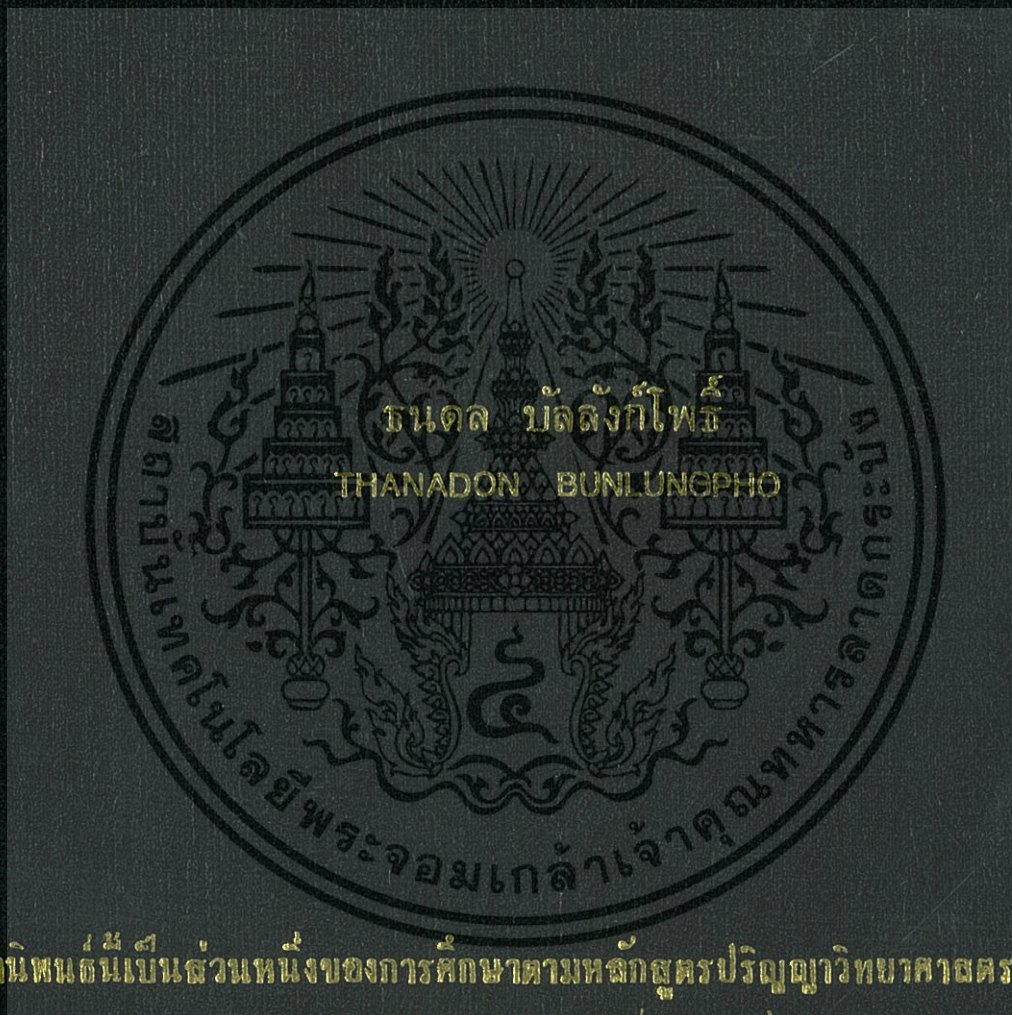


วิธีแก้แฉงสองระดับสำหรับตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำไหลไม่เอกรูปโดย  
สมการการแพร่-การพาอวกผลศาสตร์

THE TWO-LEVEL EXPLICIT METHODS FOR A WATER QUALITY  
MODEL IN A NON-UNIFORM FLOW STREAM WITH  
A HYDRODYNAMIC ADVECTION-DISPERSION EQUATION



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2557

KMITL-2014-SC-M-001-026

วิธีชัดแจ้งสองระดับสำหรับตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำไหลไม่เอกรูปโดย

สมการการแพร่-การพาอุทกพลศาสตร์

THE TWO-LEVEL EXPLICIT METHODS FOR A WATER QUALITY

MODEL IN A NON-UNIFORM FLOW STREAM WITH

A HYDRODYNAMIC ADVECTION-DISPERSION EQUATION



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2557

KMITL-2014-SC-M-001-026

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**THE TWO-LEVEL EXPLICIT METHODS FOR A WATER QUALITY  
MODEL IN A NON-UNIFORM FLOW STREAM WITH  
A HYDRODYNAMIC ADVECTION-DISPERSION EQUATION**



**A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS  
FACULTY OF SCIENCE**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**2014**

**KMITL-2014-SC-M-001-026**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



**COPYRIGHT 2014**

**FACULTY OF SCIENCE**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**คณะวิทยาศาสตร์**  
**สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง**  
**ใบรับรองวิทยานิพนธ์**

**หัวข้อวิทยานิพนธ์**

วิธีชัดแจ้งสองระดับสำหรับตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำไหลไม่เอกรูปโดย  
 สมการการแพร่-การพาออกทกพลศาสตร์  
 The two-level explicit methods for a water quality model in  
 a non-uniform flow stream with a hydrodynamic advection-  
 dispersion equation

**นักศึกษา**

นายธนดล บัลลังก์โพธิ์

**รหัสประจำตัว**

54650705

**ปริญญา**



วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

**สาขาวิชา**

คณิตศาสตร์ประยุกต์

**อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์**

ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.ใจปอง	เกษมสุวรรณณ์	
รศ.ภคินี	ชิตสกุล	
ดร.สุรรัตน์	อารีรักษ์สกุล ก้องโลก	
ผศ.ดร.นพรัตน์	โพธิ์ชัย	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ 12 พฤษภาคม พ.ศ. 2557 เวลา 10.30 - 12.30 น.  
 สถานที่สอบ ณ ห้อง 207 ชั้น 2 อาคารจุฬารามณีย์ลัยลักษณ์ 1

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร.ดุษณี ธนธนวิวัฒน์)  
 คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ 23 เดือน พฤษภาคม พ.ศ. 57

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	วิธีชดเชยสองระดับสำหรับตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำไหลไม่เอกรูปโดยสมการการแพร่-การพาอุทกพลศาสตร์
นักศึกษา	นายชนคล บัลลังก์โพธิ์
รหัสประจำตัว	54650705
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2557
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

### บทคัดย่อ

ปัญหาน้ำเสียมักมีสาเหตุมาจากการปล่อยน้ำทิ้งจากโรงงานอุตสาหกรรมโดยพิจารณาจากดัชนีคุณภาพน้ำหากสูงกว่ามาตรฐานจะถือว่าเป็นภาวะน้ำเสีย ซึ่งการตรวจวัดคุณภาพน้ำสามารถทำได้โดยการตรวจวัดจากการเก็บข้อมูลภาคสนาม และการประมาณค่าโดยการจำลองแบบด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำที่ลักษณะการไหลไม่ราบเรียบจำเป็นต้องทราบความเร็วและการยกตัวของระดับน้ำ ซึ่งโดยทั่วไปหากไม่ใช้วิธีการเก็บข้อมูลภาคสนาม จะต้องคำนวณหาความเร็วจากตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในรูปสมการน้ำตื้นแล้วนำความเร็วนี้ไปเป็นข้อมูลเข้าในตัวแบบการกระจายที่อยู่ในรูปสมการการแพร่-การพา ในวิทยานิพนธ์นี้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณของสมการการแพร่-การพา โดยได้เสนอวิธีชดเชยสองระดับ ได้แก่ วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ วิธีฮอปวินด์ และวิธีแลกซ์-เวนดรอฟ โดยพบว่าทั้งสามวิธีนี้เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ มีความแม่นยำและในการคำนวณ โดยวิธีชดเชยสองระดับให้ผลการคำนวณใกล้เคียงกัน ซึ่งวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิมีเงื่อนไขของความเสถียรกว้างกว่าวิธีชดเชยสองระดับวิธีอื่นจึงมีความคล่องตัวในการคำนวณสูง

**คำสำคัญ:** วิธีชดเชยสองระดับ, ตัวแบบคุณภาพน้ำ, ตัวแบบอุทกพลศาสตร์, ตัวแบบการกระจาย, สมการการแพร่-การพา, สมการน้ำตื้น, วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ, วิธีฮอปวินด์, วิธีแลกซ์-เวนดรอฟ

<b>Thesis Title</b>	The two-level explicit methods for a water quality model in a non-uniform flow stream with a hydrodynamic advection-dispersion equation
<b>Student</b>	Mr.Thanadon Bunlungpho
<b>Student ID</b>	54650705
<b>Degree</b>	Master of Science
<b>Program</b>	Applied Mathematics
<b>Year</b>	2014
<b>Thesis Advisor</b>	Asst.Prof.Dr.Nopparat Pochai

### ABSTRACT

Water pollution problem is mostly drained by industry. It can be increases water-quality indicator. The methods to detect the amount of pollute water conducted by a field measurement and a mathematical simulation. A calculation of datas of water current in each positions and times. Water quality model in a non-uniform flow stream need velocities and elevations. The velocity of water current is calculated from a hydrodynamic model in shallow water equation. The results become the input datas for the dispersion model. In this research, the two-level explicit methods: FTCS Upwind and Lax-wendroff for the dispersion model is proposed. All methods give good agreement numerical solutions. The two-level explicit methods are economical to use and easy to implement. The FTCS has a greater stability condition of interval, than another method. The FTCS is a flexible two-level explicit method.

**Keywords :** two-level explicit methods, water quality model, hydrodynamic model, dispersion model, advection-diffusion equation, shallow water equation, FTCS, Upwind scheme, Lax-wendroff scheme

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยดีด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา ศศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ที่ช่วยประสิทธิ์ประสาทความรู้ ให้ความช่วยเหลือและคำแนะนำ อีกทั้งยังให้โอกาสในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ อันเป็นประโยชน์ต่อวิทยานิพนธ์ของข้าพเจ้า

ขอขอบพระคุณ ศศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ รัช.ภักคินี ชิตสกุล และ ดร.สุวีรัตน์ อารีรักษ์สกุล ก้องโลก คณะกรรมการวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้คำแนะนำตลอดจนข้อเสนอแนะ ที่มีประโยชน์อย่างยิ่งต่อวิทยานิพนธ์นี้

ขอขอบพระคุณครุอาจารย์ที่เคารพทุกท่าน ที่มีความพยายามอดทนอบรมสั่งสอน และให้ความรู้ตลอดมา อีกทั้งบรรดาเพื่อนสนิทมิตรสหาย รุ่นน้อง และที่สำคัญรุ่นพี่ปริญญาเอก นายวิศรุต คล้ายแจ้ง นายณัฐวุฒิ ผ่องหนู และนายกณาวุฒิ ทรัพย์คล้าย ที่คอยให้กำลังใจ และข้อเสนอแนะต่างๆ อันเป็นประโยชน์และทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี

สำหรับคุณงามความดีใดๆ อันเกิดจากงานวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับคุณพ่อ ชาญวุฒิ บัลลังก์โพธิ์ และคุณแม่บังอร บัลลังก์โพธิ์ ผู้ที่ให้กำเนิด มีพระคุณ คอยสนับสนุนในทุกๆ ด้านและกำลังใจกับข้าพเจ้าตลอดมา

ธนดล บัลลังก์โพธิ์

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
สารบัญรูป.....	VIII

### บทที่ 1 บทนำ

1.1	ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2	ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.....	1
1.3	วัตถุประสงค์ของงานวิจัย.....	2
1.4	สมมติฐานการวิจัย.....	2
1.5	ขอบเขตของงานวิจัย.....	2
1.6	ประโยชน์ที่ได้รับ.....	2
1.7	ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย.....	3

### บทที่ 2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและทบทวนวรรณกรรม

2.1	ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง.....	4
2.2	ประเภทของสมการ.....	5
2.3	เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น.....	6
2.4	วิธีผลต่างจำกัด.....	7
2.5	วิธีซัดแ็ง.....	8
2.6	วิธีปริยาย.....	9
2.7	วิธีของเครงก์-นีโคลสัน.....	10
2.8	ทบทวนวรรณกรรม.....	11

## สารบัญ(ต่อ)

### บทที่ 3 ตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในทางน้ำเอกรูป

3.1	ตัวแบบอุทกพลศาสตร์.....	13
3.2	รูปแบบไร้มิติของตัวแบบอุทกพลศาสตร์.....	15
3.3	ตัวแบบการพา-การแพร่ปฏิกิริยาใน 1 มิติ.....	16
3.4	ขั้นตอนการแบ่งกริดโดเมน.....	17
3.5	วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์.....	18
3.6	ตัวอย่างการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแบบอุทกพลศาสตร์เพื่อหา ค่าประมาณของฟังก์ชันความเร็วและฟังก์ชันการยกตัวของน้ำ.....	23

### บทที่ 4 วิธีซัดเง็งสองระดับสำหรับสมการการแพร่-การพา

4.1	สมการการแพร่-การพา.....	31
4.2	ขั้นตอนการแบ่งกริดโดเมน.....	31
4.3	วิธีซัดเง็งสองระดับสำหรับการหาผลเฉลยมลพิษของตัวแบบการกระจาย.....	32
4.4	ตัวอย่างการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข $C(x, t)$ ในตัวแบบการกระจาย.....	35

### บทที่ 5 สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ

5.1	สรุปผลการทดลอง.....	48
5.2	ข้อเสนอแนะ.....	48

เอกสารอ้างอิง.....	50
--------------------	----

ภาคผนวก.....	51
--------------	----

ประวัติผู้เขียน.....	71
----------------------	----

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
3.1 การยกตัวของน้ำ $Z(x,t)$ ในรูปไร้มิติ.....	27
3.2 การยกตัวของน้ำ $\zeta(x,t)$ ที่เวลา $t$ และ $0 \leq x \leq 1$ .....	27
3.3 การยกตัวของน้ำ $U(x,t)$ ในรูปไร้มิติ.....	29
3.4 การยกตัวของน้ำ $u(x,t)$ ที่เวลา $t$ และ $0 \leq x \leq 1$ ( $m/s$ ).....	29
4.1 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจาก กลางในปริภูมิเมื่อ $\beta = 0.125$ ( $kg/m^3$ ).....	36
4.2 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีอ็พวินด์ เมื่อ $\beta = 0.125$ ( $kg/m^3$ ).....	38
4.3 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีแลกซ์-เวนคروف เมื่อ $\beta = 0.125$ ( $kg/m^3$ ).....	40
4.4 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจาก กลางในปริภูมิเมื่อ $\beta = 0.25$ ( $kg/m^3$ ).....	42
4.5 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีอ็พวินด์ เมื่อ $\beta = 0.25$ ( $kg/m^3$ ).....	43
4.6 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีแลกซ์-เวนคروف เมื่อ $\beta = 0.25$ ( $kg/m^3$ ).....	44
4.7 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจาก กลางในปริภูมิเมื่อ $\beta = 0.5$ ( $kg/m^3$ ).....	45
4.8 เงื่อนไขการลู่เข้าของวิธีชัดแจ้งสองระดับ.....	47

## สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 การแบ่งแผ่น โดเมนออกเป็นกริดสี่เหลี่ยมเพื่อใช้กับวิธีผลต่างจำกัด.....	7
2.2 การแบ่งแท่ง โลหะเพื่อใช้กับวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม.....	8
2.3 แผนภาพการคำนวณ โดยวิธีแบบชัดแจ้ง.....	9
2.4 แผนภาพการคำนวณ โดยวิธีแบบปริยาย.....	10
2.5 แผนภาพการคำนวณ โดยวิธีของแครงก์-นิโคลสัน.....	11
2.6 กระบวนการหาความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำ.....	12
3.1 การยกตัวของน้ำ.....	14
3.2 การแบ่งกริดโดเมน.....	17
3.3 เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบของปัญหาในรูปไร้มิติ.....	21
3.4 ขั้นตอนการแบ่งกริดโดเมน.....	23
3.5 การยกตัวของน้ำที่เวลา 50 นาที.....	27
3.6 การยกตัวของกระแสน้ำ $Z(x,t)$ ในรูปไร้มิติ.....	28
3.7 การยกตัวของกระแสน้ำ $\zeta(x,t)$ ที่เวลา 1 ชั่วโมง 46 นาที.....	28
3.8 ความเร็วของน้ำของน้ำที่เวลา 50 นาที ( $m/s$ ).....	29
3.9 ความเร็วของกระแสน้ำ $U(x,t)$ ในรูปไร้มิติ.....	30
3.10 ความเร็วของกระแสน้ำ $u(x,t)$ ที่เวลา 1 ชั่วโมง 46 นาที ( $m/s$ ).....	30
4.1 การแบ่งกริดโดเมนในการหาค่าความเข้มข้น $C(x,t)$ .....	32
4.2 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่าง จากกลางในปริภูมิ.....	34
4.3 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของวิธีอัปวินด์.....	34
4.4 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของวิธีแลกซ์-เวนครอพ.....	35
4.5 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำที่เวลา 50 นาที ( $kg/m^3$ ).....	36
4.6 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำไหลในช่วงเวลาเริ่มต้นถึง 1 ชั่วโมง 46 นาที ณ ตำแหน่ง 500 เมตร ( $kg/m^3$ ).....	37
4.7 ความเข้มข้นของมลพิษ $C(x,t)$ ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจาก กลางในปริภูมิเมื่อ $\beta = 0.125 (kg/m^3)$ .....	37

## สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.8 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำที่เวลา 50 นาที ( $kg / m^3$ ) .....	38
4.9 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำไหลในช่วงเวลาเริ่มต้นถึง 1 ชั่วโมง 46 นาที ณ ตำแหน่ง 500 เมตร ( $kg / m^3$ ) .....	39
4.10 ความเข้มข้นของมลพิษ $C(x, t)$ ของวิธีอพวินด์เมื่อ $\beta = 0.125$ ( $kg / m^3$ ) .....	39
4.11 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำที่เวลา 50 นาที ( $kg / m^3$ ) .....	40
4.12 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำไหลในช่วงเวลาเริ่มต้นถึง 1 ชั่วโมง 46 นาที ณ ตำแหน่ง 500 เมตร ( $kg / m^3$ ) .....	41
4.13 ความเข้มข้นของมลพิษ $C(x, t)$ ของวิธีแลกซ์-เวนคروف เมื่อ $\beta = 0.125$ ( $kg / m^3$ ) .....	41
4.14 ความเข้มข้นของมลพิษ $C(x, t)$ ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจาก กลางในปริภูมิเมื่อ $\beta = 0.25$ ( $kg / m^3$ ) .....	42
4.15 ความเข้มข้นของมลพิษ $C(x, t)$ ของวิธีอพวินด์ เมื่อ $\beta = 0.25$ ( $kg / m^3$ ) .....	43
4.16 ความเข้มข้นของมลพิษ $C(x, t)$ ของวิธีแลกซ์-เวนคروف เมื่อ $\beta = 0.25$ ( $kg / m^3$ ) .....	44
4.17 ความเข้มข้นของมลพิษ $C(x, t)$ ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจาก กลางในปริภูมิเมื่อ $\beta = 0.5$ ( $kg / m^3$ ) .....	45
4.18 การเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของมลพิษเมื่อคำนวณโดย วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิวิธีอพวินด์และวิธีแลกซ์-เวนคروف ที่ 50 นาทีตลอดทางน้ำ ( $kg / m^3$ ) .....	46

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ในปัจจุบัน น้ำเสีย ส่งผลกระทบต่อสิ่งแวดล้อมเป็นอย่างมาก ทำให้เกิด มลภาวะ และ เชื้อโรคซึ่งเป็นสาเหตุต่อการเกิดโรคต่างๆกับมนุษย์ น้ำเสีย (Wastewater) หมายถึง น้ำที่ได้รับผลกระทบในด้านคุณภาพจาก อิทธิพลของมนุษย์ การใช้น้ำในชีวิตประจำวันทั้งอุปโภค และบริโภค การประกอบอาหาร การชำระล้างสิ่งสกปรกออกจากร่างกาย หรือ การใช้น้ำในระบบอุตสาหกรรม เช่น น้ำทิ้งจากระบบการผลิตระบบหล่อเย็น สารที่ปะปนอาจจะเป็นสารอินทรีย์ สารอนินทรีย์ กรดด่าง โลหะหนัก สารเคมีต่างๆ เป็นต้น ทั้งนี้จะทำให้เพิ่มปริมาณสารเหล่านั้นหรือเกิดการพิษกับสิ่งมีชีวิตในน้ำเกิดการเน่าเหม็น เกิดสี กลิ่น และความไม่ใสสะอาดจากนี้แล้วสิ่งสกปรกที่ปนเปื้อนในน้ำเสียจะเป็นสาเหตุที่ทำให้น้ำเสียมีลักษณะสมบัติแตกต่างกันออกไป น้ำหรือของเหลวที่มีสิ่งเจือปนต่าง ๆ ในปริมาณสูงจนกระทั่งเป็นน้ำที่ไม่ต้องการ และนำรังเกียจสำหรับคนทั่วไป เป็นมลพิษทางทัศนียภาพและก่อให้เกิดผลเสียหายต่อสิ่งแวดล้อม น้ำที่มีสารใด ๆ หรือสิ่งปฏิกูลที่ไม่พึงปรารถนาเจือปนอยู่ การปนเปื้อนของสิ่งสกปรกเหล่านี้ จะทำให้คุณสมบัติของน้ำเปลี่ยนแปลงไป จนอยู่ในสภาพที่ไม่สามารถนำกลับมาใช้ประโยชน์ได้

### 1.2 ระเบียบวิธีวิจัย

- 1.2.1 วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอ ตัวแบบอุทกพลศาสตร์ และตัวแบบการแพร่-การพา
- 1.2.2 วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอ วิธีหาค่าเชิงสองระดับเพื่อใช้ในการคำนวณตัวแบบการแพร่- การพา
- 1.2.3 วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอ ตัวแบบการพา-การแพร่ใน 1 มิติกับสัมประสิทธิ์ค่าคงที่
- 1.2.4 วิเคราะห์ผลเฉลยของตัวแบบที่ 1 คือ ความเร็ว และ การยกตัวของระดับน้ำ  
ผลเฉลยของตัวแบบที่ 2 คือ ความเข้มข้นของมลพิษในน้ำ
- 1.2.5 วิเคราะห์ผลเฉลยความเร็วที่ได้จากตัวแบบที่ 1 นำไปเป็นข้อมูลเข้าให้กับตัวแบบที่ 2 เพื่อใช้ในการคำนวณ ความเข้มข้นของมลพิษในน้ำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 1.3 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

- 1.3.1 นำเสนอทฤษฎีและความรู้ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบคุณภาพน้ำเพื่อศึกษาตัวแบบอุทกพลศาสตร์
- 1.3.2 นำเสนอวิธีซัดแจ้งสองระดับ (The two-level explicit methods) สำหรับการประมาณค่าของผลเฉลย
- 1.3.3 จำลองแบบการไหลแบบไม่เอกรูป
- 1.3.4 นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขที่เหมาะสมในการหาผลเฉลยของตัวแบบการแพร่-การพา และตัวแบบอุทกพลศาสตร์

### 1.4 สมมติฐานการวิจัย

- 1.4.1 สามารถใช้ตัวแบบคณิตศาสตร์คู่ควบเพื่อประเมินคุณภาพน้ำ 1 มิติ ในทางน้ำที่มีการไหลแบบไม่เอกรูป
- 1.4.2 สามารถใช้วิธีแรงก-นิโคลสันในการประมาณผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์แล้วนำผลลัพธ์ที่ได้เป็นข้อมูลเข้าสำหรับสมการการแพร่-การพา
- 1.4.3 สามารถใช้วิธีซัดแจ้งสองระดับในการประมาณค่าผลเฉลยของตัวแบบการแพร่-การพา

### 1.5 ขอบเขตของงานวิจัย

- 1.5.1 วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอรูปไร้มิติของสมการการแพร่-การพา
- 1.5.2 วิทยานิพนธ์นี้นำเสนอการหาผลเฉลยของสมการการแพร่-การพาโดยวิธีซัดแจ้งสองระดับ
- 1.5.3 วิทยานิพนธ์นี้เสนอตัวแบบอุทกพลศาสตร์และตัวแบบการกระจายเพื่อที่จะตรวจวัด คุณภาพของน้ำบนสภาวะการไหลไม่คงตัว
- 1.5.4 วิทยานิพนธ์นี้ไม่พิจารณาพจน์ของแรง โคริโอลิส(Coriolis force) และแรงเค้นเฉือน (Shearing Stress)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 1.6 ประโยชน์ที่ได้รับ

- 1.6.1 นำเสนอขั้นตอนการคำนวณที่มีประสิทธิภาพสำหรับการหาผลเฉลยโดยการประมาณของตัวแบบอุทกพลศาสตร์
- 1.6.2 นำเสนอขั้นตอนการคำนวณที่มีประสิทธิภาพสำหรับการหาผลเฉลยโดยการประมาณของตัวแบบสมการการแพร่-การพาใน 1 มิติ
- 1.6.3 นำเสนอขั้นตอนการประเมินคุณภาพน้ำโดยใช้วิธีซัดแข็งสองระดับ

## 1.7 ขั้นตอนการดำเนินงานวิจัย

- 1.7.1 ทบทวนความรู้พื้นฐานและบทความงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
- 1.7.2 ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมการการแพร่การพา
- 1.7.3 พัฒนาวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลข
- 1.7.4 พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์(MatLab) เพื่อการคำนวณหาผลเฉลยให้มีความละเอียดสูง
- 1.7.5 เปรียบเทียบขั้นตอนวิธีเชิงคณิตศาสตร์เชิงตัวเลข
- 1.7.6 ตรวจสอบผลเฉลยที่คำนวณได้
- 1.7.7 สรุปผลและเขียนวิทยานิพนธ์

## บทที่ 2

### ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและทบทวนวรรณกรรม

#### 2.1 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ ส่วนใหญ่มักจะประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ต่างๆ ที่สอดคล้องกัน สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ โดยปกติแล้วจะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย, สมการเชิงอนุพันธ์ใดๆ จะถูกเรียกว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย หากสมการนั้นประกอบด้วยจำนวนตัวแปรต้นตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป เช่น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

โดยในที่นี้  $x$  และ  $y$  คือ ตัวแปรต้น และ  $u = u(x, y)$  คือตัวแปรตาม เมื่อ  $(x, y) \in \mathcal{R}$  สมการ (2.1) นี้ เรียกว่าสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง ซึ่งการจัดอันดับนั้น วัดจากอันดับที่สูงสุดของตัวอนุพันธ์ในสมการนั้น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะถูกเรียกว่าอยู่ในรูปแบบของเชิงเส้น (Linear) หากสมการนั้นประกอบด้วยตัวแปรตาม  $u$  และตัวอนุพันธ์อันดับต่างๆ ซึ่งมีค่าของอันดับที่เป็นจำนวนเต็ม รวมทั้งไม่มีสัมประสิทธิ์ที่ประกอบไปด้วยตัวแปรตาม  $u$  หรือตัวอนุพันธ์ของ  $u$  ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 5u = 4 \quad (2.2)$$

และ

$$(x-4y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = y^2 \quad (2.3)$$

ต่างอยู่ในรูปแบบของเชิงเส้น ในขณะที่

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{0.8} = 0 \quad (2.4)$$

อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้น เพราะพจน์ที่สองนั้นยกกำลัง 0.8 ซึ่งไม่ใช่ 1 และสมการ

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^3 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) = u^3 \quad (2.5)$$

ก็อยู่ในรูปแบบที่ไม่เชิงเส้น เพราะทุกพจน์ในสมการนี้ต่างอยู่ในรูปแบบที่ไม่เชิงเส้น การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นนั้น โดยปกติมีความยุ่งยากซับซ้อนทั้งในขั้นตอนของวิธีเชิงตัวเลขที่จะนำมาประยุกต์ใช้และเวลาของเครื่องของคอมพิวเตอร์ที่จำเป็นต้องใช้ในการคำนวณ

อย่างไรก็ตาม สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อยู่ในรูปแบบไม่เชิงเส้นเหล่านี้ มักเกิดขึ้นกับปัญหา โดยทั่วไป เช่น ปัญหาของการไหลหมุนเวียนของอากาศในอาคารที่ทำงาน การไหลของอากาศผ่าน ลำตัวรถยนต์และเครื่องบิน เป็นต้น การแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเหล่านี้ปกติแล้วจะทำโดย

### 2.1.1 การใช้ระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์ขั้นสูง (Advanced Mathematics)

เพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) แต่โดยปกติแล้วนั้น ปัญหาทั่วไป ผลเฉลยแม่นยำตรงนั้นไม่สามารถหาได้โดยง่าย โดยเฉพาะกับปัญหาในทางปฏิบัติซึ่งเงื่อนไขขอบและ ลักษณะรูปร่างของปัญหานั้น ที่มีความซับซ้อนมาก

### 2.1.2 การใช้วิธีการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณ (Approximate Solution)

ประโยชน์จากการใช้คณิตศาสตร์ขั้นสูงจะก่อให้เกิดผลเฉลยแม่นยำตรงที่ถูกต้องตาม ตำแหน่งใดๆที่ต้องการของปัญหาดังกล่าวประกอบกับประสิทธิภาพของของเครื่องคอมพิวเตอร์ในยุคปัจจุบัน ทำให้วิธีเชิงตัวเลขได้รับความนิยมและใช้กันอย่างแพร่หลาย วิธีเชิงตัวเลขสามารถ แก้ปัญหาที่มีเงื่อนไขขอบเขตและรูปร่างลักษณะซับซ้อนได้เป็นอย่างดี

นอกจากนี้แล้ว วิธีเชิงตัวเลขยังก่อให้เกิดให้ผลลัพธ์ที่มีความผิดพลาด ซึ่งความผิดพลาดนั้น จะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับวิธีการที่เลือกใช้ ประกอบกับความรู้และประสบการณ์ของผู้ที่ใช้นั้น ด้วย

## 2.2 ประเภทของสมการ

เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาต่าง ๆ นั้น มีความหลากหลายและอยู่ใน รูปแบบที่แตกต่างกัน เพื่อเป็นการทำความเข้าใจเกี่ยวกับวิธีเชิงตัวเลข โดยที่จะทำการศึกษาสมการ อนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f = 0 \quad (2.6)$$

โดยที่  $a, b, c$  อาจเป็นค่าคงที่หรือเป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $y$  สามารถหาอนุพันธ์ย่อย ออกเป็นชนิดต่างๆกันได้ดังต่อไปนี้

**2.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เรียกว่า สมการอิลลิปติก (Elliptic Equation) เมื่อ  $b^2 - 4ac < 0$**  ตัวอย่างในกรณีเช่นนี้ ได้แก่ สมการลาปลาซ (Laplace's Equation) ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.7)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่มีรูปแบบเช่นนี้ โดยปกติมักจะอธิบายสถานะอยู่ตัวของปัญหา นั้นๆ เช่นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการนำความร้อนในแผ่น โลหะนั้นอยู่ในแบบสมการอิลลิปติก

**2.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เรียกว่า สมการพาราโบลา (Parabolic Equation)** เมื่อ  $b^2 - 4ac = 0$  ตัวอย่างสมการที่ง่ายต่อการทำความเข้าใจคือ สมการของการถ่ายเทความร้อนในแท่งโลหะยาวที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ดังนี้

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.8)$$

โดย  $k$  แทนสัมประสิทธิ์การนำความร้อนซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของโลหะ  $u$  แทนลักษณะการกระจายของอุณหภูมิซึ่งเป็นตัวแปรตามที่สูงขึ้นอยู่กับตัวแปรต้นอันประกอบด้วยโคออร์ดิเนต  $x$  ตามแนวความยาวของแท่งโลหะและเวลา  $t$  ที่ผ่านไป

**2.2.3. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย เรียกว่า สมการไฮเพอร์โบลา (Hyperbolic Equation)** เมื่อ  $b^2 - 4ac > 0$  ตัวอย่างของสมการในกรณีเช่นนี้ที่ง่ายต่อการเข้าใจ คือ สมการของการสั่นของเส้นลวดซึ่งขึงตึงที่ปลายทั้งสองข้าง รูปแบบของสมการดังกล่าว คือ

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

โดยที่  $k^2$  แทนความตึงในเส้นลวดซึ่งมีค่าบวกเสมอ  $u$  แทนการเคลื่อนตัวของเส้นลวดซึ่งเป็นฟังก์ชันกับตำแหน่งและเวลา  $t$  ในทิศตั้งฉากกับความยาวของลวดที่อยู่ในแนวแกน  $x$

### 2.3 เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการอีลิปติก พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ตามลำดับนั้น ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ เงื่อนไขขอบ (Boundary Condition) หมายถึงเงื่อนไขที่กำหนดให้ที่ขอบเขตของปัญหานั้น โดยทั่วไปแล้วนั้น เงื่อนไขขอบเขตสามารถจำแนกได้เป็น 2 ประเภท คือ

เงื่อนไขแบบดิริชเลต (Dirichlet Condition) เป็นเงื่อนไขของการกำหนดตัวแปรตาม  $u$  ที่ขอบเขต เช่น การกำหนดอุณหภูมิที่ปลายของแท่งโลหะ เป็นต้น

เงื่อนไขแบบนอยมันต์ (Neumann Condition) เป็นเงื่อนไขของการกำหนดค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งของตัวแปรตาม  $u$  ที่ขอบเขตนั้น นั่นคือ กำหนด  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ยกตัวอย่างเช่น หากกำหนด  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  ที่ปลายแท่งโลหะก็หมายความว่า ไม่มีการถ่ายเทความร้อนผ่านปลายแท่งโลหะนั้น หรือหากกำหนดให้  $\frac{\partial u}{\partial x}$  มีค่าเท่ากับค่าใดค่าหนึ่งก็หมายถึง การเกิดปริมาณความร้อนที่มีค่าเท่ากันวิ่งผ่านปลายโลหะ เป็นต้น

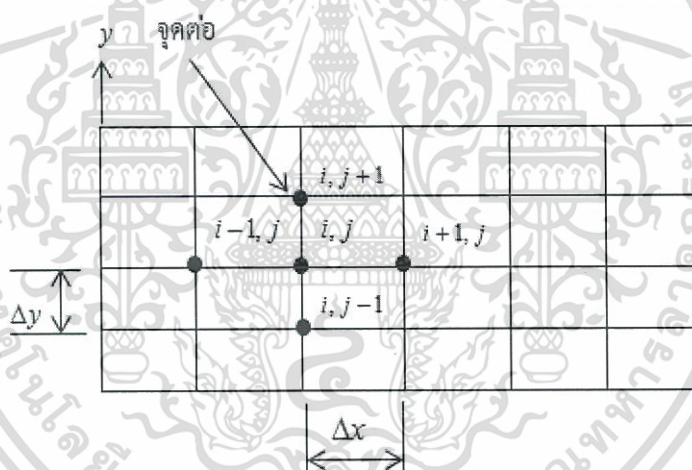
เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial Condition) หมายถึง เงื่อนไขที่กำหนดให้ในตอนเริ่มต้นในการแก้ปัญหา นั้น อาจจะมีเงื่อนไขเริ่มต้นที่เวลา  $t = 0$  อาจจะประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัวเริ่มต้น

$u(x,0) = f(x)$  ที่อาจจะอยู่ในรูปแบบใดๆ และค่าความเร็วเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ นั่นคือ  $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$  เป็นต้น

ทั้งเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นที่เหมาะสมจะใช้ควบคู่ไปกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการอิลลิปติก พาราโบลิก และไฮเพอร์โบลิก ดังที่จะศึกษาขั้นตอนและวิธีการต่างๆต่อไป

## 2.4 วิธีผลต่างจำกัด (Finite Difference Method)

โดยขั้นแรกจะทำการแบ่งโดเมนออกเป็นกริด(Grid) ซึ่งมีขนาดเท่ากับ  $\Delta x$  และ  $\Delta y$  ในทิสโคออร์ดิเนต  $x$  และ  $y$  ตามลำดับ กริดเหล่านี้ประกอบขึ้นกันเป็นตาราง และเชื่อมกันด้วยที่มีจุดต่อในตำแหน่งต่างๆ กัน เช่น จุดต่อ ณ ตำแหน่ง  $i, j$  ดังในรูป 2.1 เป็นการบ่งบอกถึงจุดต่อที่  $i$  ในแนวแกน  $x$  และที่  $j$  ในแนวแกน  $y$  และที่ตำแหน่งนี้เองจะถูกใช้เป็นที่คำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณ



รูป 2.1 การแบ่งแผ่น โดเมนออกเป็นกริดสี่เหลี่ยมเพื่อใช้กับวิธีผลต่างจำกัด(ปราโมทย์ เตชะ

อำไพ : 2553)

การแปลงสมการเชิงอนุพันธ์ ให้อยู่ในรูปของตัวไม่ทราบค่าที่จุดต่อ ซึ่งก็หมายถึง ค่าของผลเฉลยที่จุดต่างๆนี้เอง ค่าอนุพันธ์อันดับสองสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของค่าที่จุดต่อ โดยใช้การประมาณของผลต่างกลาง โดยที่ค่าของอนุพันธ์มีความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (2.11)$$

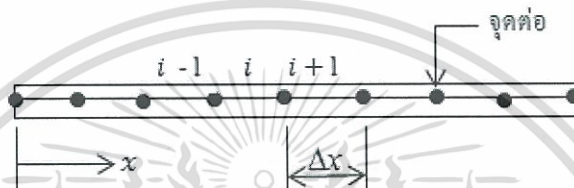
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้น แทนค่าลงในสมการ (2.10) และ (2.11) ลงในสมการลาปลาซ และหากเลือกที่  $\Delta x = \Delta y$  จะได้ว่า

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0 \quad (2.12)$$

## 2.5 วิธีชัดแจ้ง (Explicit Method)

พิจารณา การถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะไม่ยู่ตัว ในชั้นตอนแรก จะการแบ่งแท่งโลหะ ออกเป็นหลายส่วน โดยที่แต่ละส่วนนั้นมีความยาวเท่ากับ  $\Delta x$  และส่วนต่างๆเหล่านี้ ต่างเชื่อมต่อกัน ที่จุดต่อต่างๆซึ่ง แทนสัญลักษณ์  $i-1, i, i+1$  ดังในรูป 2.3 ดังนี้



รูป 2.2 การแบ่งแท่งโลหะเพื่อใช้กับวิธีการผลต่างสืบเนื่อง(ปราโมทย์ เตชะอำไพ : 2553)

ที่จุดต่อต่างๆนี้เอง จะเป็นตำแหน่งที่สามารถใช้ในการคำนวณหาค่าของอุณหภูมิ  $T$  ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา  $t$

ประยุกต์วิธีผลต่างแบบจำกัดเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ โดยการใช้ค่าประมาณของผลต่าง หนึ่ง ให้เข้ากับพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลา ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.24)$$

และสามารถประยุกต์การประมาณของผลต่างกลาง ที่เข้ากับพจน์อนุพันธ์อันดับสองที่แปรผันกับระยะ  $x$  ดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (2.25)$$

และแทนสมการ(2.24)- (2.25) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

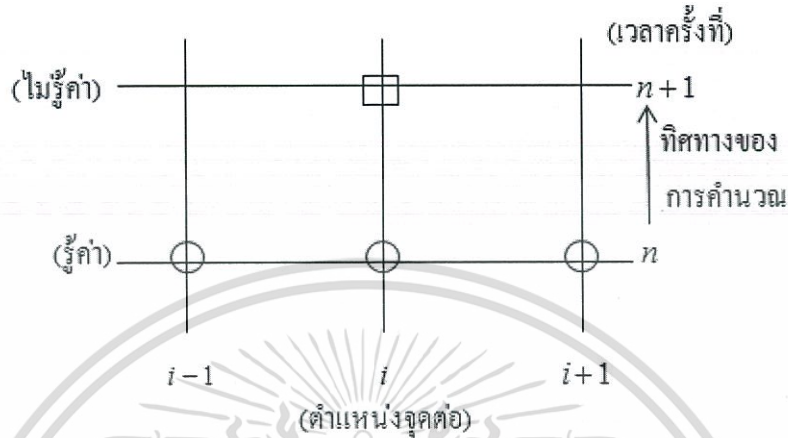
$$\frac{k}{\rho c} \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.26)$$

นั่นคือ

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \alpha(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (2.27)$$

เมื่อ  $\alpha = \frac{k\Delta t}{\rho c(\Delta x)^2}$

สมการ (2.27) ที่เกิดขึ้นนี้ แสดงให้เห็นว่า อุณหภูมิที่มีจุดต่อ  $i$  ณ เวลาครั้งที่  $n+1$  สามารถคำนวณได้โดยตรงจากอุณหภูมิของ 3 จุดต่อที่  $i-1, i$  และ  $i+1$  ซึ่งทราบค่ามาแล้วจากการคำนวณ ณ เวลาครั้งที่  $n$  ดังแสดงในรูปที่ 2.4 ดังนี้



รูป 2.3 แผนภาพการคำนวณโดยวิธีแบบชัดเจน (ปราโมทย์ เตชะอำไพ : 2553)

เนื่องจากค่าของอุณหภูมิที่เวลาใหม่ครั้งที่  $n+1$  สามารถคำนวณได้โดยตรงจากสมการ (2.29) โดยใช้ค่าของอุณหภูมิที่เวลาเก่าครั้งที่  $n$  วิธีการนี้ เรียกว่า เป็นวิธีแบบชัดเจน วิธีที่ว่านี้มีเงื่อนไขว่า ค่า  $\alpha$  จะต้องน้อยกว่า หรือเท่ากับ  $\frac{1}{2}$  ซึ่งจากสมการ จะได้ว่า

$$\Delta t \leq \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2k} \quad (2.28)$$

## 2.6 วิธีการปริยาย (Implicit Method)

ข้อแตกต่างระหว่างวิธีปริยายและวิธีชัดเจน คือ อยู่ที่การประมาณค่าอนุพันธ์ดังกล่าวที่ตำแหน่งของเวลาครั้งที่  $n$  ซึ่งทราบค่าของอุณหภูมิแล้วดังสมการ แต่ในวิธีแบบปริยายนั้น การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองนี้ที่ตำแหน่งของเวลาครั้งที่  $n+1$  ซึ่งเป็นตำแหน่งที่ไม่ทราบค่าของอุณหภูมิใดๆเลย ในรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.29)$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อแทนสมการ (2.29) นี้ และสมการ (2.23) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ จะได้ว่า

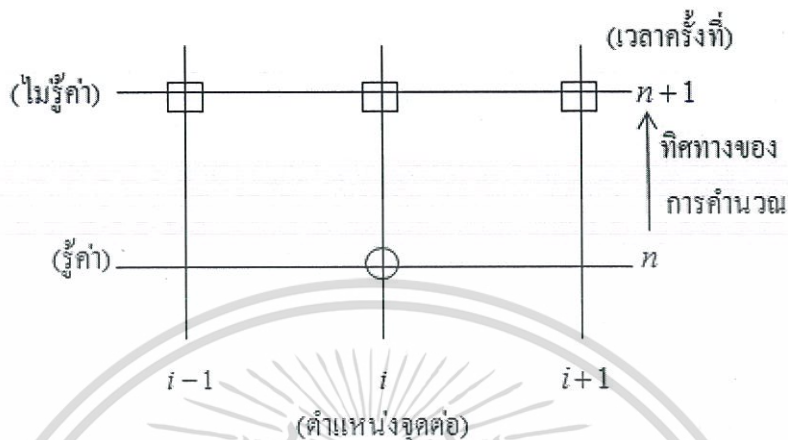
$$\frac{k}{\rho c} \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.30)$$

และเมื่อ  $\alpha = \frac{k\Delta t}{\rho c (\Delta x)^2}$  จะได้ว่า

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha)T_i^{n+1} - \alpha T_{i+1}^{n+1} = T_i^n \quad (2.31)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่เกิดขึ้นนี้ ประกอบด้วยอุณหภูมิซึ่งไม่ทราบค่าที่จุดต่อ  $i-1, i$  และ  $i+1$  ณ เวลาครั้งที่  $n+1$  ทางด้านซ้ายของสมการ โดยที่ทางขวามือของสมการเป็นอุณหภูมิที่ทราบค่าแล้วจากนั้นทำการคำนวณ ณ เวลาที่  $n$  สมการ นี้สามารถแสดงดังรูป 2.5 ดังนี้



รูป 2.4 แผนภาพการคำนวณโดยวิธีแบบปริยาย(ปราโมทย์ เตชะอำไพ : 2553)

หากประยุกต์สมการ เข้ากับทุกๆจุดต่อภายในแท่ง โลหะที่ต้องการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ จะก่อให้เกิดระบบสมการแบบสามแถวทแยง การแก้ระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าวจะใช้เวลามากกว่าการแก้สมการเดียวที่เกิดขึ้นจากวิธีชัดเจน

ดังนั้น จึงเห็นได้ว่า แต่ละวิธีมีทั้งข้อดีและข้อเสียแตกต่างกัน กล่าวคือ ในวิธีชัดเจนนั้น สามารถแก้สมการเดี่ยวๆแต่จำเป็นต้องใช้ค่าช่วงเวลาที่สั้น ซึ่งอาจเป็นสาเหตุที่ทำให้เวลาที่ใช้ในการคำนวณเพิ่มขึ้นตาม ในขณะที่วิธีปริยายนั้น สามารถหลีกเลี่ยงข้อจำกัดในการใช้ค่าของช่วงเวลา

## 2.7 วิธีของแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method)

วิธีของแครงก์-นิโคลสัน เป็นวิธีการปริยายอีกวิธีหนึ่งซึ่งให้ค่าความผิดพลาดอันดับสองทั้งกับเวลาและระยะทาง กล่าวคือ สามารถให้ผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากกว่าวิธีแบบปริยายดังที่ได้อธิบายมาก่อนหน้านี้แล้ว

หลักการของวิธีของแครงก์-นิโคลสัน คือการประมาณพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลาที่กึ่งกลางระหว่างช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $n$  และ  $n+1$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.32)$$

และทำเช่นเดียวกันกับพจน์อนุพันธ์อันดับสองที่แปรผันกับระยะทาง ดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \quad (2.33)$$

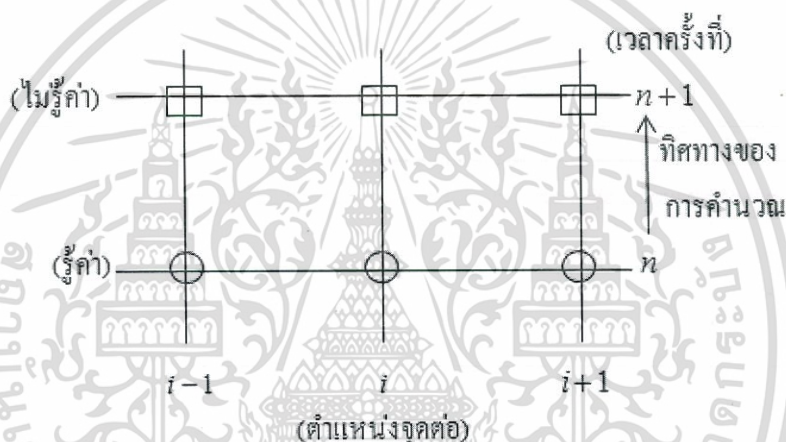
แทนสมการ(2.32) และ(2.33) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (2.23) จะได้ว่า

$$\frac{k}{2\rho c(\Delta x)^2} (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (2.34)$$

แทนค่า  $\alpha = \frac{k\Delta t}{\rho c(\Delta x)^2}$  และทำการจัดเรียงพจน์ใหม่ จะได้ว่า

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1} + 2(1+\alpha)T_i^{n+1} - \alpha T_{i+1}^{n+1} = \alpha T_{i-1}^n + 2(1-\alpha)T_i^n + \alpha T_{i+1}^n \quad (2.35)$$

สมการ ที่เกิดขึ้นนี้ ประกอบด้วยอุณหภูมิที่ไม่ทราบค่าที่จุดต่อ  $i-1, i$  และ  $i+1$  ณ เวลาครั้งที่  $n+1$  ทางด้านซ้ายมือของสมการ โดยที่ทางด้านขวามือของสมการประกอบด้วยอุณหภูมิที่จุดต่อทั้งสามนี้เช่นกัน ซึ่งทราบค่ามาแล้วจากการคำนวณครั้งที่  $n$  สมการดังกล่าว สามารถแสดงได้ดังรูป 2.6 ต่อไปนี้



รูป 2.5 แผนภาพการคำนวณ โดยวิธีของเครงก์-นิโคลสัน(ปราโมทย์ เตชะอำไพ : 2553)

## 2.8 ทบทวนวรรณกรรม

(Dehghan Mehdi :2004) ได้ทำการศึกษา วิถีผลต่างสี่เหลี่ยมเนื่องวิธีซัดเจ้งสองระดับซึ่งใช้ความเร็วของการพาเป็นค่าคงตัวได้แก่ วิถีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางใน ปริภูมิ วิธีอัฟวินด์และวิธีแลกซ์-เวนดรอพซึ่งวิธีทั้ง 3 วิธีนั้น เป็นวิธีซัดเจ้งมีจุดเด่นคือมีความรวดเร็วในการคำนวณ ในการหาผลเฉลยของสมการการแพร่-การพาในหนึ่ง มิติ

งานวิทยานิพนธ์นี้ ทางผู้วิจัยได้ทำการพัฒนาตัวแบบการกระจายจากงานวิจัย(Nopparat Pochai: 2009) โดยปัจจัยที่มีผลหน่วงการพา (Damp Force) ในตัวแบบ โดยที่ตัวแบบการกระจายถูกกำหนด ดังนี้

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.35)$$

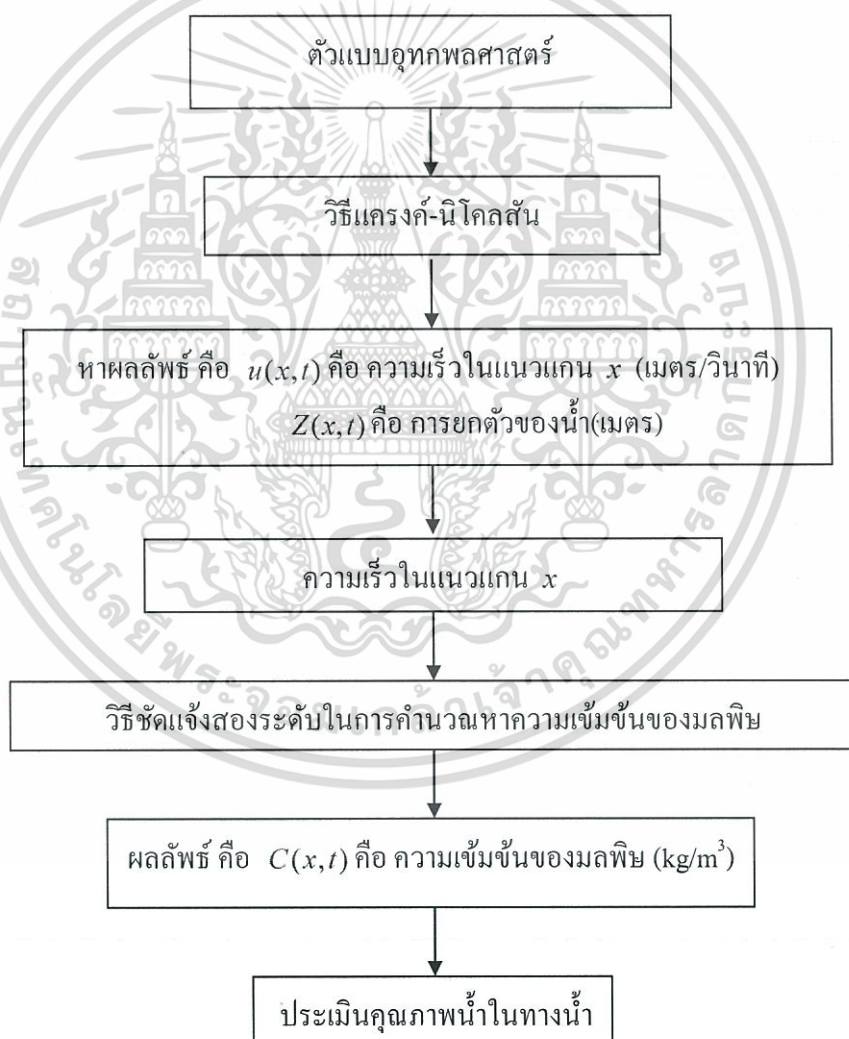
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น คือ  $C(x,0) = C_0$  เมื่อ  $t = 0$  และ  $C_0$  คือค่าความเข้มข้นของมลพิษที่จุดปล่อย( $\text{kg}/\text{m}^3$ ) และกำหนดเงื่อนไขขอบ เมื่อ

$$C(0,t) = C_0 \text{ เมื่อ } x = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \text{ เมื่อ } x = 1 \quad (2.37)$$

กล่าวคือ  $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$  เนื่องจากอยู่ภายใต้สมมติฐานคือค่าความเข้มข้นของมลพิษ ณ จุดปลายโดเมน ไม่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงโดยขั้นตอนแรกใช้ตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในการอธิบายความเร็วและระดับความสูงของน้ำเพื่อนำมาเป็นข้อมูลเข้าของตัวแบบที่สองคือตัวแบบการกระจายเพื่อการประมาณค่าความเข้มข้นมลพิษในทางน้ำ โดยมีขั้นตอนดังรูปที่ 2.6 ดังนี้



รูปที่ 2.6 กระบวนการหาความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

## ตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในทางน้ำไม่เอกรูป

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อตรวจวัดคุณภาพของน้ำจากแหล่งน้ำ โดยใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คู่ควบสำหรับการตรวจวัดคุณภาพของน้ำในทางน้ำเอกรูปบนสภาวะไม่คงที่ (Unsteady State) โดยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คู่ควบ คือ การผนวกตัวแบบสองตัวแบบได้แก่ ตัวแบบอุทกพลศาสตร์ (Hydrodynamic Model) และคุณภาพน้ำซึ่งเป็นตัวแบบการแพร่-การพาปฏิกริยาใน 1 มิติ (One-Dimensional Advection Diffusion Equation : 1DADE) โดยที่คุณภาพน้ำนั้นจะขึ้นอยู่กับความเร็วของการไหลของน้ำและความเข้มข้นของปริมาณของเสียที่ปล่อยมาพร้อมกับน้ำทิ้ง ในขั้นตอนแรกนั้น จะใช้แบบตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในการอธิบายถึงความเร็วและระดับความสูงของน้ำโดยใช้ความเร็วของน้ำเพื่อเป็นข้อมูลเข้าของตัวแบบการกระจายเพื่อที่จะใช้ในการประมาณถึงค่าความเข้มข้นของปริมาณมลพิษที่มีมากับน้ำเสีย

### 3.1 ตัวแบบอุทกพลศาสตร์

อธิบายการไหลของน้ำในลำน้ำเอกรูปซึ่งในงานวิจัยนี้อยู่ภายใต้สมมติฐาน ได้แก่ ลำน้ำที่ไม่มีแรงเฉือนของน้ำ ความเร็วลมต่ำระดับความลึกเท่ากันเสมอ ไม่มีพารามิเตอร์โครีโอริส (Coriolis) และแรงเค้นเฉือนใต้ท้องน้ำ (Shearing Stress) โดยอธิบายกระแสน้ำและการยกตัวของน้ำโดยใช้สมการน้ำตื้น (Shallow Water Equation : 1DSWE) ใน 1 มิติ ดังนี้

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta)u] = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

สำหรับทุก  $x \in [0, l]$  โดยมีความหมายทางกายภาพดังรูปที่ 3.1

เมื่อ  $h(x)$  คือ ฟังก์ชันภูมิลักษณะท้องน้ำ (Bottom Topography Function) (เมตร)

$\zeta(x, t)$  คือ การยกตัวของน้ำ (เมตร/วินาที)

$x$  คือ การกระจัด (เมตร)

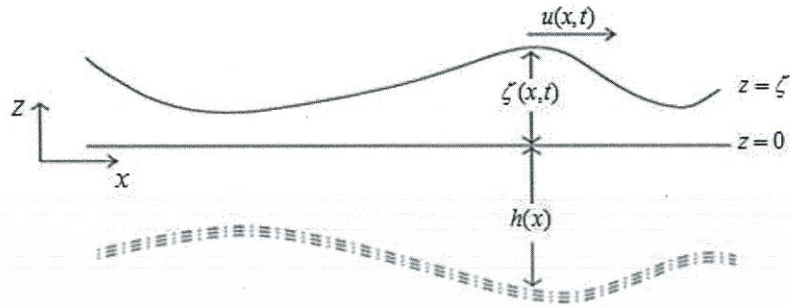
$t$  คือ เวลา (วินาที)

$u(x, t)$  คือ ความเร็วในแนวแกน  $x$  (เมตร/วินาที)

$g$  คือ ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก (เมตร/วินาที<sup>2</sup>)

$l$  คือ ความยาวของลำน้ำ (เมตร)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.1 การยกตัวของน้ำ (Nopparat Pochai: 2009)

สมมติให้การยกตัวของน้ำมีค่าน้อยกว่าระดับความลึกของน้ำมากๆ เมื่อเปรียบเทียบกัน กล่าวคือ  $\zeta \ll h$  และกำหนดให้ฟังก์ชันภูมิลักษณะท้องน้ำเป็นฟังก์ชันคงตัว (Constant Function) กล่าวคือ  $h(x) = h_0$  เมื่อ  $h_0$  เป็นความลึกเฉลี่ย (Average Depth) ดังนั้น

$$\zeta(x, t) + h(x) \approx h(x) = h_0 \quad (3.3)$$

จะได้ สมการน้ำตื้นสำหรับตัวแบบคือ

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (3.5)$$

### 3.2 รูปแบบไร้มิติของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ (Non-dimensional Form of Hydrodynamic Model)

เพื่อความสะดวกในการคำนวณด้วยวิธีผลต่างจำกัด จำเป็นต้องแปลง(3.4) - (3.5)ให้อยู่ในรูปไร้มิติ(Nopparat Pochai: 2009)โดยกำหนดดังต่อไปนี้

$$U = \frac{u}{\sqrt{gh_0}}, \quad (3.6)$$

$$X = \frac{x}{l}, \quad (3.7)$$

$$Z = \frac{\zeta}{h_0}, \quad (3.8)$$

$$T = \left(\frac{\sqrt{gh_0}}{l}\right) \cdot t. \quad (3.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อแทน(3.6)-(3.9)ลงใน(3.4)จะได้

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{l} \left( \frac{\partial Z}{\partial T} \right) + \frac{h_0 \sqrt{gh_0}}{l} \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right) = 0, \quad (3.11)$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (3.12)$$

ในทำนองเดียวกันเมื่อแทน(3.6)- (3.9)และ(3.5)จะได้

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (3.13)$$

ดังนั้น

$$\left( \frac{\sqrt{gh_0}}{l} \right) \frac{\partial U}{\partial T} + \left( \frac{gh_0}{l} \right) \frac{\partial Z}{\partial X} = 0, \quad (3.14)$$

$$\left( \frac{gh_0}{l} \right) \frac{\partial U}{\partial T} + \left( \frac{gh_0}{l} \right) \frac{\partial Z}{\partial X} = 0, \quad (3.15)$$

จะได้

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial Z}{\partial X} = 0. \quad (3.16)$$

ดังนั้นระบบสมการของตัวแบบคือ

$$\frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial Z}{\partial X} = 0. \quad (3.18)$$

หมายเหตุ ตัวแปรที่เป็นตัวอักษรพิมพ์ใหญ่ได้แก่  $Z, U, T$  และ  $X$  ใช้แทนตัวแปรที่อยู่ในรูปไร้มิติ สมมติ มีแรงหน่วง (Damp Force) กระทำที่ด้านข้างของทางน้ำกำหนดโดย  $-U$

ดังนั้น (3.17)-(3.18) กำหนดได้เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial Z}{\partial X} = -U, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0. \quad (3.20)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$U(X,0) = 0 \quad (3.21)$$

และ

$$Z(X,0) = 0 \quad (3.22)$$

และเงื่อนไขขอบคือ

$$Z(0,T) = f(T) \quad (3.23)$$

เมื่อ  $f(T)$  เป็นฟังก์ชันของต้นกำเนิดคลื่น (Wave Maker Function) เมื่อ  $x = 0$

ในวิทยานิพนธ์นี้เลือก

$$f(T) = \sin T \quad (3.24)$$

และไม่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงการยกตัวของน้ำที่ปลายสุดของทางน้ำ กล่าวคือ

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = 0 \quad \text{เมื่อ } x = 1 \quad (3.25)$$

หมายเหตุ ในกรณีนำตัวแบบไปประยุกต์ใช้คำนวณจริงสามารถเลือกฟังก์ชันกำเนิดคลื่น  $f(T)$  เป็นฟังก์ชันอื่นได้

### 3.3 ตัวแบบการแพร่-การพาใน 1 มิติ (One-Dimensional Advection Diffusion Equation : 1DADE)

พิจารณาสมการการแพร่-การพาใน 1 มิติ อธิบายความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำเอกรูป

โดยใช้ตัวแบบดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.26)$$

สำหรับทุก  $x \in [0, l]$  เมื่อ  $C(x, t)$  คือ ความเข้มข้นของมลพิษทางน้ำ (กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร)

$D$  คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ (ตารางเมตร/วินาที),  $u(x, t)$  คือ ความเร็วของน้ำ (เมตร/วินาที)

โดยเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$C(x,0) = g(x) \quad (3.27)$$

เมื่อ  $g(x)$  เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ ที่เวลา  $t = 0$  สำหรับทุกๆ  $0 \leq x \leq 1$

และเงื่อนไขขอบคือ

$$C(0,t) = C_0 \quad \text{เมื่อ } x = 0 \quad (3.28)$$

และ

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{เมื่อ } x = 1 \quad (3.29)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $C_0$  คือ ค่าความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ จุดที่ปล่อย (กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร) ที่ตำแหน่ง  $x=0$  หมายเหตุ ในกรณีนำตัวแบบไปประยุกต์ใช้คำนวณจริงสามารถเลือกฟังก์ชันความเข้มข้นมลพิษในน้ำเริ่มต้น  $g(x)$  เป็นฟังก์ชันที่เหมาะสมกับสภาพจริงได้

### 3.4 ขั้นตอนการแบ่งกริดโดเมน

กำหนดให้

$$M\Delta x = 1 \text{ และ } x = i\Delta x \text{ สำหรับทุก } 0 \leq i \leq M \quad (3.30)$$

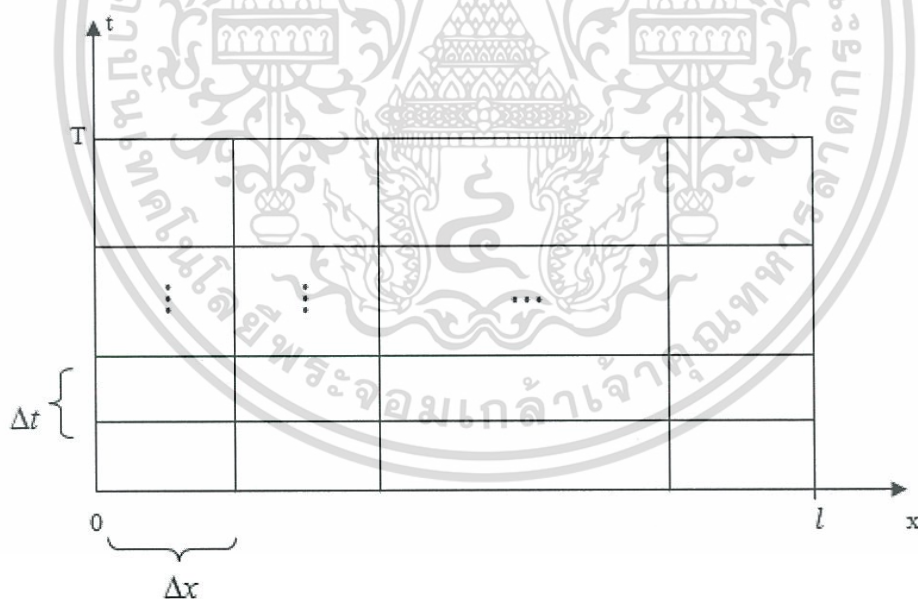
$$N\Delta t = \tau \text{ และ } t = n\Delta t \text{ สำหรับทุก } 0 \leq n \leq N \quad (3.31)$$

$$Z_i^n = Z(x, t) \text{ เมื่อ } x = i\Delta x \text{ และ } t = n\Delta t \text{ สำหรับทุก } 0 \leq i \leq M \text{ และ } 0 \leq n \leq N \quad (3.32)$$

$$V_i^n = V(x, t) \text{ เมื่อ } x = i\Delta x \text{ และ } t = n\Delta t \text{ สำหรับทุก } 0 \leq i \leq M \text{ และ } 0 \leq n \leq N \quad (3.33)$$

$$W_i^n = \begin{pmatrix} V_i^n \\ Z_i^n \end{pmatrix} \text{ เมื่อ } x = i\Delta x \text{ และ } t = n\Delta t \text{ สำหรับทุก } 0 \leq i \leq M \text{ และ } 0 \leq n \leq N \quad (3.34)$$

ดังรูป 3.2



รูปที่ 3.2 การแบ่งกริดโดเมน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.5 วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์

ขั้นตอนแปลงรูปเมทริกซ์วิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์  
 ในขั้นตอนแรก จะต้องจัด (3.19)-(3.20) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ ให้  $V = e^T U$  จะได้ว่า

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left( e^T \cdot \frac{\partial U}{\partial T} \right) + (U \cdot e^T) \quad (3.35)$$

ดังนั้น

$$\left( e^T \cdot \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial V}{\partial T} - (U \cdot e^T) \quad (3.36)$$

นำ  $e^T$  หารตลอดทั้ง(3.36) จะได้ว่า

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \left( e^{-T} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \right) - U \quad (3.37)$$

ดังนั้น แทนค่า(3.37) ลงใน (3.19) จะได้ว่า

$$\left( e^{-T} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \right) - U + \frac{\partial Z}{\partial X} = -U \quad (3.38)$$

$$e^{-T} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial Z}{\partial X} = 0 \quad (3.39)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial V}{\partial T} + e^T \cdot \frac{\partial Z}{\partial X} = 0 \quad (3.40)$$

เนื่องจาก  $V = e^T U$  จะได้ว่า

$$\frac{\partial V}{\partial X} = e^T \cdot \frac{\partial U}{\partial X} \quad (3.41)$$

ในทำนองเดียวกัน แทน (3.41) ลงใน (3.20) จะได้ว่า

$$\frac{\partial Z}{\partial T} + e^{-T} \cdot \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (3.42)$$

ดังนั้น โดย (3.37) และ (3.40) สามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{Bmatrix} V \\ Z \end{Bmatrix}_T + \begin{bmatrix} 0 & e^T \\ e^{-T} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ Z \end{Bmatrix}_X = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

นั่นคือ

$$W_T + AW_X = \bar{0} \quad (3.44)$$

โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 0 & e^T \\ e^{-T} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

และ

$$W = \begin{Bmatrix} V \\ Z \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$\begin{Bmatrix} V \\ Z \end{Bmatrix}_T = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial T} \\ \frac{\partial Z}{\partial T} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

และ

$$\begin{Bmatrix} V \\ Z \end{Bmatrix}_X = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial X} \\ \frac{\partial Z}{\partial X} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้

$$Z = V = 0 \text{ เมื่อ } T = 0 \quad (3.49)$$

จากเงื่อนไขขอบซ้าย  $X = 0$  และ  $T > 0$

สมมติ ฟังก์ชันกำเนิดคลื่น คือ  $Z(0, t) = f(T) = \sin T$  และ  $\frac{\partial V}{\partial X} = -e^T \cos T$  เมื่อ  $X = 0$

เงื่อนไขขอบขวาเมื่อ  $X = 1$  และ  $T > 0$  จะได้  $\frac{\partial Z}{\partial X} = 0$  และ  $V(0, t) = 0$

กำหนดให้

$$M\Delta x = 1 \text{ และ } x = i\Delta x \text{ สำหรับทุก } 0 \leq i \leq M \quad (3.50)$$

และ  $N\Delta t = T$  และ  $t = n\Delta t$  สำหรับทุก  $0 \leq n \leq N$  (3.51)

พิจารณาวิธีเครงก์-นิโคลสัน(A.R. Mitchell:1969)สมการผลต่างจำกัดของ (3.35)-(3.48)จะได้ว่า

$$\frac{\partial W}{\partial T} + A \frac{\partial W}{\partial X} = 0, \quad (3.52)$$

เมื่อ 
$$\frac{\partial W}{\partial T} \cong \frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t}, \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} \cong \frac{(W_{i-1}^n - W_{i+1}^n)}{4\Delta x} + \frac{(W_{i-1}^{n+1} - W_{i+1}^{n+1})}{4\Delta x}, \quad (3.54)$$

แทน (3.53)และ(3.54)ใน(3.52)จะได้

$$\frac{W_i^{n+1} - W_i^n}{\Delta t} + A \left[ \frac{(W_{i-1}^n - W_{i+1}^n)}{4\Delta x} + \frac{(W_{i-1}^{n+1} - W_{i+1}^{n+1})}{4\Delta x} \right] = 0, \quad (3.55)$$

$$W_i^{n+1} - W_i^n + \frac{1}{4} A \frac{\Delta t}{\Delta x} [W_{i-1}^n - W_{i+1}^n + W_{i-1}^{n+1} - W_{i+1}^{n+1}] = 0, \quad (3.56)$$

$$W_i^{n+1} - W_i^n + \frac{1}{4} A\lambda W_{i-1}^n - \frac{1}{4} A\lambda W_{i+1}^n + \frac{1}{4} A\lambda W_{i-1}^{n+1} - \frac{1}{4} A\lambda W_{i+1}^{n+1} = 0, \quad (3.57)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{1}{4}A\lambda W_{i-1}^{n+1} + W_i^{n+1} - \frac{1}{4}A\lambda W_{i+1}^{n+1} = -\frac{1}{4}A\lambda W_{i-1}^n + W_i^n + \frac{1}{4}A\lambda W_{i+1}^n, \quad (3.58)$$

$$\left[ I - \frac{1}{4}\lambda A(\Delta_x + \nabla_x) \right] W_i^{n+1} = \left[ I + \frac{1}{4}\lambda A(\Delta_x + \nabla_x) \right] W_i^n \quad (3.59)$$

เมื่อ

$$W_i^n = \begin{Bmatrix} V_i^n \\ Z_i^n \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

ผลต่างจากหน้า (Forward Difference) คือ

$$\Delta_x W_i^n = W_{i+1}^n - W_i^n \quad (3.61)$$

และผลต่างจากหลัง (Backward Difference) คือ

$$\nabla_x W_i^n = W_i^n - W_{i-1}^n \quad (3.62)$$

จะได้ว่า

$$W_i^{n+1} - \left( \frac{1}{4}\lambda A(\Delta_x + \nabla_x) \right) W_i^{n+1} = W_i^n + \left( \frac{1}{4}\lambda A(\Delta_x + \nabla_x) \right) W_i^n \quad (3.63)$$

$$W_i^{n+1} - \frac{1}{4}\lambda A\Delta_x W_i^{n+1} - \frac{1}{4}\lambda A\nabla_x W_i^{n+1} = W_i^n + \frac{1}{4}\lambda A\Delta_x W_i^n + \frac{1}{4}\lambda A\nabla_x W_i^n \quad (3.64)$$

$$\frac{1}{4}\lambda A W_{i-1}^{n+1} + W_i^{n+1} + \left( -\frac{1}{4}\lambda A \right) W_{i+1}^{n+1} = \left( -\frac{1}{4}\lambda A \right) W_{i-1}^n + W_i^n + \frac{1}{4}\lambda A W_{i+1}^n \quad (3.65)$$

และจากสมการ (3.58) เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้น

$$Z = V = 0 \quad (3.66)$$

เงื่อนไขขอบซ้าย เมื่อ  $x = 0$  และ  $T > 0$

$$Z_0^T = Z(0, T) = \sin T \quad (3.67)$$

และ

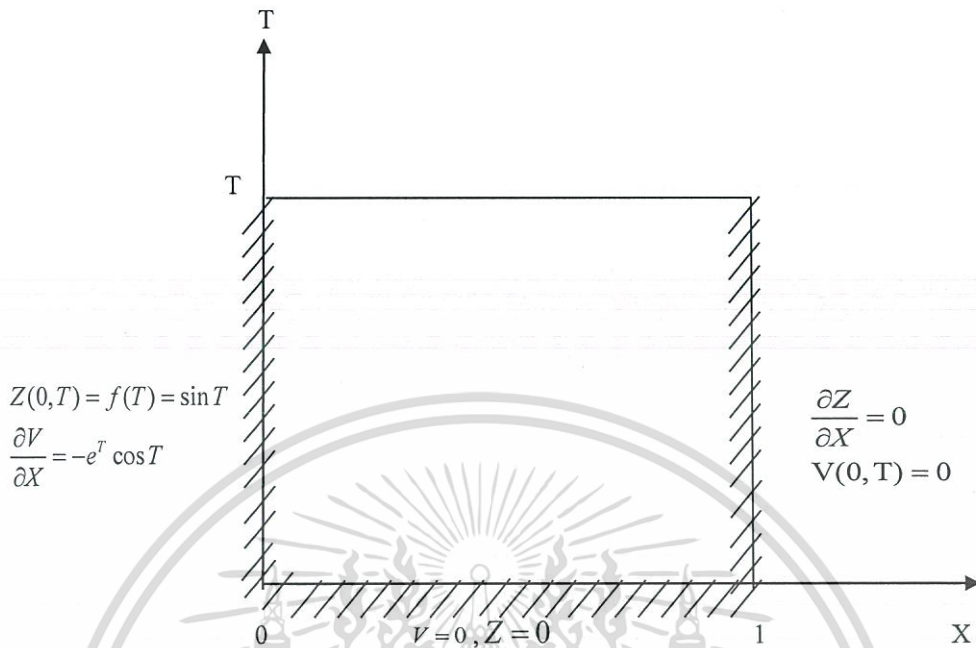
$$\frac{\partial V}{\partial X} = e^{-T} \cos T \quad (3.68)$$

ดังนั้น

$$V_0^T = V_1^T + (e^{-T} \cos T)(\Delta x) \quad (3.69)$$

สามารถอธิบายของเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ (3.66)-(3.68) ได้ดังรูปที่ 3.2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.3 เงื่อนไขเริ่มต้น และเงื่อนไขขอบของปัญหาในรูปสี่เหลี่ยม

จะสามารถจัดสมการผลต่างจำกัดในรูปเมทริกซ์ใหม่ดังนี้

$$G^{n+1} \tilde{W}^{n+1} = E^n \tilde{W}^n + F^n, \quad (3.70)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อกำหนด

$$G^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} & 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} \\ \frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

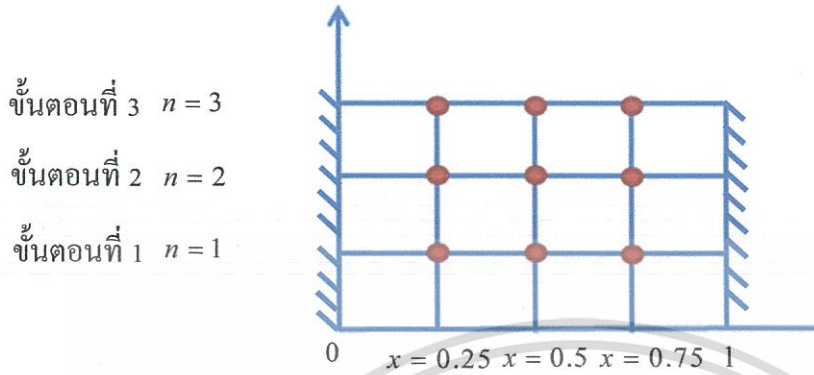
$$E^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^n & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^n & 1 & \frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^n & 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{4}a_1^n \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^n & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^n \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F^n = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} \sin(T_{n+1}) - \frac{\lambda}{4}a_1^n \sin(T_n) \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} \Delta x e^{T_{n+1}} \cos(T_{n+1}) - \frac{\lambda}{4}a_2^n \Delta x e^{T_n} \cos(T_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{W}^{n+1} = \begin{Bmatrix} W_1^{n+1} \\ W_2^{n+1} \\ \vdots \\ W_{M-1}^{n+1} \end{Bmatrix}.$$

โดยที่  $a_1^n = e^{t_n}$ ,  $a_2^n = e^{-t_n}$ ,  $t_n = n\Delta t$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  และ  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6 ตัวอย่างการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแบบอุทกพลศาสตร์เพื่อหาค่าประมาณของฟังก์ชันความเร็วและฟังก์ชันการยกตัวของน้ำ  
จะแบ่งกริดของโดเมนดังรูปที่ 3.4 ดังนี้



รูปที่ 3.4 ขั้นตอนการแบ่งกริดโดเมนเพื่อหาผลเฉลย

เลือก  $\Delta x = 0.25$  และ  $\Delta t = 0.1$  จะได้  $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$

โดยสมการผลต่าง โดยวิธีเครงค์-นิโคลสัน (3.58) สามารถสร้างระบบสมการเชิงเส้นในรูปเมทริกซ์ดังนี้

ชั้นตอนที่ 1 เมื่อ  $n=0$ , สำหรับ  $i=1,2,3$ , โดยที่  $t=0.1$ , ดังนั้น  $a_1^n = e^{0.1}$  และ  $a_2^n = e^{-0.1}$

$$G^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.1e^{0.1} & 0 & 0 \\ 0.1e^{-0.1} & 1 & -0.1e^{-0.1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1e^{0.1} & 1 & 0 & 0 & -0.1e^{-0.1} \\ 0.1e^{-0.1} & 0 & 0 & 1 & -0.1e^{-0.1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1e^{0.1} & 1 & -0.1e^{-0.1} \\ 0 & 0 & 0.1e^{-0.1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{W}^{n+1} = \begin{Bmatrix} V_1^1 \\ Z_1^1 \\ V_2^1 \\ Z_2^1 \\ V_3^1 \\ Z_3^1 \end{Bmatrix}$$

$$E^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1e^{0.1} & 0 & 0 \\ -0.1e^0 & 1 & 0.1e^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1e^0 & 1 & 0 & 0 & 0.1e^0 \\ -0.1e^0 & 0 & 0 & 1 & 0.1e^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1e^0 & 1 & 0.1e^0 \\ 0 & 0 & -0.1e^0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{W}^n = \begin{Bmatrix} V_1^0 \\ Z_1^0 \\ V_2^0 \\ Z_2^0 \\ V_3^0 \\ Z_3^0 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$F^n = \begin{Bmatrix} -0.1e^{0.1} \sin(0.1) - 0.1e^0 \sin(0) \\ -0.1e^{-0.1}(0.25)e^{0.1} \cos(0.1) - 0.1e^0(0.25)e^0 \cos(0) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

จะได้

$$\begin{Bmatrix} V_1^1 \\ Z_1^1 \\ V_2^1 \\ Z_2^1 \\ V_3^1 \\ Z_3^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0109 \\ -0.0480 \\ 0.0053 \\ 0.0010 \\ -0.0002 \\ -0.0005 \end{Bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 2 เมื่อ  $n=1$ , สำหรับ  $i=1,2,3$ , โดยที่  $t=0.1$ , ดังนั้น  $a_1^n = e^{0.2}$  และ  $a_2^n = e^{-0.2}$

$$G^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.1e^{0.2} & 0 & 0 \\ 0.1e^{-0.2} & 1 & -0.1e^{-0.2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1e^{0.2} & 1 & 0 & 0 & -0.1e^{-0.2} \\ 0.1e^{-0.2} & 0 & 0 & 1 & -0.1e^{-0.2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1e^{0.2} & 1 & -0.1e^{-0.2} \\ 0 & 0 & 0.1e^{-0.2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{W}^{n+1} = \begin{Bmatrix} V_1^2 \\ Z_1^2 \\ V_2^2 \\ Z_2^2 \\ V_3^2 \\ Z_3^2 \end{Bmatrix}$$

$$E^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1e^{0.1} & 0 & 0 \\ -0.1e^{-0.1} & 1 & 0.1e^{-0.1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1e^{0.1} & 1 & 0 & 0 & 0.1e^{0.1} \\ -0.1e^{-0.1} & 0 & 0 & 1 & 0.1e^{-0.1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1e^{0.1} & 1 & 0.1e^{0.1} \\ 0 & 0 & -0.1e^{-0.1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{W}^n = \begin{Bmatrix} V_1^1 \\ Z_1^1 \\ V_2^1 \\ Z_2^1 \\ V_3^1 \\ Z_3^1 \end{Bmatrix}$$

$$F^n = \begin{Bmatrix} -0.1e^{0.2} \sin(0.2) - 0.1e^{0.1} \sin(0.1) \\ -0.1e^{-0.2}(0.25)e^{0.2} \cos(0.2) - 0.1e^{-0.1}(0.25)e^{0.1} \cos(0.1) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$\begin{Bmatrix} V_1^2 \\ Z_1^2 \\ V_2^2 \\ Z_2^2 \\ V_3^2 \\ Z_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0454 \\ -0.0903 \\ 0.0212 \\ 0.0056 \\ -0.0014 \\ -0.0027 \end{Bmatrix}$$

ขั้นตอนที่ 3 เมื่อ  $n=2$ , สำหรับ  $i=1,2,3$ , โดยที่  $t=0.1$ , ดังนั้น  $a_1^n = e^{0.3}$  และ  $a_2^n = e^{-0.3}$

$$G^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -0.1e^{0.3} & 0 & 0 \\ 0.1e^{-0.3} & 1 & -0.1e^{-0.3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1e^{0.3} & 1 & 0 & 0 & -0.1e^{-0.3} \\ 0.1e^{-0.3} & 0 & 0 & 1 & -0.1e^{-0.3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1e^{0.3} & 1 & -0.1e^{-0.3} \\ 0 & 0 & 0.1e^{-0.3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{W}^{n+1} = \begin{Bmatrix} V_1^3 \\ Z_1^3 \\ V_2^3 \\ Z_2^3 \\ V_3^3 \\ Z_3^3 \end{Bmatrix}$$

$$E^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.1e^{0.2} & 0 & 0 \\ -0.1e^{-0.2} & 1 & 0.1e^{-0.2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1e^{-0.2} & 1 & 0 & 0 & 0.1e^{0.2} \\ -0.1e^{-0.2} & 0 & 0 & 1 & 0.1e^{-0.2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1e^{0.2} & 1 & 0.1e^{0.2} \\ 0 & 0 & -0.1e^{-0.2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{W}^n = \begin{Bmatrix} V_1^2 \\ Z_1^2 \\ V_2^2 \\ Z_2^2 \\ V_3^2 \\ Z_3^2 \end{Bmatrix}$$

$$F^n = \begin{Bmatrix} -0.1e^{0.3} \sin(0.3) - 0.1e^{0.2} \sin(0.2) \\ -0.1e^{-0.3} (0.25)e^{0.3} \cos(0.3) - 0.1e^{-0.2} (0.25)e^{0.2} \cos(0.2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$\begin{Bmatrix} V_1^2 \\ Z_1^2 \\ V_2^2 \\ Z_2^2 \\ V_3^2 \\ Z_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0454 \\ -0.0903 \\ 0.0212 \\ 0.0056 \\ -0.0014 \\ -0.0027 \end{Bmatrix}$$

จากการนำผลการคำนวณที่ได้จากวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ มาทำการสร้างตารางเพื่อเปรียบเทียบค่า  $\zeta(x,t)$  และ  $u(x,t)$  ที่ตำแหน่ง  $x$  และเวลาต่างๆโดยเลือก  $\Delta x = 0.01$  และ  $\Delta t = 0.00025$  กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น  $\zeta(x,0) = 0$  และเงื่อนไขขอบซ้าย  $\zeta(0,T) = \sin T$  และเงื่อนไขขอบขวา  $\left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{x=1} = 0$  โดย (3.63) จะได้ความเร็วของกระแสน้ำคือ  $u(x,t)$  และการยกตัวของระดับน้ำ  $\zeta(x,t)$

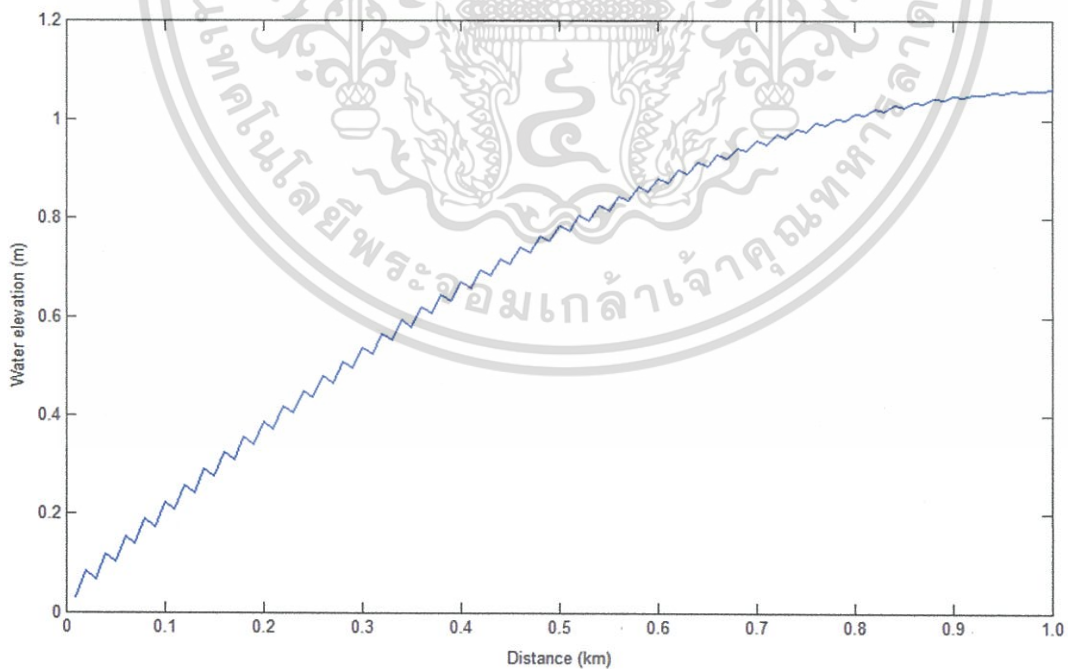


ตารางที่ 3.1 การยกตัวของน้ำ  $Z(x,t)$  ในรูปไร้มิติ

$t$	$x$										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	0.9531	0.9414	0.9291	0.9475	0.9513	0.9544	0.9566	0.9574	0.9562	0.9561	0.9556
20	-0.5773	-0.4232	-0.2731	-0.1306	-0.0095	0.0895	0.1776	0.2478	0.3002	0.3330	0.3466
30	-0.6033	-0.7770	-0.9359	-1.0797	-1.2082	-1.3182	-1.4038	-1.4731	-1.5232	-1.5554	-1.5686
40	0.9423	0.9224	0.8984	0.8725	0.8464	0.8223	0.8010	0.7815	0.7654	0.7559	0.7514
50	0.0323	0.2102	0.3756	0.5266	0.6615	0.7787	0.8766	0.9545	1.0121	1.0492	1.0645

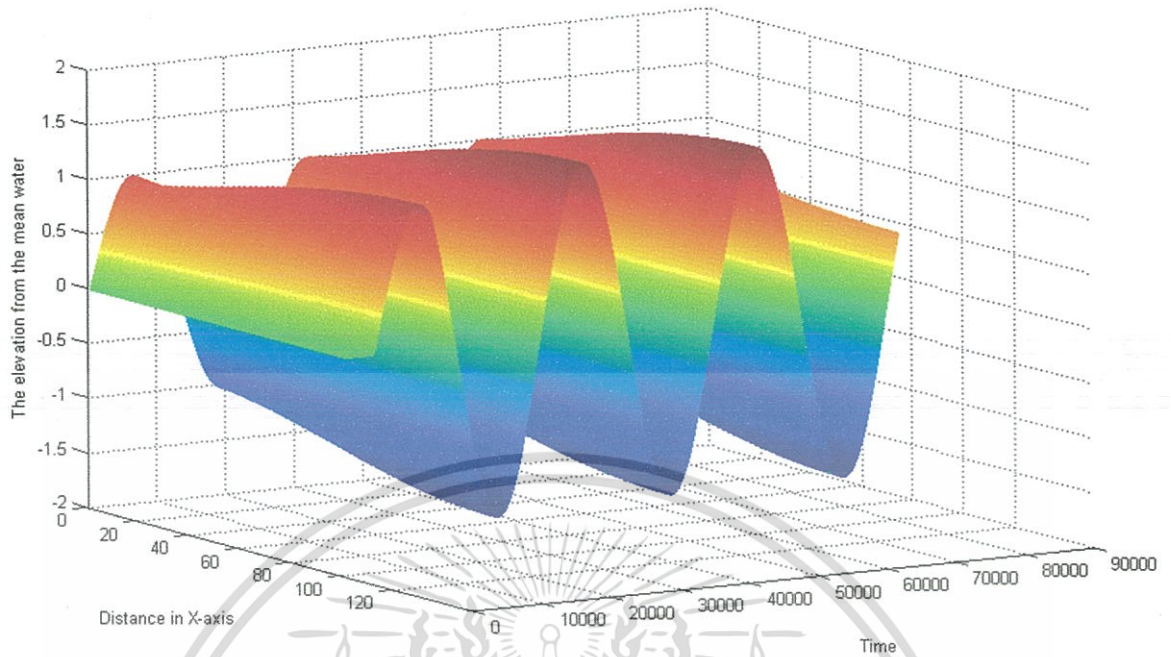
ตารางที่ 3.2 การยกตัวของน้ำ  $\zeta(x,t)$  ที่เวลา  $t$  และ  $0 \leq x \leq 1$

$t$ (Minute)	$X$ (Km)										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	0.9531	0.9414	0.9291	0.9475	0.9513	0.9544	0.9566	0.9574	0.9562	0.9561	0.9556
20	-0.5773	-0.4232	-0.2731	-0.1306	-0.0095	0.0895	0.1776	0.2478	0.3002	0.3330	0.3466
30	-0.6033	-0.7770	-0.9359	-1.0797	-1.2082	-1.3182	-1.4038	-1.4731	-1.5232	-1.5554	-1.5686
40	0.9423	0.9224	0.8984	0.8725	0.8464	0.8223	0.8010	0.7815	0.7654	0.7559	0.7514
50	0.0323	0.2102	0.3756	0.5266	0.6615	0.7787	0.8766	0.9545	1.0121	1.0492	1.0645

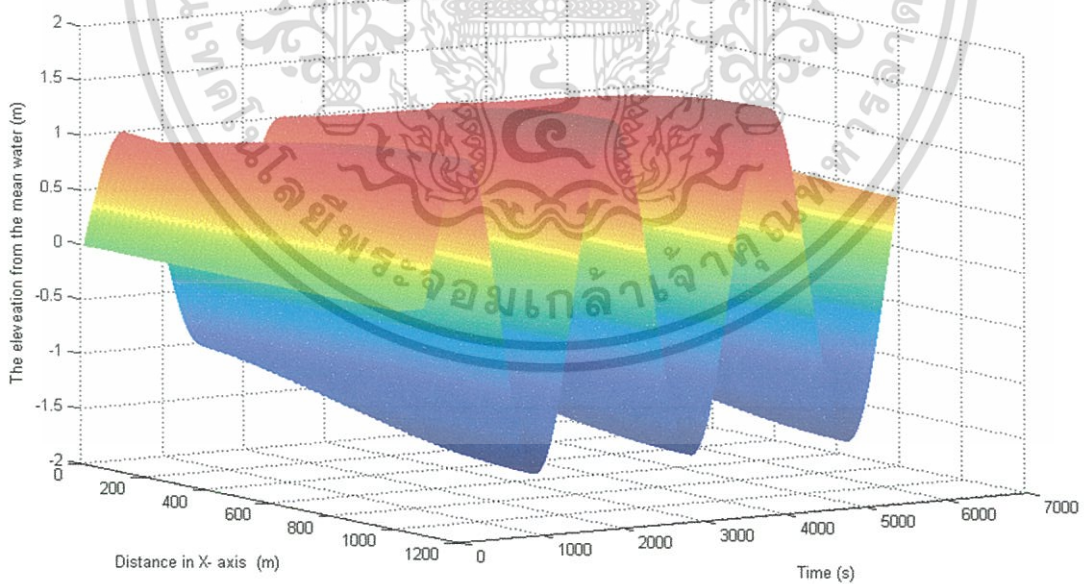


รูปที่ 3.5 การยกตัวของน้ำที่เวลา 50 นาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.6 การยกตัวของกระแสน้ำ  $Z(x,t)$  ในรูปไร้มิติ



รูปที่ 3.7 การยกตัวของกระแสน้ำ  $\zeta(x,t)$  ที่เวลา 1 ชั่วโมง 46 นาที (m)

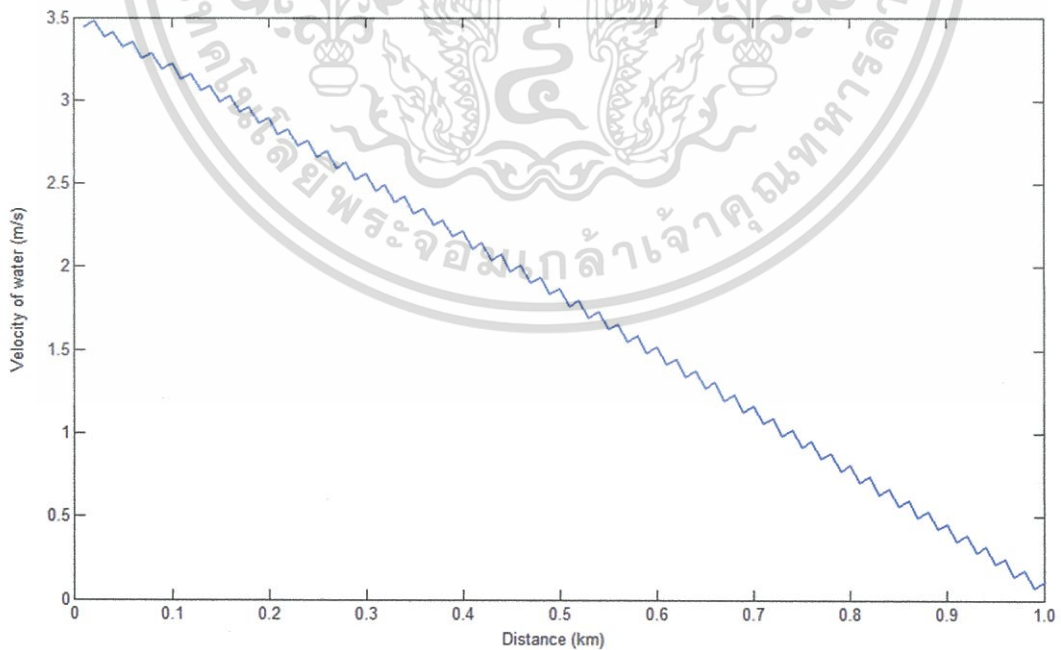
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### ตารางที่ 3.3 ตารางแสดงค่า $U(x,t)$ ในรูปไร้มิติ

$t$	$x$										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	-0.5484	-0.5696	-0.5634	-0.5163	-0.4657	-0.4041	-0.3333	-0.2559	-0.1745	-0.0879	0.0000
20	1.3074	1.2184	1.1202	1.0128	0.8857	0.7467	0.6048	0.4583	0.3072	0.1541	0.0000
30	-0.4432	-0.3697	-0.3052	-0.2497	-0.2030	-0.1616	-0.1201	-0.0861	-0.0548	-0.0273	0.0000
40	-1.0394	-0.9929	-0.9288	-0.8485	-0.7537	-0.6459	-0.5275	-0.4026	-0.2726	-0.1371	0.0000
50	1.1012	0.9982	0.8928	0.7847	0.6747	0.5634	0.4511	0.3380	0.2249	0.1127	0.0000

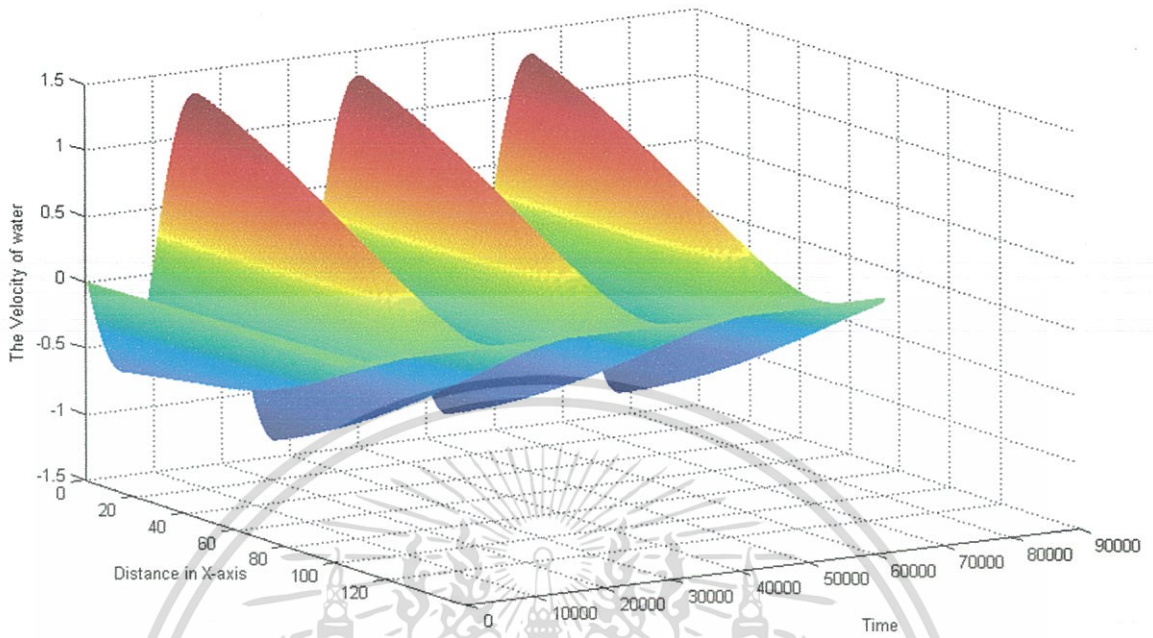
### ตารางที่ 3.4 ตารางแสดงค่า $u(x,t)$ ที่เวลา $t$ และ $0 \leq x \leq 1$ (m/s)

$t$ (Minute)	$x$ (Km)										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	-1.7810	-1.8367	-1.8404	-1.7052	-1.5362	-1.3274	-1.0949	-0.8410	-0.5675	-0.2862	0.0000
20	4.0919	3.8134	3.5059	3.1698	2.7722	2.3369	1.8929	1.4345	0.9615	0.4822	0.0000
30	-1.3872	-1.1571	-0.9552	-0.7815	-0.6353	-0.5058	-0.3759	-0.2694	-0.1715	-0.0854	0.0000
40	-4.0984	-3.1077	-2.9071	-2.6558	-2.3590	-2.0247	-1.6510	-1.2601	-0.8532	-0.4291	0.0000
50	3.4467	3.1243	2.7944	2.4561	2.1118	1.7634	1.4432	1.0579	0.7039	0.3527	0.0000

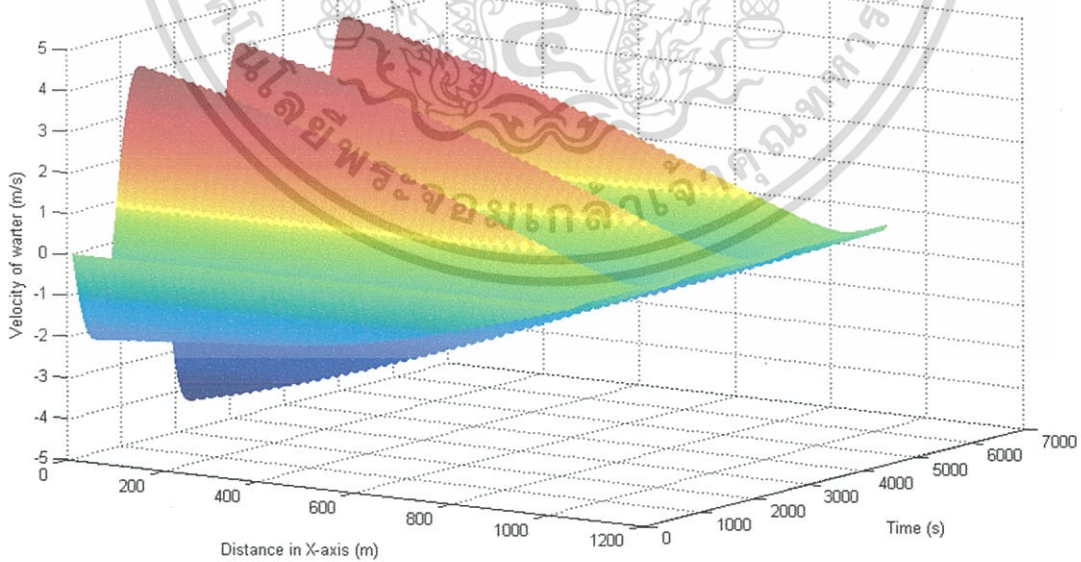


### รูปที่ 3.8 ความเร็วของน้ำของน้ำที่เวลา 50 นาที (m/s)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.9 ความเร็วของกระแสน้ำ  $U(x,t)$  ในรูป 3 มิติ



รูปที่ 3.10 ความเร็วของกระแสน้ำ  $u(x,t)$  ที่เวลา 1 ชั่วโมง 46 นาที ( $m/s$ )

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

### วิธีซัดแข็งสองระดับสำหรับสมการการแพร่-การพา

#### 4.1 สมการการแพร่-การพา

เมื่อทราบผลเฉลยโดยประมาณของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ จะได้ค่า ความเร็วของกระแสน้ำ และการยกตัวของน้ำ ซึ่งจะใช้วิธีซัดแข็งสองระดับเพื่อประเมินคุณภาพน้ำ การจะประเมินคุณภาพน้ำได้นั้นจำเป็นต้องนำข้อมูลเข้า ซึ่งข้อมูลเข้าที่ต้องการในแบบจำลองที่ 2 นี้คือ ความเร็วของน้ำ  $u(x,t)$  ( $m/s$ ) กำหนดโดย

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

เงื่อนไขขอบกำหนดโดยความเข้มข้นของมลพิษ ณ จุดปล่อยคือ  $C_0$  ( $mg/l$ ) คือ

$$C(0,t) = C_0 \quad \text{เมื่อ } x = 0 \quad (4.2)$$

เมื่อ  $C_0$  เป็นค่าคงตัว หรือความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ จุดปล่อย (กิโลกรัม/ลูกบาศก์เมตร) และกำหนดให้ไม่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของมลพิษเมื่อเทียบกับปริภูมิที่จุดปลายของทางน้ำ กล่าวคือ

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad \text{เมื่อ } x = l \quad (4.3)$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น เลือก  $g(x) = 1$  กำหนดโดย

$$C(x,0) = 1 \quad \text{เมื่อ } t = 0 \quad \text{และ } 0 \leq x \leq l \quad (4.4)$$

#### 4.2 ขั้นตอนการแบ่งกริดโดเมน

กำหนดให้

$$M\Delta x = 1 \quad \text{และ } x = i\Delta x \quad \text{สำหรับทุก } 0 \leq i \leq M \quad (4.5)$$

และ

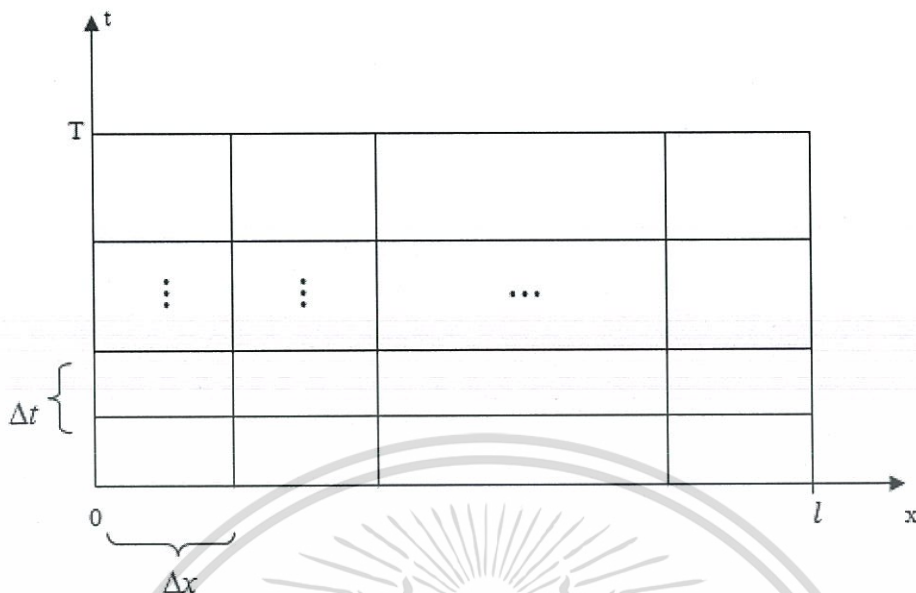
$$N\Delta t = T \quad \text{และ } t = n\Delta t \quad \text{สำหรับทุก } 0 \leq n \leq N \quad (4.6)$$

เมื่อ

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (4.7)$$

โดยที่

$$C_i^n = C(x_i, t_n) \quad \text{เมื่อ } x = i\Delta x \quad \text{และ } t = n\Delta t \quad \text{สำหรับทุก } 0 \leq i \leq M \quad \text{และ } 0 \leq n \leq N \quad (4.8)$$



รูปที่ 4.1 การแบ่งกริดโดเมนในการหาค่าความเข้มข้น  $C(x,t)$

#### 4.3 วิธีซัดแข็งสองระดับสำหรับการหาผลเฉลยมดพียของตัวแบบการกระจาย

พิจารณา (4.1) และใช้วิธีซัดแข็งสองระดับ (Dehghan Mehdi :2004) ดังนั้นสมการผลต่างจำกัด จะได้

$$C \cong C_i^{n+1}, \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} \cong \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \cong \varphi \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + (1-\varphi) \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x}, \quad \text{เมื่อ } 0 \leq \varphi \leq 1 \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \cong \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}, \quad (4.12)$$

แทน (4.10), (4.11) และ (4.12) ลงใน (4.1) จะได้

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} + u(x,t) \left[ \varphi \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + (1-\varphi) \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] = D \left[ \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (4.13)$$

$$\frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = D \left[ \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] - u(x,t) \left[ \varphi \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + (1-\varphi) \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] \quad (4.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C_i^{n+1} = \Delta t \cdot D \left[ \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] - \Delta t \cdot u(x, t) \left[ \varphi \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + (1-\varphi) \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] + C_i^n \quad (4.15)$$

$$C_i^{n+1} = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) - u(x, t) \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \varphi (C_i^n - C_{i-1}^n) + (1-\varphi) \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2} \right] + C_i^n \quad (4.16)$$

$$C_i^{n+1} = \beta (C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n) - \gamma_i^{n+1} \left[ \varphi (C_i^n - C_{i-1}^n) + (1-\varphi) \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2} \right] + C_i^n \quad (4.17)$$

$$C_i^{n+1} = \beta C_{i+1}^n - 2\beta C_i^n + \beta C_{i-1}^n - \gamma_i^{n+1} \varphi C_i^n + \gamma_i^{n+1} \varphi C_{i-1}^n - \gamma_i^{n+1} \frac{C_{i+1}^n}{2} + \gamma_i^{n+1} \varphi \frac{C_{i+1}^n}{2} + \gamma_i^{n+1} \frac{C_{i-1}^n}{2} - \gamma_i^{n+1} \varphi \frac{C_{i-1}^n}{2} + C_i^n \quad (4.18)$$

$$C_i^{n+1} = \beta C_{i-1}^n + \gamma_i^{n+1} \frac{C_{i-1}^n}{2} + \gamma_i^{n+1} \varphi C_{i-1}^n - \gamma_i^{n+1} \varphi \frac{C_{i-1}^n}{2} + C_i^n - 2\beta C_i^n - \gamma_i^{n+1} \varphi C_i^n + \beta C_{i+1}^n - \gamma_i^{n+1} \frac{C_{i+1}^n}{2} + \gamma_i^{n+1} \varphi \frac{C_{i+1}^n}{2} \quad (4.19)$$

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2} (2\beta + \gamma_i^{n+1} (1+\varphi)) C_{i-1}^n + (1-2\beta - \gamma_i^{n+1} \varphi) C_i^n + \frac{1}{2} (2\beta - \gamma_i^{n+1} (1-\varphi)) C_{i+1}^n. \quad (4.20)$$

สำหรับ  $1 \leq i \leq M-1$  และ  $0 \leq n \leq N-1$  เมื่อ  $\gamma_i^n = u_i^n \frac{\Delta t}{\Delta x}$  โดยที่  $\beta = D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ .

โดยที่เงื่อนไขของความเสถียร (Stability Condition) (Dehghan Mehdi : 2004) ของ (4.20)

ภายใต้เงื่อนไข

$$\frac{(\gamma_i^{n+1})^2 - (\gamma_i^{n+1})\varphi}{2} \leq \beta \leq \frac{(1-\gamma_i^{n+1})\varphi}{2}. \quad (4.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

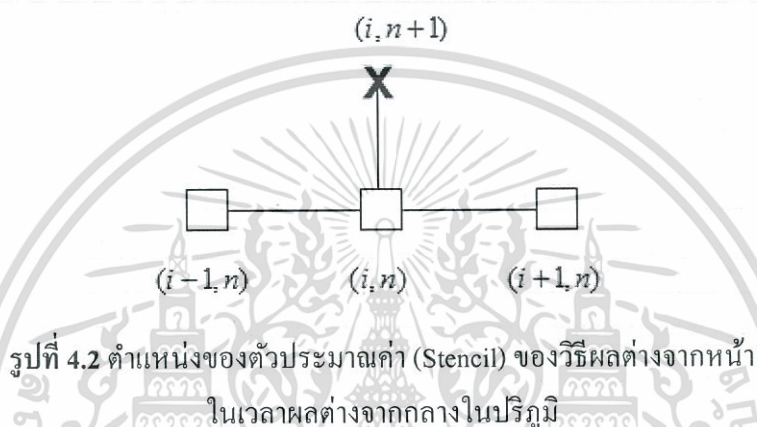
#### 4.3.1 วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ (The forward difference intime and central difference inspace: FTCS)

พิจารณา (4.20) เมื่อเลือกค่า  $\varphi = 0$  จะได้

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2\beta + \gamma_i^{n+1})C_{i-1}^n + (1 - 2\beta)C_i^n + \frac{1}{2}(2\beta - \gamma_i^{n+1})C_{i+1}^n. \quad (4.22)$$

และวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิเงื่อนไขการลู่เข้า

$$\frac{(\gamma_i^{n+1})^2}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}. \quad (4.23)$$



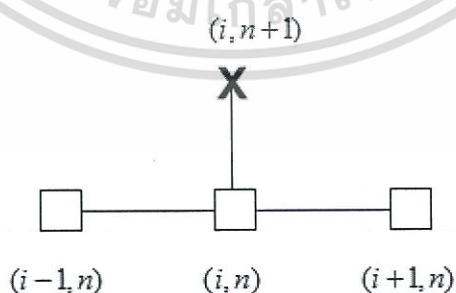
#### 4.3.2 วิธีอัปวินด์ (The upwind explicit scheme)

พิจารณา (4.20) เมื่อเลือกค่า  $\varphi = 1$  จะได้

$$C_i^{n+1} = (\beta + \gamma_i^{n+1})C_{i-1}^n + (1 - 2\beta - \gamma_i^{n+1})C_i^n + \beta C_{i+1}^n. \quad (4.24)$$

และวิธีอัปวินด์มีเงื่อนไขของความเสถียรคือ

$$\frac{(\gamma_i^{n+1})^2 - (\gamma_i^{n+1})}{2} \leq \beta \leq \frac{(1 - \gamma_i^{n+1})}{2}. \quad (4.25)$$



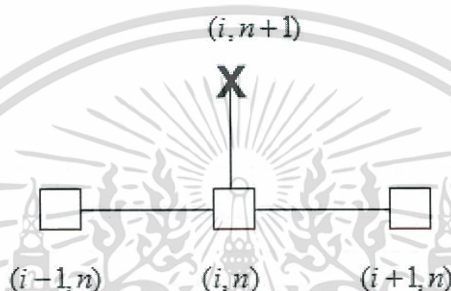
### 4.3.3 วิธีเลขชี้-เวนดรอฟ (The Lax-wendroff technique)

พิจารณา (4.20) เมื่อเลือกค่า  $\varphi = \gamma_i^{n+1}$  จะได้

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2\beta + \gamma_i^{n+1}(1 + \gamma_i^{n+1}))C_{i-1}^n + (1 - 2\beta - (\gamma_i^{n+1})^2)C_i^n + \frac{1}{2}(2\beta - \gamma_i^{n+1}(1 - \gamma_i^{n+1}))C_{i+1}^n. \quad (4.26)$$

และวิธีเลขชี้-เวนดรอฟมีเงื่อนไขของความเสถียรคือ

$$0 \leq \beta \leq \frac{1 - (\gamma_i^{n+1})^2}{2}. \quad (4.27)$$



รูปที่ 4.4 ตำแหน่งของตัวประมาณค่า (Stencil) ของวิธีเลขชี้-เวนดรอฟ

### 4.4 ตัวอย่างการผลเฉลยเชิงตัวเลขของ $C(x, t)$ ในตัวแบบการกระจาย

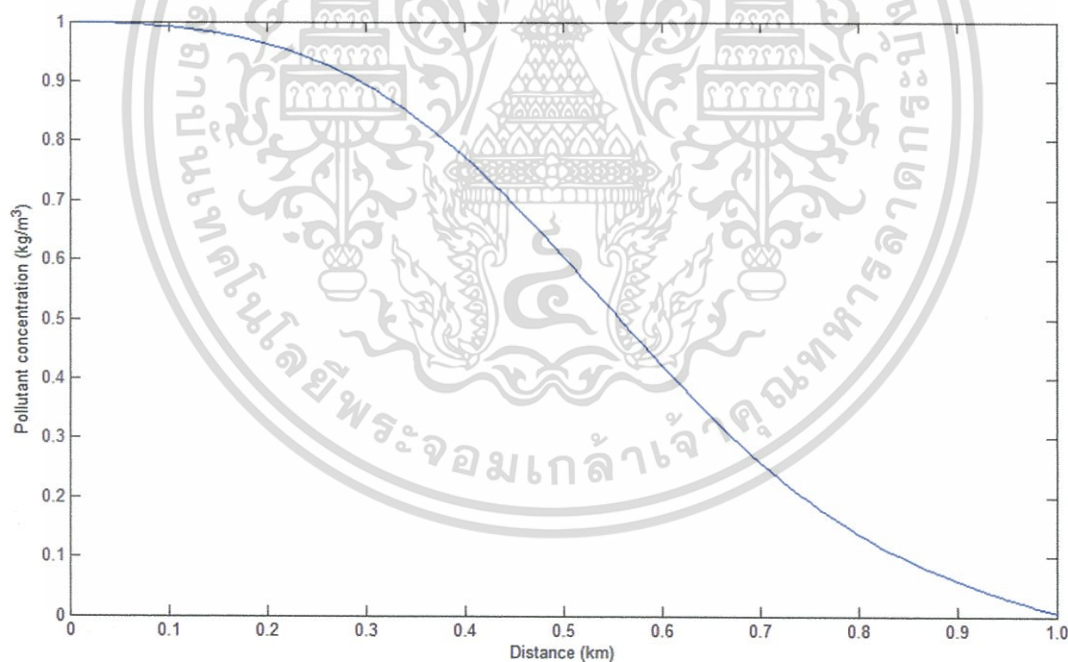
กำหนดให้มีการปล่อยน้ำเสียที่จุดเริ่มต้นของทางน้ำมีความเข้มข้นเป็น 1 กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร ตลอดเวลา ( $C_0 = 1$  กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร) ระดับความเข้มข้นของน้ำเสียเมื่อ  $t = 0$  กำหนดโดยตลอดทางน้ำและที่จุดปลายของทางน้ำไม่มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของระดับความเข้มข้นของน้ำเสียเลย กำหนดสัมประสิทธิ์การแพร่ของน้ำเสียคือ 0.05 ตารางเมตรต่อวินาที จากสมมติฐานนี้ สามารถกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ โดยเงื่อนไขเริ่มต้น  $C(x, 0) = 0$  ที่  $t = 0$  และ  $C(0, t) = C_0$  เมื่อ  $t = 0$  และเงื่อนไขขอบขวาคือ  $\frac{\partial C}{\partial x} = 0$  โดยที่  $C_0 = 1$  กิโลกรัมต่อลูกบาศก์เมตร และ  $D = 0.05$  ตารางเมตรต่อวินาที โดยสมการผลต่างจำกัดของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ จะทำให้ทราบผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็ว  $u(x, t)$  และการยกตัว  $\zeta(x, t)$  ของกระแสน้ำ จากนั้นนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้ไปใช้แทนข้อมูลภาคสนามของ  $u(x, t)$  ในสมการ (4.1) แล้วจึงใช้สมการผลต่างจำกัด (4.20) จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลา ซึ่งปรากฏผลตามตาราง และรูปต่อไปนี้

#### 4.4.1 วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ

เลือก  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.00025$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความสัมพันธ์ของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในตารางที่ 4.1 และแสดงในรูปที่ 4.7

ตารางที่ 4.1 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$t$ (Minute)	$X$ (Km)										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	1.0000	0.3233	0.1152	0.0511	0.0281	0.0177	0.0118	0.0078	0.0048	0.0023	0.0002
20	1.0000	0.9996	0.9971	0.9874	0.9578	0.8878	0.7594	0.5753	0.3672	0.1727	0.0169
30	1.0000	0.9957	0.9890	0.9751	0.9472	0.8955	0.8083	0.6746	0.4892	0.2579	0.0262
40	1.0000	0.2776	0.1730	0.1405	0.1173	0.0960	0.0757	0.0560	0.0368	0.0182	0.0018
50	1.0000	0.9925	0.9647	0.8966	0.7736	0.6031	0.4169	0.2527	0.1325	0.0544	0.0051



รูปที่ 4.5 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำที่เวลา 50 นาที ( $\text{kg} / \text{m}^3$ )

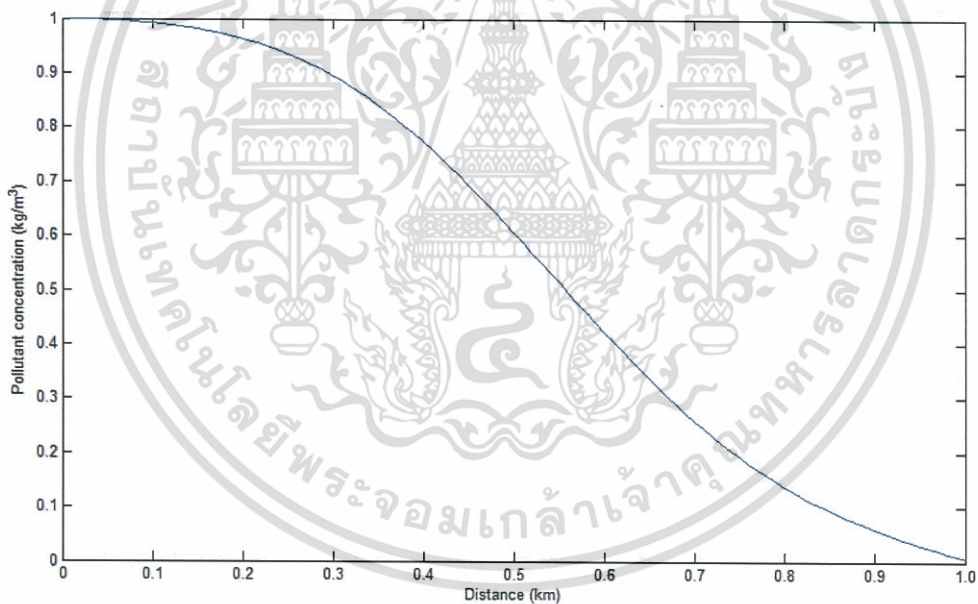
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.4.2 วิธีอัปวินด์

เลือก  $\Delta x = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.00025$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของค่าความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในตารางที่ 4.2 และแสดงในรูปที่ 4.10

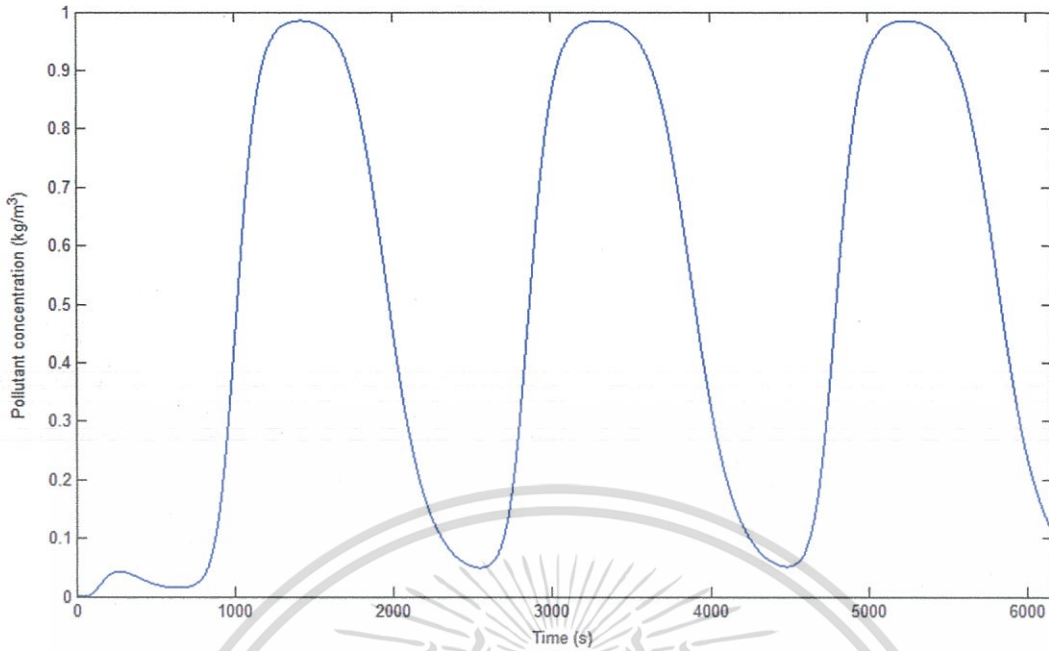
ตารางที่ 4.2 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x, t)$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$t$ (Minute)	$X$ (Km)											
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
10	1.0000	0.3018	0.1024	0.0451	0.0253	0.0163	0.0110	0.0074	0.0045	0.0022	0.0002	
20	1.0000	0.9993	0.9960	0.9843	0.9517	0.8792	0.7509	0.5699	0.3655	0.1727	0.0170	
30	1.0000	0.9952	0.9881	0.9735	0.9448	0.8922	0.8042	0.6703	0.5062	0.2558	0.0260	
40	1.0000	0.2657	0.1683	0.1394	0.1168	0.0957	0.0755	0.0558	0.0367	0.0181	0.0018	
50	1.0000	0.9910	0.9608	0.8906	0.7678	0.5998	0.4163	0.2537	0.1335	0.0548	0.0051	

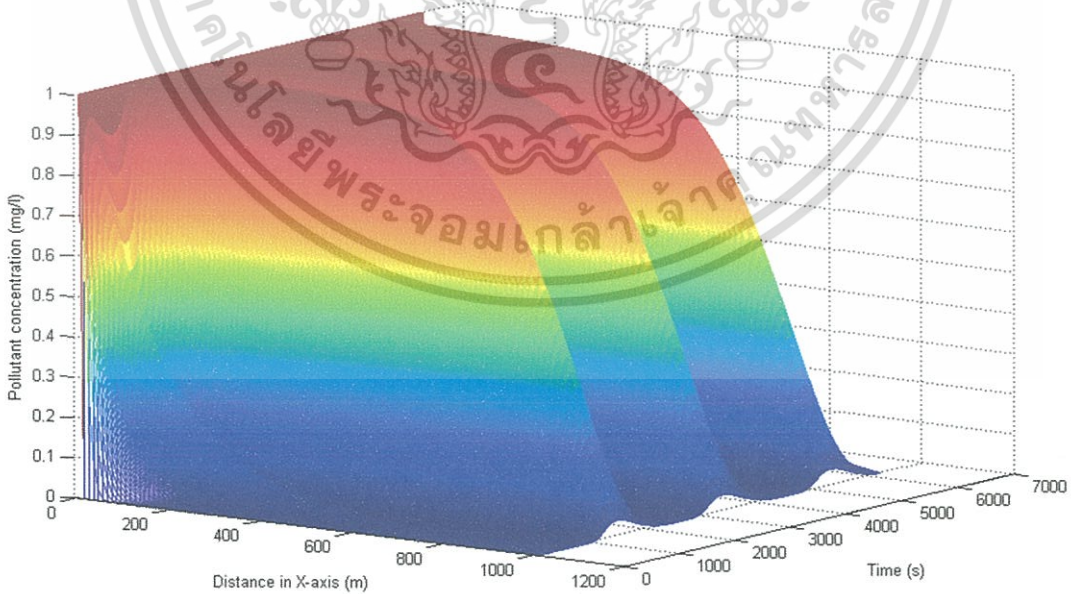


รูปที่ 4.8 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำที่เวลา 50 นาที ( $\text{kg} / \text{m}^3$ )

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



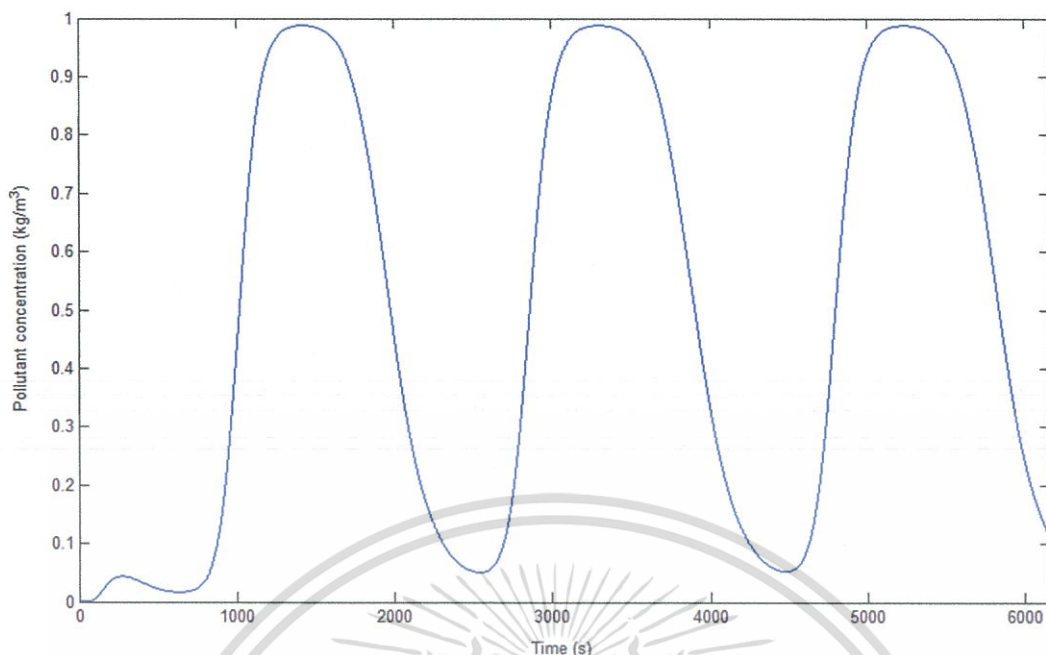
รูปที่ 4.6 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำไหลในช่วงเวลาเริ่มต้นถึง 1 ชั่วโมง 46 นาที ณ ตำแหน่ง 500 เมตร ( $kg/m^3$ )



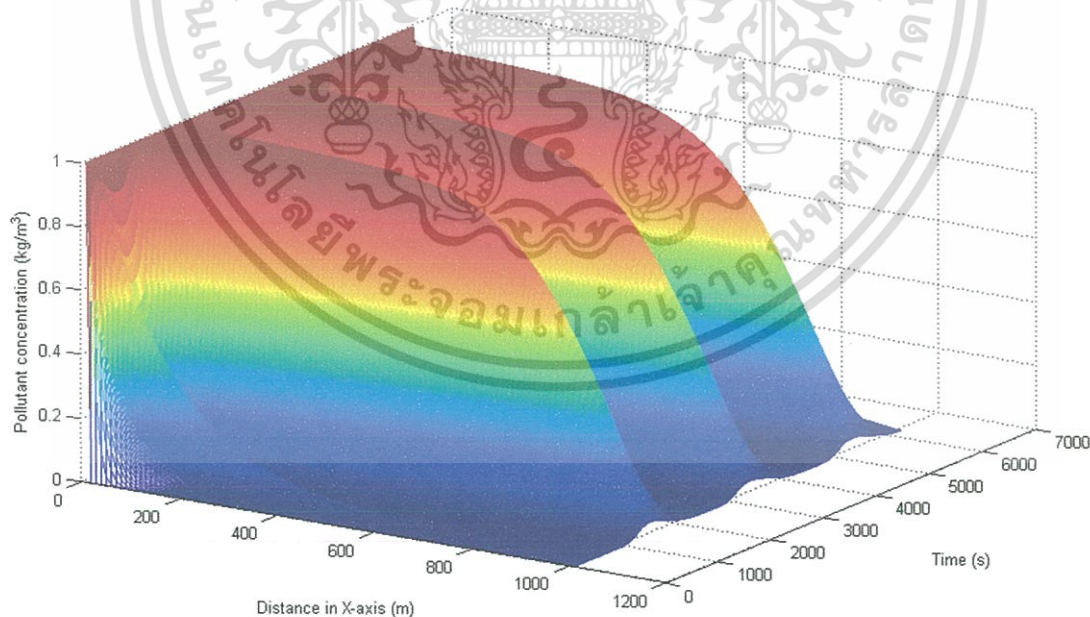
รูปที่ 4.7 ความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ

เมื่อ  $\beta = 0.125 (kg/m^3)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.9 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำไหลในช่วงเวลาเริ่มต้นถึง 1 ชั่วโมง 46 นาที ณ ตำแหน่ง 500 เมตร ( $kg/m^3$ )



รูปที่ 4.10 ความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ของวิธีอวิวินด์เมื่อ  $\beta = 0.125$  ( $kg/m^3$ )

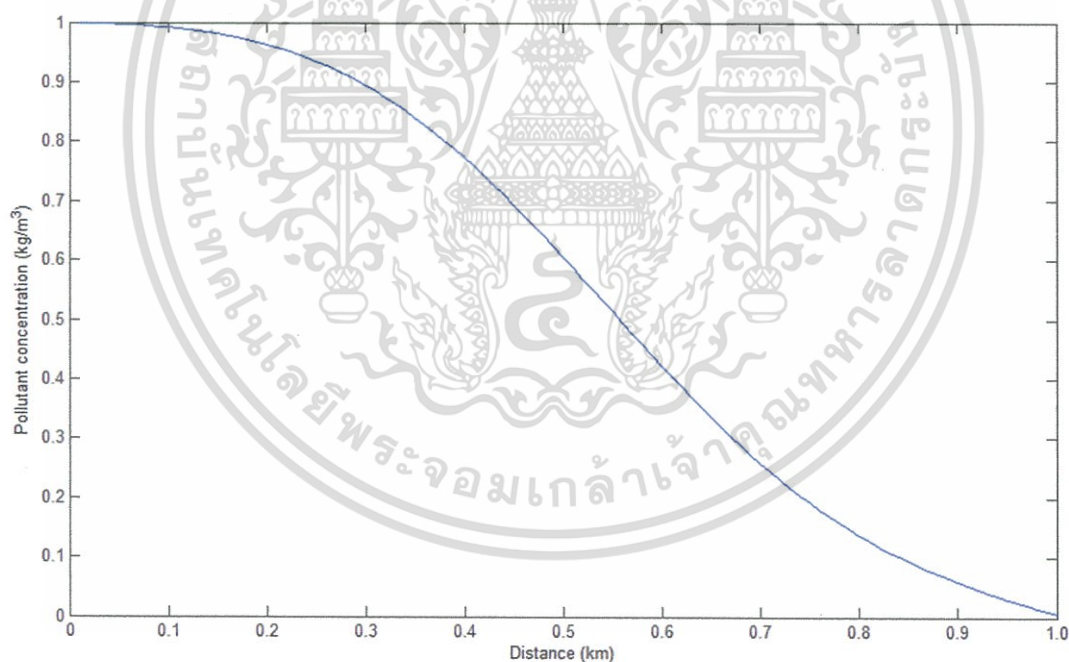
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.4.3 วิธีแลกซ์เวเน-ดรอพ

เลือก  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.00025$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในตารางที่ 4.3 และแสดงในรูปที่ 4.13

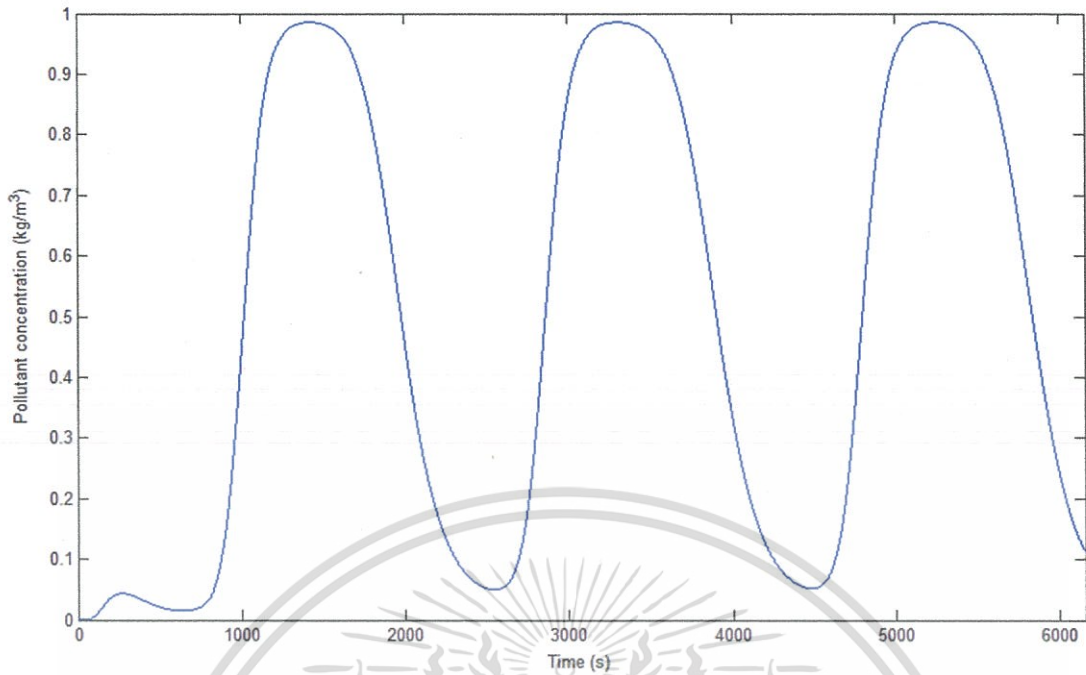
ตารางที่ 4.3 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x, t)$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$t$ (Minute)	$x$ (Km)											
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
10	1.0000	0.3149	0.1061	0.0463	0.0258	0.0166	0.0112	0.0075	0.0046	0.0022	0.0002	
20	1.0000	0.9994	0.9962	0.9848	0.9532	0.8822	0.7557	0.5762	0.3720	0.1787	0.0226	
30	1.0000	0.9954	0.9884	0.9742	0.9461	0.8944	0.8079	0.6756	0.4924	0.2640	0.0347	
40	1.0000	0.2647	0.1698	0.1403	0.1176	0.0965	0.0762	0.0565	0.0374	0.0188	0.0024	
50	1.0000	0.9915	0.9622	0.8935	0.7724	0.6055	0.4220	0.2583	0.1367	0.0569	0.0068	

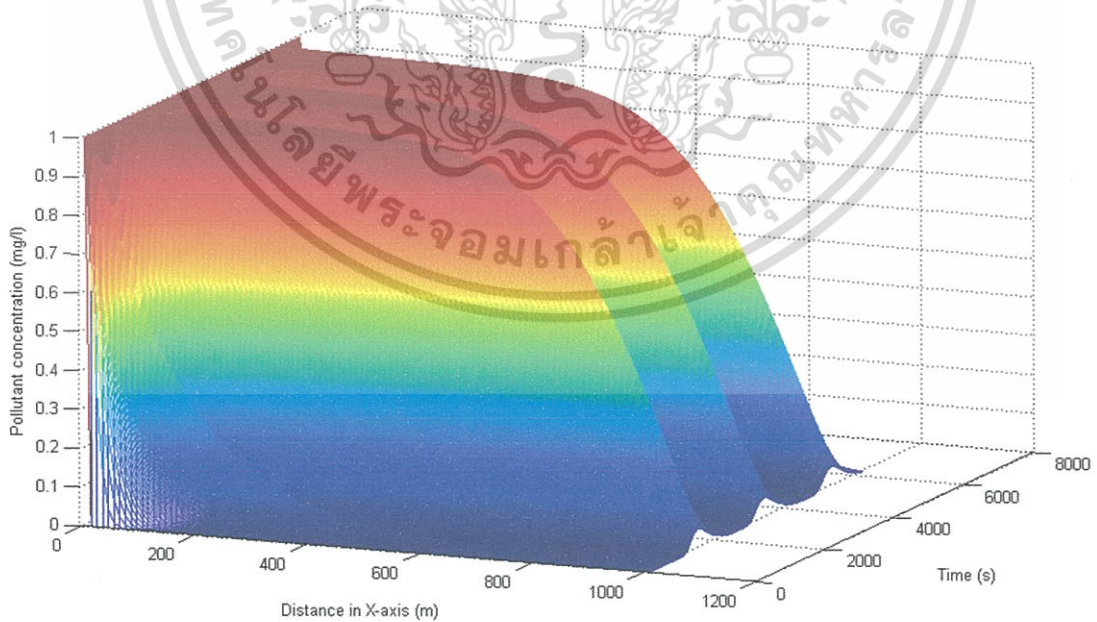


รูปที่ 4.11 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำที่เวลา 50 นาที ( $\text{kg} / \text{m}^3$ )

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.12 ความเข้มข้นของมลพิษในทางน้ำไหลในช่วงเวลาเริ่มต้นถึง 1 ชั่วโมง 46 นาที ณ ตำแหน่ง 500 เมตร ( $kg/m^3$ )



รูปที่ 4.13 ความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x, t)$  ของวิธีแลกซ์-เวนคروفเมื่อ  $\beta = 0.125$  ( $kg/m^3$ )

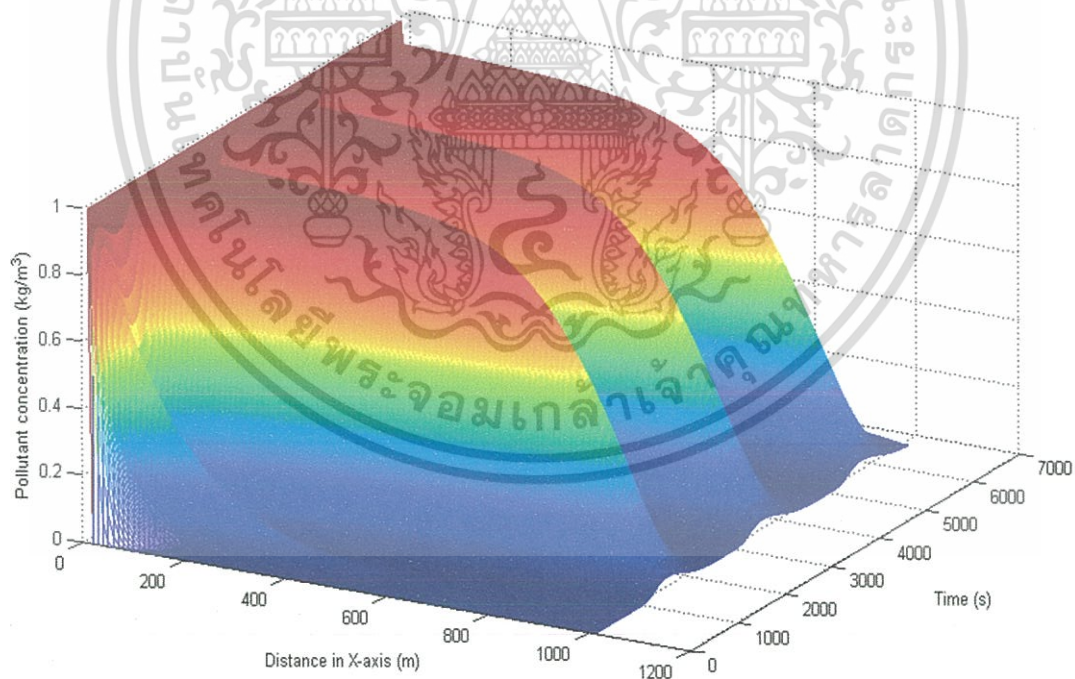
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.4.4 วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ ( $\beta = 0.25$ )

เลือก  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.0005$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในตารางที่ 4.4 และแสดงในรูปที่ 4.14

ตารางที่ 4.4 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$t$ (Minute)	$X$ (Km)										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	1.0000	0.3232	0.1151	0.0510	0.0281	0.0177	0.0118	0.0078	0.0048	0.0020	0.0000
20	1.0000	0.9996	0.9971	0.9874	0.9622	0.8878	0.7593	0.5751	0.3670	0.1726	0.0169
30	1.0000	0.9957	0.9890	0.9751	0.9472	0.8955	0.8083	0.6746	0.4891	0.2579	0.0262
40	1.0000	0.2775	0.1729	0.1379	0.1172	0.0960	0.0757	0.0561	0.0368	0.0182	0.0018
50	1.0000	0.9925	0.9647	0.8966	0.7735	0.6029	0.4166	0.2524	0.1323	0.0543	0.0051



รูปที่ 4.14 ความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ เมื่อ  $\beta = 0.25$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

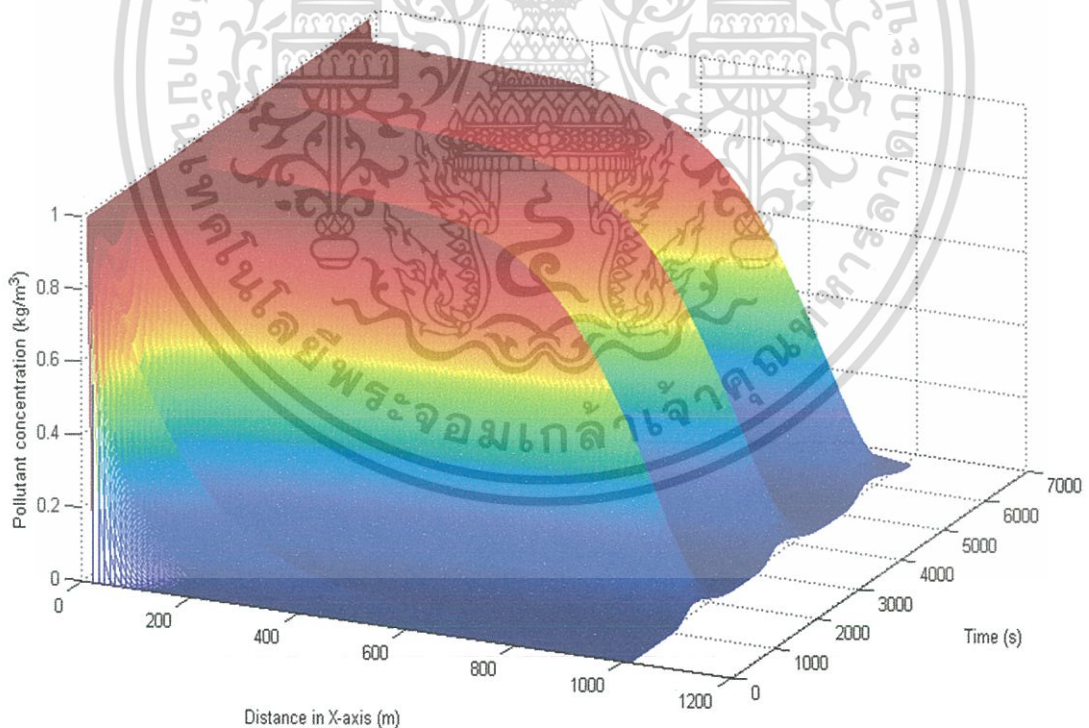
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.4.5 วิธีอวิวินด์ ( $\beta = 0.25$ )

เลือก  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.0005$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในตารางที่ 4.5 และแสดงในรูปที่ 4.15

ตารางที่ 4.5 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$t$ (Minute)	$x$ (Km)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	1.0000	1.0000	0.3017	0.1024	0.0451	0.0253	0.0163	0.0110	0.0073	0.0045	0.0021	0.0000
20	1.0000	0.9993	0.9960	0.9843	0.9517	0.8792	0.7508	0.5698	0.3653	0.1726	0.0169	0.0000
30	1.0000	0.9952	0.9881	0.9735	0.9448	0.8921	0.8042	0.6703	0.4854	0.2558	0.0260	0.0000
40	1.0000	0.2566	0.1682	0.1394	0.1168	0.0957	0.0754	0.0558	0.0367	0.0181	0.0018	0.0000
50	1.0000	0.9910	0.9608	0.8906	0.7677	0.5995	0.4161	0.2534	0.1333	0.0547	0.0051	0.0000



รูปที่ 4.15 ความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ของวิธีอวิวินด์  
เมื่อ  $\beta = 0.25$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

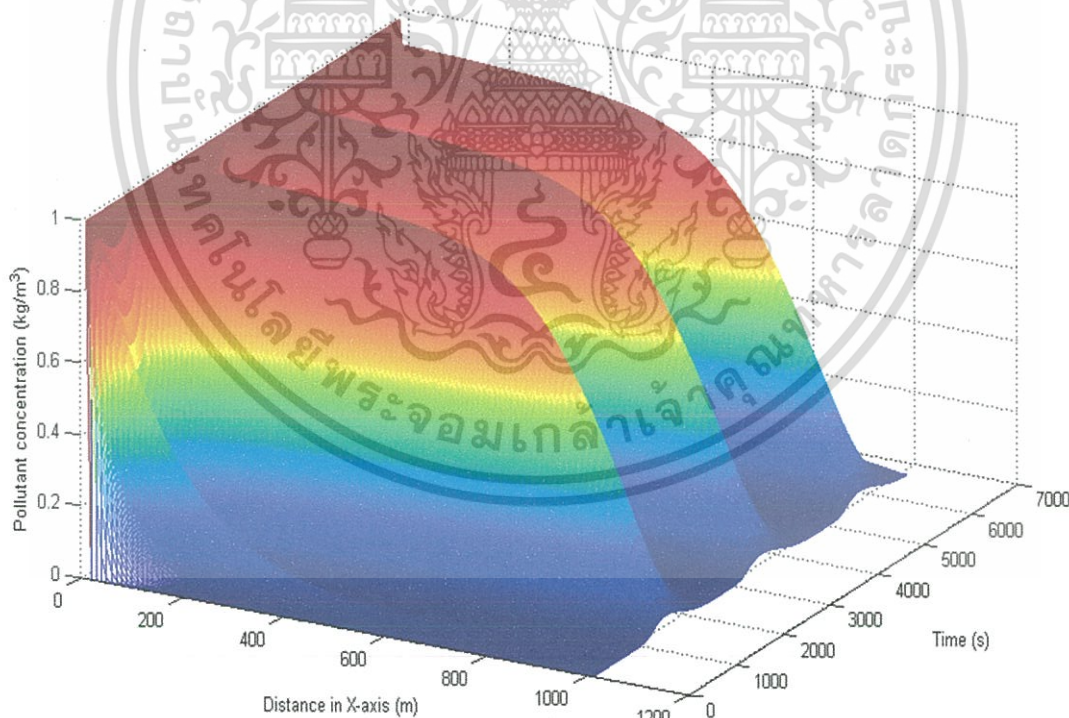
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.4.6 วิธีแลกซ์เวน-ครอฟ ( $\beta = 0.25$ )

เลือก  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.0005$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในตารางที่ 4.6 และแสดงในรูปที่ 4.16

ตารางที่ 4.6 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$t$ (Minute)	$x$ (Km)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10		1.0000	0.3450	0.1145	0.0488	0.0268	0.0170	0.0115	0.0077	0.0048	0.0024	0.0000
20		1.0000	0.9994	0.9965	0.9859	0.9559	0.8879	0.7651	0.5885	0.3850	0.1906	0.0338
30		1.0000	0.9957	0.9890	0.9755	0.9485	0.8987	0.8148	0.6858	0.5060	0.2802	0.0520
40		1.0000	0.2858	0.1732	0.1421	0.1192	0.0979	0.0776	0.0579	0.0387	0.0200	0.0036
50		1.0000	0.9924	0.9648	0.8990	0.7812	0.6166	0.4333	0.2676	0.1432	0.0612	0.0102



รูปที่ 4.16 ความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  ของวิธีแลกซ์-เวนครอฟ  
เมื่อ  $\beta = 0.25$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

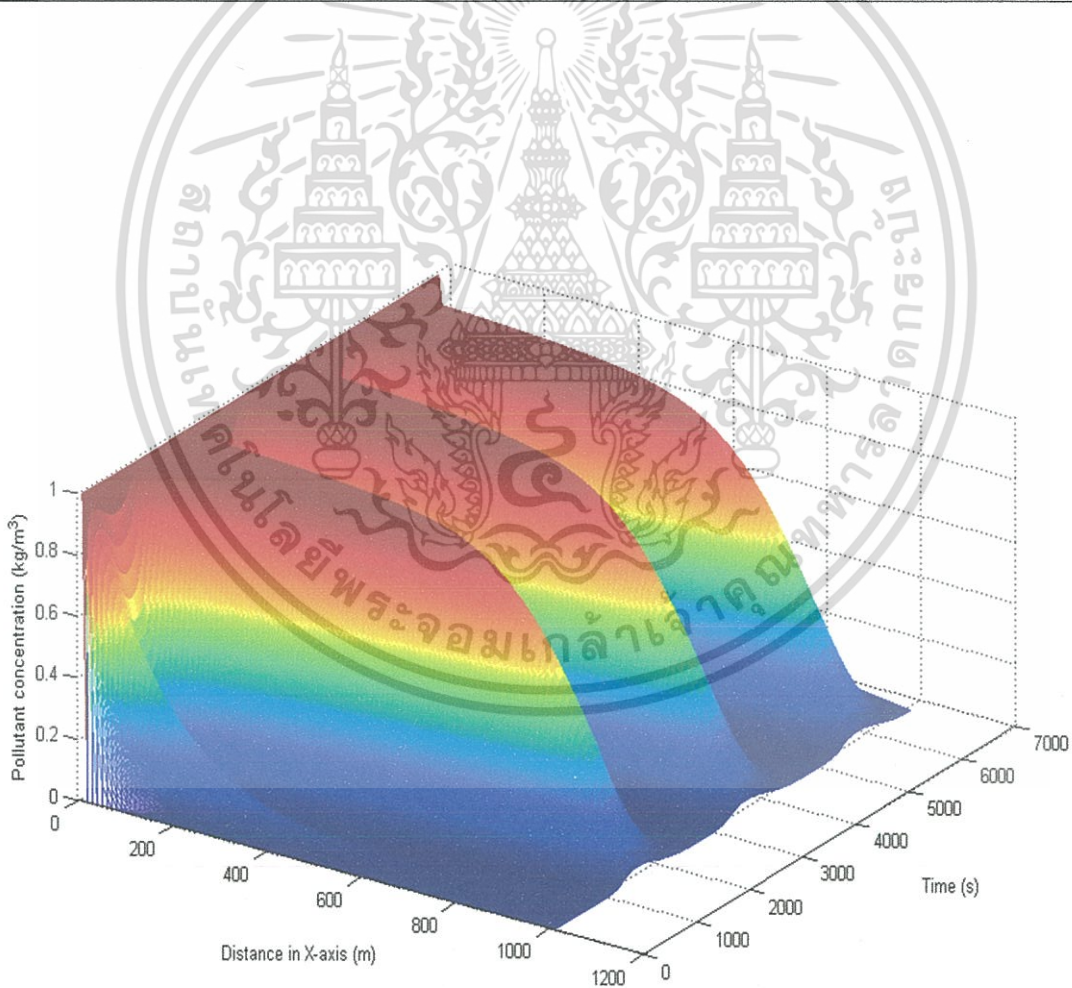
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4.4.7 วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ $\beta = (0.5)$

เลือก  $\Delta x = 0.01$  ,  $\Delta t = 0.001$  จะได้ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของน้ำเสีย ณ ตำแหน่งต่างๆ ในแต่ละช่วงเวลาแสดงค่าในตารางที่ 4.7 และแสดงในรูปที่ 4.17

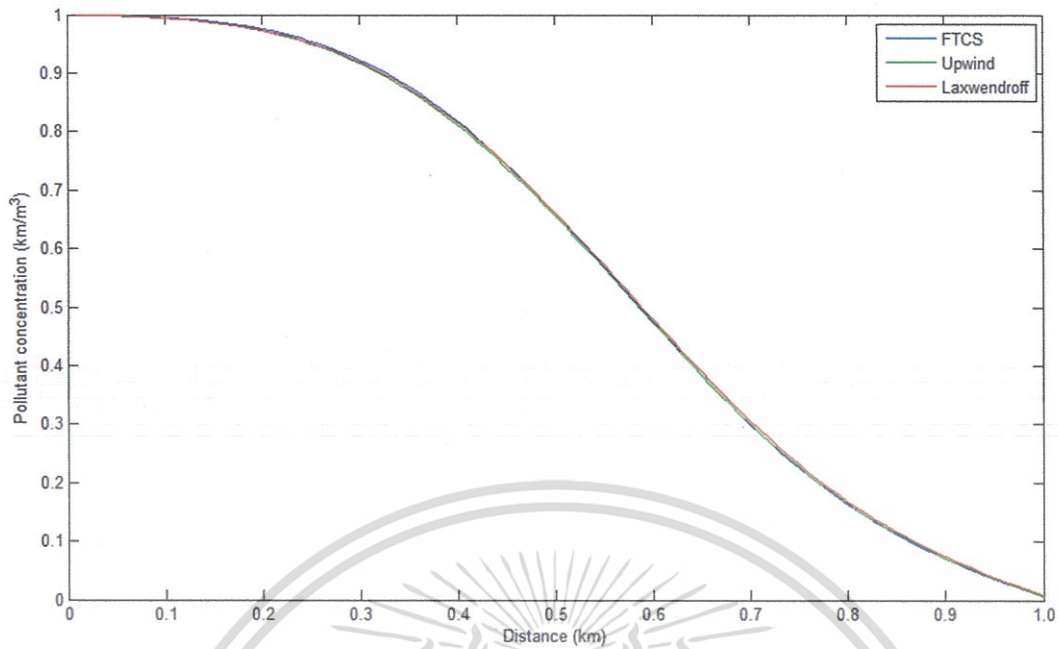
ตารางที่ 4.7 ค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x, t)$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

$t$ (Minute)	$x$ (Km)	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10		1.0000	0.3232	0.1151	0.0510	0.0281	0.0177	0.0118	0.0078	0.0048	0.0023	0.0000
20		1.0000	0.9996	0.9971	0.9874	0.9579	0.8881	0.7596	0.5753	0.3671	0.1726	0.0169
30		1.0000	0.9957	0.9890	0.9751	0.9472	0.8956	0.8084	0.6747	0.4892	0.2579	0.0262
40		1.0000	0.2773	0.1726	0.1402	0.1170	0.0958	0.0755	0.0559	0.0368	0.0182	0.0018
50		1.0000	0.9925	0.9649	0.8969	0.7740	0.6035	0.4170	0.2526	0.1323	0.0543	0.0051



รูปที่ 4.17 รูปแสดงความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x, t)$  ของวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลาง  
ในปริภูมิเมื่อ  $\beta = 0.5$  ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.18 การเปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเข้มข้นของมลพิษเมื่อคำนวณโดยวิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ วิธีอัปวินด์และวิธีแลกซ์-เวนดรอฟที่ 50 นาทีตลอดทางน้ำ ( $kg/m^3$ )

เมื่อ  $\beta = 0.5$  วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ นั้นสามารถคำนวณได้วิธีเดียว ซึ่ง วิธีแลกซ์-เวนดรอฟและ วิธีอัปวินด์นั้นไม่สามารถคำนวณหาความเข้มข้นของน้ำเสียได้เนื่องจากเงื่อนไขการคู่เข้าของสองวิธีดังกล่าวนี้มีช่วงที่แคบกว่า วิธีผลต่างจากหน้าในเวลาผลต่างจากกลางในปริภูมิ ผู้วิจัยได้สรุป เงื่อนไขการคู่เข้าของวิธีต่างๆมาดังตารางที่ 4.8

ตารางที่ 4.8 เงื่อนไขการลู่เข้าของวิธีซัดแข็งสองระดับ

$\Delta x$	$\Delta t$	$\beta$	Stability		
			FTCS	Lax-wendroff	Upwind
0.01	0.00025		Stable	Stable	Stable
0.02	0.001	0.125	Stable	Stable	Stable
0.04	0.004		Stable	Stable	Stable
0.01	0.0005		Stable	Stable	Stable
0.02	0.002	0.25	Stable	Stable	Stable
0.04	0.008		Stable	Stable	Stable
0.01	0.001		Stable	Unstable	Unstable
0.02	0.004	0.5	Stable	Unstable	Unstable
0.04	0.016		Stable	Unstable	Unstable

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

### สรุปผลการทดลองและข้อเสนอแนะ

#### 5.1 สรุปผลการทดลอง

วิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยของตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำไม่เอกรูปบนสภาวะไม่คงตัว สรุปได้ว่าการคำนวณโดย วิธีซัดเจ็งสองระดับนั้นจะต้องอยู่ภายใต้เงื่อนไขความเสถียร(Conditionally Stable)แต่วิธีซัดเจ็งสองระดับนี้ มีความสะดวกในการคำนวณมากกว่าวิธีปริยาย (Implicit Method) ที่ปรากฏในงานวิจัยก่อนหน้านี้

การเลือก  $\Delta x$  และ  $\Delta t$  ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแบบอุทกพลศาสตร์นั้นมีผลต่อการคำนวณและเวลาที่ใช้การประมวลผลในการประมาณค่า  $\zeta(x,t)$  และ  $u(x,t)$  กล่าวคือ หากมีการแบ่ง  $\Delta x$  และ  $\Delta t$  ที่มีความละเอียดมากขึ้นไปจะใช้เวลาในการประมวลผลมากขึ้นความจำเป็นในการทำงานเดียวกันในการเลือก  $\Delta x$  และ  $\Delta t$  ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแบบการกระจายจะมีผลต่อการประมาณค่าความเข้มข้นของมลพิษ  $C(x,t)$  เช่นกัน

#### 5.2 ข้อเสนอแนะ

จากวิทยานิพนธ์นี้ ได้นำเสนอวิธีเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพ ในการหาผลเฉลย โดยประมาณของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อตรวจวัดคุณภาพน้ำในทางน้ำไม่เอกรูปบนสภาวะไม่เสถียร ซึ่งมีสัมประสิทธิ์การพาเป็นฟังก์ชัน ดังนั้นผู้ใช้ตัวแบบสามารถเก็บข้อมูลภาคสนามแล้วนำมาสร้างฟังก์ชันเพื่อกำหนดฟังก์ชันกำเนิดคลื่น และฟังก์ชันความเข้มข้นมลพิษเริ่มต้น แล้วจึงนำมาประยุกต์ใช้ตัวแบบคู่ควบที่ได้พัฒนาขึ้นนี้ โดยจะเห็นว่า วิทยานิพนธ์นี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการตรวจวัดคุณภาพน้ำในแหล่งน้ำที่มีลักษณะใกล้เคียงกันรวมถึงปัญหาอื่น ๆ ที่มีลักษณะใกล้เคียงกับปัญหาดังที่ได้นำเสนอไว้ได้ต่อไป



เอกสารอ้างอิง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [1] ปราโมทย์ เตชะอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 7. กรุงเทพฯ สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2553.
- [2] Garzon, A. and D'Alpaos, L. 1992. "A modified method of the characteristic technique combined with Galerkin finite Element method to solve shallow water mass transport problems" **Proceeding 23<sup>rd</sup> International Conference in Coastal Engineering**, 3068-3080.
- [3] Dehghan, Mehdi. 2004. "Weight finite difference techniques for the one-dimensional advection-diffusion equation" **Elsevier Applied Science Publishers**, 307-319.
- [4] Nopparat Pochai. 2009. "A numerical computation of non-dimensional form of stream water quality model with hydrodynamic advection-dispersion-reaction equations" **Elsevier Nonlinear Analysis : Hybrid Systems**, 666-673.
- [5] A.R. Mitchell. 1969. **Computation Method in Partial Differential Equations**. New York : Wiley.
- [6] N. Pochai, S. Tangmanee, L.J.Crane and J.J.H. Miller. 2008. "A water quality computation in the uniform channel" **Journal of interdisciplinary Mathematics**, 803-814.
- [7] รักษิตกษัตริ์ โชติกิตติไพศาล. 2556. "ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คู่ควบสำหรับกาตรวจวัดคุณภาพน้ำในทางน้ำเอกรูป" วิทยานิพนธ์วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
- [8] Steven C. Chapra. 1997. **Surface Water-Quality Modeling**. New York : McGraw-Hill.



ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การประชุมวิชาการระดับชาติวิทยาศาสตร์วิจัย ครั้งที่ 6

THE 6<sup>th</sup> SCIENCE RESEARCH CONFERENCE

SCIENCE

RESEARCH

CONFERENCE

6<sup>th</sup>

รายงานสืบเนื่องจากการประชุมวิชาการ  
(Proceedings)

20-21 มีนาคม 2557

มหาวิทยาลัยบูรพา ชลบุรี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษา  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## วิธีชัดแจ้งสองระดับสำหรับตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำไหลไม่เอกรูปโดย

### สมการการแพร่-การพาอุทกพลศาสตร์

The two-level explicit methods for a water quality model in a non-uniform flow stream with a hydrodynamic advection-dispersion equation

ธนดล บัลลังก์โพธิ์<sup>1</sup>\*, และ นพรัตน์ โพธิ์ชัย<sup>1</sup>

Thanadon Bunlungpho<sup>1</sup>\* and Nopparat Pochai<sup>1</sup>

<sup>1</sup>สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

#### บทคัดย่อ

ตัวแบบคุณภาพน้ำในทางน้ำที่มีลักษณะการไหลที่ไม่ราบเรียบจำเป็นต้องทราบความเร็วและการยกตัวของน้ำในลำน้ำ ซึ่งโดยทั่วไปหากไม่ใช้วิธีการเก็บข้อมูลภาคสนาม จะต้องคำนวณหาความเร็ว จากตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในรูปแบบของสมการน้ำต้นแล้วนำความเร็วนี้ไปคำนวณต่อในตัวแบบการกระจายในรูปแบบสมการ การแพร่-การพา ในงานวิจัยนี้ต้องการนำเสนอวิธีเชิงตัวเลขที่มีประสิทธิภาพ โดยผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีชัดแจ้งสองระดับ ได้แก่ วิธี Forward Time Central Space (FTCS) , วิธี Upwind และวิธี Lax-wendroff เพื่อหาผลเฉลยของตัวแบบการกระจายโดยพบว่าทั้ง 3 วิธีนี้ เป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพสูงซึ่งมีความแม่นยำและมีความเร็วในการคำนวณสูงโดยวิธีทั้ง 3 ให้ผลการคำนวณใกล้เคียงกัน แต่วิธี FTCS มีช่วงของความเสถียรกว้างกว่าวิธีอื่นจึงมีความยืดหยุ่นในการคำนวณมากกว่า

#### Abstract

A water quality model in a non-uniform flow stream have to know velocity and elevation. So it does not use in generally way. Velocity is calculated from a hydrodynamic model in shallow water system. Then bring this result to calculate in dispersion model in advection-dispersion equation. This research is presented the two-level explicit methods (FTCS,Upwind and Lax-wendroff) for these results. It be found that this solution is more efficient and time of calculation is very good. But FTCS have more space of stable more than other scheme. So there is more flexible in calculated than another.

**Keywords** : two-level explicit methods, water quality model, hydrodynamic model, dispersion model, advection-diffusion

equation, shallow water equation, forward time central space, upwind scheme, lax-wendroff scheme

\*Corresponding author. E-mail : aj\_don@hotmail.co.th

## 1. INTRODUCTION

Procedure for comparing and detecting the quantity of pollutants both in the air and water mostly are computed by field measurement and a mathematical simulation. The numerical technique for solving the one dimensional advection-dispersion equation with constant coefficient [1]. For the shallow water mass transport problems that are presented in [2] The numerical techniques for solving the uniform flow of stream water quality model, the one dimensional advection-diffusion equation [3]. Most non-uniform flow models demand data concerned with the velocity of the current at any point and any time in the domain. The hydrodynamics model provides the velocity field and tidal elevation of the water [4]. The hydrodynamics model and advection-diffusion equation were used to approximate the velocity of the water, respectively. In this research, the two-level explicit methods for a water quality model in a non-uniform flow stream with hydrodynamic advection-dispersion equation. The numerical technique for solving the one dimensional advection-dispersion equation with inconstant coefficient. The result from hydrodynamic model are data for the non-uniform flow of the advection-diffusion equation, Which provides the pollutant concentration field. The term of friction forces due to the drag of sides of the stream considered. The stream has a simple one space dimension. We use the Crank-Nicolson method [5] and the two-level explicit method [1] to approximate the velocity, the tidal elevation and the concentration from aforesaid models.

## 2. MATHEMATICAL MODEL

### 2.1 Hydrodynamic model

We make the simpler assumption in the continuity and momentum balance, assuming the Coriolis, shearing stresses and the surface wind are small [4],

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta)u] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

where  $h(x)$  is the depth measured from the mean water level to the stream bed (m),  $\zeta(x, t)$  is the elevation from the mean water level to the temporary water surface or the tidal elevation (m/s),  $x$  is longitudinal distance along the stream (m),  $t$  is the time (s),  $u(x, t)$  are the velocity components (m/s), for all  $x \in [0, l]$ ,  $g$  is gravitational force ( $m/s^2$ ) We assume that  $h$  is a constant and  $\zeta \ll h$ . Then the Eqs.(1) and (2) leads to,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

We will consider the equation in the dimensionless problem by letting  $U = \frac{u}{\sqrt{gh}}, X = \frac{x}{l}, Z = \frac{\zeta}{h}, T = \left(\frac{t \cdot \sqrt{gh}}{l}\right)$ .

Substituting them into Eqs. (3) and (4) to represent the frictional forces due to the drag of the sides of the stream,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับใช้ในห้องเรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$\frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial X} = 0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial Z}{\partial X} = -U, \tag{6}$$

with the initial conditions at  $t=0$  and  $0 \leq X \leq 1$  being specified  $Z=0$  and  $U=0$ . The boundary conditions for  $t > 0$  are specified :  $Z = e^t$  at  $X=0$  and  $\partial Z / \partial X = 0$  at  $X=1$ . The system of Eqs.(5) and (6) is called the shallow water equation with damped force for the hydrodynamic model in a non-uniform flow stream. We will solve the equation by using the Crank-Nicolson[5].

### 2.2 Dispersion model: One-dimension advection diffusion equation

In a stream water quality model, the governing equations are the dynamic one-dimensional advection diffusion equation (ADE). A simplified representation by averaging the equation over the depth is shown in

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{7}$$

where  $C(x,t)$  is the concentration averaged by depth at the point  $x$  and at time  $t$ ,  $D$  is the diffusion coefficient  $u(x,t)$  is the velocity component, for all  $x \in [0,1]$ , We will consider the model with following conditions. The initial condition  $C(x,0)=0$  at  $t=0$  for all  $X > 0$ . The boundary conditions  $C(0,t)=C_0$  at  $x=0$  and  $\partial C / \partial X = 0$  at  $x=1$  where  $C_0$  is a constant.

## 3. NUMERICAL TECHNIQUE

### 3.1 The Crank-Nicolson method for the hydrodynamic model

We will follows the numerical techniques of [4]. To find the water velocity and water elevation from Eqs.(5)-(6), with the initial condition  $Z = V = 0$  at  $T=0$ . The left boundary conditions for  $X=0, T > 0$  are specified:  $Z(0,t) = f(T) = \sin T$  and  $\partial V / \partial X = -e^T \cos T$  and the right boundary condition for  $X=1, T > 0$  are specified:  $\partial Z / \partial X = 0$  and  $V(0,t) = 0$ .  $M$  subintervals such that  $M\Delta x=1$  and the interval  $[0,T]$  into  $N$  subintervals such that  $N\Delta t = T$ . We can then approximate  $Z(x,t_n)$  by  $Z_i^n$ . The value of the difference approximation of  $Z(x,t)$  at point  $x = i\Delta x$  and  $t = n\Delta t$ , where  $0 \leq i \leq M$  and  $0 \leq n \leq N$ , and similarly defined for  $V_i^n$  and  $U_i^n$ . The grid points  $(x_i, t_n)$  are defined by  $x_i = i\Delta x$  for all  $i=0,1,2,\dots,M$  and  $t_n = n\Delta t$  for all  $n=0,1,2,\dots,N$  in which  $M$  and  $N$  are positive integers. Using the Crank-Nicolson Method [5], We get the following finite difference equation:

$$\left[ I - \frac{1}{4} \lambda A (\Delta_x + \nabla_x) \right] W_i^{n+1} = \left[ I + \frac{1}{4} \lambda A (\Delta_x + \nabla_x) \right] W_i^n, \tag{8}$$

where  $W_i^n = \begin{Bmatrix} V_i^n \\ Z_i^n \end{Bmatrix}$ ,  $\Delta_x W_i^n = W_{i+1}^n - W_i^n$ ,  $\nabla_x W_i^n = W_i^n - W_{i-1}^n$ ,  $I$  is the unit matrix of order 2 and  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ . Applying the initial and boundary conditions given, we obtained the general form

$$G^{n+1}\tilde{W}^{n+1} = E^n\tilde{W}^n + F^n, \tag{9}$$

where

$$G^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} & 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} \\ \frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 & 0 & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{4}a_1^{n+1} & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{4}a_2^{n+1} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^n & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^n & 1 & \frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^n & 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{4}a_1^n \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 & 0 & 1 & \frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_1^n & 1 & -\frac{\lambda}{4}a_2^n \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4}a_2^n & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F^n = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{4}a_1^{n+1}\sin(t_{n+1}) - \frac{\lambda}{4}a_1^n\sin(t_n) \\ -\frac{\lambda}{4}a_2^{n+1}\Delta x e^{t_{n+1}}\cos(t_{n+1}) - \frac{\lambda}{4}a_2^n\Delta x e^t\cos(t_n) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{W}^n = \begin{bmatrix} W_1^{n+1} \\ W_2^{n+1} \\ \vdots \\ W_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}.$$

### 3.2 The two-level explicit methods for the dispersion model

We can approximate  $C(x_i, t_n)$  by  $C_i^n$ . The value of the difference approximation of  $C(x, t)$  at point  $x = i\Delta x$  and  $t = n\Delta t$ , where  $0 \leq i \leq M$  and  $0 \leq n \leq N$ . The grid point  $(x_i, t_n)$  are defined by  $x_i = i\Delta x$  for all  $i = 0, 1, 2, \dots, M$  and  $t_n = n\Delta t$  for all  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  in which  $M$  and  $N$  are positive integers. Consider the following approximations of the derivatives in the advection-diffusion equation (7) follow:

$$C \equiv C_i^{n+1}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} \equiv \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} \equiv \varphi \frac{C_i^n - C_{i-1}^n}{\Delta x} + (1 - \varphi) \frac{C_{i+1}^n - C_{i-1}^n}{2\Delta x}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \equiv \frac{C_{i+1}^n - 2C_i^n + C_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}, \tag{13}$$

$$U \equiv \hat{U}^{n+1}. \tag{14}$$

This gives the weighted explicit finite-difference formula

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2\beta + \gamma_i^{n+1}(1 + \varphi))C_{i-1}^n + (1 - 2\beta - \gamma_i^{n+1}\varphi)C_i^n + \frac{1}{2}(2\beta - \gamma_i^{n+1}(1 - \varphi))C_{i+1}^n. \tag{15}$$

For  $1 \leq i \leq M-1$  and  $0 \leq n \leq N-1$ , where

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\gamma_i^{n+1} = \tilde{W}^{n+1} \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{ and } \beta = D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}. \quad (16)$$

A Von Neumann stability of (15) yield [1] the stability condition

$$\frac{(\gamma_i^{n+1})^2 - (\gamma_i^{n+1})\varphi}{2} \leq \beta \leq \frac{(1 - \gamma_i^{n+1})\varphi}{2}. \quad (17)$$

### 3.2.1 The forward time central space scheme

If  $\varphi=0$ , the Eq(15) becomes,

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2\beta + \gamma_i^{n+1})C_{i-1}^n + (1 - 2\beta)C_i^n + \frac{1}{2}(2\beta - \gamma_i^{n+1})C_{i+1}^n. \quad (18)$$

This scheme is stable in the following legion  $\frac{(\gamma_i^{n+1})^2}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ .

### 3.2.2 The upwind explicit scheme

If  $\varphi=1$ , the Eq(15) becomes,

$$C_i^{n+1} = (\beta + \gamma_i^{n+1})C_{i-1}^n + (1 - 2\beta - \gamma_i^{n+1})C_i^n + \beta C_{i+1}^n. \quad (19)$$

This scheme is stable in the following legion  $\frac{(\gamma_i^{n+1})^2 - (\gamma_i^{n+1})}{2} \leq \beta \leq \frac{(1 - \gamma_i^{n+1})}{2}$ .

### 3.2.3 The Lax-wendroff technique

If  $\varphi = \gamma_i^{n+1}$ , the Eq(15) becomes,

$$C_i^{n+1} = \frac{1}{2}(2\beta + \gamma_i^{n+1}(1 + \gamma_i^{n+1}))C_{i-1}^n + (1 - 2\beta - (\gamma_i^{n+1})^2)C_i^n + \frac{1}{2}(2\beta - \gamma_i^{n+1}(1 - \gamma_i^{n+1}))C_{i+1}^n. \quad (20)$$

This scheme is stable in the following legion  $0 \leq \beta \leq \frac{(1 - (\gamma_i^{n+1})^2)}{2}$ .

### 3.3 A numerical experiment

Suppose we want to measure the pollutant concentration  $C$  of a uniform stream. A stream is aligned with longitudinal distance 1.0 km total length and 1.0 m depth. There is industrial plant which discharges waste water into the stream and the pollutant concentration at discharge point is  $C(0,t) = C_0 = 1 \text{ mg/l}$  at  $x=0$  for all  $t > 0$  and  $C(x,0) = 0$  at  $t=0$ . The elevation of water at the discharge point can be described as a function  $d(0,t) = f(t) = \sin t$  m for all  $t > 0$  and the elevation does not change at  $x=1.0 \text{ km}$ . The stream system characteristic are: the diffusion coefficient  $D$  is  $0.05 \text{ m}^2/\text{s}$ . Employing the Eq(9) into

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น คือทั้งห้าฉบับให้จัดแบ่งลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Eqs(5-6), we can obtain the numerical solutions of the velocity  $u(x,t)$  and the elevation  $\zeta(x,t)$  of the water current.

Next, we inputs the velocity  $u(x,t)$  into the Eqs(18),(19),(20) respectively. We can now obtain the water pollutant concentrations in each positions and times as Tables 1, Table 2, Table 3 and Fig (2) respectively. The Stability of all numerical techniques are demonstrated on Table 4.

**Table 1** The pollutant concentration of the FTCS scheme  $C(x,t)$

$t$	$x$										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	1.0000	0.3233	0.1152	0.0511	0.0281	0.0177	0.0118	0.0078	0.0048	0.0023	0.0002
20	1.0000	0.9996	0.9971	0.9874	0.9578	0.8878	0.7594	0.5753	0.3672	0.1727	0.0169
30	1.0000	0.9957	0.9890	0.9751	0.9472	0.8955	0.8083	0.6746	0.4892	0.2579	0.0262
40	1.0000	0.2776	0.1730	0.1405	0.1173	0.0960	0.0757	0.0560	0.0368	0.0182	0.0018
50	1.0000	0.9925	0.9647	0.8966	0.7735	0.6031	0.4169	0.2527	0.1325	0.0544	0.0051

**Table 2** The pollutant concentration of the upwind explicit scheme  $C(x,t)$

$t$	$x$										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	1.0000	0.3018	0.1024	0.0451	0.0253	0.0163	0.0110	0.0074	0.0045	0.0022	0.0002
20	1.0000	0.9983	0.9960	0.9843	0.9517	0.8792	0.7509	0.5699	0.3655	0.1727	0.0170
30	1.0000	0.9952	0.9681	0.9735	0.9448	0.8922	0.8042	0.6703	0.5062	0.2558	0.0260
40	1.0000	0.2567	0.1683	0.1334	0.1168	0.0957	0.0755	0.0558	0.0367	0.0181	0.0018
50	1.0000	0.9910	0.9608	0.8905	0.7678	0.5998	0.4153	0.2537	0.1335	0.0548	0.0051

**Table 3** The pollutant concentration of The Lax-Wendroff scheme  $C(x,t)$

$t$	$x$										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
10	1.0000	0.3149	0.1061	0.0463	0.0258	0.0166	0.0112	0.0075	0.0046	0.0022	0.0002
20	1.0000	0.9994	0.9962	0.9848	0.9532	0.8822	0.7557	0.5762	0.3720	0.1787	0.0226
30	1.0000	0.9954	0.9884	0.9742	0.9461	0.8944	0.8079	0.6756	0.4924	0.2640	0.0347
40	1.0000	0.2647	0.1698	0.1403	0.1176	0.0965	0.0762	0.0565	0.0374	0.0188	0.0024
50	1.0000	0.9915	0.9622	0.8935	0.7724	0.6055	0.4220	0.2583	0.1367	0.0569	0.0068

**Table 4** Stability of the two-level explicit methods

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งท่านยังให้ข้อมูลก่อนเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\Delta x$	$\Delta t$	$\beta$	Stability		
			FTCS	Lax-wendroff	Upwind
0.01	0.00025		Stable	Stable	Stable
0.02	0.001	0.125	Stable	Stable	Stable
0.04	0.004		Stable	Stable	Stable
0.01	0.0005		Stable	Stable	Stable
0.02	0.002	0.25	Stable	Stable	Stable
0.04	0.008		Stable	Stable	Stable
0.01	0.001		Stable	Unstable	Unstable
0.02	0.004	0.5	Stable	Unstable	Unstable
0.04	0.016		Stable	Unstable	Unstable

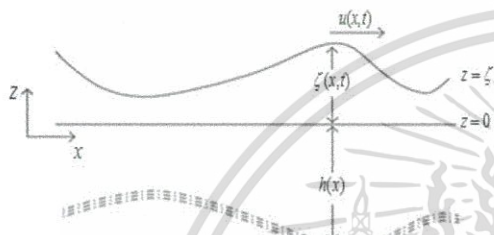


Figure 1 The Shallow water

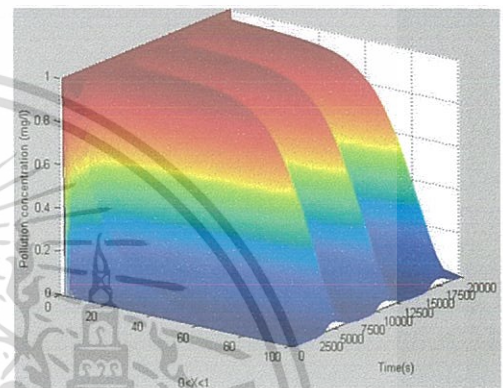


Figure 2 (FTCS) The pollutant concentration  $C(x,t)$  at  $t = 1 \text{ h } 46 \text{ min}$

#### 4. CONCLUSION

In this research, we can combine the hydrodynamic model and the advection-diffusion equation for an approximate of the pollutant concentration in a stream when the velocity of the current is non-uniform. Which the FTCS – type scheme of stability conditions are higher than the upper bound, Lax-Wendroff technique and upwind respectively. This means that If you want to use Time speed big time for you want to reduce the speed of calculation. The two level explicit methods give good agreement solution. The velocity varied by time and position. Consequently, the concentrations of water pollutant are also varied by times and positions as well.

#### 5. REFERENCES

- Dehghan, M. (2004). Weight finite difference techniques for the one-dimensional advection-diffusion equation. *Elsevier Applied Science Publishers*, 307-319.
- Garzon, A. and D'Alpaos, L. (1992, October). A modified method of the characteristic technique combined with Galerkin finite Element method to solve shallow water mass transport problems, *Proc. 23rd International Conference in Coastal Engineering, Venice, Italy*, 3068-3080.
- Pochai, N. (2009). A numerical computation of a non-dimensional form of stream water quality model with hydrodynamic advection-dispersion-reaction equations. *Elsevier Applied Science Publishers*, 666-673.
- Pochai, N., Tangmanee, S., Crane, L.J. and Miller, J.J.H. (2008). A water quality computation in the uniform channel, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, 803-814.
- Mitchell, A.R. (1969) *Computational methods in partial differential equations*.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



# มหาวิทยาลัยบูรพา

ขอแสดงความยินดีต่อการได้รับรองว่าผลงานวิจัย

เรื่อง "วิธีตัดแต่งสิ่งของระดับสำหรับตัวแบบคุณภาพในงานช่างไม้ไหลไม่เอก रूप โดย  
ศรศักดิ์ แสงสว่าง และ พิชัย-ภาสกร ภาสกรวิเศษ"

ต้นตอ บัลลังก์โพธิ์

ได้ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการผู้ทรงคุณวุฒิ ให้ได้รับรางวัลรองชนะเลิศอันดับ ๒

การนำเสนอผลงานวิจัยแบบบรรยาย กลุ่มสาขาคณิตศาสตร์และสถิติ

ในการประชุมวิชาการระดับชาติ "วิทยาศาสตร์วิจัย" ครั้งที่ ๖

ระหว่างวันที่ ๒๐ - ๒๑ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๕๓

*อุบลรัตน์*

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อุษาวดี ต้นดีวรานุรักษ์)

คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา

ภาคผนวก ข.

## โปรแกรมสำหรับการหาความเร็ว การยกตัวของกระแสน้ำ และค่าความเข้มข้นของมลพิษ

```
%***** Hydrodynamic ADRE *****
```

```
clear all
```

```
xx = input('Please Input Delta_x = '); % Delta of x
```

```
tt = input('Please Input Delta_t = '); % Delta of t
```

```
T = input('Please Input Time = '); % Number of time steps
```

```
dif = input('Please Input D = '); % Number of time steps
```

```
La = tt / xx ;
```

```
X = 1 / xx ;
```

```
n = (T / tt) ;
```

```
H = input('Please Input High = ');
```

```
beta = (dif*tt)/(xx*xx);
```

```
fprintf('Lambda = %.4f\n',La);
```

```
fprintf(' i = %.0f\n',X);
```

```
fprintf(' n = %.0f\n',n);
```

```
%*Progress*%
```

```
h = waitbar(0,'Initializing waitbar...!');
```

```
for Round=1:single(n)
```

```
%***** Variable *****
```

```
size = (X-1)*2;
```

```
I = eye(2,2);
```

```
G = zeros(size,size);
```

```
E = zeros(size,size);
```

```
U = zeros((X-1)+2,single(n));
```

```
D = zeros((X-1)+2,single(n));
```

```
F = zeros(size,1);
```

```
a1 = exp(Round*tt) ;
```

```
a2 = exp(-1*Round*tt);
```

```
F(1,1) = (-1*La*a1*sin(Round*tt)/4)-(1*La*a1*sin((Round-1)*tt)/4);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
F(2,1) = (-1*La*a2*xx*exp(Round*tt)*cos(Round*tt)/4)+(-1*La*a2*xx*exp((Round-1)*tt)*cos((Round-1)*tt)/4);
```

```
A = [0 -1*La*a1/4; -1*La*a2/4 0];
```

```
B = [0 La*a1/4; La*a2/4 0];
```

```
x1 = [1 0; La*a2/4 1];
```

```
x2 = [1 -1*La*a1/4; 0 1];
```

```
% ***** Show Round *****
```

```
waitbar(((Round/single(n))),h,sprintf(' Progress: %.2f%% ',(Round/single(n)*100)))
```

```
% ***** Start Define Matrix G *****
```

```
for i=3:2:size
```

```
  for j=0:1
```

```
    for k=0:1
```

```
      G(i+j,i+k) = I(j+1,k+1); %*** Define I
```

```
      G((i-2)+j,i+k) = A(j+1,k+1); %*** Define A
```

```
      G(i+j,(i-2)+k) = B(j+1,k+1); %*** Define B
```

```
      G(j+1,k+1) = x1(j+1,k+1); %*** Define x1
```

```
      G(size-j,size-k) = x2(2-j,2-k); %*** Define x2
```

```
    end
```

```
  end
```

```
end
```

```
% *****Matrix E*****
```

```
  if(Round==1)
```

```
    E = G*0;
```

```
    Temp = G;
```

```
  else
```

```
    E = Temp;
```

```
  for i=1:size
```

```
    for j=1:size
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

        if(i~=j)
            E(i,j) = -E(i,j);
        end;
    end;
end;
Temp = G;
end;

```

```

%***** Result (UD)*****
if(Round==1)
    Tempresult1 = G\F;
    result = Tempresult1;
else
    Tempresult2 = G\((E*Tempresult1)+F);
    for i=1:size
        result(i,Round)=Tempresult2(i,1);
    end;
    Tempresult1 = Tempresult2;
end;
VBoundary(Round,1) = result(1,Round)+(exp(Round*tt)*xx*cos(Round*tt));
DBoundary(Round,1) = sin(Round*tt);
for i=1:2:size-1
    result(i,Round) = result(i,Round)*exp(-1*Round*tt);
end;
VBoundary(Round,1) = VBoundary(Round,1)*exp(-1*Round*tt);

end;
%***** Split result to U,D *****%
if (mod(size,2)==0)
    r = (size/2)+1;
else

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

r = (size/2)-1;
end;
for i=1:single(n)
z=1;
for j=2:r
for k=1:2
if(k==1)
U(j,i)=result(z,i);
z=z+1;
else
D(j,i)=result(z,i);
z=z+1;
end;
end;
end;
end;

%***** Boundary *****
for i=1:single(n)
U(1,i)= VBoundary(i,1);
D(1,i)= DBoundary(i,1);
D((X-1)+2,i) = D(X,i);
end;

UU = transpose(U);
DD = transpose(D);

%***** Intial *****
UUU = zeros(single(n)+1,(X-1)+2);

DDD = zeros(single(n)+1,(X-1)+2);

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

for i=1:single(n)
    for j=1:X+1;
        UUU(i+1,j)= UU(i,j);
    end;
end;
UUU(1,1)= tt ;

for i=1:single(n)
    for j=1:X+1;
        DDD(i+1,j)= DD(i,j);
    end;
end;

%***** Concentration Upwind *****
Cupwind = UUU;
for i=1:single(n)+1
    Cupwind(i,1) = 1;
end;
for i=2:single(n)+1
    for j=2:X
        Cupwind(i,j) = ((beta+(La*UUU(i,j)))*Cupwind(i-1,j-1)) + ((1-(2*beta)-
(La*UUU(i,j)))*Cupwind(i-1,j)) + (beta*Cupwind(i-1,j+1));
    end;
end;
for i=2:single(n)+1
    Cupwind(i,(X-1)+2) = Cupwind(i,(X-1)+1) ;
end;

%
%***** Concentration FTCS *****
%
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

CFTCS = UUU;
for i=1:single(n)+1
    CFTCS(i,1) = 1;
end;
for i=2:single(n)+1
    for j=2:X
        CFTCS(i,j) = (((2*beta)+(La*UUU(i,j)))*CFTCS(i-1,j-1))/2 + ((1-(2*beta))*CFTCS(i-1,j)) + (((2*beta)-(La*UUU(i,j)))*CFTCS(i-1,j+1))/2);
    end;
end;
for i=2:single(n)+1
    CFTCS(i,(X-1)+2) = CFTCS(i,(X-1)+1);
end;
% %***** Concentration Lax-Wendroff *****
%
CLax = UUU;
for i=1:single(n)+1
    CLax(i,1) = 1;
end;
for i=2:single(n)+1
    for j=2:X
        CLax(i,j) = (((2*beta)+(La*UUU(i,j))+((La*UUU(i,j))^2))*CLax(i-1,j-1))/2 + ((1-(2*beta)-((La*UUU(i,j))^2))*Cupwind(i-1,j)) + (((2*beta)-(La*UUU(i,j))+((La*UUU(i,j))^2))*CLax(i-1,j-1))/2);
    end;
end;
end;
for i=2:single(n)+1
    CLax(i,(X-1)+2) = CLax(i,(X-1)+1);
end;

Uend = UUU*(sqrt(9.8*H));

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

CFTCSend = Uend;
for i=1:single(n)+1
    CFTCSend(i,1) = 1;
end;
for i=2:single(n)+1
    for j=2:X
        CFTCSend(i,j) = (((2*beta)+(La*Uend(i,j)))*CFTCSend(i-1,j-1))/2 + ((1-
(2*beta))*CFTCSend(i-1,j)) + (((2*beta)-(La*Uend(i,j)))*CFTCSend(i-1,j+1))/2);
    end;
end;
for i=2:single(n)+1
    CFTCSend(i,(X-1)+2) = CFTCSend(i,(X-1)+1);
end;
%***** Plot Graph *****
subplot(2,1,1), mesh(UUU);
title('U')
ylabel('0<t<T')
xlabel('0<x<1')
zlabel('Velocity of water(m/s)')

subplot(2,1,2), mesh(DDD);
title('D')
ylabel('0<t<T')
xlabel('0<x<1')

Graph = moviein(n)
for j = 1:n
    plot(D(:,j))
    axis([0,X,-2,2,])
    grid on
    ylabel('water height')
    xlabel('distance')

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

Graph(:,j) = getframe;
end
movie(Graph)

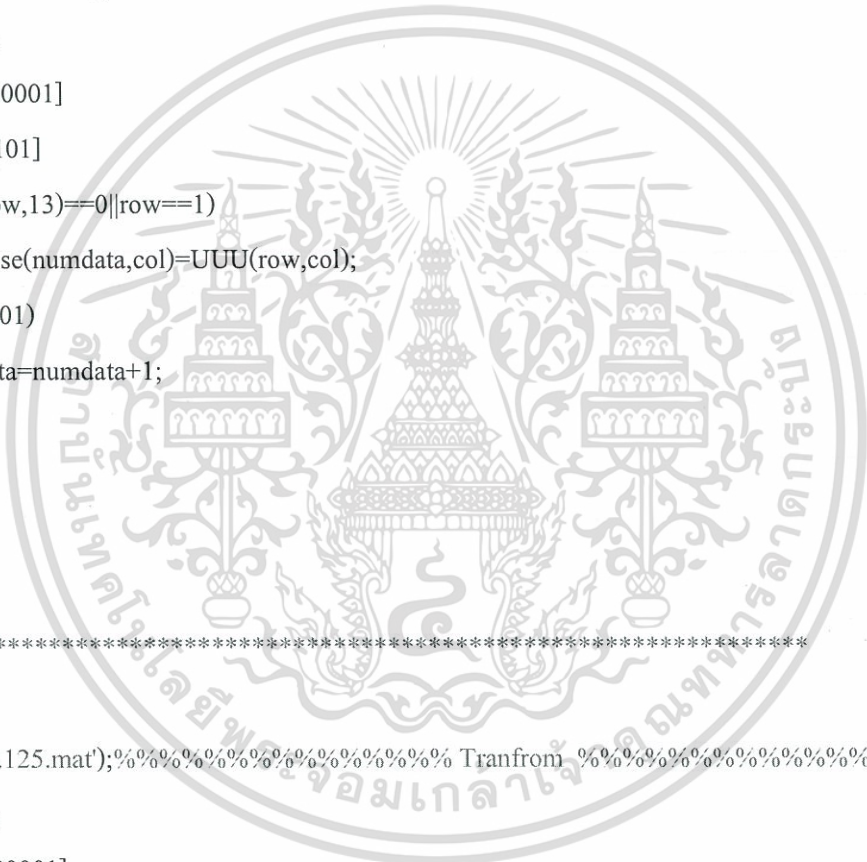
```

## โปรแกรมสำหรับการเปลี่ยนจากรูปวีรมิติให้มีมิติ (Tranfrom)

```

clear all;
load('Ubeta0.125.mat');%%%%%%%%%% Tranfrom %%%%%%%%%%%
numdata = 1;
for row =[1:80001]
    for col =[1:101]
        if (rem(row,13)==0||row==1)
            datachoose(numdata,col)=UUU(row,col);
            if(col==101)
                numdata=numdata+1;
            end
        end
    end
end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all;
load('Dbeta0.125.mat');%%%%%%%%%% Tranfrom %%%%%%%%%%%
numdata = 1;
for row =[1:80001]
    for col =[1:101]
        if (rem(row,13)==0||row==1)
            datachoose(numdata,col)=DDD(row,col);
            if(col==101)
                numdata=numdata+1;
            end
        end
    end
end
end

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

end

end

\*\*\*\*\*

clear all;

load('CFTCSbeta0.125.mat'); %%% Tranfrom

%%%

numdata = 1;

for row =[1:80001]

for col =[1:101]

if (rem(row,13)==0||row==1)  
datachoose(numdata,col)=CFTCS(row,col);

if(col==101)

numdata=numdata+1;

end

end

end

end

\*\*\*\*\*

%%%

clear all;

load('CupwindBeta0.125.mat'); %%% Tranfrom %%%

numdata = 1;

for row =[1:80001]

for col =[1:101]

if (rem(row,13)==0||row==1)

datachoose(numdata,col)=Cupwind(row,col);

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

if(col==101)
    numdata=numdata+1;

end

end

end

end

```

%%%%%%%%%

```

clear all;

load('CLaxbeta0.125.mat');%%%%%%%%% Tranfrom %%%%%%%%%%

numdata = 1;

for row =[1:80001]
    for col =[1:101]
        if (rem(row,13)==0||row==1)
            datachoose(numdata,col)=CLax(row,col);
            if(col==101)
                numdata=numdata+1;
            end
        end
    end
end

end

end

end

end

```

%%%%%%%%%

```

clear all;

load('CFTCSbeta0.2500.mat');%%%%%%%%% Tranfrom

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

numdata = 1;
for row =[1:40001]
    for col =[1:101]
        if (rem(row,6)==0||row==1)
            datachoose(numdata,col)=CFTCS(row,col);
        if(col==101)
            numdata=numdata+1;

        end
    end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear all;
load('CupwindBeta0.25.mat');%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Tranfrom %%%%%%%%%
numdata = 1;
for row =[1:40001]
    for col =[1:101]
        if (rem(row,6)==0||row==1)
            datachoose(numdata,col)=Cupwind(row,col);
        if(col==101)
            numdata=numdata+1;

        end
    end
end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

clear all;
load('CLaxbeta0.25.mat');%%%%%%%%%% Tranfrom %%%%%%%%%%%
numdata = 1;
for row =[1:40001]
    for col =[1:101]
        if (rem(row,6)==0||row==1)
            datachoose(numdata,col)=CLax(row,col);
        if(col==101)
            numdata=numdata+1;

        end
    end
end
end
%%%%%%%%%%

clear all;
load('CFTCSbeta0.5.mat');%%%%%%%%%% Tranfrom %%%%%%%%%%%
numdata = 1;
for row =[1:20001]
    for col =[1:101]
        if (rem(row,3)==0||row==1)
            datachoose(numdata,col)=CFTCS(row,col);
        if(col==101)
            numdata=numdata+1;

        end
    end
end
end
end

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-สกุล	นาย ธนดล บัลลังก์โพธิ์
วัน เดือน ปีเกิด	10 เมษายน 2532
สถานที่เกิด	กรุงเทพฯ
ประวัติการศึกษา	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง
วุฒิการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ปีการศึกษา	2553



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้