รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

การวางนัยทั่วไปของวงอาร์เมนดาริซ
Generalization of Armendariz rings

นายธวัชชัย คำประภัสสร

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2560
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อโครงการ	การวางนัยทั่วไปของวงอาร์เมนดาริซ
แหล่งเงิน	ทุนส่งเสริมนักวิจัย เงินรายได้
ประจำปีงบประมาณ	2560 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 44,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย	1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2559 ถึง 30 กันยายน 2560
หัวหน้าโครงการ	นายธวัชชัย คำประภัสสร ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

เราแนะนำแนวคิดของ *-ไอดีลอาร์เมนดาริซเชิงเส้น และ *-ไอดีลอาร์เมนดาริซ ซึ่งเป็นภาคขยายของวงอาร์เมนดาริซ เราศึกษาสมบัติและตัวอย่างของทั้ง *-ไอดีลอาร์เมนดาริซเชิงเส้น และ *-ไอดีลอาร์เมนดาริซ เราพิสูจน์ว่าไอดีล I เป็น *-ไอดีลอาร์เมนดาริซเชิงเส้น ของ R ก็ต่อเมื่อ R/I เป็นวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น นอกจากนี้ เราศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์และ *-ไอดีลอาร์เมนดาริซเชิงเส้น

คำสำคัญ : วงอาร์เมนดาริซ วงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น ไอดีลอาร์เมนดาริซ *-ไอดีลอาร์เมนดาริซ *-ไอดีลอาร์เมนดาริซเชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Research Title: Generalization of Armendariz rings

Researcher: Thawatchai Khumprapussorn

Faculty: Science

Department: Mathematics

ABSTRACT

We introduce the notion of linear *-Armendariz ideals and *-Armendariz ideals which are extension of Armendariz rings. Some properties and examples of this extension are given. We prove that an ideal I is a linear *-Armendariz ideal R if and only if R/I is a linear Armendariz ring. We also investigate a relation between completely semiprime ideals and linear *-Armendariz ideals.

Keywords : Armendariz rings, Linear Armendariz rings, Armendariz ideals, *-Armendariz ideals, linear *-Armendariz ideals

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้โอกาสในการเรียนรู้และทำงานวิจัย และขอขอบคุณบุคลากรสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกๆ ท่านที่มอบมิตรไมตรี ความช่วยเหลือตลอดจนกระทั่งให้คำแนะนำในการจัดทำรูปเล่มงานวิจัยนี้ เป็นอย่างดี

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนส่งเสริมนักวิจัยเงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2560

ธวัชชัย คำประภัสสร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เนื้อหา....**หน้า**
บทคัดย่อภาษาไทย.... I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ....II
กิตติกรรมประกาศ....III
สารบัญ....IV

บทที่ 1 บทนำ.... 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.... 1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.... 5
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.... 6
1.4 วิธีดำเนินการวิจัยและแผนการดำเนินงานวิจัย.... 6

บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.... 8

2.1 วงอาร์เมนดาริซและวงรีดิวซ์.... 8
2.2 วงอาร์เมดาริซเชิงเส้น.... 10
2.3 ไอดีลอาร์เมนดาริซ.... 12
2.4 เนียร์อาร์เมนดาริซไอดีล.... 13

บทที่ 3 การวางนัยทั่วไปของวงอาร์เมนดาริซ.... 16

3.1 บทนิยามพื้นฐาน.... 16
3.2 $*$-อาร์เมนดาริซไอดีล.... 17
3.3 $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น.... 18

บทที่ 4 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย.... 21

เอกสารอ้างอิง.... 22

ภาคผนวก.... 23

ประวัติผู้เขียน.... 33

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โครงสร้าง Armendariz ring กำเนิดขึ้นอย่างไม่เป็นทางการในปี 1974 โดย E. Armendariz ความน่าสนใจของ Armendariz property ได้สร้างแรงบันดาลใจให้กับสองนักคณิตศาสตร์ M. Rege และ S. Chhawchharia ผู้ซึ่งริเริ่มศึกษาโครงสร้าง Armendariz ring มาตั้งแต่ปี 1997 จนกระทั่งปัจจุบัน ตลอดช่วงเวลาที่ผ่านมาได้ปรากฏผลงานวิจัยมากมายหลากหลายแนวทางและมาจากหลายผู้วิจัย ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความสำคัญและความนิยมของการศึกษา Armendariz ring ในวงกว้าง รวมถึงผู้วิจัยเองก็มีความสนใจ จึงเริ่มต้นศึกษาอย่างจริงจัง จนกระทั่ง ก่อกำเนิดแนวคิดเป็นรูปเป็นร่าง พร้อมนำเสนอให้เห็นแง่มุมและหลักการวิจัย ดังนี้

ให้ R เป็น ring ที่มีเอกลักษณ์ และ $R[x]$ เป็น polynomial ring บน R

พิจารณาเงื่อนไขต่อไปนี้

ถ้า $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x)=0$ แล้ว $f_i g_j = 0$ ทุกๆ i และ j

เราเรียกเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้นนี้ว่า Armendariz property

ในปี 1997 M.B. Rege และ S. Chhawchharia ได้ให้ชื่อเรียก ring ที่มี Armendariz property นี้ว่า Armendariz ring เพื่อเป็นเกียรติกับ E. Armendariz ผู้ซึ่งพิสูจน์ไว้ในปี 1974 ว่า ทุก reduced ring มี Armendariz property

หมายเหตุ reduced ring ก็คือ ring ที่ไม่มี nonzero nilpotent element

ตัวอย่างต่อไปนี้ศึกษาได้จาก [1], [3], [6] และ [10]

ตัวอย่าง 1 เราทราบจาก E. Armendariz ว่า ทุก reduced ring เป็น Armendariz ring ซึ่งต่อมา M.B. Rege และ S. Chhawchharia ได้แสดงว่า $Z/_{nZ}$ เป็น Armendariz ring ทุกจำนวนนับ n แต่ว่า ถ้า n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง n ไม่เป็น square free แล้ว $Z/_{nZ}$ ไม่เป็น reduced ring จากตัวอย่างนี้ ชี้ให้เห็นว่า Armendariz ring เป็นการวางนัยทั่วไปของ reduced ring

ตัวอย่าง 2 ให้ R เป็น commutative ring และ M เป็น left R-module เราจะได้ว่า $R \times M$ เป็น ring ภายใต้การดำเนินการต่อไปนี้

$$(a,m)+(b,n)=(a+b,m+n)$$

$$(a,m)(b,n)=(ab,an+bm)$$

และเราแทน ring ชนิดนี้ด้วยสัญลักษณ์ $R(+)M$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

M.B. Rege และ S. Chhawchharia ได้แสดงว่า ถ้า $M \neq 0$ แล้ว $R(+)M$ ไม่เป็น reduced ring และยังได้พิสูจน์ให้เห็นอีกว่า $Z(+)Z/nZ$ เป็น Armendariz ring ทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 3 ให้ R เป็น commutative ring และ $h: R \to R$ เป็น ring homomorphism และให้ M เป็น left R-module เราจะได้ว่า $R \times M$ เป็น noncommutative ring ภายใต้การดำเนินการต่อไปนี้

$$(a,m)+(b,n)=(a+b,m+n)$$

$$(a,m)(b,n)=(ab,h(a)n+h(b)m)$$

และเราแทน ring ชนิดนี้ด้วยสัญลักษณ์ $R(+)_hM$

M.B. Rege และ S. Chhawchharia ได้แสดงว่า ถ้า K เป็น field, $h: K \to K$ เป็น field monomorphism และ V เป็น K-vector space แล้ว $K(+)_hV$ เป็น Armendariz ring

ตัวอย่าง 4 ให้ R เป็น ring ที่มีเอกลักษณ์ และ $M_n(R)$ เป็น matrix ring บน R (ภายใต้การดำเนินการบวกและคูณปกติของเมทริกซ์) โดยที่ $n \geq 2$

M.B. Rege และ S. Chhawchharia ได้แสดงว่า $M_n(R)$ ไม่เป็น Armendariz ring ตราบจนกระทั่งในปี 2000 เราพบงานวิจัยของ Nam Kyun Kim และ Yang Lee ทั้งคู่ได้พิสูจน์ว่า ring ของ $n \times n$ upper triangular matrix บน R ก็ไม่เป็น Armendariz ring ยิ่งไปกว่านั้น Nam Kyun Kim และ Yang Lee ยังได้ยกตัวอย่าง เพื่อแสดงให้เห็นว่า มี subring ของ ring ของ 3×3 upper triangular matrix บน R ซึ่งเป็น Armendariz ring ดังนี้

ถ้า R เป็น reduced ring แล้ว $\left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a,b,c \in R\right\}$ เป็น Armendariz ring

การศึกษาโครงสร้างของ Armendariz ring บน matrix ring ยังคงอยู่บนกระแสนิยมของแวดวงนักคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง ซึ่งต่อไปเป็นผลลัพธ์ของ Wang Wen Kang ที่ได้พิสูจน์ในปี 2009 ว่า $\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & \cdots & a_n \end{bmatrix} \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in R\right\}$ เป็น maximal Armendariz subring ของ $M_n(R)$ โดยที่ R เป็น reduced ring และ $n \geq 2$

ตัวอย่าง 5 ให้ R เป็น ring และ $R_4 = \left\{\begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in R\right\}$ Nam Kyun Kim และ Yang Lee ได้แสดงให้เห็นว่า R_4 ไม่เป็น Armendariz ring ยิ่งไปกว่านั้น R_n ไม่เป็น Armendariz ring ทุกๆ $n \geq 4$

ตัวอย่าง 6 ให้ R เป็น ring และ M เป็น (R,R)-bimodule เราจะได้ว่า $R \times M$ เป็น ring ภายใต้การดำเนินการต่อไปนี้

$$(a,m)+(b,n)=(a+b,m+n)$$

$$(a,m)(b,n)=(ab,an+mb)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเราแทน ring ชนิดนี้ด้วยสัญลักษณ์ $T(R,M)$ อีกทั้งนี้ Nam Kyun Kim และ Yang Lee พิสูจน์ว่า ถ้า R เป็น reduced ring แล้ว $T(R,R)$ เป็น Armendariz ring

ตัวอย่าง 7 ในปี 1998 D.D Anderson และ V. Camillo ได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ring R และ polynomial ring $R[x]$ ไว้ดังนี้ R เป็น Armendariz ring ก็ต่อเมื่อ $R[x]$ เป็น Armendariz ring

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ Armendariz ring มีมากมายและหลากหลายแนวทาง แต่จากการทบทวนวรรณกรรม เราเห็นแนวทางหนึ่งซึ่งชัดเจน ซึ่งกล่าวได้ว่าแนวทางนี้เป็นที่นิยมศึกษาในโครงสร้าง Armendariz ring ในวงกว้าง นั่นก็คือ การศึกษาการวางนัยทั่วไปของ Armendariz ring

ณ ที่นี้ เราจึงขอรวบรวมบทนิยามต่างๆ ที่เรียกได้ว่าเป็นการวางนัยทั่วไปของ Armendariz ring พอสังเขป

ให้ R เป็น ring ที่มีเอกลักษณ์ และ $R[x]$ เป็น polynomial ring บน R และกำหนดสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

$P(R) = \bigcup_{P \subseteq R} P$ เป็น prime ideal ของ R

$N(R)$ =เซตของ nilpotent ของ R

ข้อสังเกต เราศึกษาเพิ่มเติมจาก ทฤษฎีบท 2.2.9[9] ว่า ถ้า R เป็น commutative ring ที่มีเอกลักษณ์ แล้ว $P(R) = N(R)$ อย่างไรก็ตาม ถ้า R ไม่เป็น commutative ring แล้ว ไม่จำเป็นที่ $P(R)$ และ $N(R)$ ต้องเท่ากัน ทั้งนี้เนื่องจากเราทราบแน่นอนว่า $P(R)$ เป็น ideal ของ R ในขณะที่ $N(R)$ อาจไม่เป็นแม้กระทั่ง subgroup ดังเช่น $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$ แต่ $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \notin N(R)$

สมมติว่า $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x]$

ชื่อ	บทนิยาม
R เป็น quasi-Armendariz ring[5]	ถ้า $f(x)R[x]g(x) = 0$ แล้ว $f_i R g_j = 0$ ทุกๆ i และ j
R เป็น nil-Armendariz ring[2]	ถ้า $f(x)g(x) \in N(R)[x]$ แล้ว $f_i g_j \in N(R)$ ทุกๆ i และ j
R เป็น weak Armendariz ring[8]	ถ้า $f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_i g_j \in N(R)$ ทุกๆ i และ j
R เป็น π-Armendariz ring[15]	ถ้า $f(x)g(x) \in N(R[x])$ แล้ว $f_i g_j \in N(R)$ ทุกๆ i และ j
R เป็น almost Armendariz ring[11]	ถ้า $f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_i g_j \in P(R)$ ทุกๆ i และ j

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

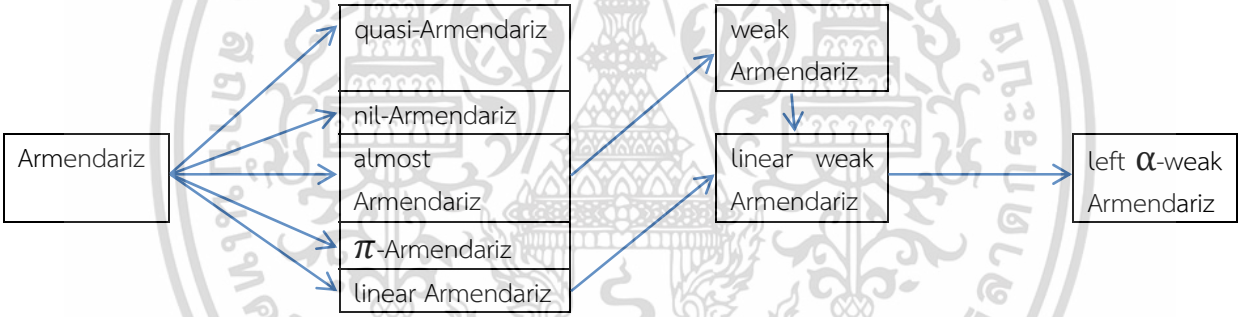
ต่อไปสมมติว่า $f(x) = f_0 + f_1x$ และ $g(x) = g_0 + g_1x \in R[x]$

ชื่อ	บทนิยาม
R เป็น linear Armendariz ring[4]	ถ้า $f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_ig_j = 0$ ทุกๆ i และ j
R เป็น linear weak Armendariz ring[12]	ถ้า $f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_ig_j \in N(R)$ ทุกๆ i และ j

ให้ $\alpha: R[x] \to R[x]$ เป็น ring endomorphism และ $f(x) = f_0 + f_1x$ และ $g(x) = g_0 + g_1x \in R[x]$

R เป็น left α-weak Armendariz rin[13]	ถ้า $\alpha(f(x))g(x) = 0$ แล้ว $\alpha(f_i)g_j = 0$ ทุกๆ i และ j

ในเบื้องต้นเราสรุปความเชื่อมโยงกันของทั้ง 8 บทนิยามข้างต้นดังนี้



ให้ $A \subseteq R$ เรานิยาม $r_R(A) = \{x \in R \mid Ax = 0\}$ และเรียก $r_R(A)$ ว่า right annihilator ของ A ใน R เราเรียก left ideal I ของ R ว่า Armendariz left ideal[14] ถ้า I สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนี้

ถ้า $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_ix^i, g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_jx^j \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x])$ แล้ว $f_ig_j \in r_R(I)$ ทุกๆ i และ j

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางต่อไปนี้ เรายกตัวอย่างเพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ที่คล้ายกันของ Armendariz ring และ Armendariz ideal โดยใช้สัญลักษณ์พื้นฐานตามที่กล่าวไว้ข้างต้น

Armendariz ring	Armendariz ideal
ให้ R เป็น Armendariz ring ถ้า $f_1, f_2, \dots, f_n \in R[x]$ โดยที่ $f_1 f_2 \dots f_n = 0$ แล้ว $a_1 a_2 \dots a_n = 0$ เมื่อ a_i เป็นสัมประสิทธิ์ของ f_i	ให้ I เป็น Armendariz left ideal ของ R ถ้า $f_1, f_2, \dots, f_n \in R[x]$ โดยที่ $f_1 f_2 \dots f_n \in r_{R[x]}(I[x])$ แล้ว $a_1 a_2 \dots a_n \in r_R(I)$ เมื่อ a_i เป็นสัมประสิทธิ์ของ f_i
R เป็น Armendariz ring ก็ต่อเมื่อ $R[x]$ เป็น Armendariz ring	ถ้า I เป็น Armendariz left ideal ของ R แล้ว $I[x]$ เป็น Armendariz left ideal ของ $R[x]$

ตาราง 1.1

เราเห็นได้ชัดว่าทุก subring ของ Armendariz ring เป็น Armendariz ring ผลลัพธ์ต่อไปนี้แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Armendariz ring และ Armendariz ideal

ถ้า R เป็น Armendariz ring แล้ว ทุก left ideal ของ R เป็น Armendariz left ideal ของ R

สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้ ในเบื้องต้น เรานำเสนอบทนิยามที่แตกต่างไปจาก Armendariz left ideal ซึ่งมีแนวคิด ดังนี้ กำหนดให้ R เป็น ring และสมมติว่า $A \subseteq R$ และ $B \subseteq R$ เรานิยาม $r_R(A:B) = \{x \in R \mid xB \subseteq A\}$ ให้ I เป็น left ideal ของ R เรากล่าวว่า I เป็น $*$-Armendariz left ideal ของ R ถ้า I สอดคล้องกับเงื่อนไข ดังนี้ สมมติว่า $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i, g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x]$

ถ้า $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x]:R[x])$ แล้ว $f_i g_j \in r_R(I:R)$ ทุกๆ i และ j

เราเห็นความเชื่อมโยงระหว่าง Armendariz ring และ $*$-Armendariz left ideal บน ring ที่มีเอกลักษณ์ ดังนี้ ให้ R เป็น ring ที่มีเอกลักษณ์ จะได้ว่า R เป็น Armendariz ring ก็ต่อเมื่อ $\{0\}$ เป็น $*$-Armendariz left ideal ของ R

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาโครงสร้าง ตลอดจนความสัมพันธ์ของ Armendariz ring และ Armendariz left ideal และ $*$-Armendariz left ideal

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.3 ขอบเขตของของการวิจัย

1) นิยามและศึกษา *-Armendariz left ideal

2) วิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่าง Armendariz ring และ Armendariz left ideal และ *-Armendariz left ideal

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย และ แผนการดำเนินงานวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

1) สืบค้นข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ Armendariz ring

2) ศึกษาบทนิยามที่เกี่ยวเนื่องกับ Armendariz ring ในฐานะที่เป็นการวางนัยทั่วไปของ Armendariz ring

3) วิเคราะห์บทนิยามที่เกี่ยวเนื่องกับ Armendariz ring ในฐานะที่เป็นการวางนัยทั่วไปของ Armendariz ring เพื่อเจาะลึกถึงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามดังกล่าว

4) ขยายแนวคิดของ Armendariz ring ไปบน ideal และให้บทนิยามที่คล้ายกับ Armendariz ring เพียงแต่มุ่งเน้นไปที่ ideal

5) ศึกษาโครงสร้างที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 ในเชิงทฤษฎี

6) เปรียบเทียบโครงสร้างที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 กับ Armendariz ideal

7) สรุปผลการวิจัย

แผนการดำเนินงานวิจัย

การดำเนินงาน	ระยะเวลา												หมายเหตุ
	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	
สืบค้นข้อมูลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับ Armendariz ring	←	—	—	→									
ศึกษาบทนิยามที่เกี่ยวเนื่องกับ Armendariz ring ในฐานะที่เป็นการวางนัยทั่วไปของ Armendariz ring				←	—	→							

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิเคราะห์บทนิยามที่เกี่ยวเนื่องกับ Armendariz ring ในฐานะที่เป็นการวางนัยทั่วไปของ Armendariz ring เพื่อเจาะลึกถึงความสัมพันธ์ระหว่างบทนิยามดังกล่าว						←	—	→					
ขยายแนวคิดของ Armendariz ring ไปบน ideal และให้บทนิยามที่คล้ายกับ Armendariz ring เพียงแต่มุ่งเน้นไปที่ ideal						←	—	→					
ศึกษาโครงสร้างที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 ในเชิงทฤษฎี								←	—	→			
เปรียบเทียบโครงสร้างที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 กับ Armendariz ideal									←	—	→		
สรุปผลการวิจัย											←	—	→

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2 แนวคิด ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในปี 1997 M.B. Rege และ S. Chhawchharia ได้ริเริ่มให้แนวคิดของวงอาร์เมนดาริซ ผลลัพธ์เชิงทฤษฎีมีความน่าสนใจ เห็นได้จากหลายปีต่อจากนั้น เกิดผลงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับวงอาร์เมนดาริซเป็นจำนวนมาก เช่น Near Armendariz Almost Armendariz และ π-Armendariz เป็นต้น

ให้ R เป็นวง และ x เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า สัญลักษณ์ที่ใช้ตลอดทั้งงานวิจัยนี้ คือ $R[x]$ ซึ่งแทนด้วยวงพหุนามบน R

ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และ A เป็นเซตย่อย**ของ** R เรากำหนด $r_R(A) = \{r \in R \mid Ar = 0\}$ และเรียกว่า right annihilator ของ A ของวง R

2.1 วงอาร์เมนดาริซและวงรีดิวซ์

N. Kim และ Y. lee สองนักคณิตศาสตร์ที่นำเสนอความเกี่ยวข้องกันของวงอาร์เมนดาริซและวงรีดิวซ์ เป็นงานวิจัยที่เผยแพร่ลงใน Journal of Algebra ปี 2000 ผลงานชิ้นนี้ทำให้เราได้ตัวอย่างของวงอาร์เมนดาริซเพิ่มขึ้น

ให้ R เป็นวง เราเรียก R ว่าวงรีดิวซ์ ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a^n = 0$ สำหรับบางจำนวนเต็ม n แล้ว $a = 0$

Rege และ Chhawchharia พิสูจน์ไว้ว่า วงเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ คล้ายกันนั้น ตัวอย่างถัดไปนี้แสดงให้เห็นว่าวงของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $n \times n$ โดยที่ $n \geq 2$ ก็ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซเช่นกัน

ตัวอย่าง 2.1.1 ให้ R เป็นวง เราจะแสดงว่า วงของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด $n \times n$ โดยที่ $n \geq 2$ ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ ซึ่งเราจะแสดงเพียงกรณี 2×2

เราให้ S เป็นวงของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด 2×2 บน R และ $f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$

และ $g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$ เป็นพหุนามใน $S[x]$ จะได้ว่า $f(x)g(x) = 0$

แต่ว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0$ ดังนั้น S ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ

ตัวอย่างต่อไป เราให้ตัวอย่างของวงย่อยของวงของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาด 3×3 ซึ่งเป็นอาร์เมนดาริซ

สมบัติ 2.1.2 ให้ R เป็นวงรีดิวซ์ จะได้ว่า $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in R \right\}$ เป็นวงอาร์เมนดาริซ

ให้ S เป็นวงรีดิวซ์ และให้

$$R_n = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \ddots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & a & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in S \right\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ S เป็นวง และให้ $R_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in R \right\}$

ให้ $f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$ และ $g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$

เป็นพหุนามใน $R_4[x]$

จะเห็นว่า $f(x)g(x) = 0$ แต่ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$

ดังนั้น R_4 ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ

ในขณะเดียวกัน ผลลัพธ์นี้เป็นจริงสำหรับกรณี $n \geq 5$

ให้ R เป็นวง และ M เป็น (R, R)-ไบมอดูล เรานิยามวง $T(R, M) = R \oplus M$ กับการดำเนินการบวกและคูณดังนี้ สำหรับ $r_1, r_2 \in R$ และ $m_1, m_2 \in M$

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$$

เราทราบว่า $T(R, M)$ สมสัณฐาน (ring isomorphism) กับวงเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & r \end{bmatrix}$ โดยที่ $r \in R$ และ $m \in M$

บทแทรก 2.1.4 ถ้า R เป็นวงรีดิวซ์ แล้ว $T(R, R)$ เป็นวงอาร์เมนดาริซ

แนวคิดจากผลลัพธ์ข้างต้น ทำให้เราเกิดคำถามขึ้นโดยธรรมชาติว่า $T(R, R)$ เป็นวงอาร์เมนดาริซ หรือไม่ ถ้าหาก R เป็นวงอาร์เมนดาริซ แต่ทว่าตัวอย่างต่อไปนี้ให้คำตอบว่าไม่จำเป็น

ตัวอย่าง 2.1.5 ให้ T เป็นวงรีดิวซ์ โดยบทแทรก 2.1.4 จะได้ว่า $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ เป็นวงอาร์เมนดาริซ

เรากำหนด $S = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A \end{bmatrix} \mid A, B \in R \right\}$

เราให้ $f(x) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x$

และ $g(x) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทั้ง $f(x), g(x)$ เป็นพหุนามใน $S[x]$ จะเห็นว่า $f(x)g(x) = 0$

แต่ว่า $\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\end{bmatrix} \neq 0$

ซึ่งทำให้เห็นว่า S ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ

ในปี 1998 ผลลัพธ์ในเชิงทฤษฎีที่น่าสนใจ ศึกษาโดย D. Anderson และ V. Camillo เป็นงานวิจัยที่นับว่าเป็นจุดกำเนิดของแนวทางศึกษาทฤษฎีวงอาร์เมนดาริซ

สมบัติ 2.1.6 ให้ R เป็นวงอาร์เมนดาริซ ถ้า $f_1, f_2, \dots, f_n \in R[x]$ ซึ่ง $f_1 f_2 \cdots f_n = 0$ แล้ว $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ เมื่อ a_i เป็นสัมประสิทธิ์ของ f_i

ทฤษฎีบท 2.1.7 R เป็นวงอาร์เมนดาริซ ก็ต่อเมื่อ $R[x]$ เป็นวงอาร์เมนดาริซ

ทฤษฎีบทสุดท้ายนี้ เป็นผลลัพธ์ที่เชื่อมโยงระหว่างวงอาร์เมนดาริซและวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น บน von Neumann regular ring

ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ R เป็น von Neumann regular ring ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) R เป็นวงอาร์เมนดาริซ
2) R เป็นวงรีดิวซ์
3) ถ้า $f(x) = f_0 + f_1 x, g(x) = g_0 + g_1 x \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_i g_j = 0$ ทุกๆ i และ j

หมายเหตุ เราเรียกวง R ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข 3) ในทฤษฎีบท 2.1.8 ว่าวงอาร์เมดาริซเชิงเส้น

2.2 วงอาร์เมดาริซเชิงเส้น

ผลลัพธ์ต่อไปนี้ศึกษาโดย Y. Jeon และคณะ ศึกษาผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องกับวงอาร์เมดาริซเชิงเส้น ผลงานวิจัยเผยแพร่ในปี 2009 ในชื่อที่เรียกว่า On weak Armendariz rings

บทนิยาม 2.2.1 ให้ R เป็นวง เราเรียก R ว่า**วงอาร์เมดาริซเชิงเส้น** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $f(x) = f_0 + f_1 x, g(x) = g_0 + g_1 x \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_i g_j = 0$ ทุกๆ i และ j

ให้ R เป็นวง เราเรียกไอดีลทางเดียว J ของ R ว่ามีสมบัติ IFP ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $a, b \in R$ ถ้า $ab \in J$ แล้ว $aRb \subseteq J$

เรากล่าวว่าวง R เป็น IFP ก็ต่อเมื่อ $\{0\}$ มีสมบัติ IFP

เรากล่าวว่าวง R เป็นอาบีเลียน ก็ต่อเมื่อ ทุกไอเด็มโพเท็นต์เป็น central

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หมายเหตุ ในบางงานวิจัยเรียกวงอาร์เมดาริซเชิงเส้นว่า weak Armendariz

สมบัติ 2.2.2 คลาสของวงอาร์เมดาริซเชิงเส้นมีสมบัติปิดภายใต้วงย่อยและผลคูณตรง

บทตั้ง 2.2.3 ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

1) วงอาร์เมนดาริซเป็นวงอาร์เมดาริซเชิงเส้น
2) วงอาร์เมดาริซเชิงเส้นเป็นอาบีเลียน

ตัวอย่างด้านล่างนี้แสดงว่าบทกลับของบทตั้ง 2.2.2 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ $R = \mathbb{Z}_3[x,y]/(x^3, x^2y^2, y^3)$ เมื่อ $\mathbb{Z}_3$ เป็น Galois field อันดับ 3 และ $\mathbb{Z}_3[x,y]$ เป็นวงของพหุนามที่มี x, y เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า โดยสัมประสิทธิ์อยู่ใน $\mathbb{Z}_3$ และ (x^3, x^2y^2, y^3) เป็นไอดีลของ $\mathbb{Z}_3[x,y]$ ซึ่งก่อกำเนิดโดย x^3, x^2y^2, y^3

ให้ $R[t]$ เป็นวงของพหุนามที่มี y เป็นตัวแปรไม่ทราบค่า โดยสัมประสิทธิ์อยู่ใน R

เนื่องจาก $(\overline{x}+\overline{y}t)^3 = (\overline{x}+\overline{y}t)\left(\overline{x}^2 + 2\overline{x}\,\overline{y}t + \overline{y}^2t^2\right) = 0$ โดยที่ $\overline{x}\,\overline{y}^2 \neq 0$

ซึ่งทำให้ R ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ แต่ R เป็นวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น

ตัวอย่าง 2.2.5 S เป็นวงอาบีเลียน และ $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, a_{ij} \in S \right\}$ จะได้ว่า R เป็นวงอาบีเลียน

ให้ $f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$ และ $g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$

ทั้ง $f(x)$ และ $g(x) \in R[x]$ และจะเห็นว่า $f(x)g(x) = 0$

แต่ว่า $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$

ซึ่งหมายความว่า R ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 ไอดีลอาร์เมนดาริซ

แนวคิดของไอดีลอาร์เมนดาริซ แนะนำโดย Sh. Ghalandarzadeh และคณะ ปรากฏงานวิจัยในปี 2010 ได้ริเริ่มศึกษาไอดีลอาร์เมนดาริซ พร้อมทั้งพิจารณาความสัมพันธ์ของ ไอดีลอาบีเลียน ไอดีลอาร์เมนดาริซและวงอาร์เมนดาริซ อย่างไรก็ตามการศึกษาไอดีลอาร์เมนดาริซ โดย Sh. Ghalandarzadeh และคณะนี้ กำหนดไว้ว่าศึกษาบนวงที่มีเอกลักษณ์

บทนิยาม 2.3.1 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และ I เป็นไอดีลทางซ้าย เราเรียก I ว่า **อาร์เมนดาริซ** ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $f(x)=\sum_{i=0}^{n} f_i x^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x])$ แล้ว $f_i g_j \in r_R(A)$ ทุกๆ i และ j

บทนิยาม 2.3.2 ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และ I เป็นไอดีลทางซ้าย เราเรียก I ว่า **อาบีเลียน** ก็ต่อเมื่อ

$er - re \in r_R(I)$ ทุกสมาชิก $r \in R$ และทุกไอเดมโพเทนต์ $e \in R$

เราเห็นได้ชัดว่า $\{0\}$ เป็นทั้งอาร์เมนดาริซไอดีลและอาบีเลียนไอดีล

สมบัติ 2.3.3 ให้ I เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R

ถ้า $f_1, f_2, \dots, f_n \in R[x]$ โดยที่ $f_1 f_2 \dots f_n \in r_{R[x]}(I[x])$ แล้ว $a_1 a_2 \dots a_n \in r_R(I)$ เมื่อ a_i เป็นสัมประสิทธิ์ของ f_i

สมบัติ 2.3.4 ให้ I เป็นไอดีลทางซ้ายของ R

ถ้า I เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R แล้ว $I[x]$ เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ $R[x]$

สมบัติต่อไป แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของอาร์เมนดาริซไอดีลและอาบีเลียนไอดีล

โดยกำหนด $Z(R)=\{x \in R \mid xa = ax$ ทุกๆ $a \in R\}$

สมบัติ 2.3.5 ให้ I เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(1) ถ้า $ab \in r_R(I)$ และ $ac^n b \in r_R(I)$ โดยที่ $a, b, c \in R$ และ n เป็นจำนวนนับ แล้ว $acb \in r_R(I)$

(2) ถ้า $ab \in r_R(I)$ และ $c^n \in Z(R)$ โดยที่ $a, b, c \in R$ และ n เป็นจำนวนนับ แล้ว $acb \in r_R(I)$

บทแทรก 2.3.6 ถ้า I เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R แล้ว $I[x]$ เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ $R[x]$

เราพิจารณาได้ไม่ยากนักว่า วงย่อยของวงอาร์เมนดาริซเป็นวงอาร์เมนดาริซ ในทำนองเดียวกัน ผลลัพธ์ด้านล่างนี้แสดงให้เห็นว่า ไอดีลทางซ้อยของวงอาร์เมนดาริซเป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้าย

สมบัติ 2.3.7 ถ้า R เป็นวงอาร์เมนดาริซ แล้ว ทุกไอดีลทางซ้ายของ R เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้าย

ให้ R เป็นวง และ M เป็น (R,R)-ไบมอดูล เรานิยามวง $T(R,M)=R \oplus M$ กับการดำเนินการบวกและคูณดังนี้ สำหรับ $r_1, r_2 \in R$ และ $m_1, m_2 \in M$

$$(r_1, m_1) + (r_2, m_2) = (r_1 + r_2, m_1 + m_2)$$

$$(r_1, m_1)(r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราทราบว่า $T(R,M)$ สมสัณฐาน (ring isomorphism) กับวงเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} r & m \\ 0 & r \end{bmatrix}$ โดยที่ $r \in R$ และ $m \in M$

สมบัติ 2.3.8 R เป็นวงรีดิวซ์ ก็ต่อเมื่อ $T(R,R)$ เป็นวงอาร์เมนดาริซ

ตัวอย่างต่อไปเป็นอาร์เมนดาริซไอดีลของวงที่ไม่เป็นอาร์เมนดาริซ

ตัวอย่าง 2.3.9 ให้ $R = \mathbb{Z}_4$ และ $S = T(R,R)$ เห็นได้ชัดว่า R ไม่เป็นวงรีดิวซ์ และ S ไม่เป็นวาอาร์เมนดาริซ เรากำหนดให้ $a = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $I = Sa$ และ $r(I) = r_S(I)$ จะได้ว่า $r(I) = \left\{ \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid r \in \{\overline{0}, \overline{2}\}, b \in \mathbb{Z}_4 \right\}$

เนื่องจาก $r(I)$ เป็นไอดีลของ S และ ${}^{S}/_{r(I)}$ เป็นวงรีดิวซ์ จึงได้ว่า I เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ S

ให้ R เป็นวง เราเรียกไอดีลทางเดียว J ของ R ว่ามีสมบัติ IFP ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $a, b \in R$ ถ้า $ab \in J$ แล้ว $aRb \subseteq J$

ให้ R เป็นวง เราเรียก R ว่า locally finite ถ้าทุกเซตย่อยจำกัดของ R ก่อกำเนิดกึ่งกรุปเชิงการคูณจำกัด (finitely semigroup multiplicatively)

ทฤษฎีบท 2.3.10 ถ้า R เป็น locally finite และ I เป็นอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R แล้ว $r(I)$ มีสมบัติ IFP

2.4 เนียร์อาร์เมนดาริซไอดีล

ให้ N เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ร่วมกับ $+$ และ $\cdot$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน N เรากล่าวว่า $(N,+,\cdot)$ เป็นเนียร์ริงทางซ้าย ถ้า $(N,+,\cdot)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $(N,+)$ เป็นกรุป
2) $(N,\cdot)$ กึ่งกรุป
3) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ ทุกๆ $x, y, z \in N$

ให้ R เป็นวง ในบทย่อยนี้ เราแทนสัญลักษณ์ $(x)f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i \in R[x]$ และเรานิยามการดำเนินการทวิภาค $\circ$ บน $R[x]$ โดย $(x)f \circ (x)g = \sum_{j=0}^{n} g_j \left((x)f\right)^j$ เมื่อ $(x)g = \sum_{j=0}^{n} g_j x^j$ ทำให้ได้ว่า $(R[x],+,\circ)$ เป็นเนียร์ริงทางซ้าย แต่ไม่เป็นริง

เราแทนสัญลักษณ์ $R_0[x]$ ด้วยเนียร์ริงย่อยของ $R[x]$ ซึ่งเป็นเนียร์ริงย่อยของ $R[x]$ ที่มีพจน์ค่าคงที่เป็น 0

ในบทย่อยนี้ นำเสนอแนวคิดเนียร์ไอดีลอาร์เมนดาริซ ซึ่งริเริ่มโดย Kh. Khalilnezhad และ H. Javadi เผยแพร่งานวิจัยในปี 2015 ประเด็นสำคัญของงานวิจัยนี้ คือการเลือกใช้การดำเนินการทวิภาค $\circ$ ซึ่งทำให้ $(R[x],+,\circ)$ เป็นเนียร์ริงทางซ้าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 2.4.1 ให้ R เป็นวง และ I เป็นไอดีลทางซ้ายของ R เราเรียก I ว่า **เนียร์อาร์เมนดาริซ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับพหุนาม $(x)f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i, (x)g = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x]$

ถ้า $(x)f \circ (x)g \in r_{R[x]}(I[x])$ แล้ว $g_j f_i \in r_R(I)$ ทุกๆ i และ j และ $(f_0)g \in r_R(I)$

สำหรับ $(x)f \in R[x]$ เรากำหนด C_f แทนเซตของสัมประสิทธิ์ของ $(x)f$

สมบัติ 2.4.2 ให้ R เป็นวง และ I เป็นเนียร์อาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R ถ้า $(x)f_1, (x)f_2, \dots, (x)f_n \in R[x]$ ซึ่ง $(x)f_1 \circ \cdots \circ (x)f_n \in r_{R[x]}(I[x])$ และ $a_k \in C_{f_k}$ โดย $k \in \{1, \dots, n\}$ แล้ว $a_n a_{n-1} \dots a_1 \in r_R(I)$

สมบัติ 2.4.3 ถ้า I เป็นเนียร์อาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R แล้ว I เป็นอาบีเลียนไอดีลทางซ้ายของ R

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงว่าบทกลับของสมบัติ 2.4.3 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 2.4.4 ให้ S เป็นวงอาบีเลียน และ $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} | a, b, c, d \in S \right\}$

เราให้ $I = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} | x, y \in S \right\}$ จะได้ว่า I เป็นอาบีเลียนไอดีลทางซ้าย

พิจารณา $(x)f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x, (x)g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x^2$

จะเห็นว่า $(x)f \circ (x)g \in r_{R[x]}(I[x])$ แต่ว่า $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin r_R(I)$

ดังนั้น I ไม่เป็นเนียร์อาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R

สมบัติ 2.4.5 ถ้า R เป็นอาร์เมนดาริซเนียร์ริง และ I เป็นไอดีลของ R แล้ว ${}^{R}/_{r_R(I)}$ เป็นอาร์เมนดาริซเนียร์ริง

ทฤษฎีบท 2.4.6 ถ้า R เป็นอาร์เมนดาริซเนียร์ริง และ I เป็นไอดีลทางซ้ายของ R แล้ว I เป็นเนียร์อาร์เมนดาริซ R

ให้ R เป็นวง เรานิยามวง $T(R, R) = R \oplus R$ กับการดำเนินการบวกและคูณดังนี้

สำหรับ $r_1, r_2, r_1', r_2' \in R$

$$(r_1, r_2) + (r_1', r_2') = (r_1 + r_1', r_2 + r_2')$$

$$(r_1, r_2)(r_1', r_2') = (r_1 r_1', r_1 r_2' + r_2 r_1')$$

เราทราบว่า $T(R, R)$ สมสัณฐาน (ring isomorphism) กับวงเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} r & s \\ 0 & r \end{bmatrix}$ โดยที่ $r, s \in R$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.4.7 ให้ $S = \mathbb{Z}_8$ และ $R = T(S,S)$ จะได้ว่า R ไม่เป็นอาร์เมนดาริซเนียร์ริง

เพราะว่า $(x)f = (\overline{4},\overline{2})x, (x)g = (\overline{2},0)x^2 \in R[x]$ ซึ่งทำให้ $(x)f \circ (x)g = 0$ แต่ว่า $(\overline{4},\overline{2})(\overline{2},0) \neq 0$

ให้ $a = \begin{bmatrix} 0 & \overline{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $I = Ra$ และ $r(I) = r_R(I)$

จะได้ว่า $r(I) = \left\{ \begin{bmatrix} r & b \\ 0 & r \end{bmatrix} \mid r \in \{0,\overline{2}\}, b \in \mathbb{Z}_8 \right\}$

เนื่องจาก $r(I)$ เป็นไอดีลของ R และ ${}^{R}/_{r(I)}$ เป็นวงรีดิวซ์

จึงได้ว่า I **เป็น**เนียร์อาร์เมนดาริซ

ปิดท้ายด้วยสมบัติระหว่างไอดีลทางเดียวกับสมบัติ IFP

ให้ R เป็นวง เราเรียกไอดีลทางเดียว J ของ R ว่ามีสมบัติ IFP ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $a,b \in R$ ถ้า $ab \in J$ แล้ว $aRb \subseteq J$

ให้ n เป็นจำนวนนับ เราแทน $U_n(R)$ เป็นเซตของเมทริกซ์สามเหลี่ยมบนขนาน $n \times n$ บน R

ตัวอย่าง 2.4.8 ให้ Rเ ป็นโดเมน และ $R = U_2(D)$ และ $I = \begin{bmatrix} D & D \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ให้ $0 \neq \alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, 0 \neq \beta = \begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{bmatrix} \in R$

เราจะเห็นว่า $\alpha\beta \in I$ ก็ต่อเมื่อ $c = 0$

ดังนั้น ถ้า $c = 0$ แล้ว $\alpha R\beta \subseteq I$

ซึ่งหมายความว่า I มีสมบัติ IFP

ขั้นต่อไป เราให้ $(x)f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x, (x)g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}x^2 \in R[x]$

จะเห็นว่า $(x)f \circ (x)g \in r_{R[x]}(I[x])$ แต่ว่า $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin r_R(I)$

ดังนั้น I ไม่เป็นเนียร์อาร์เมนดาริซ

สมบัติ 2.4.9 ถ้า R เป็นวงและ I เป็นเนียร์อาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้ายของ R แล้ว $r(I)$ มีสมบัติ IFP

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3 การวางนัยทั่วไปของวงอาร์เมนดาริซ

เราแนะนำแนวคิดของ $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น และ $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลซึ่งเป็นการขยายความรู้ของวงอาร์เมนดาริซ พร้อมทั้งศึกษาบางสมบัติและยกตัวอย่างสำคัญของการขยายนี้ รวมไปถึงการแสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์และ $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น

3.1 บทนิยามพื้นฐาน

ตลอดทั้งบทนี้ เรากำหนดให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และสำหรับเซตย่อย A และ B ของ R เรานิยามเซตย่อย $r_R(A:B) = \{x \in R \mid xB \subseteq A\}$

สัญลักษณ์พื้นฐาน

$\mathbb{Z}$ แทนวงของจำนวนเต็ม

$R[x]$ แทนวงของพหุนามที่มี x เป็นตัวแปร และสัมประสิทธิ์มาจากวง R

$M_n(R)$ แทนวงของเมทริกซ์ขนาน $n \times n$ และแต่ละสมาชิกของเมทริกซ์มาจากวง R

$U_n^*(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} | a, a_{ij} \in A \right\}$ โดยที่ A เป็นเซตย่อยของ R

บทนิยาม 3.1.1 ให้ $a \in R$ เรากล่าวว่า a เป็น**นิลโพเทนต์** (nilpotent) ถ้ามีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $a^n = 0$

บทนิยาม 3.1.2 เรากล่าวว่า R เป็น**วงรีดิวซ์** (reduced ring) ถ้า R มีแค่ 0 เท่านั้นที่เป็นนิลโพเทนต์

M.B Rege และ S.Chhawchharia [6] เป็นผู้ริเริ่มกำหนดบทนิยามวงอาร์เมนดาริซ ดังนี้

บทนิยาม 3.1.3 เรากล่าวว่า R เป็น**วงอาร์เมนดาริซ** (Armendariz ring) ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_mx^m,\ g(x) = g_0 + g_1x + \cdots + g_mx^m \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_ig_j = 0$ ทุกๆ i และ j

ข้อสังเกต 3.1.4 [1] ทุกวงรีดิวซ์เป็นวงอาร์เมนดาริซ

ต่อมาบทนิยามของวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้นได้รับความสนใจจากหลากหลายนักคณิตศาสตร์ซึ่งมองว่าวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้นเป็นการวางนัยทั่วไปของวงอาร์เมนดาริซ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทนิยาม 3.1.5 เรากล่าวว่า R เป็น**วงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น** (linear Armendariz ring) ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $f(x) = f_0 + f_1x,\ g(x) = g_0 + g_1x \in R[x]$ ซึ่งสอดคล้อง

$f(x)g(x) = 0$ แล้ว $f_0g_0 = f_1g_0 = f_0g_1 = f_1g_1 = 0$

T.K. Lee และ T.L. Wong ได้ให้ตัวอย่างเพื่อแสดงให้เห็นว่ามีวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้นที่ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ [5]

Sh. Ghalandarzadeh และคณะ [3] ได้เริ่มต้นให้บทนิยามของอาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้าย ซึ่งก่อนอื่นจำเป็นต้องรู้จักกับสัญลักษณ์ของ $r_R(A) = \{a \in R \mid Aa = 0\}$ โดยที่ A เป็นเซตย่อยของ R

บทนิยาม 3.1.6 เรากล่าวว่าไอดีลทางซ้าย I ของ R เป็น**อาร์เมนดาริซไอดีลทางซ้าย** ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_mx^m,\ g(x) = g_0 + g_1x + \cdots + g_mx^m \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x])$ แล้ว $f_ig_j \in r_R[I]$ ทุกๆ i และ j

ด้วยผลลัพธ์ของ M.B. Rege และ S. Chhawchharia [6] รวมถึง Sh. Ghalandarzadeh และคณะ [3] ตลอดจนงานวิจัยของ V. Camillo และ P. Nielsen [2] อีกทั้งงานของ N.K. Kim และ Y. Lee [4] ทำให้เราได้แนวคิดสำคัญซึ่งนำมาสู่งานวิจัย พร้อมทั้งนำเสนอบทนิยามใหม่ ที่เราเรียกว่า $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น ซึ่งถือว่าเป็นการขยายแนวทางการศึกษามาจากวงอาร์เมนดาริซ

3.2 $*$-อาร์เมนดาริซไอดีล

บทนิยาม 3.2.1 ให้ R เป็นวง และ I เป็นไอดีลของ R เรากล่าวว่า I เป็น **$*$-อาร์เมนดาริซไอดีล** ของ R

ถ้า $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_mx^m,\ g(x) = g_0 + g_1x + \cdots + g_mx^m \in R[x]$ ซึ่ง $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x]:R[x])$ แล้ว $f_ig_j \in r_R(I:R)$ ทุกๆ i และ j

เห็นได้ชัดว่า R เป็นวงอาร์เมนดาริซ ก็ต่อเมื่อ $\{0\}$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลของ R

สมบัติ 3.2.2 ให้ I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีล ของวง R และ $f(x), g(x) \in R[x]$

ถ้า $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x]:R[x])$ แล้ว $ag(x) \in r_{R[x]}(I[x]:R[x])$ ทุกสัมประสิทธิ์ a ของ f

สมบัติ 3.2.3 ให้ R เป็นวง และ I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลของ R ถ้า $f_1, f_2, \ldots, f_n \in R[x]$ ซึ่ง $f_1f_2 \ldots f_n \in r_{R[x]}(I[x]:R[x])$ แล้ว $a_1, a_2, \ldots, a_n \in r_R(I:R)$ ทุกสัมประสิทธิ์ a_i ของ f_i

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น

เราเริ่มต้นบทย่อยนี้ด้วยบทนิยามของ $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น รวมไปถึงตัวอย่างของ $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น

บทนิยาม 3.3.1 ให้ R เป็นวง และ I เป็นไอดีลของ R เรากล่าวว่า I เป็น **$*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น** ของ R ถ้า $f(x) = f_0 + f_1x,\ g(x) = g_0 + g_1x \in R[x]$ ซึ่งสอดคล้อง

$f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x]: R[x])$ แล้ว $f_0g_0, f_1g_0, f_0g_1, f_1g_1 \in r_R(I: R)$

เห็นได้ชัดว่า R เป็นวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ $\{0\}$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R ยิ่งไปกว่านั้น ทุก $*$-อาร์เมนดาริซไอดีล เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น เราได้ตัวอย่างจาก Lee และ Wong [5] ว่ามีวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้นที่ไม่เป็นวงอาร์เมนดาริซ ซึ่งทำให้เราได้เช่นเดียวกันว่ามี $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น ที่ไม่เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีล

ตัวอย่าง 3.3.2 $2\mathbb{Z}$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $\mathbb{Z}$

สมบัติ 3.3.3 ให้ I เป็นไอดีลของวง R และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

(i) ถ้า $U_n^*(I)$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $U_n^*(R)$ แล้ว I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R
(ii) ถ้า $M_n(I)$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $M_n(R)$ แล้ว I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าบทกลับของสมบัติ 3.3.3 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.3.4 ให้ $f(x) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$ และ $g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$

เราจะได้ว่า

$$f(x)g(x) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \in M_2(2\mathbb{Z})[x] \text{ และ } \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin M_2(2\mathbb{Z})$$

ซึ่งหมายความว่า $M_2(2\mathbb{Z})$ ไม่เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $M_2(2\mathbb{Z})$

ตัวอย่าง 3.3.5 ให้ $f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$

และ $g(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$

จะได้ว่า $f(x)g(x) = 0 \in U_4^*(2\mathbb{Z})[x]$

เอกสารนี้สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\notin U_4^*(2\mathbb{Z})$

ดังนั้น $U_4^*(2\mathbb{Z})$ ไม่เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $U_4^*(\mathbb{Z})$

ให้ R เป็นวงที่มีเอกลักษณ์ และเราแทน $\bar{a}=a+I$ เมื่อ $a\in R$ และ I เป็นไอดีลของ R

ทฤษฎีบท 3.3.6 ให้ I เป็นไอดีลของ R จะได้ว่า I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R ก็ต่อเมื่อ $R/_I$ เป็นวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้น

เรากล่าวว่าไอดีล I ของ R **เป็นไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์** (completely semiprime) ของ R ถ้า $a^2\in I$ แล้ว $a\in I$ สำหรับ $a\in R$

สิ่งที่ได้จากกึ่งไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ และเป็นประโยชน์กับงานวิจัยของเราก็คือ ถ้า I เป็นไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ R และ $ab\in I$ แล้ว $ba\in I$ ซึ่งผลลัพธ์นี้จะนำเราไปสู่อีกหนึ่งผลลัพธ์สำคัญที่เป็นการเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์และ $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น

สมบัติ 3.3.7 ถ้า I เป็นไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ R แล้ว I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R

ตัวอย่างต่อไปแสดงให้เห็นว่าบทกลับของสมบัติ 3.3.7 ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.3.8 พิจารณา $U_2^*(\mathbb{Z})=\left\{\begin{pmatrix}a&a_{12}\\0&a\end{pmatrix}\mid a,a_{12}\in\mathbb{Z}\right\}$ เราพิสูจน์ได้ว่า $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $U_2^*(\mathbb{Z})$ แต่ว่า $\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ ไม่เป็นไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ $U_2^*(\mathbb{Z})$

ตัวอย่าง 3.3.9 ให้ R เป็นวงรีดิวซ์ และ $U_3^*(R)=\left\{\begin{pmatrix}a&a_{12}&a_{13}\\0&a&a_{23}\\0&0&a\end{pmatrix}\mid a,a_{12},a_{13},a_{23}\in R\right\}$

สองนักคณิตศาสตร์ Nam Kyun Kim และ Yang Lee [4] พิสูจน์เอาไว้ว่า $U_3^*(R)$ เป็นวงอาร์เมนดาริซ ฉะนั้น $U_3^*(R)$ จึงเป็นวงอาร์เมนดาริซเชิงเส้นด้วย ส่งผลให้ $\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $U_3^*(R)$ แต่ว่า $\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}$ ไม่เป็นไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ $U_3^*(R)$

ตัวอย่าง 3.3.10 เราทราบว่า $2^2\in 4\mathbb{Z}$ และ $2\notin 4\mathbb{Z}$ ดังนั้น $4\mathbb{Z}$ ไม่เป็นไอดีลกึ่งเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ $\mathbb{Z}$ แต่เราพิสูจน์ได้ว่า $4\mathbb{Z}$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $\mathbb{Z}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ R และ S เป็นวง จะได้ว่า ผลคูณคาร์ทีเซียน $R \times S$ เป็นวงภายใต้การบวกและการคูณตามส่วนประกอบ ทำให้ได้ผลลัพธ์ ดังนี้

สมบัติ 3.3.11 ให้ R และ S เป็นวง จะได้ว่า

1) ถ้า I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R แล้ว $I \times S$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $R \times S$
2) ถ้า J เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ S แล้ว $R \times J$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $R \times S$
3) ถ้า I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R และ J เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ S แล้ว $I \times J$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $R \times S$

ให้ R และ S เป็นวง จะได้ว่า ผลคูณคาร์ทีเซียน $R \times S$ เป็นวงภายใต้การบวกตามส่วนประกอบและการคูณที่นิยามดังนี้ $(a,b) * (c,d) = (ac, ad + bc)$ ในที่นี้เราใช้สัญลักษณ์ $R(+)R$ เพื่อหมายถึงวงชนิดดังกล่าว

สมบัติ 3.3.12 ถ้า I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R แล้ว $I \times R$ เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $R(+)R$

เมื่อเปรียบเทียบสมบัติ 3.3.11 และ 3.3.12 อาจเป็นที่สงสัยว่าเราหลงลืมเหตุการณ์ใดไป เช่นในกรณี $R \times J$ และ $I \times J$ แต่แท้จริงแล้ว เราพบว่า $R \times J$ อาจไม่เป็นไอดีลของ $R(+)R$ และยิ่งไปกว่านั้น เราเตรียมตัวอย่างสำหรับ $I \times J$ ไม่เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $R(+)R$ ถึงแม้ว่า I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R และ J เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ S

ตัวอย่าง 3.3.13 พิจารณา $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ พร้อมทั้งกำหนด $f(x) = (2,1) + (4,1)x$ และ $g(x) = (2,1) + (0,1)x$ จะเห็นว่า $f(x)g(x) = (4,4) + (8,8)x + (0,4)x^2 \in (4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z})[x]$ แต่ว่า $(2,1) * (0,1) = (0,2) \notin 4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ ซึ่งหมายความว่า $4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ ไม่เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$

ข้อสังเกต 3.3.14 ให้ R เป็นวง เราทราบว่าวง $R(+)R \cong U_2^*(R)$ และด้วยตัวอย่าง 3.3.13 ทำให้ทราบได้ว่า สำหรับ $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้น I ของ $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ ไอดีล $U_2^*(I)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $U_2^*(R)$

ข้อสังเกต 3.3.15 ให้ R เป็นวง และ M เป็น (R,R) −ไบมอดูล การขยายของ R ด้วย M คือวง $T(R,M) = R \oplus M$ ภายใต้การบวกปกติและการคูณที่นิยามโดย $(r_1, m_1) * (r_2, m_2) = (r_1 r_2, r_1 m_2 + r_2 m_1)$ ซึ่งพบว่า $T(R,M) \cong \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in R \text{ และ } m \in M \right\}$ ภายใต้การบวกและการคูณปกติของเมทริกซ์ ดังนั้นผลของตัวอย่าง 3.3.13 จึงอธิบายได้อีกว่า $T(I,I)$ ไม่จำเป็นต้องเป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ $T(R,R)$ ถึงแม้ว่า I เป็น $*$-อาร์เมนดาริซไอดีลเชิงเส้นของ R

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

เผยแพร่ผลงานวิจัยโดยนำเสนอในงานประชุมวิชาการคณิตศาสตร์ระดับชาติประจำปี 2560 ครั้งที่ 22 (The 22nd Annual Meeting in Mathematics: AMM2017) ระหว่างวันที่ 2-4 มิถุนายน 2560 ณ โรงแรมโลตัส ปางสวนแก้ว จังหวัดเชียงใหม่ โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ร่วมกับสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ชื่อเรื่อง LINEAR *-ARMENDARIZ IDEALS

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] Anderson D. and Camilli V., Armendariz rings and Gaussian rings, *Communication in Algebra*, 1998, Vol. 26(7), 2265-2272.

[2] Antoine R., Examples of Armendariz rings, *Communication in Algebra*, 2010, Vol. 38(11), 4130-4143.

[3] Armendariz E., A note on extensions of Baer and P.P.-rings, *J. Austral. Math. Soc.,* 1974, Vol.18, 470-473.

[4] Camillo V., Nielson P., McCoy rings and zero divisors, *J. Pure Appl. Algebra*, Vol.212, 2008, 599-615.

[5] Hirano Y., On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring, *J. Pure Appl. Algebra*, Vol.168, 2002, 45-52.

[6] Kang W., A class of maximal general Armendariz subrings of matrix rings, *Journal of Mathematical research & Exposition*, Vol.29, 2009, 185-190.

[7] Kim N. and Lee Y., Armendariz rings And reduced rings, *Journal of Algebra*, Vol. 223, 2000, 477-488.

[8] Liu Z. and Zhao R., On weak armendariz rings, *Communication in Algebra*, 2006, Vol. 34, 2607-2616.

[9] Musili C., Introduction to rings and modules, Narosa Publish House, 2nd, 2006.

[10] Rege M. and Chhawchharia, Armendariz rings, *Proc. Japan Acad.,* Vol. 73, 1997, 14-17.

[11] Singh S. and Prakash O., Almost Armendariz rings, appear on arXiv:1502.01508, 2015.

[12] Weixing C., On linear weak Armendariz rings, , *J. Pure Appl. Algebra*, Vol.219, 2015, 1122-1130.

[13] Zhao L., Generalized weak Armendariz rings and their extensions, *Advances in Mathematics*, Vol.44, 2015, 175-186.

[14] Ghalandarzadeh S. and et al., On Armendariz ideals, *Bull. Korean Math. Soc*., Vol. 47, 2010, 883-888.

[15] Huh C. and et al., On π-Armendariz rings, *Bull. Korean Math. Soc*., Vol. 44, 2007, 641-649.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017)
Department of Mathematics, Faculty of Science
Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand

Linear ⋆-Armendariz ideals

Thawatchai Khumprapussorn

Department of Mathematics, Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

Abstract

We introduce the notion of linear ⋆-Armendariz ideals and ⋆-Armendariz ideals which are extension of Armendariz rings. Some properties and examples of this extension are given. We prove that an ideal I is a linear ⋆-Armendariz ideal of R if and only if R/I is a linear Armendariz ring. We also investigate a relation between completely semiprime ideals and linear ⋆-Armendariz ideals.

Keywords: Armendariz rings, linear Armendariz rings, Armendariz ideals, ⋆-Armendariz ideals, linear ⋆-Armendariz ideals.

2010 MSC: 16D25.

1 Introduction

Throughout this note all rings are associative with identity. The symbol $\mathbb{Z}$ denotes the ring of integers. Let R be a ring. The polynomial ring with an indeterminate x over R is denoted by $R[x]$. Let n be a natural number. We use the symbol $M_n(R)$ to denote the ring consisting of all $n \times n$ matrices over R and for a subset A of R, let

$$U_n^*(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{ij} \in A \right\}.$$

A ring is called *reduced* if it has no nonzero nilpotent elements. The notion of Armendariz rings was given by M.B Rege and S. Chhawchharia [6]. A ring R is called *Armendariz* if whenever two polynomials $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ and $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ such that $f(x)g(x) = 0$ then $a_i b_j = 0$ for each i and j. Reduced rings are Armendariz by [1]. Later, Armendariz rings were generalized to linear Armendariz rings. A ring R is called *linear Armendariz* if whenever the product of two linear polynomials in $R[x]$ is zero, each product of their coefficients is zero. T.K Lee and T.L. Wong gave the example in [5] that a linear Armendariz ring does not need to be Armendariz. The concept of Armendariz left ideals was initiated by Sh. Ghalandarzadeh et al. in [3]. The right annihilator of a subset A of a ring R is denoted by $r_R(A)$. A left ideal I of a ring

This research was financially supported by Faculty of Science, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

E-mail address: thawatchai.kh@kmitl.ac.th (T. Khumprapussorn).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

R is called *Armendariz* if whenever polynomial $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ and $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \in R[x]$ satisfy $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x])$ we have $a_i b_j \in r_R(I)$ for all i, j.

Motivated by results in M.B. Rege and S. Chhawchharia [6], Sh. Ghalandarzadeh et al. [3], V. Camillo and P. Nielsen [2] and N.K. Kim and Y. Lee [4], we introduce an extension of Armendariz rings which we call linear $\star$-Armendariz ideals.

2 $\star$-Armendariz Ideals

In this section we define and study $\star$-Armendariz ideals which are the first our extension of linear Armendariz rings. For each subsets A and B of R, we let $r_R(A : B) = \{x \in R \mid xB \subseteq A\}$.

Definition 2.1. Let R be a ring. An ideal I of R is called a *$\star$-Armendariz ideal of R* if whenever polynomials $f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_m x^m$, $g(x) = g_0 + g_1 x + \cdots + g_m x^m \in R[x]$ satisfy $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$, then $f_i g_j \in r_R(I : R)$ for each i and j.

Clearly, R is an Armendariz ring if and only if $\{0\}$ is a $\star$-Armendariz ideal of R.

Proposition 2.2. *Let I be a $\star$-Armendariz ideal of a ring R and $f(x), g(x) \in R[x]$. If $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$, then $ag(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$ for all coefficients a of f.*

Proof. Assume that $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$ and a is an any coefficient of a polynomial f. We will show that $ag(x)R[x] \subseteq I[x]$. Let $h(x) = h_0 + h_1 x + \cdots + h_n x^n \in R[x]$ and denote $g(x) = g_0 + g_1 x + \cdots + g_n x^n$. Since I is a $\star$-Armendariz ideal of R, we have $ag_i \in r_R(I : R)$ for each coefficient g_i of g. We see that $ag(x)h(x) = ag_0h_0 + (ag_0h_1 + ag_1h_0)x + (ag_0h_2 + ag_1h_1 + ag_2h_0)x^2 + \cdots$. Since $ag_iR \subseteq I$ for all coefficient g_i of g and $(I, +)$ is a subgroup, $ag(x)h(x) \in I[x]$. That is $ag(x)R[x] \subseteq I[x]$. □

Proposition 2.3. *Let R be a ring and I be a $\star$-Armendariz ideal of R. If $f_1, f_2, \ldots, f_n \in R[x]$ satisfy $f_1 f_2 \cdots f_n \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$, then $a_1 a_2 \cdots a_n \in r_R(I : R)$ where a_i is a coefficient of f_i.*

Proof. Let $P(n)$ be the statment "If $f_1, f_2, \ldots, f_n \in R[x]$ satisfy $f_1 f_2 \cdots f_n \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$, then $a_1 a_2 \cdots a_n \in r_R(I : R)$ where a_i is a coefficient of f_i". We prove by induction on n. It immediately implies from definition that $P(2)$ holds. Let k be an integer such that $k > 2$. Assume that $P(k)$ holds. Let $f_1, f_2, \ldots, f_{k+1} \in R[x]$ be such that $f_1 f_2 \cdots f_k f_{k+1} \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$. By assumption, we have $a_1 a_2 \cdots a_{k-1} b \in r_R(I : R)$ where a_i is a coefficient of f_i and b is a coefficient of $f_k f_{k+1}$. Let $h(x) = h_0 + h_1 x + \cdots + h_m x^m \in R[x]$, $f_k f_{k+1} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m$ and $c = a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$ where a_i is a coefficient of f_i. Then $cf_k(x)f_{k+1}(x)h(x) = cb_0h_0 + (cb_0h_1 + cb_1h_0)x + (cb_0h_2 + cb_1h_1 + cb_2h_0)x^2 + \cdots \in I[x]$. This obtains that $a_1 a_2 \cdots a_{k-1} f_k f_{k+1} R[x] \subseteq I[x]$. That is $a_1 a_2 \cdots a_{k-1} f_k f_{k+1} \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$. Since I is a $\star$-Armendariz ideal of R, $a_1 a_2 \cdots a_n \in r_R(I : R)$ where a_i is a coefficient of f_i. The proof is complete. □

3 Linear $\star$-Armendariz Ideals

We start this section by the definition of linear $\star$-Armendariz ideals and also give several examples of linear $\star$-Armendariz ideals.

Definition 3.1. Let R be a ring. An ideal I of R is called a *linear $\star$-Armendariz ideal of R* if whenever polynomials $f(x) = f_0 + f_1 x$, $g(x) = g_0 + g_1 x \in R[x]$ satisfy $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$, then $f_0 g_0, f_1 g_0, f_0 g_1, f_1 g_1 \in r_R(I : R)$.

In fact, a ring R is a linear Armendariz ring if and only if $\{0\}$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of R. Every $\star$-Armendariz ideal is linear $\star$-Armendariz ideal. Lee and Wong in [5] provide an example of a linear Armendariz ring which is not Armendariz. This means there is a linear $\star$-Armendariz ideal which is not $\star$-Armendariz ideal.

Example 3.2. $2\mathbb{Z}$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $\mathbb{Z}$.

เอกสารนี้สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Proposition 3.3. *Let I be an ideal of R and n be a natural number. We have the following facts.*

(i) *If $U_n^*(I)$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_n^*(R)$, then I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R.*

(ii) *If $M_n(I)$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $M_n(R)$, then I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R.*

Proof. (i) Assume that $U_n^*(I)$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_n^*(R)$. Let $f(x) = f_0 + f_1x$ and $g(x) = g_0 + g_1x$ be elements in $R[x]$ such that $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$. We let

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_1 \end{pmatrix} x$$

and

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_1 \end{pmatrix} x.$$

Then $F(x)G(x) = \begin{pmatrix} f_0g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_0g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_0g_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0g_1 + f_1g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_0g_1 + f_1g_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_0g_1 + f_1g_0 \end{pmatrix} x$

$$+ \begin{pmatrix} f_1g_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_1g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_1g_1 \end{pmatrix} x^2.$$

Therefore $F(x)G(x) \in r_{U_n^*(R)[x]}(U_n^*(I)[x] : U_n^*(R)[x])$. Since $U_n^*(I)$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_n^*(R)$, we have

$$\begin{pmatrix} f_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_j \end{pmatrix} \in U_n^*(I) \text{ for all } i, j \in \{0, 1\}.$$

This implies that $f_ig_j \in I$ for all $i, j \in \{0, 1\}$. Therefore I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R.

The proof of (ii) is similar to (i). □

The following examples show that the converse of Proposition 3.3 is not true.

Example 3.4. Let $f(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$ and $g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$. This example obtains that $f(x)g(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x \in M_2(2\mathbb{Z})[x]$ and $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin M_2(2\mathbb{Z})$. This means $M_2(2\mathbb{Z})$ is not a linear $\star$-Armendariz ideal of $M_2(\mathbb{Z})$.

Example 3.5. Let

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Then $f(x)g(x) = 0 \in U_4^*(2\mathbb{Z})[x]$ and,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \notin U_4^*(2\mathbb{Z}).$$

Therefore $U_4^*(2\mathbb{Z})$ is not a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_4^*(\mathbb{Z})$.

Remind here that R is a ring with identity and we denote $\bar{a} = a + I$ when $a \in R$.

Theorem 3.6. *Let I be an ideal of R. An ideal I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R if and only if R/I is a linear Armendariz ring.*

Proof. First, assume that I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R. Let $f(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x$ and $g(x) = \bar{b}_0 + \bar{b}_1 x$ be elements of $(R/I)[x]$ such that $f(x)g(x) = I$. Then $(a_0b_0 + I) + (a_0b_1 + a_1b_0 + I)x + (a_1b_1 + I)x^2 = I$. This means a_0b_0, $a_0b_1 + a_1b_0$ and a_1b_1 are elements of I. It implies that $(a_0 + a_1x)(b_0 + b_1x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$. Since I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R, we have $a_ib_j \in r_R(I : R)$ for all i and j. Therefore $\bar{a}_i\bar{b}_j = I$ for all i and j. Hence R/I is a linear Armendariz ring. Next, assume that R/I is a linear Armendariz ring. Let $f(x) = a_0 + a_1x$ and $g(x) = b_0 + b_1x$ be elements of $R[x]$ such that $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$. Then $f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + a_1b_1x^2 \in I[x]$. This follows that $a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_1b_1 \in I$. Thus $(a_0b_0)+I = I, (a_0b_1+a_1b_0)+I = I$ and $a_1b_1+I = I$. We have that $(\bar{a}_0+\bar{a}_1x)(\bar{b}_0+\bar{b}_1x) = \bar{0}$. Since R/I is a linear Armendariz ring, $\bar{a}_i\bar{b}_j = \bar{0}$ for all i and j. This shows that $a_ib_j \in I$ for all i and j. Therefore $a_ib_j \in r_R(I : R)$ for all i and j. Hence I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R. □

A two sided ideal I of R is completely semiprime if $a^2 \in I$ implies $a \in I$ for $a \in R$. Note that if I is a completely semiprime ideal of R and $ab \in I$, then $ba \in I$. The study of relationships between completely semiprimes and linear $\star$-Armendariz ideals begins.

Proposition 3.7. *If I is a completely semiprime ideal of a ring R, then I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R.*

Proof. Assume that I is a completely semiprime ideal of a ring R. Let $f(x) = f_0 + f_1x, g(x) = g_0 + g_1x \in R[x]$ such that $f(x)g(x) \in r_{R[x]}(I[x] : R[x])$. Since R is a ring with an identity, we have $f(x)g(x) \in I[x]$. Thus $f_0g_0, f_1g_0 + f_0g_1$ and f_1g_1 are elements of I. Since I is a completely semiprime ideal of a ring R, we have g_0f_0 and $f_1g_0f_0 + f_0g_1f_0$ are elements of I. Therefore $f_0g_1f_0 \in I$. So $f_0g_1 \in I$ and hence $f_1g_0 \in I$. This shows that I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R. □

The following examples obtain that the converse of Proposition 3.7 does not hold.

Example 3.8. Let $U_2^*(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, a_{12} \in \mathbb{Z} \right\}$. We will show that $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_2^*(\mathbb{Z})$. Assume that $A = \begin{pmatrix} a & a_{12} \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & b_{12} \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c & c_{12} \\ 0 & c \end{pmatrix}$ and $D = \begin{pmatrix} d & d_{12} \\ 0 & d \end{pmatrix}$ are elements of $U_2^*(\mathbb{Z})$. Let $F(x) = A+Bx$ and $G(x) = C+Dx$ be such that $F(x)G(x)U_2^*(\mathbb{Z})[x] \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. It is enough to show that $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and $BC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Since $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_2^*(\mathbb{Z})$, we have $F(x)G(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Then $AC + (AD + BC)x + BDx^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. This implies the following facts :

$$ac = 0,$$

$$ac_{12} + a_{12}c = 0,$$

$$bd = 0,$$

$$bd_{12} + b_{12}d = 0,$$

$$ad + bc = 0,$$

$$ad_{12} + a_{12}d + bc_{12} + b_{12}c = 0.$$

Note that $AD = \begin{pmatrix} ad & ad_{12} + a_{12}d \\ 0 & ad \end{pmatrix}$ and $BC = \begin{pmatrix} bc & bc_{12} + b_{12}c \\ 0 & bc \end{pmatrix}$. Since $ac = 0$ and $bd = 0$, we have 4 cases.

Case 1 $a = 0$ and $b = 0$.

Then $a_{12}c = 0$, $b_{12}d = 0$ and $a_{12}d + b_{12}c = 0$ so that $AD = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $BC = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. We have 4 subcases because $a_{12}c = 0$ and $b_{12}d = 0$.

Subcase 1.1 $a_{12} = 0 = b_{12}$. This case is easy to see that $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$.

Subcase 1.2 $a_{12} = 0 = d$. This implies that $b_{12}c = 0$. Hence $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$.

Subcase 1.3 $c = 0 = b_{12}$. This implies that $a_{12}d = 0$. Hence $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$.

Subcase 1.4 $c = 0 = d$. This is clear that $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$.

Case 2 If $a = 0$ and $d = 0$, then $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$.

Case 3 If $c = 0$ and $b = 0$, then $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$.

Case 4 $c = 0$ and $d = 0$.

This case is similar to case 1. Hence $AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = BC$.

Now, we can conclude that $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_2^*(\mathbb{Z})$. However, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Therefore $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ is not a completely semiprime ideal of $U_2^*(\mathbb{Z})$.

Example 3.9. Let R be a reduced ring and $U_3^*(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a & a_{23} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, a_{12}, a_{13}, a_{23} \in R \right\}$. Nam Kyun Kim and Yang Lee show in [4] that $U_3^*(R)$ is Armendariz ring ans so is linear Armendariz ring. Then $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_3^*(R)$. However $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ is not a completely semiprime ideal of $U_3^*(R)$.

Example 3.10. We see that $2^2 \in 4\mathbb{Z}$ and $2 \notin 4\mathbb{Z}$. Hence $4\mathbb{Z}$ is not a completely semiprime ideal of $4\mathbb{Z}$. Next we will show that $4\mathbb{Z}$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $\mathbb{Z}$. Let $(a_0 + a_1x)(b_0 +$

ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$b_1x)\mathbb{Z}[x] \subseteq 4\mathbb{Z}[x]$. Then $a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_1b_1 \in 4\mathbb{Z}$. We divide into two cases that is $4 \mid a_0$ or $4 \nmid a_0$.

Case 1 $4 \mid a_0$.

Since $4 \mid a_0b_1 + a_1b_0$, we have $4 \mid a_1b_0$. Hence $a_0b_1, a_1b_0 \in 4\mathbb{Z}$.

Case 2 $4 \nmid a_0$.

Since $4 \mid a_0b_0$, we have two subcase that is ($2 \nmid a_0$ and $4 \mid b_0$) or ($2 \mid a_0$ and $2 \mid b_0$).

Subcase 2.2 $2 \nmid a_0$ and $4 \mid b_0$.

Since $4 \mid a_0b_1 + a_1b_0$, we have $4 \mid a_0b_1$. Hence $a_0b_1, a_1b_0 \in 4\mathbb{Z}$.

Subcase 2.3 $2 \mid a_0$ and $2 \mid b_0$.

Since $4 \mid a_1b_1$, we have two subcase that is $4 \mid a_1$ or $4 \nmid a_1$.

If $4 \mid a_1$, then $a_0b_1, a_1b_0 \in 4\mathbb{Z}$. Assume that $4 \nmid a_1$. Then ($2 \mid a_1$ and $2 \mid b_1$) or $4 \mid b_1$. Therefore $a_0b_1, a_1b_0 \in 4\mathbb{Z}$.

This is the proof of $4\mathbb{Z}$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $\mathbb{Z}$ but $4\mathbb{Z}$ is not a completely semiprime ideal of $4\mathbb{Z}$.

Let R and S be rings. The Cartesian product $R \times S$ is a ring under componentwise addition and multiplication. We have the following property.

Proposition 3.11. *Let R and S be rings. Then*

(i) *If I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R, then $I \times S$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $R \times S$.*

(ii) *If J is a linear $\star$-Armendariz ideal of S, then $R \times J$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $R \times S$.*

(iii) *If I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R and J is a linear $\star$-Armendariz ideal of S, then $I \times J$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $R \times S$.*

Proof. It is straightforward. □

Let R be a ring. The Cartesian product $R \times R$ is a ring under componentwise addition and the multiplication $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$. We use the notation $R(+)R$ for this ring.

Proposition 3.12. *If I is a linear $\star$-Armendariz ideal of a ring R, then $I \times R$ is a linear $\star$-Armendariz ideal of $R(+)R$.*

Proof. It is straightforward. □

We seem to have forgotten some results in Proposition 3.12 the case $R \times J$ and $I \times J$ where I and J are ideals of R. Indeed, $R \times J$ may be not a ideal of $R(+)R$. Moreover, the following example confirm that we have not left behind anything. We provide an example showing that $I \times J$ may be not a linear $\star$-Armendariz ideal of $R(+)R$ even if I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R and J is a linear $\star$-Armendariz ideal of S.

Example 3.13. In $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$, let $f(x) = (2, 1) + (4, 1)x$ and $g(x) = (2, 1) + (0, 1)x$. Then $f(x)g(x) = (4, 4) + (8, 8)x + (0, 4)x^2 \in (4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z})[x]$ but $(2, 1) * (0, 1) = (0, 2) \notin 4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$. This means $4\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$ is not a linear $\star$-Armendariz ideal of $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$.

Remark 3.14. Let R be a ring. The ring $R(+)R$ is isomorphic to the ring $U_2^*(R)$ under usual matrix operations. In the example 3.13 obtains that for a linear $\star$-Armendariz ideal I of R, the ideal $U_2^*(I)$ need not be a linear $\star$-Armendariz ideal of $U_2^*(R)$.

Remark 3.15. Let R be a ring and M be an (R, R)-bimodule. The trivial extension of R by M is the ring $T(R, M) = R \oplus M$ with the usual addition and the multiplication $(r_1, m_1) * (r_2, m_2) = (r_1r_2, r_1m_2 + m_1r_2)$. This ring is isomorphic to the ring of all matrices $\left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \right\}$ where $r \in R$ and $m \in M$ by the usual matrix operations. Again, the example 3.13 obtains that $T(I, I)$ need not be a linear $\star$-Armendariz ideal of $T(R, R)$ as I is a linear $\star$-Armendariz ideal of R.

Acknowledgment. The author is grateful to the referees for their careful reading of the manuscript and their useful comments.

เอกสารนี้จัดทำขึ้นเพื่อการใช้งานภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

References

[1] E.P. Armendariz, *A note on extensions of Baer and p.p. rings*, Journal of the Australian Mathematical Society **100** (1974), 470–473.

[2] V. Camillo and P.P. Nielsen, *McCoy rings and zero-divisors*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), 599-615.

[3] SH. Ghalandarzadeh, H. Javadi, M. Khoramdel and M. Shamsaddini, *On Armendariz ideals*, Bull. Korean Math. Soc. **47** (2010), 883–888.

[4] N.K. Kim and Y. Lee, *Armendariz Rings and Reduced Rings*, Journal of Algebra **223** (2000), 477-488.

[5] T.K. Lee and T.L. Wong, *On Armendariz rings*, Houston J. Math. **29** (2003), 583–593.

[6] M.B. Rege and S. Chhawchharia, *Armendariz Rings*, Proc. Japan Acad. **73** (1997), 14–17.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

View publication stats

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
239 ถนนห้วยแก้ว ต.สุเทพ
อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200

3 พฤษภาคม 2560

เรื่อง ผลการพิจารณาบทความวิจัยฉบับสมบูรณ์เพื่อนำเสนอและตีพิมพ์เผยแพร่ในงานประชุมวิชาการคณิตศาสตร์ ประจำปี 2560

เรียน Dr. ธวัชชัย คำประภัสสร

ตามที่ท่านได้ส่งบทความวิจัยฉบับสมบูรณ์ เรื่อง Linear * - Armendariz Ideals เพื่อนำเสนอและตีพิมพ์เผยแพร่ในงานประชุมวิชาการคณิตศาสตร์ประจำปี 2560 ครั้งที่ 22 (The 22nd Annual Meeting in Mathematics: AMM2017) ระหว่างวันที่ 2-4 มิถุนายน 2560 ณ โรงแรมโลตัส ปางสวนแก้ว จังหวัดเชียงใหม่ โดยภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ ร่วมกับสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

บัดนี้ทางฝ่ายวิชาการ AMM2017 ได้พิจารณาว่าบทความของท่าน**เหมาะสม**ที่จะนำเสนอในงานประชุมวิชาการฯ และ ตีพิมพ์เผยแพร่ใน Proceedings of Annual Meeting in Mathematics 2017 ภายหลังจากการประชุมวิชาการเสร็จสิ้น ท่านสามารถดาวน์โหลดบทความวิจัยฉบับสมบูรณ์ของท่านได้ทางเว็บไซต์

http://amm2017.math.science.cmu.ac.th/

จึงเรียนมาเพื่อทราบและดำเนินการต่อไป ขอขอบพระคุณที่ท่านให้ความสนใจส่งบทความเข้าร่วมในการประชุมวิชาการ และหวังว่าจะได้รับความร่วมมือจากท่านอีกในโอกาสต่อไป

ขอแสดงความนับถือ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนะศักดิ์ หมวกทองหลาง)
ประธานฝ่ายวิชาการฯ งานประชุมวิชาการคณิตศาสตร์ประจำปี 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Article Evaluation Result
The 22nd Annual Meeting in Mathematics (AMM 2017)
Lotus Pangsuankaew hotel, Chiang Mai
2nd-4th June 2017

1. Submission ID F01_344 **Submission Type** **P02***

2. Submission Title Linear * - Armendariz Ideals

3. Submission result

3.1 ☐ Accepted for presentation

3.2 ☑ Accepted for presentation and proceedings with ☐ No correction
☑ Minor correction

3.3 ☐ Accepted for presentation with **major** correction
(Publication in proceedings will be determined after major correction)

3.4 ☐ Rejected

For 3.1, 3.2, 3.3: Submit your abstract file to the system by **Monday 8th May 2017** to confirm your presentation in AMM2017.

For 3.2: Submit your final version files to the system by **Monday 22nd May 2017.**

For 3.3: Submit your revised version files to the system by **Monday 15th May 2017.**

4. Comments

ดูไฟล์แนบ

Academic committee AMM2017

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

*For submission type P03/04 – The publication result on Thai journal of Mathematics will be determined after the conference.

ข้อเสนอแนะสำหรับการปรับปรุงบทความวิจัย

1. สัญลักษณ์ $\star-$ ควรเปลี่ยนเป็น $\star$-
2. บทคัดย่อ relation ควรเป็น relations หรือ a relation (อย่าใดอย่างหนึ่ง)
3. การให้นิยามศัพท์ใหม่ใน Section 1 เป็นตัวเอียง แต่ใน Section ถัดไปเป็นตัวหนา ควรใช้แบบเดียวกันทั้งหมด
4. ถัดจาก Definition 2.1 ควรให้ตัวอย่างของ *-Armendariz ideal ซึ่งไม่เป็น Armendariz ideal
5. ถัดจาก Definition 3.1 ควรให้ตัวอย่างของ linear *-Armendariz ideal ซึ่งไม่เป็น linear Armendariz ideal
6. ถัดจาก Definition 3.1 ควรให้ตัวอย่างของ linear *-Armendariz ideal ซึ่งไม่เป็น *-Armendariz ideal
7. เนื่องจากมีผู้แต่งเพียงท่านเดียว ใน Acknowledgements ควรใช้ author แทน authors

ประวัติผู้เขียน

1) ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายธวัชชัย คำประภัสสร
   ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Thawatchai khumprapussorn
2) ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
3) หน่วยงานและสถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์
   หน่วยงาน สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520
   ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
   E-mail khthawat@kmitl.ac.th และ khthawat@hotmail.com
   โทร 0898191886
4) ประวัติการศึกษา
   วท.ด (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555
   วท.ม (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550
   วท.บ (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2547
5) ประสบการณ์งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ/หรือที่ผ่านมา
   กองทุนวิจัยสถาบัน ประเภททุนพัฒนานักวิจัยใหม่
   เรื่องการวางนัยทั่วไปของ (R,S)-มอดูลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี 2557
   เรื่องเมทริกซ์ในฐานะที่เป็นกึ่งกรุปแกมมา
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี 2558
   เรื่องสมบัติบางประการของ $(1,k)$-ไอดีลเฉพาะ
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี 2560
   เรื่องการวางนัยทั่วไปของวงอาร์เมนดาริซ
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้