การคำนวณค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่มีคาบโดยวิธีการเลือกตัวอย่าง

ROOT MEAN SQUARE CALCULATIONS OF PERIODIC SIGNALS BY SAMPLING METHOD

สมภพ พุ่มจันทร์

SOMPOP POOMJAN

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาฟิสิกส์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2556

KMITL-2013-SC-M-013-015

ROOT MEAN SQUARE CALCULATIONS OF PERIODIC SIGNALS BY SAMPLING METHOD

SOMPOP POOMJAN

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN APPLIED PHYSICS
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2013

KMITL-2013-SC-M-013-015

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การคำนวณค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่มีคาบโดยวิธีการเลือกตัวอย่าง Root mean square calculations of periodic signals by sampling method
นักศึกษา	นายสมภพ พุ่มจันทร์
รหัสประจำตัว	54650617
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	ฟิสิกส์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ดร.ประธาน บุรณศิริ

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	**ลายมือชื่อ**
ดร.วรการ นียากร	
ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย	
ดร.สืบตระกูล สุชาติ	
ดร.ประธาน บุรณศิริ	

วัน / เดือน/ ปี ที่สอบ 30 เมษายน พ.ศ. 2556 เวลา 15.30 – 18.30 น.
สถานที่สอบ ณ ห้อง 307 ชั้น 3 อาคารจุฬาภรณวลัยลักษณ์ 1

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.ดุษณี ธนะบริพัฒน์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่...23...**เดือน**...พ.ค....**พ.ศ.**...56...

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การคำนวณค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่มีคาบโดยวิธีการเลือกตัวอย่าง
นักศึกษา	นายสมภพ พุ่มจันทร์
รหัสประจำตัว	54650617
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	ฟิสิกส์ประยุกต์
พ.ศ.	2556
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ดร. ประธาน บุรณศิริ

บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เสนอวิธีการเลือกตัวอย่างเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่มีคาบ ซึ่งจะนำไปประยุกต์ใช้กับสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับหรือสัญญาณคลื่นอื่นๆ ที่จำเป็นต้องคำนวณหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยโดยการสร้างสัญญาณที่มีคาบจากฟังก์ชันที่มีคาบรูปแบบต่างๆที่มาจากการสังเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ แล้วนำฟังก์ชันเหล่านี้มาหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ย จากนั้นจะวิเคราะห์ผลที่ได้เพื่อหาคุณสมบัติร่วมกัน ซึ่งผลการทดลองพบว่าฟังก์ชันที่มีคาบจะมีคุณสมบัติร่วมกันของค่าความคลาดเคลื่อน และท้ายที่สุดก็จะนำคุณสมบัติที่ได้นี้มาช่วยคำนวณหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยและสามารถสรุปเป็นสูตรการคำนวณที่สะดวก และ ใช้ข้อมูลที่น้อยกว่าการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ กฎจุดกึ่งกลาง กฎสี่เหลี่ยมคางหมู และ หลักเกณฑ์ซิมป์สันในวิชาแคลคูลัส ที่ใช้กันอยู่ตอนนี้

คำสำคัญ : ค่ารากกำลังสองเฉลี่ย, สัญญาณที่มีคาบ, ฟังก์ชันที่มีคาบ, การเลือกตัวอย่าง, อนุกรมฟูเรียร์, หลักเกณฑ์ซิมป์สัน

Thesis Title	Root mean square calculations of periodic signals by sampling method
Student	Sompop Poomjan
Student ID	54650617
Degree	Master of Science
Program	Applied Physics
Year	2013
Thesis Advisor	Dr. Prathan Buranasiri

ABSTRACT

This thesis was purposed to present the sampling method to calculate root mean square (RMS) of periodic signals in application parts of alternating current signals or other wave signals which require to calculate RMS by generating periodic signals from various periodic functions synthesized by Fourier series, then the functions will be calculated to obtain RMS. Later, the experimental results will introduce the same properties of such periodic functions in error calculation, finally the same error properties will support to calculate RMS to conclude a formula more conveniently and use lower sampling size than popular Calculus integration techniques of midpoint rule, trapezoid rule and Simpson’s rule.

Keywords: root mean square, periodic function, periodic signal, sampling method, Fourier series, Simpson’s rule

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จไปด้วยดี ด้วยคำแนะนำทางด้านทฤษฎีเกี่ยวกับสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับและการทดลองการรวมกันของสัญญาณที่มีคาบจากฟังก์ชันที่มีคาบ ตลอดจนได้รับคำแนะนำในการปรุงปรุงการทดลองจากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ดร.ประธาน บุรณศิริ และขอขอบคุณ ดร.วรการ นียากร ดร.สืบตระกูล สุชาติ และ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย ประธานกรรมการและคณะกรรมการการสอบวิทยานิพนธ์ ที่ได้ให้คำแนะนำในการดำเนินงานวิจัย จัดทำรูปเล่มวิทยานิพนธ์ ตลอดจนถึงชี้แนะข้อมูลที่เป็นประโยชน์ต่อการศึกษางานวิจัยให้มีคุณภาพที่มากขึ้น ขอขอบคุณรุ่นพี่ รุ่นเพื่อน และ รุ่นน้อง ภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังทุกคน ที่ได้ให้คำแนะนำแหล่งสืบค้นข้อมูลเพื่อการศึกษาค้นคว้า รวมไปถึงให้คำปรึกษาขั้นตอน ระบบการจัดทำและติดต่องานเพื่อเติมเต็มวิทยานิพนธ์ให้ดียิ่งขึ้นไป

ขอขอบคุณ อ.ธรรมรัตน์ แต่งตั้ง ที่ให้สถานที่ คำแนะนำ และ จัดหาสิ่งอำนวยความสะดวก งบประมาณบางส่วน ตลอดจนถึงแนะนำขั้นตอนการสมัคร เพื่อนำผลงานวิจัย ไปเสนอในงานประชุมวิชาการระดับนานาชาติได้สำเร็จ

ขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังที่มอบทุนการศึกษาโดยการเว้นค่าหน่วยกิตและค่าบำรุงการศึกษามาตลอด 2 ปี

ขอขอบคุณหน่วยงานบัณฑิตศึกษา คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังที่สนับสนุนและอำนวยความสะดวกในงานด้านเอกสาร

ขอขอบคุณคุณฤทธิรงค์ นวลศรี ผู้ช่วยตรวจสอบรูปเล่มและช่วยแก้ไขการรูปเล่มจนสมบูรณ์จนเป็นที่พอใจของกรรมการฯ

ท้ายที่สุดขอขอบคุณบิดามารดาและสมาชิกในครอบครัวทุกคนรวมถึงเพื่อนสนิทที่คอยสนับสนุนจุนเจือข้าพเจ้าทางด้านทุนและกำลังใจจนถึงปัจจุบัน และขอให้ความดีใดๆที่เกิดจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ส่งผลให้พวกเขาเหล่านั้นมีความสุขตลอดไป

นายสมภพ พุ่มจันทร์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานวิจัย

ค่ารากกำลังสองเฉลี่ย (root mean square : RMS) ของสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับเป็นค่าที่บอกถึงกำลังของสัญญาณนั้นว่ามีค่ามากน้อยเพียงใด โดยปกติค่านี้จะกล่าวในเรื่องไฟฟ้ากระแสสลับ ซึ่งจะคำนวณเฉพาะกระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้าเท่านั้น สำหรับผู้ที่มีความรู้พื้นฐานของไฟฟ้ากระแสสลับ ก็คงทราบว่าค่ากระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับนั้นจะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลา ขึ้นอยู่กับแหล่งจ่ายสัญญาณและสัญญาณรบกวนภายนอกที่เข้ามากวนแหล่งจ่ายจนทำให้สัญญาณรวมที่ได้จะแกว่งกวัดขึ้นลงไม่มีค่าที่แน่นอน บางครั้งอาจจะสลับบวกลบสูงต่ำไปมาตามลักษณะของสัญญาณที่รวมกันนั้น แต่จะต้องเกิดสลับกันซ้ำๆในช่วงเวลาแน่นอนที่เราจะเรียกช่วงเวลาที่แน่นอนนี้ว่า คาบ (period) หรือรอบเวลา (cycle) หากสัญญาณยังคงเกิดรอบใหม่ก็จะมีรูปร่างหรือค่าซ้ำกับสัญญาณที่เกิดในรอบแรก ไปเรื่อยๆแบบนี้จะเรียกสัญญาณที่มีลักษณะซ้ำๆแบบนี้ว่า สัญญาณที่มีคาบ (periodic signal) [1] ตามที่กล่าวในข้างต้นว่าสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับจะมีค่าที่ไม่แน่นอนซึ่งจะเปลี่ยนแปลงตามเวลา เราจึงต้องมีค่าที่เป็นตัวแทนที่จะบอกถึงกำลังของสัญญาณไฟฟ้านั้น โดยทั่วไปการหาค่าตัวแทนของกลุ่มข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงไปมา อาจจะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นตัวแทนของกลุ่มข้อมูลดังกล่าว แต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่สามารถนำมาใช้กับสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับได้เพราะคุณสมบัติการแกว่งกวัดขึ้นลงไปมาของค่ากระแสและแรงดันมีปริมาณที่เท่ากันทำให้ผลรวมของค่าเฉลี่ยเลขคณิตมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งทำให้ไม่สามารถบอกกำลังของสัญญาณได้เลย จึงทำให้นักฟิสิกส์เลือกที่จะการบอกขนาดของกระแสและแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับด้วยค่ารากกำลังสองเฉลี่ยมาเป็นตัวแทนในการเรียกขนาดของกระแสและแรงดันของไฟฟ้ากระแสสลับแทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต

การเกิดขึ้นของสัญญาณที่มีคาบทั่วไป จะเกิดขึ้นมาจากการรวมกันของคลื่นสัญญาณรูปไซน์หลายขบวนที่มีความถี่แตกต่างกันออกไป โดยที่คลื่นสัญญาณย่อยแต่ละขบวนจะเป็นคลื่นรูปไซน์ที่มีความถี่เป็นจำนวนนับเท่าของความถี่หลักมูล (fundamental frequency) ซึ่งเป็นไปตามหลักการของการสร้างสัญญาณที่มีคาบด้วยการใช้ชุดอนุกรมฟูเรียร์ของสัญญาณมาสังเคราะห์สัญญาณที่มีคาบโดยที่จะเป็นไปตามทฤษฎีอนุกรมฟูเรียร์ [2]

ค่ารากกำลังสองเฉลี่ยไม่ใช่เป็นค่าที่บอกถึงกำลังของสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับเพียงอย่างเดียวเท่านั้น แต่จากงานวิจัยมากมายได้มีการนำค่ารากกำลังสองเฉลี่ยไปใช้งานรูปแบบอื่นเช่น การประเมินคุณภาพของสัญญาณไฟฟ้าในช่วงเวลาที่พิจารณาเพื่อการป้องกันปัญหาค่า RMS ของ

สัญญาณเกินมาตรฐานที่ยอมรับได้ [3,4] และยังมีการนำค่าแรงดันไฟฟ้า RMS ไปใช้ในการออกแบบความปลอดภัยของแหล่งจ่ายไฟ [5] เป็นต้น

ในการคำนวณหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับนั้นได้มีการทำหลังจากที่ไมเคิ้ล ฟาราเดย์ ค้นพบว่าการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กทำให้เกิดแรงเคลื่อนไฟฟ้าอันนำไปสู่การเกิดกระแสไฟฟ้าในปี ค.ศ. 1831 [6] ซึ่งจะหาค่าโดยวิธีการทางคณิตศาสตร์คือการหาปริพันธ์ ซึ่งค่าที่เชื่อถือได้จะเป็นค่าที่มีการเพิ่มจำนวนข้อมูลที่มากที่สุด ยิ่งเพิ่มมากเท่าใด ก็จะน่าเชื่อถือมากขึ้นเท่านั้น ซึ่งได้มีการหาเรื่อยมาจนถึงปี ค.ศ. 1998 โดย สตีเว่น เอ. ลอมบาร์ดี้ (Steven A. Lombardi) ก็ได้มีการจดสิทธิบัตรการใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สัน เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่า RMS [7] และนำค่าที่คำนวณได้จัดทำเป็นค่ามาตรฐานของตน ซึ่งในปัจจุบันนี้การคำนวณหาค่า RMS โดยใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สันได้ใช้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณเพื่อหาค่ามาตรฐานของ RMS อาจจะไม่ยุ่งยากเหมือนในอดีตก็จริง แต่การประมวลผลทุกครั้ง ถ้าเราต้องการข้อมูลที่ถูกต้อง เราจะต้องประมวลผลด้วยข้อมูลที่มากมายเป็นจำนวนแสนหรือล้านข้อมูลขึ้นไปซึ่งไม่สะดวกและเสียเวลาในการทำเช่นนั้นทุกครั้ง หากต้องการความรวดเร็ว เราก็ต้องลดจำนวนข้อมูลและต้องยอมรับกับค่าความความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นอยู่บ้างเพื่อความรวดเร็วและทันต่อต่อการใช้งาน อันเป็นแรงจูงใจที่ทำให้ผู้ทำวิจัยอยากจะหาวิธีการที่ใช้ข้อมูลน้อยกว่าแต่ก็สามารถหาค่า RMS ได้ถูกต้องเช่นเดียวกับวิธีการของ สตีเว่น เอ. ลอมบาร์ดี้

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1.2.1 เพื่อศึกษาขั้นตอนและวิธีการเลือกตัวอย่างข้อมูลที่ได้จากสัญญาณหรือฟังก์ชันที่มีคาบที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นศูนย์

1.2.2 เพื่อศึกษาหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่มีคาบ โดยวิธีการ ใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สันรวมถึงวิธีอื่นเทียบกับวิธีการเลือกตัวอย่าง

1.2.3 เพื่อศึกษาหาสูตรความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่ได้จากวิธีการเลือกตัวอย่าง

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

ในวิทยานิพนธ์นี้เป็นการต่อยอดวิธีการของ สตีเว่น เอ. ลอมบาร์ดี้ที่ได้จดสิทธิบัตรไว้และจะเปรียบเทียบผลที่ได้กับวิธีการดังกล่าวซึ่งได้กำหนดขอบเขตเนื้อหาไว้ดังนี้

1.3.1 ศึกษาบทความที่เกี่ยวกับค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณหรือฟังก์ชันที่มีคาบ

1.3.2 ศึกษาองค์ประกอบและตัวแปรในการหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณหรือฟังก์ชันที่มีคาบ

1.3.3 ศึกษาจำนวนตัวอย่างที่เหมาะสมในการเลือกใช้ในวิธีการเลือกตัวอย่างของสัญญาณหรือฟังก์ชันที่มีคาบ

1.3.4 ศึกษาสัญญาณที่อยู่ในย่านความถี่ 20 เท่าของความถี่หลักมูลและสัญญาณที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นศูนย์

1.3.5 ศึกษาผลที่ได้เปรียบเทียบกันระหว่างการใช้วิธีเกณฑ์ซิมป์สันและวิธีการเลือกตัวอย่างและหาค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกัน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากงานวิจัย

1.4.1 สามารถอธิบายวิธีการเลือกตัวอย่างข้อมูลที่ได้จากสัญญาณหรือฟังก์ชันที่มีคาบที่จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นศูนย์

1.4.2 สามารถอธิบายวิธีการหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่มีคาบ โดยวิธีการใช้หลักเกณฑ์ซิมป์สันเทียบกับวิธีการเลือกตัวอย่าง

1.4.3 สามารถหาสูตรความคลาดเคลื่อนจากการคำนวณค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณที่ได้จากวิธีการเลือกตัวอย่าง

1.4.4 สามารถออกแบบการทดลอง เพื่อให้ได้ผลการทดลองที่มีประสิทธิภาพ

1.4.5 สามารถนำผลการทดลองที่ได้ไปประยุกต์ใช้กับงานอื่นๆ ได้

บทที่ 2
หลักการและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 ความรู้พื้นฐานการหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยของสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับ

จากที่กล่าวไว้ในบทนำ ค่ารากกำลังสองเฉลี่ย (root mean square : RMS) ของสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับ หรือเรียกอีกอย่างว่าค่ายังผล (effective) เป็นค่าที่บอกถึงกำลังของสัญญาณนั้นว่ามีค่ามากน้อยเพียงใด ซึ่งจะวัดค่าเฉพาะกระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้าเท่านั้น เราพบว่าค่ากระแสไฟฟ้าและแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับนั้นจะมีค่าเปลี่ยนแปลงตามเวลา ขึ้นอยู่กับแหล่งจ่ายสัญญาณและสัญญาณรบกวนภายนอกที่เข้ามากวนแหล่งจ่ายจนทำให้สัญญาณรวมที่ได้จะแกว่งกวัดขึ้นลงไม่มีค่าที่แน่นอน บางครั้งอาจจะสลับบวกลบสูงต่ำไปมาตามลักษณะของสัญญาณที่รวมกันนั้น แต่จะต้องเกิดสลับกันซ้ำๆในช่วงเวลาแน่นอนที่เราจะเรียกช่วงเวลาที่แน่นอนนี้ว่า คาบ (period) หรือ รอบเวลา (cycle) หากสัญญาณยังคงเกิดรอบใหม่ก็จะมีรูปร่างหรือค่าซ้ำกับสัญญาณที่เกิดในรอบแรก ไปเรื่อยๆแบบนี้จะเรียกสัญญาณที่มีลักษณะซ้ำๆแบบนี้ว่า สัญญาณที่มีคาบ (periodic signal) [1] ตามที่กล่าวในข้างต้นว่าสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับจะมีค่าที่ไม่แน่นอนซึ่งจะเปลี่ยนแปลงตามเวลา เราจึงต้องมีค่าที่เป็นตัวแทนที่จะบอกถึงกำลังของสัญญาณไฟฟ้านั้น โดยทั่วไปการหาค่าตัวแทนของกลุ่มข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงไปมา อาจจะใช้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นตัวแทนของกลุ่มข้อมูลดังกล่าว แต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่สามารถนำมาใช้กับสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับได้เพราะคุณสมบัติการแกว่งกวัดขึ้นลงไปมาของค่ากระแสและแรงดันมีปริมาณที่เท่ากันทำให้ผลรวมของค่าเฉลี่ยเลขคณิตมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งทำให้ไม่สามารถบอกกำลังของสัญญาณได้เลย จึงทำให้นักฟิสิกส์เลือกที่จะการบอกขนาดของกระแสและแรงดันไฟฟ้ากระแสสลับด้วยค่ารากกำลังสองเฉลี่ยมาเป็นตัวแทนในการเรียกขนาดของกระแสและแรงดันของไฟฟ้ากระแสสลับแทนค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ค่ารากกำลังสองเฉลี่ย (root mean square : RMS) ถูกนำมาใช้กันอย่างแพร่หลายในระบบไฟฟ้าเป็นเวลาหลายปี โดยจะเทียบเท่ากับสัญญาณกระแสตรง ซึ่งค่า RMS จะถูกนำมาเป็นตัวแทนของสัญญาณกระแสสลับ หากรูปสัญญาณมีลักษณะแบบที่เป็นรูปไซน์อย่างแท้จริง (pure sinusoidal shape) ดังรูปที่ 2.1 จะทำให้ค่า $RMS = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$

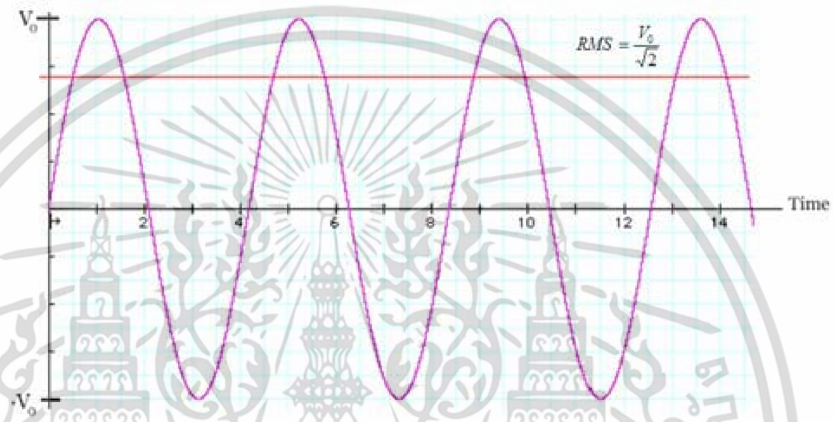
โดยทั่วไปแล้วเทคนิคการหาปริพันธ์ทางแคลคูลัสจะถูกใช้อย่างแพร่หลายในการคำนวณหา RMS ของสัญญาณจากสมการที่ (2.1) ตามนิยามของ RMS [1] ของฟังก์ชันหรือสัญญาณที่มีคาบตามรูปที่ 2.2

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_1+T} f^2(t)dt} \tag{2.1}$$

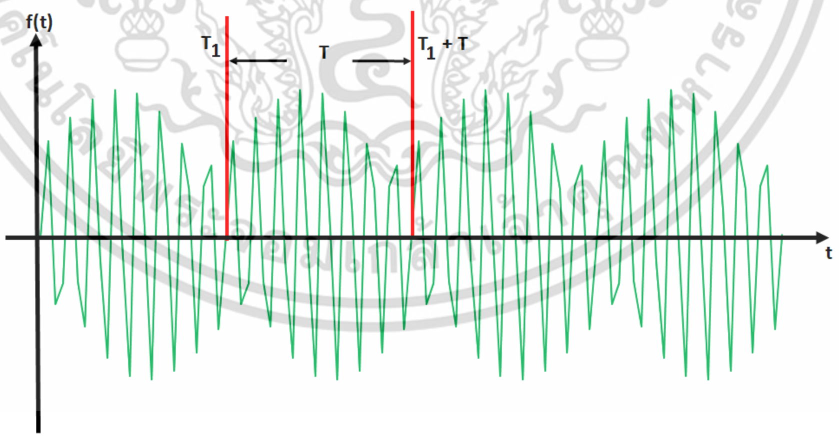
หรือจะได้ว่า

$$RMS^2 = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_1+T} f^2(t)dt \tag{2.2}$$

เมื่อ $f(t)$ คือฟังก์ชันที่จะหา RMS, T_1 คือ เวลาเริ่มต้น, T คือ คาบของสัญญาณนั้น



รูปที่ 2.1 แสดงค่า RMS ของสัญญาณรูปไซน์ที่ $RMS = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$ [8]



รูปที่ 2.2 แสดงสัญญาณมีคาบ T ซึ่งค่ารากกำลังสองเฉลี่ยจะถูกคำนวณระหว่าง T_1 และ $T_1 + T$

อ้างอิงมาจากนิยามของค่าคาดหวังหรือค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันระหว่างช่วงเวลา T_1 และ $T_1 + T$ จะเป็นดังสมการที่ (2.3) แสดงให้เห็นได้โดย

$$\left\langle f(t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} f(t)dt \tag{2.3}$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยของ $f^2(t)$ จะหาได้จาก

$$\left\langle f^2(t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} f^2(t)dt\,. \tag{2.4}$$

หรือจะได้ว่า

$$RMS^2 = \left\langle f^2(t) \right\rangle. \tag{2.5}$$

จากสมการที่ (2.3) และ (2.5) ค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันรูปไซน์จะหาค่าตามตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงค่า RMS ของฟังก์ชันรูปไซน์ โดยที่ w, a และ b เป็นค่าคงที่ใดๆ และจะประมาณให้ $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707107$

f(t)	<f(t)>	<f(t)xf(t)> = RMS^2	RMS	Remark
sin(wt)	0.000000	0.500000	0.707107	--
cos(wt)	0.000000	0.500000	0.707107	--
cos(at)sin(bt)	0.000000	0.250000	0.500000	--
sin(at)sin(bt)	0.000000	0.250000	0.500000	$a \neq b$
cos(at)cos(bt)	0.000000	0.250000	0.500000	$a \neq b$

ถึงแม้ว่าในการคำนวณด้วยวิธีทางปริพันธ์อาจจะทำให้ค่า RMS ที่ได้น่าเชื่อถือเพราะทำตามนิยามโดยตรง แต่กว่าจะได้ค่าที่น่าเชื่อถือได้นั้นต้องใช้ความละเอียดหรือจำนวนข้อมูลมากมาย ถ้าต้องการความละเอียดหรือความถูกต้องของค่า RMS มากๆ ก็จะต้องเพิ่มจำนวนข้อมูลเข้าไปมากขึ้นจะทำให้ค่า RMS ที่ได้น่าเชื่อถือมากยิ่งขึ้น

2.2 ตัวอย่างของการนำค่ารากกำลังสองเฉลี่ยไปใช้งาน

2.2.1 การหาค่าระยะความปลอดภัยในการออกแบบ แหล่งจ่ายไฟ

ในการออกแบบ แหล่งจ่ายไฟ จำเป็นที่จะต้องแยกส่วนที่มีความต่างศักย์ไฟฟ้าสูงให้ห่างจากจากผู้ใช้ดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงค่า RMS เพื่อจะนำไปคำนวณหาค่าระยะความปลอดภัย clearance ตามมาตรฐาน IEC60950 [5]

60950-1 © IEC:2001

Table 2H – Minimum clearances for insulation in primary circuits and between primary and secondary circuits

CLEARANCES in millimetres

WORKING VOLTAGE up to and including		MAINS TRANSIENT VOLTAGE 1 500 V (Nominal AC MAINS SUPPLY voltage ≤150 V)						MAINS TRANSIENT VOLTAGE 2 500 V (Nominal AC MAINS SUPPLY voltage >150 V ≤ 300 V)						MAINS TRANSIENT VOLTAGE 4 000 V (Nominal AC MAINS SUPPLY voltage >300 V ≤ 600 V)		
Voltage peak or d.c.	Voltage r.m.s. (sinu-soidal)	Pollution Degrees 1 and 2			Pollution Degree 3			Pollution Degrees 1 and 2			Pollution Degree 3			Pollution Degrees 1, 2 and 3		
V	V	F	B/S	R	F	B/S	R	F	B/S	R	F	B/S	R	F	B/S	R
71	50	0,4	1,0 (0,5)	2,0 (1,0)	0,8	1,3 (0,8)	2,6 (1,6)	1,0	2,0 (1,5)	4,0 (3,0)	1,3	2,0 (1,5)	4,0 (3,0)	2,0	3,2 (3,0)	6,4 (6,0)
210	150	0,5	1,0 (0,5)	2,0 (1,0)	0,8	1,3 (0,8)	2,6 (1,6)	1,4	2,0 (1,5)	4,0 (3,0)	1,5	2,0 (1,5)	4,0 (3,0)	2,0	3,2 (3,0)	6,4 (6,0)
420	300	F 1,5 B/S 2,0 (1,5) R 4,0 (3,0)												2,5	3,2 (3,0)	6,4 (6,0)
840	600	F 3,0 B/S 3,2 (3,0) R 6,4 (6,0)														
1 400	1 000	F/B/S 4,2 R 6,4														
2 800	2 000	F/B/S/R 8,4														
7 000	5 000	F/B/S/R 17, 5														
9 800	7 000	F/B/S/R 25														
14 000	10 000	F/B/S/R 37														
28 000	20 000	F/B/S/R 80														
42 000	30 000	F/B/S/R 130														

1) The values in the table are applicable to FUNCTIONAL INSULATION (F), BASIC INSULATION (B), SUPPLEMENTARY INSULATION (S) and REINFORCED INSULATION (R).

2) The values in parentheses are applicable to BASIC INSULATION, SUPPLEMENTARY INSULATION or REINFORCED INSULATION only if manufacturing is subjected to a quality control programme that provides at least the same level of assurance as the example given in clause R.2. In particular, DOUBLE INSULATION and REINFORCED INSULATION shall be subjected to ROUTINE TESTS for electric strength.

3) For WORKING VOLTAGES between 2 800 V peak or d.c. and 42 000 V peak or d.c., linear interpolation is permitted between the nearest two points, the calculated spacing being rounded up to the next higher 0,1 mm increment.

2.2.2 ใช้ตรวจสอบความเพี้ยนฮาร์มอนิก (harmonic distortion) ของคลื่นสัญญาณ

โดยปกติแล้วค่า RMS ของสัญญาณที่เป็นคลื่นรูปไซน์จะมีค่าเป็นสัดส่วน 0.707107 ของค่าสูงสุด แต่หากมีการจับสัญญาณได้แล้วพบว่าสัดส่วนค่าสูงสุดและค่า RMS ไม่เป็นไปตามตัวเลขดังกล่าวแสดงว่าสัญญาณนั้นอาจถูกรบกวนหรือทำให้ค่าผิดเพี้ยนออกไป โดยปกติแล้วการหาความผิดเพี้ยนของสัญญาณ อาจจะต้องใช้วิธีของการไฟฟ้าฝ่ายผลิตฯ ซึ่งได้นำเสนอค่าการคำนวณ ค่าความเพี้ยนฮาร์มอนิกรวม (total harmonic distortion : THD) ซึ่งก็คือ อัตราส่วนระหว่างค่ารากที่สองของผลบวกกำ ลังสอง (root sum square) ของค่า RMS ของส่วนประกอบฮาร์มอนิก (harmonic component) กับค่า RMS ของส่วนประกอบความถี่หลักมูล (fundamental component) เทียบเป็นร้อยละ ดังแสดงในสมการ (2.6) และ (2.7) ซึ่งหาได้จาก

$$THD(voltage) = \frac{\sqrt{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2 + \ldots}}{V_1} \tag{2.6}$$

$$THD(current) = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \ldots}}{I_1} \tag{2.7}$$

$V_1, V_2, V_3, V_4, \ldots$ คือ ค่า RMS ของแรงดันไฟฟ้า ฮาร์มอนิกที่ 1, 2, 3, 4 …ตามลำดับ

$I_1, I_2, I_3, I_4, \ldots$ คือ ค่า RMS กระแสไฟฟ้า ฮาร์มอนิกที่ 1, 2, 3, 4 …ตามลำดับ

ซึ่งโดยปกติแล้วมาตรฐานการยอมรับความเพี้ยนฮาร์มอนิกจะไม่เกินร้อยละ 1.5 [9]

2.3 การเลือกตัวอย่าง (sampling)

การเลือกตัวอย่าง (sampling) เป็นการทำให้ได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทนประชากร เพื่อใช้ศึกษาข้อมูลแทนประชากร วิธีการเลือกตัวอย่างจึงเป็นวิธีการที่ทำให้ได้มาซึ่งกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแทน ซึ่งประเภทของวิธีการเลือกตัวอย่าง จำแนกออกเป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ดังนี้

ก. การเลือกตัวอย่างโดยอาศัยความน่าจะเป็น (probability sampling) เป็นการเลือกตัวอย่างโดยคำนึงถึงความน่าจะเป็นของแต่ละหน่วยประชากรที่จะได้รับการเลือก ซึ่งจะเป็นไปในแบบสุ่มไม่เฉพาะเจาะจง เพื่อนำผลไปใช้สรุปอ้างอิง (inference) ถึงประชากรเป้าหมาย

ข. การเลือกตัวอย่างประชากรโดยไม่อาศัยหลักความน่าจะเป็น (non – probability sampling) เป็นการเลือกตัวอย่างโดยไม่คำนึงถึงความน่าจะเป็นของประชากรแต่ละหน่วยที่จะได้รับการเลือก จึงเป็นการเลือกตัวอย่างประชากรแบบเจาะจง (purposive sampling) หรือการเลือกตัวอย่างประชากรแบบมีเจตนา ส่วนมากใช้ในการศึกษาที่ไม่สามารถจะกำหนดขอบเขตของประชากรได้แน่นอน มีเวลาและสิ่งอำนวยความสะดวกจำกัด อาศัยการตัดสินใจตามความสะดวกของผู้วิจัยเป็นหลัก เช่น การศึกษาผู้ติดยาเสพติด คนป่วยทางโรคจิตประสาท การเลือกศึกษาเฉพาะนักเรียนโรงเรียน ก. ห้อง ข. เป็นต้น จึงไม่คำนึงถึงการนำผลไปใช้อ้างอิงถึงประชากรเป้าหมาย

ในงานวิจัยเล่มนี้ขอกล่าวถึงเฉพาะวิธีเลือกตัวอย่างโดยอาศัยหลักความน่าจะเป็น (probability sampling) อันเป็นวิธีเลือกตัวอย่างที่ยอมรับกันโดยทั่วไปในงานวิจัยซึ่งนิยมใช้กัน 5 วิธี ดังต่อไปนี้

(1) วิธีเลือกตัวอย่างแบบง่าย (simple sampling) เป็นการเลือกตัวอย่างประชากรที่เปิดโอกาสให้ประชากรทุกหน่วยมีสิทธิ์ได้รับการเลือกเท่า ๆ กันโดยมีบัญชีรายชื่อของประชากรทุกหน่วยแล้วทำการจับฉลากหรือใช้ตารางเลขสุ่ม (random number table) จนได้กลุ่มตัวอย่างประชากรครบตามต้องการ

(2) วิธีเลือกตัวอย่างแบบมีระบบ (systematic sampling) เป็นการเลือกตัวอย่างประชากรแบบสุ่มเป็นช่วง ๆ โดยมีบัญชีรายชื่อของประชากรทุกหน่วย (sampling frame) ทำการสุ่มหาตัวสุ่มเริ่มต้น (random start) แล้วนับไปตามช่วงของการสุ่ม (random interval) เช่น ต้องการสุ่มนักเรียน 200 คน จากนักเรียนทั้งหมด 1,000 คน ดังนั้นจึงสุ่มทุกๆ 5 คน เอามา 1 คน สมมุติเมื่อสุ่มผู้ที่ตกเป็นตัวอย่างประชากรคนแรกได้หมายเลข 003 คนที่สองตกเป็นตัวอย่างได้แก่หมายเลข 008 สำหรับคนที่สามและคนต่อ ๆ ไป จะได้แก่หมายเลข 013,018,023,….,998 รวมกลุ่มตัวอย่างประชากรทั้งสิ้น 200 คน เป็นต้น

(3) วิธีเลือกตัวอย่างแบบยกกลุ่ม (cluster sampling) เป็นการเลือกตัวอย่างประชากรแบบที่ประชากรอยู่รวมกันเป็นกลุ่ม ๆ ที่มีลักษณะภายในใกล้เคียงกัน หรือคล้ายคลึงกันตามเงื่อนไขที่ต้องการ เช่น ใช้ห้องเรียน ห้องที่เป็นตัวอย่าง เป็นต้น จำนวนของกลุ่มต่าง ๆ จะถูกสุ่มขึ้นมาทำการศึกษา เมื่อสุ่มได้กลุ่มใดก็จะนำสมาชิกที่อยู่ในกลุ่มนั้น ๆ ทั้งหมดมาทำการศึกษา เช่น การศึกษาเกี่ยวกับครัวเรือนในประเทศไทย เราอาจแบ่งครัวเรือนออกเป็นกลุ่มโดยใช้ตำบลเป็นหลัก แล้วทำการสุ่มตำบล เมื่อสุ่มได้ตำบลแล้ว ก็ทำการเก็บรวบรวมข้อมูลจากทุกครัวเรือนที่อยู่ในตำบลที่สุ่มได้นั้น ๆ เป็นต้น ถ้าการจัดกลุ่มของประชากรเป็นกลุ่มย่อย ๆ โดยใช้ท้องที่ทางภูมิศาสตร์ (geographic subdivision) เป็นหลัก การเลือกตัวอย่างประชากร โดยวิธีนี้ ก็มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า area sampling

(4) วิธีเลือกตัวอย่างแบบแบ่งชั้น (stratified sampling) เป็นการเลือกตัวอย่างประชากรแบบแบ่งประชากรออกเป็นพวกหรือชั้น (stratum) ตามวัตถุประสงค์ของการศึกษา โดยให้มีลักษณะภายในคล้ายกันหรือเป็นอันดับเดียวกัน (homogeneous) มากที่สุด แต่จะแตกต่างกันระหว่างชั้น จากนั้นจึงทำการสุ่มจากแต่ละชั้นขึ้นมาทำการศึกษา โดยใช้สัดส่วนของกลุ่มตัวอย่างประชากรที่สุ่มขึ้นมาเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความเหมาะสม

(5) วิธีเลือกตัวอย่างแบบหลายขั้นตอน (multi – stage sampling) เป็นการเลือกตัวอย่างประชากรแบบแบ่งประชากรออกเป็นลำดับชั้นต่าง ๆ เช่น ภาค จังหวัด อำเภอ ตำบล หมู่บ้าน เป็นต้น แล้วทำการสุ่มประชากรจากหน่วยหรือลำดับชั้นที่ใหญ่ก่อน จากหน่วยที่สุ่มได้ก็ทำการสุ่มหน่วยที่มีลำดับใหญ่รองลงไปที่ละชั้น ๆ จนถึงกลุ่มตัวอย่างในชั้นที่ต้องการ การสุ่มแบบนี้จึงมีลักษณะการกระจายเป็นร่างแหที่ขยายออกไปเรื่อย ๆ จนถึงหน่วยที่ต้องการเก็บรวบรวมข้อมูล ถ้าใช้การสุ่ม 2 ครั้ง ก็เรียก two-stage sampling ถ้า 3 ครั้ง ก็เป็น three-stage sampling เป็นต้น

สำหรับขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ซึ่งวิธีในการกำหนดขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ผู้วิจัยสามารถดำเนินการได้ โดยการใช้สูตรคำนวณขนาดของกลุ่มตัวอย่าง หรืออาจเลือกใช้ตามตารางสำเร็จรูปที่มีผู้ได้สร้างไว้แล้ว

การใช้สูตรคำนวณหาขนาดของกลุ่มตัวอย่าง ในที่นี้จะกล่าวถึง สูตรของ Taro Yamane :

$$n = \frac{N}{1 + Ne^2} \tag{2.8}$$

n คือ ขนาดของตัวอย่าง

N คือ ขนาดของจำนวนประชากร

e คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะใช้การเลือกตัวอย่างแบบมีระบบในการเก็บข้อมูลเพื่อคำนวณหาค่า RMS [10]

2.4 อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series)

บ่อยครั้งที่นักวิทยาศาสตร์และวิศวกรต้องเรียนรู้สภาพทางธรรมชาติ เช่น แสงและเสียง ซึ่งมีพฤติกรรมเป็นคาบ ๆ และสามารถเขียนในลักษณะเป็นฟังก์ชัน g(x) ในช่วงคาบเหล่านั้นคือ

$$g(x+p) = g(x) \tag{2.9}$$

สำหรับทุก ๆ x เมื่อ $x \in R$ หรือ $x \in D \subseteq R$ และ $D \neq \phi$ และค่า P เรียกว่า คาบ ของฟังก์ชัน

พิจารณาฟังก์ชันคาบ 2π ถ้า g(x) มีคาบ P ดังนั้น $f(x) = g(Px/2\pi)$ จะเป็นคาบ 2π และสามารถตรวจสอบได้โดยสังเกตจาก

$$f(x+2\pi) = g\left(\frac{Px}{2\pi} + P\right) = g\left(\frac{Px}{2\pi}\right) = f(x) \tag{2.10}$$

ในส่วนต่อไปนี้ เราจะสมมุติว่า $f(x)$ คือฟังก์ชันที่มีคาบ 2π ดังนี้

$$f(x+2\pi) = f(x) \tag{2.11}$$

สมมติกราฟ $y = f(x)$ ได้มาโดย การแบ่งกราฟที่มีลักษณะเหมือนกันที่เป็นคาบ ๆ โดยแต่ละคาบจะมีระยะคาบเป็น 2π

ตัวอย่างของฟังก์ชันที่มีคาบ 2π คือ $\sin(jx)$ และ $\cos(jx)$ เมื่อ j คือจำนวนเต็มบวก เราสามารถเขียนฟังก์ชันคาบ โดยรวมเทอมที่มี $a_j \cos(jx)$ และ $b_j \sin(jx)$

สมมติว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีคาบ 2π และ $f(x)$ คือ piecewise continuous บน $[-\pi,\pi]$ อนุกรมฟูเรียร์ $S(x)$ สำหรับ $f(x)$ คือ

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j \cos\left(jx\right) + b_j \sin\left(jx\right)\right), \tag{2.12}$$

เมื่อ สัมประสิทธิ์ a_j และ b_j คำนวณได้โดยใช้สูตรของ ออยเลอร์ (Euler's formulas)

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos\left(jx\right)dx \quad \text{สำหรับ } j = 0\ ,1\ , ... \tag{2.13}$$

และ

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin\left(jx\right)dx \quad \text{สำหรับ } j = 1\ ,2\ , ... \tag{2.14}$$

2.4.1 การกระจายของฟูเรียร์ (Fourier expansion)

สมมุติให้ $S(x)$ คือ อนุกรมฟูเรียร์สำหรับ $f(x)$ ในช่วง $[-\pi,\pi]$ ถ้า $f'(x)$ มีความไม่ต่อเนื่อง (piecewise continuous) บน $[-\pi,\pi]$ และที่แต่ละจุดมีค่าทั้งซ้ายและขวาในช่วง ดังนั้นที่ $S(x)$ จะลู่เข้าทุก ๆ x ที่เป็นสมาชิกใน $[-\pi,\pi]$ และมีความสัมพันธ์ $S(x) = f(x)$ ที่ทุก ๆ จุดที่ x เป็นสมาชิกใน $[-\pi,\pi]$, เมื่อ $f(x)$ มีความต่อเนื่อง และถ้า x = a เป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่องบน f ดังนั้น $S(a) = \dfrac{f(a^-) + (a^+)}{2}$ เมื่อ $f(a^-)$ และ $f(a^+)$ หาค่าได้ ซึ่งแสดงว่ามีขอบเขตทั้งทางซ้ายและขวา ตามลำดับ. เราจะได้การกระจายของฟูเรียร์ (Fourier expansion) เป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)). \tag{2.15}$$

ตัวอย่างที่ 2.4. 1 จงแสดงฟังก์ชัน $f(x) = x/2$ สำหรับ $-\pi < x < \pi$ ว่าเป็นส่วนประกอบของคาบที่ได้จากสมการ $f(x+2\pi) = f(x)$ โดยแสดงวิธีทำที่อ้างถึงอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\sin(jx) = \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - ...$$

ใช้สูตรของออยเลอร์ และอินทิกรัลแบบแยกส่วน (by part) เราจะได้

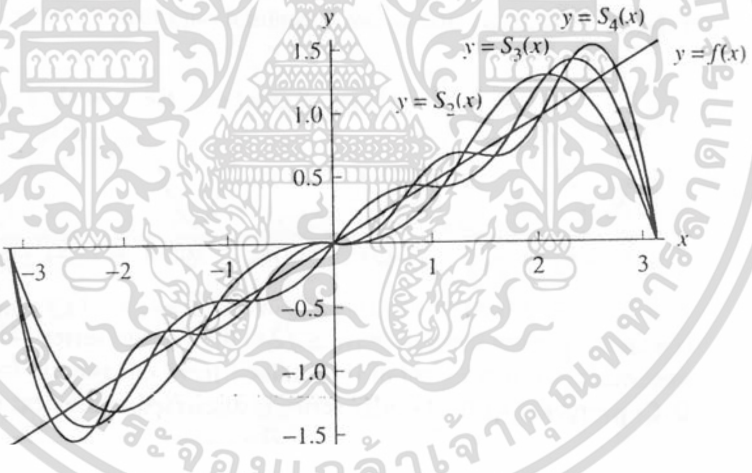
$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\cos(jx)dx = \frac{x\sin(jx)}{2\pi j} + \frac{\cos(jx)}{2\pi j^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \qquad = \qquad 0$$

สำหรับ j = 1 , 2 , 3 , …………และ

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}\sin(jx)dx = \frac{-x\cos(jx)}{2\pi j} + \frac{\sin(jx)}{2\pi j^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \qquad = \qquad \frac{(-1)^{j+1}}{j}$$

สำหรับ j = 1 , 2 , 3 , ………… สัมประสิทธิ์ a_0 คือค่าที่ได้มาโดยวิธีการคำนวณที่แยกกัน

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{4\pi}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} \qquad = \qquad 0$$



รูปที่ 2.3 แสดงให้เห็นการรวมกันของคลื่นไซน์หลายขบวน จนเกือบใกล้เคียงกับรูปที่ต้องการ

การคำนวณเหล่านี้แสดงให้เห็นว่าค่าสัมประสิทธิ์ทุกค่าในฟังก์ชันโคไซน์มีค่าเป็นศูนย์ จากกราฟ $f(x)$ และ เป็นการรวมค่าแบบแบ่งส่วน (partial sums) จะได้

$$S_2(x) = \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2},$$
$$S_3(x) = \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3},$$

และ

$$S_4(x) = \sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4}$$

2.4.2 อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

ถ้า $f(x)$ มีสมบัติเป็นฟังก์ชันคู่แล้ว เมื่อ $f(-x) = f(x)$ ในทุก x .และ $f(x)$ มีคาบ 2π และถ้า $f(x)$ และ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ (piecewise continuous) ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์สำหรับ $f(x)$ จะทำให้ได้พจน์ของโคไซน์อย่างเดียว

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(jx), \tag{2.16}$$

เมื่อ

$$a_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(jx)dx \tag{2.17}$$

สำหรับ j = 0 , 1 ,...

2.4.3 อนุกรมฟูเรียร์ไซน์

ถ้า $f(x)$ มีสมบัติเป็นฟังก์ชันคี่แล้ว เมื่อ $f(-x) = -f(x)$ ในทุก x .และ $f(x)$ มีคาบ 2π และถ้า $f(x)$ และ $f'(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ (piecewise continuous) ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ สำหรับ $f(x)$ จะทำให้ได้พจน์ของ sine อย่างเดียว

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin(jx), \tag{2.18}$$

เมื่อ

$$b_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(jx)dx \tag{2.19}$$

สำหรับ j = 1 , 2 , ...

ตัวอย่าง 2.4.2 จงแสดงฟังก์ชัน $f(x) = |x|$ สำหรับ $-\pi < x < \pi$ ที่ประกอบด้วยคาบของสมการ $f(x+2\pi) = f(x)$ และแสดงวิธีทำโดยอ้างถึงอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\cos((2j-1)x)}{(2j-1)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots\right). \end{aligned}$$

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้นเราจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์ $\{a_j\}$: ในการคำนวณเท่านั้น

$$a_j = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(jx)dx = \frac{2x\sin(jx)}{\pi j} + \frac{2cos(jx)}{\pi j^2}\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\cos(j\pi)-2}{\pi j^2} = \frac{2((-1)^j-1)}{\pi j^2} \qquad \text{สำหรับ } j = 1 , 2 , 3 , \ldots$$

โดย $((-1)^j-1)=0$ เมื่อ j เป็นจำนวนคู่ จากอนุกรม cosine จะทำให้เกิดเทอมคี่เพียงอย่างเดียว รูปแบบของประสิทธ์ในฟังก์ชันคี่ เป็นดังนี้

$$a_1 = \frac{-4}{\pi}, \qquad a_2 = \frac{-4}{\pi 3^2}, \qquad a_5 = \frac{-4}{\pi 5^2}, \qquad \ldots\ldots$$

สัมประสิทธิ์ a_0 ได้จากการคำนวณแยกกัน (separate calculation)

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{x^2}{\pi}\Bigg|_0^{\pi} = \pi.$$

ดังนั้นเราจะสร้างค่าสัมประสิทธิ์ที่ต้องการ ได้จากสมการ (2.17)

2.4.4 พิสูจน์ สูตรของออยเลอร์ โดยการสังเกตการลู่เข้าในอนุกรมฟูเรียร์โดยการลองผิดลองถูก และหาสัมประสิทธิ์ a_0 ได้จากการ อินทิกรัล สมการที่ (2.15) ทั้งสองข้าง จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\right)\right)dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)dx + \sum_{j=1}^{\infty} b_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin(jx)dx$$

$$= \pi a_0 + 0 + 0.$$

จากนั้นทำการแก้สมการเพื่อหาค่าของ a_0 ก็จะได้ดังนี้คือ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{2.20}$$

ในการหา a_m เราให้ $m>0$ และเป็นจำนวนเต็ม นำ $\cos(mx)$ มาคูณทั้งสองข้างของสมการที่ (2.15) และอินทิกรัลทั้งสองข้าง จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(mx)dx$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty} b_j \int_{-\pi}^{\pi}\sin(jx)\cos(mx)dx. \qquad (2.21)$$

เมื่อเราใช้คุณสมบัติฟังก์ชันตั้งฉาก(orthogonal) จากฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งรู้ค่าเลขยกกำลัง จะได้ค่าของเทอมแรกด้านขวามือ จากสมการที่ (2.15) เป็นดังนี้

$$\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mx)dx = \frac{a_0\sin(mx)}{2m}\bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

ค่าที่ได้ในเทอม $\cos(jx)\cos(mx)$ หาได้จากการใช้ตรีโกณมิติ เช่นเดียวกัน

$$\cos(jx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\cos((j+m)x) + \frac{1}{2}\cos((j-m)x).$$

เมื่อ $j \neq m$ ใช้สมการที่ (2.15) จะได้

$$a_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}a_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos((j+m)x)dx$$
$$+\frac{1}{2}a_j\int_{-\pi}^{\pi}\cos((j-m)x)dx = 0+0=0.$$

เมื่อ $j = m$ ค่าจากการอินทิกรัลจะได้

$$a_m\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(mx)dx = a_m\pi$$

ค่าในพจน์ด้านขวามือของสมการที่ (2.15) ทำให้ได้ $\sin(jx)\cos(mx)$ และหาได้จากการใช้ตรีโกณมิติ เช่นกัน

$$\sin(jx)\cos(mx) = \frac{1}{2}\sin((j+m)x) + \frac{1}{2}\sin((j-m)x).$$

สำหรับทุกค่าของ j และ m ในสมการที่ (2.21) เราจะได้ว่า

$$b_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin(jx)\cos(mx)dx = \frac{1}{2}b_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin((j+m)x)dx \ + \frac{1}{2}b_j\int_{-\pi}^{\pi}\sin((j-m)x)dx$$
$$= 0+0=0.$$

เมื่อเราใช้ข้อมูลจากสมการข้างต้น เราจะเห็นได้ว่า

$$\pi a_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx, \qquad \text{สำหรับ m = 1 , 2 , ...}$$

ดังนั้นการได้มาซึ่งชุดอนุกรมฟูเรียร์ ก็ใช้เพียงแค่ a_0, a_m และ b_m เท่านั้น [11] แต่ในการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของสัญญาณที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะเป็นการสังเคราะห์ชุดอนุกรมฟูเรียร์

ขึ้นมาจากการสมมติสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ที่ทราบค่าซึ่งจะไม่เกิน 20 ฮาร์มอนิกเพื่อสอดคล้องตามมาตรฐานการยอมรับความเพี้ยนฮาร์มอนิก [9]

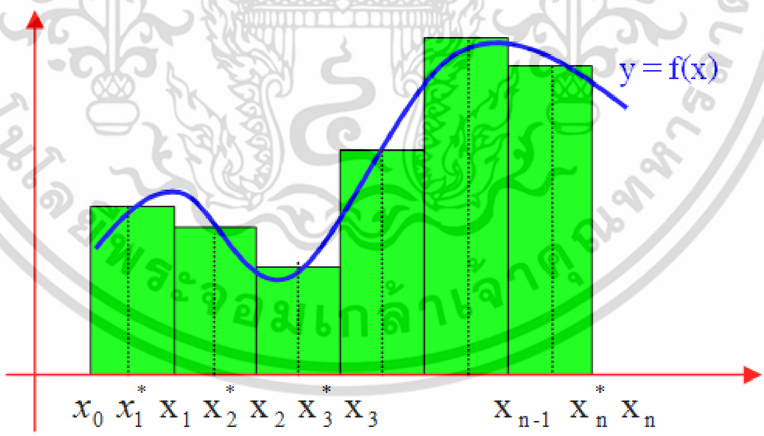
2.5 การประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต

การประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ทฤษฎีพื้นฐานของแคลคูลัสมีหลายวิธี แต่ผู้วิจัยจะนำเสนอ 3 วิธีมาเปรียบเทียบกับวิธีการเลือกตัวอย่างของวิทยานิพนธ์ ซึ่งการคำนวณหาค่าประมาณปริพันธ์จำกัดเขตจะเหมาะกับบางฟังก์ชันที่ไม่สามารถปริพันธ์จำกัดเขตได้ หรือหาได้แต่ยาก ดังนั้นในการหาปริพันธ์จำกัดเขตจึงต้องใช้การประมาณค่า ซึ่งในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จะขอนำเสนอการประมาณค่า $\int_a^b f(x)\,dx$ 3 วิธี ดังนี้

2.5.1 กฎจุดกึ่งกลาง (Midpoint Rule)

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นเซตของจุดไม่ต่อเนื่องในช่วงปิด [a , b] เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ นั่นคือเราแบ่งช่วงปิด [a , b] ออกเป็น n ช่วงย่อย สมมุติว่าแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ มีความกว้างเท่า ๆ กัน คือ $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

ให้ x_i^* เป็นจุดกึ่งกลางของช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เท่ากับ $f(x_i^*)\,\Delta x$



รูปที่ 2.4 แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟโดยวิธีกฎจุดกึ่งกลาง

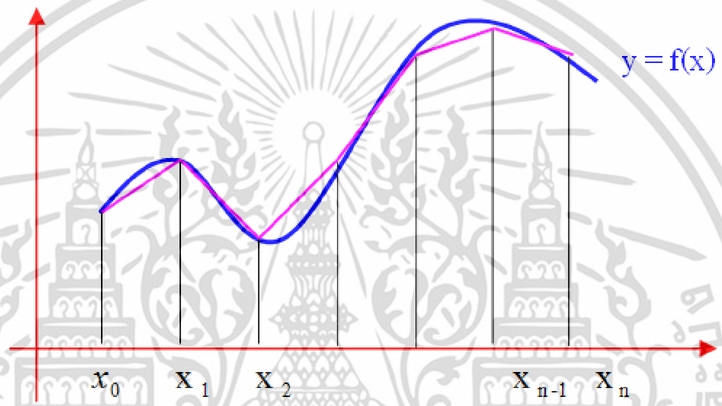
เพราะฉะนั้น
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$
$$\approx \Delta x[f(x_1^*) + f(x_2^*) + \cdots + f(x_n^*)]$$

2.5.2 กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid Rule)

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นเซตของจุดไม่ต่อเนื่องในช่วงปิด [a , b] เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ซึ่งแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ มีความกว้างเท่า ๆ กัน คือ $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$ จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูในช่วง $[x_{i-1}, x_i]$ เท่ากับ $\dfrac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$ ดังนั้น

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}[(f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2))+\cdots+(f(x_{n-1})+f(x_n))]$$

$$\approx \frac{\Delta x}{2}[(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

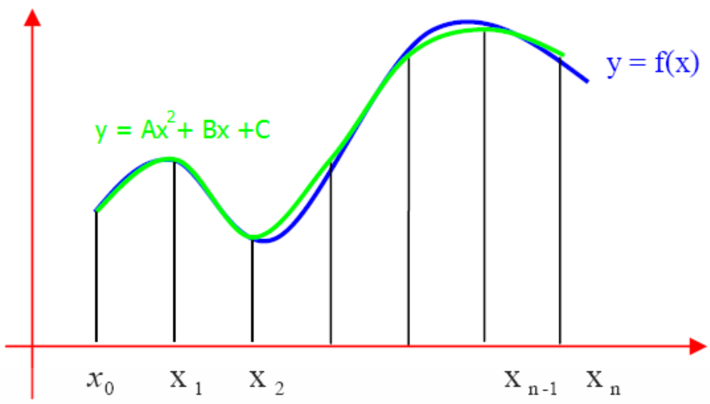


รูปที่ 2.5 แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟโดยวิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid Rule)

2.5.3 หลักเกณฑ์ซิมป์สัน (Simpson's Rule)

ให้ $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ เป็นเซตของจุดไม่ต่อเนื่องในช่วงปิด [a , b] เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ ซึ่งแต่ละช่วงย่อย $[x_{i-1}, x_i]$ มีความกว้างเท่า ๆ กัน คือ $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \dfrac{b-a}{n}$

การประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมูเราใช้โค้งที่เป็นส่วนของเส้นตรง ส่วนกฎซิมป์สันจะใช้ฟังก์ชันกำลังสอง (quadratic function) ตามรูปที่ 2.6 โดยให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่ ในสองช่วงย่อยติดกัน เราสร้างพาราโบลา $y = Ax^2 + Bx + C$ ผ่านจุด (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) และ (x_{i+1}, y_{i+1}) เมื่อ $y_i = f(x_i)$ และ $x_{i-1} = x_i - \Delta x$, $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ เมื่อ i = 1, 2, … , n [12]



รูปที่ 2.6 แสดงการหาพื้นที่ใต้กราฟโดยการประมาณด้วยหลักเกณฑ์ซิมป์สัน

เนื่องจาก $y_{i-1} = A(x_i - \Delta x)^2 + B(x_i - \Delta x) + C$

$y_i = Ax_i^2 + Bx_i + C$

$y_{i+1} = A(x_i + \Delta x)^2 + B(x_i + \Delta x) + C$

จะได้ว่า $y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1} = A[6x_i^2 + 2(\Delta x)^2] + 6Bx_i + 6C$

ให้ A_i = พื้นที่ใต้กราฟพาราโบลา $y = Ax^2 + Bx + C$ จาก x_{i-1} ถึง x_{i+1}

จะได้ว่า

$$A_i = \int_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x} (Ax^2 + Bx + C)\,dx$$

$$= \left(A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx\right)\Bigg|_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x}$$

$$= \frac{1}{6}(2Ax^3 + 3Bx^2 + 6Cx)\Big|_{x_i-\Delta x}^{x_i+\Delta x}$$

$$= \left[\frac{1}{6}(2A(x_i+\Delta x)^3 + 3B(x_i+\Delta x)^2 + 6C(x_i+\Delta x)\right]$$

$$-\left[\frac{1}{6}(2A(x_i-\Delta x)^3 + 3B(x_i-\Delta x)^2 + 6C(x_i-\Delta x)\right]$$

$$= \frac{\Delta x}{3}\left\{A[6x_i^2 + 2(\Delta x)^2] + 6Bx_i + 6C\right\}$$

$$= \frac{\Delta x}{3}(y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1})$$

$$= \frac{\Delta x}{3}[f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

เมื่อรวมกันทุก 2 ช่วง จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n/2} A_i$$

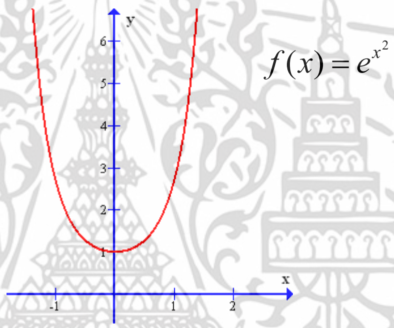
$$\approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+\frac{\Delta x}{3}[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]$$

$$+\cdots+\frac{\Delta x}{3}[f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

$$\approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)]+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+2f(x_{n-2})$$

$$+\ 4f(x_{n-1})+f(x_n)]$$

ตัวอย่าง 3.5.1 จงหาประมาณค่าของ $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$ ทั้ง 3 วิธี โดยใช้ n = 4



รูปที่ 2.7 แสดงกราฟของสมการ $f(x)=e^{x^2}$

วิธีทำ เมื่อใช้โปรแกรมแหม็ตแหล็บคำนวณจะได้ว่า $\int_0^2 e^{x^2} \approx 16.452627765507231$

ให้ n = 4 จะได้ว่า $\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0.5$ และได้ช่วงย่อย [0, 0.5] , [0.5, 1] , [1, 1.5] , [1.5, 2] เมื่อใช้กฎทั้งสามที่ได้กล่าวมาแล้วจะได้ค่าดังนี้

1. กฎจุดกึ่งกลาง

$$\int_0^2 e^{x^2}\,dx \approx 0.5[e^{(0.25)^2}+e^{(0.75)^2}+e^{(1.25)^2}+e^{(1.75)^2}] = 14.48561253$$

ดังนั้น ค่าความแตกต่างเท่ากับ 1.96701523

2. ใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\int_0^2 e^{x^2}\,dx \approx \frac{0.5}{2}[e^{(0)^2}+e^{(0.5)^2}+e^{(1)^2}+e^{(1.5)^2}+e^{(2)^2}] = 20.64455905$$

ดังนั้น ค่าความแตกต่างเท่ากับ 4.19193129

3. ใช้กฎของซิมป์สัน

$$\int_0^2 e^{x^2}dx \approx \frac{0.5}{3}[e^{(0)^2} + 4e^{(0.5)^2} + 2e^{(1)^2} + 4e^{(1.5)^2} + e^{(2)^2}] = 17.35362645$$

ดังนั้น ค่าความแตกต่างเท่ากับ 0.90099869

ถ้าให้ n มีค่ามากขึ้นจะได้ค่าต่าง ๆ ดังนี้

ตารางที่ 2.3 แสดงผลของการหาปริพันธ์จำกัดเขตของทั้ง 3 วิธีเทียบกันพบว่าวิธีการใช้ เกณฑ์ซิมป์สันจะให้ค่าของปริพันธ์จำกัดเขตได้ใกล้เคียงที่สุดกับค่าที่เป็นมาตรฐาน [13]

n	Midpoint		Trapezoid		Simpson's	
	Approx.	Diff.	Approx.	Diff.	Approx.	Diff.
8	15.9056767	0.5469511	17.5650858	1.1124580	16.5385947	0.0859669
16	16.3118539	0.1407739	16.7353812	0.2827535	16.4588131	0.0061853
32	16.4171709	0.0354568	16.5236176	0.0709898	16.4530297	0.0004019
64	16.4437469	0.0088809	16.4703942	0.0177665	16.2426531	0.0000254
128	16.4504065	0.0022212	16.4570706	0.0044428	16.45262940	0.0000016

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

จะเริ่มเก็บตัวอย่างจากฟังก์ชันที่เกิดจากการสร้างด้วยอนุกรมฟูเรียร์ที่มี 1, 2, 3, 10 และ 20 ฮาร์มอนิก ตามลำดับ โดยที่กำหนดให้ n คือ จำนวนตัวอย่าง , T คือ คาบเวลา 2π , Tm คือ เวลาที่ป้อนใส่เข้าไปเป็นตัวแปรต้นของฟังก์ชันจากการเรียงลำดับ m = 1 ถึง m = n, ซึ่ง Tm = T1+(m-1)r

r คือ ความละเอียดของเวลาที่ป้อนใส่เข้าไปในฟังก์ชัน r = T/(n-1)

Calculated RMS คือ ค่า RMS ที่คำนวณได้ ซึ่งจะเท่ากับ $(\text{Average})^{0.5}$

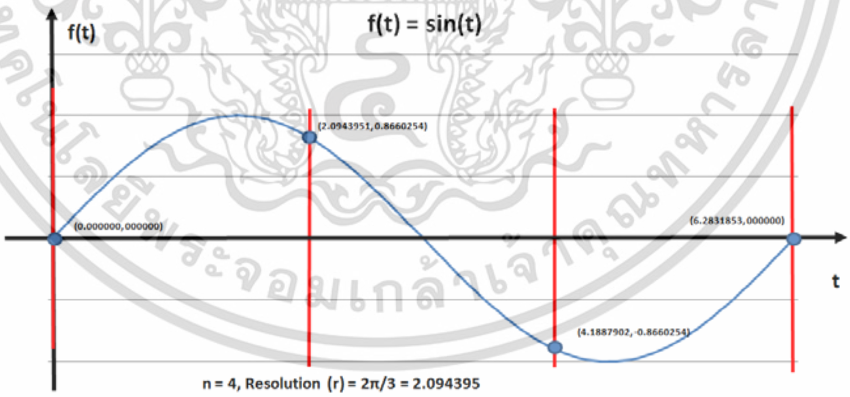
Error คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้ ซึ่ง Error = Standard RMS - Calculated RMS

PPM Error คือ ค่าความเคลื่อนเมื่อเทียบกับค่ามาตรฐานต่อหนึ่งล้าน, ซึ่ง PPM Error = (Error/Standard RMS) x 1000000

3.1 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชันที่มีเพียงความถี่หลักมูล

3.1.1 ฟังก์ชัน $f(t) = \sin t$ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

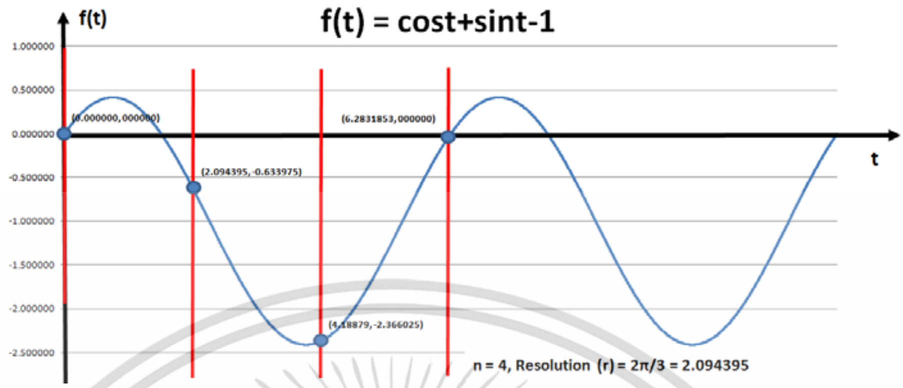
ซึ่งจำนวนข้อมูลน้อยที่สุดที่จะต้องเก็บคือ n = 4 เป็นต้นไป หากเริ่มเก็บที่ n = 2 หรือ n = 3 จะทำให้ทุกข้อมูลมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ซึ่งไม่เป็นประโยชน์ในการนำไปใช้งาน



รูปที่ 3.1 แสดงการเก็บ 4 ข้อมูลเป็นอย่างน้อยของ $f(t) = \sin t$

3.1.2 ฟังก์ชัน $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ **ในช่วงคาบ 0 ถึง** 2π

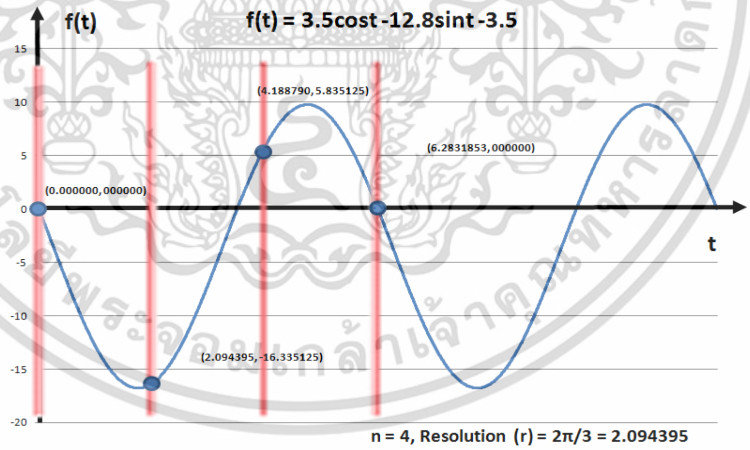
โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่หลักมูล ซึ่งเลือกค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงการเก็บ 4 ข้อมูลเป็นอย่างน้อยของ $f(t) = \cos t + \sin t - 1$

3.1.3 ฟังก์ชัน $f(t) = 3.5\cos t - 12.8\sin t - 3.5$ **ในช่วงคาบ 0 ถึง** 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่หลักมูล ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกันและไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงการเก็บ 4 ข้อมูลเป็นอย่างน้อยของ $f(t) = 3.5\cos t - 12.8\sin t - 3.5$

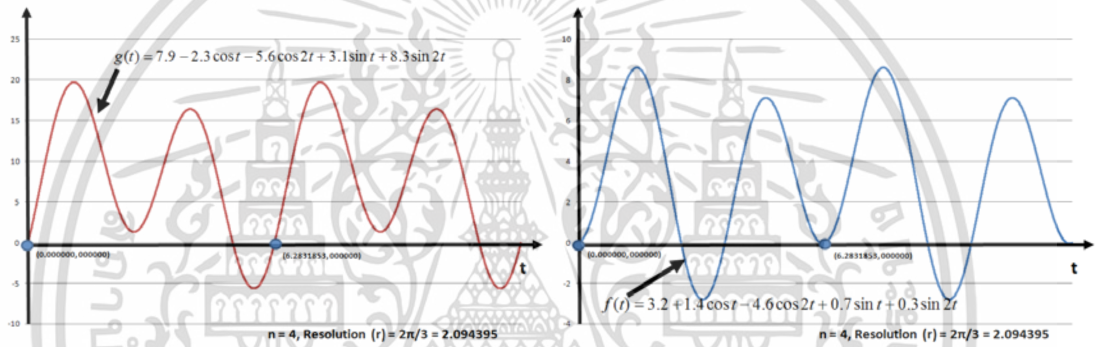
3.2 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชันที่ประกอบด้วยฮาร์มอนิกสูงสุดเป็น 2 เท่าของความถี่หลักมูล

3.2.1 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 2 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกันและไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 3.4

สำหรับฟังก์ชันของ $f(t) = 3.2 + 1.4\cos t - 4.6\cos 2t + 0.7\sin t + 0.3\sin 2t$ สามารถคำนวณหาค่า RMS ได้เท่ากับ 4.700000

ส่วนฟังก์ชันของ $g(t) = 7.9 - 2.3\cos t - 5.6\cos 2t + 3.1\sin t + 8.3\sin 2t$ สามารถคำนวณหาค่า RMS ได้เท่ากับ 10.953766



รูปที่ 3.4 แสดงฟังก์ชัน f(t) และ g(t) ที่เกิดจากการสร้างด้วยคลื่น 2 ฮาร์มอนิกโดยที่ฮาร์มอนิกที่สองจะมีความถี่เป็น 2 เท่าของตัวแรก โดยที่ f(t) และ g(t) จะมีค่า Amplitude ของคลื่นย่อยไม่สัมพันธ์กันแต่อย่างใด

3.3 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชันที่ประกอบด้วยฮาร์มอนิกสูงสุดเป็น 3 เท่าของความถี่หลักมูล

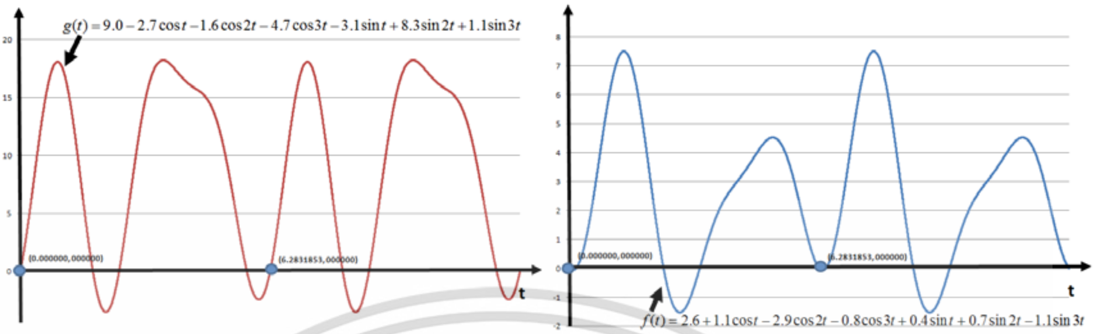
3.3.1 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 3 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกันและไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 3.5

สำหรับฟังก์ชันของ

$f(t) = 2.6 + 1.1\cos t - 2.9\cos 2t - 0.8\cos 3t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t$ สามารถคำนวณหาค่า RMS ได้เท่ากับ 3.580503 และฟังก์ชันของ

$g(t) = 9.0 - 2.7\cos t - 1.6\cos 2t - 4.7\cos 3t - 3.1\sin t + 8.3\sin 2t + 1.1\sin 3t$ สามารถคำนวณหาค่า RMS ได้เท่ากับ 11.697222



รูปที่ 3.5 แสดงฟังก์ชัน f(t) และ g(t) ที่เกิดจากการสร้างด้วยคลื่น 3 ฮาร์มอนิกโดยที่ฮาร์มอนิกที่ 2 และ 3 จะมีความถี่เป็น 2 และ 3 เท่า ตามลำดับของตัวแรก

3.4 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชันที่ประกอบด้วยฮาร์มอนิกสูงสุดเป็น 10 เท่าของความถี่หลักมูล

3.4.1 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

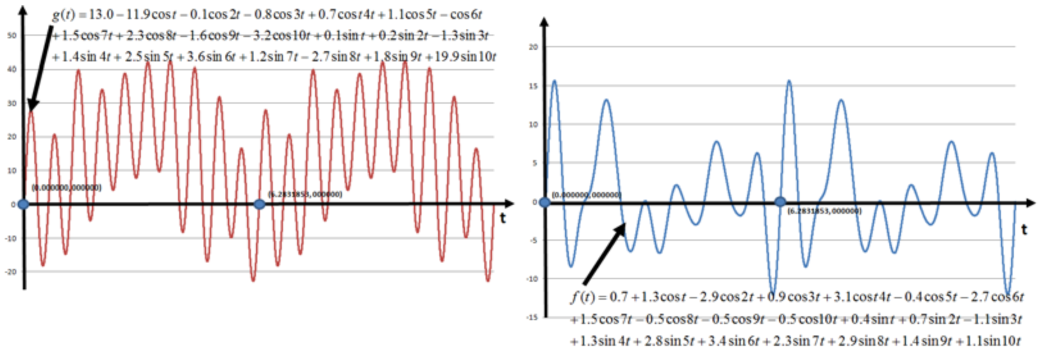
โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 10 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างๆกัน โดยที่ค่าของฟังก์ชันเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 3.6

$$\begin{aligned} f(t) = {} & 0.7 + 1.3\cos t - 2.9\cos 2t + 0.9\cos 3t + 3.1\cos t4t - 0.4\cos 5t - 2.7\cos 6t \\ & + 1.5\cos 7t - 0.5\cos 8t - 0.5\cos 9t - 0.5\cos 10t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t \\ & + 1.3\sin 4t + 2.8\sin 5t + 3.4\sin 6t + 2.3\sin 7t + 2.9\sin 8t + 1.4\sin 9t + 1.1\sin 10t \end{aligned}$$

สามารถคำนวณหาค่า RMS ของ $f(t)$ ได้เท่ากับ 5.990409

$$\begin{aligned} g(t) = {} & 13.0 - 11.9\cos t - 0.1\cos 2t - 0.8\cos 3t + 0.7\cos t4t + 1.1\cos 5t - \cos 6t \\ & + 1.5\cos 7t + 2.3\cos 8t - 1.6\cos 9t - 3.2\cos 10t + 0.1\sin t + 0.2\sin 2t - 1.3\sin 3t \\ & + 1.4\sin 4t + 2.5\sin 5t + 3.6\sin 6t + 1.2\sin 7t - 2.7\sin 8t + 1.8\sin 9t + 19.9\sin 10t \end{aligned}$$

สามารถคำนวณหาค่า RMS ของ $g(t)$ ได้เท่ากับ 21.612381



รูปที่ 3.6 แสดงฟังก์ชัน f(t) และ g(t) ที่เกิดจากการสร้างด้วยคลื่น 10 ฮาร์มอนิกโดยที่ฮาร์มอนิกที่ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 และ 10 มีความถี่เป็น 2 ถึง 10 เท่า ตามลำดับของตัวแรก

3.5 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชันที่ประกอบด้วยฮาร์มอนิกสูงสุดเป็น 15 เท่าของความถี่หลักมูล

3.5.1 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

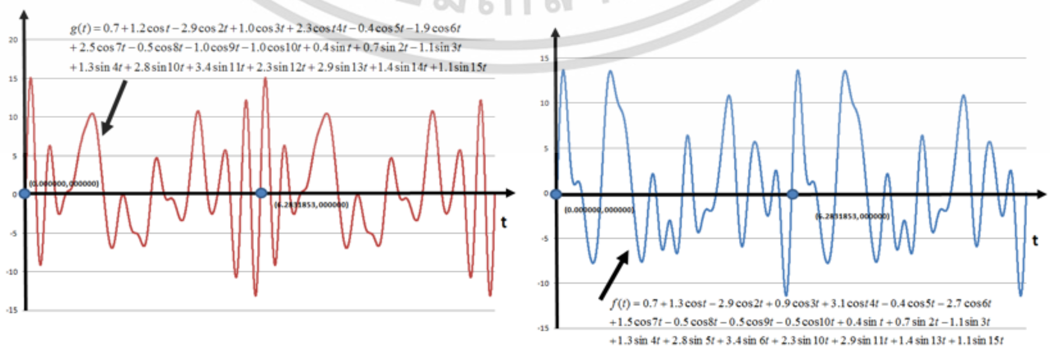
โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 10 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างๆกัน โดยที่ค่าของฟังก์ชันเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 3.7

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.7 + 1.3\cos t - 2.9\cos 2t + 0.9\cos 3t + 3.1\cos t4t - 0.4\cos 5t - 2.7\cos 6t \\ &\quad + 1.5\cos 7t - 0.5\cos 8t - 0.5\cos 9t - 0.5\cos 10t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t \\ &\quad + 1.3\sin 4t + 2.8\sin 5t + 3.4\sin 6t + 2.3\sin 10t + 2.9\sin 11t + 1.4\sin 13t + 1.1\sin 15t \end{aligned}$$

สามารถคำนวณหาค่า RMS ของ $f(t)$ ได้เท่ากับ 5.990409

$$\begin{aligned} g(t) &= 0.7 + 1.2\cos t - 2.9\cos 2t + 1.0\cos 3t + 2.3\cos t4t - 0.4\cos 5t - 1.9\cos 6t \\ &\quad + 2.5\cos 7t - 0.5\cos 8t - 1.0\cos 9t - 1.0\cos 10t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t \\ &\quad + 1.3\sin 4t + 2.8\sin 10t + 3.4\sin 11t + 2.3\sin 12t + 2.9\sin 13t + 1.4\sin 14t + 1.1\sin 15t \end{aligned}$$

สามารถคำนวณหาค่า RMS ของ $g(t)$ ได้เท่ากับ 5.882601



รูปที่ 3.7 แสดงฟังก์ชัน f(t) และ g(t) ที่เกิดจากการสร้างด้วยคลื่น 15 ฮาร์มอนิกโดยที่ฮาร์มอนิกที่ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 และ 15 มีความถี่เป็น 2 ถึง 15 เท่า ตามลำดับของตัวแรก

3.6 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชันที่ประกอบด้วยฮาร์มอนิกสูงสุดเป็น 20 เท่าของความถี่หลักมูล

3.6.1 ศึกษาผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

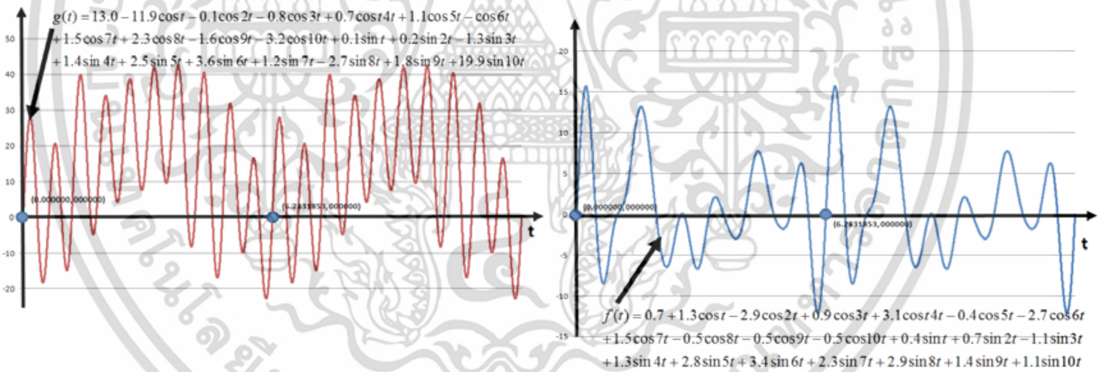
โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 20 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างๆกัน โดยที่ค่าของฟังก์ชันเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ ดังรูปที่ 3.8

$$\begin{aligned} f(t) = {} & 0.7 + 1.3\cos t - 2.9\cos 2t + 0.9\cos 3t + 3.1\cos t4t - 0.4\cos 5t - 2.7\cos 6t \\ & + 1.5\cos 17t - 0.5\cos 18t - 0.5\cos 19t - 0.5\cos 20t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t \\ & + 1.3\sin 4t + 2.8\sin 15t + 3.4\sin 16t + 2.3\sin 17t + 2.9\sin 18t + 1.4\sin 19t + 1.1\sin 20t \end{aligned}$$

สามารถคำนวณหาค่า RMS ของ $f(t)$ ได้เท่ากับ 5.990409

$$\begin{aligned} g(t) = {} & 13.0 - 11.9\cos t - 0.1\cos 2t - 0.8\cos 3t + 0.7\cos t4t + 1.1\cos 5t - \cos 6t \\ & + 1.5\cos 17t + 2.3\cos 18t - 1.6\cos 19t - 3.2\cos 20t + 0.1\sin t + 0.2\sin 2t - 1.3\sin 3t \\ & + 1.4\sin 4t + 2.5\sin 5t + 3.6\sin 6t + 1.2\sin 17t - 2.7\sin 18t + 1.8\sin 19t + 19.9\sin 20t \end{aligned}$$

สามารถคำนวณหาค่า RMS ของ $g(t)$ ได้เท่ากับ 21.612381



รูปที่ 3.8 แสดงฟังก์ชัน f(t) และ g(t) ที่เกิดจากการสร้างด้วยคลื่น 20 ฮาร์มอนิกโดยที่ฮาร์มอนิกที่ 2 ถึง 20 มีความถี่เป็น 2 ถึง 20 เท่า ตามลำดับของสัญญาณตัวแรก

3.7 ศึกษาผลที่ได้จาก คุณสมบัติผลบวกกำลังสองของฟังก์ชัน $f(t) = \sin t$

เมื่อใช้ขนาดของตัวอย่างเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จาก n = 4 ซึ่งจะเขียนในรูปของผลบวกได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sin^2(\frac{2i\pi}{n-1}) = \sin^2(\frac{2\pi}{n-1}) + \sin^2(\frac{4\pi}{n-1}) + \sin^2(\frac{6\pi}{n-1}) + \ldots + \sin^2(\frac{(n-2)2\pi}{n-1}) + \sin^2(2\pi)$$

$n = 4$, จะประกอบด้วย, $\sin^2(0) + \sin^2(\frac{2\pi}{3}) + \sin^2(\frac{4\pi}{3}) + \sin^2(2\pi)$

$n=5$, จะประกอบด้วย, $\sin^2(0)+\sin^2(\frac{2\pi}{4})+\sin^2(\frac{4\pi}{4})+\sin^2(\frac{6\pi}{4})+\sin^2(2\pi)$

$n=6$, จะประกอบด้วย, $\sin^2(0)+\sin^2(\frac{2\pi}{5})+\sin^2(\frac{4\pi}{5})+\sin^2(\frac{6\pi}{5})+\sin^2(\frac{8\pi}{5})+\sin^2(2\pi)$

.

.

.

$n=n$, จะประกอบด้วย, $\sin^2(0)+\sin^2(\frac{2\pi}{n-1})+\sin^2(\frac{4\pi}{n-1})+\sin^2(\frac{6\pi}{n-1})...+\sin^2(2\pi)$

บทที่ 4
ผลการทดลองและการวิเคราะห์ผลการทดลอง

แสดงผลการเลือกตัวอย่างจากฟังก์ชันที่เกิดจากการสร้างด้วยอนุกรมฟูเรียร์ที่มี 1, 2, 3, 10 และ 20 ฮาร์มอนิก ตามลำดับ โดยที่กำหนดให้ n คือ จำนวนตัวอย่าง , T คือ คาบเวลา 2π , Tm คือ เวลาที่ป้อนใส่เข้าไปเป็นตัวแปรต้นของฟังก์ชันจากการเรียงลำดับ m = 1 ถึง m = n, ซึ่ง T_m = T1+(m-1)r

r คือ ความละเอียดของเวลาที่ป้อนใส่เข้าไปในฟังก์ชัน r = T/(n-1)

Calculated RMS คือ ค่า RMS ที่คำนวณได้ ซึ่งจะเท่ากับ $(\text{Average})^{0.5}$, Error คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่คำนวณได้ ซึ่ง Error = Standard RMS - Calculated RMS

PPM Error คือ ค่าความเคลื่อนเมื่อเทียบกับค่ามาตรฐานต่อหนึ่งล้าน, ซึ่ง PPM Error คำนวณได้จาก (Error/Standard RMS) x 1000000

4.1 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชัน $f(t) = \sin t$ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

ซึ่งจำนวนข้อมูลน้อยที่สุดที่จะต้องเก็บคือ n = 4 เป็นต้นไป หากเริ่มเก็บที่ n = 2 หรือ n = 3 จะทำให้ทุกข้อมูลมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด ซึ่งไม่เป็นประโยชน์ในการนำไปใช้งาน จากในบทที่ 1 ค่า RMS ที่คำนวณเป็นค่ามาตรฐาน (Standard RMS) ของ $f(t) = \sin t$ คือ $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707107$, กำหนดใช้ค่ามาตรฐานของ $\pi = 3.1415927$ เป็นค่าที่ใช้ในการคำนวณ

ตารางที่ 4.1 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 4

n = 4 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	2.094395	0.866025	0.750000
t3	4.188790	-0.866025	0.750000
t4	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.375000
Calculated RMS	0.612372
Standard RMS	0.707107
Error	0.094734
PPM Error	133975

ตารางที่ 4.2 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 5

n = 5 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.570796	1.000000	1.000000
t3	3.141593	0.000000	0.000000
t4	4.712389	-1.000000	1.000000
t5	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.400000
Calculated RMS	0.632456
Standard RMS	0.707107
Error	0.074651
PPM Error	105573

ตารางที่ 4.3 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 6

n = 6 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.256637	0.951057	0.904508
t3	2.513274	0.587785	0.345492
t4	3.769911	-0.587785	0.345492
t5	5.026548	-0.951057	0.904508
t6	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.416667
Calculated RMS	0.645497
Standard RMS	0.707107
Error	0.061610
PPM Error	87129

ตารางที่ 4.4 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 7

n = 7 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.047198	0.866025	0.750000
t3	2.094395	0.866025	0.750000
t4	3.141593	0.000000	0.000000
t5	4.188790	-0.866025	0.750000
t6	5.235988	-0.866025	0.750000
t7	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.428571
Calculated RMS	0.654654
Standard RMS	0.707107
Error	0.052453
PPM Error	74180

ตารางที่ 4.5 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 10

n = 10 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.698132	0.642788	0.413176
t3	1.396263	0.984808	0.969846
t4	2.094395	0.866025	0.750000
t5	2.792527	0.342020	0.116978
t6	3.490659	-0.342020	0.116978
t7	4.188790	-0.866025	0.750000
t8	4.886922	-0.984808	0.969846
t9	5.585054	-0.642788	0.413176
t10	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.450000
Calculated RMS	0.670820
Standard RMS	0.707107
Error	0.036286
PPM Error	51317

ตารางที่ 4.6 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 20

n = 20 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.330694	0.324699	0.105430
t3	0.661388	0.614213	0.377257
t4	0.992082	0.837166	0.700848
t5	1.322776	0.969400	0.939737
t6	1.653470	0.996584	0.993181
t7	1.984164	0.915773	0.838641
t8	2.314858	0.735724	0.541290
t9	2.645552	0.475947	0.226526
t10	2.976246	0.164595	0.027091
t11	3.306940	-0.164595	0.027091
t12	3.637634	-0.475947	0.226526
t13	3.968328	-0.735724	0.541290
t14	4.299022	-0.915773	0.838641
t15	4.629715	-0.996584	0.993181
t16	4.960409	-0.969400	0.939737
t17	5.291103	-0.837166	0.700848
t18	5.621797	-0.614213	0.377257
t19	5.952491	-0.324699	0.105430
t20	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.475000
Calculated RMS	0.689202
Standard RMS	0.707107
Error	0.017904
PPM Error	25321

ตารางที่ 4.7 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 50

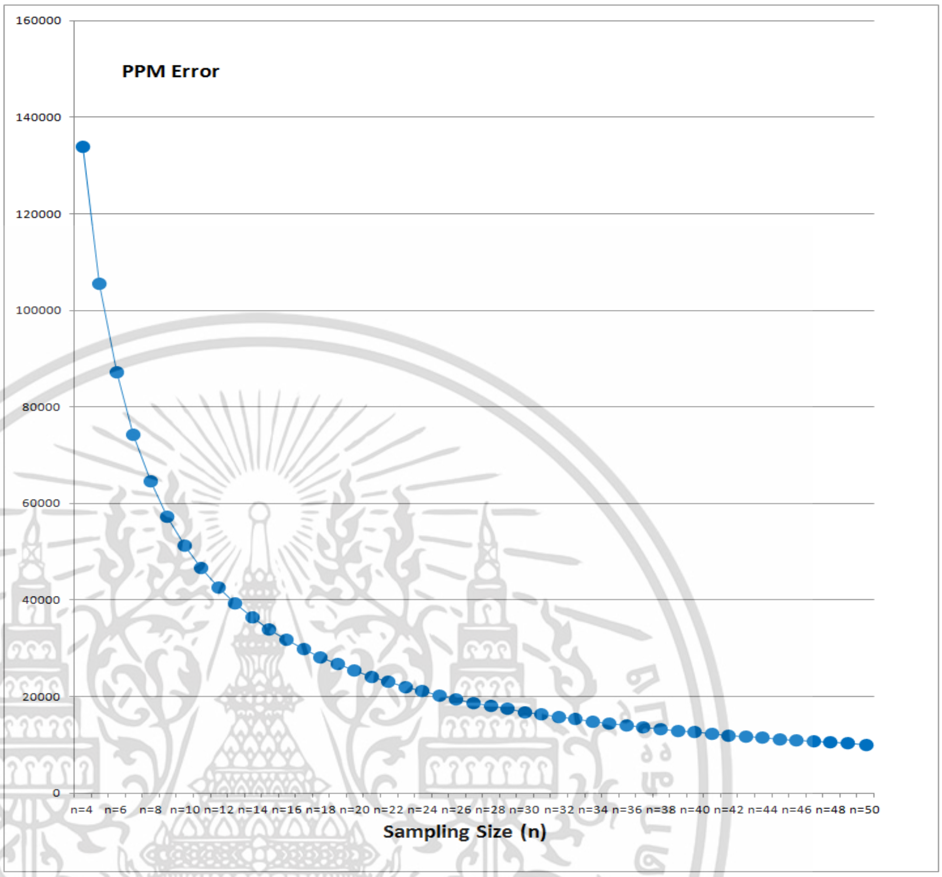
n = 50 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	0.127877	0.016353
t3	0.256457	0.253655	0.064341
t4	0.384685	0.375267	0.140825
t5	0.512913	0.490718	0.240804
t6	0.641141	0.598111	0.357736
t7	0.769370	0.695683	0.483974
t8	0.897598	0.781831	0.611260
t9	1.025826	0.855143	0.731269
t10	1.154054	0.914413	0.836150
t11	1.282283	0.958668	0.919044
t12	1.410511	0.987182	0.974528
t13	1.538739	0.999486	0.998973
t14	1.666968	0.995379	0.990780
t15	1.795196	0.974928	0.950484
t16	1.923424	0.938468	0.880723
t17	2.051652	0.886599	0.786058
t18	2.179881	0.820172	0.672683
t19	2.308109	0.740278	0.548012
t20	2.436337	0.648228	0.420200
t21	2.564565	0.545535	0.297608
t22	2.692794	0.433884	0.188255
t23	2.821022	0.315108	0.099293
t24	2.949250	0.191159	0.036542
t25	3.077479	0.064070	0.004105
t26	3.205707	-0.064070	0.004105
t27	3.333935	-0.191159	0.036542
t28	3.462163	-0.315108	0.099293
t29	3.590392	-0.433884	0.188255
t30	3.718620	-0.545535	0.297608
t31	3.846848	-0.648228	0.420200
t32	3.975076	-0.740278	0.548012
t33	4.103305	-0.820172	0.672683
t34	4.231533	-0.886599	0.786058
t35	4.359761	-0.938468	0.880723
t36	4.487990	-0.974928	0.950484
t37	4.616218	-0.995379	0.990780
t38	4.744446	-0.999486	0.998973
t39	4.872674	-0.987182	0.974528
t40	5.000903	-0.958668	0.919044
t41	5.129131	-0.914413	0.836150
t42	5.257359	-0.855143	0.731269
t43	5.385587	-0.781831	0.611260
t44	5.513816	-0.695683	0.483974
t45	5.642044	-0.598111	0.357736
t46	5.770272	-0.490718	0.240804
t47	5.898500	-0.375267	0.140825
t48	6.026729	-0.253655	0.064341
t49	6.154957	-0.127877	0.016353
t50	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.490000
Calculated RMS	0.700000
Standard RMS	0.707107
Error	0.007107
PPM Error	10051

ตารางที่ 4.8 แสดงค่า PPM Error ที่ได้จากการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \sin t$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวนตั้งแต่ n = 4 ถึง n = 50

Sampling Size	PPM Error
n=4	133975
n=5	105573
n=6	87129
n=7	74180
n=8	64586
n=9	57191
n=10	51317
n=11	46537
n=12	42573
n=13	39231
n=14	36376
n=15	33908
n=16	31754
n=17	29857
n=18	28175
n=19	26671
n=20	25321
n=21	24100
n=22	22992
n=23	21981
n=24	21055
n=25	20204
n=26	19419
n=27	18693
n=28	18019
n=29	17393
n=30	16808
n=31	16261
n=32	15749
n=33	15268
n=34	14816
n=35	14389
n=36	13987
n=37	13606
n=38	13246
n=39	12904
n=40	12579
n=41	12270
n=42	11976
n=43	11696
n=44	11429
n=45	11174
n=46	10929
n=47	10695
n=48	10471
n=49	10257
n=50	10051



4.2 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชัน $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่หลักมูล ซึ่งเลือกค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ จากบทที่ 1 ค่า RMS ที่คำนวณเป็นค่ามาตรฐาน (Standard RMS) คือ $\sqrt{2} \approx 1.414214$

ตารางที่ 4.9 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 4

f(t) = sin(t)+cos(t)-1

n = 4   T = 6.2831853   r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	2.094395	-0.633975	0.401924
t3	4.188790	-2.366025	5.598076
t4	6.283185	0.000000	0.000000

Average	1.500000
Calculated RMS	1.224745
Standard RMS	1.414214
Error	0.189469
PPM Error	133975

ตารางที่ 4.10 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 5

f(t) = sin(t)+cos(t)-1
n = 5 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.570796	0.000000	0.000000
t3	3.141593	-2.000000	4.000000
t4	4.712389	-2.000000	4.000000
t5	6.283185	0.000000	0.000000

Average	1.600000
Calculated RMS	1.264911
Standard RMS	1.414214
Error	0.149302
PPM Error	105573

ตารางที่ 4.11 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 6

f(t) = sin(t)+cos(t)-1
n = 6 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.256637	0.260074	0.067638
t3	2.513274	-1.221232	1.491407
t4	3.769911	-2.396802	5.744661
t5	5.026548	-1.642040	2.696294
t6	6.283185	0.000000	0.000000

Average	1.666667
Calculated RMS	1.290994
Standard RMS	1.414214
Error	0.123219
PPM Error	87129

ตารางที่ 4.12 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 7

f(t) = sin(t)+cos(t)-1
n = 7 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.047198	0.366025	0.133975
t3	2.094395	-0.633975	0.401924
t4	3.141593	-2.000000	4.000000
t5	4.188790	-2.366025	5.598076
t6	5.235988	-1.366025	1.866025
t7	6.283185	0.000000	0.000000

Average	1.714286
Calculated RMS	1.309307
Standard RMS	1.414214
Error	0.104906
PPM Error	74180

ตารางที่ 4.13 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 10

f(t) = sin(t)+cos(t)-1
n = 10 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.698132	0.408832	0.167144
t3	1.396263	0.158456	0.025108
t4	2.094395	-0.633975	0.401924
t5	2.792527	-1.597672	2.552557
t6	3.490659	-2.281713	5.206213
t7	4.188790	-2.366025	5.598076
t8	4.886922	-1.811160	3.280299
t9	5.585054	-0.876743	0.768679
t10	6.283185	0.000000	0.000000

Average	1.800000
Calculated RMS	1.341641
Standard RMS	1.414214
Error	0.072573
PPM Error	51317

ตารางที่ 4.14 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = \cos t + \sin t - 1$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 20

f(t) = sin(t)+cos(t)-1
n = 20 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.330694	0.270517	0.073179
t3	0.661388	0.403353	0.162694
t4	0.992082	0.384115	0.147544
t5	1.322776	0.214886	0.046176
t6	1.653470	-0.085995	0.007395
t7	1.984164	-0.485922	0.236120
t8	2.314858	-0.941558	0.886531
t9	2.645552	-1.403526	1.969886
t10	2.976246	-1.821767	3.318834
t11	3.306940	-2.150956	4.626611
t12	3.637634	-2.355421	5.548009
t13	3.968328	-2.413005	5.822595
t14	4.299022	-2.317469	5.370661
t15	4.629715	-2.079164	4.322922
t16	4.960409	-1.723915	2.971882
t17	5.291103	-1.290218	1.664663
t18	5.621797	-0.825072	0.680744
t19	5.952491	-0.378882	0.143552
t20	6.283185	0.000000	0.000000

Average	1.900000
Calculated RMS	1.378405
Standard RMS	1.414214
Error	0.035809
PPM Error	25321

ตารางที่ 4.15 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t)=\cos t+\sin t-1$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 50

f(t) = sin(t)+cos(t)-1
n = 50 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	0.119667	0.014320
t3	0.256457	0.220949	0.048819
t4	0.384685	0.302184	0.091315
t5	0.512913	0.362036	0.131070
t6	0.641141	0.399524	0.159620
t7	0.769370	0.414032	0.171422
t8	0.897598	0.405321	0.164285
t9	1.025826	0.373535	0.139529
t10	1.154054	0.319196	0.101886
t11	1.282283	0.243195	0.059144
t12	1.410511	0.146782	0.021545
t13	1.538739	0.031538	0.000995
t14	1.666968	-0.100644	0.010129
t15	1.795196	-0.247593	0.061302
t16	1.923424	-0.406897	0.165565
t17	2.051652	-0.575939	0.331706
t18	2.179881	-0.751944	0.565420
t19	2.308109	-0.932023	0.868667
t20	2.436337	-1.113218	1.239253
t21	2.564565	-1.292553	1.670694
t22	2.692794	-1.467085	2.152339
t23	2.821022	-1.633948	2.669785
t24	2.949250	-1.790401	3.205534
t25	3.077479	-1.933875	3.739873
t26	3.205707	-2.062016	4.251908
t27	3.333935	-2.172718	4.720703
t28	3.462163	-2.264164	5.126438
t29	3.590392	-2.334853	5.451537
t30	3.718620	-2.383623	5.681659
t31	3.846848	-2.409674	5.806530
t32	3.975076	-2.412579	5.820537
t33	4.103305	-2.392289	5.723046
t34	4.231533	-2.349138	5.518447
t35	4.359761	-2.283833	5.215895
t36	4.487990	-2.197449	4.828781
t37	4.616218	-2.091402	4.373963
t38	4.744446	-1.967435	3.870799
t39	4.872674	-1.827582	3.340056
t40	5.000903	-1.674140	2.802746
t41	5.129131	-1.509629	2.278981
t42	5.257359	-1.336750	1.786901
t43	5.385587	-1.158342	1.341755
t44	5.513816	-0.977333	0.955180
t45	5.642044	-0.796697	0.634726
t46	5.770272	-0.619399	0.383655
t47	5.898500	-0.448350	0.201018
t48	6.026729	-0.286360	0.082002
t49	6.154957	-0.136087	0.018520
t50	6.283185	0.000000	0.000000

Average	1.960000
Calculated RMS	1.400000
Standard RMS	1.414214
Error	0.014214
PPM Error	10051

จากผลการทดลองถ้าเลือกข้อมูลตั้งแต่ 4 ข้อมูลเป็นต้นไป จะให้ค่า PPM Error ออกมาเท่ากับการเลือกตัวอย่างของ $f(t)=\sin t$

4.3 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของฟังก์ชัน $f(t)=3.5\cos t-12.8\sin t-3.5$ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่หลักมูล ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกัน และไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์ จากบทที่ 1 ค่า RMS ที่คำนวณเป็นค่ามาตรฐาน (Standard RMS) ที่คำนวณได้ คือ 10.014739

ตารางที่ 4.16 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t)=3.5\cos t-12.8\sin t-3.5$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 4

f(t) = 3.5cost-12.8sint-3.5
n = 4 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	2.094395	-16.335125	266.836314
t3	4.188790	5.835125	34.048686
t4	6.283185	0.000000	0.000000

Average	75.221250
Calculated RMS	8.673019
Standard RMS	10.014739
Error	1.341721
PPM Error	133975

ตารางที่ 4.17 แสดงการหา RMS ของสัญญาณ $f(t) = 3.5\cos t - 12.8\sin t - 3.5$ เมื่อใช้ข้อมูลจำนวน n = 50

f(t) = 3.5cost-12.8sint-3.5

n = 50 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	-1.665563	2.774099
t3	0.256457	-3.361247	11.297979
t4	0.384685	-5.059209	25.595596
t5	0.512913	-6.731569	45.314024
t6	0.641141	-8.350867	69.736982
t7	0.769370	-9.890514	97.822266
t8	0.897598	-11.325229	128.260804
t9	1.025826	-12.631453	159.553614
t10	1.154054	-13.787740	190.101771
t11	1.282283	-14.775102	218.303638
t12	1.410511	-15.577327	242.653123
t13	1.538739	-16.181243	261.832627
t14	1.666968	-16.576933	274.794716
t15	1.795196	-16.757901	280.827231
t16	1.923424	-16.721173	279.597643
t17	2.051652	-16.467355	271.173785
t18	2.179881	-16.000613	256.019622
t19	2.308109	-15.328611	234.966330
t20	2.436337	-14.462384	209.160560
t21	2.564565	-13.416155	179.993218
t22	2.692794	-12.207103	149.013361
t23	2.821022	-10.855080	117.832768
t24	2.949250	-9.382287	88.027319
t25	3.077479	-7.812908	61.041527
t26	3.205707	-6.172710	38.102349
t27	3.333935	-4.488627	20.147769
t28	3.462163	-2.788310	7.774672
t29	3.590392	-1.099679	1.209294

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t30	3.718620	0.549538	0.301992
t31	3.846848	2.132263	4.546544
t32	3.975076	3.622505	13.122544
t33	4.103305	4.995797	24.957983
t34	4.231533	6.229587	38.807756
t35	4.359761	7.303618	53.342838
t36	4.487990	8.200254	67.244166
t37	4.616218	8.904772	79.294965
t38	4.744446	9.405604	88.465388
t39	4.872674	9.694526	93.983843
t40	5.000903	9.766795	95.390286
t41	5.129131	9.621223	92.567937
t42	5.257359	9.260201	85.751329
t43	5.385587	8.689657	75.510144
t44	5.513816	7.918959	62.709918
t45	5.642044	6.960762	48.452214
t46	5.770272	5.830800	33.998230
t47	5.898500	4.547626	20.680905
t48	6.026729	3.132311	9.811370
t49	6.154957	1.608093	2.585962
t50	6.283185	0.000000	0.000000

Average	98.289100
Calculated RMS	9.914086
Standard RMS	10.014739
Error	0.100653
PPM Error	10051

จากผลการทดลองถ้าเลือกข้อมูลตั้งแต่ 4 ข้อมูลเป็นต้นไป จะให้ค่า PPM Error ออกมาเท่ากับการเลือกตัวอย่างของ $f(t) = \sin t$

4.4 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันที่มีฮาร์มอนิกสูงสุดเป็น 2 เท่าของความถี่หลักมูล ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

เลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 2 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นเลือกสุ่มใส่โดยไม่มีหลักเกณฑ์ใดๆ โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์) ซึ่งฟังก์ชันจะเป็น $f(t)$ และ $g(t)$ ดังต่อไปนี้

$f(t) = 3.2 + 1.4\cos t - 4.6\cos 2t + 0.7\sin t + 0.3\sin 2t$, ค่า RMS ของ $f(t)$ จะคำนวณได้ 4.700000

$g(t) = 7.9 - 2.3\cos t - 5.6\cos 2t + 3.1\sin t + 8.3\sin 2t$, ค่า RMS ของ $g(t)$ จะคำนวณได้ 10.953766

ตารางที่ 4.18 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 2 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 4

f(t) = 3.2+1.4cost-4.6cos2t+0.7sint+0.3sin2t   g(t) = 7.9-2.3cost-5.6cos2t+3.1sint+8.3sin2t
n = 4   T = 6.2831853   r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	2.094395	5.146410	26.485538	7.346668	53.973529
t3	4.188790	4.453590	19.834462	16.353332	267.431471
t4	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	11.580000	Average	80.351250
Calculated RMS	3.402940	Calculated RMS	8.963886
Standard RMS	4.700000	Standard RMS	10.953766
Error	1.297060	Error	1.989881
PPM Error	275970	PPM Error	181662

ตารางที่ 4.19 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 2 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 5

f(t) = 3.2+1.4cost-4.6cos2t+0.7sint+0.3sin2t   g(t) = 7.9-2.3cost-5.6cos2t+3.1sint+8.3sin2t
n = 5   T = 6.2831853   r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.570796	8.500000	72.250000	16.600000	275.560000
t3	3.141593	-2.800000	7.840000	4.600000	21.160000
t4	4.712389	7.100000	50.410000	10.400000	108.160000
t5	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	26.100000	Average	80.976000
Calculated RMS	5.108816	Calculated RMS	8.998667
Standard RMS	4.700000	Standard RMS	10.953766
Error	-0.408816	Error	1.955100
PPM Error	-86982	PPM Error	178487

ตารางที่ 4.20 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 2 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 6

f(t) = 3.2+1.4cost-4.6cos2t+0.7sint+0.3sin2t   g(t) = 7.9-2.3cost-5.6cos2t+3.1sint+8.3sin2t
n = 6   T = 6.2831853   r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.256637	8.196177	67.177319	19.546649	382.071482
t3	2.513274	0.772031	0.596031	1.958609	3.836150
t4	3.769911	0.519765	0.270156	14.101879	198.862983
t5	5.026548	6.512027	42.406493	3.892863	15.154385
t6	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	18.408333	Average	99.987500
Calculated RMS	4.290493	Calculated RMS	9.999375
Standard RMS	4.700000	Standard RMS	10.953766
Error	0.409507	Error	0.954391
PPM Error	87129	PPM Error	87129

ตารางที่ 4.21 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 2 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 7

f(t) = 3.2+1.4cost-4.6cos2t+0.7sint+0.3sin2t   g(t) = 7.9-2.3cost-5.6cos2t+3.1sint+8.3sin2t

n = 7   T = 6.2831853   r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.047198	7.066025	49.928715	19.422690	377.240871
t3	2.094395	5.146410	26.485538	7.346668	53.973529
t4	3.141593	-2.800000	7.840000	4.600000	21.160000
t5	4.188790	4.453590	19.834462	16.353332	267.431471
t6	5.235988	5.333975	28.451285	-0.322690	0.104129
t7	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	18.934286	Average	102.844286
Calculated RMS	4.351354	Calculated RMS	10.141217
Standard RMS	4.700000	Standard RMS	10.953766
Error	0.348646	Error	0.812549
PPM Error	74180	PPM Error	74180

ตารางที่ 4.22 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 2 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 10

f(t) = 3.2+1.4cost-4.6cos2t+0.7sint+0.3sin2t   g(t) = 7.9-2.3cost-5.6cos2t+3.1sint+8.3sin2t

n = 10   T = 6.2831853   r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.698132	4.219074	17.800588	15.332214	235.076784
t3	1.396263	8.557665	73.233630	18.654559	347.992575
t4	2.094395	5.146410	26.485538	7.346668	53.973529
t5	2.792527	-1.592796	2.537000	1.496569	2.239720
t6	3.490659	-1.685952	2.842434	10.046319	100.928523
t7	4.188790	4.453590	19.834462	16.353332	267.431471
t8	4.886922	6.973722	48.632799	6.871217	47.213618
t9	5.585054	2.728287	7.443550	-5.000878	25.008780
t10	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	19.881000	Average	107.986500
Calculated RMS	4.458812	Calculated RMS	10.391655
Standard RMS	4.700000	Standard RMS	10.953766
Error	0.241188	Error	0.562111
PPM Error	51317	PPM Error	51317

ตารางที่ 4.23 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 2 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 20

f(t) = 3.2+1.4cost-4.6cos2t+0.7sint+0.3sin2t g(t) = 7.9-2.3cost-5.6cos2t+3.1sint+8.3sin2t

n = 20 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.330694	1.305651	1.704725	7.409967	54.907616
t3	0.661388	3.896332	15.181407	14.660340	214.925561
t4	0.992082	6.674275	44.545946	19.087648	364.338318
t5	1.322776	8.410623	70.738585	19.215941	369.252372
t6	1.653470	8.269882	68.390943	15.336833	235.218435
t7	1.984164	6.173446	38.111433	9.349065	87.405019
t8	2.314858	2.847702	8.109408	3.929285	15.439279
t9	2.645552	-0.465212	0.216422	1.386835	1.923312
t10	2.976246	-2.513859	6.319486	2.687292	7.221539
t11	3.306940	-2.549472	6.499805	7.056817	49.798663
t12	3.637634	-0.629238	0.395940	12.332925	152.101034
t13	3.968328	2.415639	5.835314	15.911099	253.163075
t14	4.299022	5.332797	28.438729	15.884287	252.310587
t15	4.629715	6.973420	48.628589	11.890279	141.378734
t16	4.960409	6.767895	45.804396	5.304932	28.142306
t17	5.291103	4.952778	24.530008	-1.304621	1.702036
t18	5.621797	2.454794	6.026016	-5.239824	27.455750
t19	5.952491	0.482544	0.232849	-4.799100	23.031364
t20	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	20.985500	Average	113.985750
Calculated RMS	4.580993	Calculated RMS	10.676411
Standard RMS	4.700000	Standard RMS	10.953766
Error	0.119007	Error	0.277356
PPM Error	25321	PPM Error	25321

ตารางที่ 4.24 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 2 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 50

f(t) = 3.2+1.4cost-4.6cos2t+0.7sint+0.3sin2t   g(t) = 7.9-2.3cost-5.6cos2t+3.1sint+8.3sin2t

n = 50   T = 6.2831853   r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	0.304560	0.092757	2.703784	7.310448
t3	0.256457	0.870920	0.758502	5.655122	31.980404
t4	0.384685	1.664668	2.771120	8.682828	75.391502
t5	0.512913	2.635285	6.944730	11.611878	134.835709
t6	0.641141	3.719430	13.834159	14.274480	203.760780
t7	0.769370	4.845075	23.474756	16.520659	272.932179
t8	0.897598	5.936242	35.238974	18.227670	332.247952
t9	1.025826	6.918005	47.858799	19.307628	372.784512
t10	1.154054	7.721453	59.620837	19.712870	388.597236
t11	1.282283	8.288272	68.695451	19.438690	377.862667
t12	1.410511	8.574656	73.524726	18.523294	343.112427
t13	1.538739	8.554282	73.175748	17.044966	290.530855
t14	1.666968	8.220158	67.570992	15.116643	228.512892
t15	1.795196	7.585212	57.535440	12.878265	165.849717
t16	1.923424	6.681600	44.643775	10.487393	109.985421
t17	2.051652	5.558751	30.899711	8.108720	65.751332
t18	2.179881	4.280296	18.320934	5.903159	34.847283
t19	2.308109	2.920066	8.526783	4.017236	16.138186
t20	2.436337	1.557421	2.425562	2.573466	6.622725
t21	2.564565	0.272224	0.074106	1.662349	2.763405
t22	2.692794	-0.860240	0.740013	1.336524	1.786296
t23	2.821022	-1.774038	3.147211	1.607430	2.583831
t24	2.949250	-2.416769	5.840772	2.444728	5.976694
t25	3.077479	-2.752872	7.578302	3.778488	14.276968
t26	3.205707	-2.765844	7.649891	5.504013	30.294160
t27	3.333935	-2.459231	6.047816	7.488977	56.084771
t28	3.462163	-1.856323	3.445936	9.582394	91.822272
t29	3.590392	-0.998579	0.997159	11.624847	135.137073
t30	3.718620	0.057123	0.003263	13.459282	181.152285
t31	3.846848	1.242211	1.543088	14.941667	223.253415
t32	3.975076	2.480904	6.154884	15.950806	254.428207
t33	4.103305	3.695136	13.654029	16.396667	268.850674
t34	4.231533	4.809615	23.132398	16.226663	263.304600
t35	4.359761	5.756681	33.139376	15.429481	238.068870
t36	4.487990	6.480643	41.998735	14.036182	197.014414
t37	4.616218	6.941322	48.181952	12.118526	146.858663
t38	4.744446	7.116560	50.645421	9.784585	95.738113
t39	4.872674	7.003537	49.049525	7.171971	51.437164
t40	5.000903	6.618816	43.808724	4.439070	19.705342
t41	5.129131	5.997109	35.965311	1.754897	3.079663
t42	5.257359	5.188846	26.924123	-0.711805	0.506667
t43	5.385587	4.256722	18.119679	-2.803489	7.859548
t44	5.513816	3.271428	10.702242	-4.384044	19.219840
t45	5.642044	2.306874	5.321670	-5.347692	28.597806
t46	5.770272	1.435195	2.059785	-5.625941	31.651209
t47	5.898500	0.721885	0.521118	-5.192158	26.958502
t48	6.026729	0.221373	0.049006	-4.063448	16.511608
t49	6.154957	-0.026661	0.000711	-2.299721	5.288714
t50	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	21.648200	Average	117.585300
Calculated RMS	4.652763	Calculated RMS	10.843676
Standard RMS	4.700000	Standard RMS	10.953766
Error	0.047237	Error	0.110091
PPM Error	10051	PPM Error	10051

จากผลการทดลองถ้าเลือกข้อมูลตั้งแต่ 6 ข้อมูลเป็นต้นไป จะให้ค่า PPM Error ออกมาเท่ากับการเลือกตัวอย่างของ $f(t) = \sin t$

4.5 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 3 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกันและไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์

$f(t) = 2.6 + 1.1\cos t - 2.9\cos 2t - 0.8\cos 3t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t$, ค่า RMS ของ $f(t)$ จะคำนวณได้ 4.580503

$g(t) = 9.0 - 2.7\cos t - 1.6\cos 2t - 4.7\cos 3t - 3.1\sin t + 8.3\sin 2t + 1.1\sin 3t$, ค่า RMS ของ $g(t)$ จะคำนวณได้ 11.697222

ตารางที่ 4.25 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 4

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 4 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	2.094395	2.440192	5.954539	-3.422690	11.714804
t3	4.188790	2.959808	8.760461	16.322690	266.430196
t4	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	3.678750	Average	69.536250
Calculated RMS	1.918007	Calculated RMS	8.338840
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	1.662496	Error	3.358382
PPM Error	464319	PPM Error	287109

ตารางที่ 4.26 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 5

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 5 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.570796	7.000000	49.000000	6.400000	40.960000
t3	3.141593	-0.600000	0.360000	14.800000	219.040000
t4	4.712389	4.000000	16.000000	14.800000	219.040000
t5	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	13.072000	Average	95.808000
Calculated RMS	3.615522	Calculated RMS	9.788156
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	-0.035019	Error	1.909066
PPM Error	-9781	PPM Error	163207

ตารางที่ 4.27 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 6

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 6 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.256637	7.371718	54.342221	14.546240	211.593092
t3	2.513274	-0.910069	0.828226	0.567798	0.322394
t4	3.769911	2.043506	4.175917	17.907280	320.670678
t5	5.026548	4.494846	20.203636	11.978683	143.488836
t6	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	13.258333	Average	112.679167
Calculated RMS	3.641199	Calculated RMS	10.615044
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	-0.060697	Error	1.082178
PPM Error	-16952	PPM Error	92516

ตารางที่ 4.28 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 7

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 7 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	1.047198	6.352628	40.355882	17.653332	311.640134
t3	2.094395	2.440192	5.954539	-3.422690	11.714804
t4	3.141593	-0.600000	0.360000	14.800000	219.040000
t5	4.188790	2.959808	8.760461	16.322690	266.430196
t6	5.235988	4.447372	19.779118	8.646668	74.764866
t7	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	10.744286	Average	126.227143
Calculated RMS	3.277848	Calculated RMS	11.235085
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	0.302655	Error	0.462137
PPM Error	84529	PPM Error	39508

ตารางที่ 4.29 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 8

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 8 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t1	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.897598	5.169835	26.727190	18.052661	325.898565
t3	1.795196	5.415512	29.327771	0.628428	0.394922
t4	2.692794	-1.467319	2.153024	4.719060	22.269532
t5	3.590392	1.424980	2.030567	18.242701	332.796134
t6	4.487990	3.522978	12.411372	15.595481	243.219022
t7	5.385587	4.134015	17.090076	5.761669	33.196824
t8	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	11.217500	Average	119.721875
Calculated RMS	3.349254	Calculated RMS	10.941749
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	0.231249	Error	0.755473
PPM Error	64586	PPM Error	64586

ตารางที่ 4.30 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 10

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 10 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.698132	3.332922	11.108367	16.137734	260.426447
t3	1.396263	7.502087	56.281305	11.217893	125.841131
t4	2.094395	2.440192	5.954539	-3.422690	11.714804
t5	2.792527	-1.520962	2.313325	7.218727	52.110024
t6	3.490659	1.010580	1.021273	18.104271	327.764615
t7	4.188790	2.959808	8.760461	16.322690	266.430196
t8	4.886922	4.330156	18.750255	13.551423	183.641063
t9	5.585054	3.345217	11.190474	1.869952	3.496721
t10	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	11.538000	Average	123.142500
Calculated RMS	3.396763	Calculated RMS	11.096959
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	0.183740	Error	0.600263
PPM Error	51317	PPM Error	51317

ตารางที่ 4.31 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 20

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 20 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.330694	0.553279	0.306117	7.625293	58.145087
t3	0.661388	2.994418	8.966537	15.513826	240.678791
t4	0.992082	5.950503	35.408481	17.988607	323.589995
t5	1.322776	7.492553	56.138347	13.063497	170.654949
t6	1.653470	6.522980	42.549268	4.125473	17.019529
t7	1.984164	3.574070	12.773975	-2.579688	6.654790
t8	2.314858	0.384204	0.147613	-2.624935	6.890282
t9	2.645552	-1.379388	1.902711	3.559909	12.672954
t10	2.976246	-1.209282	1.462364	11.601688	134.599161
t11	3.306940	0.160705	0.025826	16.965101	287.814661
t12	3.637634	1.604373	2.574013	18.215261	331.795724
t13	3.968328	2.542112	6.462331	17.128588	293.388535
t14	4.299022	3.157126	9.967443	16.025462	256.815442
t15	4.629715	3.823464	14.618879	15.169248	230.106080
t16	4.960409	4.432114	19.643631	12.791644	163.626165
t17	5.291103	4.360795	19.016532	7.615094	57.989660
t18	5.621797	3.160588	9.989319	1.215199	1.476708
t19	5.952491	1.275387	1.626613	-2.399268	5.756487
t20	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	12.179000	Average	129.983750
Calculated RMS	3.489842	Calculated RMS	11.401042
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	0.090660	Error	0.296180
PPM Error	25321	PPM Error	25321

ตารางที่ 4.32 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 3 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 50

f(t) = 2.6+1.1cost-2.9cos2t-0.8cos3t+0.4sint+0.7sin2t-1.1sin3t
g(t) = 9.0-2.7cost-1.6cost2t-4.7cos3t-3.1sint+8.3sin2t+1.1sin3t
n = 50 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	-0.039804	0.001584	2.539694	6.450045
t3	0.256457	0.242234	0.058677	5.669829	32.146964
t4	0.384685	0.843799	0.711997	9.062175	82.123023
t5	0.512913	1.724923	2.975359	12.343264	152.356174
t6	0.641141	2.810713	7.900110	15.139271	229.197515
t7	0.769370	3.998683	15.989466	17.122414	293.177058
t8	0.897598	5.169835	26.727190	18.052661	325.898565
t9	1.025826	6.202149	38.466647	17.809054	317.162390
t10	1.154054	6.984758	48.786838	16.406338	269.167914
t11	1.282283	7.430985	55.219544	13.994531	195.846886
t12	1.410511	7.488560	56.078529	10.841375	117.535409
t13	1.538739	7.145677	51.060706	7.299940	53.289126
t14	1.666968	6.432149	41.372546	3.765651	14.180125
t15	1.795196	5.415512	29.327771	0.628428	0.394922
t16	1.923424	4.192654	17.578344	-1.773736	3.146139
t17	2.051652	2.878098	8.283449	-3.193725	10.199882
t18	2.179881	1.590515	2.529739	-3.501789	12.262524
t19	2.308109	0.439229	0.192922	-2.696382	7.270474
t20	2.436337	-0.487537	0.237693	-0.898361	0.807052
t21	2.564565	-1.131223	1.279666	1.670182	2.789508
t22	2.692794	-1.467319	2.153024	4.719060	22.269532
t23	2.821022	-1.505191	2.265600	7.930174	62.887654
t24	2.949250	-1.283615	1.647668	10.998938	120.976626
t25	3.077479	-0.862844	0.744500	13.671193	186.901517
t26	3.205707	-0.314523	0.098925	15.770640	248.713093
t27	3.333935	0.289009	0.083526	17.213377	296.300331
t28	3.462163	0.884456	0.782263	18.008100	324.291681
t29	3.590392	1.424980	2.030567	18.242701	332.796134
t30	3.718620	1.884326	3.550686	18.059948	326.161723
t31	3.846848	2.257249	5.095171	17.626559	310.695581
t32	3.975076	2.556381	6.535082	17.100792	292.437089
t33	4.103305	2.806273	7.875171	16.603815	275.686675
t34	4.231533	3.035730	9.215658	16.199379	262.419893
t35	4.359761	3.269820	10.691723	15.884938	252.331267
t36	4.487990	3.522978	12.411372	15.595481	243.219022
t37	4.616218	3.794399	14.397463	15.219304	231.627204
t38	4.744446	4.066556	16.536879	14.623023	213.832803
t39	4.872674	4.307144	18.551494	13.681624	187.186835
t40	5.000903	4.474200	20.018464	12.308494	151.499034
t41	5.129131	4.523600	20.462958	10.480319	109.837091
t42	5.257359	4.417750	19.516513	8.252436	68.102696
t43	5.385587	4.134015	17.090076	5.761669	33.196824
t44	5.513816	3.671468	13.479676	3.215563	10.339845
t45	5.642044	3.054721	9.331318	0.869039	0.755229
t46	5.770272	2.334019	5.447644	-1.008526	1.017125
t47	5.898500	1.581338	2.500630	-2.171207	4.714141
t48	6.026729	0.882807	0.779349	-2.433925	5.923992
t49	6.154957	0.328365	0.107824	-1.703721	2.902666
t50	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	12.563600	Average	134.088500
Calculated RMS	3.544517	Calculated RMS	11.579659
Standard RMS	3.580503	Standard RMS	11.697222
Error	0.035986	Error	0.117563
PPM Error	10051	PPM Error	10051

จากผลการทดลองถ้าเลือกข้อมูลตั้งแต่ 8 ข้อมูลเป็นต้นไป จะให้ค่า PPM Error ออกมาเท่ากับการเลือกตัวอย่างของ $f(t) = \sin t$

4.6 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 10 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกันและไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.7 + 1.3\cos t - 2.9\cos 2t + 0.9\cos 3t + 3.1\cos t4t - 0.4\cos 5t - 2.7\cos 6t \\ &+ 1.5\cos 7t - 0.5\cos 8t - 0.5\cos 9t - 0.5\cos 10t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t \\ &+ 1.3\sin 4t + 2.8\sin 5t + 3.4\sin 6t + 2.3\sin 7t + 2.9\sin 8t + 1.4\sin 9t + 1.1\sin 10t \end{aligned}$$

, ค่า RMS ของ $f(t)$ จะคำนวณได้ 5.990409

$$\begin{aligned} g(t) &= 13.0 - 11.9\cos t - 0.1\cos 2t - 0.8\cos 3t + 0.7\cos t4t + 1.1\cos 5t - \cos 6t \\ &+ 1.5\cos 7t + 2.3\cos 8t - 1.6\cos 9t - 3.2\cos 10t + 0.1\sin t + 0.2\sin 2t - 1.3\sin 3t \\ &+ 1.4\sin 4t + 2.5\sin 5t + 3.6\sin 6t + 1.2\sin 7t - 2.7\sin 8t + 1.8\sin 9t + 19.9\sin 10t \end{aligned}$$

, ค่า RMS ของ $g(t)$ จะคำนวณได้ 21.612381

ตารางที่ 4.33 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 10 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 21

f(t) = as specified
g(t) = as specified
n = 21 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.314159	13.322932	177.500514	9.927950	98.564190
t3	0.628319	-8.016743	64.268161	-3.427439	11.747336
t4	0.942478	-1.433747	2.055629	5.389217	29.043658
t5	1.256637	2.731342	7.460228	7.938985	63.027480
t6	1.570796	12.800000	163.840000	24.800000	615.040000
t7	1.884956	5.512014	30.382298	7.621264	58.083670
t8	2.199115	-6.013467	36.161785	23.755868	564.341272
t9	2.513274	-1.974541	3.898814	18.118771	328.289871
t10	2.827433	-2.567514	6.592130	25.651887	658.019329
t11	3.141593	-5.600000	31.360000	23.400000	547.560000
t12	3.455752	1.950369	3.803938	26.211065	687.019937
t13	3.769911	-0.985133	0.970488	27.802396	772.973244
t14	4.084070	-2.745143	7.535812	15.110272	228.320316
t15	4.398230	4.825370	23.284191	15.509733	240.551829
t16	4.712389	6.000000	36.000000	15.800000	249.640000
t17	5.026548	-0.771667	0.595470	0.639848	0.409405
t18	5.340708	-0.810274	0.656544	18.009891	324.356165
t19	5.654867	6.279359	39.430349	0.396441	0.157166
t20	5.969026	-8.503155	72.303648	-2.656150	7.055134
t21	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	33.719048	Average	34.838796
Calculated RMS	5.806810	Calculated RMS	5.902440
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
Error	0.183599	Error	15.709941
PPM Error	30649	PPM Error	726895

ตารางที่ 4.34 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 10 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 22

f(t) = as specified
g(t) = as specified
n = 22 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.299199	14.077206	198.167741	13.158948	173.157910
t3	0.598399	-7.178543	51.531485	-8.905916	79.315339
t4	0.897598	-2.617124	6.849336	13.125699	172.283977
t5	1.196797	1.535865	2.358881	-5.434272	29.531312
t6	1.495997	11.096275	123.127326	37.155800	1380.553451
t7	1.795196	9.451293	89.326931	-3.933326	15.471052
t8	2.094395	-3.525833	12.431499	33.972174	1154.108615
t9	2.393594	-4.959458	24.596220	4.543041	20.639224
t10	2.692794	0.000244	0.000000	38.880092	1511.661542
t11	2.991993	-6.404894	41.022662	7.700206	59.293165
t12	3.291192	-1.305406	1.704085	41.795807	1746.889519
t13	3.590392	1.527269	2.332550	9.940899	98.821464
t14	3.889591	-2.367704	5.606023	42.210020	1781.685819
t15	4.188790	-1.274167	1.623501	-5.172174	26.751385
t16	4.487990	7.006079	49.085143	34.616900	1198.329735
t17	4.787189	4.113538	16.921193	-3.440023	11.833761
t18	5.086388	-1.338885	1.792613	14.662736	214.995824
t19	5.385587	0.032239	0.001039	8.869737	78.672230
t20	5.684787	6.164831	38.005139	4.857561	23.595897
t21	5.983986	-9.332826	87.101632	-5.603908	31.403780
t22	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	34.253864	Average	445.863409
Calculated RMS	5.852680	Calculated RMS	21.115478
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
Error	0.137729	Error	0.496903
PPM Error	22992	PPM Error	22992

ตารางที่ 4.35 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 10 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 23

f(t) = as specified
g(t) = as specified
n = 23 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.285599	14.646734	214.526816	15.946641	254.295352
t3	0.571199	-6.033531	36.403498	-13.092354	171.409741
t4	0.856798	-3.916646	15.340116	18.243159	332.812866
t5	1.142397	0.887896	0.788360	-13.045308	170.180061
t6	1.427997	8.707928	75.828002	39.515441	1561.470071
t7	1.713596	12.063200	145.520794	-1.955887	3.825495
t8	1.999195	0.186261	0.034693	28.088308	788.953074
t9	2.284795	-6.439637	41.468928	10.756581	115.704038
t10	2.570394	-0.744499	0.554279	27.827562	774.373228
t11	2.855993	-3.363739	11.314740	21.049643	443.087489
t12	3.141593	-5.600000	31.360000	23.400000	547.560000
t13	3.427192	1.688308	2.850383	30.901563	954.906611
t14	3.712791	-0.161411	0.026054	18.251790	333.127831
t15	3.998391	-2.970305	8.822710	33.889158	1148.475029
t16	4.283990	1.222983	1.495687	-6.079087	36.955299
t17	4.569589	7.765650	60.305313	40.332860	1626.739592
t18	4.855189	2.351181	5.528051	-14.890216	221.718518
t19	5.140788	-1.662842	2.765043	25.389888	644.646392
t20	5.426387	1.020459	1.041337	0.941537	0.886492
t21	5.711987	5.765001	33.235231	8.773856	76.980553
t22	5.997586	-10.012990	100.259966	-8.245136	67.982270
t23	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	34.324783	Average	446.786522
Calculated RMS	5.858736	Calculated RMS	21.137325
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
Error	0.131673	Error	0.475055
PPM Error	21981	PPM Error	21981

ตารางที่ 4.36 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 10 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 50

f(t) = as specified
g(t) = as specified
n = 50 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	11.897476	141.549943	25.317116	640.956341
t3	0.256457	15.460394	239.023789	21.207009	449.737233
t4	0.384685	8.346325	69.661146	-5.523637	30.510562
t5	0.512913	-2.448183	5.993599	-18.041085	325.480734
t6	0.641141	-8.241491	67.922174	-0.920605	0.847513
t7	0.769370	-6.833355	46.694734	19.290973	372.141635
t8	0.897598	-2.617124	6.849336	13.125699	172.283977
t9	1.025826	-0.057415	0.003297	-9.106720	82.932350
t10	1.154054	0.999534	0.999068	-11.893318	141.451021
t11	1.282283	3.421163	11.704357	14.368208	206.445412
t12	1.410511	8.029631	64.474973	38.459007	1479.095219
t13	1.538739	12.223232	149.407407	31.014365	961.890826
t14	1.666968	12.900882	166.432755	4.742234	22.488784
t15	1.795196	9.451293	89.326931	-3.933326	15.471052
t16	1.923424	3.688970	13.608501	14.921458	222.649914
t17	2.051652	-1.993459	3.973879	33.252068	1105.700005
t18	2.179881	-5.710378	32.608419	26.558754	705.367404
t19	2.308109	-6.296236	39.642587	7.997482	63.959715
t20	2.436337	-3.946552	15.575274	7.310376	53.441601
t21	2.564565	-0.851089	0.724352	26.877933	722.423308
t22	2.692794	0.000244	0.000000	38.880092	1511.661542
t23	2.821022	-2.393041	5.726643	26.670969	711.340568
t24	2.949250	-5.722131	32.742785	9.306200	86.605355
t25	3.077479	-6.566975	43.125158	13.436023	180.526723
t26	3.205707	-3.933300	15.470852	33.957664	1153.122978
t27	3.333935	-0.102818	0.010572	41.327423	1707.955860
t28	3.462163	1.990096	3.960481	25.138015	631.919815
t29	3.590392	1.527269	2.332550	9.940899	98.821464
t30	3.718620	-0.247892	0.061451	19.149632	366.708413
t31	3.846848	-1.943133	3.775765	39.201234	1536.736756
t32	3.975076	-2.911018	8.474026	37.563772	1411.036934
t33	4.103305	-2.581441	6.663839	10.573625	111.801548
t34	4.231533	-0.269467	0.072613	-8.135060	66.179206
t35	4.359761	3.633845	13.204826	6.553615	42.949865
t36	4.487990	7.006079	49.085143	34.616900	1198.329735
t37	4.616218	7.582924	57.500735	36.513507	1333.236210
t38	4.744446	5.226852	27.319980	7.224240	52.189639
t39	4.872674	1.929522	3.723056	-16.253969	264.191507
t40	5.000903	-0.452991	0.205201	-4.969633	24.697251
t41	5.129131	-1.608363	2.586832	23.422392	548.608435
t42	5.257359	-1.665265	2.773108	30.289682	917.464858
t43	5.385587	0.032239	0.001039	8.869737	78.672230
t44	5.513816	3.563108	12.695736	-9.351934	87.458676
t45	5.642044	6.231813	38.835489	-1.444507	2.086602
t46	5.770272	3.916715	15.340659	15.035299	226.060210
t47	5.898500	-3.863181	14.924166	9.918143	98.369552
t48	6.026729	-11.187349	125.156787	-13.544755	183.460377
t49	6.154957	-10.315958	106.418986	-21.913194	480.188083
t50	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	35.167300	Average	457.753100
Calculated RMS	5.930202	Calculated RMS	21.395165
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
Error	0.060207	Error	0.217215
PPM Error	10051	PPM Error	10051

จากผลการทดลองถ้าเลือกข้อมูลตั้งแต่ 22 ข้อมูลเป็นต้นไป จะให้ค่า PPM Error ออกมาเท่ากับการเลือกตัวอย่างของ $f(t) = \sin t$

4.7 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 15 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกันและไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์

$$f(t)=0.7+1.3\cos t-2.9\cos 2t+0.9\cos 3t+3.1\cos t4t-0.4\cos 5t-2.7\cos 6t$$
$$+1.5\cos 7t-0.5\cos 8t-0.5\cos 9t-0.5\cos 10t+0.4\sin t+0.7\sin 2t-1.1\sin 3t$$
$$+1.3\sin 4t+2.8\sin 5t+3.4\sin 6t+2.3\sin 10t+2.9\sin 11t+1.4\sin 13t+1.1\sin 15t$$

, ค่า RMS ของ $f(t)$ จะคำนวณได้ 5.990409

$$g(t)=0.7+1.2\cos t-2.9\cos 2t+1.0\cos 3t+2.3\cos t4t-0.4\cos 5t-1.9\cos 6t$$
$$+2.5\cos 7t-0.5\cos 8t-1.0\cos 9t-1.0\cos 10t+0.4\sin t+0.7\sin 2t-1.1\sin 3t$$
$$+1.3\sin 4t+2.8\sin 10t+3.4\sin 11t+2.3\sin 12t+2.9\sin 13t+1.4\sin 14t+1.1\sin 15t$$

, ค่า RMS ของ $f(t)$ จะคำนวณได้ 5.882601

ตารางที่ 4.37 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 15 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 31

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.209440	12.766228	162.976567	10.369470	107.525905
t3	0.418879	1.398493	1.955782	-8.774383	76.989799
t4	0.628319	0.787707	0.620482	6.191655	38.336589
t5	0.837758	-5.892097	34.716804	-1.689803	2.855433
t6	1.047198	-6.688973	44.742356	-0.318653	0.101540
t7	1.256637	6.350657	40.330840	1.156013	1.336366
t8	1.466077	13.305458	177.035208	6.385486	40.774429
t9	1.675516	9.592106	92.008489	9.623234	92.606629
t10	1.884956	5.722174	32.743279	9.104519	82.892263
t11	2.094395	-3.266025	10.666922	-0.154552	0.023886
t12	2.303835	-7.375518	54.398265	-6.944260	48.222752
t13	2.513274	1.313780	1.726019	-1.649213	2.719902
t14	2.722714	-3.446913	11.881207	-1.974917	3.900297
t15	2.932153	-4.408298	19.433093	-4.974110	24.741767
t16	3.141593	-5.600000	31.360000	-6.600000	43.560000
t17	3.351032	-0.627836	0.394178	-0.622454	0.387449
t18	3.560472	4.958695	24.588657	4.127702	17.037921
t19	3.769911	-4.273455	18.262419	-0.659804	0.435342
t20	3.979351	-1.880098	3.534767	-0.974336	0.949331
t21	4.188790	-1.533975	2.353078	-3.445448	11.871114
t22	4.398230	4.615209	21.300156	2.383523	5.681180
t23	4.607669	10.845559	117.626148	10.788318	116.387806
t24	4.817109	0.130476	0.017024	2.564361	6.575946
t25	5.026548	-4.390982	19.280722	-2.346996	5.508390
t26	5.235988	5.088973	25.897644	3.318653	11.013460
t27	5.445427	2.866738	8.218186	2.446352	5.984636
t28	5.654867	-2.525091	6.376082	-10.579696	111.929969
t29	5.864306	2.525336	6.377320	10.802846	116.701480
t30	6.073746	-9.358328	87.578304	-6.553504	42.948419
t31	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	34.141935	Average	32.903226
Calculated RMS	5.843110	Calculated RMS	5.736133
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	5.882601
Error	0.147299	Error	0.146468
PPM Error	24589	PPM Error	24899

ตารางที่ 4.38 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 15 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 32

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.202683	13.015449	169.401909	11.148141	124.281048
t3	0.405367	1.711142	2.928008	-9.077588	82.402596
t4	0.608050	1.078426	1.163002	5.624497	31.634969
t5	0.810734	-5.076965	25.775571	-0.669533	0.448274
t6	1.013417	-7.409143	54.895402	-0.904515	0.818147
t7	1.216100	3.165641	10.021280	0.700598	0.490837
t8	1.418784	13.562141	183.931671	5.219752	27.245814
t9	1.621467	10.190396	103.844165	8.896748	79.152130
t10	1.824151	7.628685	58.196835	10.250228	105.067171
t11	2.026834	-0.389907	0.152027	3.258204	10.615891
t12	2.229517	-7.363617	54.222849	-5.745040	33.005487
t13	2.432201	-2.345394	5.500873	-4.552118	20.721777
t14	2.634884	0.753270	0.567416	-0.153417	0.023537
t15	2.837568	-6.269649	39.308502	-4.517138	20.404537
t16	3.040251	-3.171518	10.058526	-5.443711	29.633989
t17	3.242934	-6.331073	40.082482	-5.642219	31.834636
t18	3.445618	5.295566	28.043016	3.788568	14.353250
t19	3.648301	0.069755	0.004866	1.593204	2.538298
t20	3.850985	-3.693043	13.638566	-0.602185	0.362627
t21	4.053668	-1.889201	3.569080	-2.083167	4.339586
t22	4.256351	-0.200953	0.040382	-2.767191	7.657349
t23	4.459035	7.064342	49.904924	5.600396	31.364438
t24	4.661718	9.984387	99.687981	10.233930	104.733328
t25	4.864402	-3.083424	9.507506	0.170435	0.029048
t26	5.067085	-2.487338	6.186852	-1.755089	3.080337
t27	5.269768	5.616059	31.540114	4.444112	19.750132
t28	5.472452	1.904513	3.627171	0.404827	0.163885
t29	5.675135	-2.338026	5.466365	-9.832608	96.680170
t30	5.877819	2.461778	6.060349	11.581377	134.128291
t31	6.080502	-9.752298	95.107309	-7.469499	55.793422
t32	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	34.763594	Average	33.523594
Calculated RMS	5.896066	Calculated RMS	5.789956
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	5.882601
Error	0.094343	Error	0.092645
PPM Error	15749	PPM Error	15749

ตารางที่ 4.39 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 15 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 33

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.196350	13.214087	174.612090	11.827421	139.887881
t3	0.392699	2.089611	4.366476	-9.120868	83.190228
t4	0.589049	1.241490	1.541296	4.722149	22.298694
t5	0.785398	-4.219239	17.801976	0.565685	0.320000
t6	0.981748	-7.728910	59.736045	-1.543303	2.381783
t7	1.178097	0.222683	0.049588	0.502032	0.252036
t8	1.374447	12.875871	165.788062	3.971598	15.773591
t9	1.570796	11.100000	123.210000	8.200000	67.240000
t10	1.767146	8.727474	76.168800	10.455367	109.314708
t11	1.963495	2.449575	6.000420	6.268252	39.290981
t12	2.159845	-5.670148	32.150573	-3.225414	10.403293
t13	2.356194	-5.964823	35.579116	-6.604163	43.614970
t14	2.552544	2.099166	4.406498	-0.607269	0.368776
t15	2.748894	-4.605278	21.208583	-2.688306	7.226990
t16	2.945243	-4.074966	16.605352	-4.982744	24.827736
t17	3.141593	-5.600000	31.360000	-6.600000	43.560000
t18	3.337942	-1.565872	2.451955	-1.349896	1.822220
t19	3.534292	5.880237	34.577188	4.571120	20.895140
t20	3.730641	-3.610728	13.037355	-0.302986	0.091800
t21	3.926991	-2.380761	5.668024	-0.565685	0.320000
t22	4.123340	-2.008296	4.033252	-3.106710	9.651646
t23	4.319690	1.698637	2.885369	-1.051779	1.106239
t24	4.516039	9.180005	84.272491	8.418252	70.866960
t25	4.712389	7.700000	59.290000	8.400000	70.560000
t26	4.908739	-5.130609	26.323151	-1.445172	2.088521
t27	5.105088	-0.419424	0.175916	-0.918504	0.843650
t28	5.301438	5.748217	33.041998	5.283205	27.912258
t29	5.497787	0.964823	0.930884	-1.795837	3.225030
t30	5.694137	-2.007040	4.028209	-8.630438	74.484464
t31	5.890486	2.283957	5.216461	12.038054	144.914735
t32	6.086836	-10.089741	101.802874	-8.284061	68.625667
t33	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	34.797576	Average	33.556364
Calculated RMS	5.898947	Calculated RMS	5.792785
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	5.882601
Error	0.091462	Error	0.089816
PPM Error	15268	PPM Error	15268

ตารางที่ 4.40 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 15 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 50

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	12.778247	163.283592	15.017899	225.537293
t3	0.256457	10.198315	104.005633	3.918006	15.350773
t4	0.384685	2.372804	5.630200	-9.022618	81.407628
t5	0.512913	1.101238	1.212725	-1.604614	2.574787
t6	0.641141	0.541541	0.293267	6.337109	40.158948
t7	0.769370	-3.642941	13.271022	1.441984	2.079316
t8	0.897598	-7.221486	52.149858	-2.619676	6.862703
t9	1.025826	-7.192704	51.734991	-0.672111	0.451733
t10	1.154054	-1.496162	2.238500	0.437387	0.191307
t11	1.282283	8.234685	67.810032	1.602151	2.566887
t12	1.410511	13.509717	182.512454	4.994625	24.946282
t13	1.538739	11.820520	139.724684	7.728990	59.737280
t14	1.666968	9.667294	93.456577	9.511424	90.467196
t15	1.795196	8.268074	68.361047	10.450027	109.203067
t16	1.923424	4.194235	17.591606	7.881350	62.115677
t17	2.051652	-1.476794	2.180921	2.004066	4.016282
t18	2.179881	-6.277009	39.400844	-4.053066	16.427347
t19	2.308109	-7.304737	53.359189	-6.954535	48.365564
t20	2.436337	-2.127394	4.525805	-4.405238	19.406121
t21	2.564565	2.155535	4.646330	-0.384058	0.147501
t22	2.692794	-1.950998	3.806392	-1.192932	1.423087
t23	2.821022	-6.267825	39.285632	-4.285487	18.365400
t24	2.949250	-3.977883	15.823554	-4.986080	24.860996
t25	3.077479	-3.804867	14.477013	-5.883716	34.618110
t26	3.205707	-6.695408	44.828491	-6.443150	41.514188
t27	3.333935	-1.847066	3.411654	-1.571157	2.468536
t28	3.462163	5.864880	34.396821	4.227732	17.873718
t29	3.590392	3.478510	12.100034	3.369649	11.354534
t30	3.718620	-3.254516	10.591872	-0.119994	0.014398
t31	3.846848	-3.762291	14.154833	-0.615497	0.378837
t32	3.975076	-1.902517	3.619569	-0.926271	0.857979
t33	4.103305	-2.014810	4.059461	-2.857175	8.163450
t34	4.231533	-0.786132	0.618004	-3.151807	9.933887
t35	4.359761	3.128580	9.788012	0.546881	0.299079
t36	4.487990	8.189298	67.064595	7.100408	50.415800
t37	4.616218	10.816512	116.996924	10.805026	116.748586
t38	4.744446	5.629564	31.691996	6.757607	45.665254
t39	4.872674	-3.550564	12.606503	-0.183327	0.033609
t40	5.000903	-5.266513	27.736155	-2.523092	6.365993
t41	5.129131	0.887333	0.787359	-0.272403	0.074203
t42	5.257359	5.470024	29.921158	4.049253	16.396448
t43	5.385587	4.636602	21.498075	5.292524	28.010808
t44	5.513816	0.372694	0.138901	-3.261319	10.636199
t45	5.642044	-2.551219	6.508719	-10.761666	115.813454
t46	5.770272	0.367294	0.134905	-0.062056	0.003851
t47	5.898500	2.110340	4.453536	12.182935	148.423915
t48	6.026729	-5.925270	35.108829	0.592451	0.350998
t49	6.154957	-11.196728	125.366726	-13.136438	172.565991
t50	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Average	35.167300	Average	33.912900
Calculated RMS	5.930202	Calculated RMS	5.823478
Standard RMS	5.990409	Standard RMS	5.882601
Error	0.060207	Error	0.059123
PPM Error	10051	PPM Error	10051

จากผลการทดลองถ้าเลือกข้อมูลตั้งแต่ 32 ข้อมูลเป็นต้นไป จะให้ค่า PPM Error ออกมาเท่ากับการเลือกตัวอย่างของ $f(t) = \sin t$

4.8 ผลที่ได้จากการเลือกตัวอย่างข้อมูลของ 2 ฟังก์ชันต่อไปนี้ ในช่วงคาบ 0 ถึง 2π

โดยเลือกสัญญาณที่สร้างมาจากความถี่ 20 ฮาร์มอนิก ที่ให้ค่า Amplitude ของแต่ละลูกคลื่นต่างกันและไม่สัมพันธ์กันเป็นจำนวนเต็ม โดยที่ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นศูนย์

$$
\begin{aligned}
f(t) = {} & 0.7 + 1.3\cos t - 2.9\cos 2t + 0.9\cos 3t + 3.1\cos t4t - 0.4\cos 5t - 2.7\cos 6t \\
& + 1.5\cos 17t - 0.5\cos 18t - 0.5\cos 19t - 0.5\cos 20t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t \\
& + 1.3\sin 4t + 2.8\sin 15t + 3.4\sin 16t + 2.3\sin 17t + 2.9\sin 18t + 1.4\sin 19t + 1.1\sin 20t
\end{aligned}
$$

, ค่า RMS ของ $f(t)$ จะคำนวณได้คือ 5.990409

$$
\begin{aligned}
g(t) = {} & 13.0 - 11.9\cos t - 0.1\cos 2t - 0.8\cos 3t + 0.7\cos t4t + 1.1\cos 5t - \cos 6t \\
& + 1.5\cos 17t + 2.3\cos 18t - 1.6\cos 19t - 3.2\cos 20t + 0.1\sin t + 0.2\sin 2t - 1.3\sin 3t \\
& + 1.4\sin 4t + 2.5\sin 5t + 3.6\sin 6t + 1.2\sin 17t - 2.7\sin 18t + 1.8\sin 19t + 19.9\sin 20t
\end{aligned}
$$

, ค่า RMS ของ $g(t)$ จะคำนวณได้คือ 21.612381

ตารางที่ 4.41 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 20 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 41

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.157080	7.480111	55.952057	7.433715	55.260118
t3	0.314159	-7.736850	59.858854	6.089341	37.080079
t4	0.471239	14.556744	211.898790	8.162054	66.619125
t5	0.628319	-8.016743	64.268161	-3.427439	11.747336
t6	0.785398	3.821320	14.602489	2.470354	6.102647
t7	0.942478	-5.171598	26.745429	-5.684740	32.316274
t8	1.099557	-1.909481	3.646116	12.515943	156.648833
t9	1.256637	2.731342	7.460228	7.938985	63.027480
t10	1.413717	8.887043	78.979530	24.897848	619.902845
t11	1.570796	9.000000	81.000000	12.600000	158.760000
t12	1.727876	11.645035	135.606830	21.842368	477.089052
t13	1.884956	5.512014	30.382298	7.621264	58.083670
t14	2.042035	-1.048378	1.099096	20.252267	410.154319
t15	2.199115	0.168967	0.028550	11.878665	141.102686
t16	2.356194	-7.338478	53.853254	27.539697	758.434909
t17	2.513274	-1.974541	3.898814	18.118771	328.289871
t18	2.670354	-3.793697	14.392140	27.949226	781.159245
t19	2.827433	-5.499218	30.241394	18.025248	324.909579
t20	2.984513	-2.190778	4.799507	24.397454	595.235752
t21	3.141593	-5.600000	31.360000	23.400000	547.560000
t22	3.298672	-0.053213	0.002832	26.283903	690.843563
t23	3.455752	-0.360560	0.130004	31.040711	963.525725
t24	3.612832	3.006540	9.039285	23.728862	563.058877
t25	3.769911	-0.985133	0.970488	27.802396	772.973244
t26	3.926991	-0.421320	0.177511	16.329646	266.657353
t27	4.084070	-3.427634	11.748674	20.812683	433.167782
t28	4.241150	-3.035770	9.215898	15.887568	252.414829
t29	4.398230	4.825370	23.284191	15.509733	240.551829
t30	4.555309	2.967715	8.807334	17.009456	289.321595
t31	4.712389	9.800000	96.040000	6.000000	36.000000
t32	4.869469	6.810241	46.379389	14.796859	218.947025
t33	5.026548	-0.771667	0.595470	0.639848	0.409405
t34	5.183628	2.333146	5.443568	17.117486	293.008335
t35	5.340708	-5.336298	28.476078	3.972727	15.782560
t36	5.497787	-3.661522	13.406746	15.660303	245.245091
t37	5.654867	6.279359	39.430349	0.396441	0.157166
t38	5.811946	-8.172726	66.793444	2.256098	5.089979
t39	5.969026	10.563192	111.581017	-6.734635	45.355315
t40	6.126106	-5.882532	34.604186	-2.531108	6.406507
t41	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		Average	34.541463	Average	267.521951
		Calculated RMS	5.877199	Calculated RMS	16.356098
		Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
		Error	0.113210	Error	5.256282
		PPM Error	18899	PPM Error	243207

ตารางที่ 4.42 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 20 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 42

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.153248	8.245077	67.981289	8.950241	80.106809
t3	0.306497	-8.792817	77.313632	2.789019	7.778626
t4	0.459745	14.953467	223.606167	13.503826	182.353313
t5	0.612994	-6.993031	48.902488	-9.590816	91.983761
t6	0.766242	2.505715	6.278610	10.578372	111.901953
t7	0.919491	-3.293446	10.846787	-15.490575	239.957922
t8	1.072739	-3.652190	13.338491	21.255340	451.789463
t9	1.225987	2.233581	4.988885	-4.205686	17.687794
t10	1.379236	7.542953	56.896144	35.682030	1273.207236
t11	1.532484	9.329654	87.042435	1.065226	1.134706
t12	1.685733	10.826012	117.202537	35.042212	1227.956632
t13	1.838981	8.707542	75.821281	-4.616100	21.308379
t14	1.992229	-0.531022	0.281985	32.440836	1052.407826
t15	2.145478	0.500456	0.250456	-2.221459	4.934881
t16	2.298726	-4.640926	21.538191	38.684955	1496.525759
t17	2.451975	-5.754015	33.108693	5.643688	31.851219
t18	2.605223	-0.376442	0.141709	40.111961	1608.969427
t19	2.758472	-7.476085	55.891852	6.817962	46.484608
t20	2.911720	-1.535408	2.357477	36.272148	1315.668693
t21	3.064968	-5.587697	31.222355	8.703624	75.753070
t22	3.218217	-2.184542	4.772223	40.091421	1607.322057
t23	3.371465	-0.643102	0.413580	12.838409	164.824755
t24	3.524714	1.723213	2.969464	45.257216	2048.215587
t25	3.677962	1.515180	2.295769	7.165071	51.338245
t26	3.831211	-1.136902	1.292545	42.938855	1843.745303
t27	3.984459	-0.909448	0.827095	-2.939854	8.642739
t28	4.137707	-4.496432	20.217904	40.173615	1613.919361
t29	4.290956	-0.491953	0.242017	-5.001887	25.018878
t30	4.444204	5.220735	27.256077	35.917274	1290.050587
t31	4.597453	3.275966	10.731954	-4.001359	16.010871
t32	4.750701	11.514436	132.582227	23.943450	573.288791
t33	4.903950	3.771340	14.223005	-2.081417	4.332296
t34	5.057198	-0.000300	0.000000	14.975303	224.259688
t35	5.210446	1.673204	2.799612	5.818213	33.851600
t36	5.363695	-6.403809	41.008774	13.306260	177.056550
t37	5.516943	-1.910377	3.649539	7.954683	63.276980
t38	5.670192	5.509652	30.356260	5.429806	29.482794
t39	5.823440	-8.229790	67.729439	-2.304514	5.310786
t40	5.976688	11.343018	128.664048	-3.971113	15.769735
t41	6.129937	-6.651466	44.242003	-3.926235	15.415320
t42	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		Average	35.030595	Average	455.973690
		Calculated RMS	5.918665	Calculated RMS	21.353540
		Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
		Error	0.071744	Error	0.258840
		PPM Error	11976	PPM Error	11976

ตารางที่ 4.43 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 20 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 43

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.149600	8.946424	80.038496	10.373882	107.617424
t3	0.299199	-9.623018	92.602473	-0.244022	0.059547
t4	0.448799	14.893260	221.809196	18.193136	330.990209
t5	0.598399	-5.431756	29.503978	-14.562103	212.054847
t6	0.747998	0.729578	0.532284	16.712091	279.293981
t7	0.897598	-1.171395	1.372167	-22.009659	484.425076
t8	1.047198	-5.244486	27.504637	25.585829	654.634662
t9	1.196797	1.820414	3.313908	-10.278617	105.649973
t10	1.346397	5.984640	35.815922	38.415567	1475.755821
t11	1.495997	9.727164	94.617726	-0.893876	0.799015
t12	1.645596	9.797040	95.981984	36.288996	1316.891202
t13	1.795196	10.885277	118.489265	-2.542507	6.464342
t14	1.944795	1.467037	2.152197	28.585395	817.124790
t15	2.094395	-0.321539	0.103387	2.496479	6.232409
t16	2.243995	-1.498112	2.244339	29.096245	846.591464
t17	2.393594	-7.740311	59.912408	15.127534	228.842297
t18	2.543194	-0.570307	0.325250	28.292678	800.475644
t19	2.692794	-5.194598	26.983848	20.530721	421.510485
t20	2.842393	-4.684639	21.945843	22.537840	507.954217
t21	2.991993	-2.483578	6.168160	22.244480	494.816890
t22	3.141593	-5.600000	31.360000	23.400000	547.560000
t23	3.291192	-0.096228	0.009260	28.442114	808.953832
t24	3.440792	-0.636652	0.405326	26.129570	682.754442
t25	3.590392	3.054548	9.330262	32.085634	1029.487932
t26	3.739991	-0.406330	0.165104	16.950518	287.320068
t27	3.889591	-0.598567	0.358282	32.538931	1058.782014
t28	4.039191	-2.183600	4.768109	2.183025	4.765596
t29	4.188790	-4.478461	20.056613	38.003521	1444.267591
t30	4.338390	2.295847	5.270913	-7.482431	55.986780
t31	4.487990	4.442564	19.736371	41.402668	1714.180936
t32	4.637589	4.918716	24.193771	-13.865543	192.253290
t33	4.787189	11.702666	136.952382	34.141698	1165.655532
t34	4.936788	1.271319	1.616253	-13.695112	187.556088
t35	5.086388	0.984323	0.968891	26.218881	687.429726
t36	5.235988	0.644486	0.415363	-3.685829	13.585338
t37	5.385587	-7.116396	50.643087	21.533143	463.676229
t38	5.535187	-0.096721	0.009355	0.832080	0.692356
t39	5.684787	4.403622	19.391888	10.101052	102.031242
t40	5.834386	-7.967508	63.481181	-6.592861	43.465821
t41	5.983986	11.935269	142.450645	-1.336071	1.785085
t42	6.133586	-7.359992	54.169477	-5.255074	27.615806
t43	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		Average	35.050465	Average	456.232326
		Calculated RMS	5.920343	Calculated RMS	21.359596
		Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
		Error	0.070066	Error	0.252785
		PPM Error	11696	PPM Error	11696

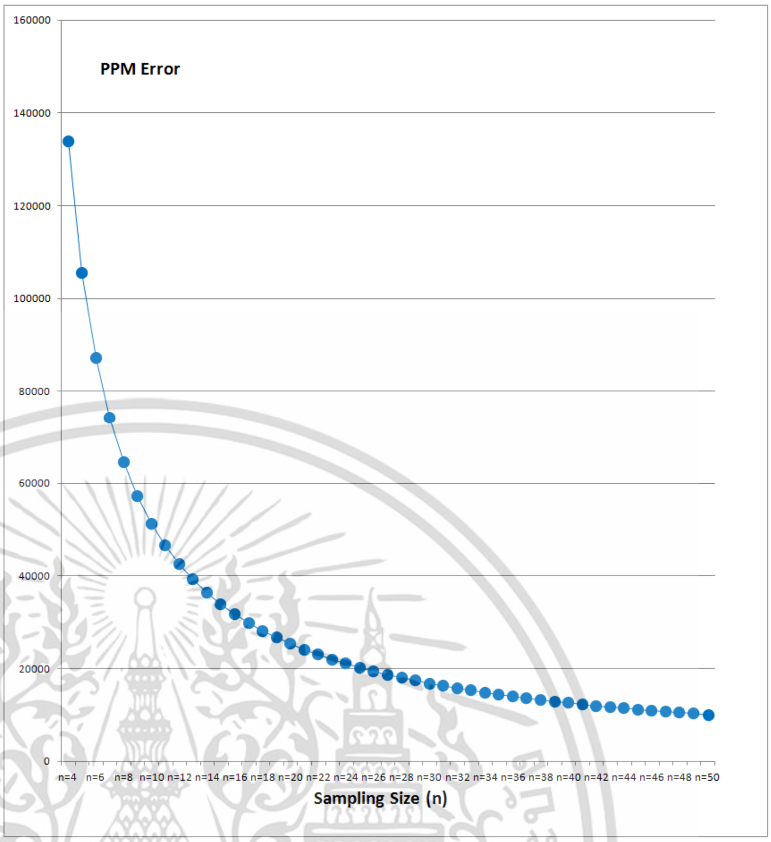
ตารางที่ 4.44 แสดงการหา RMS ของ 2 สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 20 ฮาร์มอนิก เมื่อ n = 50

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	g(t)	g(t)*g(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.128228	12.373927	153.114062	17.899114	320.378299
t3	0.256457	-10.513599	110.535763	-12.819619	164.342634
t4	0.384685	6.672838	44.526773	29.114951	847.680380
t5	0.512913	9.706091	94.208207	-10.704288	114.581787
t6	0.641141	-8.368086	70.024857	2.046082	4.186453
t7	0.769370	2.763274	7.635681	9.344437	87.318501
t8	0.897598	-1.171395	1.372167	-22.009659	484.425076
t9	1.025826	-6.295160	39.629040	25.123207	631.175544
t10	1.154054	0.790357	0.624665	-6.585641	43.370672
t11	1.282283	3.365383	11.325800	19.825349	393.044449
t12	1.410511	8.783307	77.146488	26.121311	682.322897
t13	1.538739	9.257311	85.697800	2.405791	5.787830
t14	1.666968	10.335541	106.823410	37.225131	1385.710367
t15	1.795196	10.885277	118.489265	-2.542507	6.464342
t16	1.923424	2.783212	7.746268	22.137001	490.046804
t17	2.051652	-0.984667	0.969568	16.796398	282.118969
t18	2.179881	0.489452	0.239563	5.093685	25.945629
t19	2.308109	-5.186373	26.898463	38.227353	1461.330488
t20	2.436337	-6.554593	42.962686	6.146932	37.784777
t21	2.564565	-0.042538	0.001809	34.585880	1196.183064
t22	2.692794	-5.194598	26.983848	20.530721	421.510485
t23	2.821022	-5.827298	33.957406	16.165102	261.310514
t24	2.949250	-1.300836	1.692174	33.106105	1096.014188
t25	3.077479	-5.915354	34.991413	9.105741	82.914525
t26	3.205707	-2.778931	7.722458	39.188532	1535.741077
t27	3.333935	-0.195712	0.038303	17.042774	290.456152
t28	3.462163	-0.213307	0.045500	33.121808	1097.054150
t29	3.590392	3.054548	9.330262	32.085634	1029.487932
t30	3.718620	0.188268	0.035445	10.837976	117.461723
t31	3.846848	-1.011517	1.023166	42.743951	1827.045372
t32	3.975076	-0.761034	0.579173	-1.211101	1.466766
t33	4.103305	-3.898614	15.199193	29.325473	859.983365
t34	4.231533	-3.409734	11.626287	20.671140	427.296047
t35	4.359761	3.407442	11.610658	-1.761617	3.103295
t36	4.487990	4.442564	19.736371	41.402668	1714.180936
t37	4.616218	3.887216	15.110450	-10.387124	107.892336
t38	4.744446	11.327072	128.302554	21.289050	453.223652
t39	4.872674	6.528145	42.616681	13.214695	174.628172
t40	5.000903	-0.952725	0.907684	-9.729250	94.658313
t41	5.129131	2.193990	4.813590	31.504428	992.528981
t42	5.257359	-0.450723	0.203151	-8.873110	78.732074
t43	5.385587	-7.116396	50.643087	21.533143	463.676229
t44	5.513816	-2.210164	4.884824	9.224723	85.095521
t45	5.642044	6.593189	43.470140	-3.530243	12.462618
t46	5.770272	-5.479431	30.024159	15.856679	251.434284
t47	5.898500	-0.772756	0.597152	-21.429131	459.207639
t48	6.026729	11.976824	143.444311	11.182852	125.056171
t49	6.154957	-10.899689	118.803224	-12.642528	159.833521
t50	6.283185	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
		Average	35.167300	Average	457.753100
		Calculated RMS	5.930202	Calculated RMS	21.395165
		Standard RMS	5.990409	Standard RMS	21.612381
		Error	0.060207	Error	0.217215
		PPM Error	10051	PPM Error	10051

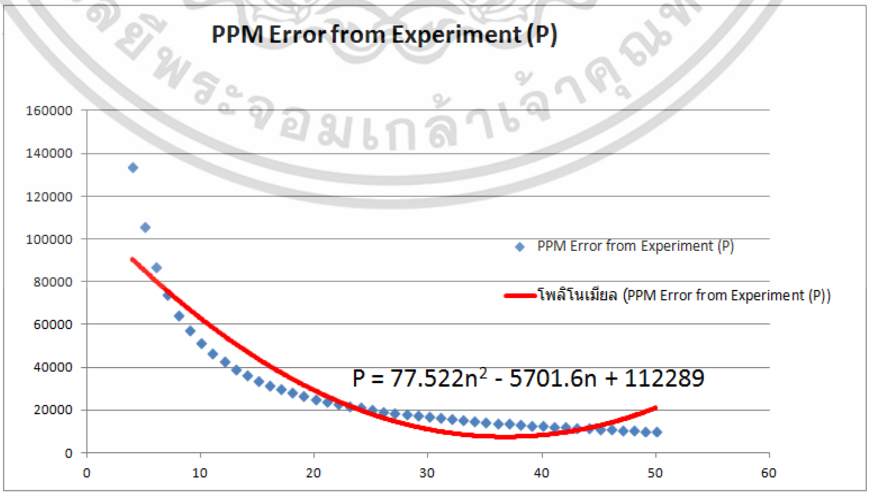
จากผลการทดลองถ้าเลือกข้อมูลตั้งแต่ 42 ข้อมูลเป็นต้นไป จะให้ค่า PPM Error ออกมาเท่ากับการเลือกตัวอย่างของ $f(t) = \sin t$

ตารางที่ 4.45 แสดง PPM Error เมื่อใช้ขนาดของตัวอย่างแตกต่างกัน

Frequency Multiplier	Sampling Size	PPM Error
1	n=4	133975
	n=5	105573
2	n=6	87129
	n=7	74180
3	n=8	64586
	n=9	57191
4	n=10	51317
	n=11	46537
5	n=12	42573
	n=13	39231
6	n=14	36376
	n=15	33908
7	n=16	31754
	n=17	29857
8	n=18	28175
	n=19	26671
9	n=20	25321
	n=21	24100
10	n=22	22992
	n=23	21981
11	n=24	21055
	n=25	20204
12	n=26	19419
	n=27	18693
13	n=28	18019
	n=29	17393
14	n=30	16808
	n=31	16261
15	n=32	15749
	n=33	15268
16	n=34	14816
	n=35	14389
17	n=36	13987
	n=37	13606
18	n=38	13246
	n=39	12904
19	n=40	12579
	n=41	12270
20	n=42	11976
	n=43	11696
21	n=44	11429
	n=45	11174
22	n=46	10929
	n=47	10695
23	n=48	10471
	n=49	10257
24	n=50	10051



โดยมีตัวคูณของความถี่เริ่มต้นของสัญญาณ หรือ จำนวนฮาร์มินิกที่เพิ่มมากขึ้นจะทำให้การเลือกตัวอย่างต้องเพิ่มตามไปด้วยเป็น 2k+2 โดยที่ k คือ ตัวคูณของความถี่เริ่มต้นของสัญญาณ จากนั้นจะลองนำค่าที่ได้มาประมาณค่าโดยใช้โพลิโนเมียลกำลังสองเพื่อดูความเหมาะสมของเส้นกราฟ



รูปที่ 4.1 แสดงโพลิโนเมียลกำลังสองที่จะนำมาประมาณความสัมพันธ์ของ P และ n

4.9 ผลของความคลาดเคลื่อนเมื่อเปรียบเทียบกับค่า RMS มาตรฐาน

จากตารางที่ 4.46 แสดงคุณสมบัติผลบวกกำลังสองของฟังก์ชัน $f(t)=\sin t$ เมื่อใช้ขนาดของตัวอย่างเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆ จาก n = 4, ซึ่งจะเขียนในรูปของผลบวกได้ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sin^2\left(\frac{2i\pi}{n-1}\right)=\sin^2\left(\frac{2\pi}{n-1}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{n-1}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{n-1}\right)+\ldots+\sin^2\left(\frac{(n-2)2\pi}{n-1}\right)+\sin^2(2\pi)$$

ตารางที่ 4.46 แสดงคุณสมบัติผลบวกกำลังสองของฟังก์ชัน $f(t)=\sin t$ เมื่อใช้ขนาดของตัวอย่างเพิ่มขึ้นไปเรื่อยๆไป จาก n = 4

Sampling Size (n)	$\sum_{i=1}^{n-1}\sin^2(\frac{2i\pi}{n-1})$	Average of $\sum_{i=1}^{n-1}\sin^2(\frac{2i\pi}{n-1})$	RMS	Error	PPM Error
4	1.500000	0.375000	0.612372	0.094734	133975
5	2.000000	0.400000	0.632456	0.074651	105573
6	2.500000	0.416667	0.645497	0.061610	87129
7	3.000000	0.428571	0.654654	0.052453	74180
8	3.500000	0.437500	0.661438	0.045669	64586
9	4.000000	0.444444	0.666667	0.040440	57191
10	4.500000	0.450000	0.670820	0.036286	51317
11	5.000000	0.454545	0.674200	0.032907	46537
12	5.500000	0.458333	0.677003	0.030104	42573
13	6.000000	0.461538	0.679366	0.027741	39231
14	6.500000	0.464286	0.681385	0.025722	36376
15	7.000000	0.466667	0.683130	0.023977	33908
16	7.500000	0.468750	0.684653	0.022454	31754
17	8.000000	0.470588	0.685994	0.021112	29857
18	8.500000	0.472222	0.687184	0.019923	28175
19	9.000000	0.473684	0.688247	0.018860	26671
20	9.500000	0.475000	0.689202	0.017904	25321
21	10.000000	0.476190	0.690066	0.017041	24100
22	10.500000	0.477273	0.690849	0.016258	22992
23	11.000000	0.478261	0.691564	0.015543	21981
24	11.500000	0.479167	0.692219	0.014888	21055
25	12.000000	0.480000	0.692820	0.014286	20204
26	12.500000	0.480769	0.693375	0.013732	19419
27	13.000000	0.481481	0.693889	0.013218	18693
28	13.500000	0.482143	0.694365	0.012742	18019
29	14.000000	0.482759	0.694808	0.012298	17393
30	14.500000	0.483333	0.695222	0.011885	16808
31	15.000000	0.483871	0.695608	0.011498	16261
32	15.500000	0.484375	0.695971	0.011136	15749
33	16.000000	0.484848	0.696311	0.010796	15268
34	16.500000	0.485294	0.696631	0.010476	14816
35	17.000000	0.485714	0.696932	0.010175	14389
36	17.500000	0.486111	0.697217	0.009890	13987
37	18.000000	0.486486	0.697486	0.009621	13606
38	18.500000	0.486842	0.697741	0.009366	13246
39	19.000000	0.487179	0.697982	0.009124	12904
40	19.500000	0.487500	0.698212	0.008895	12579
41	20.000000	0.487805	0.698430	0.008676	12270
42	20.500000	0.488095	0.698638	0.008469	11976
43	21.000000	0.488372	0.698836	0.008271	11696
44	21.500000	0.488636	0.699025	0.008081	11429
45	22.000000	0.488889	0.699206	0.007901	11174
46	22.500000	0.489130	0.699379	0.007728	10929
47	23.000000	0.489362	0.699544	0.007563	10695
48	23.500000	0.489583	0.699702	0.007404	10471
49	24.000000	0.489796	0.699854	0.007253	10257
50	24.500000	0.490000	0.700000	0.007107	10051

จากนั้นนำค่าของ PPM Error (P)มาหาความสัมพันธ์ของ n ซึ่งคาดการและหาเป็นสูตรได้ดังนี้

$$P = (1-\sqrt{1-\frac{1}{n}})\times 1000000 \tag{4.1}$$

เมื่อนำสูตร PPM Error ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการทดลอง จะได้เป็นดังตารางที่ 4.46

PPM Error = [Standard RMS – Calculated RMS] x 1,000,000/(Standard RMS)

กำหนดให้

P คือ PPM Error ซึ่ง $P = (1-\sqrt{1-\frac{1}{n}})\times 1000000$

S คือ Standard RMS

C คือ Calculated RMS

จึงทำให้

$$P = \frac{[S-C]}{S}\times 1{,}000{,}000 \tag{4.2}$$

แล้วจึงจัดรูปสมการได้เป็น

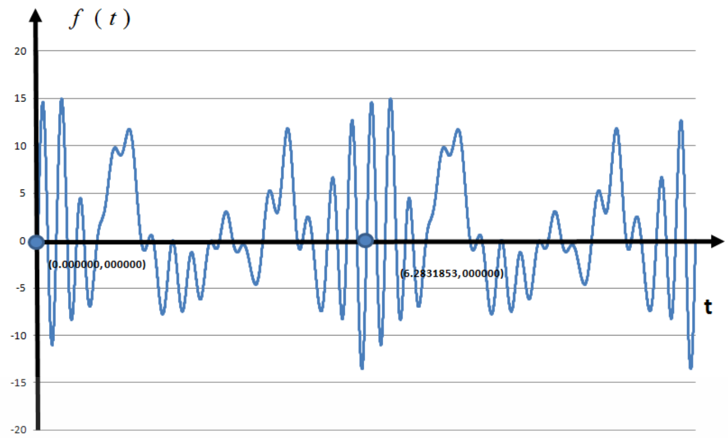
$$S = C\times\sqrt{\frac{n}{n-1}} \tag{4.3}$$

จากการทดลองนั้น เราจะพบว่า การเลือกค่า n ที่เหมาะสมจะต้องมาจากการดูสัญญาณที่ให้จำนวนฮาร์มอนิกที่มากที่สุดจึงทำให้ n = 2k+2 โดยที่ i คือ ตัวคูณของความถี่เริ่มต้นของสัญญาณ

4.10 แสดงการคำนวณเปรียบโดยใช้วิธีของวิทยานิพนธ์กับวิธีอื่นๆ

ทำการทดลองการหาค่า RMS ของ f(t) จากผลการทดลองของตารางที่ 4.43 ซึ่งเป็นการแสดงการหา RMS ของ สัญญาณที่เกิดจากการรวมกัน 20 ฮาร์มอนิก โดยที่เลือกตัวอย่างให้ n = 42 (หรือ n = 43 ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของตัวอย่างที่จะตรงกับวิธีใด) โดยใช้วิธีการตามวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เปรียบเทียบกับการใช้

1. กฎจุดกึ่งกลาง (Midpoint Rule)
2. กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid Rule)
3. หลักเกณฑ์ซิมป์สัน (Simpson’s Rule)



รูปที่ 4.2 แสดงกราฟของฟังก์ชัน ที่สร้างมาจาก 20 ฮาร์โมนิก

$$f(t) = 0.7 + 1.3\cos t - 2.9\cos 2t + 0.9\cos 3t + 3.1\cos t4t - 0.4\cos 5t - 2.7\cos 6t$$
$$+ 1.5\cos 17t - 0.5\cos 18t - 0.5\cos 19t - 0.5\cos 20t + 0.4\sin t + 0.7\sin 2t - 1.1\sin 3t$$
$$+ 1.3\sin 4t + 2.8\sin 15t + 3.4\sin 16t + 2.3\sin 17t + 2.9\sin 18t + 1.4\sin 19t + 1.1\sin 20t$$

เนื่องจากทราบค่าฟังก์ชันที่แน่นอนจึงทำการคำนวณหาปริพันธ์จำกัดเขตเพื่อคำนวณหา RMS ได้เท่ากับ $\sqrt{35.885} = 5.990409$

<u>วิธีทำ</u>

1. **ใช้กฎจุดกึ่งกลาง (Midpoint Rule)**

   คาบที่ได้จะหาได้จากรูปกราฟ 4.8 คือ $2\pi = 6.2831853$ จำนวนตัวอย่างที่เหมาะสมคือ n = 43 ที่จะพอเหมาะกับค่าที่ต้องการจากนั้นจะเลือกตัวอย่างจากช่วง t = 0 ถึง t = $2\pi = 6.2831853$ เพื่อคำนวณหา Calculated RMS

2. **กฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid Rule)**

   คาบที่ได้จะหาได้จากรูปกราฟ 4.8 คือ $2\pi = 6.2831853$ จำนวนตัวอย่างที่เหมาะสมคือ n = 42 ที่จะพอเหมาะกับค่าที่ต้องการจากนั้นจะเลือกตัวอย่างจากช่วง t = 0 ถึง t = $2\pi = 6.2831853$ เพื่อคำนวณหา Calculated RMS

3. **หลักเกณฑ์ซิมป์สัน (Simpson's Rule)**

   คาบที่ได้จะหาได้จากรูปกราฟ 4.8 คือ $2\pi = 6.2831853$ จำนวนตัวอย่างที่เหมาะสมคือ n = 43 ที่จะทำให้การลงค่าจากช่วง t = 0 ถึง t = $2\pi = 6.2831853$ ได้พอดี

4. **วิธีการเลือกตัวอย่าง (Sampling)**

   คาบที่ได้จะหาได้จากรูปกราฟ 4.8 คือ $2\pi = 6.2831853$ จำนวนตัวอย่างที่เหมาะสมคือ n = 42 ที่จะทำให้เพียงพอกับการใช้ตารางความคลาดเคลื่อน

ตารางที่ 4. 47 แสดงการคำนวณหา RMS ของ f(t) โดยใช้วิธีกฎจุดกึ่งกลาง (Midpoint Rule)

n = 43 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	Mid Point Strip of f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000	
t2	0.149600	8.946424	80.038496	23.947462
t3	0.299199	-9.623018	92.602473	
t4	0.448799	14.893260	221.809196	66.365156
t5	0.598399	-5.431756	29.503978	
t6	0.747998	0.729578	0.532284	0.159259
t7	0.897598	-1.171395	1.372167	
t8	1.047198	-5.244486	27.504637	8.229368
t9	1.196797	1.820414	3.313908	
t10	1.346397	5.984640	35.815922	10.716099
t11	1.495997	9.727164	94.617726	
t12	1.645596	9.797040	95.981984	28.717743
t13	1.795196	10.885277	118.489265	
t14	1.944795	1.467037	2.152197	0.643936
t15	2.094395	-0.321539	0.103387	
t16	2.243995	-1.498112	2.244339	0.671505
t17	2.393594	-7.740311	59.912408	
t18	2.543194	-0.570307	0.325250	0.097314
t19	2.692794	-5.194598	26.983848	
t20	2.842393	-4.684639	21.945843	6.566181
t21	2.991993	-2.483578	6.168160	
t22	3.141593	-5.600000	31.360000	9.382890
t23	3.291192	-0.096228	0.009260	
t24	3.440792	-0.636652	0.405326	0.121273
t25	3.590392	3.054548	9.330262	
t26	3.739991	-0.406330	0.165104	0.049399
t27	3.889591	-0.598567	0.358282	
t28	4.039191	-2.183600	4.768109	1.426615
t29	4.188790	-4.478461	20.056613	
t30	4.338390	2.295847	5.270913	1.577053
t31	4.487990	4.442564	19.736371	
t32	4.637589	4.918716	24.193771	7.238759
t33	4.787189	11.702666	136.952382	
t34	4.936788	1.271319	1.616253	0.483582
t35	5.086388	0.984323	0.968891	
t36	5.235988	0.644486	0.415363	0.124276
t37	5.385587	-7.116396	50.643087	
t38	5.535187	-0.096721	0.009355	0.002799
t39	5.684787	4.403622	19.391888	
t40	5.834386	-7.967508	63.481181	18.993525
t41	5.983986	11.935269	142.450645	
t42	6.133586	-7.359992	54.169477	16.207470
t43	6.283185	0.000000	0.000000	
			Sum	201.721664
			Average	32.105000
			Calculated RMS	5.666127

ตารางที่ 4. 48 แสดงการคำนวณหา RMS ของ f(t) โดยใช้วิธีกฎสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoid Rule)

n = 42 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	Trapezoid Area
t1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.153248	8.245077	67.981289	5.209013
t3	0.306497	-8.792817	77.313632	11.133109
t4	0.459745	14.953467	223.606167	23.057742
t5	0.612994	-6.993031	48.902488	20.880761
t6	0.766242	2.505715	6.278610	4.228208
t7	0.919491	-3.293446	10.846787	1.312220
t8	1.072739	-3.652190	13.338491	1.853178
t9	1.225987	2.233581	4.988885	1.404321
t10	1.379236	7.542953	56.896144	4.741891
t11	1.532484	9.329654	87.042435	11.029180
t12	1.685733	10.826012	117.202537	15.650110
t13	1.838981	8.707542	75.821281	14.790298
t14	1.992229	-0.531022	0.281985	5.831353
t15	2.145478	0.500456	0.250456	0.040798
t16	2.298726	-4.640926	21.538191	1.669538
t17	2.451975	-5.754015	33.108693	4.187274
t18	2.605223	-0.376442	0.141709	2.547786
t19	2.758472	-7.476085	55.891852	4.293527
t20	2.911720	-1.535408	2.357477	4.463309
t21	3.064968	-5.587697	31.222355	2.573028
t22	3.218217	-2.184542	4.772223	2.758056
t23	3.371465	-0.643102	0.413580	0.397358
t24	3.524714	1.723213	2.969464	0.259223
t25	3.677962	1.515180	2.295769	0.403444
t26	3.831211	-1.136902	1.292545	0.274952
t27	3.984459	-0.909448	0.827095	0.162416
t28	4.137707	-4.496432	20.217904	1.612556
t29	4.290956	-0.491953	0.242017	1.567725
t30	4.444204	5.220735	27.256077	2.107020
t31	4.597453	3.275966	10.731954	2.910803
t32	4.750701	11.514436	132.582227	10.981336
t33	4.903950	3.771340	14.223005	11.248835
t34	5.057198	-0.000300	0.000000	1.089827
t35	5.210446	1.673204	2.799612	0.214518
t36	5.363695	-6.403809	41.008774	3.356783
t37	5.516943	-1.910377	3.649539	3.421908
t38	5.670192	5.509652	30.356260	2.605668
t39	5.823440	-8.229790	67.729439	7.515739
t40	5.976688	11.343018	128.664048	15.048496
t41	6.129937	-6.651466	44.242003	13.248790
t42	6.283185	0.000000	0.000000	3.390009
			Sum	225.472105
			Average	35.885000
			Calculated RMS	5.990409

ตารางที่ 4. 49 แสดงการคำนวณหา RMS ของ f(t) โดยใช้วิธีหลักเกณฑ์ซิมป์สัน (Simpson's Rule)

n = 43 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)	Simpson's Area
t1	0.000000	0.000000	0.000000	
t2	0.149600	8.946424	80.038496	
t3	0.299199	-9.623018	92.602473	20.582741
t4	0.448799	14.893260	221.809196	
t5	0.598399	-5.431756	29.503978	50.332465
t6	0.747998	0.729578	0.532284	
t7	0.897598	-1.171395	1.372167	1.645859
t8	1.047198	-5.244486	27.504637	
t9	1.196797	1.820414	3.313908	5.719924
t10	1.346397	5.984640	35.815922	
t11	1.495997	9.727164	94.617726	12.027578
t12	1.645596	9.797040	95.981984	
t13	1.795196	10.885277	118.489265	29.772072
t14	1.944795	1.467037	2.152197	
t15	2.094395	-0.321539	0.103387	6.343097
t16	2.243995	-1.498112	2.244339	
t17	2.393594	-7.740311	59.912408	3.440451
t18	2.543194	-0.570307	0.325250	
t19	2.692794	-5.194598	26.983848	4.398093
t20	2.842393	-4.684639	21.945843	
t21	2.991993	-2.483578	6.168160	6.030630
t22	3.141593	-5.600000	31.360000	
t23	3.291192	-0.096228	0.009260	6.563307
t24	3.440792	-0.636652	0.405326	
t25	3.590392	3.054548	9.330262	0.546579
t26	3.739991	-0.406330	0.165104	
t27	3.889591	-0.598567	0.358282	0.516067
t28	4.039191	-2.183600	4.768109	
t29	4.188790	-4.478461	20.056613	1.969097
t30	4.338390	2.295847	5.270913	
t31	4.487990	4.442564	19.736371	3.035708
t32	4.637589	4.918716	24.193771	
t33	4.787189	11.702666	136.952382	12.639367
t34	4.936788	1.271319	1.616253	
t35	5.086388	0.984323	0.968891	7.200046
t36	5.235988	0.644486	0.415363	
t37	5.385587	-7.116396	50.643087	2.656562
t38	5.535187	-0.096721	0.009355	
t39	5.684787	4.403622	19.391888	3.494269
t40	5.834386	-7.967508	63.481181	
t41	5.983986	11.935269	142.450645	20.732879
t42	6.133586	-7.359992	54.169477	
t43	6.283185	0.000000	0.000000	17.908502
			Sum	217.555291
			Average	34.625000
			Calculated RMS	5.884301

ตารางที่ 4. 50 แสดงการคำนวณหา RMS ของ f(t) โดยใช้วิธีการเลือกตัวอย่าง (Sampling Method)

n = 42 T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	f(t)	f(t)*f(t)
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.153248	8.245077	67.981289
t3	0.306497	-8.792817	77.313632
t4	0.459745	14.953467	223.606167
t5	0.612994	-6.993031	48.902488
t6	0.766242	2.505715	6.278610
t7	0.919491	-3.293446	10.846787
t8	1.072739	-3.652190	13.338491
t9	1.225987	2.233581	4.988885
t10	1.379236	7.542953	56.896144
t11	1.532484	9.329654	87.042435
t12	1.685733	10.826012	117.202537
t13	1.838981	8.707542	75.821281
t14	1.992229	-0.531022	0.281985
t15	2.145478	0.500456	0.250456
t16	2.298726	-4.640926	21.538191
t17	2.451975	-5.754015	33.108693
t18	2.605223	-0.376442	0.141709
t19	2.758472	-7.476085	55.891852
t20	2.911720	-1.535408	2.357477
t21	3.064968	-5.587697	31.222355
t22	3.218217	-2.184542	4.772223
t23	3.371465	-0.643102	0.413580
t24	3.524714	1.723213	2.969464
t25	3.677962	1.515180	2.295769
t26	3.831211	-1.136902	1.292545
t27	3.984459	-0.909448	0.827095
t28	4.137707	-4.496432	20.217904
t29	4.290956	-0.491953	0.242017
t30	4.444204	5.220735	27.256077
t31	4.597453	3.275966	10.731954
t32	4.750701	11.514436	132.582227
t33	4.903950	3.771340	14.223005
t34	5.057198	-0.000300	0.000000
t35	5.210446	1.673204	2.799612
t36	5.363695	-6.403809	41.008774
t37	5.516943	-1.910377	3.649539
t38	5.670192	5.509652	30.356260
t39	5.823440	-8.229790	67.729439
t40	5.976688	11.343018	128.664048
t41	6.129937	-6.651466	44.242003
t42	6.283185	0.000000	0.000000
		Average	35.030595
		Square Root Average	5.918665
		Calculated RMS	5.990409
		Error	0.071744
		PPM Error	11976

ตารางที่ 4. 51 แสดงค่า PPM Error การคำนวณหา RMS ของ f(t) เปรียบเทียบกันของแต่ละวิธี

Method	n	Calculated RMS	PPM Error
Midpoint	43	5.666127	54133
Trapezoid	42	5.990409	0
Simpson	43	5.884301	17713
Sampling	42	5.990409	0

บทที่ 5
สรุปผลการทดลอง

5.1 สรุปผลการทดลอง

จากขอบเขตของการทดลองที่กำหนดว่าสัญญาณที่จะนำมาหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยจะมีฮาร์มอนิก สูงสุดเป็น 20 เท่าของความถี่หลักมูลและจะพิจารณาจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดเป็นศูนย์เท่านั้น ทำให้สรุปผลการทดลองได้ดังต่อไปนี้

5.1.1 ได้มีการใช้วิธีเลือกตัวอย่างกับฟังก์ชันหรือสัญญาณที่มีคาบ

ซึ่งการเลือกตัวอย่างที่ใช้นั้นจะเป็นการเลือกตัวอย่างแบบมีระบบ โดยการแบ่งช่วงเวลาเท่าๆกัน ให้ค่าเริ่มต้นและสิ้นสุดของการเลือกตัวอย่างเป็นศูนย์ใน 1 คาบเวลา หรือ 1 รอบซ้ำ จากนั้นจะคำนวณจำนวนตัวอย่างที่ถูกชักขึ้นมาได้จาก $n = 2k + 2$ เมื่อ

n คือ จำนวนตัวอย่าง

k คือ จำนวนเท่าของความถี่ฮาร์มอนิกสูงสุดเมื่อเทียบกับความถี่หลักมูล

5.1.2 จากผลการทดลองหาค่า RMS ของสัญญาณที่มี 20 ฮาร์มอนิก

จากการทดลองผลที่ได้ตามตารางที่ 4.41 พบว่าการใช้วิธีการหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยโดยวิธีการต่างๆให้ผลเป็นไปตามตารางที่ 5.1 ดังนี้

ตารางที่ 5.1 แสดงการเปรียบเทียบผลที่ได้ของแต่ละวิธีในการคำนวณหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ย

วิธีการ	ขนาดตัวอย่าง	ค่า RMS	ค่า PPM Error
กฎจุดกึ่งกลาง	43	5.666127	54133
กฎสี่เหลี่ยมคางหมู	42	5.990409	0
หลักเกณฑ์ซิมป์สัน	43	5.884301	17713
การเลือกตัวอย่าง	42	5.990409	0

ตารางที่ 5.2 แสดงการเปรียบเทียบผลที่ได้จากการทดลองในการคำนวณหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ย

วิธีการ	จำนวนข้อมูล	ความถูกต้อง	ความสะดวกของการคำนวณ
กฎจุดกึ่งกลาง	มาก	น้อย	น้อย
กฎสี่เหลี่ยมคางหมู	น้อย	มาก	น้อย
หลักเกณฑ์ซิมป์สัน	มาก	น้อย	น้อย
การเลือกตัวอย่าง	น้อย	มาก	มาก

จากตารางที่ 5.1 และ 5.2 แสดงให้เห็นว่าวิธีการเลือกตัวอย่างเป็นวิธีการที่ใช้จำนวนข้อมูลน้อย มีความใกล้เคียงกับค่ามาตรฐาน และ มีความสะดวกในการคำนวณ ซึ่งเหมาะสมมากที่สุด (เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีที่นำเป็นตัวอย่าง)ในการหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ย

5.1.3 จากผลการทดลองหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยโดยวิธีการเลือกตัวอย่าง

จากผลการทดลแงหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยโดยวิธีการเลือกตัวอย่างเราจะพบว่าตัวคูณที่นำมาช่วยแก้ไขปัญหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยที่ยังไม่ถูกต้องคือ

$$S = C \times \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

เมื่อ S คือ ค่ารากกำลังสองเฉลี่ยที่ต้องการ

C คือ ค่ารากกำลังสองเฉลี่ยที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างจาก จำนวน n ตัวอย่าง

5.2 ข้อเสนอแนะและงานวิจัยในอนาคต

จากการทดลอง เราจะพบว่าการหาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยด้วยวิธีการเลือกตัวอย่างนี้อาจจะยังต้องการต่อยอดในเรื่องของการใช้ข้อมูลเริ่มต้นที่ไม่เท่ากับศูนย์ ซึ่งก็ต้องใช้การวิเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ศึกษาควบคู่ไปกับการใช้วิธีการนี้ และในทางกลับกันผลที่ได้จากการใช้วิธีการนี้อาจไม่ใช่เพียงแค่หาค่ารากกำลังสองเฉลี่ยเท่านั้นแต่อาจจะเป็นการหาอนุกรมฟูเรียร์ทั้งชุดเพื่อแยกแยะหาคลื่นหรือสัญญาณที่ต้องการศึกษาแต่ละตัวได้อย่างละเอียด ซึ่งอาจจะได้ค่าที่ถูกต้องกว่าการหาคลื่นแต่ละตัวโดยใช้การแปลงฟูเรียร์แบบรวดเร็ว (fast Fourier transform :FFT) ก็เป็นได้ หากมีการปรับปรุงการทดลองและเลือกเงื่อนไขการนำไปใช้ที่เหมาะสม

เอกสารอ้างอิง

[1] http://www.sptc.ac.th/prapruet/wbi/ac/12.htm#b3

[2] K. Ashoka Reddy, Boby George, and V. Jagadeesh Kumar, "**Use of Fourier Series Analysis for Motion Artifact Reduction and Data Compression of Photoplethysmographic Signals**", IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, Vol. 58, No. 5, May 2009.

[3] http://www.eppo.go.th/power/pw-QS-standardservice.html

[4] Mihaela Albu and G. T. Heydt, "**On the Use of RMS Values in Power Quality Assessment**", IEEE Transactions on Power Delivery, Vol.18, No. 4, October 2003.

[5] International Electrotechnical Commission, International Standard, "**IEC 60950-1**", First edition, 2001-10, Information technology equipment, Safety, Part 1: General requirements, 2001.

[6] http://www.bbc.co.uk/history/historic_figures/faraday_michael.shtml

[7] Steven A. Lombardi, "**METHOD AND APPARATUS FOR PROCESSING A SAMPLED WAVEFORM**", United States Patent, Patent No. 5,828,983, October 1998.

[8] http://www.image-ination.com/hints/hint18.html

[9] http://www.nstda.or.th/nstda-doc-archives/doc_details/130-

[10] www.ssru.ac.th/linkssru/athovicha_web/sampling.doc

[11] http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/2301312/file_sheet_48/312ch10_49.pdf

[12] http://pages.pacificcoast.net/~cazelais/187/simpson.pdf

[13] http://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcII/ApproximatingDefIntegrals.aspx

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.
งานวิจัยที่ได้เข้าร่วมนำเสนอในการประชุมวิชาการระดับชาติ

I-SEEC2012

4th International Science, Social Science, Engineering and Energy Conference
11th-14th December, 2012, Golden Beach Cha-Am Hotel, Petchburi, Thailand

I-SEEC 2012

www.iseec2012.com

Root mean square calculations of periodic functions by sampling method

S.Poomjan, T.Taengtang, P.Buranasiri

Applied Physics Program, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand

pattrik2002@hotmail.com, ktthamma@kmitl.ac.th, maygal@gmail.com

Abstract

This paper proposes a technique of sampling method to calculate root mean square (RMS) of periodic functions with error analysis. This proposed method will be quite useful for computational technique which is done by running a sequential time domain with exact resolutions to generate discrete values of periodic functions. Error analysis from arbitrary data collecting of sinusoidal functions will be standardized to apply for any function. In the end, the errors from this method have been shown that they will be approached to the result computed from the calculus integration technique when the number of sampling has been increased. From the experiment, we can find the formula of error analysis to calculate correct RMS by using low sampling size.

Keywords: Root mean square, periodic function, sampling method

Root mean square calculations of periodic functions by sampling method

S.Poomjan, T.Taengtang, P.Buranasiri

Applied Physics Program, Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok, 10520, Thailand

pattrix2002@hotmail.com, ktthamma@kmitl.ac.th, mayga1@gmail.com

Abstract

This paper proposes a technique of sampling method to calculate root mean square (RMS) of periodic functions with error analysis. This proposed method will be quite useful for computational technique which is done by running a sequential time domain with exact resolutions to generate discrete values of periodic functions. Error analysis from arbitrary data collecting of sinusoidal functions will be standardized to apply for any function. In the end, the errors from this method have been shown that they will be approached to the result computed from the calculus integration technique when the number of sampling has been increased. From the experiment, we can find the formula of error analysis to calculate correct RMS by using low sampling size.

Keywords: Root mean square, periodic function, sampling method

1. Introduction

Root mean square (RMS) has been widely used in power electric systems for many years, it has been mentioned to be equivalent to direct current signal. RMS has been used as the representative for alternative current signal, which fluctuates with time domain. This paper proposes a technique of sampling method to calculate root mean square (RMS) of a periodic function with error estimation formula, it will be better than complicate calculus integration technique which is never mentioned about error estimation formula. The interesting point from the paper is the discovery of error estimation formula for sinusoidal function which can be the basic of all periodic functions when the Fourier's series analysis is applied to distribute the periodic functions.

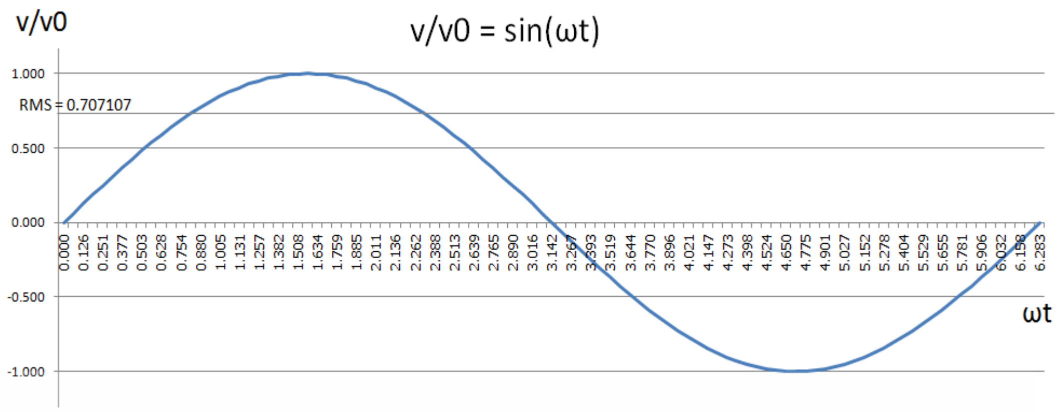


Fig. 1. The figure shows us that RMS equals 0.707107.

Generally calculus integration technique is a familiar technique to calculate RMS value of any periodic function according to equation (1) as definition of RMS[1].

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_1+T} f^2(t)dt} \tag{1}$$

or

$$RMS^2 = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_1+T} f^2(t)dt \tag{2}$$

where RMS is the root mean square value of function $f(t)$ and T is its period.

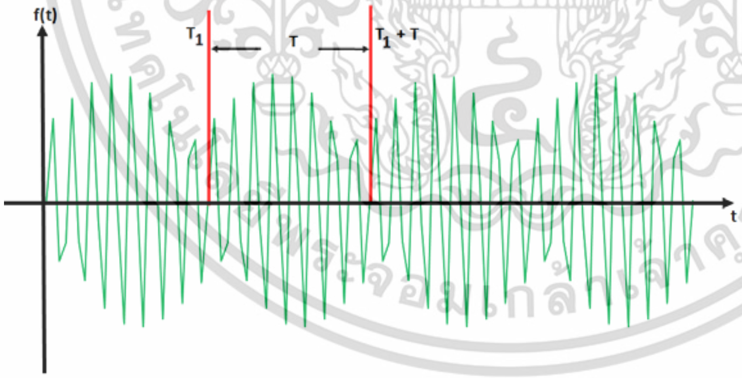


Fig. 2. A periodic function $f(t)$ has a period of T. The root mean square value will be calculated between T_1 and $T_1 + T$.

Refer to the definition of expected value or mean of function, it can be shown as following.

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{T_1}^{T_1+T} f(t)dt \tag{3}$$

Therefore, the expected value of $f^2(t)$ is

$$\left\langle f^2(t) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{T_1}^{T_1+T} f^2(t)dt \, . \tag{4}$$

From relation (2), RMS^2 can be rewritten as

$$RMS^2 = \left\langle f^2(t) \right\rangle . \tag{5}$$

From relations of Eq. (3) and (5), expected values of some sinusoidal functions can calculated (with the same period of T) as shown in Table 1.

Table 1. RMS values of sinusoidal functions have to be $\sqrt{0.50}$ (≈ 0.707107) exactly.

f(t)	*<f(t)>*	*<f(t)xf(t)> = RMS^2*	*RMS*	*Remark*
sin(wt)	0.000000	0.500000	0.707107	--
cos(wt)	0.000000	0.500000	0.707107	--
cos(at)sin(bt)	0.000000	0.250000	0.500000	--
sin(at)sin(bt)	0.000000	0.250000	0.500000	a ≠ b
cos(at)cos(bt)	0.000000	0.250000	0.500000	a ≠ b

Sometime, calculated periodic functions are too complicate to use integration techniques such as sinusoidal functions multiplied by polynomial or exponential terms, or unintegraTable functions, which they will not be convenient to be integrated. Then the sampling method with easy root mean square technique will be another option to do.

2. Methodology

Normally, the purposed sampling method is a systematic sampling[3] to collect data from generating of periodic functions, then the easy mean square of all such generated data will be used to calculate RMS in the next step. The Fig. 2 shows the flowchart of the procedure to calculate RMS by using these methods.

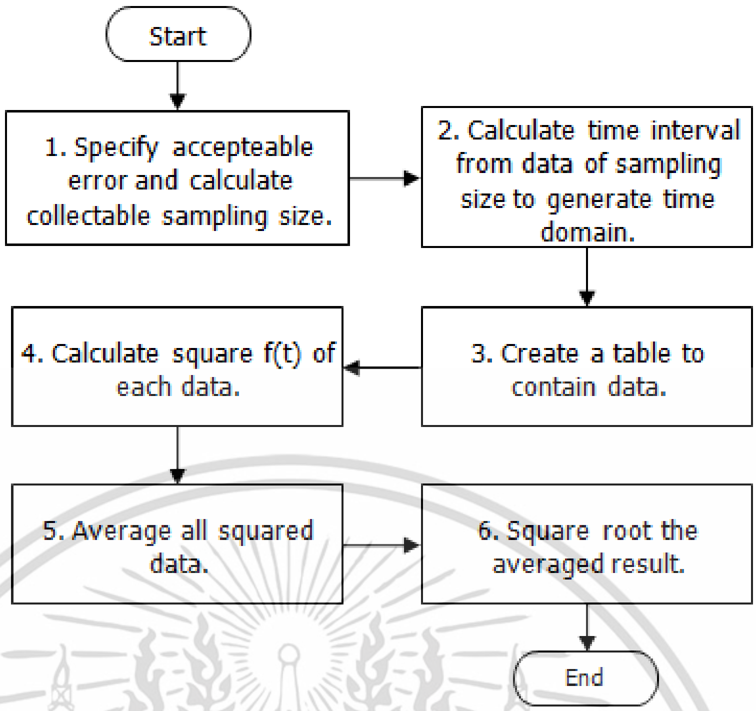


Fig. 3. The flowchart of the procedure of RMS calculation

From our methods, the experiment will introduce some formulas to get acceptable errors, especially for sinusoidal functions, which are fundamental functions to comprise any periodic function.

First, sinusoidal functions are primitive functions to comprise any periodic functions according to Fourier'series concept, $f(t) = sin(t)$ was chosen to be the 1st function in our experiment to study RMS calculation.

Then, in the case of the periodic functions, which are not sinusoidal forms, the Fourier'series concept can be used to generate sinusoidal harmonic terms according to following formula and each term can be analyzed to calculate exact value of RMS[2].

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T}) \qquad (6)$$

3. Results and Discussion

The experimental results of sampling size n = 4 and n = 10 are shown in Table 2 and 3, respectively. However, regarding to the experiments has been conducted in many times until we have found the relation of the error versus sampling size. Figure 4 shows the variation of sampling size only for n = 4. The results of error values for sampling size n=4 to n=50 are plot as shown in Fig. 5.

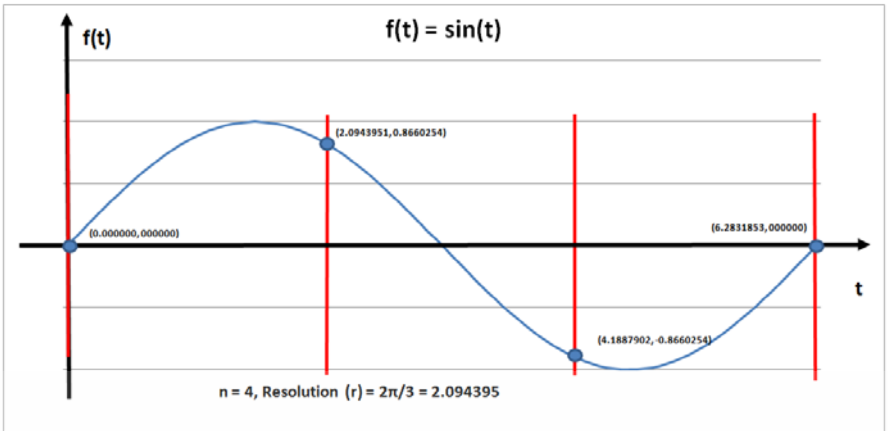


Fig. 4. Data were collected from f(t) = sin(t)

Calculated RMS : $(\text{Average})^{0.5}$

PPM Error : (Standard RMS – Calculated RMS) x 1000000 / Standard RMS

Table 2. When the sampling size (n) = 4, period(T) = 6.2831853, resolution of time (r) = T/(n-1) = 1.0471976 , 4 values of t will provide 4 values of f(t) to calculate RMS.

n = 4 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	2.094395	0.866025	0.750000
t3	4.188790	-0.866025	0.750000
t4	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.375000
Calculated RMS	0.612372
Standard RMS	0.707107
Error	0.094734
PPM Error	133975

Table 3. When the sampling size (n) = 10, period(T) = 6.2831853, resolution of time (r) = T/(n-1) = 0.6983132, 10 values of t will provide 10 values of f(t) to calculate RMS.

n = 10 f(t) = sin(t) T = 6.2831853 r = T/(n-1)

t	tm = t1 + (m-1)r	sin(t)	$\sin^2(t)$
t1	0.000000	0.000000	0.000000
t2	0.698132	0.642788	0.413176
t3	1.396263	0.984808	0.969846
t4	2.094395	0.866025	0.750000
t5	2.792527	0.342020	0.116978
t6	3.490659	-0.342020	0.116978
t7	4.188790	-0.866025	0.750000
t8	4.886922	-0.984808	0.969846
t9	5.585054	-0.642788	0.413176
t10	6.283185	0.000000	0.000000

Average	0.450000
Calculated RMS	0.670820
Standard RMS	0.707107
Error	0.036286
PPM Error	51317

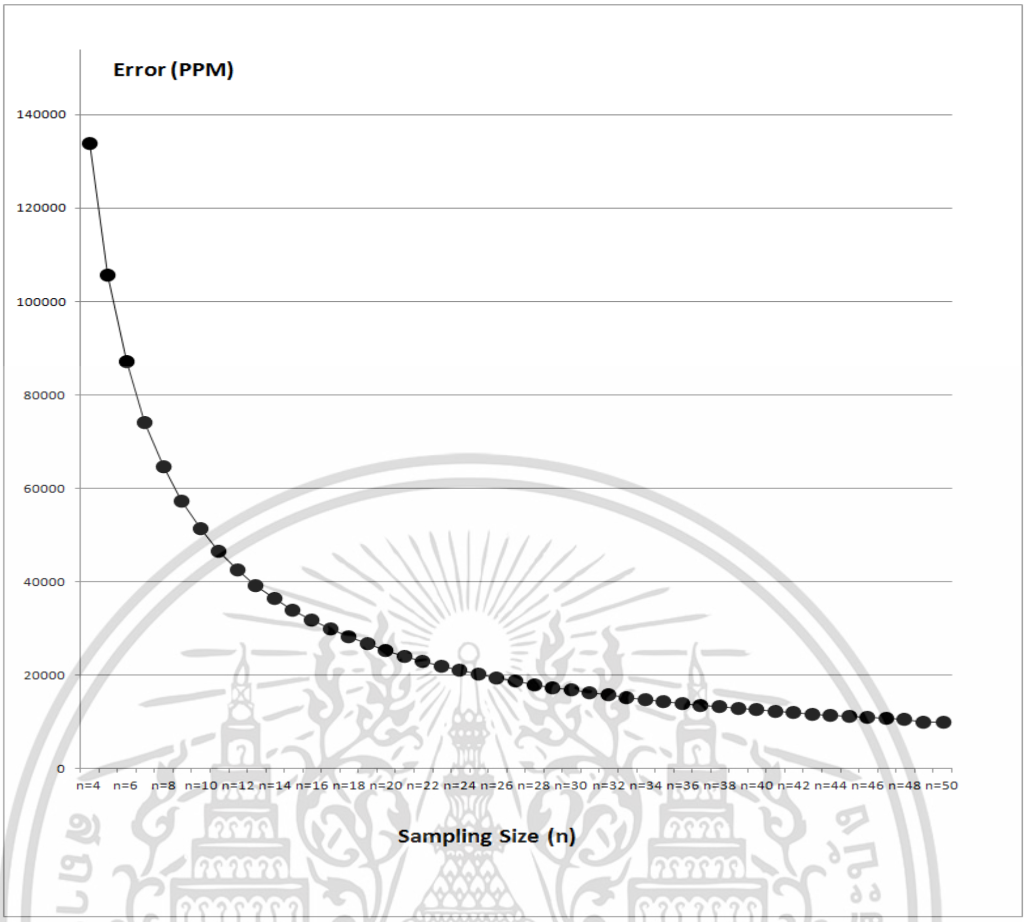


Fig. 5. The graph of error versus sampling size (n) of a sinusoidal function.

4. Conclusion

From the number of experiments, this method can be an option to calculate root mean square. In addition, the error from this method for sinusoidal function has been related to sampling size (n) according to the following equation.

$$Error = \sqrt{0.5} - \sqrt{0.5 - \frac{1}{2n}} \quad (7)$$

After the error formula had been found, exact value of RMS could be written as

$RMS = RMS_{stat} + Error$ (8)

RMS_{stat} is RMS from sampling method.

For further application of this error formula, we can use it for general periodic functions which be summarized from orthogonal terms of Fourier’series.

References

[1] Mihaela Albu, G. T. Heydt. On the Use of RMS Values in Power Quality Assessment. IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY, VOL. 18, NO. 4, OCTOBER 2003, p.1586-1587

[2] K. Ashoka Reddy, Boby George, V. Jagadeesh Kumar. Use of Fourier Series Analysis for Motion Artifact Reduction and Data Compression of Photoplethysmographic Signals. IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT, VOL. 58, NO. 5, MAY 2009, p.1706-1711

[3] Joan Joseph Castillo (2009). Systematic Sampling. Retrieved 15 Nov. 2012 from Explorable: http://explorable.com/systematic-sampling.html

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายสมภพ พุ่มจันทร์
วัน/เดือน/ปีเกิด	17 กรกฎาคม พ.ศ. 2513
ที่อยู่ปัจจุบัน	1163 หมู่ 4 ต.สำโรงเหนือ อ.เมือง จ.สมุทรปราการ 10270
ประวัติการศึกษา	จบการศึกษาระดับประถมศึกษาจากโรงเรียนอำนวยกนกศิริอนุสรณ์ และมัธยมศึกษาตอนต้น ถึง ตอนปลายจากโรงเรียนราชดำริ กรุงเทพมหานคร (ปีการศึกษา 2526-2531) วิทยาศาสตรบัณฑิต (เกียรตินิยมอันดับ 2) สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง กรุงเทพมหานคร (ปีการศึกษา 2532-2535)
ประสบการณ์ทำงาน	วิศวกรบริษัท Delta Electronics (Thailand) PCL. นิคมอุตสาหกรรมบางปู สมุทรปราการ (พ.ศ. 2538-2553)