รายงานการวิจัยฉบับสมบูรณ์

มอดูลย่อยเฉพาะบนการบวก
PRIME SUBMODULES ON ADDITION

นายธวัชชัย คำประภัสสร

ได้รับทุนสนับสนุนงานวิจัยจากงบประมาณเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ 2561
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ชื่อโครงการ	มอดูลย่อยเฉพาะบนการบวก
แหล่งเงิน	ทุนส่งเสริมนักวิจัย เงินรายได้
ประจำปีงบประมาณ	2561 จำนวนเงินที่ได้รับการสนับสนุน 45,000 บาท
ระยะเวลาทำการวิจัย	1 ปี ตั้งแต่ 1 ตุลาคม 2560 ถึง 30 กันยายน 2561
หัวหน้าโครงการ	นายธวัชชัย คำประภัสสร ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

บทคัดย่อ

เราแนะนำแนวคิดของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะและแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนในฐานะที่เป็นการวางนัยทั่วไปของมอดูลย่อยเฉพาะ บางผลลัพธ์ของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะและแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนพัฒนาขึ้นมาจากมอดูลย่อยเฉพาะ ในตอนท้าย หลังจากที่เรานำเสนอแนวคิดของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ เรายังให้บทนิยามและศึกษาพื้นฐานของแอลฟาไอดีลเฉพาะในโครงสร้างริงอีกด้วย

คำสำคัญ : แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน แอลฟาไอดีลเฉพาะ แอลฟาไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Research Title: Prime submodules on addition

Researcher: Thawatchai Khumprapussorn

Faculty: Science

Department: Mathematics

ABSTRACT

We have introduced the notion of α −prime and weakly α −prime submodules as a generalization of prime submodules. Some basic properties of α −prime and weakly α −prime submodules are the extension of prime submodules. Finally, after introducing the notion of α −prime submodules, we also define and study the concept of α −prime ideals in a ring.

Keywords : α −prime submodules, weakly α −prime submodules, α −prime ideals, weakly α −prime ideals

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยเป็นหนึ่งในภารกิจหลักสำคัญของอาชีพอาจารย์มหาวิทยาลัย นักวิจัยทุกท่านจำเป็นต้องได้รับการสนับสนุนในทุกด้านจากต้นสังกัด ซึ่งนับเป็นเรื่องที่น่ายินดีอย่างยิ่งที่งานวิจัยชิ้นนี้ได้รับการสนับสนุนอย่างเต็มที่จากคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ผู้วิจัยขอขอบคุณโอกาสและการสนับสนุนที่ดีพร้อมในครั้งนี้จากคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

การวิจัยครั้งนี้ได้รับทุนสนับสนุนการวิจัยจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง จากทุนส่งเสริมนักวิจัยเงินรายได้คณะวิทยาศาสตร์ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2561

ธวัชชัย คำประภัสสร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

เนื้อหา....**หน้า**
บทคัดย่อภาษาไทย I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ....II
กิตติกรรมประกาศ....III
สารบัญ IV

บทที่ 1 บทนำ 1

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.... 1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย.... 4
1.3 ขอบเขตของการวิจัย.... 4
1.4 วิธีดำเนินการวิจัยและแผนการดำเนินงานวิจัย 4

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง.... 6

2.1 พื้นฐาน.... 6
2.2 มอดูลย่อยเฉพาะบนริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์.... 11
2.3 มอดูลย่อยเฉพาะบนริงทั่วไป 12
2.4 มอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน 13

บทที่ 3 แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ.... 16

3.1 พื้นฐานความรู้.... 16
3.2 แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ.... 17
3.3 แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน.... 19
3.4 การศึกษาแอลฟาไอดีลเฉพาะบนริง.... 23

บทที่ 4 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย.... 24

เอกสารอ้างอิง.... 25

ภาคผนวก 26

ประวัติผู้เขียน 36

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1 บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ให้ P เป็นไอดีลของริง R โดยที่ $P \neq R$ ตารางต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงบทนิยามของไอดีลเฉพาะต่างๆ ที่ศึกษาโดยนักคณิตศาสตร์

ไอดีลเฉพาะ[*] โดย EMMY NOETHER	ถ้า $a, b \in R$ โดยที่ $ab \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$
ไอดีลเฉพาะ[#] โดย WOLFGANG KRULL	ถ้า A และ B เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$
$2-$ ไอดีลเฉพาะ[@] โดย CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI	ถ้า $a, b \in R$ โดยที่ $ab \in P$ แล้ว $a^2 \in P$ หรือ $b^2 \in P$
$(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ[#] โดย KHUMPRAPUSSORN	ถ้า A และ B เป็นไอดีลทางซ้ายของ R ซึ่ง $ARB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$
เงื่อนไข 1[#] จากสมบัติ 12.12	ถ้า $a, b \in R$ โดยที่ $ab^k \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P^{\frac{1}{k}}$
เงื่อนไข 2[#] จากสมบัติ 12.12	ถ้า A และ B เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $AB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$

[*] ศึกษาบนริงสลับที่

[#] ศึกษาบนริงทั่วไป

[@] ศึกษาบนริงสลับที่และมีเอกลักษณ์

สิ่งที่เราสังเกตได้จากตารางข้างต้นนี้ก็คือ วิธีการที่นักคณิตศาสตร์ใช้เพื่อให้นิยามของไอดีลเฉพาะจะมุ่งเน้นไปที่การคูณระหว่างสมาชิกของริง หรือ การคูณระหว่างไอดีลของริง เป็นสำคัญ แต่ภายในโครงสร้างของริงนั้น เราทราบกันดีอยู่แล้วว่าโครงสร้างริงประกอบไปด้วย 1 เซต และ 2 ตัวดำเนินการทวิภาค ที่เรานิยมเรียกว่า การบวกและการคูณ ข้อสังเกตที่กล่าวมานำมาซึ่งแรงบันดาลใจในการทำวิจัยชิ้นนี้ ภายใต้หลักการและเหตุผลของโครงการวิจัย ดังนี้

บทนิยาม 1.1 ให้ P เป็นไอดีลของริง R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่า **additional completely prime** ก็ต่อเมื่อสำหรับทุกสมาชิก a และ b ของ R ถ้า $ab \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b + b \in P$

เห็นได้ชัดว่า ไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์เป็น additional completely prime

ตัวอย่าง 1.2 พิจารณา $4Z = \{4k \mid k$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$ ซึ่งเราทราบดีอยู่แล้วว่า $4Z$ ไม่เป็นไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ ต่อไปเราสมมติให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $4 \mid ab$ และ $4 \nmid a$ ดังนั้น $(2 \mid a$ หรือ $2 \mid b)$ และ $4 \nmid a$ ทำให้เราได้ว่า $(2 \mid a$ และ $4 \nmid a)$ หรือ $(2 \mid b$ และ $4 \nmid a)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติว่า $2 \mid a$ และ $4 \nmid a$ เนื่องจาก $4 \mid ab$ และ $2 \mid a$ จึงมีจำนวนเต็ม k และ t ที่ทำให้ $ab = 4k$ และ $a = 2t$ จะได้ว่า $tb = 2k$ เนื่องจาก $4 \nmid a$ จึงทำให้ $2 \mid b$ นั่นคือ $4 \mid b + b$

ถ้า $2 \mid b$ และ $4 \nmid a$แล้ว $2 \mid b$ จึงทำให้ $4 \mid b + b$

ดังนั้น $4Z$ เป็น additional completely prime

ตัวอย่าง 1.2 ทำให้เราได้ตัวอย่างของ additional completely prime ที่ไม่เป็นไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ นั่นคือ additional completely prime เป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์

ตัวอย่าง 1.3 พิจารณา $6Z = \{6k \mid k$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$ จะเห็นว่า $6 \mid 3 \cdot 2$ แต่ว่า $6 \nmid 3$ และ $6 \nmid 4$ ดังนั้น $6Z$ ไม่เป็น additional completely prime

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถขยายแนวทางงานวิจัยจากโครงสร้างริงไปเป็นมอดูล โดยใช้แนวคิดเดียวกันกับ additional completely prime ก่อนอื่นนั้น ขอให้พิจารณาบทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะต่างๆ เหล่านี้เสียก่อน

ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย กำหนดให้ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$

completely prime	ถ้า $r \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $rm \in P$ แล้ว $rM \subseteq P$ หรือ $m \in P$
prime	ถ้า A เป็นไอดีลของ R และ N เป็นมอดูลย่อยของ M ซึ่ง $AN \subseteq P$ แล้ว $AM \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$
s − prime	ถ้า A เป็นไอดีลของ R และ N เป็นมอดูลย่อยของ M และถ้า $x \in A$ และ $x^n N \subseteq P$ โดยที่ n เป็นจำนวนนับ แล้ว $N \subseteq P$ หรือ $AM \subseteq P$
classical completely prime	ถ้า $a, b \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $abm \in P$ แล้ว $a\langle m\rangle \subseteq P$ หรือ $b\langle m\rangle \subseteq P$
classical prime	ถ้า N เป็นมอดูลย่อยของ M และ A, B เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $ABN \subseteq P$ แล้ว $AN \subseteq P$ หรือ $BN \subseteq P$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สังเกตได้ว่าบทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆนั้น เน้นไปที่การคูณกันระหว่างสมาชิกของริง และ สมาชิกของมอดูล ด้วยเหตุนี้ เราจึงได้แนวทางการทำวิจัยโดยการให้บทนิยามของ additional completely prime สำหรับมอดูลย่อย ดังนี้

บทนิยาม 1.4 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า additional completely prime ก็ต่อเมื่อ ถ้า $r \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $rm \in P$ แล้ว $rM \subseteq P$ หรือ $m + m \in P$

ให้ N เป็นมอดูลย่อยของ M เรากำหนดสัญลักษณ์ $2N = \{n + n \mid n \in N\}$

บทนิยาม 1.5 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า additional prime ก็ต่อเมื่อ ถ้า A เป็นไอดีลของ R และ N เป็นมอดูลย่อยของ M ซึ่ง $AN \subseteq P$ แล้ว $AM \subseteq P$ หรือ $2N \subseteq P$

ในเบื้องต้นของงานวิจัยนี้ เราสรุปความสัมพันธ์ของ additional completely prime และ additional prime ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.6 ให้ R เป็นริงสลับที่และ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย จะได้ว่า P เป็น additional prime ก็ต่อเมื่อ P เป็น additional completely prime

แนวทางการทำวิจัยเกี่ยวกับ additional completely prime ในลำดับถัดไป เราจะใช้งานวิจัยจากเดิมที่นักคณิตศาสตร์ศึกษาไว้แล้วเกี่ยวกับไอดีลเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะ นำมาประยุกต์และพิสูจน์ใหม่อีกครั้งภายใต้แนวคิดของ additional completely prime

อย่างไรก็ตาม เราพบความไม่เหมาะสมของการให้บทนิยามของ additional completely prime ทั้งตัวบทนิยามและชื่อที่เราเรียกใช้ จึงสมควรเปลี่ยนให้สมเหตุสมผลกับผลลัพธ์โดยรวม ดังนี้

ให้ R เป็นริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ และ $(G, +)$ เป็นกรุป และ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย (unital)

สำหรับเซตย่อย H ของกรุป G เราใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้เพื่อความสะดวกในงานวิจัย

$$\alpha(H) = \{h \in G \mid h + h \in H\} \text{ และ } \beta(H) = \{h + h \mid h \in H\}$$

ในเบื้องต้น เราทราบว่า $\beta(H) \subseteq H \subseteq \alpha(H)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาสมบัติของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะทั้งในโครงสร้างริงและโครงสร้างมอดูล

1.3 ขอบเขตของของการวิจัย

1) ศึกษาแอลฟาไอดีลเฉพาะ
2) ศึกษาแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ
3) พิสูจน์ลักษณะเฉพาะของแอลฟาไอดีลเฉพาะ
4) พิสูจน์ลักษณะเฉพาะของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ
5) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างแอลฟาไอดีลเฉพาะและแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ

1.4 วิธีดำเนินการวิจัย และ แผนการดำเนินงานวิจัย

วิธีดำเนินการวิจัย

1) สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะทั้งในริงสลับที่ และริงทั่วไป
2) สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมอดูลย่อยเฉพาะทั้งในริงสลับที่ และริงทั่วไป
3) วิเคราะห์ลักษณะเฉพาะของแอลฟาไอดีลเฉพาะ
4) วิเคราะห์ลักษณะเฉพาะของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ
5) ศึกษาสมบัติของแอลฟาไอดีลเฉพาะ
6) ศึกษาสมบัติของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ
7) ศึกษาความสัมพันธ์ที่เชื่อมโยงกันของแอลฟาไอดีลเฉพาะและแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ
8) สรุปผลการวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แผนการดำเนินงานวิจัย

การดำเนินงาน	ระยะเวลา												หมายเหตุ
	ต.ค.	พ.ย.	ธ.ค.	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	
สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับไอดีลเฉพาะทั้งในริงสลับที่และริงทั่วไป	←	—	→										
สืบค้นงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับมอดูลย่อยเฉพาะทั้งในริงสลับที่ และริงทั่วไป	←	—	→										
วิเคราะห์ลักษณะเฉพาะของแอลฟาไอดีลเฉพาะ				←	—	→							
วิเคราะห์ลักษณะเฉพาะของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ				←	—	→							
ศึกษาสมบัติของแอลฟาไอดีลเฉพาะ							←	—	→				
ศึกษาสมบัติของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ							←	—	→				
ศึกษาความสัมพันธ์ที่เชื่อมโยงกันของแอลฟาไอดีลเฉพาะและแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ										←	—	→	
สรุปผลการวิจัย												↔	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ต้นกำเนิดของทฤษฎีไอดีล มีความเชื่อมโยงกับแนวคิดเชิงทฤษฎีของ “การหาร” นำไปสู่ผลลัพธ์ที่ยอมรับกันโดยทั่วไป นั่นคือ “รากฐานของจำนวนเฉพาะ” ย้อนกลับไปในปี ค.ศ. 1921 EMMY NOETHER[3] ได้ให้บทนิยามของไอดีลเฉพาะในริงสลับที่ไว้ดังนี้

2.1 พื้นฐาน

บทนิยาม 2.1.1 ให้ P เป็นไอดีลของริงสลับที่ R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่า**ไอดีลเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกสมาชิก a และ b ของ R ถ้า $ab \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$

หมายเหตุ ไอดีลเฉพาะตามบทนิยาม 2.1 บางครั้งเรียกว่า ไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ (completely prime ideal)

7 ปีต่อมา WOLFGANG KRULL[5] ได้ให้บทนิยามของไอดีลเฉพาะในริงทั่วไป ดังนี้

บทนิยาม 2.2 ให้ P เป็นไอดีลของริงสลับที่ R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่า**ไอดีลเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกไอดีล A และ B ของ R ถ้า $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$

หมายเหตุ เพื่อให้ไม่เกิดความสับสนในการกล่าวถึงไอดีลเฉพาะในส่วนถัดไป นับจากนี้ เราเรียกไอดีลตามเรื่องราวของ EMMY NOETHER ในบทนิยาม 2.1 ว่าไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ และเรียกไอดีลที่ศึกษาโดย WOLFGANG KRULL ในบทนิยาม 2.1.2 ว่าไอดีลเฉพาะ อย่างไรก็ตาม การเรียกชื่อดังกล่าว ไม่ได้เป็นการชี้นำว่าไอดีลเฉพาะสำคัญกว่าไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ แต่เพราะว่า ทุกไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์เป็นไอดีลเฉพาะ ซึ่งบทกลับไม่เป็นจริงบนริงทั่วไป เราแสดงให้เห็นข้อเท็จจริงนี้ ด้วยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.3 ให้ R เป็นเซตของเมทริกซ์จตุรัสขนาด n บนฟิลด์ F โดยที่ n เป็นจำนวนนับซึ่งมากกว่า 1 จะเห็นว่า R เป็นริงที่มีไอดีลเพียง $\{0\}$ และ R เท่านั้น ซึ่งทำให้เราเห็นได้ชัดว่า $\{0\}$ เป็นไอดีลเฉพาะ แต่ $\{0\}$ ไม่เป็นไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ การที่ $\{0\}$ ไม่เป็นไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์นั้น เนื่องจาก ถ้าเราให้ E_{1n} แทนเมทริกซ์ซึ่ง 1 อยู่ในตำแหน่ง $(1,n)$ และตำแหน่งอื่นเป็น 0 จากการกำหนดสัญลักษณ์ดังกล่าว ทำให้เราเห็นว่า $0 = E_{1n}^2 \in \{0\}$ และ $E_{1n} \notin \{0\}$

บทสรุปแรกที่เราได้จากการเปรียบเทียบทั้งสองบทนิยาม ก็คือ “ไอดีลเฉพาะเป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์” อย่างไรก็ตามทฤษฎีบทต่อไปนี้ยืนยันกับเราได้ว่าไอดีลเฉพาะและไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์กลับกลายเป็นสิ่งเดียวกันในริงสลับที่

ทฤษฎีบท 2.1.4 ให้ P เป็นไอดีลของริงสลับที่ R โดยที่ $P \neq R$ จะได้ว่า P เป็นไอดีลเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ P เป็นไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์

วันเวลาผ่านไปเกือบหนึ่งร้อยปีนับตั้งแต่ EMMY NOETHER เป็นต้นคิดเกี่ยวกับไอดีลเฉพาะ นักคณิตศาสตร์รุ่นต่อรุ่นยังคงศึกษาเพื่อพัฒนาผลลัพธ์จากที่ EMMY NOETHER ได้เริ่มต้นไว้ ไม่ว่าจะเป็นการขยายแนวคิดของไอดีลจากโครงสร้างริงไปสู่โครงสร้างมอดูล ซึ่งทำให้เกิดบทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์[2] บนโครงสร้างมอดูล

ในขณะเดียวกัน เราเห็นงานวิจัยออกมาให้เห็นอยู่มากมายที่เกี่ยวข้องกับการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะบนโครงสร้างริง หนึ่งในนั้นเป็นงานวิจัยที่ปรากฏในปี ค.ศ. 2015 เป็นการศึกษา $2-$ ไอดีลเฉพาะ[1] ซึ่งศึกษาโดย CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI ในปีเดียวกันนั้น THAWATCHAI KHUMPRAPUSSORN ก็ได้นำเสนอการวางนัยทั่วไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ของไอดีลเฉพาะบนริง ที่มีชื่อว่า $(1,k)$ –ไอดีลเฉพาะ[4] ทั้งสองบทนิยามมีความคล้ายคลึงกัน เราจะนำเสนอสิ่งที่เหมือนและสิ่งที่แตกต่าง ดังนี้

หมายเหตุ เนื่องจากการศึกษา $2-$ ไอดีลเฉพาะ โดย CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI ศึกษาบนริงสลับที่และมีเอกลักษณ์ ฉะนั้น ริง R ในบทนิยาม 2.5 และทุกผลลัพธ์ของ CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI อยู่ภายใต้ริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ ด้วยข้อกำหนดนี้ ร่วมกับความรู้ที่ได้จากทฤษฎีบท 2.4 ในมุมมองของ CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI จึงพิจารณาว่าไอดีลเฉพาะและไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์เป็นสิ่งเดียวกัน

บทนิยาม 2.1.5 ให้ P เป็นไอดีลของริง R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่า **$2-$ ไอดีลเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกสมาชิก a และ b ของ R ถ้า $ab \in P$ แล้ว $a^2 \in P$ หรือ $b^2 \in P$

เราเห็นได้ชัดว่าไอดีลเฉพาะเป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะ นอกจากนี้ CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI ยังได้แสดงสมบัติพื้นฐานของ $2-$ ไอดีลเฉพาะ ที่น่าสนใจไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.6 ให้ P เป็นไอดีลของริง R โดยที่ $P \neq R$ จะได้ว่า

1) ถ้า P เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ R แล้ว $\sqrt{P}$ เป็นไอดีลเฉพาะ
2) ถ้า S เป็น multiplicatively closed subset ของ R และ P เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ R แล้ว PR_S เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ R_S
3) ถ้า $f: T \to R$ เป็น ring homomorphisms และ P เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ R แล้ว $f^{-1}(P)$ เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ S
4) ถ้า P เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ R และ J, K เป็นไอดีลของ R โดยที่ $JK \subseteq P$ แล้ว $\{x^2 \mid x \in J\} \subseteq P$ หรือ $\{x^2 \mid x \in K\} \subseteq P$
5) ถ้า P เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ R และ Q เป็นไอดีลซึ่ง $Q \subseteq P$ แล้ว P/Q เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะของ R/Q

CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI อธิบายถึงความสัมพันธ์ระหว่าง valuation ring และ $2-$ ไอดีลเฉพาะ ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.7 ให้ R เป็นโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) R เป็น valuation ring
2) ทุก principal ideal ของ R เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะ
3) ทุกไอดีลของ R เป็น $2-$ ไอดีลเฉพาะ

ผลของทฤษฎีบท 2.7 เด่นชัดมากยิ่งขึ้น เมื่อ CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI ขยายงานวิจัยในทำนองเดียวกันนี้จากโดเมนเชิงจำนวนเต็ม ไปเป็นฟิลด์

ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ R เป็นริง ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) R เป็นฟิลด์
2) ทุก non unit principal ideal ของ R เป็นไอดีลเฉพาะ
3) ทุก non unit ideal ของ R เป็นไอดีลเฉพาะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI ปิดท้ายงานวิจัยของพวกเขาเองด้วยการพิสูจน์ผลลัพธ์ซึ่งเป็นการขยายงานวิจัยมาจาก R. GILMER และ W. HEINZER เกี่ยวข้องกับสมบัติของโดเมนซึ่งทุก primary ideal เป็น integrally closed $2-$ prime ideal (ผู้ที่สนใจศึกษาต่อได้ใน [1])

ประมาณเดือนธันวาคม ค.ศ. 2015 THAWATCHAI KHUMPRAPUSSORN ได้นำเสนอบทนิยามของ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ ซึ่งศึกษาบนริงทั่วไป ไม่จำเป็นต้องเป็นริงสลับที่และไม่จำเป็นที่ริงนั้นต้องมีเอกลักษณ์ โดยกำหนดสัญลักษณ์เพื่อความสะดวกในการทำความเข้าใจไว้ดังนี้

$$I^{\frac{1}{k}} = \{x \in R \mid x^k \in I\} \text{ เมื่อ } I \text{ เป็นไอดีลของริง } R$$

$$N_k = \{1,2,\dots,k\} \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นการแสดงให้เห็นถึงลักษณะเฉพาะของ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะบนริงทั่วไป ซึ่งเป็นที่มาของบทนิยามของ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ

ทฤษฎีบท 2.1.9 ให้ P เป็นไอดีลของริง R และ k เป็นจำนวนนับ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) ถ้า A เป็นไอดีลทางซ้ายของ R และ B เป็นไอดีลทางขวาของ R ซึ่ง $ARB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$
2) ถ้า A และ B เป็นไอดีลทางซ้ายของ R ซึ่ง $ARB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$
3) ถ้า A เป็นไอดีลทางขวาของ R และ B เป็นไอดีลทาซ้ายของ R ซึ่ง $ARB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$
4) ถ้า A และ B เป็นไอดีลทางขวาของ R ซึ่ง $ARB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$

บทนิยาม 2.1.10 ให้ P เป็นไอดีลของริง R และ k เป็นจำนวนนับ เราเรียก P ว่า **$(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ** ถ้า P สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่งในทฤษฎีบท 2.9

ตามบทนิยาม 2.10 ทำให้ทราบว่า ถ้า $k = 1$ แล้ว ไอดีลเฉพาะ และ $(1,1)-$ไอดีลเฉพาะเป็นสิ่งเดียวกัน ทั้งนี้ THAWATCHAI KHUMPRAPUSSORN ยังได้จำแนกลักษณะเฉพาะของ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของริงของจำนวนเต็ม ไว้อย่างละเอียดครบถ้วน ดังนี้

ตัวอย่าง 2.1.11 ให้ p และ k เป็นจำนวนนับ จะได้ว่า pZ เป็น $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะของ Z ก็ต่อเมื่อ $p = 0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p = q^r$ โดยที่ q เป็นจำนวนเฉพาะ และ $r \in N_k$

จากตัวอย่าง 2.11 ทำให้เราเห็นได้ชัดว่าความแตกต่างของ ไอดีลเฉพาะ และ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ จะเริ่มแสดงให้เห็นเมื่อ $k > 2$ อีกทั้งตัวอย่าง 12.11 ยังทำให้เราเห็นอีกว่า “มี $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ ที่ไม่เป็นไอดีลเฉพาะ” ดังนั้นบทสรุปที่ได้จากการเปรียบเทียบระหว่างไอดีลเฉพาะกับ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะ นั่นก็คือ $(1,k)-$ไอดีลเฉพาะเป็นการวางนัยทั่วไปของไอดีลเฉพาะ

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เป็นสิ่งที่ใช้เปรียบเทียบบทนิยามของไอดีลเฉพาะในต่างมุมมองทั้งของ EMMY NOETHER, WOLFGANG KRULL, CHAREF BEDDANI, WAHIBA MESSIRDI กับของ THAWATCHAI KHUMPRAPUSSORN

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติ 2.1.12 ให้ P เป็นไอดีลของริง R และ k เป็นจำนวนนับ พิจารณาเงื่อนไข 2 ข้อ ดังนี้

1) ถ้า $a, b \in R$ โดยที่ $ab^k \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P^{\frac{1}{k}}$
2) ถ้า A และ B เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $AB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$

จะได้ว่า ถ้าเงื่อนไขข้อ 1 เป็นจริง แล้ว เงื่อนไขข้อ 2 เป็นจริง ยิ่งไปกว่านั้น เงื่อนไขข้อ 1 สมมูลกับ เงื่อนไขข้อ 2 บนริงสลับที่

ให้ P เป็นไอดีลของริง R โดยที่ $P \neq R$

ไอดีลเฉพาะ[*] โดย EMMY NOETHER	ถ้า $a, b \in R$ โดยที่ $ab \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$
ไอดีลเฉพาะ[#] โดย WOLFGANG KRULL	ถ้า A และ B เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $AB \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P$
$2-$ ไอดีลเฉพาะ[@] โดย CHAREF BEDDANI และ WAHIBA MESSIRDI	ถ้า $a, b \in R$ โดยที่ $ab \in P$ แล้ว $a^2 \in P$ หรือ $b^2 \in P$
$(1, k)-$ไอดีลเฉพาะ[#] โดย KHUMPRAPUSSORN	ถ้า A และ B เป็นไอดีลทางซ้ายของ R ซึ่ง $ARB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$
เงื่อนไข 1[#] จากสมบัติ 12.12	ถ้า $a, b \in R$ โดยที่ $ab^k \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P^{\frac{1}{k}}$
เงื่อนไข 2[#] จากสมบัติ 12.12	ถ้า A และ B เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $AB^k \subseteq P$ แล้ว $A \subseteq P$ หรือ $B \subseteq P^{\frac{1}{k}}$

ตารางแสดงบทนิยามของไอดีลเฉพาะชนิดต่างๆ

[*] ศึกษาบนริงสลับที่

[#] ศึกษาบนริงทั่วไป

[@] ศึกษาบนริงสลับที่และมีเอกลักษณ์

แนวคิดของไอดีลเฉพาะได้นำไปศึกษาต่อในโครงสร้างอื่นๆ เช่น โครงสร้างมอดูล และโครงสร้าง $(R, S)-$มอดูล เป็นจุดกำเนิดของบทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะ

หมายเหตุ เนื้อหาการทบทวนวรรณกรรมเกี่ยวกับมอดูลย่อยเฉพาะทั้งหมดนำมาจาก [2]

บทนิยาม 2.1.13 ให้ R เป็นริงและ M เป็น $R-$มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **มอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $r \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $rm \in P$ แล้ว $rM \subseteq P$ หรือ $m \in P$

บทนิยาม 2.1.14 ให้ R เป็นริงและ M เป็น $R-$มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **มอดูลย่อยเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ ถ้า A เป็นไอดีลของ R และ N เป็นมอดูลย่อยของ M ซึ่ง $AN \subseteq P$ แล้ว $AM \subseteq P$ หรือ $N \subseteq P$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทั้ง 2 บทนิยามข้างต้นนี้สมมูลกัน เมื่อ R เป็นริงสลับที่ แต่ทว่าบนริงทั่วไป เราพิสูจน์ได้เพียง ถ้า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์ แล้ว P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะ

หากความเชื่อมโยงระหว่างโครงสร้างริงและมอดูลคือ ริง R สามารถพิจารณาได้ในฐานะ R เป็น R −มอดูลทางซ้าย ในทำนองเดียวกัน ไอดีลทางซ้ายกับมอดูลย่อยนับเป็นสิ่งเดียวกัน ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงให้เห็นความเชื่อมโยงอีกครั้งระหว่างมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์และไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์

ทฤษฎีบท 2.1.15 ถ้า $1 \in R$ และ P เป็นไอดีลของ R แล้ว P เป็นไอดีลเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ R ก็ต่อเมื่อ P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ R ในฐานะที่เป็น R −มอดูลทางซ้าย

ลำดับถัดไป เรานำเสนอบทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะชนิดอื่น จากมุมมองต่างๆ ของเหล่านักคณิตศาสตร์ เพื่อให้เห็นถึงความหลากหลายในการศึกษามอดูลย่อยเฉพาะ

บทนิยาม 2.1.16 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **s − prime** ก็ต่อเมื่อ ถ้า A เป็นไอดีลของ R และ N เป็นมอดูลย่อยของ M และถ้า $x \in A$ และ $x^n N \subseteq P$ โดยที่ n เป็นจำนวนนับ แล้ว $N \subseteq P$ หรือ $AM \subseteq P$

ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย สมมติว่า $m \in M$ เรากำหนดสัญลักษณ์ $\langle m \rangle$ เพื่อหมายถึงมอดูลย่อยของ M ที่ก่อกำเนิดโดย m และเราแสดงได้ไม่ยากนักว่า $\langle m \rangle = Zm + Rm$

บทนิยาม 2.1.17 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **classical completely prime** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a, b \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $abm \in P$ แล้ว $a\langle m \rangle \subseteq P$ หรือ $b\langle m \rangle \subseteq P$

บทนิยาม 2.1.18 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **classical prime** ก็ต่อเมื่อ ถ้า N เป็นมอดูลย่อยของ M และ A, B เป็นไอดีลของ R ซึ่ง $ABN \subseteq P$ แล้ว $AN \subseteq P$ หรือ $BN \subseteq P$

ณ ขณะนี้ เรามีถึง 5 บทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะในโครงสร้างของมอดูล และเพื่อให้เห็นความเชื่อมโยงกันของทั้ง 5 บทนิยาม นั้น นักคณิตศาสตร์ NICO J.GROENEWALD และ DAVID SSEVVIIRI ได้สรุปความสัมพันธ์ของทั้ง 5 บทนิยามไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.1.19 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย แสดงแผนภาพการแจงเหตุได้ดังนี้

completely prime $\Longrightarrow$ **classical completely prime** $\Longrightarrow$ **classical prime**

$\Downarrow$ $\Longrightarrow$ $\Uparrow$

s − prime **prime**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 มอดูลย่อยเฉพาะบนริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์

การศึกษามอดูลย่อยเฉพาะเป็นการขยายการศึกษาจากโครงสร้างริงไปบนโครงสร้างมอดูล และขยายการศึกษาจากไอดีลไปบนมอดูลย่อย

หมายเหตุ ผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องในหัวข้อ 2.2 นี้ ได้รับการพิจารณาบนริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ และบนมอดูลทางซ้าย (unital)

บทนิยาม 2.2.1 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **มอดูลย่อยเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $r \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $rm \in P$ แล้ว $m \in P$ หรือ $rM \subseteq P$

ลักษณะเฉพาะของมอดูลย่อยเฉพาะ ผ่านการศึกษามาอย่างหลากหลายมุมมอง อย่างไรก็ตามหนึ่งในผลลัพธ์ที่ได้รับการอ้างอิงอย่างสม่ำเสมอคือบทพิสูจน์ของ Z. El-Bast และ P. Smith ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความเกี่ยวข้องกันระหว่างไอดีลเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะ ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.2 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราให้ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ ข้อมูลต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M
2) $(P:M) = \{r \in R \mid rM \subseteq P\}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ R
3) $P = IM$ สำหรับบางไอดีลเฉพาะ I ของ R โดยที่ $ann(M) \subseteq I$

มอดูลชนิดหนึ่ง มีความพิเศษตรงที่มักจะถูกใช้เป็นเครื่องมือเพื่อศึกษาลักษณะเฉพาะของมอดูลย่อยเฉพาะ เรียกว่ามอดูลการคูณ มีบทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.2.3 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เรากล่าวว่า M เป็น **มอดูลการคูณ** ถ้า N เป็นมอดูลย่อยของ M แล้วจะมีไอดีล I ของ R ที่ทำให้ $N = IM$

ทฤษฎีบทต่อไป เป็นตัวอย่างในการหาไอดีล I ที่ทำให้ $N = IM$

ทฤษฎีบท 2.2.4 ถ้า M เป็นมอดูลการคูณ และ N เป็นมอดูลย่อยของ M แล้ว $N = (N:M)M$

ลักษณะเฉพาะของมอดูลการคูณ ได้รับการศึกษาโดย Z. El-Bast และ P. Smith ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย จะได้ว่า M เป็นมอดูลการคูณ ก็ต่อเมื่อ สำหรับ $m \in M$ จะมีไอดีล I ของ R ที่ทำให้ $Rm = IM$

บทบาทสำคัญของมอดูลการคูณคือทำให้เกิดการคูณกันระหว่างมอดูลย่อย

บทนิยาม 2.2.6 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย สมมติว่า N และ K เป็นมอดูลย่อยของ M และ I และ J เป็นไอดีลของ R โดยที่ $N = IM$ และ $K = JM$ เรานิยาม**การคูณระหว่าง N และ K** โดย $NK = IJM$

ทฤษฎีบท 2.2.7 ถ้า M เป็นมอดูลการคูณ แล้วการนิยามการคูณตามบทนิยาม 2.2.4 เป็นการนิยามดีแล้ว

บทนิยามการคูณกันระหว่างมอดูลย่อยเป็นบทนิยามที่นิยามดีแล้วบนมอดูลการคูณซึ่งนำมาใช้ประโยชน์ในการสร้างวิธีการจำแนกมอดูลย่อยเฉพาะ ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.2.8 ให้ M เป็นมอดูลการคูณ และ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ จะได้ว่า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M ก็ต่อเมื่อ สำหรับมอดูลย่อย U และ V ของ M ถ้า $UV \subseteq P$ แล้ว $U \subseteq P$ หรือ $V \subseteq P$

บทแทรก 2.2.9 ให้ M เป็นมอดูลการคูณ และ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ จะได้ว่า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M ก็ต่อเมื่อ สำหรับมอดูลย่อย U และ V ของ M ถ้า $UV \subseteq P$ แล้ว $U \subseteq P$ หรือ $V \subseteq P$

2.3 มอดูลย่อยเฉพาะบนริงทั่วไป

N. Groenewald และ D. Ssevviiri ศึกษามอดูลย่อยเฉพาะบนริงทั่วไป กล่าวคือศึกษาบนริงที่ไม่จำเป็นต้องเป็นริงสลับที่ หรือไม่จำเป็นต้องมีเอกลักษณ์

หมายเหตุ หากไม่ระบุเจาะจงอย่างละเอียด ในหัวข้อ 2.3 นี้ เราให้ R เป็นริง ซึ่งไม่จำเป็นต้องเป็นริงสลับที่ หรือไม่จำเป็นต้องมีเอกลักษณ์

ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ พิจารณาเงื่อนไข $(*)$ ต่อไปนี้

สำหรับไอดีล A ของ R และมอดูลย่อย N ของ M ถ้า $AN \subseteq P$ แล้ว $N \subseteq P$ หรือ $AM \subseteq P$ − − − $(*)$

เราพบว่าบทนิยาม 2.2.1 และเงื่อนไข $(*)$ สมมูลกันบนริงสลับที่ แต่โดยทั่วไป N. Groenewald และ D. Ssevviiri กล่าวไว้ว่า บทนิยาม 2.2.1 และเงื่อนไข $(*)$ แตกต่างกัน ยิ่งไปกว่านั้น เราเห็นได้ชัดว่า ถ้า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M ตามบทนิยาม 2.2.1 แล้ว P สอดคล้องเงื่อนไข $(*)$ แต่บทกลับไม่เป็นจริง

N. Groenewald และ D. Ssevviiri ศึกษามอดูลย่อยเฉพาะและได้กำหนดบทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์ ดังนี้

บทนิยาม 2.3.1 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **มอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $r \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $rm \in P$ แล้ว $m \in P$ หรือ $rM \subseteq P$

หมายเหตุ อาจมองไม่เห็นว่าบทนิยาม 2.2.1 และ บทนิยาม 2.3.1 นั่นแตกต่างกันอย่างไร เราขอเน้นย้ำตรงนี้อีกรอบว่าความแตกต่างระหว่างบทนิยาม 2.2.1 และ บทนิยาม 2.3.1 มีดังนี้

บทนิยาม 2.2.1 ศึกษาบนริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์

บทนิยาม 2.3.1 ศึกษาบนริงทั่วไป (อาจไม่เป็นริงสลับที่ และ อาจไม่มีเอกลักษณ์)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลลัพธ์ที่แสดงให้เห็นวิธีการจำแนกมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.3.2 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ M
2) สำหรับ $a \in R$ และ $m \in M$ ถ้า $\langle am\rangle \subseteq P$ แล้ว $\langle m\rangle \subseteq P$ หรือ $\langle aM\rangle \subseteq P$
3) $(P:M) = (P:m)$ ทุกๆ $m \in M \setminus P$
4) $\{(P:m) \mid m \in M \setminus P\}$ เป็น singleton set

ระบบการคูณเป็นระบบพีชคณิตที่สำคัญอย่างหนึ่ง ซึ่ง N. Groenewald และ D. Ssevviiri นำมาใช้เป็นเครื่องมือประกอบการศึกษามอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์

บทนิยาม 2.3.3 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และให้ $S \subseteq M \setminus \{0\}$ เราเรียก S ว่า **ระบบการคูณ** ของ M ก็ต่อเมื่อ แต่ละ $a \in R$ และ $m \in M$ และมอดูลย่อย K ของ M ถ้า $(K + \langle m\rangle) \cap S \neq \emptyset$ และ $(K + \langle aM\rangle) \cap S \neq \emptyset$ แล้ว $(K + \langle am\rangle) \cap S \neq \emptyset$

บทแทรก 2.3.4 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ จะได้ว่า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ M ก็ต่อเมื่อ $M \setminus P$ เป็นระบบการคูณของ M

ทฤษฎีบท 2.3.5 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ M
2) $M \setminus P$ เป็นระบบการคูณของ M
3) แต่ละ $a \in R$ และ $m \in M$ ถ้า $\langle m\rangle \cap S \neq \emptyset$ และ $\langle aM\rangle \cap S \neq \emptyset$ แล้ว $\langle am\rangle \cap S \neq \emptyset$
4) แต่ละ $a \in R$ และ $m \in M$ ถ้า $m \in M \setminus P$ และ $\langle aM\rangle \cap S \neq \emptyset$ แล้ว $am \in M \setminus P$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และ S เป็นระบบการคูณของ M ถ้า P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ P เป็นมอดูลย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มเทียบกับสมบัติ $P \cap S = \emptyset$ แล้ว P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างบริบูรณ์ของ M

2.4 มอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน

การศึกษามอดูลย่อยเฉพาะผ่านการศึกษาสมบัติ และลักษณะเฉพาะแทบทุกมุมมองจากนักคณิตศาสตร์ทั่วโลก ความยอดนิยมอย่างหนึ่งในวงการคณิตศาสตร์ ก็คือความพยายามที่จะขยายผลลัพธ์ หรือขยายแนวคิดของสิ่งเดิมไปสู่สิ่งใหม่ที่ใหญ่ขึ้น เช่นเดียวกันนี้มอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน เป็นหนึ่งในความพยายามที่จะขยายการศึกษาขึ้นไปของมอดูลย่อยเฉพาะ

หมายเหตุ ผลลัพธ์ที่เกี่ยวข้องในหัวข้อ 2.4 นี้ ได้รับการพิจารณาบนริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ และบนมอดูลทางซ้าย (unital)

บทนิยาม 2.4.1 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เราเรียกมอดูลย่อย P ของ M โดยที่ $P \neq M$ ว่า **มอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน** ก็ต่อเมื่อ ถ้า $r \in R$ และ $m \in M$ ซึ่ง $0 \neq rm \in P$ แล้ว $m \in P$ หรือ $rM \subseteq P$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ไม่ยากเกินไปนักที่จะเห็นว่ามอดูลย่อยเฉพาะเป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน แต่บทกลับไม่เป็นจริง เนื่องจากมอดูลย่อยศูนย์ย่อมเป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนโดยอัตโนมัติตามบทนิยาม แต่อาจไม่เป็นมอดูลย่อยเฉพาะ ยกตัวอย่างเช่น $\{0\}$ ของ Z_4 ในฐานะ Z −มอดูลทางซ้าย จะเห็นว่า $\{0\}$ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน แต่ไม่เป็นมอดูลย่อยเฉพาะ

การศึกษาลักษณะเฉพาะของมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน เราเห็นผลลัพธ์ที่แปลกและแตกต่างไปจากลักษณะเฉพาะของมอดูลย่อยเฉพาะ ผลลัพธ์ที่น่าสนใจมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบท 2.4.1 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และ P เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ M
2) $(P:x) = (P:M) \cup (0:x)$ ทุกๆ $x \in M \setminus P$
3) $(P:x) = (P:M)$ หรือ $(P:x) = (0:x)$ ทุกๆ $x \in M \setminus P$
4) สำหรับมอดูลย่อย N ของ M และ $a \in R$ ถ้า $\{0\} \neq (a)_t N$ แล้ว $N \subseteq P$ หรือ $(a)_t \subseteq (P:M)$

บทนิยาม 2.4.2 ให้ P เป็นไอดีลของริงสลับที่ R โดยที่ $P \neq R$ เราเรียก P ว่า**ไอดีลเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกสมาชิก a และ b ของ R ถ้า $0 \neq ab \in P$ แล้ว $a \in P$ หรือ $b \in P$

เราทราบจากทฤษฎีบท 2.2.2 ว่า ถ้า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ M แล้ว $(P:M) = \{r \in R \mid rM \subseteq P\}$ เป็นไอดีลเฉพาะของ R แต่ทว่าผลลัพธ์นี้ไม่เป็นจริงสำหรับมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน เนื่องจาก $\{0\}$ ของ Z_4 ในฐานะ Z −มอดูลทางซ้าย จะเห็นว่า $\{0\}$ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน แต่ว่า $(\{0\}:Z_4) = 4Z$ เป็นไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนของ Z

ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย เรากล่าวว่า M เป็น faithful ถ้า $ann(M) = \{0\}$

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ R เป็นริงและ M เป็น R −มอดูลทางซ้าย และ M เป็น faithful จะได้ว่า ถ้า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ M แล้ว $(P:M) = \{r \in R \mid rM \subseteq P\}$ เป็นไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนของ R

สมบัติของมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนมีมากมาย เรานำเสนอผลลัพธ์ที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างมอดูลย่อยเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน ตามนี้

สมบัติ 2.4.4 ถ้า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ R −มอดูลทางซ้าย M และ P ไม่เป็นมอดูลย่อยเฉพาะ แล้ว $(P:M)P = \{0\}$

สมบัติ 2.4.5 ให้ R เป็นริง โดยที่ M และ N เป็น R −มอดูลทางซ้าย สมมติว่า $f: M \to N$ เป็น R −epimorphism จะได้ว่า ถ้า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ M โดยที่ $\ker f \subseteq P$ แล้ว $f(P)$ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ N

ให้ R_1 และ R_2 เป็นริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ โดยที่ M_1 เป็น R_1 −มอดูลทางซ้าย และ M_2 เป็น R_2 −มอดูลทางซ้าย จะได้ว่า $M_1 \times M_2$ เป็น $R_1 \times R_2$ −มอดูลทางซ้าย ภายใต้การดำเนินการดังนี้

$$(m_1, m_2) + (n_1, n_2) = (m_1 + n_1, m_2 + n_2)$$

$$(r_1, r_2)(m_1, m_2) = (r_1 m_1, r_2 m_2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมบัติ 2.4.6 ให้ P เป็นมอดูลย่อยของ M_1 โดยที่ $P \neq M_1$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ R_1 −มอดูล M_1
2) $P \times M_2$ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ $R_1 \times R_2$ −มอดูล $M_1 \times M_2$
3) $P \times M_2$ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ $R_1 \times R_2$ −มอดูล $M_1 \times M_2$

ในทำนองเดียวกัน

สมบัติ 2.4.7 ให้ P เป็นมอดูลย่อยของ M_2 โดยที่ $P \neq M_2$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ R_2 −มอดูล M_2
2) $M_1 \times P$ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ $R_1 \times R_2$ −มอดูล $M_1 \times M_2$
3) $M_1 \times P$ เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ $R_1 \times R_2$ −มอดูล $M_1 \times M_2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3 แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ

งานวิจัยนี้ เริ่มต้นแนวคิดมาจากการสังเกตว่าแนวทางการศึกษาทางด้านโครงสร้างของริง ส่วนใหญ่เน้นไปที่ตัวดำเนินการคูณ แต่อย่างที่ทราบกันดี โครงสร้างของริงไม่ได้มีเพียงแค่ตัวดำเนินการคูณ ยังประกอบไปด้วยตัวดำเนินการบวก ทั้งสองตัวดำเนินการนี้ มีความสำคัญเท่าเทียมกัน อีกทั้งยังมีความสัมพันธ์ต่อกัน ขาดอันใดอันหนึ่งไปไม่ได้ แนวทางงานวิจัยนี้จึงนำเสนอบทนิยามของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ ซึ่งเทียบเคียงได้กับการศึกษามอดูลย่อยเฉพาะ ในเบื้องต้น ภายในงานวิจัยนี้เราศึกษาบนริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ รวมไปถึง ทุกมอดูลที่ปรากฏในงานวิจัย เราหมายถึงมอดูลทางซ้ายที่เป็นยูนิทอล

3.1 พื้นฐานความรู้

ให้ $(G,+)$ เป็นกรุป และ H เป็นกรุปย่อยของ G เรานิยามสัญลักษณ์ $\alpha(H)=\{h\in G \mid h+h\in H\}$ และ $\beta(H)=\{h+h \mid h\in H\}$ เบื้องต้นเราได้ผลลัพธ์ที่เป็นประโยชน์ ดังนี้

สมบัติ 3.1.1 ให้ $(G,+)$ เป็นกรุป และ H เป็นกรุปย่อยของ G จะได้ว่า

1) $\beta(H)\subseteq \mathrm{H}\subseteq \alpha(H)$
2) ถ้า I เป็นไอดีลของริง R แล้ว $\alpha(I)$ และ $\beta(I)$ เป็นไอดีลของริง R
3) ถ้า N เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M แล้ว $\alpha(N)$ และ $\beta(N)$ เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M

ให้ M เป็นมอดูล โดยที่ $m\in M$ และ N เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M เรานิยามสัญลักษณ์

$(0:m)=\{r\in R \mid rm=0\}$ และ $(N:M)=\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$ และ $(N:m)=\{r\in R \mid rm\in N\}$ เราได้ผลลัพธ์ที่เป็นประโยชน์ ดังนี้

สมบัติ 3.1.2 ให้ M เป็นมอดูล โดยที่ $m\in M$ และ N เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M จะได้ว่า $(0:m)$ และ $(N:M)$ และ $(N:m)$ เป็นไอดีลของริง R

สมบัติ 3.1.3 สำหรับกรุปย่อย A และ B ของกรุป $(G,+)$ จะได้ว่า $\mathrm{A}\subseteq\alpha(\mathrm{B})$ ก็ต่อเมื่อ $\beta(\mathrm{A})\subseteq \mathrm{B}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2 แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ

เราเริ่มต้นงานวิจัยนี้ด้วย การแนะนำให้รู้จักกับแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ

บทนิยาม 3.2.1 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ P เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M โดยที่ $P \neq M$ เรากล่าวว่า P เป็น**แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ** ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก $r \in R$ และ $m \in M$ ถ้า $r(m+m) \in P$ แล้ว $r+r \in (P:M)$ หรือ $m+m \in P$

เราทราบได้ทันทีจากบทนิยาม 3.2.1 ว่า ทุกแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะเป็นมอดูลย่อยเฉพาะ

ตัวอย่าง 3.2.2 พิจารณา $\mathbb{Z}$ ในฐานะที่เป็น $\mathbb{Z}-$ มอดูล และ p เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า $p\mathbb{Z}$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ $\mathbb{Z}$ ก็ต่อเมื่อ $p=0$ หรือ p เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ $p=2q$ โดยที่ q เป็นจำนวนเฉพาะ

จากตัวอย่าง 3.2.2 จะเห็นว่า $4\mathbb{Z}$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ $\mathbb{Z}$ แต่ $4\mathbb{Z}$ ไม่เป็นมอดูลย่อยเฉพาะของ $\mathbb{Z}$ ดังนั้นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะเป็นการวางนัยทั่วไปของมอดูลย่อยเฉพาะ

ทฤษฎีบทถัดไปเป็นลักษณะเฉพาะของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะบนมอดูลใดๆ

ทฤษฎีบท 3.2.3 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ P เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของมอดูล M
2) สำหรับไอดีล I ของ R และมอดูลย่อย N ของ M
   ถ้า $I\beta(N) \subseteq P$ แล้ว $I \subseteq \alpha\big((P:M)\big)$ หรือ $N \subseteq \alpha(P)$
3) สำหรับ $a \in R$ และมอดูลย่อย N ของ M
   ถ้า $a\beta(N) \subseteq P$ แล้ว $a \in \alpha\big((P:M)\big)$ หรือ $N \subseteq \alpha(P)$
4) สำหรับไอดีล I ของ R และ $m \in M$
   ถ้า $I(m+m) \subseteq P$ แล้ว $I \subseteq \alpha\big((P:M)\big)$ หรือ $m \in \alpha(P)$
5) สำหรับ $a \in R$ และ $m \in M$
   ถ้า $aR(m+m) \subseteq P$ แล้ว $a \in \alpha\big((P:M)\big)$ หรือ $m \in \alpha(P)$

บทตั้งต่อไปนี้เป็นประโยชน์ต่องานวิจัย

บทตั้ง 3.2.4 ให้ $\phi: M_1 \to M_2$ เป็น $R-$ สาทิสสัณฐาน (homomorphism) โดยที่ P เป็นมอดูลย่อยของ M_1 และ K เป็นมอดูลย่อยของ M_2 จะได้ว่า

1) ถ้า ϕ เป็น $R-$ อุปริสัณฐาน (epimorphism) และ $r+r \in (P:M_1)$ แล้ว $r+r \in (\phi(P):M_2)$
2) ถ้า $r+r \in (K:M_2)$ แล้ว $r+r \in (\phi^{-1}(K):M_1)$

สมบัติ 3.2.5 ให้ $\phi: M_1 \to M_2$ เป็น $R-$ สาทิสสัณฐาน (homomorphism) จะได้ว่า

1) ถ้า ϕ เป็น $R-$ อุปริสัณฐานและ P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M_1 บรรจุ $\ker\phi$ แล้ว $\phi(P)$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M_2
2) ถ้า K เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M_2 แล้ว $\phi^{-1}(K)$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M_1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทแทรกต่อไปนี้เป็นผลโดยตรงของสมบัติ 3.2.5

บทแทรก 3.2.6 ให้ N เป็นมอดูลย่อยของ M จะได้ว่า

1) ถ้า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M และ K เป็นมอดูลย่อยของ M โดยที่ $K \subseteq P$ แล้ว P/K เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M/K
2) ถ้า K' เป็นแอลฟามอดูลย่อยพาะของ M/N แล้วจะมีแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะ K ของ M ที่ทำให้ $K' = K/N$

บทนิยาม 3.2.7 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ $S \subseteq M\backslash\{0\}$ เรากล่าวว่า S เป็น**แอลฟาระบบการคูณ** ก็ต่อเมื่อสำหรับไอดีล I ของ R และมอดูลย่อย K และ N ของ M ถ้า $(K+\beta(I)M) \cap S \neq \emptyset$ และ $\big(K+\beta(N)\big) \cap S \neq \emptyset$ แล้ว $\big(K+I\beta(N)\big) \cap S \neq \emptyset$

สมบัติ 3.2.8 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ P เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M จะได้ว่า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M ก็ต่อเมื่อ $M\backslash P$ เป็นแอลฟาระบบการคูณ

สมบัติ 3.2.9 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ X เป็นแอลฟาระบบการคูณ จะได้ว่า ถ้า P เป็นมอดูลย่อยใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มของ M โดยเทียบกับสมบัติ $P \cap X = \emptyset$ แล้ว P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ M

บทนิยาม 3.2.10 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ N เป็นมอดูลย่อยของ M ถ้า M มีแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะซึ่งบรรจุ N แล้ว เรานิยาม $\sqrt[\alpha]{N} = \{x \in M \mid$ ถ้า S เป็นแอลฟาระบบการคูณ ซึ่ง $x \in S$ แล้ว $S \cap \mathrm{N} \neq \emptyset\}$

ในทางตรงกันข้าม ถ้า M ไม่มีแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะซึ่งบรรจุ N แล้ว เรานิยาม $\sqrt[\alpha]{N} = M$

ทฤษฎีบท 3.2.11 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ N เป็นมอดูลย่อยของ M จะได้ว่า $\sqrt[\alpha]{N} = M$ หรือ

$$\sqrt[\alpha]{N} = \bigcap\{P \mid P \text{ เป็นแอลฟามอดูลย่อยของ } M \text{ โดยที่ } N \subseteq P\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน

ส่วนนี้เป็นงานวิจัยที่ขยายแนวคิดมาจากแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน เราเรียกตัวละครหลักของงานวิจัยส่วนนี้ว่าแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน ซึ่งนับเป็นการวางนัยทั่วไปของทั้งแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะและมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน ก่อนอื่น เราทบทวนบทนิยามของมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน (weakly prime submodules) ศึกษาโดย S.E. Atani และ F. Farzalipour ดังนี้

ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ P เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M โดยที่ $P \neq M$ เรากล่าวว่า P เป็นมอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก $r \in R$ และ $m \in M$ ถ้า $0 \neq rm \in P$ แล้ว $r \in (P:M)$ หรือ $m \in P$

บทนิยาม 3.3.1 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ P เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M โดยที่ $P \neq M$ เรากล่าวว่า P เป็น**แอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน** ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก $r \in R$ และ $m \in M$ ถ้า $0 \neq r(m+m) \in P$ แล้ว $r+r \in (P:M)$ หรือ $m+m \in P$

เราพบว่าทุกแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะเป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน แต่บทกลับไม่จริง เช่น $\{\overline{0}\}$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน แต่ $\{\overline{0}\}$ ไม่เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ $\mathbb{Z}_8$ ในฐานะที่เป็น $\mathbb{Z}-$ มอดูล เพราะว่า $2 \cdot (\overline{2}+\overline{2}) = 2 \cdot \overline{4} = \overline{8} = \overline{0}$ และ $(2+2)\mathbb{Z}_8 \nsubseteq \{\overline{0}\}$ และ $\overline{2}+\overline{2} \neq \overline{0}$

ทฤษฎีบทถัดไป เราแสดงถึงลักษณะเฉพาะของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน

ทฤษฎีบท 3.3.2 ให้ M เป็น $R-$ มอดูล และ P เป็นมอดูลย่อยของมอดูล M โดยที่ $P \neq M$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1) P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของมอดูล M
2) สำหรับ $m \in M$ ถ้า $m+m \notin P$ แล้ว $(P:m+m) = \alpha\big((P:M)\big) \cup \alpha\big((0:m)\big)$
3) สำหรับ $m \in M$ ถ้า $m+m \notin P$ แล้ว $(P:m+m) = \alpha\big((P:M)\big)$ หรือ $(P:m+m) = \alpha\big((0:m)\big)$

ให้ M_1 และ M_2 เป็น $R-$ มอดูล จะได้ว่า $M_1 \times M_2$ เป็น $R-$ มอดูล ภายใต้การดำเนินการ ดังนี้

สำหรับ $a, c \in M_1, b, d \in M_2$ และ $r \in R$

$$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$$

$$r(a,b) = (ra, rb)$$

เราแทนมอดูลชนิดนี้ด้วยสัญลักษณ์ $M_1 \oplus M_2$

สมบัติ 3.3.3 ให้ N_1 เป็นมอดูลย่อยของ M_1 และ N_2 เป็นมอดูลย่อยของ M_2 จะได้ว่า

ถ้า $N_1 \times N_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ $M_1 \oplus M_2$ แล้ว N_1เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ M_1 และ N_2 เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ M_2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ R_1 และ R_2 เป็นริงสลับที่ซึ่งมีเอกลักษณ์ และ M_i เป็น $R_i -$ มอดูลซึ่งเป็นยูนิทอล โดยที่ $i = 1,2$ จะได้ว่า $M_1 \times M_2$ เป็น $(R_1 \times R_2)$ $-$ มอดูล ภายใต้การดำเนินการดังนี้

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(r_1, r_2)(m_1, m_2) = (r_1 m_1, r_2 m_2)$$

เราแทนมอดูลชนิดนี้ด้วยสัญลักษณ์ $M_1 \times M_2$

สมบัติ 3.3.4 ให้ $R = R_1 \times R_2$ และ $M = M_1 \times M_2$ และให้ N_1 เป็น $R_1 -$ มอดูลย่อยของ M_1 พิจารณาสามข้อความต่อไปนี้

1) N_1 เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของมอดูล M_1
2) $N_1 \times M_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของมอดูล $M_1 \times M_2$
3) $N_1 \times M_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของมอดูล $M_1 \times M_2$

จะได้ว่า $(1) \rightarrow (2) \rightarrow (3)$

ยิ่งไปกว่านั้น ถ้า $\beta(M_2) \neq \{0\}$ แล้ว $(1), (2)$ และ (3) สมมูลกัน

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงความสำคัญของเงื่อนไข $\beta(M_2) \neq \{0\}$ ในสมบัติ 3.3.4

ตัวอย่าง 3.3.5 ให้ $M_1 = \mathbb{Z}_8$ และ $M_2 = \{0\}$ และ $R_1 = R_2 = \mathbb{Z}$ เราเห็นได้ชัดว่า $\{\overline{0}\} \times \{0\}$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของมอดูล $M_1 \times M_2$ อย่างไรก็ตาม $\{\overline{0}\}$ ไม่เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของมอดูล $\mathbb{Z}_8$ ในฐานะที่เป็น $\mathbb{Z} -$ มอดูล

สมบัติ 3.3.6 ให้ M_1, M_2 เป็น $R_1, R_2 -$ มอดูล ตามลำดับ และ $N_1 \times N_2$ เป็นมอดูลย่อยของมอดูล $M_1 \times M_2$ จะได้ว่า $\beta(N_1 \times N_2) = \{(0,0)\}$ ก็ต่อเมื่อ $\beta(N_1) = \{0\}$ และ $\beta(N_2) = \{0\}$

สมบัติ 3.3.7 ให้ M_1, M_2 เป็น $R_1, R_2 -$ มอดูล ตามลำดับ จะได้ว่า

1) ถ้า $N_1 \times N_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของมอดูล $M_1 \times M_2$ แล้ว $\beta(N_1) = \{0\}$ หรือ $\alpha(N_1) = M_1$ หรือ $\alpha(N_2) = M_2$
2) ถ้า $N_1 \times N_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของมอดูล $M_1 \times M_2$ แล้ว $\beta(N_2) = \{0\}$ หรือ $\alpha(N_1) = M_1$ หรือ $\alpha(N_2) = M_2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) ถ้า $N_1 \times N_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของมอดูล $M_1 \times M_2$ แล้ว $\beta(N_1) = \{0\}$ หรือ $\alpha(N_2) = M_2$ หรือ $N_1 \times N_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของมอดูล $M_1 \times M_2$

4) ถ้า $N_1 \times N_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของมอดูล $M_1 \times M_2$ แล้ว $\beta(N_2) = \{0\}$ หรือ $\alpha(N_1) = M_1$ หรือ $N_1 \times N_2$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของมอดูล $M_1 \times M_2$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงให้เห็นถึงความสำคัญของเงื่อนไข $\alpha(N_2) \neq M_2$ ในบทพิสูจน์ของสมบัติ 3.3.7 ข้อ (3)

ตัวอย่าง 3.3.8 เนื่องจาก $4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ เป็นมอดูลย่อยของ $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ในฐานะที่เป็น $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} -$ มอดูล โดยสมบัติ 3.3.4 จึงทราบว่า $4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ อย่างไรก็ตาม $4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ ไม่เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ เพราะว่า $(1,3)[(2,1) + (2,1)] = (4,6) \in 4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ และ $(2,6)(\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}) \nsubseteq 4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ และ $(4,2) \notin 4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $\alpha(3\mathbb{Z}) = 3\mathbb{Z}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 การศึกษาแอลฟาไอดีลเฉพาะบนริง

ในหัวข้อสุดท้ายนี้ เรานำแนวคิดของแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะไปศึกษาบนโครงสร้างริง ซึ่งจะทำให้เกิดบทนิยามของแอลฟาไอดีลย่อยเฉพาะ ดังนี้

บทนิยาม 3.4.1 ให้ R เป็นริง และ P เป็นไอดีลของ R โดยที่ $P \neq R$ เรากล่าวว่า P เป็น**แอลฟาไอดีลเฉพาะ** ถ้า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ R ในฐานะที่เป็น $R-$ มอดูล

ในทำนองเดียวกัน เรากล่าวว่า P เป็น**แอลฟาไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน** ถ้า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ R ในฐานะที่เป็น $R-$ มอดูล

ไม่ยากเกินไปนักที่จะเห็นว่าไอดีล P ของริง R เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก $a, b \in R$

ถ้า $a(b+b) \in P$ แล้ว $a+a \in P$ หรือ $b+b \in P$

เช่นเดียวกัน ไอดีล P ของริง R เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะอย่างอ่อน ก็ต่อเมื่อ สำหรับสมาชิก $a, b \in R$

ถ้า $0 \neq a(b+b) \in P$ แล้ว $a+a \in P$ หรือ $b+b \in P$

สมบัติ 3.4.2 ถ้า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ $R-$ มอดูล M แล้ว $(P:M)$ เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะของ R

ให้ R เป็นริง ผลคูณคาร์ทีเซียน $R \times R$ เป็นริงภายใต้การดำเนินการดังนี้

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)*(c,d)=(ac,ad+bc)$$

เราแทนริงชนิดนี้ด้วยสัญลักษณ์ $R(+)R$

สมบัติ 3.4.3 ถ้า I เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะของริง R แล้ว $I \times R$ เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะของ $R(+)R$

สมบัติ 3.4.4 เราทราบว่า $4\mathbb{Z}$ และ $6\mathbb{Z}$ เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$ เมื่อเราพิจารณา $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$ เราจะเห็นว่า $(2,1)[(1,1)+(1,1)]=(2,1)(2,2)=(4,6) \in 4\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$ อย่างไรก็ตาม $(4,2) \notin 4\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$ และ $(2,2) \notin 4\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$ ตัวอย่างนี้แสดงให้เราเห็นว่า $I \times J$ อาจไม่เป็น แอลฟาไอดีลเฉพาะของ $R(+)R$ ถึงแม้ว่าทั้ง I และ I เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะของริง R

สมบัติ 3.4.5 ถ้า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ $R-$ มอดูล M และ $(P:M)\beta(P) \neq 0$ แล้ว P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ $R-$ มอดูล M

บทแทรกต่อไปนี้เป็นผลโดยตรงของสมบัติ 3.4.5

บทแทรก 3.4.6 ถ้า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ $R-$ มอดูล M และ $(P:M)\beta(P) \neq 0$ แล้ว $(P:M)$ เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะอย่างอ่อนของ R

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในสมบัติ 3.4.2 ว่า ถ้า P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะของ $R-$ มอดูล M แล้ว $(P:M)$ เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะของ R แต่ผลลัพธ์นี้ไม่จริงสำหรับกรณี P เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อน

บทแทรก 3.4.7 เนื่องจาก $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$ เป็น $\mathbb{Z}-$ มอดูล เราทราบแน่นอนว่า $\{\bar{0}\}$ เป็นแอลฟามอดูลย่อยเฉพาะอย่างอ่อนของ $\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}}$ แต่ว่า $(\{\bar{0}\}:\mathbb{Z}/_{8\mathbb{Z}})=8\mathbb{Z}$ ไม่เป็นแอลฟาไอดีลเฉพาะของ $\mathbb{Z}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4 สรุปผลผลิตที่ได้จากงานวิจัย

เผยแพร่ผลงานวิจัยในวารสาร EUROPEAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, Vol 11, No 3 (2018).

ชื่อเรื่อง On alpha-prime and Weakly alpha-prime Submodules
https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v11i3.3275

ฐานข้อมูล Web of Science
http://mjl.clarivate.com/cgi-bin/jrnlst/jlresults.cgi?PC=MASTER&ISSN=1307-5543

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] Charef Beddani and Wahiba Messirdi, 2-Prime ideals and their applications, Journal of Algebra and Its Applications, 15(2016), 11pages, http://dx.doi.org/10.1142/S0219498816500511

[2] S. Ebrahimi Atani and F. Farzalipour, On weakly prime submodules, Tamkang Journal of Mathematics, 38(2007), 247-252

[3] Nico J. Groenewald and David Ssevviiri, Completely prime submodules, International Electronic Journal of Algebra, 13 (2013), 1-14

[3] Noether, E., Idealtheorie in Ringbereichen, Mathematische Annalen, 83 (1921), 24-66

[4] R. Ameri, On the prime submodules of multiplication modules, International Journal of Mathematics and Mathematical science, 27(2003), 1715-1724

[5] Thawatchai Khumprapussorn, On (1,k)-prime ideals, The Thai Journal of Mathematics, Special Issue 2015, 101-117

[6] Wolfgang Krull, Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen, Math. Z., 28 (1928), 481–503 (German). MR 1544973, https://doi.org/10.1007/BF01181179

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

EUROPEAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS
Vol. 11, No. 3, 2018, 730-739
ISSN 1307-5543 – www.ejpam.com
Published by New York Business Global

On α-prime and weakly α-prime submodules

Thawatchai Khumprapussorn

Department of Mathematics, Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok 10520, Thailand

Abstract. We have introduced the notion of α-prime and weakly α-prime submodules as a generalization of prime submodules. Some basic properties of α-prime and weakly α-prime submodules are the extension of prime submodules. Finally, after introducing the notion of α-prime submodules, we also define and study the concept of α-prime ideals in a ring.

2010 Mathematics Subject Classifications: 13C99

Key Words and Phrases: α-prime submodules, weakly α-prime submodules, α-prime ideals, weakly α-prime ideals

1. Introduction

All rings are assumed to be commutative with nonzero identity and all modules are left unital. Let $(G,+)$ be a group. For a subset H of G, denote $\alpha(H)=\{h\in G \mid h+h\in H\}$ and $\beta(H)=\{h+h \mid h\in H\}$. It is clear that $\beta(H)\subseteq H\subseteq\alpha(H)$. If I is an ideal of a ring R, then $\alpha(I)$ and $\beta(I)$ are ideals of R. If N is a submodule of a module M, then $\alpha(N)$ and $\beta(N)$ are submodules of M. We recall the definition of prime submodules from [1]. A proper submodule P of a left R-module M is called prime if $rm\in P$ for some $r\in R$ and $m\in M$, then $r\in(P:M)$ or $m\in P$ where $(N:M)=\{r\in R \mid rM\subseteq N\}$.

Let M be a left R-module, $m\in M$ and N be a submodule of M. For convenience, we denote $(0:m)=\{r\in R \mid rm=0\}$ and $(N:m)=\{r\in R \mid rm\in N\}$. With these notations, we have both of $(N:m)$ and $(0:m)$ are ideals of R.

It is well known that there are several authors have extended the notion of prime submodules. All of those definitions focus on multiplication between element of rings and of modules. This motivates us to study α-prime submodules by taking care on all operations of a left module structure. Our extension obtains a generalization of prime submodules which call α-prime submodules. Its definition and results appear in section 1.

In section 2, we introduce α-prime submodules and also give some examples of an α-prime submodule which is not a prime submodule. Characterization of α-prime submodules of $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}$ is completely given.

DOI: https://doi.org/10.29020/nybg.ejpam.v11i3.3275

Email address: thawatchai.kh@kmitl.ac.th (Thawatchai Khumprapussorn)

 © 2018 EJPAM All rights reserved.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In section 3, we extend the notion of α-prime submodules to weakly α-prime submodules. We study properties the product of submodules in the Cartesian product of modules.

In section 4, we move the investigation of α-prime submodules to α-prime ideals.

2. α-prime submodules

First, we present fundamental definitions of α-prime submodules which will be studied in this paper.

Definition 1. *Let P be a proper submodule of M. We call P is α-**prime** if for any element $r \in R$ and $m \in M$ such that $r(m+m) \in P$, we have $r+r \in (P:M)$ or $m+m \in P$.*

By this definition, every prime submodule is an α-prime submodule, but the converse is not true in general.

Example 1. *Let $\mathbb{Z}$ be an $\mathbb{Z}$-module and $p \in \mathbb{Z}$. Then $p\mathbb{Z}$ is an α-prime submodule of $\mathbb{Z}$ if and only if $p = 0$ or p is a prime number or $p = 2q$ where q is a prime number.*

Proof. ($\rightarrow$) Assume that $p\mathbb{Z}$ is an α-prime submodule of $\mathbb{Z}$. Suppose that $p \neq 0$ and p is not prime number. Then $p = ab$ for some integers a and b with $1 < a, b < p$. We see that $p \mid a(b+b)$. This implies that $p \mid a+a$ or $p \mid b+b$. Now, we assume that $p \mid a+a$. This means $p \leq 2a$. Hence $ab \leq 2a$. Therefore $b \leq 2$. That is $b = 2$. Next, suppose that a is not a prime number. Then $a = cd$ for some integers c and d with $1 < c, d < a$. We have $p = 2a = 2cd = c(d+d)$. Since $p\mathbb{Z}$ is an α-prime submodule of $\mathbb{Z}$, $p \mid c+c$ or $p \mid d+d$. Hence $a \mid c$ or $a \mid d$. This implies that $a \leq c$ or $a \leq d$ which is a contradiction. This prove that $p = 2q$ for some prime numbers q.

($\leftarrow$) It is clear that $p\mathbb{Z}$ is an α-prime submodule of $\mathbb{Z}$ where $p = 0$ or p is a prime number or $p = 2q$ for some prime numbers q.

Example 1 obtains that $4\mathbb{Z}$ is α-prime but is not prime submodule of $\mathbb{Z}$. The following first result gives the characterization of α-prime submodules.

Theorem 1. *Let P be a proper submodule of an R-module M. The following statements are equivalent.*

(i) P is an α-prime submodule of M.

(ii) For all ideals I of R and for all submodules N of M,

$$\text{if } I\beta(N) \subseteq P, \text{ then } I \subseteq \alpha((P:M)) \text{ or } N \subseteq \alpha(P).$$

(iii) For all $a \in R$ and for all submodules N of M,

$$\text{if } a\beta(N) \subseteq P, \text{ then } a \in \alpha((P:M)) \text{ or } N \subseteq \alpha(P).$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(iv) For all ideals I of R and for all $m \in M$,

$$\text{if } I(m+m) \subseteq P, \text{ then } I \subseteq \alpha((P:M)) \text{ or } m \in \alpha(P).$$

(v) For all $a \in R$ and for all $m \in M$,

$$\text{if } aR(m+m) \subseteq P, \text{ then } a \in \alpha((P:M)) \text{ or } m \in \alpha(P).$$

(vi) For all $m \in M$, if $m+m \notin P$, then $\alpha((P:M)) = \alpha((P:m))$.

Proof. $(i) \to (ii)$ Assume that P is an α-prime submodule of M. Let I be an ideal of R and N be a submodule of M such that $I\beta(N) \subseteq P$ and $N \nsubseteq \alpha(P)$. To show that $I \subseteq \alpha((P:M))$, let $r \in I$ and $n \in N$ be such that $n \notin \alpha(P)$. Then $n+n \notin P$ and $n+n \in \beta(N)$. This implies that $r(n+n) \in P$. Since P is an α-prime submodule of M and $n+n \notin P$, $r+r \in (P:M)$. Hence $I \subseteq \alpha((P:M))$.

$(ii) \to (iii)$ Assume that (ii) holds. Let $a \in R$ and N be a submodule of M such that $a\beta(N) \subseteq P$. Then $(Ra)\beta(N) = R(a\beta(N)) \subseteq RP \subseteq P$. By (ii), we have $Ra \subseteq \alpha((P:M))$ or $N \subseteq \alpha(P)$. Therefore $a \in \alpha((P:M))$ or $N \subseteq \alpha(P)$.

$(iii) \to (iv)$ Assume that (iii) holds. To prove that (iv) holds, let I be an ideal of R and $m \in M$ such that $I(m+m) \subseteq P$ and $m \notin \alpha(P)$. Let $a \in I$. Then $a\beta(Rm) \subseteq P$. By (iii) and $m \notin \alpha(P)$, $a \in \alpha((P:M))$. Hence $I \subseteq \alpha((P:M))$.

$(iv) \to (v)$, $(v) \to (i)$ and $(vi) \to (i)$ are obvious.

$(i) \to (vi)$ Assume that P is an α-prime submodule of M. Let $m \in M$ be such that $m+m \notin P$. It is clear that $\alpha((P:M)) \subseteq \alpha((P:m))$. Let $r \in \alpha((P:m))$. Then $r+r \in (P:m)$. Hence $r(m+m) = (r+r)m \in P$. Since P is α-prime and $m+m \notin P$, $r+r \in (P:M)$. That is $r \in \alpha((P:M))$. Therefore $\alpha((P:M)) = \alpha((P:m))$.

Lemma 1. *Let $\phi : M_1 \to M_2$ be an R-module homomorphism, P be a submodule of M_1 and K be a submodule of M_2. Then*

(i) If ϕ is an epimorphism and $r+r \in (P:M_1)$, then $r+r \in (\phi(P):M_2)$.

(ii) If $r+r \in (K:M_2)$, then $r+r \in (\phi^{-1}(K):M_1)$.

Proof. (i) Assume that ϕ is an epimorphism and $(r+r)M_1 \subseteq P$. Let $m_2 \in M_2$. Then $\phi(m_1) = m_2$ for some $m_1 \in M_1$. Thus $(r+r)m_1 \in P$. This implies that $(r+r)m_2 = (r+r)\phi(m_1) \in \phi(P)$. That is $r+r \in (\phi(P):M_2)$.

(ii) Assume that $(r+r)M_2 \subseteq K$. Let $m_1 \in M_1$. Then $\phi((r+r)m_1) = (r+r)\phi(m_1) \in K$. Hence $(r+r)m_1 \in \phi^{-1}(K)$. Therefore $r+r \in (\phi^{-1}(K):M_1)$.

Proposition 1. *Let $\phi : M_1 \to M_2$ be an R-module homomorphism. Then*

(i) If ϕ is an epimorphism and P is an α-prime submodule of M_1 containing $\ker\phi$, then $\phi(P)$ is an α-prime submodule of M_2.

(ii) If K is an α-prime submodule of M_2, then $\phi^{-1}(K)$ is an α-prime submodule of M_1.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Proof. (i) Assume that ϕ is an epimorphism and P is an α-prime submodule of M_1 containing $\ker\phi$. Let $r \in R$ and $m \in M_2$ be such that $r(m+m) \in \phi(P)$. There exist elements $n \in M_1$ and $p \in P$ such that $r(m+m) = \phi(p)$ and $\phi(n) = m$. Then $\phi(p) = r(m+m) = r(\phi(n)+\phi(n)) = r(\phi(n+n)) = \phi(r(n+n))$. This implies that $r(n+n) - p \in \ker\phi$. Since $\ker\phi \subseteq P$, $r(n+n) \in P$. Since P is an α-prime submodule of M_1, $r+r \in (P : M_1)$ or $n+n \in P$. Since ϕ is onto, $r+r \in (\phi(P) : M_2)$ or $m+m \in \phi(P)$. Hence $\phi(P)$ is an α-prime submodule of M_2.

(ii) Assume that K is an α-prime submodule of M_2. Let $r \in R$ and $m \in M$ be such that $r(m+m) \in \phi^{-1}(K)$. Then $r(\phi(m)+\phi(m)) \in K$. Since K is an α-prime submodule of M_2, $r+r \in (K : M_2)$ or $\phi(m)+\phi(m) \in K$. This implies that $r+r \in (\phi^{-1}(K) : M_1)$ or $m+m \in \phi^{-1}(K)$. Hence $\phi^{-1}(K)$ is an α-prime submodule of M_1.

Corollary 1. *Let N be a submodule of M. Then*

(i) If P is an α-prime submodule of M and K is a submodule of M contained in P, then ${}^{P}\!/_{K}$ is an α-prime submodule of ${}^{M}\!/_{K}$.

(ii) If K' is an α-prime submodule of ${}^{M}\!/_{N}$, then $K' = {}^{K}\!/_{N}$. for some α-prime submodule K of M.

Proof. (i) Assume that P is an α-prime submodule of M and K is a submodule of M contained in P. Define a homomorphism $\varphi : M \to {}^{M}\!/_{K}$ by $\varphi(m) = m + K$ for all $m \in M$. Then φ is an epimorphism and $\ker\varphi = K$. By Proposition 1 (i), $\varphi(P) = {}^{P}\!/_{K}$ is an α-prime submodule of ${}^{M}\!/_{K}$.

(ii) Assume that K' is an α-prime submodule of ${}^{M}\!/_{N}$. Then the set $K = \{x \in M \mid x + N \in K'\}$ is an α-prime submodule of M. Clearly, $K' = {}^{K}\!/_{N}$.

For subgroups A and B of a group $(G, +)$, we have $A \subseteq \alpha(B)$ if and only if $\beta(A) \subseteq B$.

Definition 2. *Let R be a ring and M be an R-module. A nonempty set $S \subseteq M\backslash\{0\}$ is called an α-**multiplicative system** if for all ideal I of R and for all submodules K and N of M, if $\Big(K+\beta(I)M\Big) \cap S \neq \emptyset$ and $\Big(K+\beta(N)\Big) \cap S \neq \emptyset$, then $\Big(K+I\beta(N)\Big) \cap S \neq \emptyset$.*

Proposition 2. *Let P be a submodule of an R-module M. Then P is an α-prime submodule of M if and only if $M\backslash P$ is an α-multiplicative system.*

Proof. $(\rightarrow)$ Assume that P is an α-prime submodule of M. Let I be an ideal of R and let K and N be submodules of M such that $\Big(K + I\beta(N)\Big) \cap M\backslash P = \emptyset$. Then $K + I\beta(N) \subseteq P$. It follows that $K \subseteq P$ and $I\beta(N) \subseteq P$. Since P is an α-prime submodule of M, $I \subseteq \alpha((P : M))$ or $N \subseteq \alpha(P)$. This implies that $\beta(I) \subseteq (P : M)$ or $\beta(N) \subseteq P$. Hence $K + \beta(I)M \subseteq P$ or $K + \beta(N) \subseteq P$. Hence $\Big(K+\beta(I)M\Big) \cap M\backslash P = \emptyset$ or $\Big(K+\beta(N)\Big) \cap M\backslash P = \emptyset$. This shows that $M\backslash P$ is an α-multiplicative system.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

($\leftarrow$) Assume that $M\backslash P$ is an α-multiplicative system. Let I be an ideals of R and N be a submodule of M such that $I\beta(N) \subseteq P$. Hence $\Big(I\beta(N)\Big) \cap M\backslash P = \emptyset$. Since $M\backslash P$ is an α-multiplicative system, $\Big(\beta(I)M\Big) \cap M\backslash P = \emptyset$ or $\Big(\beta(N)\Big) \cap M\backslash P = \emptyset$. That is, $\beta(I)M \subseteq P$ or $\beta(N) \subseteq P$. We already show that $\beta(I) \subseteq (P : M)$ or $\beta(N) \subseteq P$. This means $I \subseteq \alpha((P : M))$ or $N \subseteq \alpha(P)$. Therefore P is an α-prime submodule of M.

Proposition 3. *Let M be an R-module and X be an α-multiplicative system. If P is a submodule of M maximal with respect to the property that $P \cap X = \emptyset$, then P is an α-prime submodule of M.*

Proof. Assume that P is a submodule of M maximal with respect to the property that $P \cap X = \emptyset$. Let I be an ideal of R and N be a submodule of M. Now, assume that $I \nsubseteq \alpha((P : M))$ and $N \nsubseteq \alpha(P)$. Hence $\beta(I)M \nsubseteq P$ and $\beta(N) \nsubseteq P$. Then $\Big(P + \beta(I)M\Big) \cap X \neq \emptyset$ and $\Big(P + \beta(N)\Big) \cap X \neq \emptyset$. Since X is an α-multiplicative system, $\Big(P + I\beta(N)\Big) \cap X \neq \emptyset$. Since $P \cap X = \emptyset$, $I\beta(N) \nsubseteq P$. This implies that P is an α-prime submodule of M.

Definition 3. *Let M be an R-module and N be a submodule of M. If there is an α-prime submodule of M containing N, then we define*

$$\sqrt[\alpha]{N} = \{x \in M \mid \text{ every } \alpha\text{-multiplicative system containing } x \text{ meets } N\}.$$

If there is no a α-prime submodule of M containing N, then we define $\sqrt[\alpha]{N} = M$.

Theorem 2. *Let M be an R-module and N be a submodule of M. Then either $\sqrt[\alpha]{N} = M$ or $\sqrt[\alpha]{N}$ is the intersection of all α-prime submodule of M containing N.*

Proof. Assume that $\sqrt[\alpha]{N} \neq M$. Let $x \in \sqrt[\alpha]{N}$ and P be an α-prime submodule of M containing N. By Proposition 2, $M\backslash P$ is an α-multiplicative system and $N \cap (M\backslash P) = \emptyset$. Hence $x \in P$. Conversely, let $x \in M$ be such that $x \notin \sqrt[\beta]{N}$. Let S be an α-multiplicative system such that $x \in S$ and $S \cap N = \emptyset$. By Zorn's Lemma on the set of submodule J of M containing N and $S \cap J = \emptyset$, there exists a maximal submodule K of M such that $S \cap K = \emptyset$. By Proposition 3, K is a α-prime submodule of M. Hence $x \notin K$.

3. Weakly α-prime submodules

In this section we begin with the definition of weakly α-prime submodules which is a generalization of α-prime submodules. In [2], S.E. Atani and F. Farzalipour gave the notion of weakly prime submodules stated that a proper submodule P of a left R-module M is called weakly prime if $0 \neq rm \in P$ for some $r \in R$ and $m \in M$, then $r \in (P : M)$ or $m \in P$ where $(N : M) = \{r \in R \mid rM \subseteq N\}$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Definition 4. *Let P be a proper submodule of M. We call P is **weakly α-prime** if for any elements $r \in R$ and $m \in M$ such that $r(m+m) \in P\backslash\{0\}$, we have $r+r \in (P:M)$ or $m+m \in P$.*

Every α-prime submodule is weakly α-prime submodule. But the converse need not be true. For example, $\{\bar{0}\}$ is weakly α-prime but is not α-prime submodule of $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}_8$ because $2 \cdot (\bar{2}+\bar{2}) = 2 \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{0}$ and $(2+2)\mathbb{Z}_8 \nsubseteq \{\bar{0}\}$ and $\bar{2}+\bar{2} \neq \bar{0}$.

Next we give several characterizations of weakly α-prime submodules.

Theorem 3. *Let M be an R-module and P be a submodule of M. The following statements are equivalent.*

(i) P is a weakly α-prime submodule of M.

(ii) For any $m \in M$, if $m+m \notin P$, then $(P : m+m) = \alpha((P:M)) \cup \alpha((0:m))$.

(iii) For any $m \in M$, if $m+m \notin P$, then $(P : m+m) = \alpha((P:M))$ or $(P : m+m) = \alpha((0:m))$.

Proof. $(i) \to (ii)$ Assume that P is a weakly α-prime submodule of M. Let $m \in M$ be such that $m+m \notin P$. Let $r \in (P : m+m)$. Then $r(m+m) \in P$. If $r(m+m) = 0$, then $r \in \alpha((0:m))$. Suppose that $r(m+m) \neq 0$. Since P is weakly α-prime and $m+m \notin P$, $r+r \in (P:M)$. That is $r \in \alpha((P:M))$. Conversely, let $r \in \alpha((P:M)) \cup \alpha((0:m))$. Then $r+r \in (P:M)$ or $rm+rm = 0$. These implie that $r \in (P : m+m)$.

$(ii) \to (iii)$ Obvious.

$(iii) \to (i)$ Assume that (iii) holds. Let $r \in R$ and $m \in M$ be such that $r(m+m) \in P\backslash\{0\}$ and $m+m \notin P$. Then $r \in (P : m+m)$. Since $r(m+m) \neq 0$, $r \notin \alpha((0:m))$. By (iii), $(P : m+m) = \alpha((P:M))$. Hence $r \in \alpha((P:M))$. Therefore $r+r \in (P:M)$. This proves that P is a weakly α-prime submodule of M.

Let M_1 and M_2 be R-modules. Then $M_1 \times M_2$ is an R-module under the operation $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$ and $r(a,b) = (ra, rb)$ for all $a, c \in M_1$, $b, d \in M_2$ and $r \in R$. We denote this module by $M_1 \oplus M_2$.

Proposition 4. *Let N_1 be a submodule of M_1 and N_2 be a submodule of M_2. If $N_1 \times N_2$ is a weakly α-prime submodule of $M_1 \oplus M_2$, then N_1 is a weakly α-prime submodule of M_1 and N_2 is a weakly α-prime submodule of M_2.*

Proof. It is straightforward.

Let R_1 and R_2 be commutative rings with identity, M_i be a unital R_i-module where $i = 1, 2$. Then $M_1 \times M_2$ is an $(R_1 \times R_2)$-module under the operation $(r_1, r_2)(m_1, m_1) = (r_1 m_1, r_2 m_2)$ for all $(r_1, r_2) \in R_1 \times R_2$ and $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$. We set up these notation for the next two results.

Proposition 5. *Let $R = R_1 \times R_2$ and $M = M_1 \times M_2$ and let N_1 be an R_1-submodule of M_1. Consider the following statements.*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(i) N_1 *is an* α*-prime submodule of* M_1*.*

(ii) $N_1 \times M_2$ *is an* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*.*

(iii) $N_1 \times M_2$ *is a weakly* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*.*

Then $(i) \to (ii) \to (iii)$*. Moreover, if* $\beta(M_2) \neq \{0\}$*, then* $(i), (ii)$ *and* (iii) *are equivalent.*

Proof. $(i) \to (ii)$ Assume that N_1 is an α-prime submodule of M_1. Let $(a, b) \in R_1 \times R_2$ and $(x, y) \in M_1 \times M_2$ be such that $(a, b)[(x, y) + (x, y)] \in N_1 \times M_2$. Then $[a(x+x), b(y+y)] \in N_1 \times M_2$. Thus $a(x+x) \in N_1$. Since N_1 is an α-prime submodule of M_1, $a+a \in (N_1 : M_1)$ or $x+x \in N_1$. This leads to $(a+a, b+b) \in (N_1 \times M_2 : M_1 \times M_2)$ or $(x, y)+(x, y) \in N_1 \times M_2$. Therefore $N_1 \times M_2$ is an α-prime prime submodule of $M_1 \times M_2$. $(ii) \to (iii)$ It is obvious.

Next, let $w \in M_2$ be such that $w + w \neq 0$ and assume that $N_1 \times M_2$ is a weakly α-prime submodule of $M_1 \times M_2$. Let $r \in R_1$ and $m \in M_1$ such that $r(m + m) \in N_1$. Then $(r, 1)[(m, w) + (m, w)] = (r(m+m), w+w) \in N_1 \times M_2 \backslash \{(0, 0)\}$. Since $N_1 \times M_2$ is a weakly α-prime submodule of $M_1 \times M_2$, we have $(r + r, 1 + 1) \in (N_1 \times M_1 : M_1 \times M_2)$ or $(m, w) + (m, w) \in N_1 \times M_2$. This implies that $r + r \in (N_1 : M_1)$ or $m + m \in N_1$. Hence N_1 is an α-prime submodule of M_1.

The following example shows that, in general, the condition $\beta(M_2) \neq \{0\}$ in Proposition 5 can not be omitted.

Example 2. *Let* $M_1 = \mathbb{Z}_8$*,* $M_2 = \{0\}$*,* $R_1 = R_2 = \mathbb{Z}$*. It is clear that* $\{\bar{0}\} \times \{0\}$ *is a weakly* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*. However,* $\{\bar{0}\}$ *is not an* α*-prime submodule of* $\mathbb{Z}$*-module* $\mathbb{Z}_8$*.*

Proposition 6. *Let* M_1, M_2 *be* R_1, R_2*-modules respectively and* $N_1 \times N_2$ *be a submodule of* $M_1 \times M_2$*. Then* $\beta(N_1 \times N_2) = \{(0, 0)\}$ *if and only if* $\beta(N_1) = \{0\}$ *and* $\beta(N_2) = \{0\}$*.*

Proof. It is evident.

Proposition 7. *Let* M_1, M_2 *be* R_1, R_2*-modules respectively. Then*

(i) If $N_1 \times N_2$ *is a weakly* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*, then either* $\beta(N_1) = \{0\}$ *or* $\alpha(N_1) = M_1$ *or* $\alpha(N_2) = M_2$*.*

(ii) If $N_1 \times N_2$ *is a weakly* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*, then either* $\beta(N_2) = \{0\}$ *or* $\alpha(N_1) = M_1$ *or* $\alpha(N_2) = M_2$*.*

(iii) If $N_1 \times N_2$ *is a weakly* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*, then* $\beta(N_1) = \{0\}$ *or* $\alpha(N_2) = M_2$ *or* $N_1 \times N_2$ *is an* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*.*

(iv) If $N_1 \times N_2$ *is a weakly* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*, then* $\beta(N_2) = \{0\}$ *or* $\alpha(N_1) = M_1$ *or* $N_1 \times N_2$ *is an* α*-prime submodule of* $M_1 \times M_2$*.*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Proof. (i) Assume that $N_1 \times N_2$ is a weakly α-prime submodule of $M_1 \times M_2$ and $\beta(N_1) \neq \{0\}$ and $\alpha(N_1) \neq M_1$. Let $a \in N_1$ be such that $a+a \neq 0$. Let $r \in (N_2 : M_2)$ and $y \in M_2$. Then $(0,0) \neq (a+a, r(y+y)) = (1,r)[(a,y)+(a,y)] \in N_1 \times N_2$. Since $N_1 \times N_2$ is a weakly α-prime submodule of $M_1 \times M_2$, we have $(1+1, r+r)\Big(M_1 \times M_2\Big) \subseteq N_1 \times N_2$ or $(a,y)+(a,y) \in N_1 \times N_2$. This implies that $(1+1)M_1 \subseteq N_1$ or $y+y \in N_2$. Since $\alpha(N_1) \neq M_1$, there is $m \in M_1$ such that $m+m \notin N_1$. This means $(1+1)M_1 \nsubseteq N_1$. Therefore $y \in \alpha(N_2)$.

(ii) The proof is similar to (i).

(iii) Assume that $N_1 \times N_2$ is a weakly α-prime submodule of $M_1 \times M_2$ and $\beta(N_1) \neq \{0\}$ and $\alpha(N_2) \neq M_2$. By (i), $\alpha(N_1) = M_1$. Let $(r_1, r_2) \in R_1 \times R_2$ and $(m_1, m_2) \in M_1 \times M_2$ be such that $(r_1, r_2)[(m_1, m_2) + (m_1, m_2)] \in N_1 \times N_2$. Then $r_1(m_1 + m_1) \in N_1$ and $r_2(m_2+m_2) \in N_2$. Let $a \in N_1$ be such that $a+a \neq 0$. Then $(0,0) \neq (a+a, r_2(m_2+m_2)) = (1, r_2)[(a, m_2) + (a, m_2)] \in N_1 \times N_2$. Since $N_1 \times N_2$ is a weakly α-prime submodule of $M_1 \times M_2$, we have $(1+1, r_2+r_2)\Big(M_1 \times M_2\Big) \subseteq N_1 \times N_2$ or $(a, m_2)+(a, m_2) \in N_1 \times N_2$. Since $N_1 \times N_2$ is a submodule of $M_1 \times M_2$ and $\alpha(N_1) = M_1$, $(r_1+r_1, r_2+r_2)\Big(M_1 \times M_2\Big) \subseteq N_1 \times N_2$ or $(m_1, m_2) + (m_1, m_2) \in N_1 \times N_2$. This implies that $N_1 \times N_2$ is an α-prime submodule of $M_1 \times M_2$.

(iv) The proof is similar to (iii).

The following example obtains that the assumption $\alpha(N_2) \neq M_2$ in the proof of Proposition 7 (iii) is necessary.

Example 3. *Consider a submodule $4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ of a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$, by Proposition 5, $4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ is a weakly α-prime submodule of $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$. However, $4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ is not an α-prime submodule of $\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ because $(1,3)[(2,1)+(2,1)] = (4,6) \in 4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ and $(2,6)\Big(\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}\Big) \nsubseteq 4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$ and $(4,2) \notin 4\mathbb{Z} \times 3\mathbb{Z}$. In particular, $\alpha(3\mathbb{Z}) = 3\mathbb{Z}$.*

4. The traveling of α-prime from modules to rings

In this section we apply the notion of (weakly) α-prime submodules to (weakly) α-prime ideals.

Definition 5. *A proper ideal P of a ring R is called an **α-prime ideal** of R if P is an α-prime submodule of an R-modules R.*

*Similarly, a proper ideal P of a ring R is called a **weakly α-prime ideal** of R if P is an weakly α-prime submodule of an R-modules R.*

It is easy to show that for an ideal P of R, P is an α-prime ideal of R if and only if for all $a, b \in R$, if $a(b+b) \in P$, then $a+a \in P$ or $b+b \in P$. Similarly, P is a weakly α-prime ideal of R if and only if for all $a, b \in R$, if $a(b+b) \in P \backslash \{0\}$, then $a+a \in P$ or $b+b \in P$.

Proposition 8. *If P is an α-prime submodule of an R-module M, then $(P : M)$ is an α-prime ideal of R.*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Proof. Assume that P is an α-prime submodule of an R-module M. Let $a, b \in R$ be such that $a(b+b) \in (P : M)$ and $b+b \notin (P : M)$. Then there exists an element $m \in M$ such that $(b+b)m \notin P$ and $a(b+b)m \in P$. Since P is α-prime and $(b+b)m \notin P$, $a+a \in (P : M)$. Therefore $(P : M)$ is an α-prime ideal of R.

Let R be a ring. The Cartesian product $R \times R$ is a ring under componentwise addition and the multiplication $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + bc)$. We use the notation $R(+)R$ for this ring.

Proposition 9. *If I is an α-prime ideal of a ring R, then $I \times R$ is an α-prime ideal of $R(+)R$.*

Proof. It is straightforward.

Example 4. *We know that $4\mathbb{Z}$ and $6\mathbb{Z}$ are α-prime ideal of $\mathbb{Z}$. In $\mathbb{Z}(+)\mathbb{Z}$, we have $(2,1)[(1,1)+(1,1)] = (2,1)(2,2) = (4,6) \in 4\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$. However, $(4,2) \notin 4\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$ and $(2,2) \notin 4\mathbb{Z} \times 6\mathbb{Z}$. This is an example shows that $I \times J$ may be not an α-prime ideal of $R(+)R$ even if I and J are α-prime ideals of R.*

Proposition 10. *If P is a weakly α-prime submodule of M and $(P : M)\beta(P) \neq 0$, then P is an α-prime submodule of M*

Proof. Assume that P is a weakly α-prime submodule of M and $(P : M)\beta(P) \neq 0$. Let $r \in R$ and $m \in M$ be such that $r(m+m) \in P$. If $r(m+m) \neq 0$, $r+r \in (P : M)$ or $m+m \in P$. Assume that $r(m+m) = 0$. We consider the following two cases.
Case 1. $r\beta(P) \neq 0$.
Then $r(n_0+n_0) \neq 0$ for some $n_0 \in P$. Hence $r(m+m+n_0+n_0) = r(n_0+n_0) \in P$. Since P is a weakly α-prime submodule of M, $r+r \in (P : M)$ or $m+m+n_0+n_0 \in P$. Since $n_o \in P$, $r+r \in (P : M)$ or $m+m \in P$. Hence P is an α-prime submodule of M.
Case 2. $r\beta(P) = 0$.
Subcase 2.1. $(P : M)(m+m) \neq 0$.
Let $k \in (P : M)$ be such that $k(m+m) \neq 0$. Then $(r+k)(m+m) = k(m+m) \in P$. Since P is a weakly α-prime submodule of M, $r+k+r+k \in (P : M)$ or $m+m \in P$. Since $k \in (P : M)$, $r+r \in (P : M)$ or $m+m \in P$. Hence P is an α-prime submodule of M.
Subcase 2.2. $(P : M)(m+m) = 0$.
Since $(P : M)\beta(P) \neq 0$, we have $k(n+n) \neq 0$ for some $k \in (P : M)$ and $n \in P$. Then $(r+k)(m+m+n+n) = r(m+m)+r(n+n)+k(m+m)+k(n+n) = k(n+n) \in P$. Since P is a weakly α-prime submodule of M, $r+k+r+k \in (P : M)$ or $m+m+n+n \in P$. Since $k \in (P : M)$ and $n \in P$, $r+r \in (P : M)$ or $m+m \in P$. Hence P is an α-prime submodule of M.

The following result directly implies from Proposition 8 and 10.

Corollary 2. *If P is a weakly α-prime submodule of M and $(P : M)\beta(P) \neq 0$, then $(P : M)$ is a weakly α-prime ideal of R.*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

We prove in Proposition 8 that if P is an α-prime submodule of an R-module M, then $(P : M)$ is an α-prime ideal of R. However, this situation is false for weakly α-prime submodules.

Example 5. *In* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ *as a* $\mathbb{Z}$*-module, we have* $\{\bar{0}\}$ *is a weakly* α*-prime submodule of* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$*. However,* $(\{\bar{0}\} : \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) = 8\mathbb{Z}$ *is not a* α*-prime ideal of* $\mathbb{Z}$*.*

References

[1] R. Ameri, *On the prime submodules of multiplication modules, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 27: 1715-1724, (2003).

[2] S.E. Atani and F. Farzalipour, *On Weakly Prime Submodules, Tamkang Journal of Mathematics*, 38(3): 247-252, (2007).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

European Journal of Pure and Applied Mathematics

Thawatchai Khumprapussorn
Department of Mathematics,
Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang,
Bangkok 10520, Thailand

June 19, 2018

Re: On α-prime and weakly α-prime submodules

Dear Prof. Thawatchai Khumprapussorn,

I am pleased to confirm that your paper entitled "On α-prime and weakly α-prime submodules - ID 3275" has been accepted for publication in European Journal of Pure and Applied Mathematics.

The paper will be published in the forthcoming Vol. 11, No. 3, July 2018, pp. 610-621 issue.

Thank you for submitting your work to this journal.

With kind regards,

Prof. Dr. Eyüp Çetin
Editor-in-Chief
European Journal of Pure and Applied Mathematics

New York Business Global, USA
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[EJPAM] On α-prime and weakly α-prime submodules / 3275 - Accepted

Eyüp Çetin <eycetin@gmail.com>

Sun 6/3/2018, 4:47 PM

To: thawatchai khumprapussorn <thawatchai.kh@kmitl.ac.th>

Dear Professor Khumprapussorn ,

W e have received two independent reviewer reports. They are for publication of your paper with some minor revision. The reports are available on the system. I also copied them below.

I am glad to inform you that your revised paper entitled " [EJPAM] On α-prime and weakly α-prime submodules - ID 3 2 75 " has been accepted (after minor revision) for the publication at EJPAM . [This is not an official acceptance letter]

Please upload your updated (adding some motivation sentences) tex file prepa red using our EJPAM Latex package and please pay the required article publishing charge 400 USD as soon as possible.

Y ou may pay the required article publishing charge using below link securely using your credit/debit card;
https://waveapps.com/asbs6t-eu3r5j

We need to see your action as we are scheduling and planning the forthcoming issues papers and pages. Thus, please pay the required amount as soon as posible. After the payment, you may send your EJPAM tex file so that we will be able to proceed your paper for publication.

Please do not hesitate to contact in any issue.

Thank you.

Kind regards ,

Eyup Cetin

Editor, EJPAM

Report #1

The author introduces the notion of alpha-prime (as a generalization of prime) and weakly alpha-prime (as a generalization of weakly prime) submodules and investigates some properties and a special case.

I recommend this manuscript to be published after the author explain explicitely the motivation of the generalization from prime to alpha-prime and weakly prime to weakly alpha-prime.

Report #2

The paper is well written and I suggest its publication at your prestigious journal EJPAM.

--

Prof. Dr. Eyüp Çetin
Founding Dean
Faculty of Transportation & Logistics
Istanbul University

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่อนุญาตให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

1) ชื่อ - นามสกุล (ภาษาไทย) นายธวัชชัย คำประภัสสร
   ชื่อ - นามสกุล (ภาษาอังกฤษ) Mr. Thawatchai khumprapussorn
2) ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
3) หน่วยงานและสถานที่อยู่ที่ติดต่อได้สะดวก พร้อมหมายเลขโทรศัพท์ โทรสาร และไปรษณีย์อิเล็กทรอนิกส์
   หน่วยงาน สาขาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ถนนฉลองกรุง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520
   ที่อยู่ 81/3 ซอยนราธิวาสราชนครินทร์ 30 แยก 10 แขวงช่องนนทรี เขตยานนาวา กรุงเทพมหานคร 10120
   E-mail thawatchai.kh@kmitl.ac.th และ khthawat@hotmail.com
4) ประวัติการศึกษา
   วท.ด (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2555
   วท.ม (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2550
   วท.บ (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2547
5) ประสบการณ์งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และ/หรือที่ผ่านมา
   กองทุนวิจัยสถาบัน ประเภททุนพัฒนานักวิจัยใหม่
   เรื่องการวางนัยทั่วไปของ (R,S)-มอดูลย่อยเฉพาะชนิดต่างๆ
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี 2557
   เรื่องเมทริกซ์ในฐานะที่เป็นกึ่งกรุปแกมมา
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี 2558
   เรื่องสมบัติบางประการของ $(1,k)$-ไอดีลเฉพาะ
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี 2560
   เรื่องการวางนัยทั่วไปของวงอาร์เมนดาริซ
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย
   ทุนวิจัยโดยคณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
   ประเภทส่งเสริมนักวิจัย ปี 2561
   เรื่องมอดูลย่อยเฉพาะบนการบวก
   สถานภาพ หัวหน้าโครงการวิจัย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้