   =  12.00


*** INFESIBLE SOLUTION ***
```

บทที่ 6
สรุปผลและข้อเสนอแนะ

6.1 สรุปผล

โปรแกรมการหาผลเฉลยของระบบสมการนี้ ยังมีปัญหาในส่วนของการ link โปรแกรมรวมกันอยู่ เนื่องจากการพัฒนาโปรแกรมนั้นได้แบ่งเป็นส่วนๆ และใช้ compiler คนละตัว ส่วนของโปรแกรม System of linear equations และโปรแกรม Linear programming สามารถ link รวมกันได้ แต่ส่วนของโปรแกรม System of non-linear equations นำมา link รวมกันไม่ได้

6.2 ข้อเสนอแนะ

1. ควรปรับปรุงให้โปรแกรม link รวมกันได้ โดยคำนึงถึง compiler ที่จะใช้ควรเป็นตัวเดียวกัน

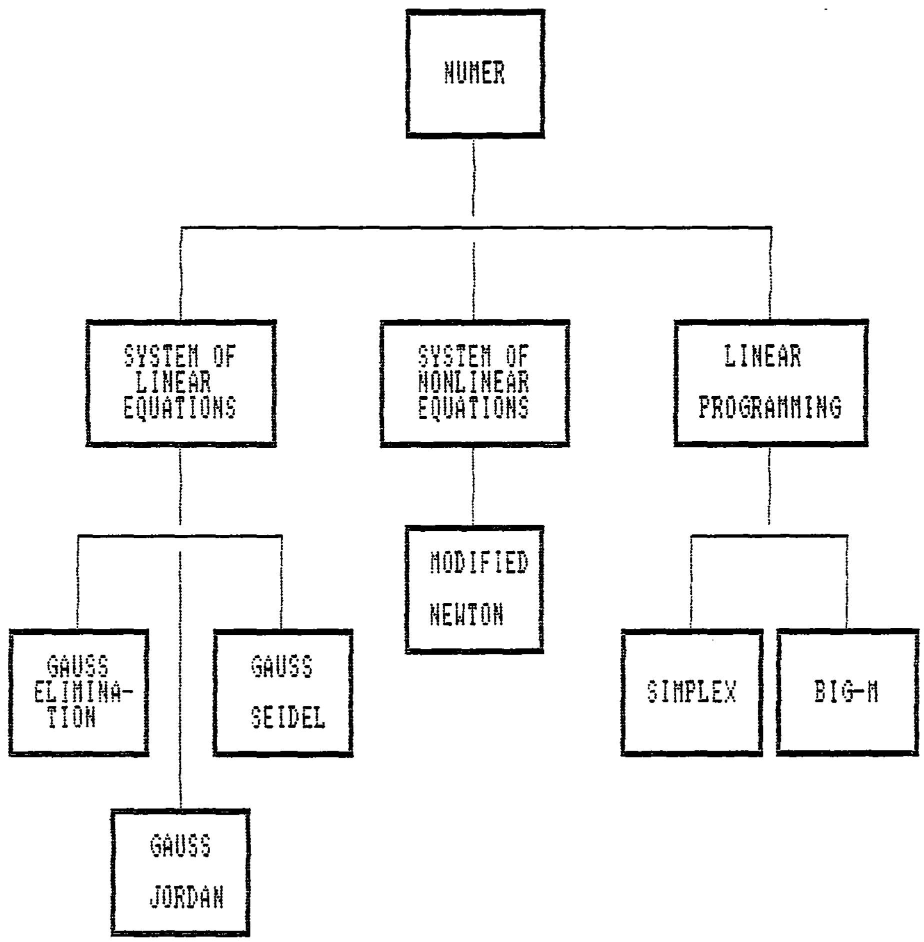
2. ควรปรับปรุงส่วนการรับหน้าจอของ System of nonlinear equations เพราะการใช้นั้นทำความเข้าใจค่อนข้างยาก ต้องศึกษาโดยละเอียด

6.3 ข้อจำกัด

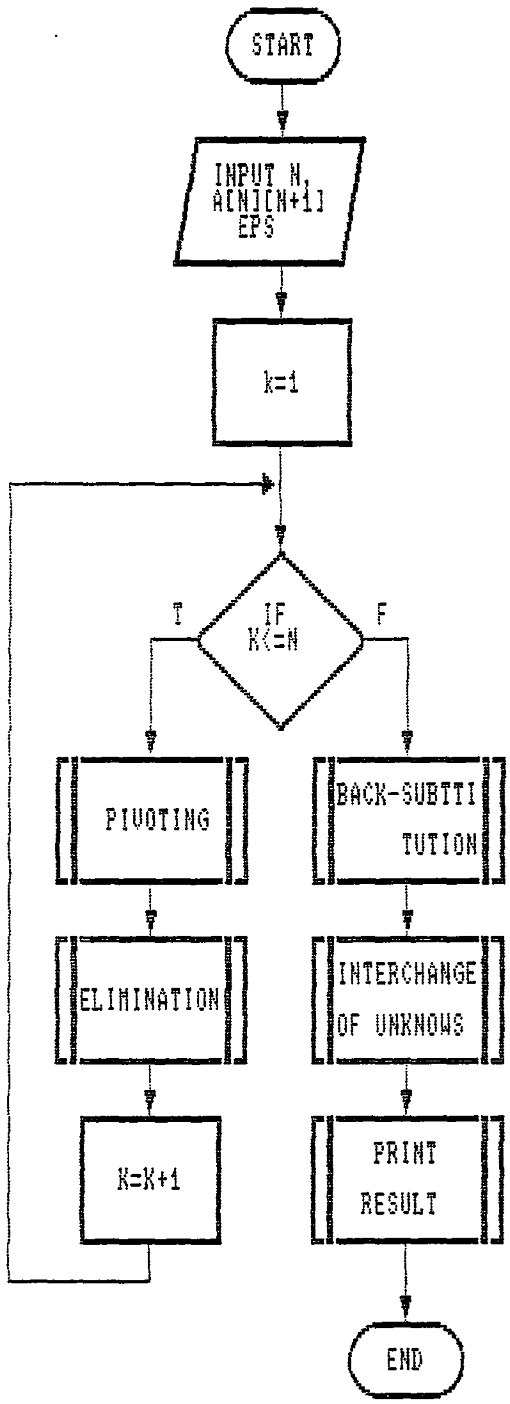
1. ต้องใช้กับจอสี
2. RAM ต้องมีขนาดไม่ต่ำกว่า 2 M

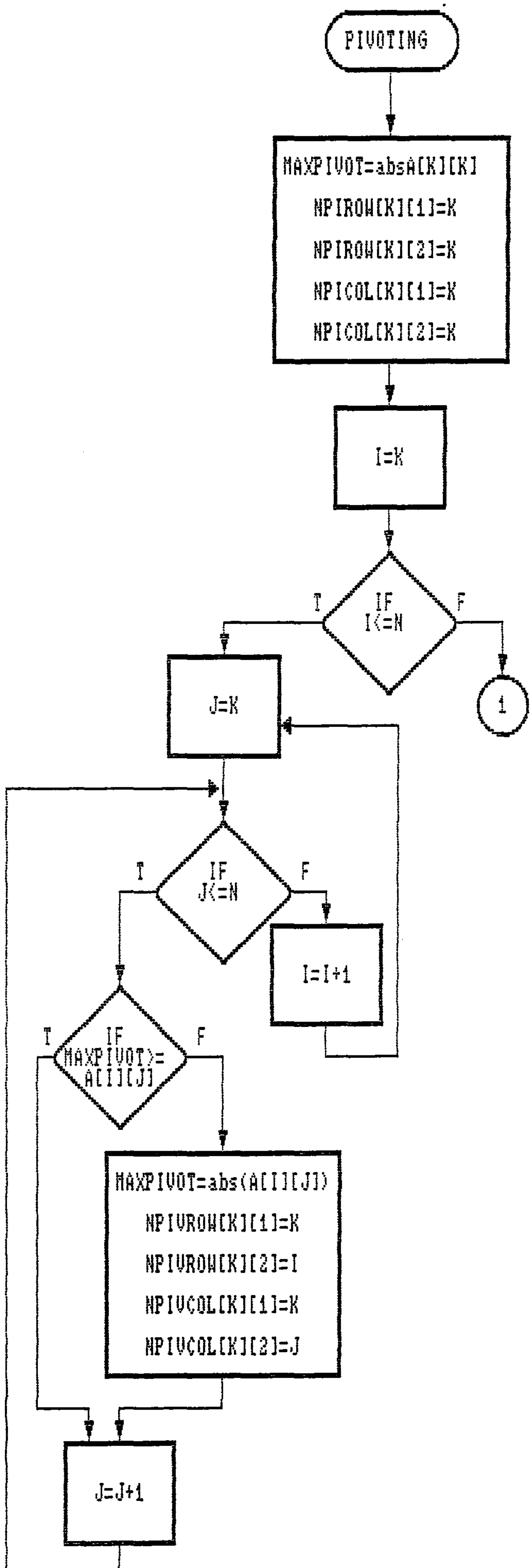
ภาคผนวก ก.

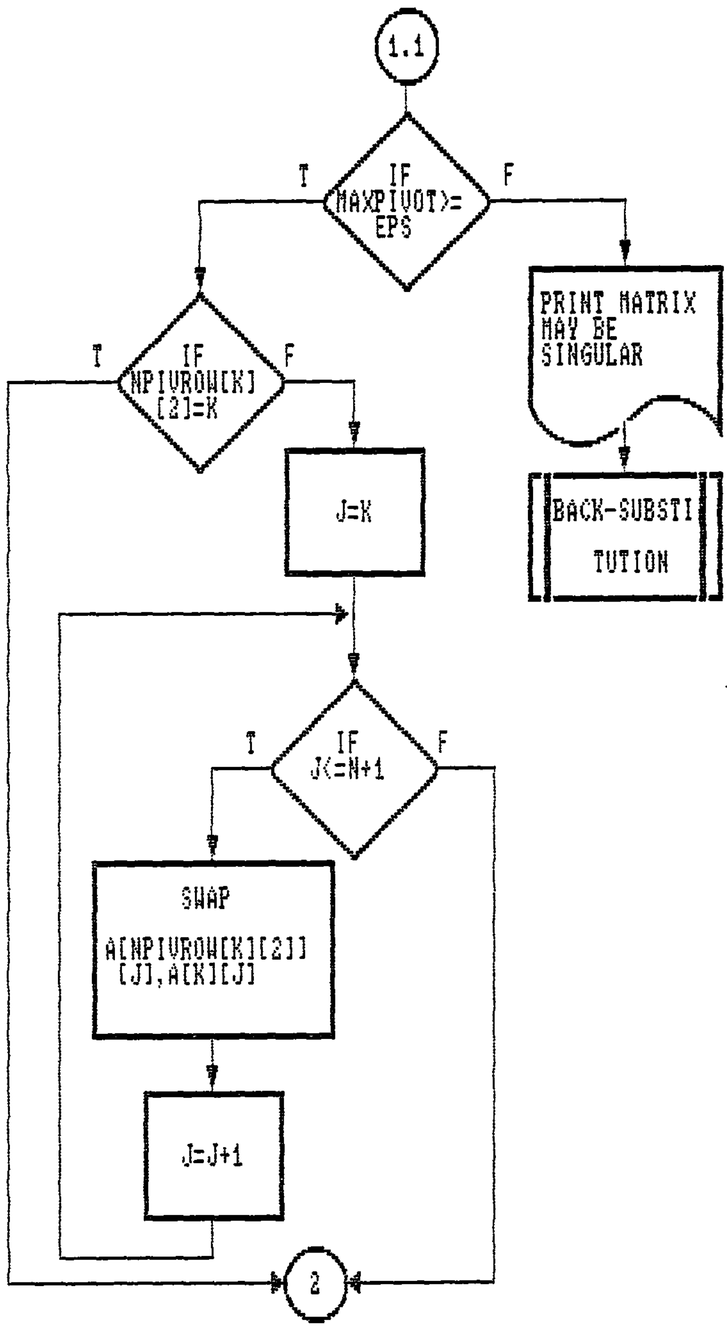
โครงสร้างของระบบ

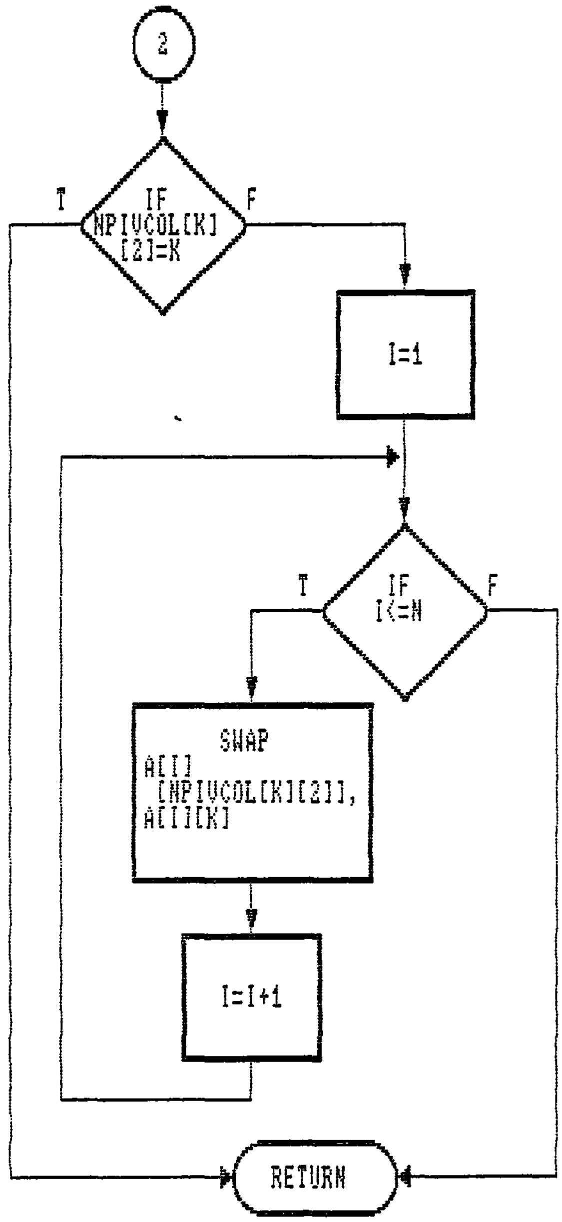


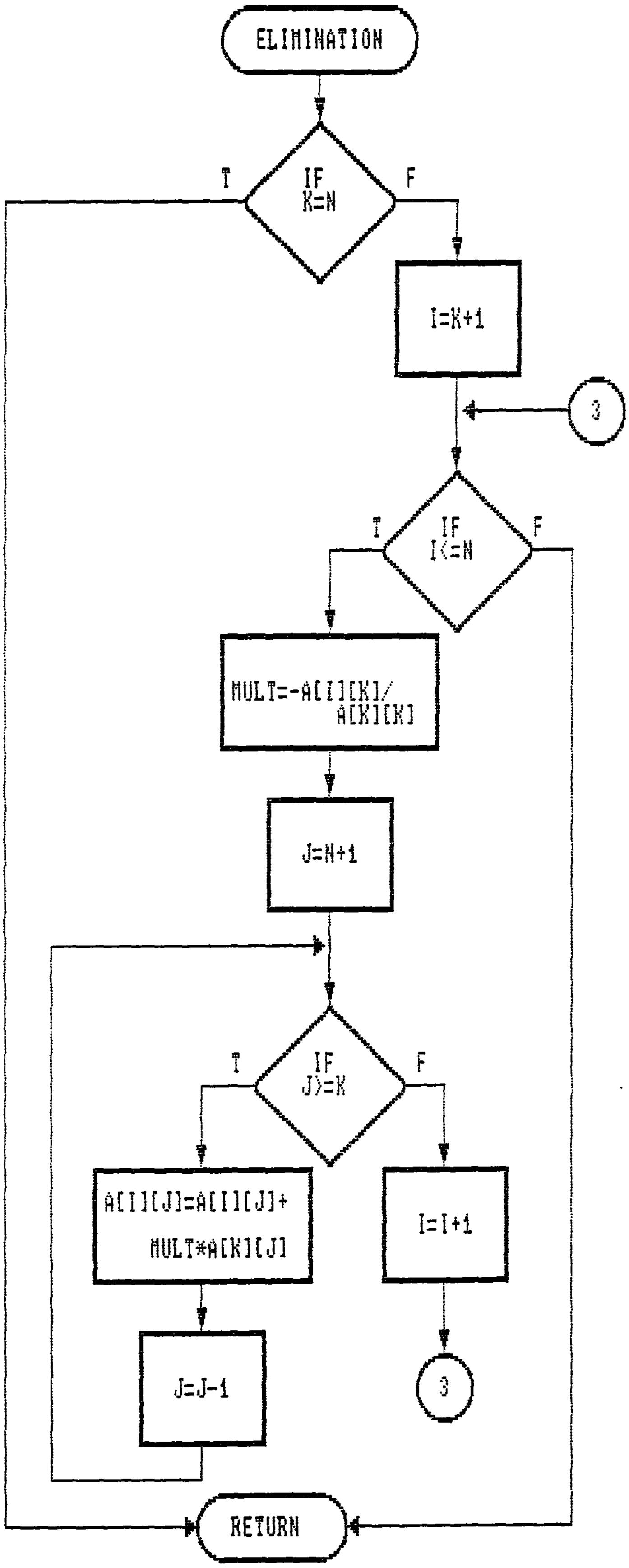
THE GAUSS ELIMINATION METHOD

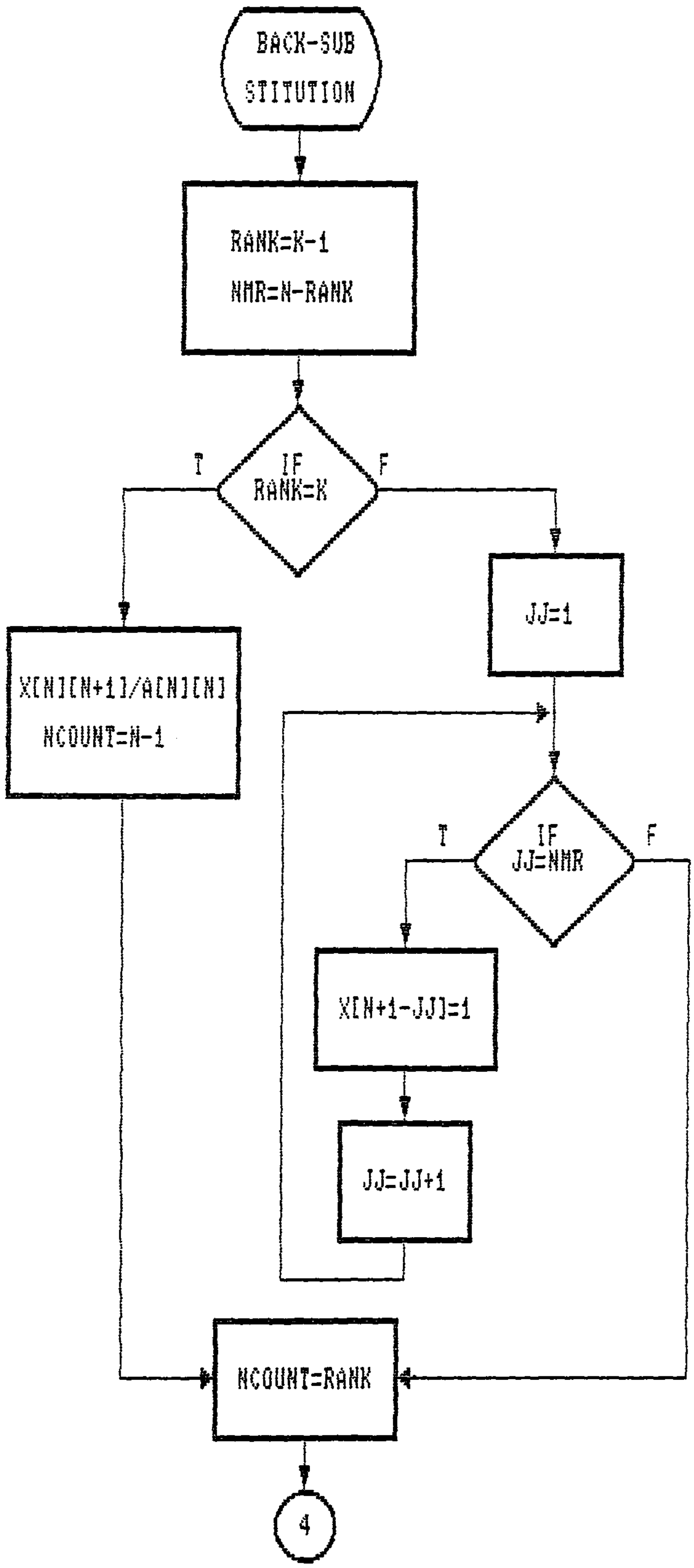


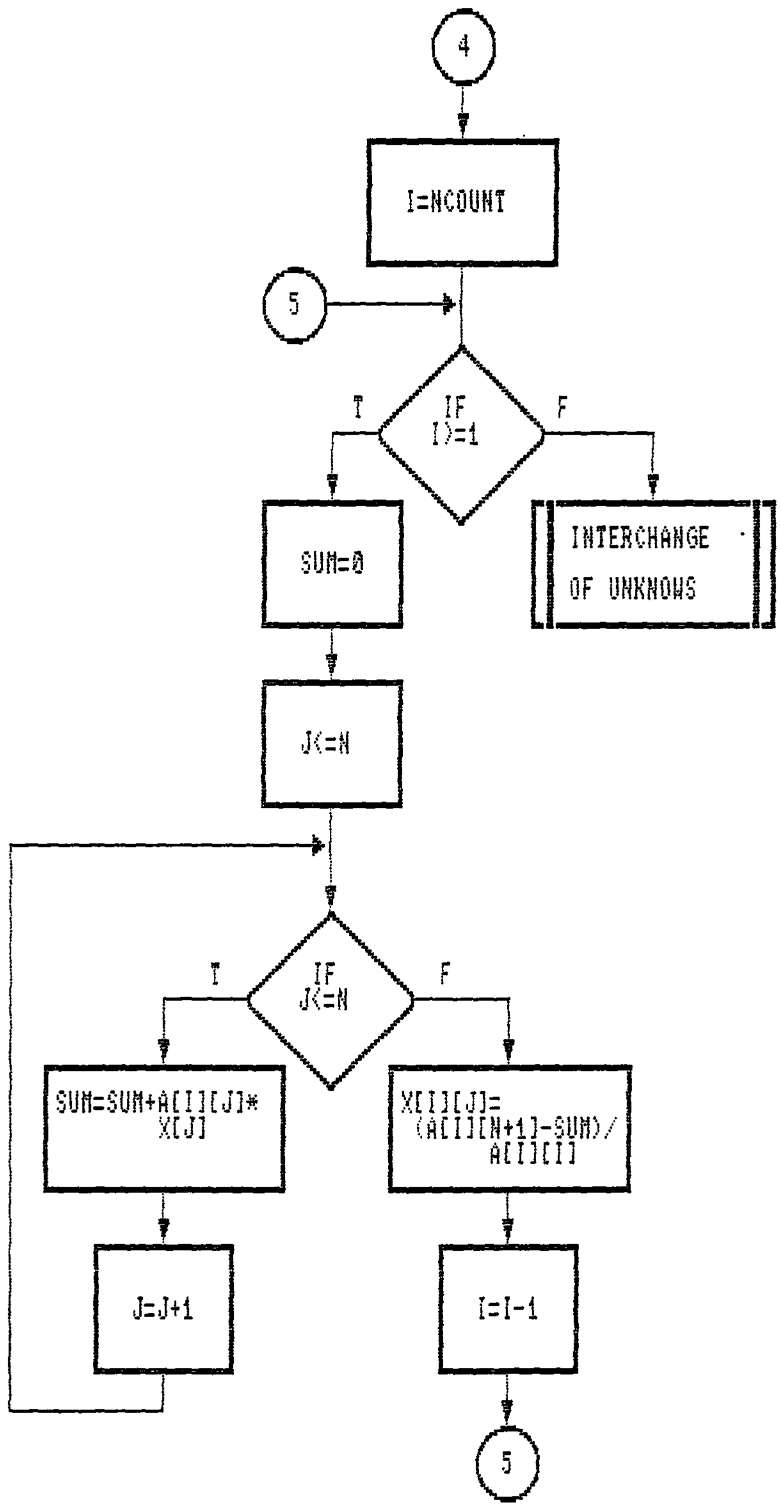

PIVOTING
MAXPIVOT=absA[K][K]
NPIROW[K][1]=K
NPIROW[K][2]=K
NPICOL[K][1]=K
NPICOL[K][2]=K
I=K
T
IF
I<=N
F
1
J=K
T
IF
J<=N
F
I=I+1
T
IF
MAXPIVOT>=
A[I][J]
F
MAXPIVOT=abs(A[I][J])
NPIVROW[K][1]=K
NPIVROW[K][2]=I
NPIVCOL[K][1]=K
NPIVCOL[K][2]=J
J=J+1

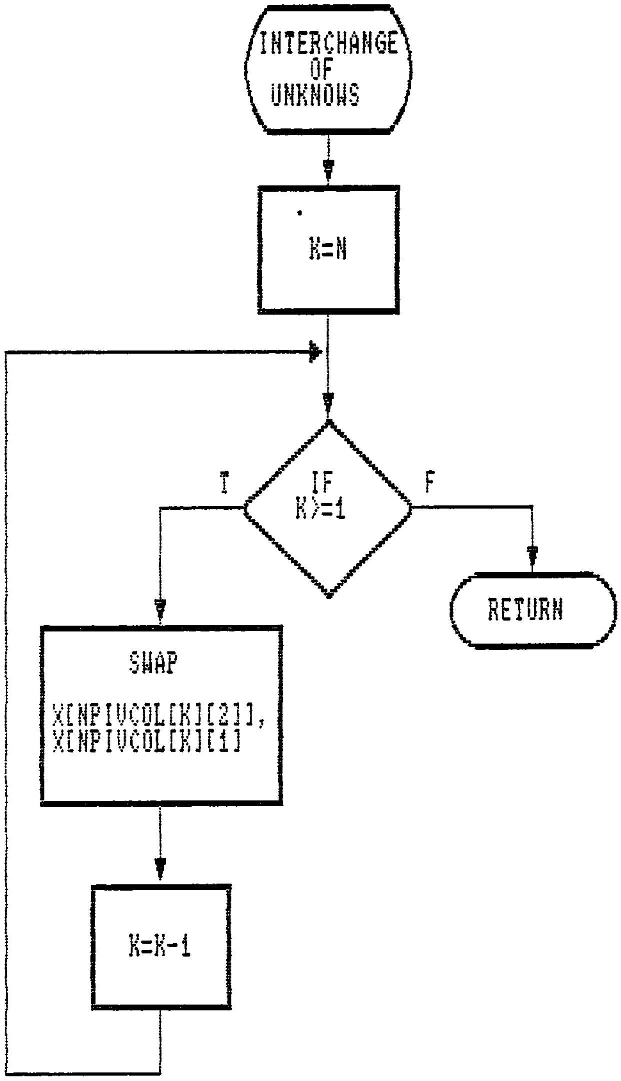

1.1
IF MAXPIVOT>= EPS
T
F
PRINT MATRIX MAY BE SINGULAR
BACK-SUBSTI TUTION
IF NPIVROW[K][2]=K
T
F
J=K
IF J<=N+1
T
F
SWAP A[NPIVROW[K][2]][J],A[K][J]
J=J+1
2

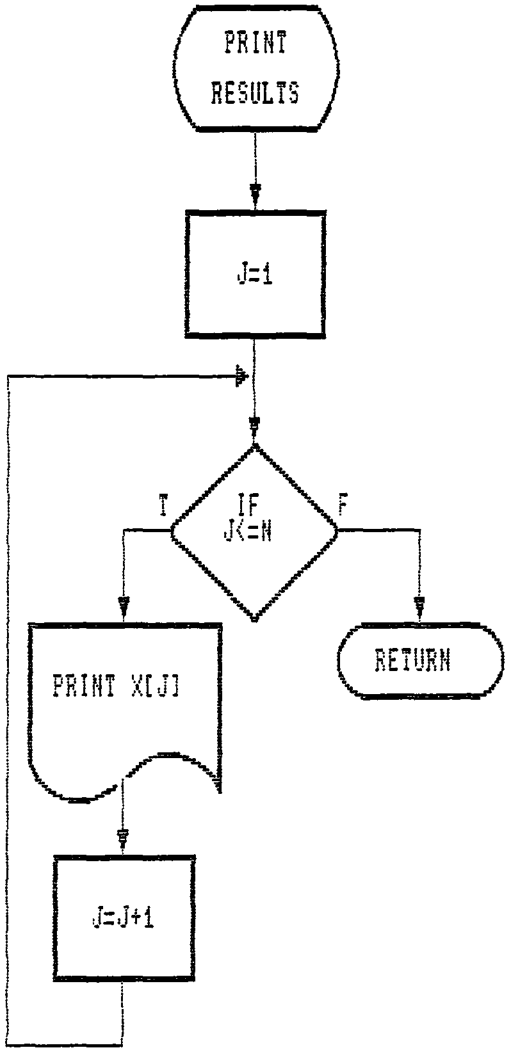

2
IF
NPIVCOL[K]
[2]=K
T
F
I=1
IF
I<=N
T
F
SWAP
A[I]
[NPIVCOL[K][2]],
A[I][K]
I=I+1
RETURN


ELIMINATION
IF K=N
T
F
I=K+1
3
IF I<=N
T
F
MULT=-A[I][K]/ A[K][K]
J=N+1
IF J>=K
T
F
A[I][J]=A[I][J]+ MULT*A[K][J]
I=I+1
J=J-1
3
RETURN

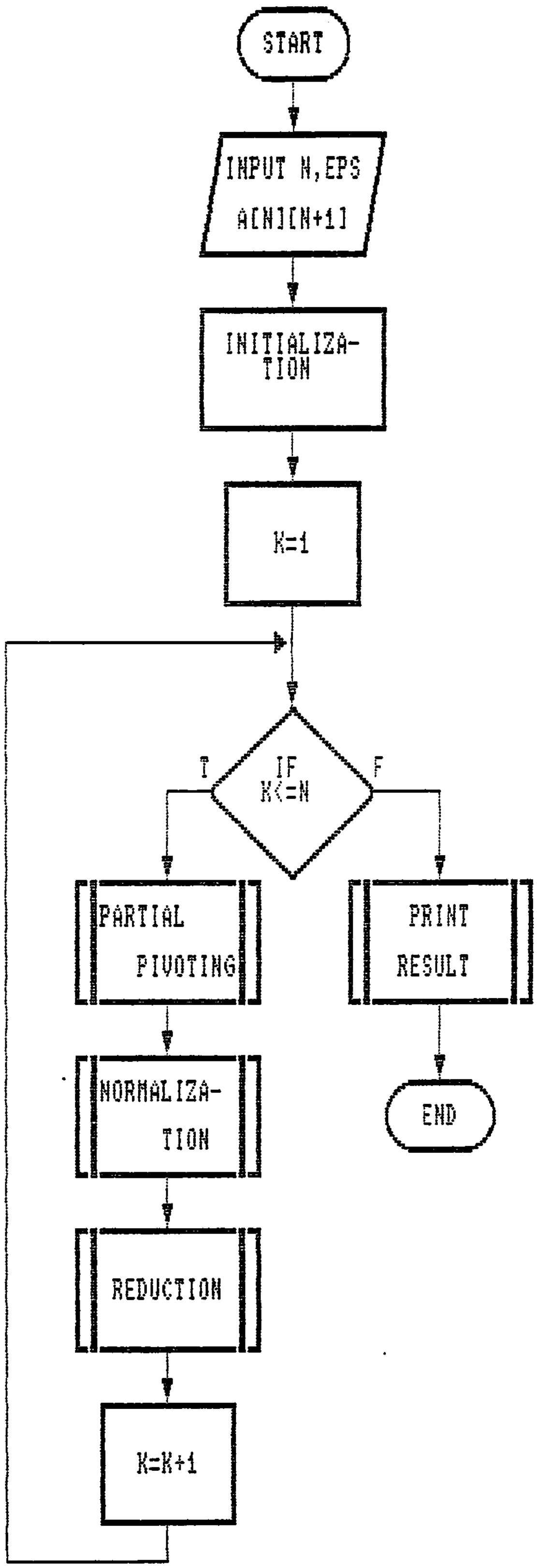

BACK-SUB STITUTION
RANK=K-1
NMR=N-RANK
IF RANK=K
T
F
X[N][N+1]/A[N][N]
NCOUNT=N-1
JJ=1
IF JJ=NMR
T
F
X[N+1-JJ]=1
JJ=JJ+1
NCOUNT=RANK
4

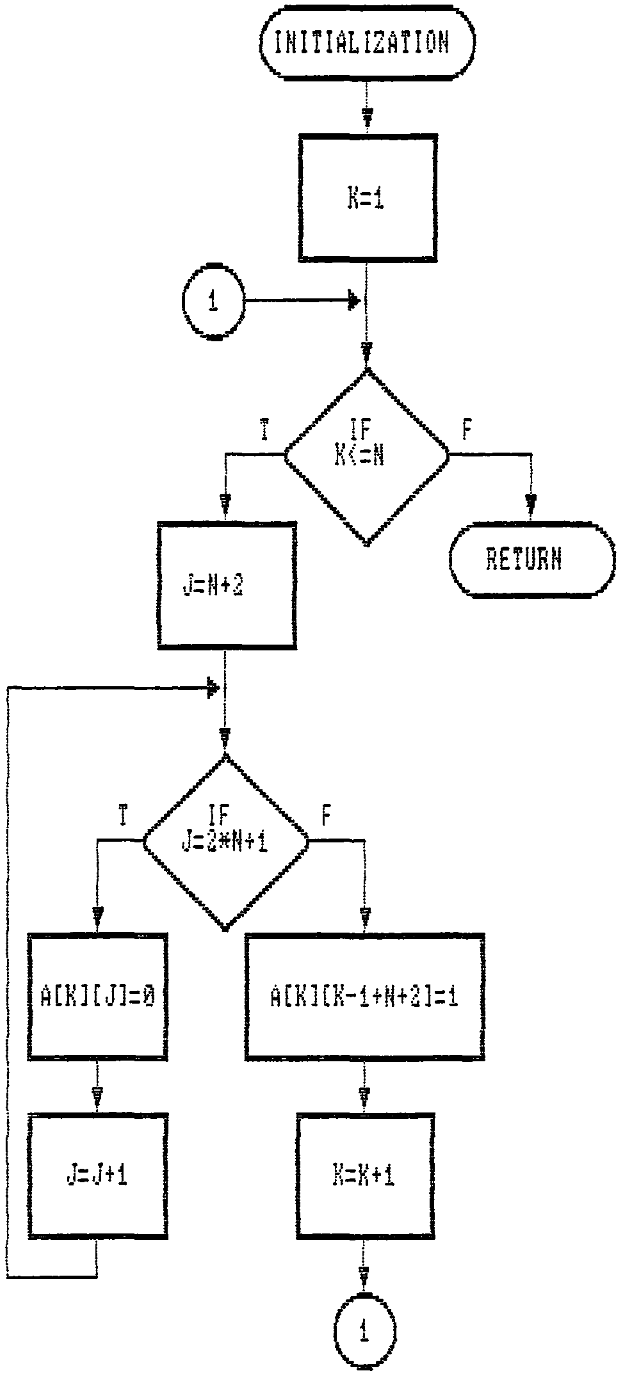

4
I=NCOUNT
5
IF I>=1
T
F
SUM=0
INTERCHANGE OF UNKNOWS
J<=N
IF J<=N
T
F
SUM=SUM+A[I][J]* X[J]
X[I][J]= (A[I][N+1]-SUM)/ A[I][I]
J=J+1
I=I-1
5

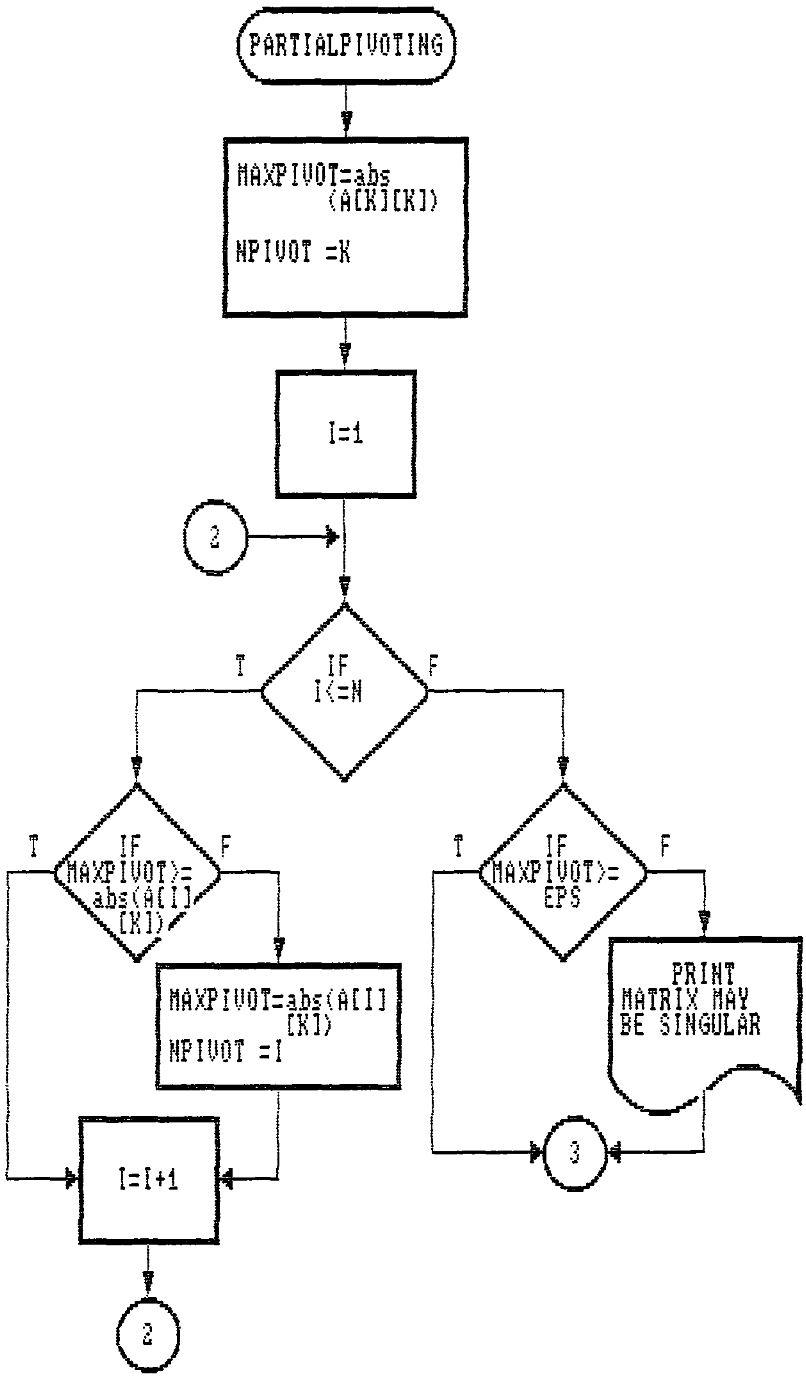

INTERCHANGE
OF
UNKNOWS
K=N
IF
K>=1
T
F
RETURN
SWAP
X[NPIVCOL[K][2]],
X[NPIVCOL[K][1]
K=K-1

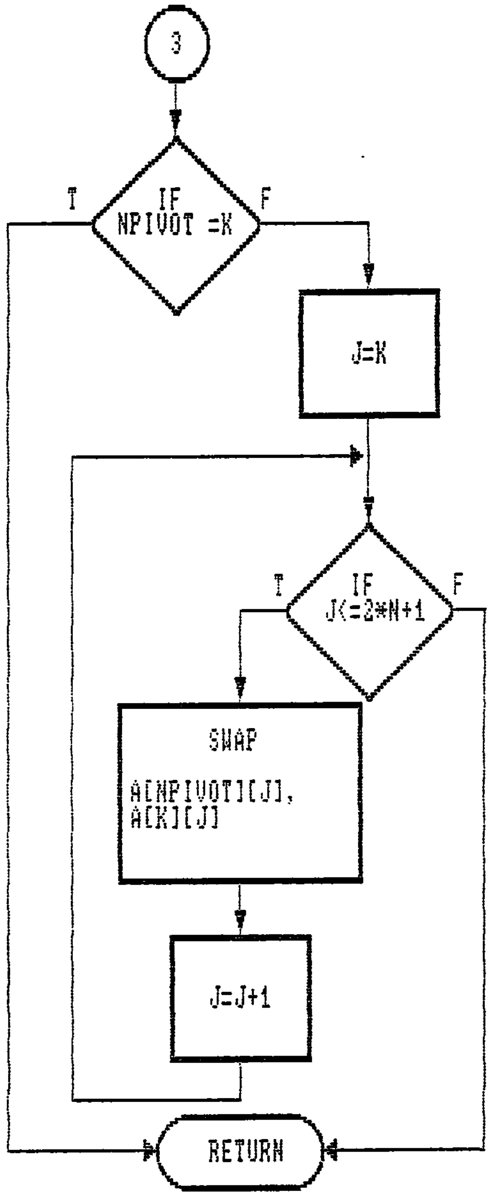

PRINT
RESULTS
J=1
IF
J<=N
T
F
PRINT X[J]
RETURN
J=J+1

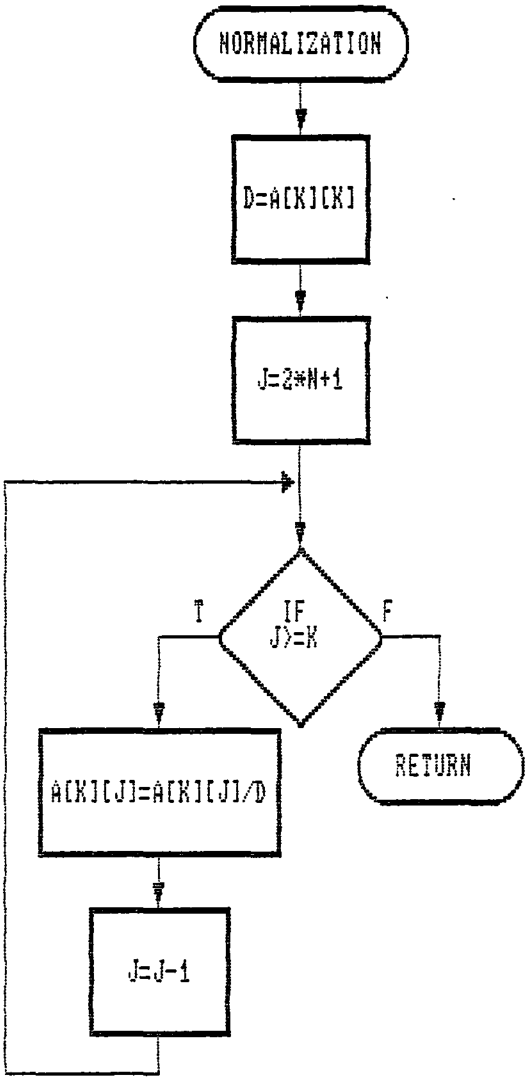
THE GAUSS-JORDAN METHOD

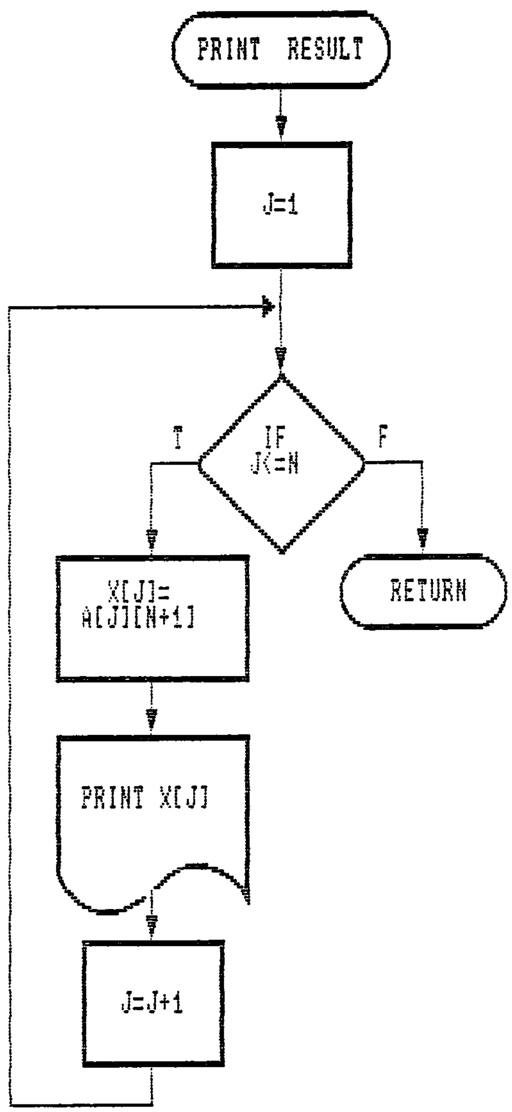



INITIALIZATION
K=1
1
IF
K<=N
T
F
J=N+2
RETURN
IF
J=2*N+1
T
F
A[K][J]=0
A[K][K-1+N+2]=1
J=J+1
K=K+1
1

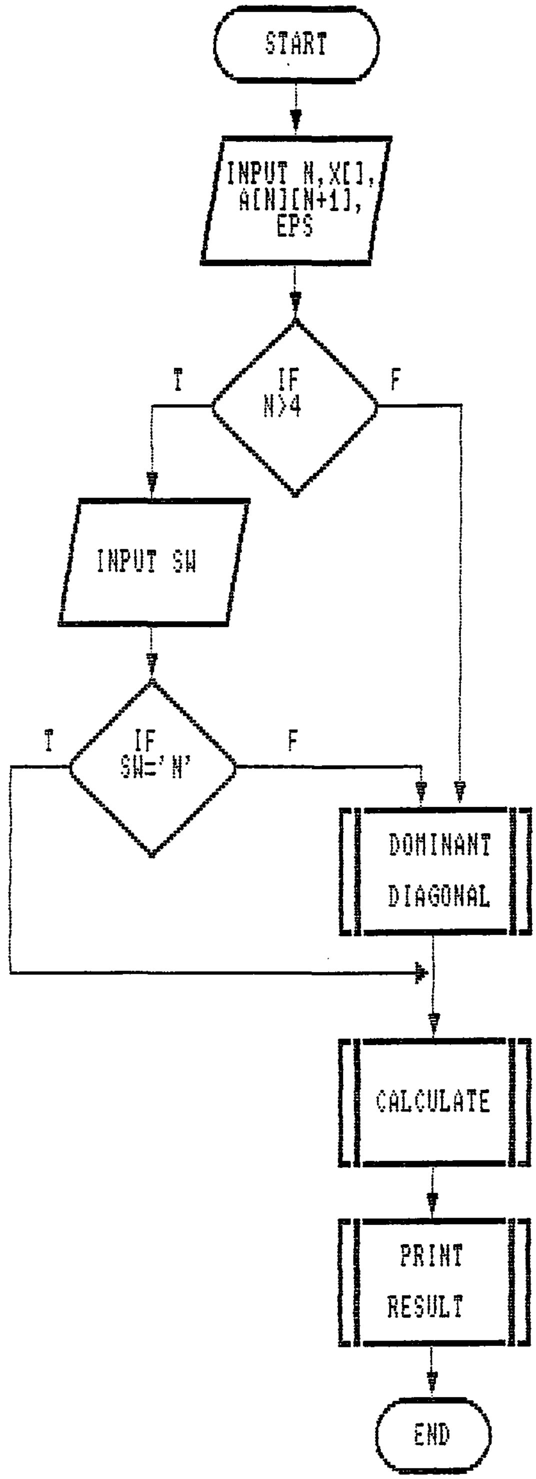

PARTIALPIVOTING
MAXPIVOT=abs (A[K][K])
NPIVOT =K
I=1
2
IF I<=N
T
F
IF MAXPIVOT>= abs(A[I][K])
T
F
MAXPIVOT=abs(A[I][K])
NPIVOT =I
I=I+1
2
IF MAXPIVOT>= EPS
T
F
PRINT MATRIX MAY BE SINGULAR
3

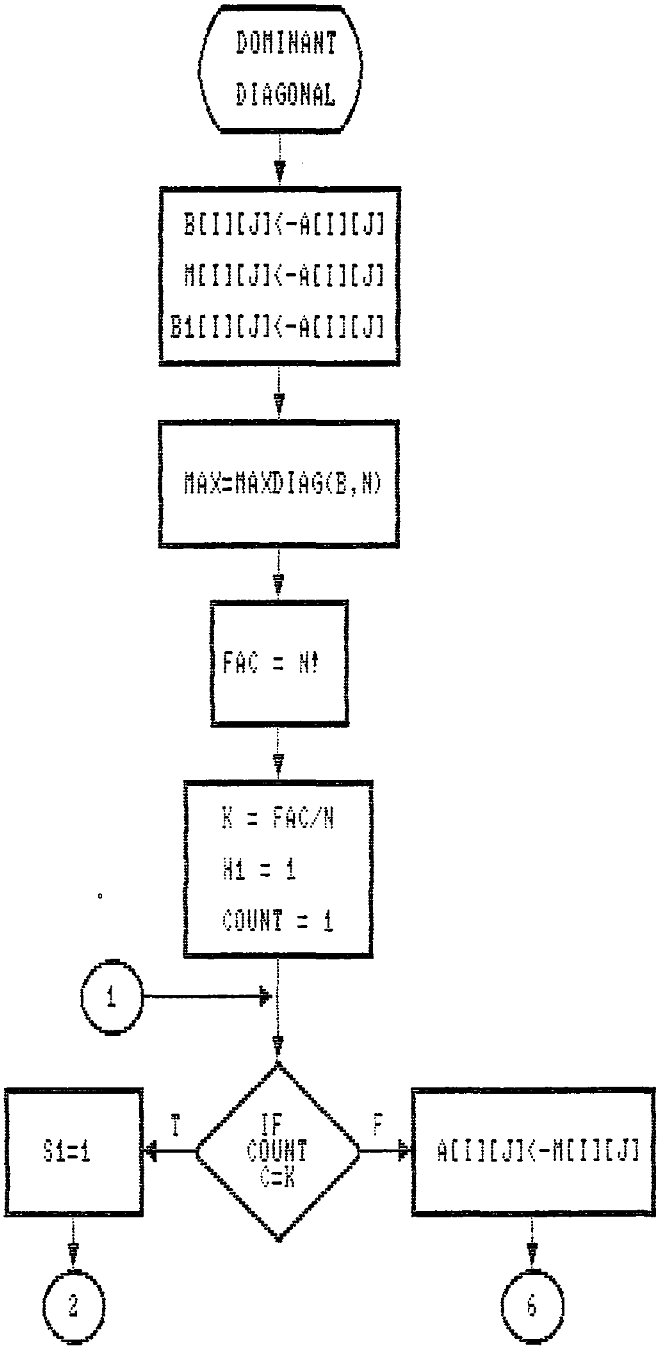

3
IF NPIVOT =K
T
F
J=K
IF J<=2*N+1
T
F
SWAP
A[NPIVOT][J],
A[K][J]
J=J+1
RETURN

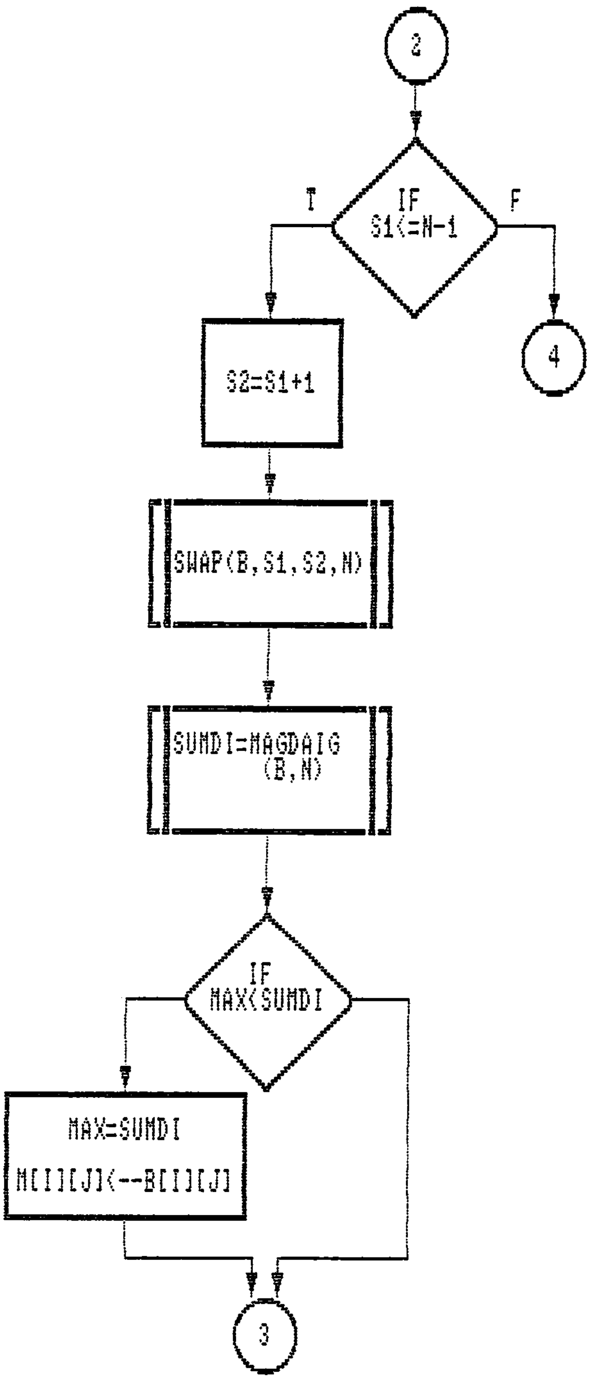

NORMALIZATION
D=A[K][K]
J=2*N+1
IF
J>=K
T
F
A[K][J]=A[K][J]/D
RETURN
J=J-1

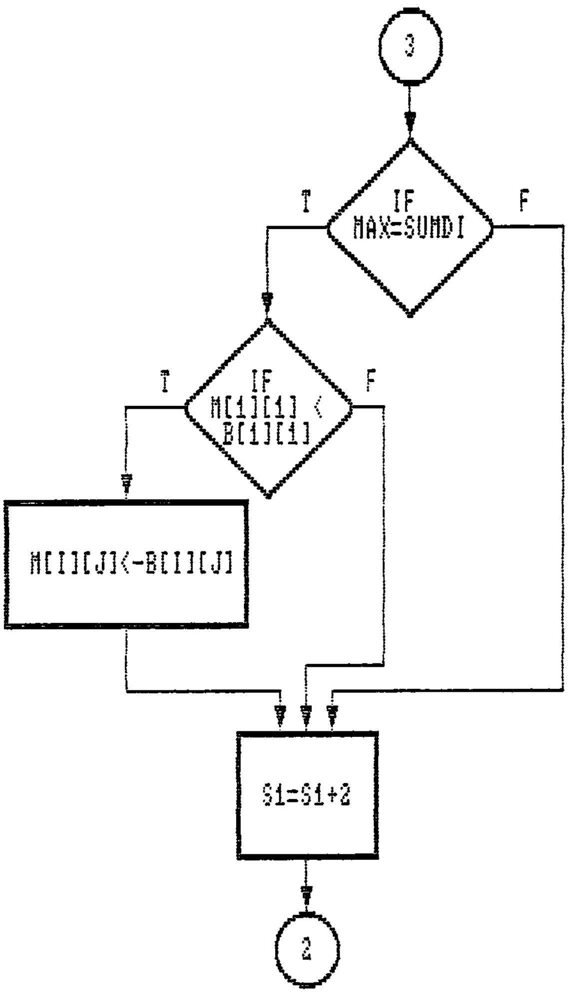

PRINT RESULT
J=1
IF
J<=N
T
F
X[J]=
A[J][N+1]
RETURN
PRINT X[J]
J=J+1

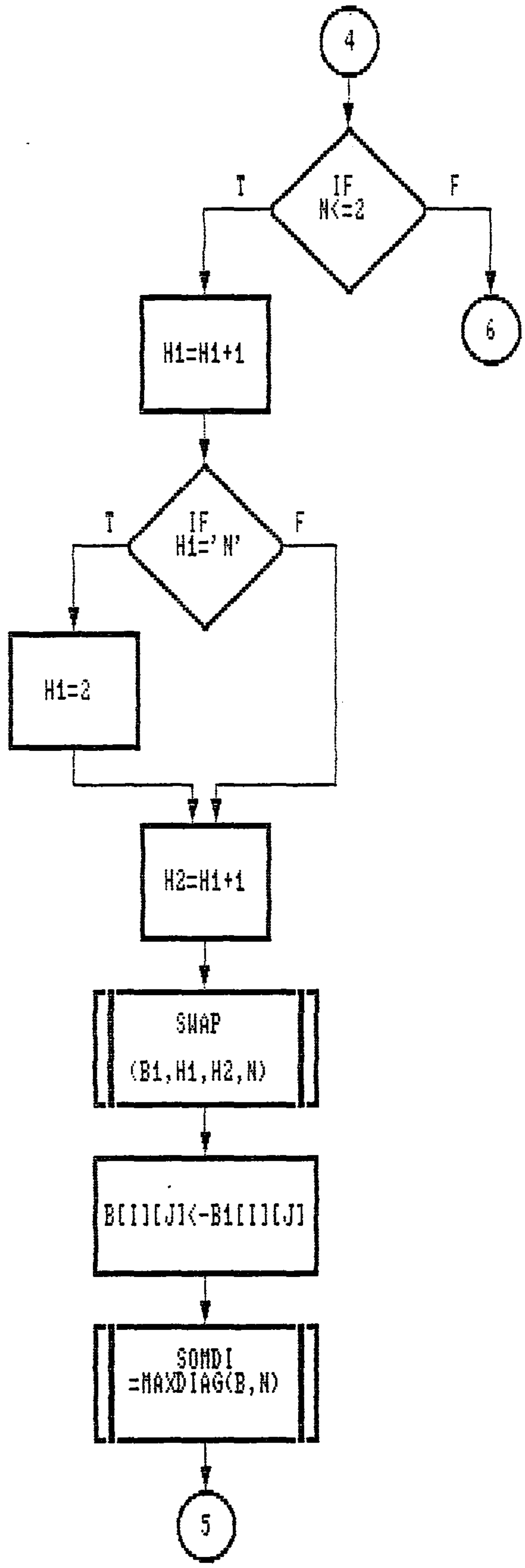
THE GAUSS-SEIDEL METHOD

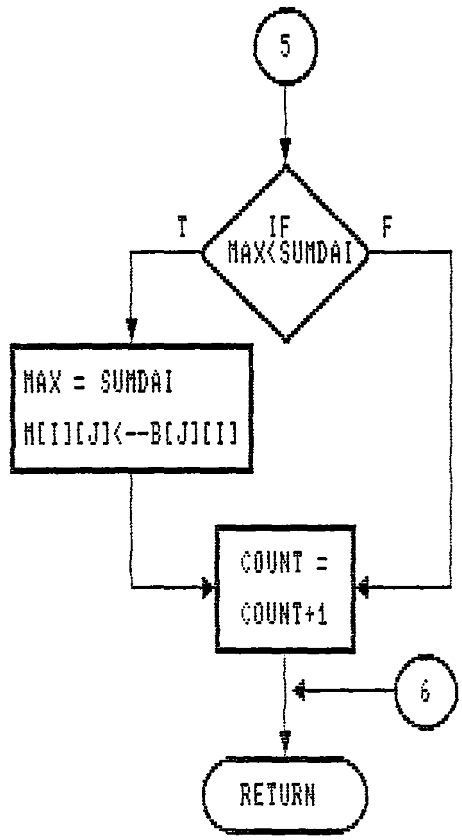


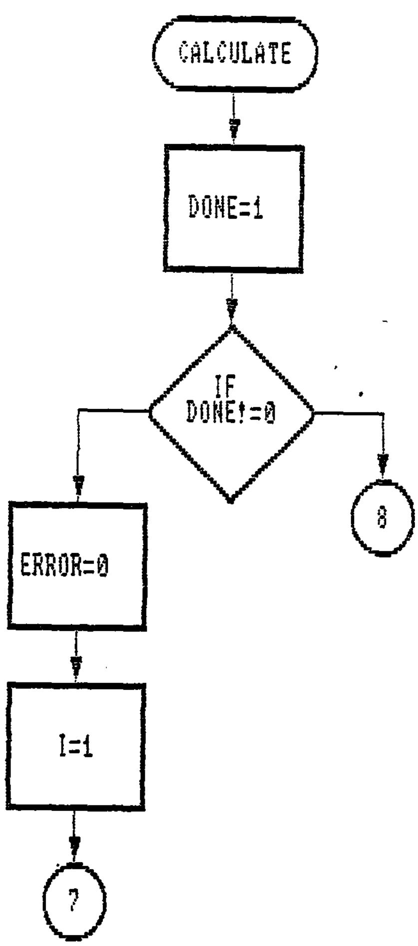

DOMINANT
DIAGONAL
B[I][J]<-A[I][J]
M[I][J]<-A[I][J]
B1[I][J]<-A[I][J]
MAX=MAXDIAG(B,N)
FAC = N!
K = FAC/N
N1 = 1
COUNT = 1
1
IF
COUNT
<=K
T
F
S1=1
A[I][J]<-M[I][J]
2
6

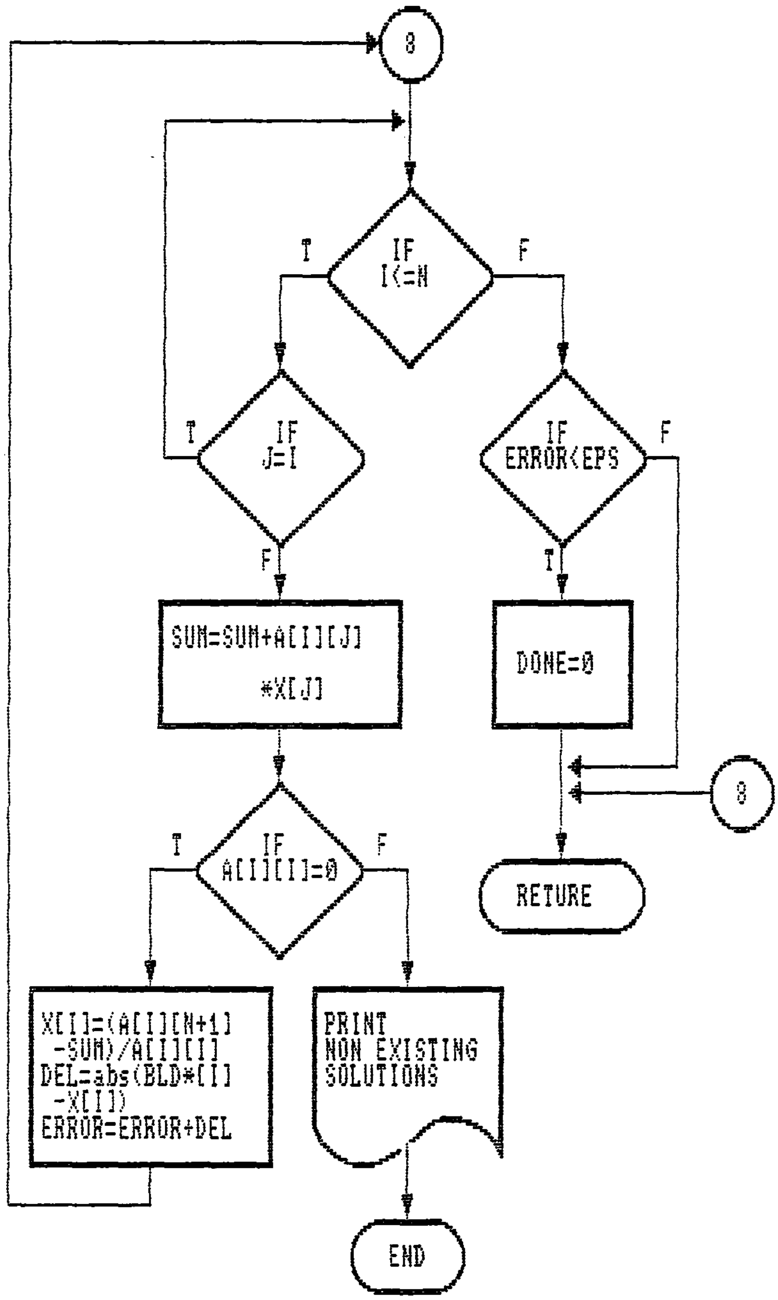

2
IF
S1<=N-1
T
F
4
S2=S1+1
SWAP(B,S1,S2,N)
SUMDI=MAGDAIG
(B,N)
IF
MAX<SUMDI
MAX=SUMDI
M[I][J]<--B[I][J]
3

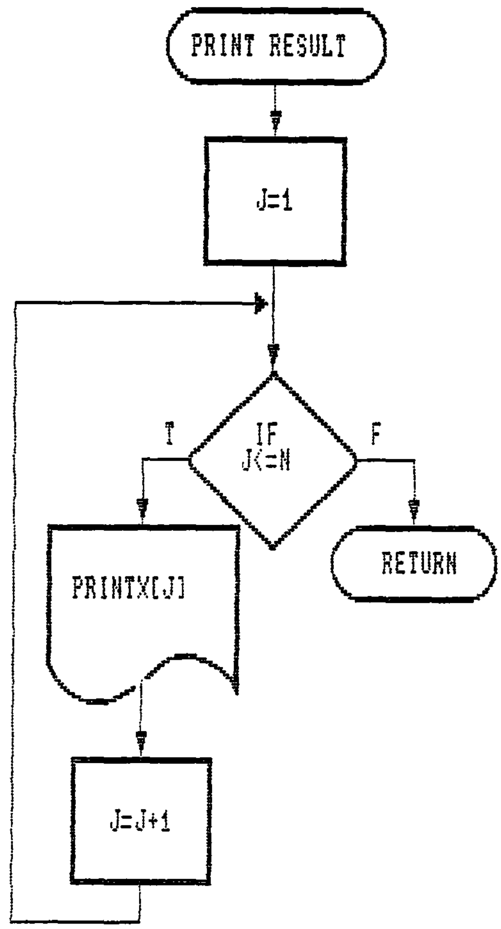

3
IF
MAX=SUMDI
T
F
IF
M[1][1] <
B[1][1]
T
F
M[I][J]<-B[I][J]
S1=S1+2
2

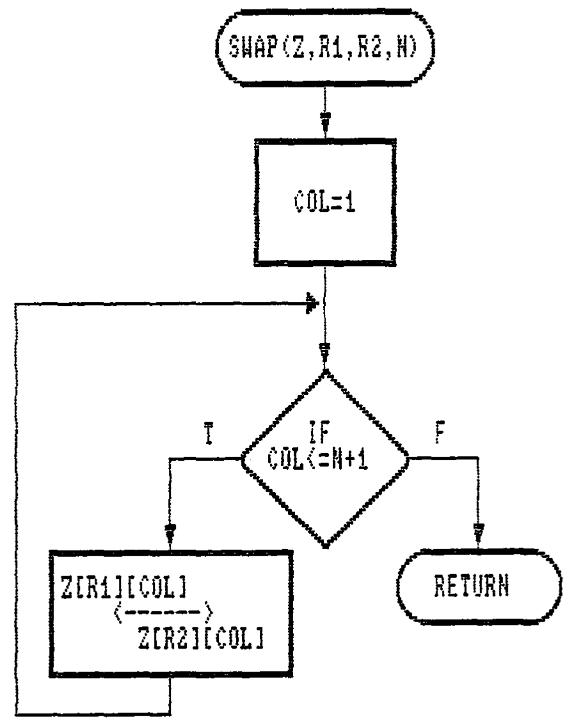

4
IF
N<=2
T
F
6
H1=H1+1
IF
H1='N'
T
F
H1=2
H2=H1+1
SWAP
(B1,H1,H2,N)
B[I][J]<-B1[I][J]
SOMDI
=MAXDIAG(B,N)
5

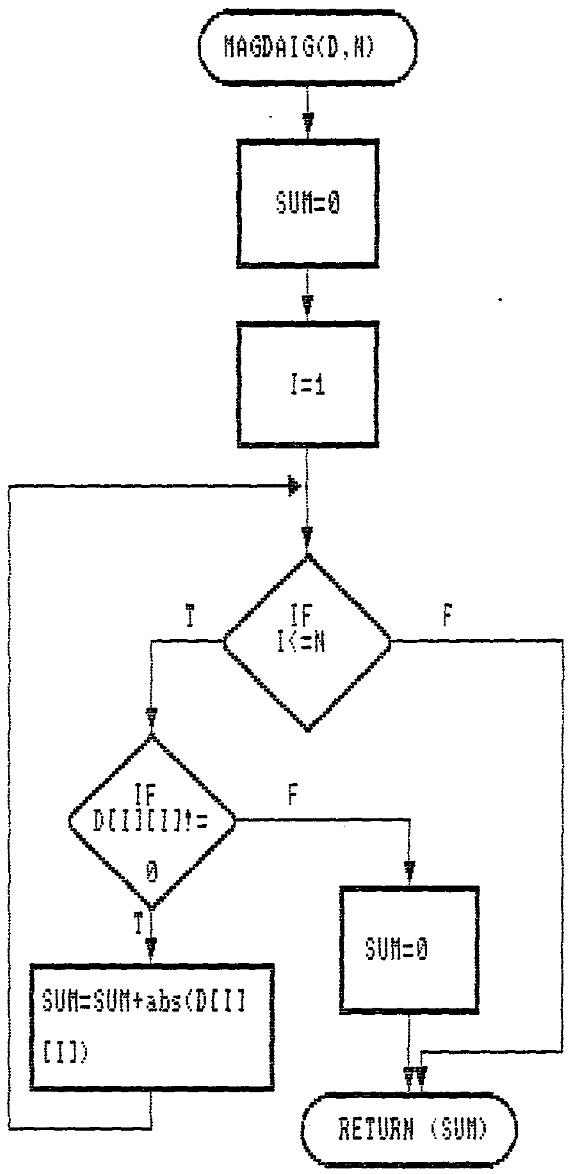

5
IF
MAX<SUMDAI
T
F
MAX = SUMDAI
M[I][J]<--B[J][I]
COUNT =
COUNT+1
6
RETURN


CALCULATE
DONE=1
IF
DONE!=0
8
ERROR=0
I=1
7

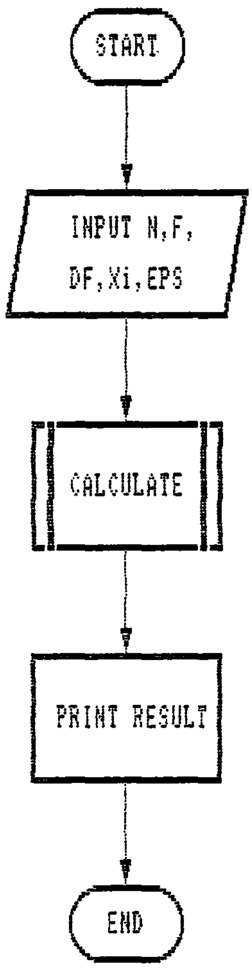

8
IF
I<=N
T
F
IF
J=I
T
F
IF
ERROR<EPS
F
T
SUM=SUM+A[I][J]
*X[J]
DONE=0
8
IF
A[I][I]=0
T
F
RETURE
X[I]=(A[I][N+1]
-SUM)/A[I][I]
DEL=abs(BLD*[I]
-X[I])
ERROR=ERROR+DEL
PRINT
NON EXISTING
SOLUTIONS
END

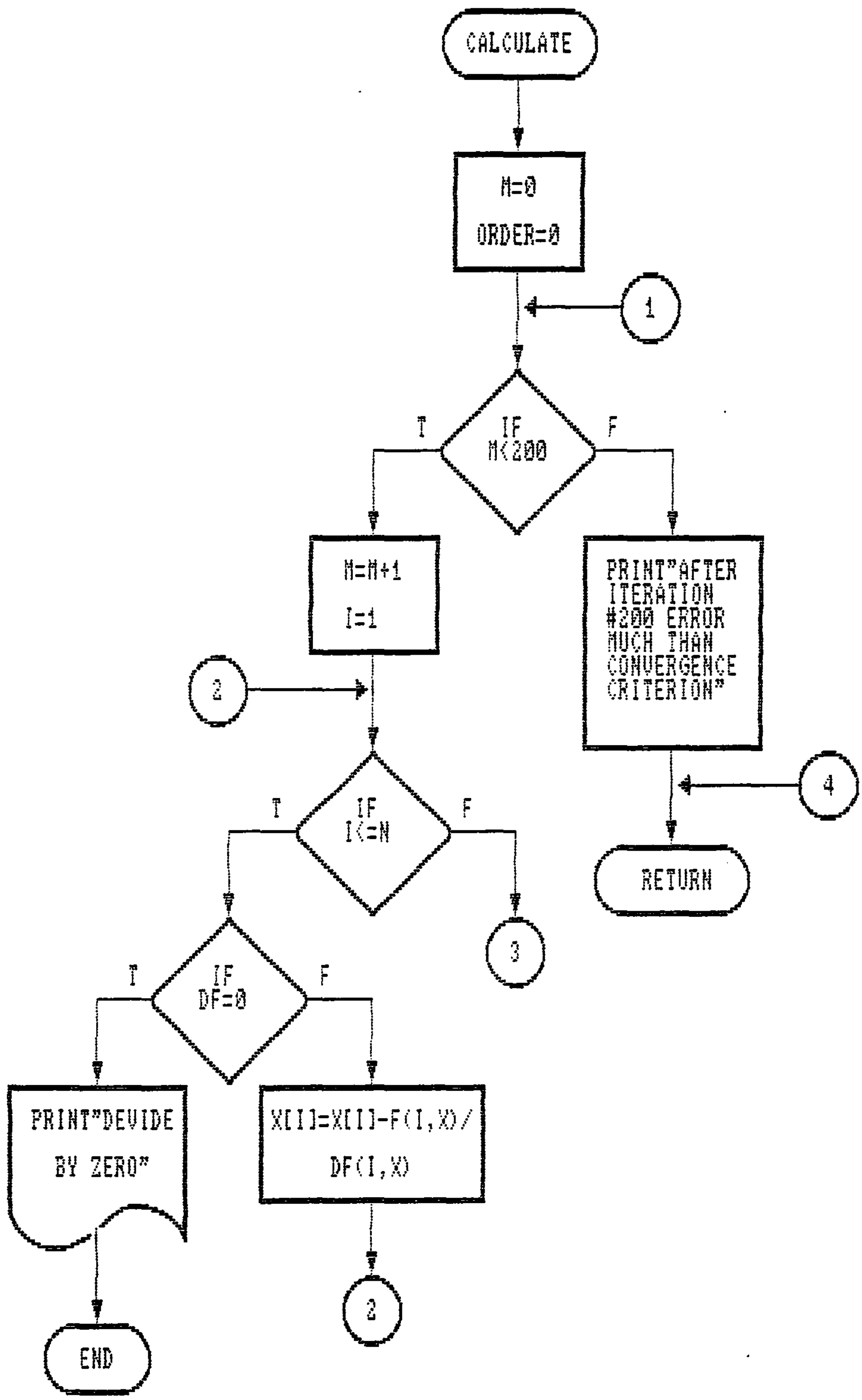

PRINT RESULT
J=1
T
IF J<=N
F
PRINTX[J]
RETURN
J=J+1


SWAP(Z,R1,R2,N)
COL=1
T
IF COL<=N+1
F
Z[R1][COL] <------> Z[R2][COL]
RETURN

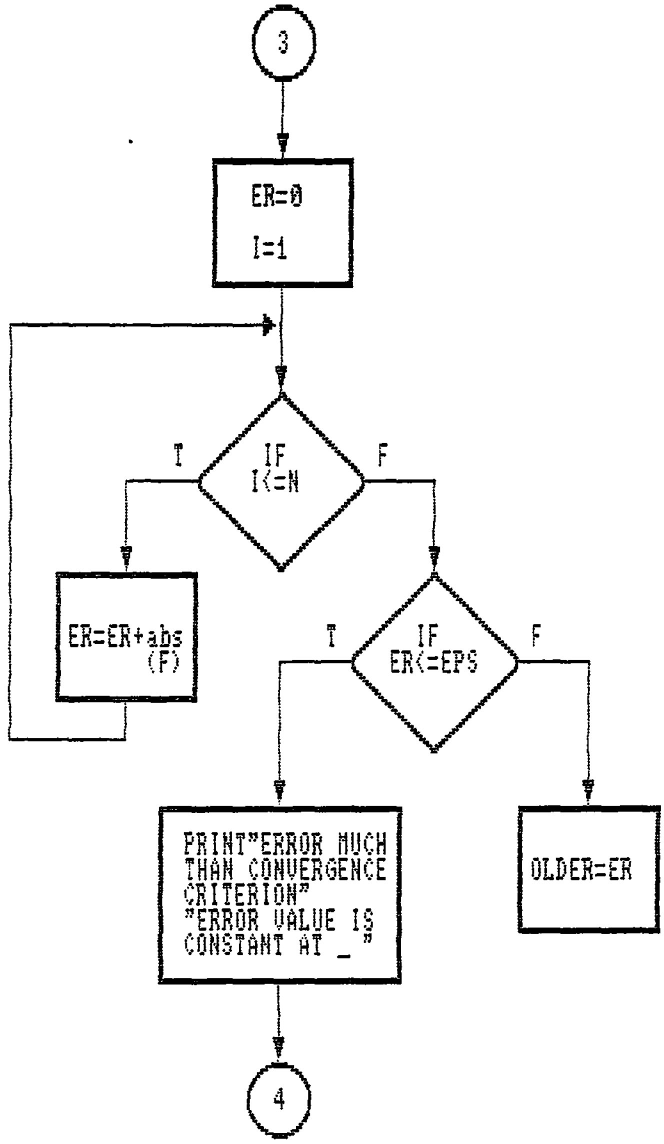

MAGDAIG(D,N)
SUM=0
I=1
T
IF
I<=N
F
IF
D[I][I]!=
0
F
T
SUM=SUM+abs(D[I]
[I])
SUM=0
RETURN (SUM)

THE MODIFIED NEWTON METHOD

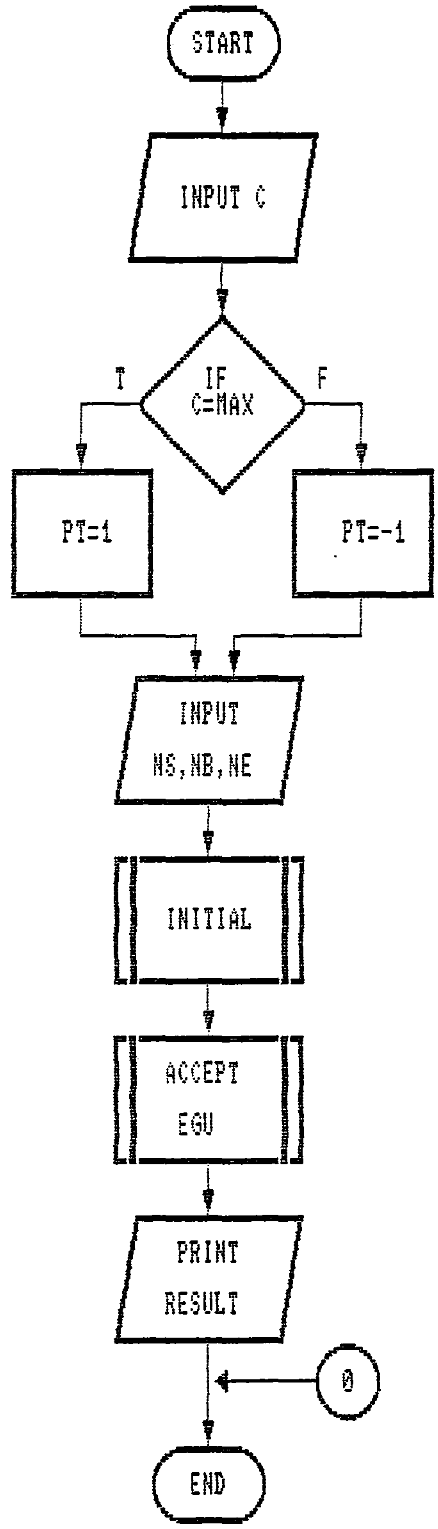


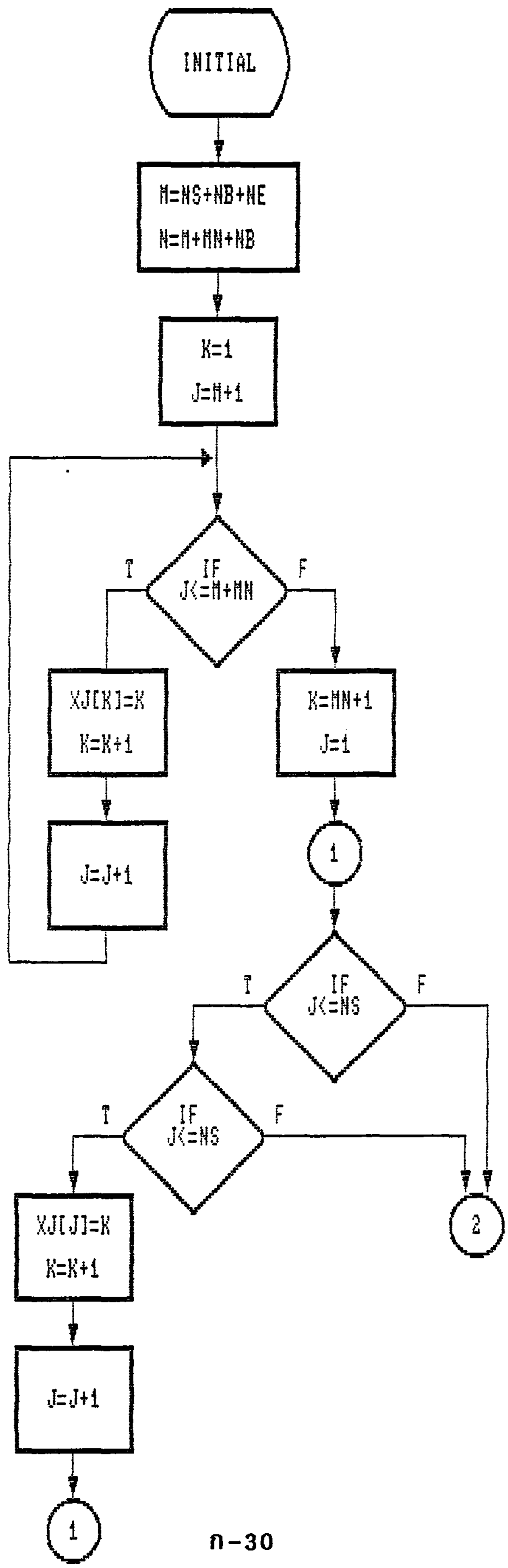


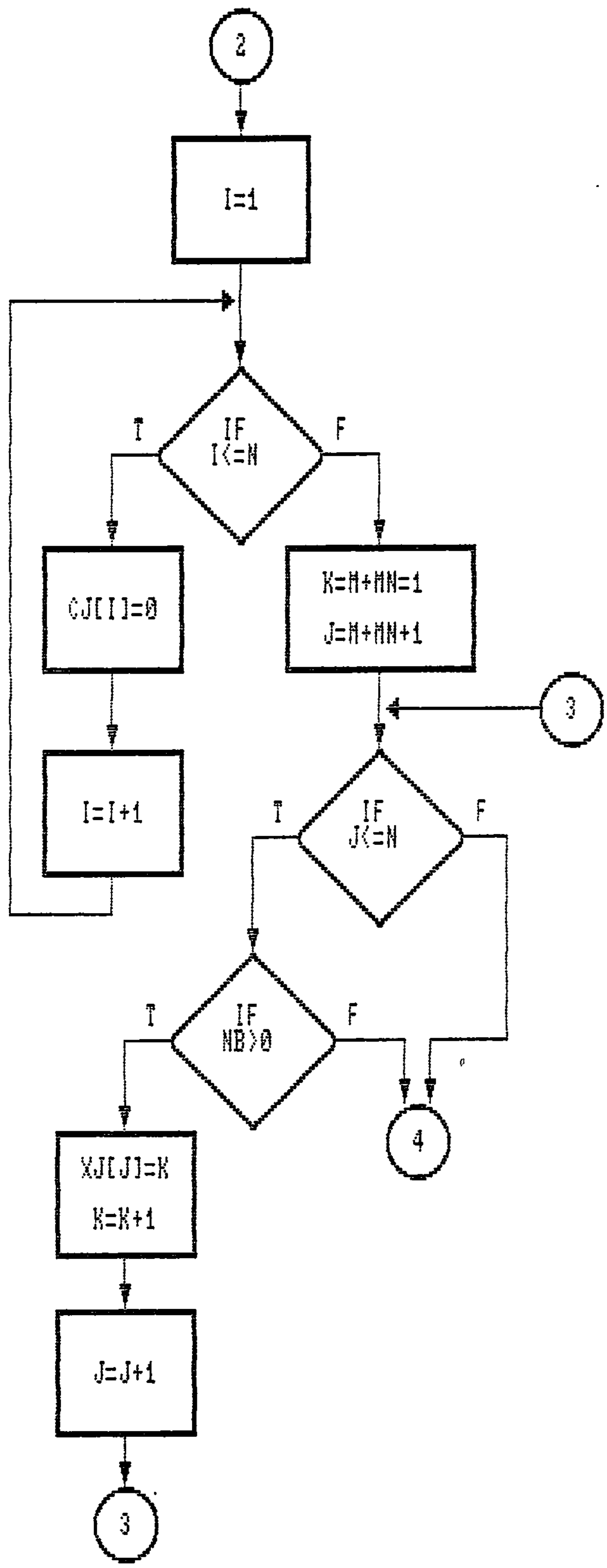
CALCULATE
M=0
ORDER=0
1
IF M<200
T
F
M=M+1
I=1
PRINT"AFTER ITERATION #200 ERROR MUCH THAN CONVERGENCE CRITERION"
2
4
IF I<=N
T
F
RETURN
3
IF DF=0
T
F
PRINT"DEVIDE BY ZERO"
X[I]=X[I]-F(I,X)/ DF(I,X)
2
END

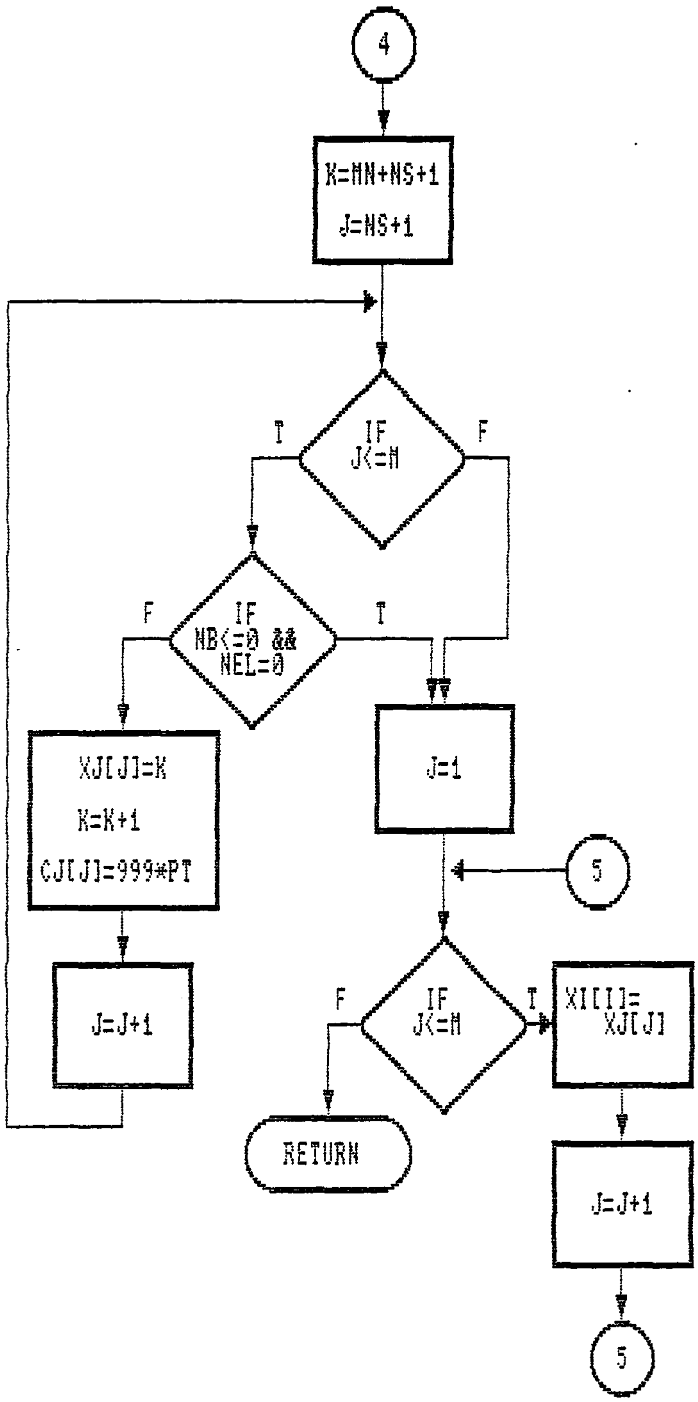

3
ER=0
I=1
IF
I<=N
T
F
ER=ER+abs
(F)
IF
ER<=EPS
T
F
PRINT"ERROR MUCH
THAN CONVERGENCE
CRITERION"
"ERROR VALUE IS
CONSTANT AT _ "
OLDER=ER
4

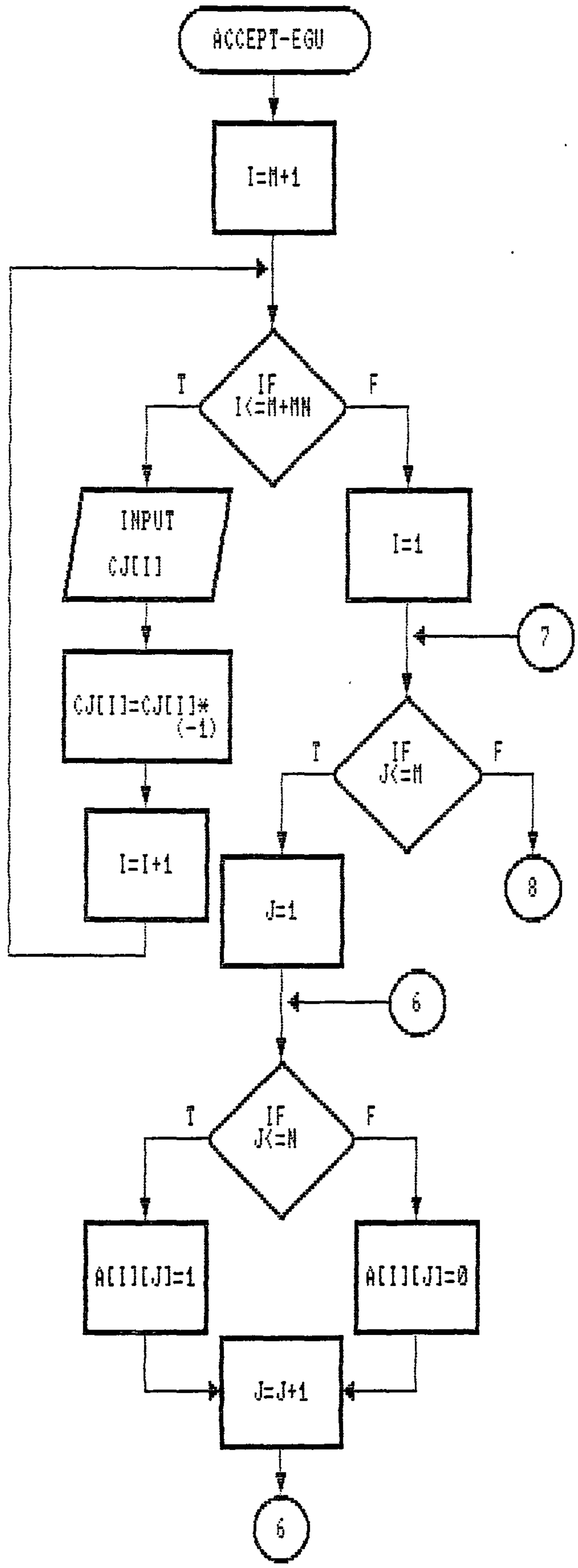
THE SIMPLEX AND BIG-M METHOD

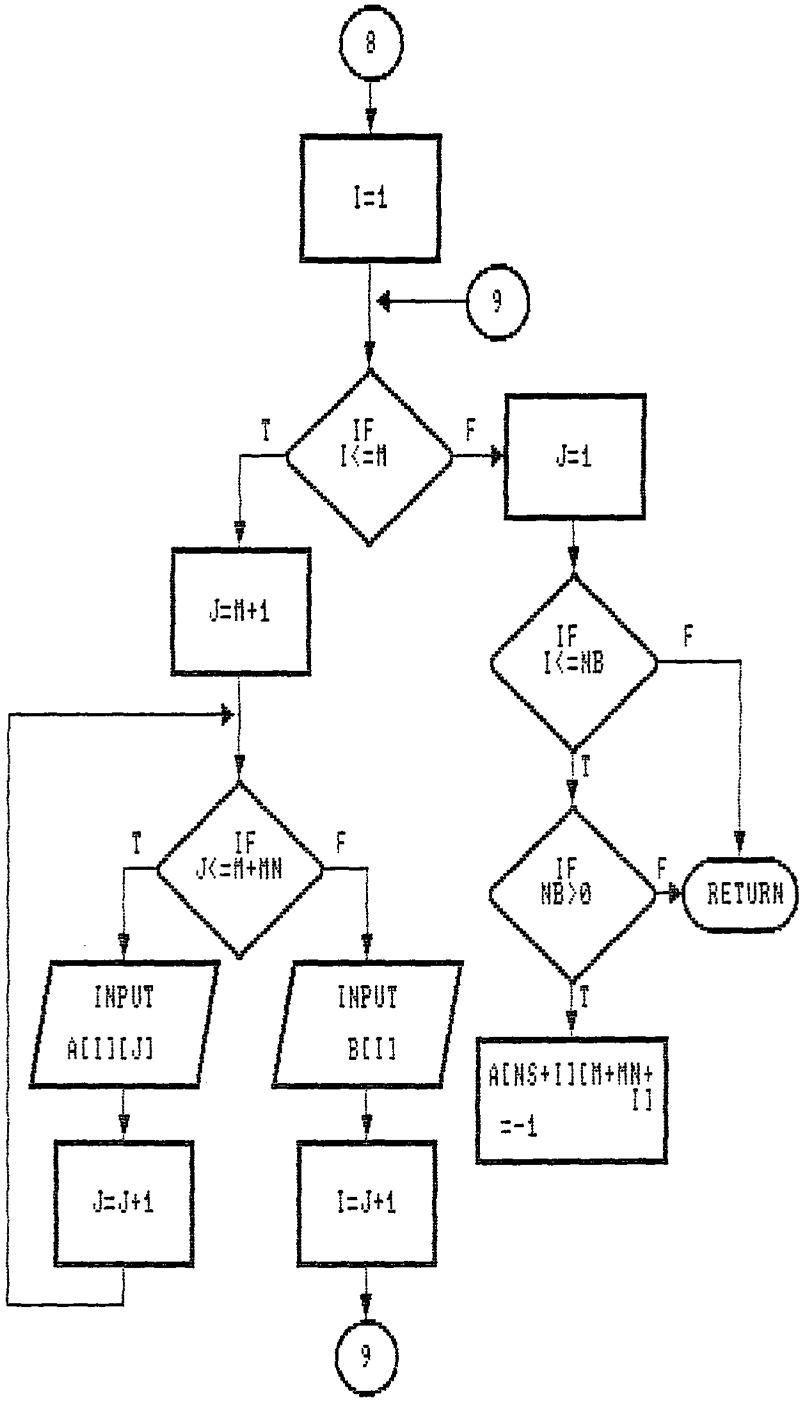


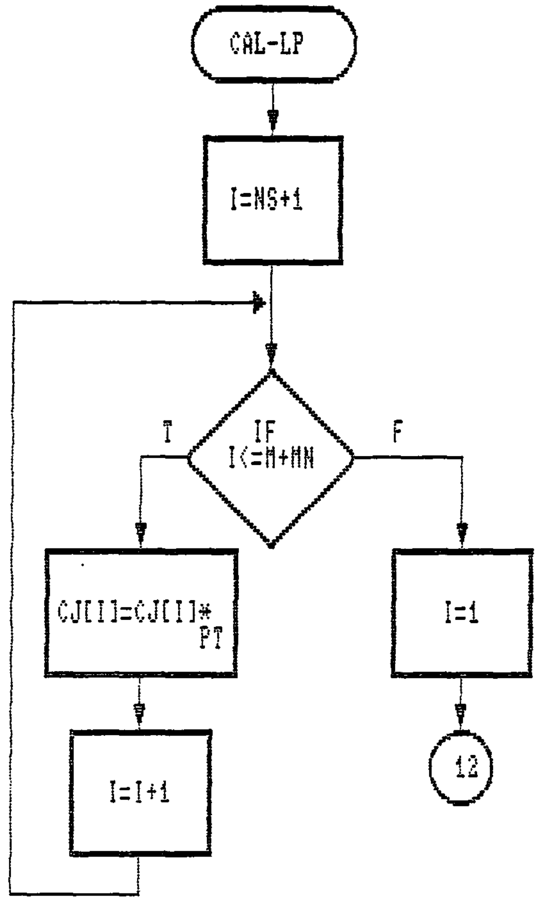

INITIAL
M=NS+NB+NE
N=M+MN+NB
K=1
J=M+1
IF
J<=M+MN
T
F
XJ[K]=K
K=K+1
J=J+1
K=MN+1
J=1
1
IF
J<=NS
T
F
IF
J<=NS
T
F
2
XJ[J]=K
K=K+1
J=J+1
1

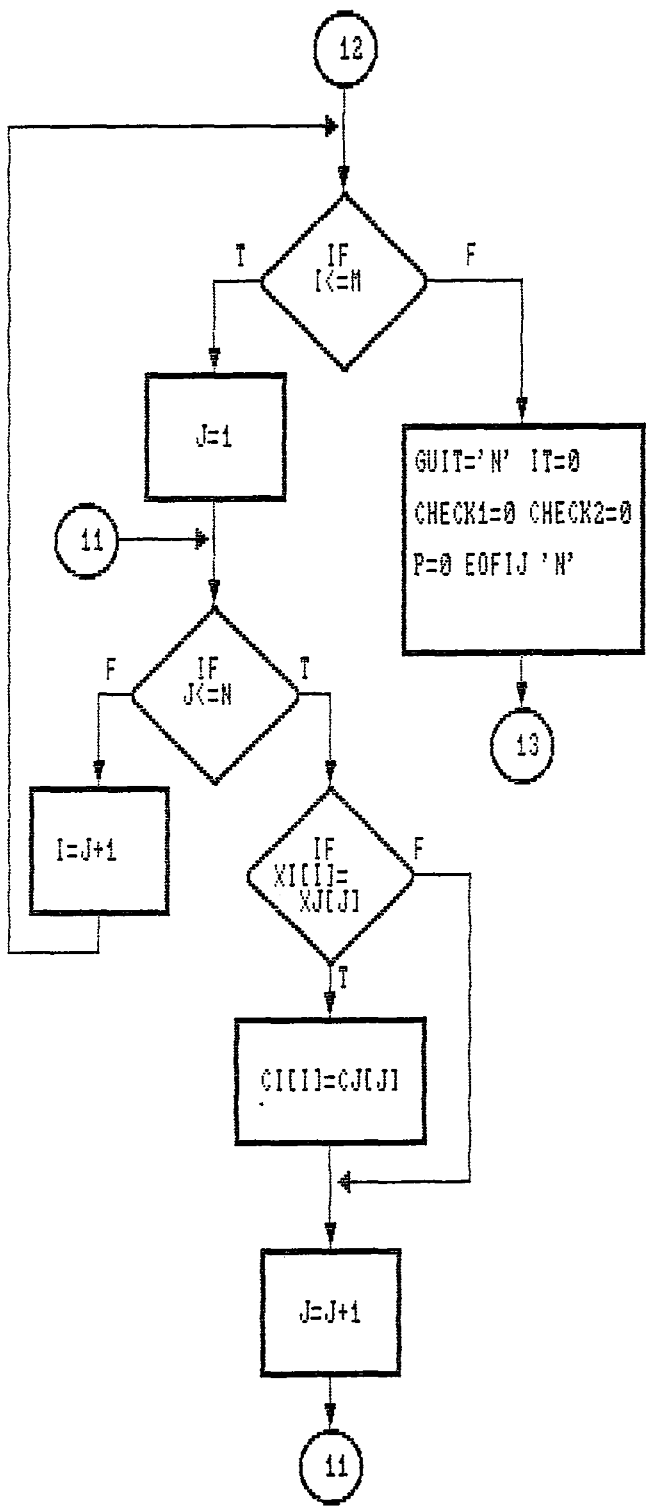

2
I=1
T
IF
I<=N
F
CJ[I]=0
K=M+MN=1
J=M+MN+1
3
I=I+1
T
IF
J<=N
F
T
IF
NB>0
F
XJ[J]=K
K=K+1
4
J=J+1
3

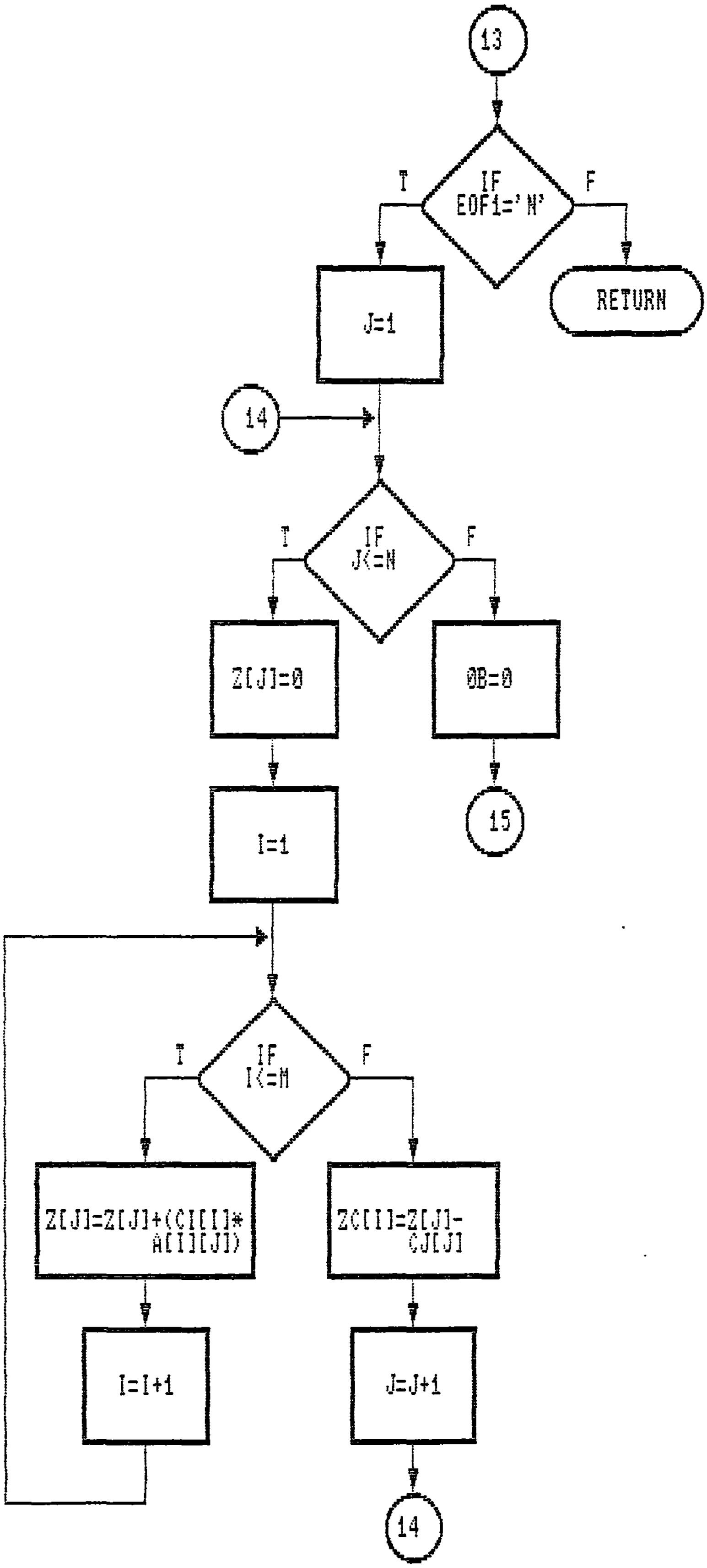

4
K=MN+NS+1
J=NS+1
IF
J<=M
T
F
IF
NB<=0 &&
NEL=0
F
T
XJ[J]=K
K=K+1
CJ[J]=999*PT
J=J+1
J=1
5
IF
J<=M
F
T
XI[I]=
XJ[J]
RETURN
J=J+1
5

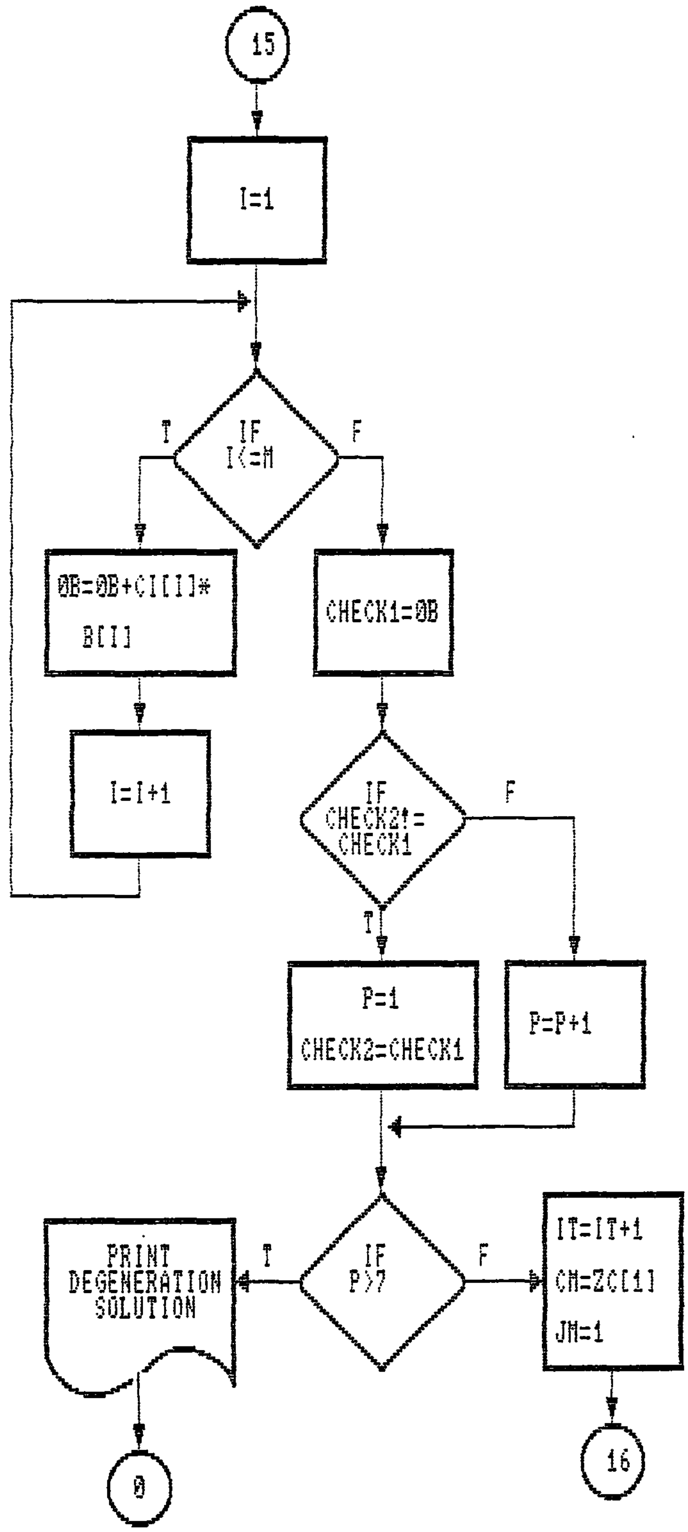

ACCEPT-EGU
I=M+1
IF
I<=M+MN
T
F
INPUT
CJ[I]
I=1
CJ[I]=CJ[I]*
(-1)
7
IF
J<=M
T
F
I=I+1
J=1
8
6
IF
J<=N
T
F
A[I][J]=1
A[I][J]=0
J=J+1
6

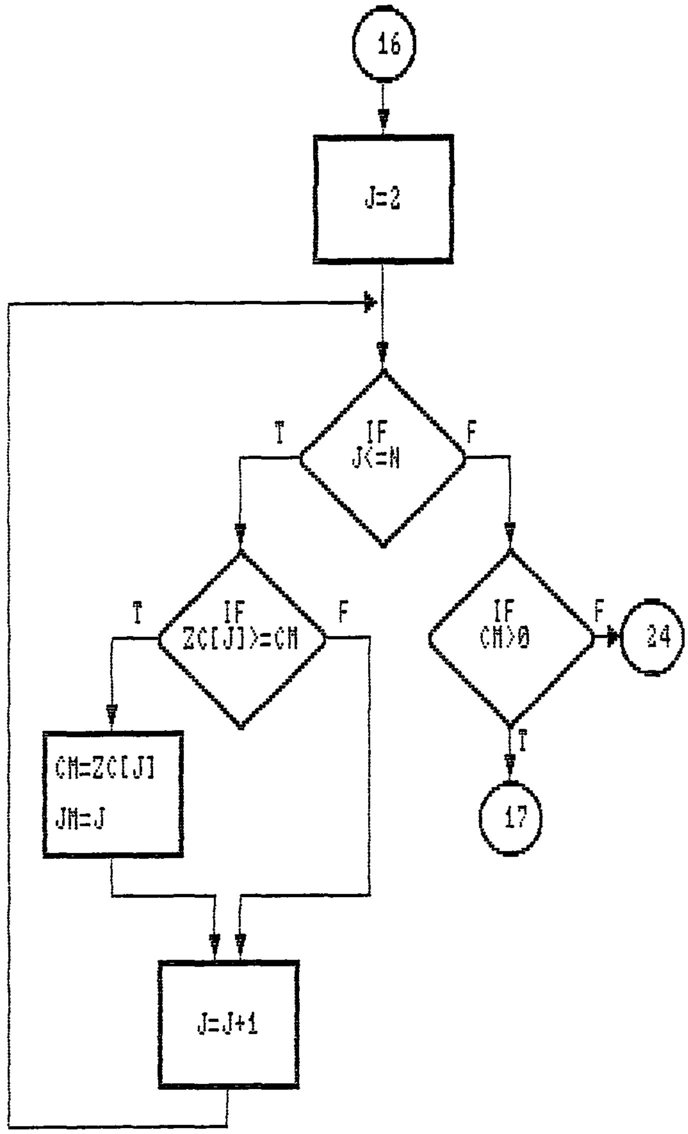

8
I=1
9
IF
I<=M
T
F
J=1
J=M+1
IF
I<=NB
F
T
IF
J<=M+MN
T
F
IF
NB>0
F
RETURN
T
INPUT
A[I][J]
INPUT
B[I]
A[NS+I][M+MN+I]
=-1
J=J+1
I=J+1
9

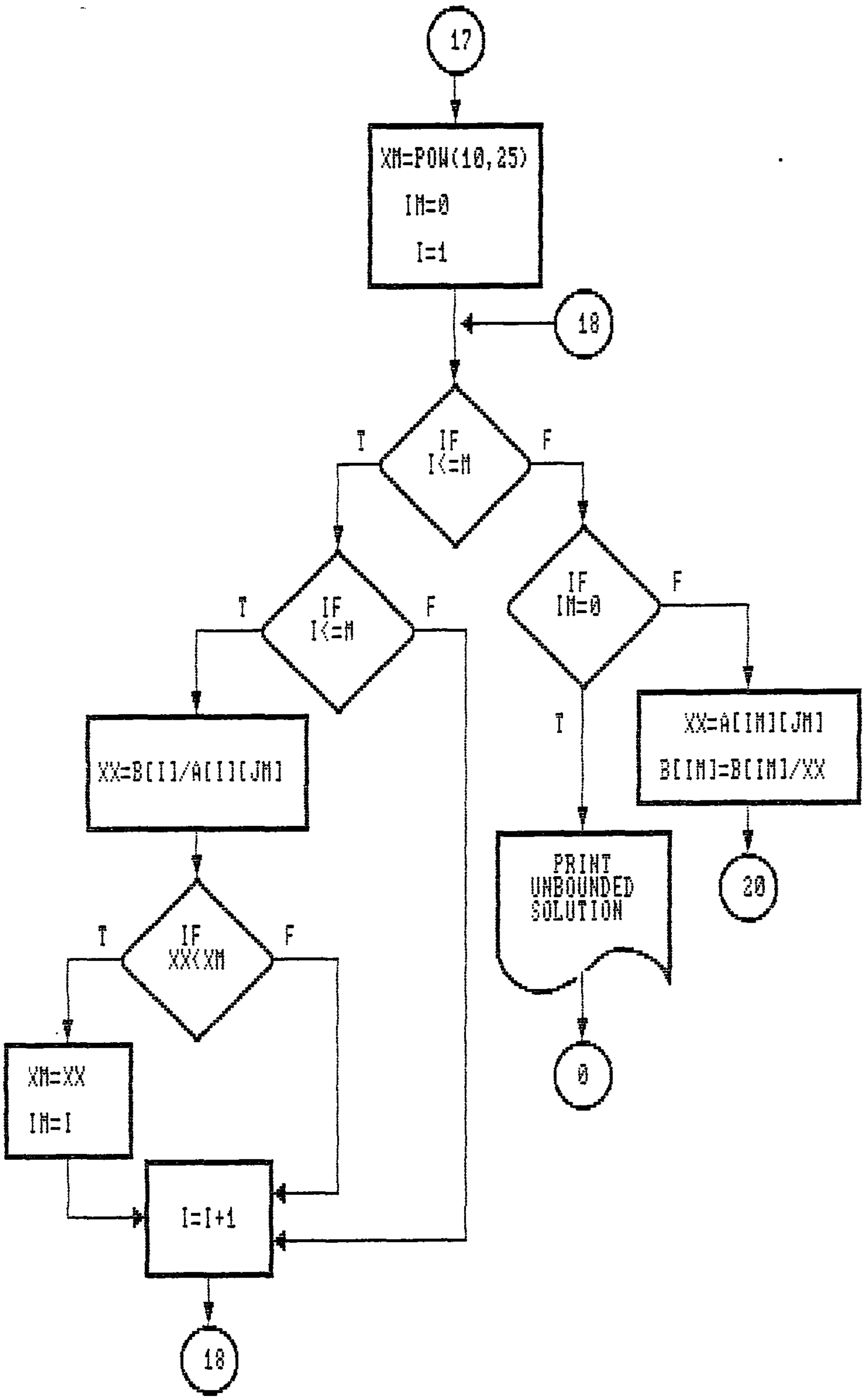

CAL-LP
I=NS+1
T
IF
I<=M+MN
F
CJ[I]=CJ[I]*
PT
I=1
I=I+1
12


12
IF I<=M
T
F
J=1
GUIT='N' IT=0
CHECK1=0 CHECK2=0
P=0 EOFIJ 'N'
13
11
IF J<=N
F
T
I=J+1
IF XI[I]= XJ[J]
F
T
CI[I]=CJ[J]
J=J+1
11

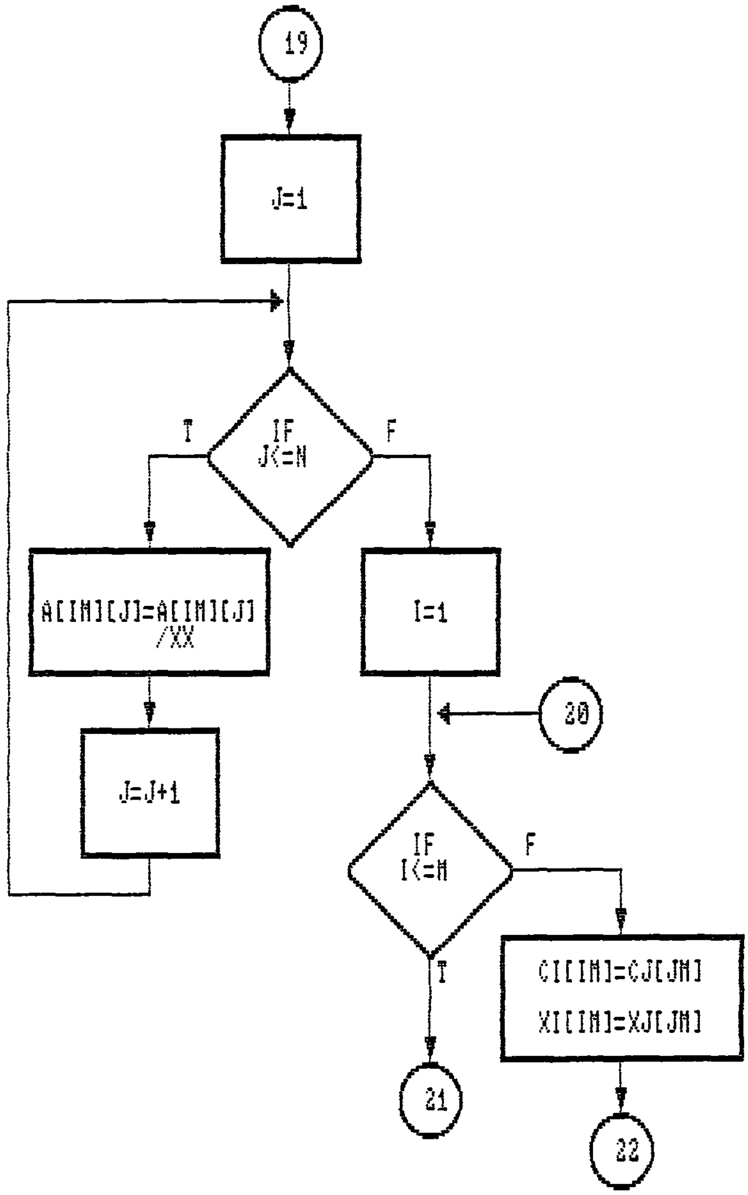

13
IF EOF1='N'
T
F
J=1
RETURN
14
IF J<=N
T
F
Z[J]=0
OB=0
15
I=1
IF I<=M
T
F
Z[J]=Z[J]+(C[I]*A[I][J])
ZC[I]=Z[J]-CJ[J]
I=I+1
J=J+1
14

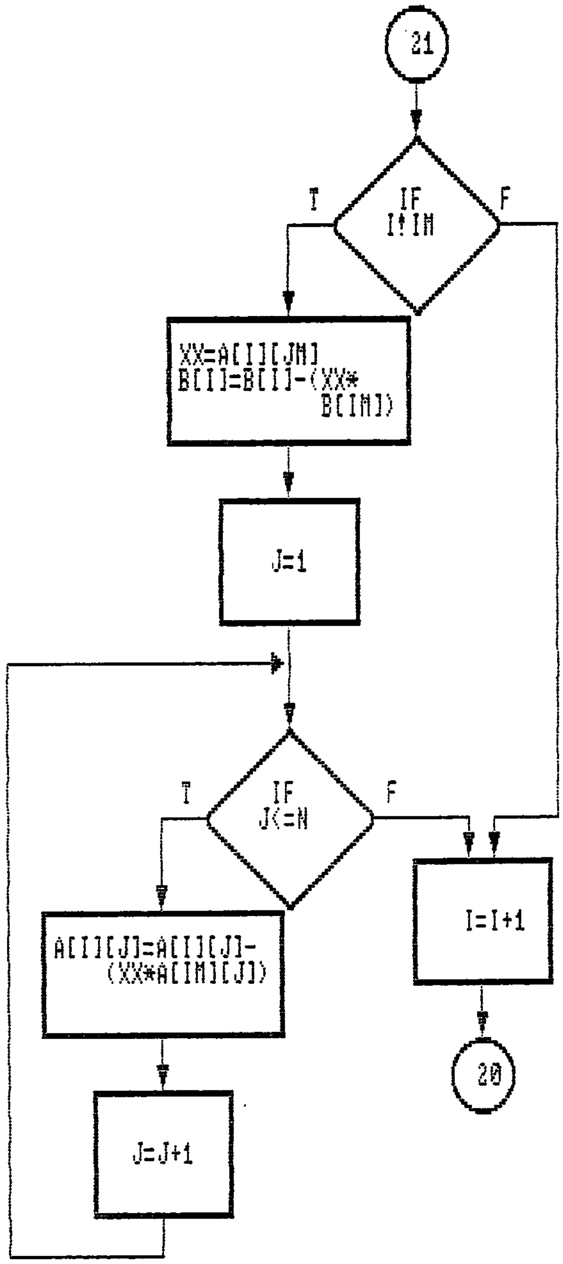

15
I=1
IF
I<=M
T
F
0B=0B+CI[I]*
B[I]
CHECK1=0B
I=I+1
IF
CHECK2!=
CHECK1
F
T
P=1
CHECK2=CHECK1
P=P+1
PRINT
DEGENERATION
SOLUTION
T
IF
P>7
F
IT=IT+1
CM=ZC[1]
JM=1
0
16

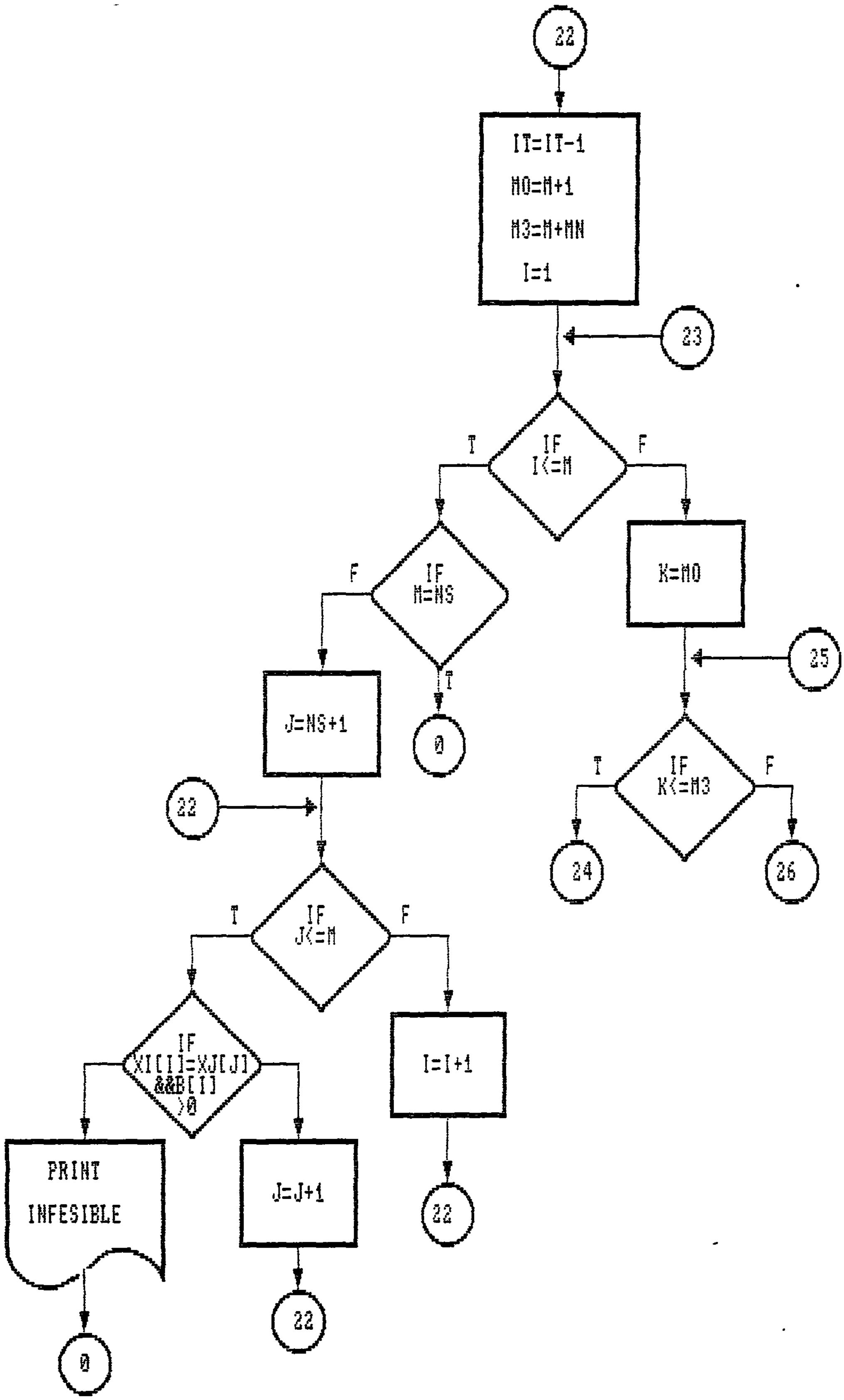

16
J=2
IF
J<=N
T
F
IF
ZC[J]>=CM
T
F
IF
CM>0
F
24
T
17
CM=ZC[J]
JM=J
J=J+1

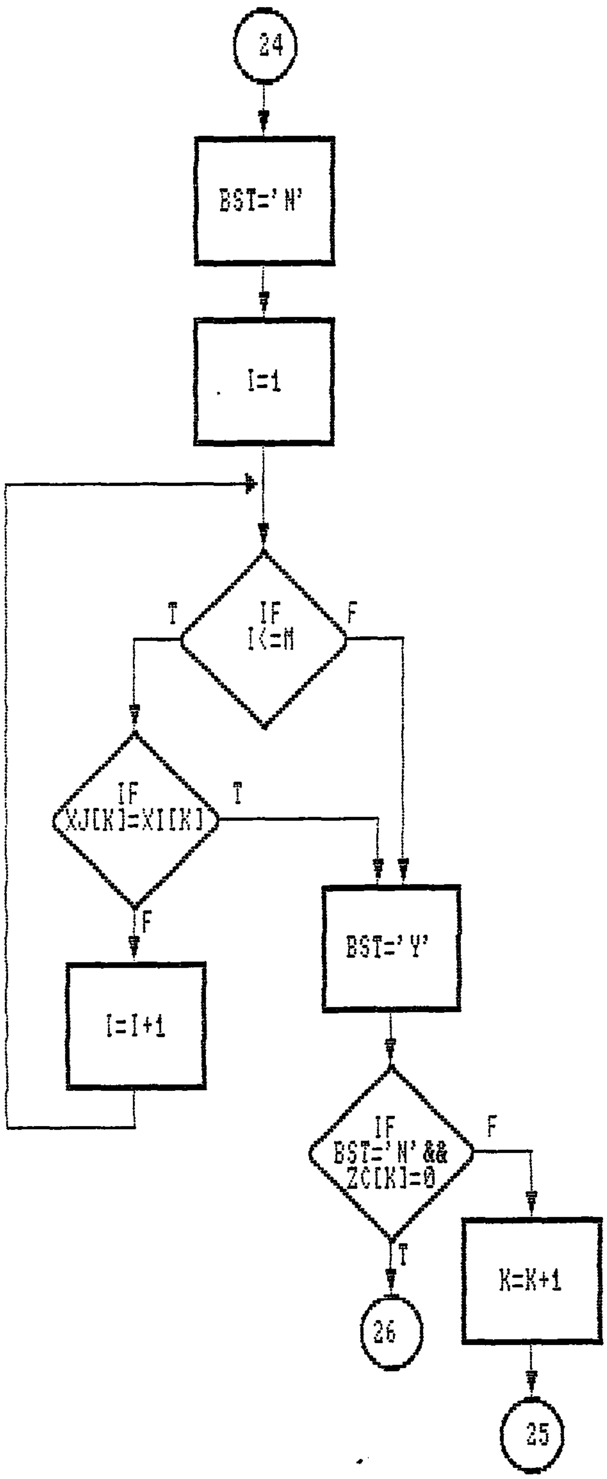


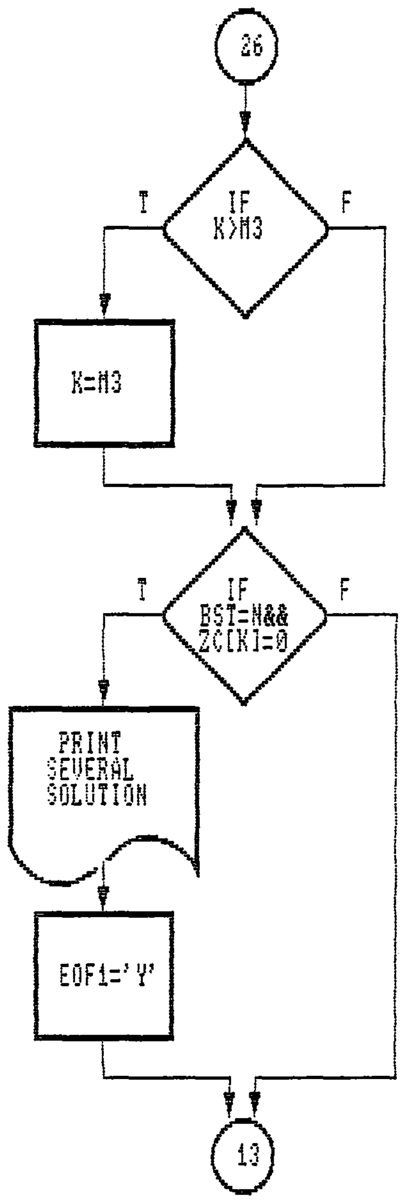
17
XM=POW(10,25)
IM=0
I=1
18
IF
I<=M
T
F
IF
I<=M
T
F
IF
IM=0
F
T
XX=B[I]/A[I][JM]
XX=A[IM][JM]
B[IM]=B[IM]/XX
PRINT
UNBOUNDED
SOLUTION
20
IF
XX<XM
T
F
XM=XX
IM=I
0
I=I+1
18

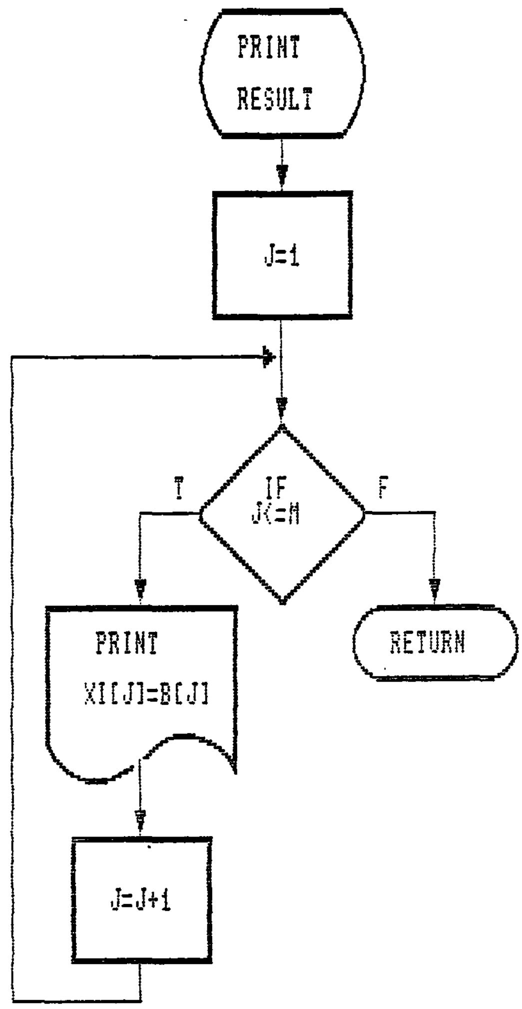

19
J=1
IF
J<=N
T
F
A[IM][J]=A[IM][J]
/XX
I=1
20
J=J+1
IF
I<=M
F
T
CI[IM]=CJ[JM]
XI[IM]=XJ[JM]
21
22


21
IF
I!IM
T
F
XX=A[I][JM]
B[I]=B[I]-(XX*
B[IM])
J=1
IF
J<=N
T
F
A[I][J]=A[I][J]-
(XX*A[IM][J])
J=J+1
I=I+1
20


22
IT=IT-1
M0=M+1
M3=M+MN
I=1
23
IF
I<=M
T
F
K=M0
25
IF
M=NS
F
T
J=NS+1
0
IF
K<=M3
T
F
24
26
22
IF
J<=M
T
F
IF
XI[I]=XJ[J]
&&B[I]
>0
I=I+1
PRINT
INFESIBLE
J=J+1
22
22
0


24
BST='N'
I=1
IF
I<=M
T
F
IF
XJ[K]=XI[K]
T
F
I=I+1
BST='Y'
IF
BST='N' &&
ZC[K]=0
F
T
K=K+1
26
25


26
IF
K>M3
T
F
K=M3
IF
BST=N&&
ZC[K]=0
T
F
PRINT
SEVERAL
SOLUTION
EOF1='Y'
13


PRINT
RESULT
J=1
IF
J<=M
T
F
PRINT
XI[J]=B[J]
RETURN
J=J+1

บรรณานุกรม

1. Constantinides Alkis " Applied Numerical method with personal computers " Mc Graw-Hill International Editions.

2. Johnsonbaugh Richard , Kalin Martin " Application programming in C " Maxwell Macmillan international.

3. Mark Williams company " Ansi C a Lexical Guide " Prentice Hall, Englewood Clifts, New Jersey 07632

4. Herberd Schildt " C Power User's Guide " Mc Graw-Hill International Editions.

5. ศิวัฒน์ ศิวะบวร, พรชัย จักรธำรงค์, จิรศักดิ์ ชัยวิริยะกุล " การประยุกต์ใช้งานภาษาซี " บริษัท ซีเอ็ดยูเคชั่น จำกัด.

6. รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข " การวิเคราะห์เชิงตัวเลข " โครงการตำรา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

7. รศ. อุบลวรรณา เงินวิจิตร " เอกสารประกอบการเรียนการสอน " โครงการตำรา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

8. รศ. ภัคคินี ยิมเรวัต " การวิเคราะห์เชิงตัวเลข " โครงการตำรา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง