การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION OF THE FUNCTION IN LAPLACE TRANSFORMATION TABLE

ชนกวงศ์ อารีมิตรน่วมบัว
วรรณิศา กระดี่ทอง
สายฝน มินบำรุง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION OF THE FUNCTION IN LAPLACE TRANSFORMATION TABLE

ชนกวงศ์ อารีมิตรน่วมบัว
วรรณิศา กระดี่ทอง
สายฝน มินบำรุง

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร
ปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2559

THE DIFFERENTIAL TRANSFORMATION OF THE FUNCTION IN LAPLACE TRANSFORMATION TABLE

Chanokwong Areemitnoumbour
Wannisa Kradeethong
Saifon Minbamrung

A SPECIAL PROBLEM SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIRMENT FOR
THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE (APPLIEDMATHEMATICS)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2016

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ The Differential Transformation Of The Function In Laplace Transformation Table
ชื่อนักศึกษา	นายชนกวงศ์ อารีมิตรน่วมบัว รหัสประจำตัว 56050028 นางสาววรรณิศา กระดี่ทอง รหัสประจำตัว 56050126 นางสาวสายฝน มินบำรุง รหัสประจำตัว 56050148
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.) อนุมัติให้ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) ประจำปีการศึกษา 2559

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรี ประธานกรรมการ	
ดร.เทิดขวัญ ช้างเผือก กรรมการ	เทิดฯ ช.
ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ
ชื่อนักศึกษา	นายชนกวงศ์ อารีมิตรน่วมบัว รหัสประจำตัว 56050028
	นางสาววรรณิศา กระดี่ทอง รหัสประจำตัว 56050126
	นางสาวสายฝน มินบำรุง รหัสประจำตัว 56050148
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)
ภาควิชา	คณิตศาสตร์
คณะ	วิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัย	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง (สจล.)
ปีการศึกษา	2559
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์

บทคัดย่อ

ในงานวิจัยนี้ เราจะศึกษาการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ โดยเขียนโปรแกรมเพื่อหาฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปของอนุกรมกำลังและเป็นการประมาณค่าของฟังก์ชัน แล้วสร้างกราฟเพื่อเปรียบเทียบระหว่างกราฟที่ได้จากผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังและกราฟที่ได้จากฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

คำสำคัญ : การแปลงเชิงอนุพันธ์ ตารางการแปลงลาปลาซ

Title	The Differential Transformation Of The Function In Laplace Transformation Table
Students	Mr. Chanokwong Areemitnoumbour Student ID 56050028
	Miss Wannisa Kradeethong Student ID 56050126
	Miss Saifon Minbamrung Student ID 56050148
Degree	Bachelor of Science (Applied Mathematics)
Department	Mathematics
Faculty	Science
University	King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang (KMITL)
Academic Year	2016
Advisor	Asst.Prof.Dr.Jaipong Kasemsuwan

ABSTRACT

In this paper, we study about differential transform of the functions base on Laplace transform table. The transformed functions is the coefficient of power series. This power series is approximant of function. The program are implemented to find the results. The comparison results between the power series and the functions are shown in this work.

Keywords : Differential Transformation Method, Laplace Transformation Table

กิตติกรรมประกาศ

สำหรับการจัดทำปัญหาพิเศษเรื่องการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำขอขอบคุณ ผศ.ดร.ใจปอง เกษมสุวรรณ์ เป็นอย่างสูง ที่คอยให้ความกรุณาช่วยให้คำปรึกษา และให้ความรู้ในเนื้อหาที่ต้องนำมาใช้ในการแก้ปัญหาพิเศษนี้ และช่วยตรวจสอบแก้ไขให้เกิดความถูกต้องของปัญหาพิเศษนี้อย่างครบถ้วน ตลอดจนเป็นแรงผลักดันให้คณะผู้จัดทำมีความเพียรพยายามในการทำปัญหาพิเศษนี้จนสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณ ผศ.ดร.กนกณัฏฐช์ วัฒนแจ่มศรีและดร. เทิดขวัญ ช้างเผือก ที่ให้ความกรุณาและสละเวลามาเป็นประธานกรรมการและกรรมการในปัญหาพิเศษนี้รวมถึงให้ความรู้และแนะนำเพื่อเป็นประโยชน์สำหรับในการแก้ปัญหาพิเศษนี้ ให้เกิดความถูกต้องและสมบูรณ์

สุดท้ายนี้ทางคณะผู้จัดทำขอขอบคุณอาจารย์สาขาคณิตศาสตร์และคณะวิทยาศาสตร์ทุกท่านที่ช่วยประศาสน์วิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำที่เกี่ยวกับภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติเสมอมา ตลอดจนขอขอบคุณเจ้าหน้าที่สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการใช้บริการห้องและเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษนี้จนสำเร็จไปได้ด้วยดี

นายชนกวงศ์ อารีมิตรน่วมบัว
นางสาววรรณิศา กระดี่ทอง
นางสาวสายฝน มินบำรุง

สารบัญ

หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่ หน้า

สารบัญรูป (ต่อ)

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของงานปัญหา

วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ใน 1 มิติ [4] ถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายในการแก้ปัญหา สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น จะพบได้ทั้งในทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น ปัญหาการไหลหนืด [5] การควบคุมทำนาย [6] การนำความร้อน ข้อได้เปรียบของวิธีนี้ คือ วิธีนี้สามารถใช้ได้โดยตรงกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นและข้อได้เปรียบอีกข้อที่สำคัญ คือ วิธีนี้สามารถลดขนาดการคำนวณในขณะที่ยังคงได้ผลเฉลยในรูปอนุกรมที่มีอัตราการลู่เข้าอย่างรวดเร็ว

การแปลงเชิงอนุพันธ์เป็นการแปลงฟังก์ชัน $y(x)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันเดิม(Original Function) ไปเป็นฟังก์ชันใหม่ $Y(k)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการแปลง(Transform Function) การแปลงเชิงอนุพันธ์(Differential Transform) ของ $y(x)$ นิยามได้โดย

$$\mathrm{Y}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

และการแปลงเชิงอนุพันธ์ผกผันของ $Y(k)$ นิยามได้โดย

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)x^k,$$

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\frac{x^k}{k!}$$

ในงานวิจัยนี้ เราจะศึกษาการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ในตารางของการแปลงลาปลาซและเขียนโปรแกรมสำหรับหาฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังแล้วสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังและกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เพื่อทดสอบความถูกต้องของการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

1.2 วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1) เพื่อศึกษา บทนิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานที่สำคัญของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

2) พัฒนาและปรับปรุงทฤษฎีการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่เหมาะสมกับการนำไปใช้ในการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

3) เขียนโปรแกรมสำหรับหาฟังก์ชันการแปลงและหาอนุกรมกำลังที่ใช้ประมาณค่าฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

4) เพื่อทดสอบความถูกต้องของการแปลงเชิงอนุพันธ์ เราจะนำอนุกรมกำลังที่ได้มาสร้างกราฟเพื่อเปรียบเทียบกับกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

1) ฟังก์ชันที่จะนำมาแปลงในงานวิจัยนี้จะอยู่ในตารางการแปลงลาปลาซ

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงานวิจัย

1) ศึกษาการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform Method: DTM) นิยาม ทฤษฎีบท และคุณสมบัติพื้นฐานโดยทั่วไปของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์

2) ศึกษา รวบรวมทฤษฎีของวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

3) พัฒนาและปรับปรุงการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

4) เขียนโปรแกรมสำหรับหาฟังก์ชันการแปลงของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

5) วาดกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังที่ได้จากการแปลงเชิงอนุพันธ์และฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) ได้รับความรู้ในการศึกษาการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ บทนิยาม ทฤษฎีบทและคุณสมบัติพื้นฐาน

2) ได้โปรแกรมสำหรับการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆในตารางการแปลงลาปลาซ

3) ฟังก์ชันการแปลงที่ได้จากตารางการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ สามารถถูกนำไปใช้แก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์ในอนาคตได

บทที่2
ความรู้พื้นฐาน

2.1 อนุกรมกำลัง และ อนุกรมเทย์เลอร์[1]

2.1.1 อนุกรมกำลัง (Power Series)

นิยามที่ 1 ให้ $c, a_0, a_1, a_2, \ldots,$ เป็นค่าคงที่และ x เป็นตัวแปร เราเรียกอนุกรมที่เขียนในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \text{ หรือ } a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n$$

ว่าอนุกรมกำลังในกำลังของ $x-c$ เรียก a_n เมื่อ $n=1,2,3,\ldots$ ว่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง และเรียก c ว่าศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง

ถ้า $c=0$ จะได้อนุกรมกำลังของ x เป็น

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots$$

เนื่องจากค่าของแต่ละพจน์ในอนุกรมขึ้นอยู่กับค่าของ x ลักษณะการลู่เข้าของอนุกรมกำลังจึงขึ้นอยู่กับค่าของ x

<u>ตัวอย่างที่2.1</u> ตัวอย่างอนุกรมกำลัง

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$ เป็นอนุกรมกำลังศูนย์กลางที่ 0

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \ldots + (x-1)^n + \ldots$
เป็นอนุกรมกำลังศูนย์กลางที่ 1

2.1.2 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor's Series) และอนุกรมแมคลอริน (Maclaurin's Series)

นิยามที่ 2 ถ้า f มีค่าอนุพันธ์ทุกอันดับที่ a เรานิยาม อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบ $x=a$ (Taylor series for f about $x=a$) ให้เป็นอนุกรมต่อไปนี้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

และถ้า $a=0$ เราจะเรียกอนุกรมข้างต้นว่า **อนุกรมแมคลอรินของ** f (Maclaurin series)

นั่นก็คือ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

ตัวอย่างที่2.2 กำหนดให้ $f(x)=cos\ x$ จงหาอนุกรมแมคลอรินของ $f(x)$

วิธีทำ อนุกรมแมคลอรินของ f เขียนได้ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots$$

$f(x)=cos\ x$ จะได้ $f(0)=cos\ 0=1$

$f'(x)=-sin\ x$ จะได้ $f'(0)=-sin\ 0=0$

$f''(x)=-cos\ x$ จะได้ $f''(c)=-cos\ 0=-1$

$f^{(3)}(x)=sin\ x$ จะได้ $f^{(3)}(x)=sin\ 0=0$

$f^{(4)}(x)=cos\ x$ จะได้ $f^{(4)}(x)=cos\ 0=1$

ดังนั้น อนุกรมแมคลอรินของ $f(x)$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(n)}}{(2n)!}x^{2n}$$

ตัวอย่างที่2.3 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\frac{1}{x}$ ที่ $x=1$

วิธีทำ $f(x)=\frac{1}{x}$ แล้ว $f(1)=1$

$f'(\mathrm{x})=-\frac{1}{x^2}$ แล้ว $f'(1)=-1$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$ แล้ว $f''(1)=(2)$

$f'''(x)=-\frac{(2)(3)}{x^4}$ แล้ว $f'''(1)=-(2)(3)$

$f^4(x)=-\frac{(2)(3)(4)}{x^5}$ แล้ว $f^4(1)=(2)(3)(4)$

.

.

.

$f^n(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^n}$ แล้ว $f^n(1)=(-1)^n n!$

ดังนั้นอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x)=\frac{1}{x}$ ที่ $x=1$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3+\ldots$$

$$+\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n+\ldots$$

$$=1-1(x-1)+\frac{2(x-1)^2}{2!}-\frac{(2)(3)(x-1)^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n n!(x-1)^n}{n!}$$

$$=1-1(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots+(-1)^n(x-1)^n+\ldots$$

2.2 นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์และทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง[2]

นิยามที่ 3 การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform) ของฟังก์ชัน $\mathrm{y}(x)$ กำหนดโดย

$$\mathrm{Y}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \qquad \text{โดยที่} \quad \mathrm{Y}:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, \mathrm{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \tag{2.1}$$

การแปลงเชิงอนุพันธ์เป็นการแปลงฟังก์ชัน $y(x)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันเดิม (Original Function) ไปเป็นฟังก์ชันใหม่ $Y(k)$ ซึ่งเรียกว่า ฟังก์ชันการแปลง(Transform Function)

นิยามที่ 4 การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse Transform) การแปลงเชิงผกผันของ $\mathrm{Y}(k)$ ในสมการที่ (2.1) กำหนดโดย

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)x^k \qquad \text{โดยที่} \quad \mathrm{Y}:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, \mathrm{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

จะได้

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}\frac{x^k}{k!} \qquad \text{โดยที่} \quad \mathrm{y}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

ทฤษฎีหลักมูลของการแปลงค่า 1 มิติ

ทฤษฎีบทที่ 1 ให้ $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $W:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$, $Y:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$, $\mathrm{Z}:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ ถ้า $w(x)=y(x)\pm z(x)$ แล้ว $W(\mathrm{k})=Y(\mathrm{k})\pm \mathrm{Z}(\mathrm{k})$.

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k)=W(k)$ จะได้ $W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}$

นั่นคือ $Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$ และ $\mathrm{Z}(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k z(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$

แทนค่า $w(x)=y(x)\pm z(x)$ จะได้ว่า

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(y(x)\pm z(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0} \pm \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k z(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $W(k) = Y(k) \pm \mathrm{Z}(k)$

ทฤษฎีบทที่ 2 ให้ $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},W:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$ และ c คือค่าคงที่ ถ้า $w(x) = cy(x)$ แล้ว $W(k) = cY(\mathrm{k})$

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k) = W(k)$ จะได้ $W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} w(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $w(x) = cy(x)$ จะได้ว่า

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k(\mathrm{c}\, y(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

$$= c\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $W(k) = cY(k)$

ทฤษฎีบทที่ 3 ให้ $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $W:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$ ถ้า $w(x) = \frac{dy(x)}{dx}$ แล้ว $W(k) = (k+1)Y(k+1)$

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k) = W(k)$ จะได้ $W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k} w(x)\right]_{x=0}$

นั่นคือ $Y(k+1) = \frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} y(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $w(x) = \frac{d}{dx} y(x)$ จะได้ว่า

$$W(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{dy(x)}{dx}\right)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} y(x)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{(k+1)!}{k!(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} y(x)\right]_{x=0}$$

$$= \frac{(k+1)}{(k+1)!}\left[\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} y(x)\right]_{x=0}$$

ดังนั้น $W(k) = (k+1)Y(k+1)$

ทฤษฎีบทที่ 4 ให้ $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $W:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$
ถ้า $w(x)=\dfrac{d^{n}y(x)}{dx^{n}}$ แล้ว $W(k)=\dfrac{(k+n)!}{k!}Y(k+n)$

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k)=W(k)$ จะได้ $W(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^{k}}{dx^{k}}w(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $w(x)=\dfrac{d^{n}y(x)}{dx^{n}}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
W(k)&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}}{dx^{k}}\left(\frac{d^{n}y(x)}{dx^{n}}\right)\right]_{x=0}\\
&=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}y(x)\right]_{x=0}\\
&=\frac{1}{k!}\frac{(k+n)!}{(k+n)!}\left[\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}y(x)\right]_{x=0}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $W(k)=\dfrac{(k+n)!}{k!}Y(k+n)$

บทแทรกที่ 1 สูตรของไลน์นิตซ์ สำหรับการหาอนุพันธ์ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

$$D^{k}(uv)=u^{(k)}v+\binom{k}{1}u^{(k-1)}v'+\binom{k}{2}u^{(k-2)}v''+\ldots+\binom{k}{k}uv^{(k)} \qquad (*)$$

<u>พิสูจน์</u> เราจะใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์ บน k
ให้ $P(k)$ แทนสมการที่ (*)
จะได้ $P(1)$ คือ $D(uv)=u'v+uv'$ เป็นจริง
และ ถ้า $P(m)$ เป็นจริง นั้นคือ

$$D^{m}(uv)=u^{(m)}v+\binom{m}{1}u^{(m-1)}v'+\binom{m}{2}u^{(m-2)}v''+\ldots+\binom{m}{m}uv^{(m)}$$

$$D\left(D^{m}(uv)\right)=D\left(u^{(m)}v+\binom{m}{1}u^{(m-1)}v'+\binom{m}{2}u^{(m-2)}v''+\ldots+\binom{m}{m}uv^{(m)}\right)$$

$$\begin{aligned}
D^{m+1}(uv)\quad&=\left(u^{(m)}v'+vu^{(m+1)}\right)+\binom{m}{1}\left(u^{(m-1)}v''+v'u^{(m)}\right)+\binom{m}{2}\left(u^{(m-2)}v'''+v''u^{(m-1)}\right)+\ldots+\\
&\binom{m}{m-1}\left(u'v^{(m)}+v^{(m-1)}u''\right)+\binom{m}{m}\left(uv^{(m+1)}+v^{(m)}u'\right)
\end{aligned}$$

$$= u^{(m)}v' + vu^{(m+1)} + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v'' + \binom{m}{1}v'u^{(m)} + \binom{m}{2}u^{(m-2)}v''' + \binom{m}{2}v''u^{(m-1)} + \ldots +$$

$$\binom{m}{m-1}u'v^{(m)} + \binom{m}{m-1}v^{(m-1)}u'' + \binom{m}{m}uv^{(m+1)} + \binom{m}{m}v^{(m)}u'$$

$$= u^{(m+1)}v + \binom{m}{0}u^{(m)}v' + \binom{m}{1}v'u^{(m)} + \binom{m}{1}u^{(m-1)}v'' + \binom{m}{2}v''u^{(m-1)} + \ldots +$$

$$\binom{m}{m-1}u'v^{(m)} + \binom{m}{m}v^{(m)}u'$$

เนื่องจาก $\binom{m}{r} + \binom{m}{r+1} = \binom{m+1}{r+1}$ จะได้ว่า

$$D^{m+1}(uv) = u^{(m+1)}v + \binom{m+1}{1}u^{m}v' + \binom{m+1}{2}u^{(m-1)}v'' + \ldots + \binom{m+1}{m+1}uv^{(m+1)}$$

นั้นคือ $P(m+1)$ จริง เมื่อ $P(m)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ $P(k)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบทที่ 5 ให้ $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $W:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R},$ $\mathrm{Z}:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$ ถ้า $w(x)=y(x)z(x)$ แล้ว $W(\mathrm{k})=\sum_{m=0}^{k}Y(m)Z(k-m)$

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k)=W(k)$ จะได้ $W(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $w(x)=y(x)z(x)$ จะได้ว่า

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k\ \mathrm{y}(x)\,\mathrm{z}(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

ใช้บทแทรกที่ 1 จะได้

$$=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\left[\frac{d^m y(x)}{dx^m}\frac{d^{k-m}\,\mathrm{z}(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dx^m}y(x)\right]\left[\frac{1}{(k-m)!}\frac{d^{k-m}\,\mathrm{z}(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}Y(m)\,Z(k-m)$$

ดังนั้น $W(k)=\sum_{m=0}^{k}Y(m)\,\mathrm{Z}(k-m)$

ทฤษฎีบทที่ 6 ให้ $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $W:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R},$ $\mathrm{Z}:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ ถ้า $w(x)=y'(x)z(x)$ แล้ว $W(\mathrm{k})=\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)Z(k-m)$

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k)=W(k)$ จะได้ $W(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $w(x)=y'(x)z(x)$ จะได้ว่า

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k\ \mathrm{y}'(x)\,\mathrm{z}(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

ใช้บทแทรกที่ 1 จะได้

$$=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\left[\frac{d^m y'(x)}{dx^m}\frac{d^{k-m}\,\mathrm{z}(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\left[\frac{d^{m+1}y(x)}{dx^{m+1}}\frac{d^{k-m}\,\mathrm{z}(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}y(x)\right]\left[\frac{1}{(k-m)!}\frac{d^{k-m}\,\mathrm{z}(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}\frac{(m+1)!}{(m+1)!}\frac{1}{m!}\left[\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}y(x)\right]\left[\frac{1}{(k-m)!}\frac{d^{k-m}\,\mathrm{z}(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(m+1)\left[\frac{1}{(\mathrm{m}+1)!}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}y(x)\right]\left[\frac{1}{(k-m)!}\frac{d^{k-m}\,\mathrm{z}(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$=\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)\,Z(k-m)$$

ดังนั้น $W(\mathrm{k})=\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)Z(k-m)$

ทฤษฎีบทที่ 7 ให้ $w:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ y:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ z:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $W:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R},\ Y:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R},$ $\mathrm{Z}:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$ ถ้า $w(x)=y(x)z'(x)$ แล้ว $W(\mathrm{k})=\sum_{m=0}^{k}(\mathrm{k}+1-\mathrm{m})\,\mathrm{Y}(m)Z(k+1-m)$

<u>พิสูจน์</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k)=W(k)$ จะได้ $W(k)=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}$

แทนค่า $w(x)=y(x)z'(x)$ จะได้ว่า

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k\ \mathrm{y}(x)\,\mathrm{z}'(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$$

ใช้บทแทรกที่ 1 จะได้

$$= \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\left[\frac{d^m y(x)}{dx^m}\frac{d^{k-m}\, z'(x)}{dx^{k-m}}\right]_{x=0}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{k}\frac{k!}{m!(k-m)!}\left[\frac{d^m y(x)}{dx^m}\frac{d^{k+1-m}\, z(x)}{dx^{k+1-m}}\right]_{x=0}$$

$$= \sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dx^m}y(x)\right]\frac{(k+1-m)!}{(k+1-m)!}\left[\frac{1}{(k-m)!}\frac{d^{k+1-m}\, z(x)}{dx^{k+1-m}}\right]_{x=0}$$

$$= \sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{dx^m}y(x)\right](k+1-m)\left[\frac{1}{(k+1-m)!}\frac{d^{k+1-m}\, z(x)}{dx^{k+1-m}}\right]_{x=0}$$

$$= \sum_{m=0}^{k}(k+1-m)Y(m)Z(k+1-m)$$

ดังนั้น $W(\mathrm{k}) = \sum_{m=0}^{k}(\mathrm{k}+1-\mathrm{m})\,\mathrm{Y}(m)Z(k+1-m)$

หมายเหตุ กำหนดให้ c เป็นค่าคงตัวใดๆและ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

2.3 การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้น[3]

ฟังก์ชันการแปลงจะถูกกำหนดให้อยู่ในรูปความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เกี่ยวข้องกับอนุกรมจำกัด ในที่นี้ ให้ a และ b เป็นค่าคงที่

<u>กรณีที่1</u> Exponential nonlinearity : $f(y) = e^{ay(x)}$.

จากนิยามการแปลง $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$ จะได้

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(y(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F(0) = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f(y(x))}{dx^0}\right]_{x=0}$$

$$= \left[f(y(x))\right]_{x=0}$$

$$= \left[e^{ay(x)}\right]_{x=0}$$

$$= e^{ay(0)}$$

$$F(0) = e^{aY(0)} \tag{2.2}$$

หาอนุพันธ์ของ $f(y) = e^{ay}$ เทียบกับตัวแปร x จะได้

$$\frac{df(y)}{dx} = ae^{ay}\frac{dy(x)}{dx} = af(y)\frac{dy(x)}{dx}. \tag{2.3}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (2.3) จะได้

$$(k+1)F(k+1) = a\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)F(k-m). \tag{2.4}$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้ $k+1 = k_1$

พิจารณาเมื่อ $k \geq 1$ $\qquad k = k_1 - 1$

$$(k)F(k) = a\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)F(k-1-m)$$

$$F(k) = a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(m+1)}{k}Y(m+1)F(k-1-m), \quad k \geq 1. \tag{2.5}$$

รวมสมการ (2.2) และ (2.5) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f(y) = e^{ay}$

$$F(k) = \begin{cases} e^{aY(0)}, & k = 0, \\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(m+1)}{k}Y(m+1)F(k-1-m), & k \geq 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

<u>กรณีที่2</u> Logarithmic nonlinearity : $f(y) = ln(a+by),\ a+by > 0.$

จากนิยามการแปลง $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$ จะได้

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(y(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$F(0) = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f(y(x))}{dx^0}\right]_{x=0}$$

$$= 1\left[f(y(x))\right]_{x=0}$$

$$= \left[ln(a+by(x))\right]_{x=0}$$

$$= ln(a+by(0))$$

$$F(0) = ln(a+bY(0)) \tag{2.7}$$

หาอนุพันธ์ของ $f(y) = ln(a+by)$ เทียบกับตัวแปร x จะได้

$$\frac{df(y(x))}{dx} = \frac{b}{a+by}\frac{dy(x)}{dx}$$

$$(a+by)\frac{df(y(x))}{dx} = b\frac{dy(x)}{dx}$$

$$a\frac{df(y(x))}{dx} + by\frac{df(y(x))}{dx} = b\frac{dy(x)}{dx}$$

$$a\frac{df(y(x))}{dx} = b\frac{dy(x)}{dx} - by\frac{df(y(x))}{dx}$$

$$a\frac{df(y(x))}{dx} = b\left(\frac{dy(x)}{dx} - y\frac{df(y(x))}{dx}\right) \tag{2.8}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (2.8) จะได้

$$a\left[(k+1)F(k+1)\right] = b\left[(k+1)Y(k+1)-\sum_{m=0}^{k}(m+1)F(m+1)Y(k-m)\right]$$

$$aF(k+1) = b\left[\frac{(k+1)Y(k+1)}{(k+1)}-\sum_{m=0}^{k}\frac{(m+1)F(m+1)Y(k-m)}{(k+1)}\right]$$

$$= b\left[Y(k+1)-\sum_{m=0}^{k}\frac{(m+1)F(m+1)Y(k-m)}{(k+1)}\right] \qquad (2.9)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k ผลลัพธ์คือ

$$aF(k) = b\left[Y(k)-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(m+1)F(m+1)Y(k-1-m)}{k}\right], \quad k\geq 1. \qquad (2.10)$$

เมื่อแทน $k = 1$ ในสมการ (2.10) จะได้

$$aF(1) = b\left[Y(1)-\sum_{m=0}^{0}\frac{(m+1)F(m+1)Y(1-1-m)}{(1)}\right]$$

$$= b\left[Y(1)-\frac{1}{1}F(0+1)Y(0-0)\right]$$

$$= bY(1) - bF(1)Y(0)$$

$$aF(1) + bF(1)Y(0) = bY(1)$$

$$F(1) = \frac{b}{a+bY(0)}Y(1)$$

พิจารณาเมื่อ $k\geq 2$

เมื่อแทน $k=2$ ในสมการ (2.10) จะได้

จากสมการ (2.10) $aF(k) = b\left[Y(k)-\sum_{m=0}^{k-1}\frac{(m+1)F(m+1)Y(k-1-m)}{k}\right]$

$$aF(2) = b\left[Y(2)-\sum_{m=0}^{1}\frac{(m+1)F(m+1)Y(1-m)}{2}\right]$$

$$= b\left[Y(2)-\frac{(1)F(1)Y(1)}{2}-\frac{(2)F(2)Y(0)}{2}\right]$$

$$aF(2) + \frac{1}{2}bF(2)Y(0) = bY(2) - bF(1)Y(1)$$

$$F(2) = \frac{b}{a+bY(0)}\left[Y(2)-\frac{1}{2}F(1)Y(1)\right]$$

เมื่อแทน $k=3$ ในสมการ (2.10) จะได้

$$F(3) = \frac{b}{a+bY(0)}\left[Y(3)-\frac{1}{3}F(1)Y(2)-\frac{2}{3}F(2)Y(1)\right]$$

เมื่อแทน $k=4$ ในสมการ (2.10) จะได้

$$F(4) = \frac{b}{a+bY(0)}\left[Y(4)-\frac{1}{4}F(1)Y(3)-\frac{2}{4}F(2)Y(2)-\frac{3}{4}F(3)Y(1)\right]$$

เมื่อแทน $k=5$ ในสมการ (2.10) จะได้

$$F(5) = \frac{b}{a+bY(0)}\left[\begin{array}{l} Y(5)-\frac{1}{5}F(1)Y(4)-\frac{2}{5}F(2)Y(3)-\frac{3}{5}F(3)Y(2) \\ -\frac{4}{5}F(4)Y(1)-\frac{5}{5}F(5)Y(0) \end{array}\right]$$

สรุปได้ว่า เมื่อ $k \geq 2$ สามารถเขียนสมการ (2.10) ได้ใหม่เป็น

$$F(k) = \frac{b}{a+bY(0)}\left[Y(k)-\sum_{m=0}^{k-2}\frac{m+1}{k}F(m+1)Y(k-1-m)\right], \quad k \geq 2$$

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f(y)=ln(a+by)$ คือ

$$F(k) = \begin{cases} ln\left(a+b(0)\right), & k=0, \\ \dfrac{b}{a+bY(0)}Y(1), & k=1, \\ \dfrac{b}{a+bY(0)}\left[Y(k)-\displaystyle\sum_{m=0}^{k-2}\frac{m+1}{k}F(m+1)Y(k-1-m)\right], & k \geq 2 \end{cases} \quad (2.11)$$

<u>**กรณีที่ 3**</u> Trigonometric nonlinearity: $f(y)=sin(ay)$ และ $g(y)=cos(ay)$

จากนิยามการแปลง $Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$ จะได้ว่า

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(y(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$\begin{aligned} F(0) &= \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f(y(x))}{dx^0}\right]_{x=0} \\ &= \left[f(y(x))\right]_{x=0} \\ &= \left[sin\left(ay(x)\right)\right]_{x=0} = sin\left(ay(0)\right) = sin\left(aY(0)\right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$G(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(y(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$\begin{aligned} G(0) &= \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 g(y(x))}{dx^0}\right]_{x=0} \\ &= \left[g(y(x))\right]_{x=0} \\ &= \left[cos\left(ay(x)\right)\right]_{x=0} = cos\left(ay(0)\right) = cos\left(aY(0)\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

หาอนุพันธ์ของ $f(y)=sin(ay)$ และ $g(y)=cos(ay)$ เทียบกับตัวแปร x จะได้

$$\frac{df(y)}{dx}=acos(ay)\frac{dy(x)}{dx}=ag(y)\frac{dy(x)}{dx},$$
$$\frac{dg(y)}{dx}=-asin(ay)\frac{dy(x)}{dx}=-af(y)\frac{dy(x)}{dx}. \quad (2.14)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ 2.14 จะได้

$$\frac{df(y)}{dx} = ag(y)\frac{dy(x)}{dx}$$
$$(k+1)F(k+1) = a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)G(m)Y(k+1-m), \quad (2.15)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{dg(y)}{dx} = -af(y)\frac{dy(x)}{dx}$$
$$(k+1)G(k+1) = -a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)F(m)Y(k+1-m). \quad (2.16)$$

แทน $k+1$ ด้วย k จะได้ว่า

$$kF(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)G(m)Y(k-m)$$
$$F(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}G(m)Y(k-m), \qquad k\geq 1 \quad (2.17)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$kG(k)=-a\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)F(m)Y(k-m)$$
$$G(k)=-a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m), \qquad k\geq 1. \quad (2.18)$$

รวมสมการ (2.12) และสมการ (2.17) เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F(k)=\begin{cases} sin(aY(0)), & k=0, \\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-\mathrm{m}}{\mathrm{k}}G(m)Y(k-m), & k\geq 1. \end{cases} \quad (2.19)$$

รวมสมการ (2.13) และสมการ (2.18) เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$G(k)=\begin{cases} cos(aY(0)), & k=0, \\ -a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m), & k\geq 1. \end{cases} \quad (2.20)$$

<u>**กรณีที่ 4**</u> Hyperbolic nonlinearity: $f(y)=sinh(ay)$ และ $g(y)=cosh(ay)$

จากนิยามการแปลง $Y(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k y(x)}{dx^k}\right]_{x=0}$ จะได้ว่า

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(y(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f(y(x))}{dx^0}\right]_{x=0}$$

$$=\left[f(y(x))\right]_{x=0}$$

$$F(0)=\left[sinh\left(ay(x)\right)\right]_{x=0}=sinh\left(ay(0)\right)=sinh\left(aY(0)\right), \tag{2.21}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$G(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k g(y(x))}{dx^k}\right]_{x=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$G(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 g(y(x))}{dx^0}\right]_{x=0}$$

$$=\left[g(y(x))\right]_{x=0}$$

$$G(0)=\left[cosh\left(ay(x)\right)\right]_{x=0}=cosh\left(ay(0)\right)=cosh\left(aY(0)\right). \tag{2.22}$$

หาอนุพันธ์ของ $f(y)=sinh(ay)$ และ $g(y)=cosh(ay)$ เทียบกับตัวแปร x จะได้

$$\begin{aligned}\frac{df(y)}{dx}&=acosh(ay)\frac{dy(x)}{dx}=ag(y)\frac{dy(x)}{dx},\\ \frac{dg(y)}{dx}&=asinh(ay)\frac{dy(x)}{dx}=af(y)\frac{dy(x)}{dx}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (2.23) จะได้ว่า

$$\frac{df(y)}{dx}=ag(y)\frac{dy(x)}{dx}$$

$$(k+1)F(k+1)=a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)G(m)Y(k+1-m), \tag{2.24}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{dg(y)}{dx}=af(y)\frac{dy(x)}{dx}$$

$$(k+1)G(k+1)=a\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)F(m)Y(k+1-m). \tag{2.25}$$

แทน $k+1$ ด้วย k จะได้ว่า

$$kF(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)G(m)Y(k-m)$$

$$F(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}G(m)Y(k-m)\,, \qquad k\geq 1 \tag{2.26}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$kG(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}(k-m)F(m)Y(k-m)$$

$$G(k)=a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m)\,, \qquad k\geq 1. \tag{2.27}$$

รวมสมการ (2.21) และสมการ (2.26) จะได้เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$F(k)=\begin{cases} sinh\big(aY(0)\big), & k=0, \\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}G(m)Y(k-m), & k\geq 1. \end{cases} \tag{2.28}$$

รวมสมการ (2.22) และสมการ (2.27) จะได้เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$G(k)=\begin{cases} cosh\big(aY(0)\big), & k=0, \\ a\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m), & k\geq 1. \end{cases} \tag{2.29}$$

__ตัวอย่างที่2.4__ พิจารณาปัญหาไม่เชิงเส้นแบบมีค่าเริ่มต้น

$$y''(x)=2y+4yln\,y,\ \ y>0, \tag{2.30}$$

$$\text{I.C.}\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์แปลงสมการ ODE โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=1,\ y'(0)=0$ จะได้ว่า

จากทฤษฎีบทที่4 ถ้า $w(x)=\dfrac{d^n y(x)}{dx^n}$ แล้ว $W(k)=\dfrac{(k+n)!}{k!}Y(k+n)$

พิจารณาที่ $n=2$, $y''(x)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+2)!}{k!}Y(k+2)=(k+2)(k+1)Y(k+2)$

$2y+4ylny$ จะถูกแปลงได้เป็น $2Y(k)\ +\ 4\sum_{m=0}^{k}Y(m)F(k-m)$ (ใช้ทฤษฎีบทที่ 2 และ 5)

ดังนั้นจากปัญหา $y''(x)=2y+4ylny$ จะได้

$$(k+2)(k+1)Y(k+2)=2Y(k)\ +\ 4\sum_{m=0}^{k}Y(m)F(k-m) \tag{2.31}$$

$$Y(0)=1,\ Y(1)=0 \tag{2.32}$$

โดยที่ $F(k)$ เป็น T-function ของ $ln\,y$ และจากสมการ (2.11) จะได้

$(a\ =\ 0\ ,\ b\ =\ 1\ )$

$$F(k)=\begin{cases} ln(Y(0)), & k=0, \\ \dfrac{Y(1)}{Y(0)}, & k=1, \\ \dfrac{Y(k)}{Y(0)}-\sum_{m=0}^{k-2}\dfrac{m+1}{kY(0)}F(m+1)Y(k-1-m), & k\geq 2. \end{cases} \quad (2.33)$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบตามสมการ (2.30) และ $k=0$ ในสมการ (2.33) และ (2.31) จะได้

จากสมการ (2.33) $F(k)= ln(Y(0)),\quad k=0$

เมื่อ $k=0$ จะได้ว่า

$F(0) = ln(Y(0)) = ln1 = 0$

จากสมการ (2.31) $(k+2)(k+1)Y(k+2) = 2Y(k)+4\sum_{m=0}^{k}Y(m)F(k-m)$

เมื่อ $k=0$ จะได้ว่า

$$(0+2)(0+1)Y(0+2) = 2Y(0) + 4\sum_{m=0}^{0}Y(m)F(0-m)$$

$$2Y(2) = 2(1) + 4(1)(0)$$

$$Y(2) = 1$$

เพราะฉะนั้น $F(0) = 0,\ Y(2) = 1$ (2.34)

แทนค่าสมการ (2.30) และ (2.34) และ $k=1$ ในสมการ (2.33) และ (2.31) จะได้

$$F(k) = \frac{Y(1)}{Y(0)},\quad k=1$$

$$F(1) = \frac{Y(1)}{Y(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(k+2)(k+1)Y(k+2) = 2Y(k) + 4\sum_{m=0}^{k}Y(m)F(k-m)$$

$$(1+2)(1+1)Y(1+2) = 2Y(1) + 4\sum_{m=0}^{1}Y(m)F(1-m)$$

$$6Y(3) = 2(0) + 4\left[Y(0)F(1)+Y(1)F(0)\right]$$

$$= 0 + 4\left[(1)(0)+(0)(0)\right]$$

$$Y(3) = 0$$

เพราะฉะนั้น $F(1)= 0,\ Y(3) = 0$ (2.35)

แทนค่าสมการ (2.30),(2.34) และ (2.35) และ $k=2$ ในสมการ (2.33) และ (2.31) จะได้

$$F(k) = \frac{Y(k)}{Y(0)} - \sum_{m=0}^{k-2}\frac{m+1}{kY(0)}F(m+1)Y(k-1-m),\ k\geq 2$$

$$F(2) = \frac{Y(2)}{Y(0)} - \sum_{m=0}^{0}\frac{m+1}{2Y(0)}F(m+1)Y(1-m)$$

$$= 1 - \frac{0+1}{2Y(0)} F(0+1)Y(1-0)$$

$$= 1 - \frac{1}{2(1)}(0)(0)$$

$$F(2) = 1$$

$$(k+2)(k+1)Y(k+2) = 2Y(k) + 4\sum_{m=0}^{k} Y(m)F(k-m)$$

$$(2+2)(2+1)Y(2+2) = 2Y(2) + 4\sum_{m=0}^{2} Y(m)F(2-m)$$

$$12Y(4) = 2 + 4\left[Y(0)F(2) + Y(1)F(1) + Y(2)F(0)\right]$$

$$= 2 + 4\left[(1)(1) + (0)(0) + (1)(0)\right]$$

$$Y(4) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}$$

เพราะฉะนั้น $F(2) = 1,\ Y(4) = \frac{1}{2!}$ (2.36)

แทนค่าสมการ (2.30),(2.34)-(2.36) และ $k = 3$ ในสมการ (2.33) และ (2.31) จะได้

$$F(3) = \frac{Y(3)}{Y(0)} - \sum_{m=0}^{1} \frac{m+1}{3Y(0)} F(m+1)Y(2-m)$$

$$= -\frac{1}{3Y(0)} F(1)Y(2) - \frac{2}{3Y(0)} F(2)Y(1)$$

$$F(3) = 0$$

$$(3+2)(3+1)Y(3+2) = 2Y(3) + 4\sum_{m=0}^{3} Y(m)F(3-m)$$

$$20Y(5) = 0 + 4\left[Y(0)F(3) + Y(1)F(2) + Y(2)F(1) + Y(3)F(0)\right]$$

$$Y(5) = 0$$

เพราะฉะนั้น $F(3) = 0,\ Y(5) = 0$ (2.37)

แทนค่าสมการ (2.30),(2.34)-(2.37) และ $k = 4$ ในสมการ (2.33) และ (2.31) จะได้

$$F(4) = \frac{Y(4)}{Y(0)} - \sum_{m=0}^{2} \frac{m+1}{4Y(0)} F(m+1)Y(3-m)$$

$$= 0$$

$$(4+2)(4+1)Y(4+2) = 2Y(4) + 4\sum_{m=0}^{4} Y(m)F(4-m)$$

$$Y(6) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$$

เพราะฉะนั้น $F(4) = 0,\ Y(6) = \frac{1}{3!}$ (2.38)

แทนค่าสมการ (2.30),(2.34)-(2.38) และ $k=5$ ในสมการ (2.33) และ (2.31) จะได้

$$F(5) = \frac{Y(5)}{Y(0)} - \sum_{m=0}^{3}\frac{m+1}{5Y(0)}F(m+1)Y(4-m)$$
$$= 0$$

$$(5+2)(5+1)Y(5+2) = 2Y(5) + 4\sum_{m=0}^{5}Y(m)F(5-m)$$
$$Y(7) = 0$$

เพราะฉะนั้น $F(5) = 0,\ Y(7) = 0$ (2.39)

แทนค่าสมการ (2.30),(2.34)-(2.39) และ $k=6$ ในสมการ (2.33) และ (2.31) จะได้

$$F(6) = \frac{Y(6)}{Y(0)} - \sum_{m=0}^{4}\frac{m+1}{6Y(0)}F(m+1)Y(5-m)$$
$$= 0$$

$$(6+2)(6+1)Y(6+2) = 2Y(6) + 4\sum_{m=0}^{6}Y(m)F(6-m)$$
$$Y(8) = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}$$

เพราะฉะนั้น $F(6)=0,\ Y(8)=\frac{1}{4!}$ (2.40)

จากการคำนวณข้างต้น เราจะได้ว่า

$Y(0)=1,\ Y(1)=0,\ Y(2)=1,\ Y(3)=0$

$Y(4)=\frac{1}{2!},\ Y(5)=0,\ Y(6)=\frac{1}{3!},\ Y(7)=0,\ Y(8)=\frac{1}{4!}$

โดยทั่วไปเราจะพบว่า

$$Y(2k) = \frac{1}{k!},\quad Y(2k+1)=0,\quad k=0,1,2,\ldots$$

แทน $Y(k)$ ในสมการ $y(x) = \sum_{m=0}^{k}Y(k)x^k$ จะได้ผลเฉลยแบบ exact เป็น

$$y(x) = 1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\frac{1}{3!}x^6+\frac{1}{4!}x^8+\cdots = \sum_{m=0}^{k}\frac{1}{k!}x^{2k} = e^{x^2}$$

<u>ตัวอย่างที่2.5</u> พิจารณาปัญหาค่าเริ่มต้นของ $Bratu-type$

$$y''(x) - 2e^{y} = 0,\quad 0<x<1, \tag{2.41}$$
$$\text{I.C. } y(0)=y'(0)= 0$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์แปลงสมการ ODE โดยใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=0,\ y'(0)=0$ จะได้ว่า

จากทฤษฎีบทที่4 ถ้า $w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$ แล้ว $W(k)=\frac{(k+n)!}{k!}Y(k+n)$

พิจารณาที่ $n=2,\ \ y''(x)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\frac{(k+2)!}{k!}Y(k+2) = (k+2)(k+1)Y(k+2)$

และจากทฤษฎีบทที่2 ถ้า $w(x)=cy(x)$ แล้ว $W(k)=cY(k)$ จะได้ $2e^{y} = 2F(k)$

ดังนั้นจากปัญหา $y''(x)-2e^{y}=0$ จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)-2F(k)=0$$

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=2F(k) \tag{2.42}$$

$$Y(0)=Y(1)=0 \tag{2.43}$$

โดยที่ $F(k)$ เป็น T-function ของ e^{y} $(a=1)$ และจากสมการ (2.6) จะได้

$$F(k)=\begin{cases} e^{Y(0)}, & k=0, \\ \sum_{m=0}^{k-1}\frac{m+1}{k}Y(m+1)F(k-m-1), & k\geq 1. \end{cases} \tag{2.44}$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบตามสมการ (2.43) และ $k=0$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

จากสมการ (2.44)

$$F(k)=e^{Y(0)}$$

เมื่อ $k=0$ จะได้ว่า

$$F(0)=e^{0}=1$$

จากสมการ (2.42)

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=2F(k)$$

เมื่อ $k=0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(0+1)(0+2)Y(0+2)&=2F(0)\\ 2Y(2)&=2(1)\\ Y(2)&=1\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(0)=1,\ Y(2)=1$ (2.45)

แทนค่าสมการ (2.43) และ (2.45) และ $k=1$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(k)=\sum_{m=0}^{k-1}\frac{m+1}{k}Y(m+1)F(k-m-1), \quad k\geq 1$$

$$\begin{aligned}F(1)&=\sum_{m=0}^{0}\frac{m+1}{1}Y(m+1)F(1-m-1)\\ &=\frac{1}{1}Y(1)F(0)\\ &=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(k+1)(k+2)Y(k+2)&=2F(k)\\ (1+1)(1+2)Y(1+2)&=2F(1)\\ 2(3)Y(3)&=2(0)\\ Y(3)&=0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(1)=0,\ Y(3)=0$ (2.46)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45),(2.46) และ $k = 2$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(2) = \sum_{m=0}^{1} \frac{m+1}{2} Y(m+1)F(1-m)$$
$$= \frac{1}{2} Y(1)F(1) + \frac{2}{2} Y(2)F(0)$$
$$= 1$$
$$(2+1)(2+2)Y(2+2) = 2F(2)$$
$$12Y(4) = 2(1)$$
$$Y(4) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(2)=1,\ Y(4)=\frac{1}{6}$ (2.47)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.47) และ $k = 3$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(3) = \sum_{m=0}^{2} \frac{m+1}{3} Y(m+1)F(2-m)$$
$$= \frac{1}{3} Y(1)F(2) + \frac{2}{3} Y(2)F(1) + \frac{3}{3} Y(3)F(0)$$
$$= 0$$
$$(3+1)(3+2)Y(3+2) = 2F(3)$$
$$15Y(5) = 2(0)$$
$$Y(5) = 0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(3)=0,\ Y(5)=0$ (2.48)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.48) และ $k = 4$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(4) = \sum_{m=0}^{3} \frac{m+1}{4} Y(m+1)F(3-m)$$
$$= \frac{4}{6}$$
$$(4+1)(4+2)Y(4+2) = 2F(4)$$
$$Y(6) = \frac{2}{45}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(4) = \frac{4}{6},\ Y(6) = \frac{2}{45}$ (2.49)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.49) และ $k = 5$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(5) = \sum_{m=0}^{4} \frac{m+1}{5} Y(m+1)F(4-m)$$
$$= 0$$
$$(5+1)(5+2)Y(5+2) = 2F(5)$$
$$Y(7) = 0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(5) = 0,\ Y(7)=0$ (2.50)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.50) และ $k = 6$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(6) = \sum_{m=0}^{5} \frac{m+1}{6} Y(m+1) F(5-m)$$
$$= \frac{17}{45}$$
$$(6+1)(6+2)Y(6+2) = 2F(6)$$
$$Y(8) = \frac{17}{1260}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $F(6) = \frac{17}{45},\ Y(8) = \frac{17}{1260}$ (2.51)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.51) และ $k = 7$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(7) = \sum_{m=0}^{6} \frac{m+1}{7} Y(m+1) F(6-m)$$
$$= 0$$
$$(7+1)(7+2)Y(7+2) = 2F(7)$$
$$Y(9) = 0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(7) = 0,\ Y(9) = 0$ (2.52)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.52) และ $k = 8$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(8) = \sum_{m=0}^{7} \frac{m+1}{8} Y(m+1) F(7-m)$$
$$= \frac{62}{315}$$
$$(8+1)(8+2)Y(8+2) = 2F(8)$$
$$Y(10) = \frac{62}{14175}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(8) = \frac{62}{315},\ Y(10) = \frac{62}{14175}$ (2.53)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.53) และ $k = 9$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(9) = \sum_{m=0}^{8} \frac{m+1}{9} Y(m+1) F(8-m)$$
$$= 0$$
$$(9+1)(9+2)Y(9+2) = 2F(9)$$
$$Y(11) = 0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(9) = 0,\ Y(11) = 0$ (2.54)

แทนค่าสมการ (2.43),(2.45)-(2.54) และ $k = 10$ ในสมการ (2.44) และ (2.42) จะได้

$$F(10) = \sum_{m=0}^{9} \frac{m+1}{10} Y(m+1) F(9-m)$$

$$= \frac{1382}{14175}$$

$$(10+1)(10+2)Y(10+2) = 2F(10)$$

$$Y(12) = \frac{2764}{467,775}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(10) = \dfrac{1382}{14,175}, \quad Y(12) = \dfrac{2764}{467,775}$ (2.55)

จากการคำนวณจะได้ว่า

$Y(0)=0,\ Y(1)=0,\ Y(2)\ = 1$

$Y(3)=0,\ Y(4)=\dfrac{1}{6},\ Y(5)=0,\ Y(6)=\dfrac{2}{45},\ Y(7)=0,\ Y(8)=\dfrac{17}{1260},$

$Y(9)=0,\ \ \mathrm{Y}(10)=\dfrac{62}{14,175},\ Y(11)=0,\ Y(12)=\dfrac{691}{467,775}$

แทน $Y(k)$ ในสมการ $y(x) = \sum_{m=0}^{k} Y(k)x^k$ จะได้ผลเฉลยแบบ exact เป็น

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{17}{1,260}x^8 + \frac{62}{14,175}x^{10} + \frac{691}{467,775}x^{12} + \cdots$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการนี้มีผลลัพธ์เช่นเดียวกับวิธีการ decomposition method และวิธีการแก้ปัญหาแบบปิดของ wazwaz[7]

ผลลัพธ์รูปแบบปิด คือ $y(x) = -2ln(cos\,x)$

<u>ตัวอย่างที่2.6</u> พิจารณาปัญหาค่าขอบแบบไม่เชิงเส้น ของ $Troesch's\ problem$

$$y''(x) = \mu sinh(\mu y)$$
$$B.C.\quad y(0)=0,\ y(1)=1 \tag{2.56}$$

ใช้การแปลงค่าใน ODE และใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=0$, $y'(0)=B$ จะได้ว่า

จากทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $w(x) = \dfrac{d^n y(x)}{dx^n}$ แล้ว $W(k) = \dfrac{(k+1)!}{k!}Y(k+n)$

พิจารณาที่ $n=2,\quad y''(x)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+2)!}{k!}Y(k+2) = (k+2)(k+1)Y(k+2)$

และกำหนด $\mu sinh(\mu y) = \mu F(k)$ (ใช้ทฤษฎีบทที่ 2)

ดังนั้นจากปัญหา $y''(x) = \mu sinh(\mu y)$

จะได้ว่า $(k+1)(k+2)Y(k+2) = \mu F(k)$ (2.57)

$Y(0)=0\ ,Y(1)=B\ ,$ (2.58)

โดยที่ $F(k)$ เป็น $T-Function$ ของ $sinh(\mu y)$ และได้มาจากสมการ (2.29) $:(a=\mu)$

$$F(k) = \begin{cases} sinh(\mu Y(0))\ , & k=0 \\ \mu \displaystyle\sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k} G(m)Y(k-m)\ , & k \ge 1 \end{cases} \tag{2.59}$$

ที่ $G(k)$ เป็น $T-Function$ ของ $cosh(\mu y)$ และได้มาจากสมการ $(2.30):(a=\mu)$

$$G(k)=\begin{cases} cosh\left(\mu Y(0)\right), & k=0 \\ \mu\sum_{m=0}^{k-1}\frac{k-m}{k}F(m)Y(k-m), & k\geq 1 \end{cases} \tag{2.60}$$

สำหรับแต่ละค่า k แทนค่าสมการ (2.58) ลงในสมการ (2.57),(2.59) และ (2.60) โดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

ที่ $k=0,$

แทนค่าเงื่อนไขขอบตามสมการ (2.58) และ $k=0$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$\begin{aligned} F(k) &= sinh\left(\mu Y(0)\right) \\ F(0) &= sinh\left(\mu Y(0)\right) \\ &= sinh(0) \\ F(0) &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบตามสมการ (2.58) และ $k=0$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$\begin{aligned} G(k) &= cosh\left(\mu Y(0)\right) \\ G(0) &= cosh\left(\mu Y(0)\right) \\ &= cosh(0) \\ G(0) &= 1 \end{aligned}$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบ $F(0)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)Y(k+2) &= \mu F(k) \\ (0+1)(0+2)Y(0+2) &= \mu F(0) \\ (1)(2)Y(2) &= \mu(0) \\ Y(2) &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(0)=0,\ G(0)=1,\ Y(2)=0$ (2.61)

ที่ $k=1,$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61) และ $k=1$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$\begin{aligned} F(1) &= \mu\sum_{m=0}^{0}\frac{1-m}{1}G(m)Y(1-m) \\ &= \mu\left[(1)G(0)Y(1)\right] \\ &= \mu\left[(1)(1)(B)\right] \\ F(1) &= \mu B \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61) และ $k=1$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$\begin{aligned} G(1) &= \mu\sum_{m=0}^{0}\frac{1-m}{1}F(m)Y(1-m) \\ &= \mu\left[(1)F(0)Y(1)\right] \end{aligned}$$

$$=\mu\left[(1)(0)(B)\right]$$

$$G(1)=0$$

แทนค่าเงื่อนไขขอบ $F(1)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=\mu F(k)$$

$$(1+1)(1+2)Y(1+2)=\mu F(1)$$

$$(2)(3)Y(3)=\mu(\mu B)$$

$$Y(3)=\frac{\mu^2}{3!}B$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(1)=\mu B,\ G(1)=0,\ Y(3)=\frac{\mu^2}{3!}B$ (2.62)

ที่ $k=2,$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61),(2.62) และ $k=2$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(2)=\mu\sum_{m=0}^{1}\frac{2-m}{2}G(m)Y(2-m)$$

$$=\mu\left[\left((1)G(0)Y(2)\right)+\left(\left(\frac{1}{2}\right)G(1)Y(1)\right)\right]$$

$$F(2)=0$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61),(2.62) และ $k=2$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$G(2)=\mu\sum_{m=0}^{1}\frac{2-m}{2}F(m)Y(2-m)$$

$$=\mu\left[\left((1)F(0)Y(2)\right)+\left(\left(\frac{1}{2}\right)F(1)Y(1)\right)\right]$$

$$G(2)=\frac{\mu^2}{2!}B^2$$

แทนค่า $F(2)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$(2+1)(2+2)Y(2+2)=\mu F(2)$$

$$12Y(4)=\mu(0)$$

$$Y(4)=0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(2)=0,\ G(2)=\frac{\mu^2}{2!}B^2,\ Y(4)=0$ (2.63)

ที่ $k=3,$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.63) และ $k=3$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(3)=\mu\sum_{m=0}^{2}\frac{3-m}{3}G(m)Y(3-m)$$

$$= \mu\left[\left((1)G(0)Y(3)\right)+\left(\left(\frac{2}{3}\right)G(1)Y(2)\right)+\left(\left(\frac{1}{3}\right)G(2)Y(1)\right)\right]$$

$$F(3)=\frac{\mu^3}{3!}\left(B+B^3\right)$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.63) และ $k=3$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$G(3)=\mu\sum_{m=0}^{2}\frac{3-m}{3}F(m)Y(3-m)$$

$$= \mu\left[\left((1)F(0)Y(3)\right)+\left(\left(\frac{2}{3}\right)F(1)Y(2)\right)+\left(\left(\frac{1}{3}\right)F(2)Y(1)\right)\right]$$

$$G(3)=0$$

แทนค่า $F(3)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$(3+1)(3+2)Y(3+2)=\mu F(3)$$

$$(4)(5)Y(5)=\mu\left(\frac{\mu^3}{3!}\left(B+B^3\right)\right)$$

$$Y(5)=\frac{\mu^4}{5!}\left(B+B^3\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(3)=\frac{\mu^3}{3!}\left(B+B^3\right),\ G(3)=0,\ Y(5)=\frac{\mu^4}{5!}\left(B+B^3\right)$ (2.64)

ที่ $k=4$,

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.64) และ $k=4$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(4)=\mu\sum_{m=0}^{3}\frac{4-m}{4}G(m)Y(4-m)$$

$$=0$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.64) และ $k=4$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$G(4)=\mu\sum_{m=0}^{3}\frac{4-m}{4}F(m)Y(4-m)$$

$$=\frac{\mu^4}{4!}\left(B^4+4B^2\right)$$

แทนค่า $F(4)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$(4+1)(4+2)Y(4+2)=\mu F(4)$$

$$(5)(6)Y(6)=\mu(0)$$

$$Y(6)=0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(4)=0,\ \ G(4)=\frac{\mu^4}{4!}\left(B^4+4B^2\right),\ Y(6)=0$ (2.65)

ที่ $k=5,$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.65) และ $k=5$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$\begin{aligned} F(5) &= \mu\sum_{m=0}^{4}\frac{5-m}{5}G(m)Y(5-m) \\ &= \frac{\mu^5}{5!}\left(B^5+11B^3+B\right) \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.65) และ $k=5$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$\begin{aligned} G(5) &= \mu\sum_{m=0}^{4}\frac{5-m}{5}F(m)Y(5-m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่า $F(5)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$\begin{aligned} (5+1)(5+2)Y(5+2) &= \mu F(5) \\ Y(7) &= \frac{\mu^6}{7!}\left(B^5+11B^3+B\right) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า
$$F(5)=\frac{\mu^5}{5!}\left(B^5+11B^3+B\right),$$
$$G(5)=0, Y(7)=\frac{\mu^6}{7!}\left(B^5+11B^3+B\right) \tag{2.66}$$

ที่ $k=6,$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.66) และ $k=6$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$\begin{aligned} F(6) &= \mu\sum_{m=0}^{5}\frac{6-m}{6}G(m)Y(6-m) \\ &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.66) และ $k=6$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$\begin{aligned} G(6) &= \mu\sum_{m=0}^{5}\frac{6-m}{6}F(m)Y(6-m) \\ &= \frac{\mu^6}{6!}\left(16B^2+26B^4+B^6\right) \end{aligned}$$

แทนค่า $F(6)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$\begin{aligned} (6+1)(6+2)Y(6+2) &= \mu(0) \\ Y(8) &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $F(6)=0,\ G(6)=\frac{\mu^6}{6!}\left(16B^2+26B^4+B^6\right),\ Y(8)=0$ (2.67)

ที่ $k=7,$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.67) และ $k=7$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(7)=\mu\sum_{m=0}^{6}\frac{7-m}{7}G(m)Y(7-m)$$

$$=\frac{\mu^7}{7!}\left(B+102B^3+57B^5+B^7\right)$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.67) และ $k=7$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$G(7)=\mu\sum_{m=0}^{6}\frac{7-m}{7}F(m)Y(7-m)$$
$$=0$$

แทนค่า $F(7)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=\mu F(7)$$
$$(7+1)(7+2)Y(7+2)=\mu\left(\frac{\mu^7}{9!}\left(72B+7,344B^3+4,104B^5+72B^7\right)\right)$$
$$Y(9)=\frac{\mu^8}{9!}\left(B+102B^3+57B^5+B^7\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า
$$F(7)=\frac{\mu^7}{9!}\left(72B^7+3240B^5+3888B^3+72B\right),$$
$$G(7)=0, Y(9)=\frac{\mu^8}{9!}\left(B+102B^3+57B^5+B^7\right) \quad (2.68)$$

ที่ $k=8$,

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.68) และ $k=8$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(8)=\mu\sum_{m=0}^{7}\frac{8-m}{8}G(m)Y(8-m)$$
$$=0$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.68) และ $k=8$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$G(8)=\mu\sum_{m=0}^{7}\frac{8-m}{8}F(m)Y(8-m)$$
$$=\frac{\mu^8}{8!}\left(B^2+480B^4+120B^6+B^8\right)$$

แทนค่า $F(8)$ ในสมการที่ (2.57) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=\mu F(8)$$
$$(8+1)(8+2)Y(8+2)=\mu(0)$$
$$Y(10)=0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า
$$F(8)=0, G(8)=\frac{\mu^8}{8!}\left(B^2+480B^4+120B^6+B^8\right),$$
$$Y(10)=0 \quad (2.69)$$

ที่ $k=9$,

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.69) และ $k=9$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(9)=\mu\sum_{m=0}^{8}\frac{9-m}{9}G(m)Y(9-m)$$

$$= \frac{\mu^9}{9!}\left(B+922B^3+1923B^5+247B^7+B^9\right)$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.69) และ $k=9$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$G(9)=\mu\sum_{m=0}^{8}\frac{9-m}{9}F(m)Y(9-m)$$
$$=0$$

แทนค่า $F(9)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=\mu F(9)$$

$$(9+1)(9+2)Y(9+2)=\mu\left(\frac{\mu^9}{9!}\left(B+922B^3+1923B^5+247B^7+B^9\right)\right)$$

$$Y(11)=\frac{\mu^{10}}{11!}\left(B+922B^3+1923B^5+247B^7+B^9\right)$$

$$F(9)=\frac{\mu^9}{9!}\left(B+922B^3+1923B^5+247B^7+B^9\right),$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า $G(9)=0,$ (2.70)

$$Y(11)=\frac{\mu^{10}}{11!}\left(B+922B^3+1923B^5+247B^7+B^9\right)$$

ที่ $k=10,$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.70) และ $k=10$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(10)=\mu\sum_{m=0}^{9}\frac{10-m}{10}G(m)Y(10-m)$$
$$=0$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.70) และ $k=10$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$G(10)=\mu\sum_{m=0}^{9}\frac{10-m}{10}F(m)Y(10-m)$$
$$=\frac{\mu^{10}}{10!}\left(256B^2+8032B^4+7008B^6+502B^8+B^{10}\right)$$

แทนค่า $F(10)$ ในสมการที่ (2.57) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=\mu F(10)$$
$$(10+1)(10+2)Y(10+2)=\mu(0)$$
$$Y(12)=0$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$F(10)=0,$$

$$G(10)=\frac{\mu^{10}}{10!}\left(256B^2+8032B^4+7008B^6+502B^8+B^{10}\right), \quad (2.71)$$

$$Y(12)=0$$

ที่ $k=11$,

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.71) และ $k=11$ ในสมการ (2.59) จะได้

$$F(11)=\mu\sum_{m=0}^{10}\frac{11-m}{11}G(m)Y(11-m)$$
$$=\frac{\mu^{11}}{11!}\left(B+8303B^3+54415B^5+24040B^7+1013B^9+B^{11}\right)$$

แทนค่าสมการ (2.58),(2.61)-(2.71) และ $k=11$ ในสมการ (2.60) จะได้

$$G(11)=\mu\sum_{m=0}^{10}\frac{11-m}{11}F(m)Y(11-m)$$
$$=0$$

แทนค่า $F(11)$ ในสมการ (2.57) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2)=\mu F(11)$$
$$(11+1)(11+2)Y(11+2)=\mu\left(\frac{\mu^{11}}{11!}\left(B+8303B^3+54415B^5+24040B^7+1013B^9+B^{11}\right)\right)$$
$$Y(13)=\frac{\mu^{12}}{13!}\left(B+8303B^3+54415B^5+24040B^7+1013B^9+B^{11}\right)$$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$F(11)=\frac{\mu^{11}}{11!}\left(B+8303B^3+54415B^5+24040B^7+1013B^9+B^{11}\right),$$
$$G(11)=0,$$
$$Y(13)=\frac{\mu^{12}}{13!}\left(B+8303B^3+54415B^5+24040B^7+1013B^9+B^{11}\right)$$

และจากการแทนค่าในสมการโดยทั่วไปเราพบว่า

$$Y(2k)=0,\ \ k=0,1,2,\ldots$$

แทนค่าทุก $Y(k)$ ใน $y(x)=\sum_{m=0}^{k}Y(k)x^k$ จะได้ผลเฉลยแบบอนุกรม

$$y(x)=Bx+\frac{\mu^2}{3!}Bx^3+\frac{\mu^4}{5!}(B+B^3)x^5+\frac{\mu^6}{7!}\left(B^5+11B^3+B\right)x^7+\ldots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}Y(2k+1)x^{2k+1}$$

B เป็นค่าคงที่ โดยการแทนที่เงื่อนไขขอบ ที่ $x=1$ สำหรับการประมาณค่าพจน์ที่ n ในรูป y_n

โดยที่ $y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}Y(2k+1)x^{2k+1}$ จะได้สมการพหุนามของ B คือ

$$y_n(1)=\sum_{k=0}^{n}Y(2k+1)=1$$

ตัวอย่างที่2.7 พิจารณาปัญหาค่าขอบแบบไม่เชิงเส้น

$$y''(x) = 2yy', \quad 0 \le x \le b < \frac{\pi}{2}, \tag{2.72}$$
$$B.C. \quad y(0) = 0, \quad y'(b) = sec^2 b,$$

โดยที่ b เป็นความยาวช่วง ผลเฉลยที่แน่นอนสำหรับสมการนี้คือ $y(x) = tan(x)$ ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์จาก ODE และใช้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0, y'(1) = A$ จะได้ว่า

จากทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $w(x) = \dfrac{d^n y(x)}{dx^n}$ แล้ว $W(k) = \dfrac{(k+1)!}{k!} Y(k+n)$

พิจารณาที่ $n = 2$, $y''(x)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+2)!}{k!} Y(k+2) = (k+2)(k+1)Y(k+2)$

และ $2yy'$ จะถูกแปลงได้เป็น $2\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)Y(k-m)$ (ใช้ทฤษฎีบทที่ 7)

ดังนั้นจากปัญหา $y''(x) = 2yy'$

จะได้ว่า
$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = 2\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)Y(k-m), \tag{2.73}$$
$$Y(0) = 0\,,\; Y(1) = A \tag{2.74}$$

สำหรับแต่ละ k แทนสมการ (2.74) ลงในสมการ (2.73) โดยความสัมพันธ์เวียนเกิด
แทนค่าเงื่อนไขขอบตามสมการ (2.74) และ $k = 0$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = 2\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)Y(k-m)$$
$$(0+1)(0+2)Y(0+2) = 2\sum_{m=0}^{0}(0+1)Y(0+1)Y(0-0)$$
$$2Y(2) = 2(1)Y(1)Y(0)$$

จะได้ว่า
$$Y(2) = 0 \tag{2.75}$$

แทนค่าสมการ (2.74),(2.75) และ $k = 1$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(1+1)(1+2)Y(1+2) = 2\sum_{m=0}^{1}(m+1)Y(m+1)Y(1-m)$$
$$6Y(3) = 2\left[((1)Y(1)Y(1)) + ((2)Y(2)Y(0))\right]$$
$$= 2\left[((1)(A)(A)) + ((2)(0)(0))\right]$$

จะได้ว่า
$$Y(3) = \frac{1}{3}A^2 \tag{2.76}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.76) และ $k = 2$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(2+1)(2+2)Y(2+2) = 2\sum_{m=0}^{2}(m+1)Y(m+1)Y(2-m)$$
$$12Y(4) = 2\left[((1)Y(1)Y(2)) + ((2)Y(2)Y(1)) + ((3)Y(3)Y(0))\right]$$

จะได้ว่า
$$Y(4) = 0 \tag{2.77}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.77) และ $k=3$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(3+1)(3+2)Y(3+2)=2\sum_{m=0}^{3}(m+1)Y(m+1)Y(3-m)$$

$$20Y(5)=2\begin{bmatrix}((1)Y(1)Y(3))+((2)Y(2)Y(2)) \\ +((3)Y(3)Y(1))+((4)Y(4)Y(0))\end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $$Y(5)=\frac{2}{15}A^3 \tag{2.78}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.78) และ $k=4$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(4+1)(4+2)Y(4+2)=2\sum_{m=0}^{4}(m+1)Y(m+1)Y(4-m)$$

$$Y(6)=0 \tag{2.79}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.79) และ $k=5$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(5+1)(5+2)Y(5+2)=2\sum_{m=0}^{5}(m+1)Y(m+1)Y(5-m)$$

$$Y(7)=\frac{17}{315}A^4 \tag{2.80}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.80) และ $k=6$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(6+1)(6+2)Y(6+2)=2\sum_{m=0}^{6}(m+1)Y(m+1)Y(6-m)$$

$$Y(8)=0 \tag{2.81}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.81) และ $k=7$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(7+1)(7+2)Y(7+2)=2\sum_{m=0}^{7}(m+1)Y(m+1)Y(7-m)$$

$$Y(9)=\frac{62}{2835}A^5 \tag{2.82}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.82) และ $k=8$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(8+1)(8+2)Y(8+2)=2\sum_{m=0}^{8}(m+1)Y(m+1)Y(8-m)$$

$$Y(10)=0 \tag{2.83}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.83) และ $k=9$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(9+1)(9+2)Y(9+2)=2\sum_{m=0}^{9}(m+1)Y(m+1)Y(9-m)$$

$$Y(11)=\frac{1382}{155925}A^6 \tag{2.84}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.84) และ $k=10$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(10+1)(10+2)Y(10+2)=2\sum_{m=0}^{10}(m+1)Y(m+1)Y(10-m)$$

$$Y(12)=0 \tag{2.85}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.85) และ $k=11$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(11+1)(11+2)Y(11+2)=2\sum_{m=0}^{11}(m+1)Y(m+1)Y(11-m)$$

$$Y(13)=\frac{21844}{6081075}A^{7} \tag{2.86}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.86) และ $k=12$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(12+1)(12+2)Y(12+2)=2\sum_{m=0}^{12}(m+1)Y(m+1)Y(12-m)$$

$$Y(14)=0 \tag{2.87}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.87) และ $k=13$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(13+1)(13+2)Y(13+2)=2\sum_{m=0}^{13}(m+1)Y(m+1)Y(13-m)$$

$$Y(15)=\frac{929569}{638512875}A^{8} \tag{2.88}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.88) และ $k=14$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(14+1)(14+2)Y(14+2)=2\sum_{m=0}^{14}(m+1)Y(m+1)Y(14-m)$$

$$Y(16)=0 \tag{2.89}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.89) และ $k=15$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(15+1)(15+2)Y(15+2)=2\sum_{m=0}^{15}(m+1)Y(m+1)Y(15-m)$$

$$Y(17)=\frac{6,404,582}{10,854,718,875}A^{9} \tag{2.90}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.90) และ $k=16$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(16+1)(16+2)Y(16+2)=2\sum_{m=0}^{16}(m+1)Y(m+1)Y(16-m)$$

$$Y(18)=0 \tag{2.91}$$

แทนค่าสมการ (2.74)-(2.91) และ $k=17$ ในสมการ (2.73) จะได้

$$(17+1)(17+2)Y(17+2)=2\sum_{m=0}^{17}(m+1)Y(m+1)Y(17-m)$$

$$Y(19)=\frac{443,861,162}{1,856,156,927,625}A^{10} \qquad (2.92)$$

และจากการแทนค่าในสมการโดยทั่วไปเราพบว่า

$Y(2k)=0,\ \ k=0,1,2,\ldots$

แทนค่า $Y(k)$ ใน $y(x)=\sum_{m=0}^{k}Y(k)x^{k}$ จะได้ผลเฉลยในรูปแบบอนุกรม

$$y_n(x)=Ax+\frac{1}{3}A^2x^3+\frac{2}{15}A^3x^5+\frac{17}{315}A^4x^7+\frac{62}{2835}A^5x^9+\ldots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}Y(2k+1)x^{2k+1}$$

A เป็นค่าคงที่ โดยการแทนที่เงื่อนไขของ $\mathrm{x}=b$ สำหรับการประมาณค่าพจน์ที่ n ในรูป y_n โดยที่

$$y_n(x)=\sum_{k=0}^{n}Y(2k+1)x^{2k+1}$$

สมการพหุนามของ A จะได้ว่า

$$y'_n(b)=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)Y(2k+1)b^{2k}=sec^2b$$

2.4 สมการเชิงอนุพันธ์[8]

บทนิยามที่1 สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการซึ่งแสดงความสัมพันธ์กันระหว่างฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ(independent variable) ตัวแปรตาม(dependent variable) และอนุพันธ์ของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระนั้นๆ

บทนิยามที่2 ถ้าตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว อนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการก็จะเป็นอนุพันธ์สามัญ และเราจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์นี้ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ**(ordinary differential equation) แต่ถ้าตัวแปรตามเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัว อนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการก็จะเป็นอนุพันธ์ย่อย ดังที่เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์นี้ว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (partial differential equation)

ตัวอย่างที่2.8

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$3\frac{d^5y}{dx^5}-x^2\frac{d^4y}{dx^4}+e^y\frac{dy}{dx}=-7$$

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}-x^2\frac{dy}{dx}+x\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2+1}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+y\frac{dy}{dx}=y^2$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2u+x^3-xy$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\frac{\partial u}{\partial t}-u^2$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3=2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

บทนิยามที่3

อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการ

ระดับขั้น (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือเลขชี้กำลังของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏในสมการ โดยพิจารณาหลังจากทำให้อนุพันธ์อันดับต่างๆ ในสมการนั้นมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่างที่2.9 1. $x^3\frac{d^3y}{dx^3}-sinx\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=\frac{1}{x^2+1}$ เป็นสมการอันดับ 3 ระดับขั้น 1

2. $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}=x^3y+cosx$ เป็นสมการอันดับ 2 ระดับขั้น 3

บทนิยามที่4 สมการเชิงอนุพันธ์เป็น **สมการเชิงเส้น** (Linear equation) ถ้า

(1) ทุกๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1 เท่านั้น

(2) ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปราม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

(3) ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตาม หรืออนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น** (Nonlinear equation)

ตัวอย่างที่2.10

สมการเชิงเส้น

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=x^3y+cosx$$

$$\frac{dy}{dx}=xy$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=u$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

สมการไม่เชิงเส้น

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+y\frac{dy}{dx}=x^3y+cosx$$

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}}=xy$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=e^u$$

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=2\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

บทนิยามที่7 รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n คือ

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)y=f(x) \qquad (2.93)$$

โดยที่ $a_o(x)\neq 0$ สำหรับทุก x ในช่วง I ช่วงหนึ่ง เราเรียก $a_0(x),a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)$ ว่าเป็น **ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์** (Coefficient functions) ของสมการ และเรียก $a_0(x)$ **ว่า ฟังก์ชันสัมประสิทธิ์นำ** (Leading coefficient functions)

ถ้า $f(x)\neq 0$ ทุกค่า x ในช่วง I เราเรียกสมการ (2.93) ว่า **สมการเอกพันธุ์** (homogeneous equations) ไม่เช่นนั้น เราเรียกสมการ (2.93) ว่า **สมการไม่เอกพันธุ์** (nonhomogeneous equation) **และเรียก** $f(x)$ ว่าเป็น **พจน์ไม่เอกพันธุ์** (nonhomogeneous term) **ของสมการ และเมื่อสมการ (2.93) เป็นสมการไม่เอกพันธุ์** เราจะเรียกสมการ

$$a_0(x)\,y^{(n)}+a_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\,y'+a_n(x)y=0$$

ว่าเป็น **สมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์** (related homogeneous equation) **ของสมการ (2.93)**

<u>**ตัวอย่างที่2.11**</u>

1) $5\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x^2\dfrac{dy}{dx}-e^xy=0$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 2 เอกพันธุ์

2) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-x\dfrac{dy}{dx}+2y=sinx$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับ 3 ไม่เอกพันธุ์

3) $\dfrac{d^3y}{dx^3}-x\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ เป็นสมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์ของสมการ $\dfrac{d^3y}{dx^3}-x\dfrac{dy}{dx}+2y=sinx$

บทที่ 3
วิธีการดำเนินงานวิจัย

3.1 การปรับปรุงและพัฒนาทฤษฎีเพิ่มเติมของการแปลงเชิงอนุพันธ์

จากการศึกษาคุณสมบัติพื้นฐานของการแปลงเชิงอนุพันธ์ เราพบว่าทฤษฎีที่มีอยู่ไม่เพียงพอที่จะนำมาใช้ในการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ งานวิจัยนี้ จึงนำความรู้พื้นฐานที่ได้จาก [3] มาปรับปรุงและพัฒนาทฤษฎีเพิ่มเติม ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 8 ให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $F:\mathbb{Z}^{+}\to\mathbb{R}$

ถ้า $f(t)=c$ แล้ว $F(k)=\begin{cases}c, & k=0\\ 0, & k\geq 1\end{cases}$

<u>**พิสูจน์**</u> จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k)=F(k)$ จะได้ $F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}f(t)\right]_{t=0}$

แทนค่า $f(t)=c$ จะได้ว่า

กรณี $k=0,$
$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}c\right]_{t=0}$$
$$=c$$

กรณี $k\geq 1,$
$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}c\right]_{t=0}$$
$$=0$$

ดังนั้น $$F(k)=\begin{cases}c, & k=0\\ 0, & k\geq 1\end{cases}$$

ทฤษฎีบทที่ 9 ให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $F:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}$

ถ้า $f\left(t\right)=t^m, m=-1,-2,-3,\ldots$ แล้ว $F(k)=\frac{1}{k!}\left[m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\right]$

__พิสูจน์__ จากสมการที่ (2.1) เมื่อ $Y(k)=F(k)$ จะได้ $F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}f\left(t\right)\right]_{t=0}$

แทนค่า $f\left(t\right)=t^m, m=-1,-2,-3,\ldots$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dt^k}t^m\right]_{t=1} \\
&= \frac{1}{k!}\left[m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)t^{m-k}\right] \\
&= \frac{1}{k!}\left[m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)(1)^{m-k}\right] \\
&= \frac{1}{k!}\left[m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\right]$$

3.2 การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ

การแปลงเชิงอนุพันธ์ (Differential Transform) ของฟังก์ชัน $f\left(t\right)$ กำหนดได้โดย

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f\left(t\right)}{dt^k}\right]_{t=0} \quad \text{โดยที่ } F:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}, f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

เมื่อ $f\left(t\right)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และสามารถหาอนุพันธ์ได้ เรียก $f\left(t\right)$ ว่าเป็นฟังก์ชันเดิม (Original Function) และเรียก $F(k)$ ว่าเป็นฟังก์ชันการแปลง (Transform Function) ของ $f\left(t\right)$ หรือเรียกว่า ฟังก์ชันที (T-Function)

การแปลงผกผันเชิงอนุพันธ์ (Differential Inverse Transform) การแปลงเชิงผกผันของ $F(k)$ กำหนดโดย

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}F(k)t^{k}, \qquad \text{โดยที่ } F:\mathbb{Z}^{+}\rightarrow\mathbb{R}, f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$$

$$f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{d^{k}f(t)}{dt^{k}}\right]_{t=0}\frac{t^{k}}{k!} \tag{3.1}$$

ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ a,b,k และ ω เป็นจำนวนจริงและ t มีหน่วยเป็น เรเดียน

3.2.1 พิจารณา $f_1(t)=1$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^{k}f(t)}{dt^{k}}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_1(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^{0}f_1(t)}{dx^{0}}\right]_{t=0}$$

$$=\left[f_1(t)\right]_{t=0}$$

$$F_1(0)=1 \tag{3.2}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_1(t)=1$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_1(t)}{dt}=0 \tag{3.3}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.3) จะได้

$$(k+1)F_1(k+1)=0$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_1(k)=0 \tag{3.4}$$

เมื่อแทน $k = 1$ ในสมการ (3.4) จะได้

$$1F_1(1) = 0$$

$$F_1(1) = 0$$

เมื่อแทน $k=2$ ในสมการ (3.4) จะได้

$$2F_1(2) = 0$$

$$F_1(2) = 0$$

เมื่อแทน $k=3$ ในสมการ (3.4) จะได้

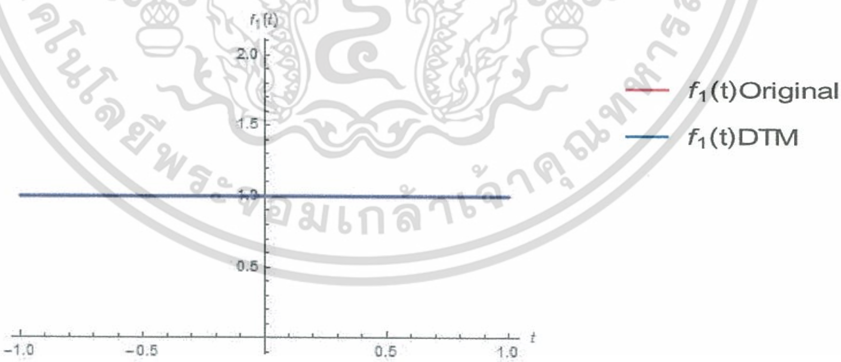
$$3F_1(3) = 0$$

$$F_1(3) = 0$$

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_1(t)=1$ คือ

$$F_1(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.5}$$

กำหนด $k=600$ และ $t\in[-1,1]$ ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.2.1 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_1(t)=1$ ในหัวข้อ 3.2.1 และ $f_1(t)=1t^0+0t^1+0t^2+0t^3+0t^4+0t^5+\ldots+0t^{600}$ จากวิธี DTM

3.2.2 พิจารณา $f_2(t)=t$

โดยที่ $f_1(t)=1$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_2(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f_2(t)}{dx^0}\right]_{t=0}$$
$$=\left[f_1(t)\right]_{t=0}$$
$$=[t]_{t=0}$$

$$F_2(0)=0 \tag{3.6}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_2(t)=t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_2(t)}{dt}=1=f_1(t) \tag{3.7}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.7) จะได้

$$(k+1)F_2(k+1) = F_1(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_2(k) = F_1(k-1) \tag{3.8}$$

เมื่อแทน $k = 1$ ในสมการ (3.8) จะได้

$$kF_2(1) = F_1(1-1)$$

$$F_2(1) = \frac{F_1(0)}{k}$$

เมื่อแทน $k=2$ ในสมการ (3.8) จะได้

$$kF_2(2) = F_1(2-1)$$

$$F_2(2) = \frac{F_1(1)}{k}$$

เมื่อแทน $k=3$ ในสมการ (3.8) จะได้

$$3F_2(3) = F_1(3-1)$$

$$F_2(3) = \frac{F_1(2)}{k}$$

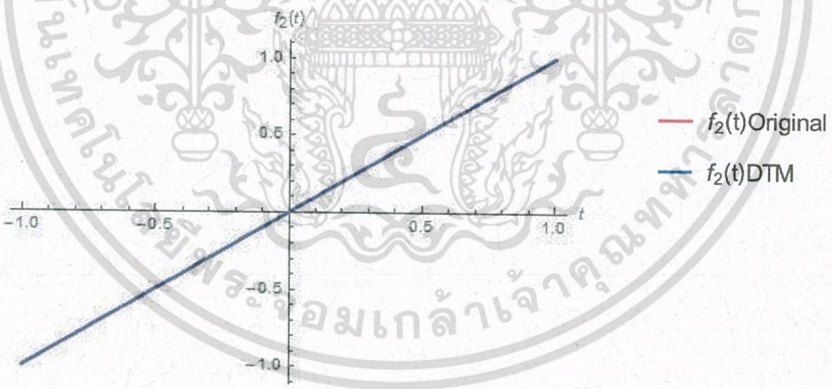
ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_2(t)=t$ คือ

$$F_2(k)=\begin{cases} 0, & k=0 \\ \dfrac{F_1(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases} \tag{3.9}$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_1(t)=1$ ซึ่งได้มาจากสมการ(3.5) คือ

$$F_1(k)=\begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k\geq 1 \end{cases}$$

กำหนด $k=600$ และ $t\in[-1,1]$ ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.2.2 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_2(t)=t$ ในหัวข้อ 3.2.2

และ $f_2(t)=0t^0+1t^1+0t^2+0t^3+0t^4+0t^5+\ldots+0t^{600}$ จากวิธี DTM

3.2.3 พิจารณา $f_3(t)=e^{at}$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_3(0) = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f_3(t)}{dx^0}\right]_{t=0}$$

$$=\left[f_3(t)\right]_{t=0}$$

$$=\left[e^{at}\right]_{t=0}$$

$$=e^{a(0)}$$

$$=e^0$$

$$F_3(0) = 1 \tag{3.10}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_3(t)=e^{at}$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_3(t)}{dt} = ae^{at} = af_3(t) \tag{3.11}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.11) จะได้

$$(k+1)F_3(k+1) = aF_3(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_3(k) = aF_3(k-1), \quad k\ge 1 \tag{3.12}$$

เมื่อแทน $k = 1$ ในสมการ (3.12) จะได้

$$1F_3(1) = aF_3(1-1)$$

$$F_3(1) = aF_3(0)$$

$$= a(1)$$

$$F_3(1) = a$$

พิจารณาเมื่อ $k \geq 2$

เมื่อแทน $k = 2$ ในสมการ (3.12) จะได้

$$2F_3(2) = aF_3(2-1)$$
$$= aF_3(1)$$
$$F_3(2) = \frac{aF_3(1)}{2}$$

เมื่อแทน $k = 3$ ในสมการ (3.12) จะได้

$$3F_3(3) = aF_3(3-1)$$
$$= aF_3(2)$$
$$F_3(3) = \frac{aF_3(2)}{3}$$

เมื่อแทน $k = 4$ ในสมการ (3.12) จะได้

$$4F_3(4) = aF_3(4-1)$$
$$= aF_3(3)$$
$$F_3(4) = \frac{aF_3(3)}{4}$$

เมื่อแทน $k = 5$ ในสมการ (3.12) จะได้

$$5F_3(5) = aF_3(5-1)$$
$$= aF_3(4)$$
$$F_3(5) = \frac{aF_3(4)}{5}$$

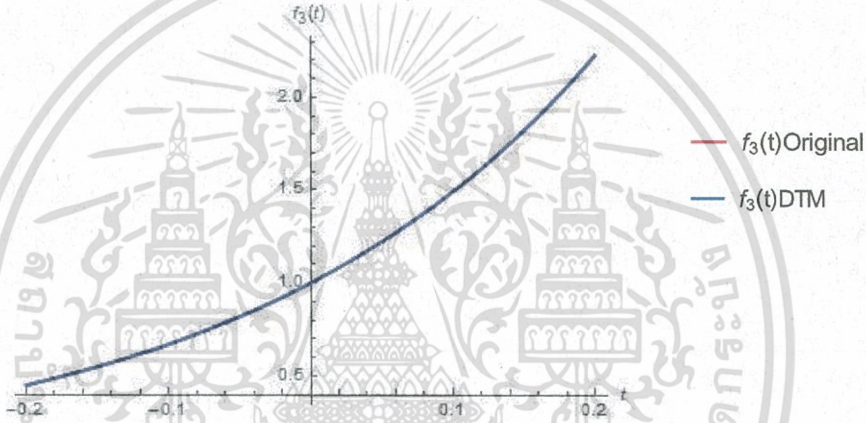
สรุปได้ว่า เมื่อ $k \geq 2$ สามารถเขียนสมการ (3.12) ได้ใหม่เป็น

$$F_3(k) = \frac{aF_3(k-1)}{k}, \ k \geq 2$$

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_3(t)=e^{at}$ คือ

$$F_3(k)=\begin{cases} 1, & k=0 \\ a, & k=1 \\ \dfrac{aF_3(k-1)}{k}, & k\geq 2 \end{cases} \qquad (3.13)$$

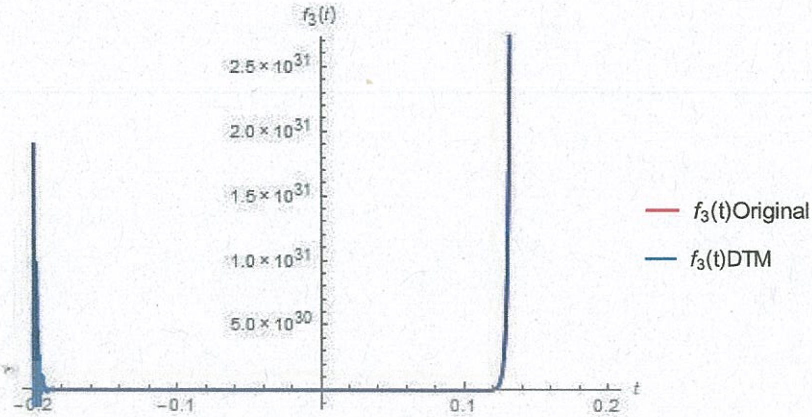
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-450<a<450$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a\leq -450$ และ $a\geq 450$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.2.3 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_3(t)=e^{at}$ ในหัวข้อ 3.2.3

และ $f_3(t)=1t^0+7t^1+\dfrac{49}{2}t^2+\dfrac{343}{6}t^3+\dfrac{2401}{24}t^4+\dfrac{1680}{120}t^5+\ldots+9\times10^{-902}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=4, k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$



รูปที่ 3.2.4 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_3(t) = e^{at}$ ในหัวข้อ 3.2.3 และ

$f_3(t) = 1t^0 + 550t^1 + 151250t^2 + \dfrac{83187500}{3}t^3 + ... + 1.3\times 10^{236} t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a = 550, k = 600$ และ $t \in [-0.2, 0.2]$

3.2.4 พิจารณา $f_4(t) = te^{at}$

โดยที่ $f_3(t) = e^{at}$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$\begin{aligned} F_4(0) &= \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f_4(t)}{dx^0}\right]_{t=0} \\ &= \left[tf_4(t)\right]_{t=0} \\ &= \left[te^{at}\right]_{t=0} \\ &= (0)e^{a(0)} \\ &= (0)(1) \end{aligned}$$

$$F_4(0) = 0 \tag{3.14}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_4(t) = te^{at}$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_2(t)}{dt} = a(te^{at}) + e^{at} = af_4(t) + f_3(t) \tag{3.15}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.15) จะได้

$$(k+1)F_4(k+1) = aF_4(k) + F_3(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_4(k) = aF_4(k-1) + F_3(k-1), \quad k \geq 1 \tag{3.16}$$

เมื่อแทน $k = 1$ ในสมการ (3.16) จะได้

$$1F_4(1) = aF_4(1-1) + F_3(1-1)$$

$$F_4(1) = aF_4(0) + F_3(0)$$

$$= a(0) + 1$$

$$F_4(1) = 1$$

พิจารณาเมื่อ $k \geq 2$

เมื่อแทน $k = 2$ ในสมการ (3.16) จะได้

$$2F_4(2) = aF_4(2-1) + F_3(2-1)$$

$$= aF_4(1) + F_3(1)$$

$$F_4(2) = \frac{aF_4(1) + F_3(1)}{2}$$

เมื่อแทน $k = 3$ ในสมการ (3.16) จะได้

$$3F_4(3) = aF_4(3-1) + F_3(3-1)$$

$$= aF_4(2) + F_3(2)$$

$$F_4(3) = \frac{aF_4(2) + F_3(2)}{3}$$

เมื่อแทน $k = 4$ ในสมการ (3.16) จะได้

$$4F_4(4) = aF_4(4-1) + F_3(4-1)$$

$$= aF_4(3) + F_3(3)$$

$$F_4(4) = \frac{aF_4(3) + F_3(3)}{4}$$

เมื่อแทน $k = 5$ ในสมการ (3.16) จะได้

$$5F_4(5) = aF_4(5-1) + F_3(5-1)$$

$$= aF_4(4) + F_3(4)$$

$$F_4(5) = \frac{aF_4(4) + F_3(4)}{5}$$

สรุปได้ว่า เมื่อ $k \geq 2$ สามารถเขียนสมการ (3.16) ได้ใหม่เป็น

$$F_4(k) = \frac{aF_4(k-1) + F_3(k-1)}{k}, \quad k \geq 2$$

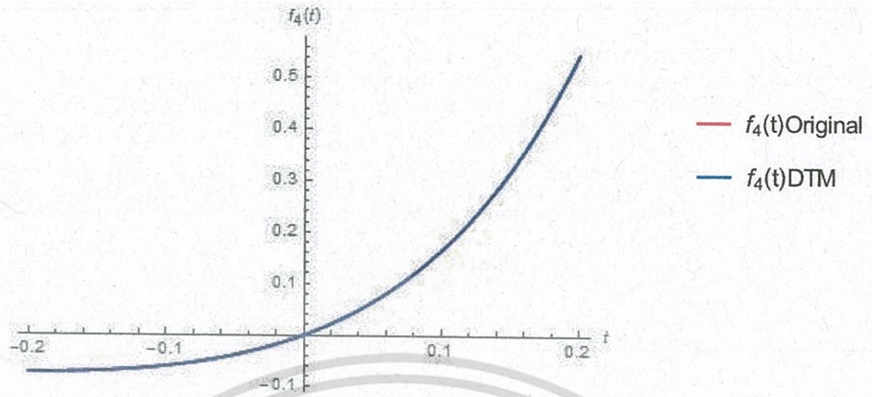
ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_4(t) = te^{at}$ คือ

$$F_4(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ 1, & k = 1 \\ \dfrac{aF_4(k-1) + F_3(k-1)}{k}, & k \geq 2 \end{cases} \tag{3.17}$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_3(t) = e^{at}$ ซึ่งได้มาจากสมการ (3.13) คือ

$$F_3(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ a, & k = 1 \\ \dfrac{aF_3(k-1)}{k}, & k \geq 2 \end{cases} \tag{3.18}$$

กำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-450<a<450$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a\leq -450$ และ $a\geq 450$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.2.5 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_4(t)=te^{at}$ ในหัวข้อ 3.2.4

และ $f_4(t)=0t^0+1t^1+5t^2+\dfrac{25}{2}t^3+\dfrac{125}{6}t^4+\dfrac{625}{24}t^5+...+2.3\times10^{-987}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=5,k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$

รูปที่ 3.2.6 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_4(t)=te^{at}$ ในหัวข้อ 3.2.4 และ

$$f_4(t)=0t^0+1t^1+700t^2+245000t^3+\frac{171500000}{3}t^4+...+7.8\times10^{298}t^{600}$$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=700,k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$

3.2.5 พิจารณา $f_5\left(t\right)=\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$

โดยที่ $f_3\left(t\right)=e^{at}$ และ $h_1(t)=e^{bt}$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f\left(t\right)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$\begin{aligned} F_5\left(0\right) &= \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f_5\left(t\right)}{dx^0}\right]_{t=0} \\ &= \left[f_5\left(t\right)\right]_{t=0} \\ &= \left[\frac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})\right]_{t=0} \\ &= \frac{1}{(a-b)}(e^{a(0)}-e^{b(0)}) \\ &= \frac{1}{(a-b)}(1-1) \end{aligned}$$

$$F_5\left(0\right) = 0 \tag{3.19}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_5\left(t\right)=\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_5\left(t\right)}{dt}=\frac{1}{(a-b)}[ae^{at}-be^{bt}]=\frac{1}{(a-b)}[af_3(t)-bh_1(t)] \tag{3.20}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.20) จะได้

$$\left(k+1\right)F_5\left(k+1\right) = \frac{1}{(a-b)}\left[aF_3(k)-bH_1(k)\right]$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_5\left(k\right) = \frac{1}{(a-b)}\left[aF_3(k-1)-bH_1(k-1)\right] \tag{3.21}$$

พิจารณาเมื่อ $k \geq 1$

เมื่อแทน $k = 1$ ในสมการ (3.21) จะได้

$$1F_5(1) = \frac{1}{(a-b)}\left[aF_3(1-1) - bH_1(1-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=2$ ในสมการ (3.21) จะได้

$$2F_5(2) = \frac{1}{(a-b)}\left[aF_3(2-1) - bH_1(2-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=3$ ในสมการ (3.21) จะได้

$$3F_5(3) = \frac{1}{(a-b)}\left[aF_3(3-1) - bH_1(3-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=4$ ในสมการ (3.21) จะได้

$$4F_5(4) = \frac{1}{(a-b)}\left[aF_3(4-1) - bH_1(4-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=5$ ในสมการ (3.21) จะได้

$$5F_5(5) = \frac{1}{(a-b)}\left[aF_3(5-1) - bH_1(5-1)\right]$$

สรุปได้ว่า เมื่อ $k \geq 1$ สามารถเขียนสมการ (3.21) ได้ใหม่เป็น

$$F_5(k) = \frac{1}{k(a-b)}\left[aF_3(k-1) - bH_1(k-1)\right]$$

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_5(t) = \frac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$ คือ

$$F_5(k) = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ \dfrac{1}{k(a-b)}\left[aF_3(k-1) - bH_1(k-1)\right], & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.22}$$

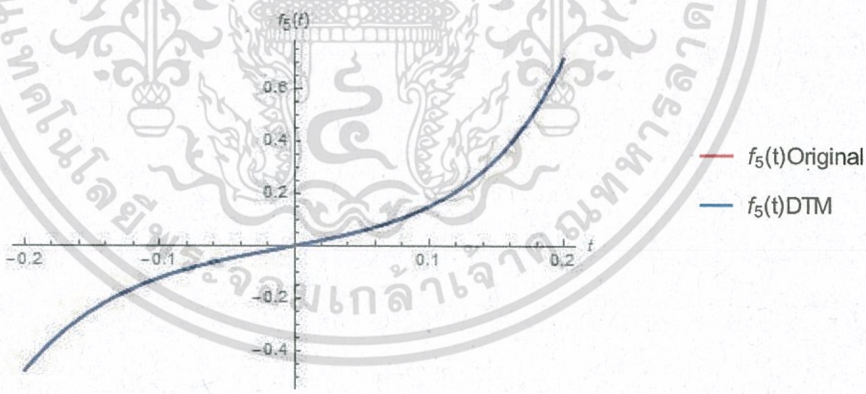
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_3(t)=e^{at}$ ซึ่งได้มาจากสมการ (3.13) คือ

$$F_3(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ a, & k=1\\ \dfrac{aF_3(k-1)}{k}, & k\geq 2\end{cases} \tag{3.23}$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $h_1(t)=e^{bt}$ $:(a=b)$ ซึ่งได้มาจากสมการ(3.13) คือ

$$H_1(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ b, & k=1\\ \dfrac{bH(k-1)}{k}, & k\geq 2\end{cases} \tag{3.24}$$

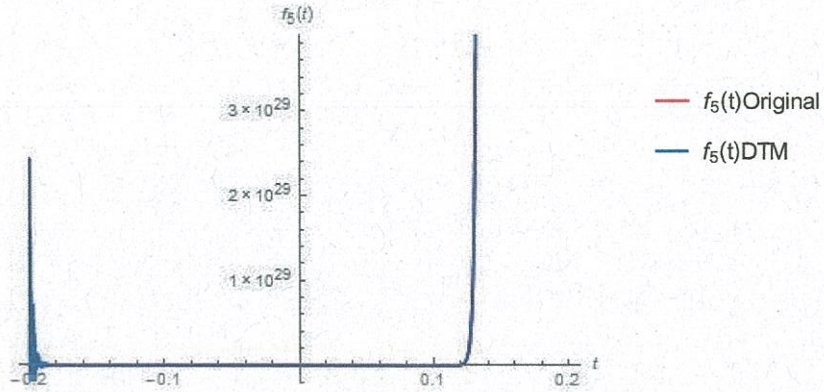
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-450<a<450$ และใช้ b ในช่วง $-450<b<450$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a\leq -450, a\geq 450$ และ $b\leq -450, b\geq 450$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $a\neq b$



รูปที่ 3.2.7 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_5(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$ ในหัวข้อ 3.2.5

และ $f_5(t)=0t^0+1t^1+1t^2+\dfrac{199}{6}t^3+\dfrac{197}{6}t^4+\dfrac{40381}{120}t^5+\ldots+1.3\times 10^{-704}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=-13, b=15, k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$



รูปที่ 3.2.8 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_5(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$ ในหัวข้อ 3.2.5

และ $f_5(t)=0t^0+1t^1+515t^2+\dfrac{398450}{3}t^3+\dfrac{68610875}{3}t^4+...+1.9\times10^{234}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=550, b=470, k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$

3.2.6 พิจารณา $f_6(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(a\,e^{at}-be^{bt})$

โดยที่ $f_3(t)=e^{at}$ และ $h_1(t)=e^{bt}$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_6(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f_6(t)}{dt^0}\right]_{t=0}$$

$$=\left[f_6(t)\right]_{t=0}$$

$$=\left[\frac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{(a-b)}(ae^{a(0)}-be^{b(0)})$$

$$= \frac{1}{(a-b)}(a-b)$$

$$F_6(0) = 1 \tag{3.25}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_6(t) = \frac{1}{(a-b)}(a e^{at} - be^{bt})$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_6(t)}{dt} = \frac{1}{(a-b)}[a^2 e^{at} - b^2 e^{bt}] = \frac{1}{(a-b)}[a^2 f_3(t) - b^2 h_1(t)] \tag{3.26}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.26) จะได้

$$(k+1)F_6(k+1) = \frac{1}{(a-b)}\left[a^2 F_3(k) - b^2 H_1(k)\right]$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_6(k) = \frac{1}{(a-b)}\left[a^2 F_3(k-1) - b^2 H_1(k-1)\right] \tag{3.27}$$

พิจารณาเมื่อ $k \geq 1$

เมื่อแทน $k = 1$ ในสมการ (3.27) จะได้

$$1F_6(1) = \frac{1}{(a-b)}\left[a^2 F_3(1-1) - b^2 H_1(1-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=2$ ในสมการ(3.27) จะได้

$$2F_6(2) = \frac{1}{(a-b)}\left[a^2 F_3(2-1) - b^2 H_1(2-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=3$ ในสมการ(3.27) จะได้

$$3F_6(3) = \frac{1}{(a-b)}\left[a^2 F_3(3-1) - b^2 H_1(3-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=4$ ในสมการ(3.27) จะได้

$$4F_6(4) = \frac{1}{(a-b)}\left[a^2 F_3(4-1) - b^2 H_1(4-1)\right]$$

เมื่อแทน $k=5$ ในสมการ (3.27) จะได้

$$5F_6(5) = \frac{1}{(a-b)}\left[a^2F_3(5-1)-b^2H_1(5-1)\right]$$

สรุปได้ว่า เมื่อ $k\geq 1$ สามารถเขียนสมการ (3.27) ได้ใหม่เป็น

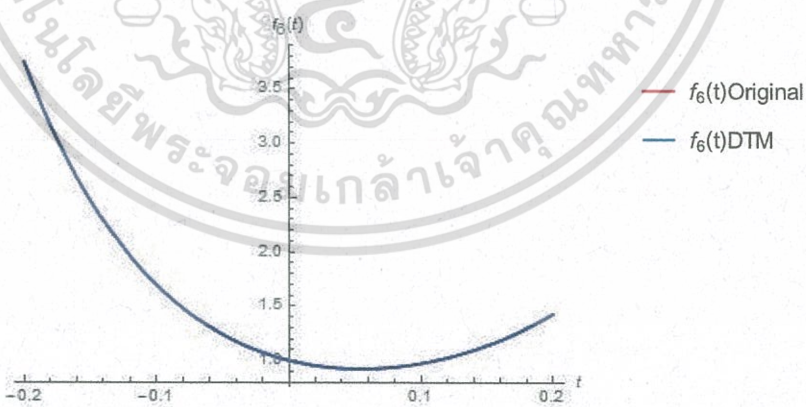
$$F(k) = \frac{1}{k(a-b)}\left[a^2F_3(k-1)-b^2H_1(k-1)\right]$$

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_6(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$ คือ

$$F_6(k)=\begin{cases}1, & k=1\\ \dfrac{1}{k(a-b)}\left[a^2G(k-1)-b^2H(k-1)\right], & k\geq 1\end{cases} \tag{3.28}$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_3(t)=e^{at}$ และ $h_1(t)=e^{bt}$ เป็นไปตามสมการ (3.23) และสมการ (3.24)

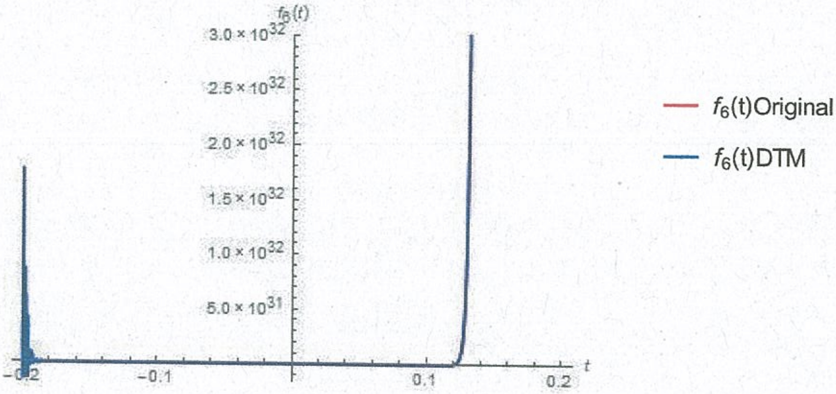
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-450<a<450$ และใช้ b ในช่วง $-450<b<450$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a\leq -450, a\geq 450$ และ $b\leq -450, b\geq 450$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่จะต้องใช้ $a\neq b$



รูปที่ 3.2.9 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_6(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$ ในหัวข้อ 3.2.6

และ $f_6(t)=1t^0-15t^1+\dfrac{171}{2}t^2-\dfrac{585}{2}t^3+\dfrac{5697}{8}t^4-\dfrac{10773}{8}t^5+\ldots+8.3\times10^{-836}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=-9, b=6, k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$



รูปที่ 3.2.10 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_6(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$ และ

$$f_6(t)=1t^0+1050t^1+413750t^2+96687500t^3+\frac{47696093750}{3}t^4+...+1.4\times10^{237}t^{600}$$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=500,b=550k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$

3.2.7 พิจารณา $f_7(t)=e^{at}cos\omega t$

โดยที่ $h_2(t)=e^{at}sin\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_7(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 f_7(t)}{dx^0}\right]_{t=0}$$

$$=\left[f_7(t)\right]_{t=0}$$

$$=\left[e^{at}cos\omega t\right]_{t=0}=e^{a(0)}cos\omega(0)=(1)(1)=1 \qquad (3.29)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$H_2(0)=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0 h_2(t)}{dx^0}\right]_{t=0}$$

$$=\left[h_2(t)\right]_{t=0}$$

$$=\left[e^{at}\sin\omega t\right]_{t=0} = e^{a(0)}\sin\omega(0) = (1)(0) = 0 \tag{3.30}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_7(t)=e^{at}\cos\omega t$ และ $h_2(t)=e^{at}\sin\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned}\frac{df_7(t)}{dt} &= -\omega(e^{at}\sin\omega t)+a(e^{at}\cos\omega t) = -\omega h_2(t)+af_7(t)\\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \omega(e^{at}\cos\omega t)+a(e^{at}\sin\omega t) = \omega f_7(t)+ah_2(t)\end{aligned} \tag{3.31}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.31) จะได้

$$\frac{df_7(t)}{dt} = -\omega h_2(t)+af_7(t)$$

$$(k+1)F_7(k+1) = -\omega H_2(k)+aF_7(k)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \omega f_7(t)+ah_2(t)$$

$$(k+1)H_2(k+1) = \omega F_7(k)+aH_2(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้ $k+1=k_1$

$k=k_1-1$

$$kF_7(k) = -\omega H_2(k-1)+aF_7(k-1)$$

$$F_7(k) = \frac{-\omega H_2(k-1)+aF_7(k-1)}{k}, \quad k\geq 1 \tag{3.32}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$kH_2(k) = \omega F_7(k-1)+aH_2(k-1)$$

$$H_2(k) = \frac{\omega F_7(k-1)+aH_2(k-1)}{k}, \quad k\geq 1 \tag{3.33}$$

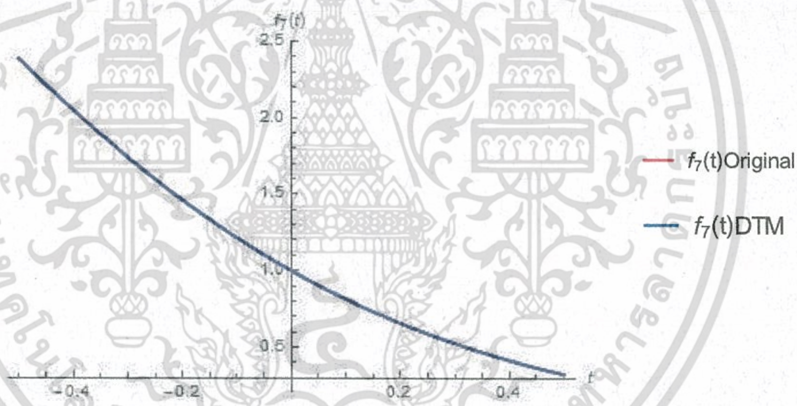
รวมสมการ (3.29) และ (3.32) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_7(t) = e^{at}cos\omega t$ คือ

$$F_7(k) = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ \dfrac{-\omega H_2(k-1) + aF_7(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.34}$$

รวมสมการ (3.30) และ (3.33) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $h_2(t) = e^{at}sin\omega t$ คือ

$$H_2(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{\omega F_7(k-1) + aH_2(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.35}$$

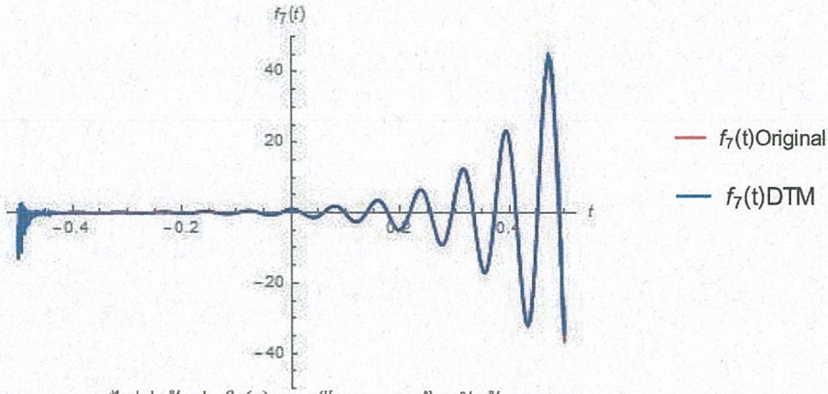
กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-0.5, 0.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-180 < a < 180$ และใช้ ω ในช่วง $-70 < \omega < 70$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a \leq -180, a \geq 180$ หรือ $\omega \leq -70, \omega \geq 70$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.2.11 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_7(t) = e^{at}cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.7

และ $f_7(t) = 1t^0 \text{-} 2t^1 + \dfrac{3}{2}t^2 - \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{7}{24}t^4 + \dfrac{19}{60}t^5 + ... \text{-}6.1\times10^{-1200}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a = -2, \omega = 1, k = 600$ และ $t \in [-0.5, 0.5]$



รูปที่ 3.2.12 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_7(t)=e^{at}cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.7

และ $f_7(t)=1t^0+8t^1-3168t^2-\dfrac{76544}{3}t^3+\dfrac{4813312}{3}t^4+...-1.1\times10^{-265}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=8,\omega=80,k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$

3.2.8 พิจารณา $f_8(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}sin\omega t$

โดยที่ $g_1(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}cos\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_8(0)=\left[\frac{1}{\omega}e^{at}sin\omega t\right]_{t=0}=\frac{1}{\omega}e^{a(0)}sin\omega(0)=\frac{1}{\omega}(1)sin(0)=0 \quad (3.36)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$G_1(0)=\left[\frac{1}{\omega}e^{at}cos\omega t\right]_{t=0}=\frac{1}{\omega}e^{a(0)}cos\omega(0)=\frac{1}{\omega}(1)(1)=\frac{1}{\omega} \quad (3.37)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_8(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}sin\omega t$ และ $g_1(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}cos\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_8(t)}{dt}=\frac{1}{\omega}e^{at}\omega cos\omega t+\frac{1}{\omega}sin\omega t(ae^{at})=\omega g_1(t)+af_8(t) \quad (3.38)$$

$$\frac{dg_1(t)}{dt} = \frac{1}{\omega} e^{at} sin\omega t(\omega) + cos\omega t(\frac{1}{\omega} ae^{at}) = -\omega f_8(t) + ag_1(t)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการที่ (3.38) จะได้

$$(k+1)F_8(k+1) \ = \omega G_1(k) + aF_8(k)$$

และ $\quad (k+1)G(k+1) \ = -\omega F_8(k) + aG_1(k)$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้ $\qquad k+1 = k_1$, $\quad k = k_1 - 1$

$$kF_8(k) \ = \omega G_1(k-1) + aF_8(k-1)$$

$$F_8(k) \ = \frac{\omega G_1(k-1) + aF_8(k-1)}{k}, \quad k \ge 1 \tag{3.39}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$kG_1(k) \ = -\omega F_8(k-1) + aG_1(k-1)$$

$$G_1(k) \ = \frac{-\omega F_8(k-1) + aG_1(k-1)}{k}, \quad k \ge 1 \tag{3.40}$$

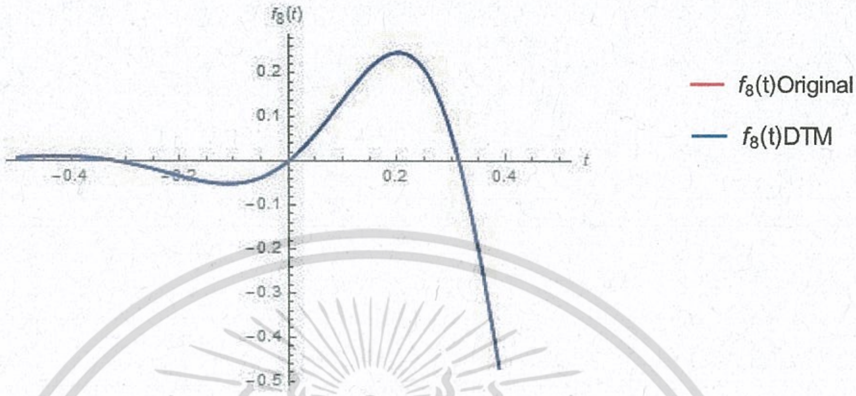
รวมสมการ (3.36) และ (3.39) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_8(t) = \frac{1}{\omega} e^{at} sin\omega t$ คือ

$$F_8(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{\omega G_1(k-1) + aF_8(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.41}$$

รวมสมการ (3.37) และ (3.40) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $g_1(t) = \frac{1}{\omega} e^{at} cos\omega t$ คือ

$$G_1(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega F_8(k-1) + aG(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.42}$$

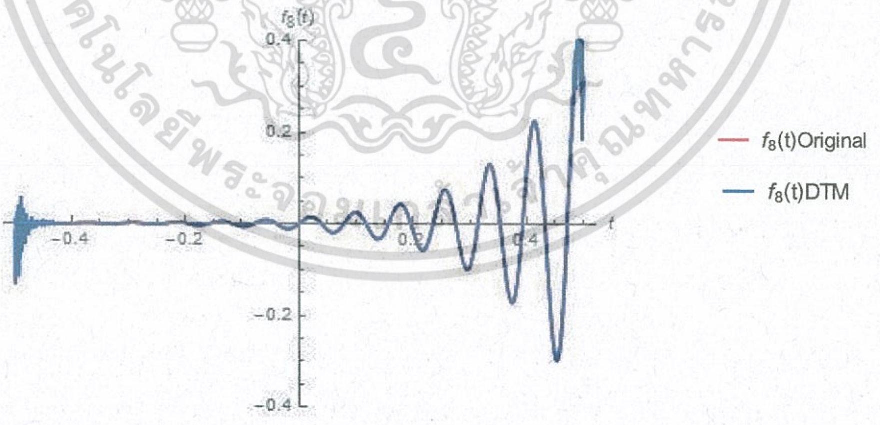
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-180<a<180$ และใช้ ω ในช่วง $-70<\omega<70$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a\le -180, a\ge 180$ หรือ $\omega\le -70,\omega\ge 70$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $\omega\neq 0$



รูปที่ 3.2.13 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_8(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}sin\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.8

และ $f_8(t)=0t^0+1t^1+5t^2-\dfrac{25}{6}t^3-\dfrac{125}{2}t^4-\dfrac{2375}{24}t^5+\ldots-9.2\times10^{-781}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=5,\omega=10,k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$



รูปที่ 3.2.14 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_8(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}sin\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.8

และ $f_8(t)=0t^0+1t^1+7t^2-\dfrac{6253}{6}t^3-\dfrac{14819}{2}t^4+\ldots-6.0\times10^{-268}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=5,\omega=75,k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$

3.2.9 พิจารณา $f_9(t) = cos\omega t$

โดยที่ $v_1(t) = sin\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$F_9(0) = [\cos\omega t]_{t=0} = cos\omega(0) = 1 \tag{3.43}$$

และ $$V_1(0) = [sin\omega t]_{t=0} = sin\omega(0) = 0 \tag{3.44}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_7(t) = cos\omega t$ และ $v_1(t) = sin\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{df_9(t)}{dt} &= -\omega sin\omega t = -\omega v_1(t) \\ \frac{dv_1(t)}{dt} &= \omega cos\omega t = \omega f_9(t) \end{aligned} \tag{3.45}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.45) จะได้

$$\frac{df_9(t)}{dt} = -\omega v_1(t)$$

$$(k+1)F_9(k+1) = -\omega V_1(k)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \omega f_9(t)$$

$$(k+1)V_1(k+1) = \omega F_9(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_9(k) = -\omega V_1(k-1)$$

$$F_9(k) = \frac{-\omega V_1(k-1)}{k}, \ k \ge 1 \tag{3.46}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$kV_1(k) = \omega F_9(k-1)$$

$$V_1(k) = \frac{\omega F_9(k-1)}{k}, \; k \ge 1 \tag{3.47}$$

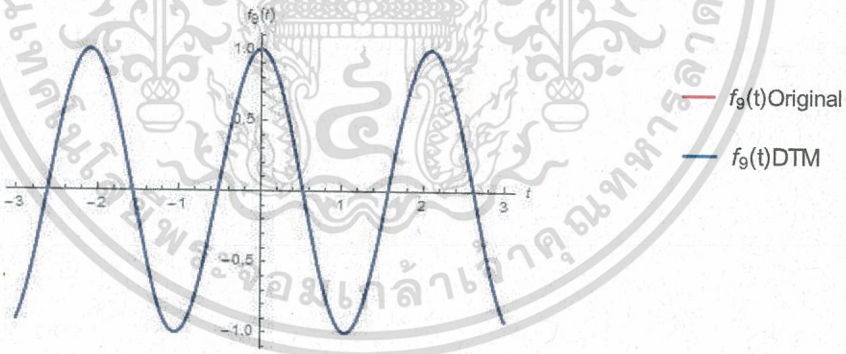
รวมสมการ (3.43) และ (3.46) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_9(t) = cos\omega t$ คือ

$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.48}$$

รวมสมการ (3.44) และ (3.47) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $v_1(t) = sin\omega t$ คือ

$$V_1(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.49}$$

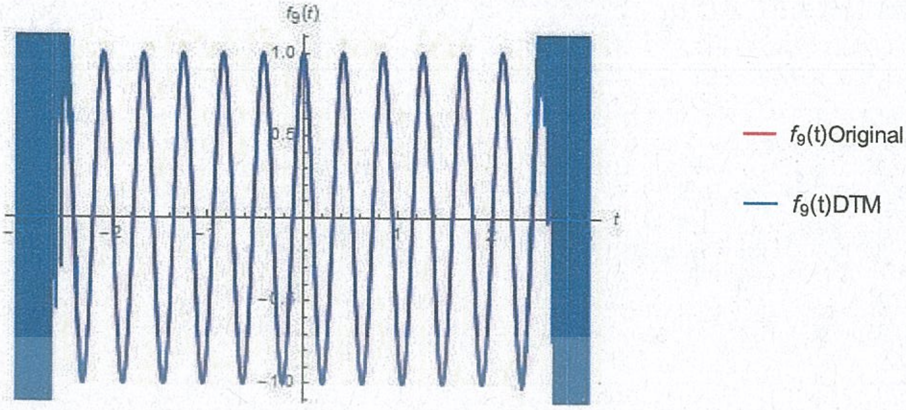
กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11 \le \omega \le 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega < -11$ และ $\omega > 11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.2.15 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_9(t) = cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.9

และ $f_9(t) = 1t^0 + 0t^1 - \frac{9}{2}t^2 + 0t^3 + \frac{27}{8}t^4 + 0t^5 + \ldots + 1.5\times10^{-1122}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = 3, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$



รูปที่ 3.2.16 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_9(t) = cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.9

และ $f_9(t) = 1t^0 + 0t^1 - \frac{9}{2}t^2 + 0t^3 + \frac{27}{8}t^4 + 0t^5 + ... + 1.5\times 10^{-1122}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = 15, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$

3.2.10 พิจารณา $f_{10}(t) = cosh(at)$

โดยที่ $g_2(t) = sinh(at)$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$F_{10}(0) = [cosh(at)]_{t=0} = cosh(a(0)) = cosh(0) = 1 \qquad (3.50)$$

$$G_2(0) = [sinh(at)]_{t=0} = sinh(a(0)) = sinh(0) = 0 \qquad (3.51)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{10}(t) = cosh(at)$ และ $g_2(t) = sinh(at)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{df_{10}(t)}{dt} &= asinh(at) = ag_2(t) \\ \frac{dg_2(t)}{dt} &= acosh(at) = af_{10}(t) \end{aligned} \qquad (3.52)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.52) จะได้ว่า

$$\frac{df_{10}(t)}{dt} = ag_2(t)$$

$$(k+1)F_{10}(k+1) = aG_2(k)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\frac{dg_2(t)}{dt} = af_{10}(t)$$

$$(k+1)G_2(k+1) = aF_{10}(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_{10}(k) = aG_2(k+1)$$

$$F_{10}(k) = \frac{aG_2(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \qquad (3.53)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$kG_2(k) = aF_{10}(k+1)$$

$$G_2(k) = \frac{aF_{10}(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \qquad (3.54)$$

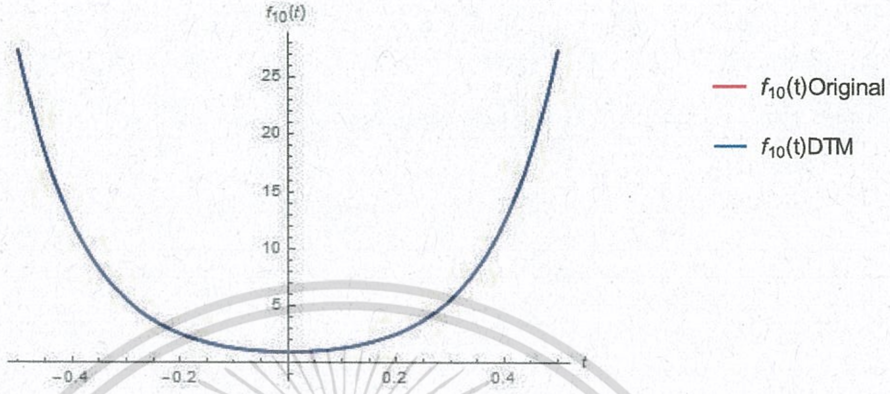
รวมสมการ (3.50) และ (3.53) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{10}(t) = cosh(at)$ คือ

$$F_{10}(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{aG_2(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.55)$$

รวมสมการ (3.51) และ (3.54) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $g_2(t) = sinh(at)$ คือ

$$G_2(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{aF_{10}(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.56)$$

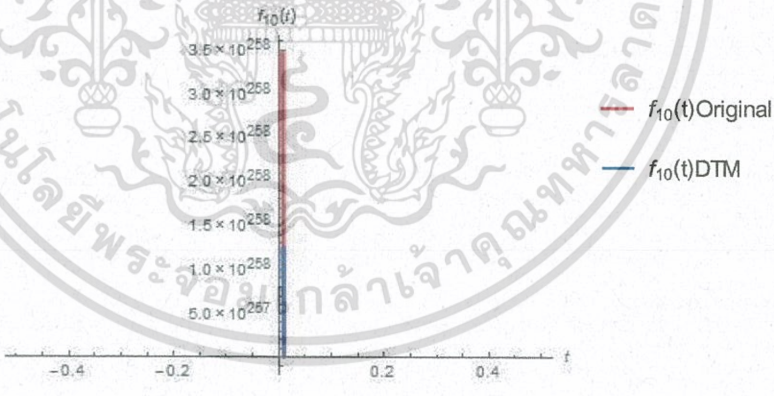
กำหนด $k=600$ และ $t \in [-0.5, 0.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-50,500 \le a \le 50,500$ กราฟถึงจะทับกันสนิท ถ้า $a < -50,500$ และ $a > 50,500$ กราฟบางส่วนไม่ทับกัน



รูปที่ 3.2.17 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{10}(t) = cosh(at)$ ในหัวข้อ 3.2.10

และ $f_{10}(t) = 1t^0 + 0t^1 + 32t^2 + 0t^3 + \dfrac{512}{3}t^4 + 0t^5 + \ldots + 5.6\times 10^{-867} t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=-8, k=600$ และ $t \in [-0.5, 0.5]$



รูปที่ 3.2.18 แสดงกราฟบางส่วนไม่ทับกันของ $f_{10}(t) = cosh(at)$ ในหัวข้อ 3.2.10

และ $f_{10}(t) = 1t^0 + 0t^1 + 18\times 10^8 t^2 + 0t^3 + 54\times 10^{16} t^2 \ldots + 6.1\times 10^{1458} t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a = 60,000, k=600$ และ $t \in [-0.5, 0.5]$

3.2.11 พิจารณา $f_{11}(t) = tsin\omega t$

โดยที่ $g_3(t) = tcos\omega t$

$f_9(t) = cos\omega t$

$v_1(t) = sin\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$F_{11}(0) = [tsin\omega t]_{t=0} = (0)sin\omega(0) = 0 \quad (3.57)$$

$$G_3(0) = [tcos\omega t]_{t=0} = (0)cos\omega(0) = 0 \quad (3.58)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{11}(t) = tsin\omega t$ และ $g_3(t) = tcos\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{df_{11}(t)}{dt} &= \omega tcos\omega t + sin\omega t = \omega g_3(t) + v_1(t) \\ \frac{dg_3(t)}{dt} &= -\omega tsin\omega t + cos\omega t = -\omega f_{11}(t) + f_9(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.59) จะได้

$$(k+1)F_{11}(k+1) = \omega G_3(k) + V_1(k)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$(k+1)G_3(k+1) = -\omega F_{11}(k) + F_9(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$k+1 = k_1$

$k = k_1 - 1$

$$kF_{11}(k) = \omega G_3(k-1) + V_1(k-1)$$

$$F_{11}(k) = \frac{\omega G_3(k-1) + V_1(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \quad (3.60)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$kG_3(k) = -\omega F_{11}(k-1) + F_9(k-1)$$

$$G_3(k) = \frac{-\omega F_{11}(k-1) + F_9(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \tag{3.61}$$

รวมสมการ (3.57) และ (3.60) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{11}(t) = tsin\omega t$ คือ

$$F_{11}(k) = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ \dfrac{\omega G_3(k-1) + V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.62}$$

รวมสมการ (3.58) และ (3.61) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $g_3(t) = tcos\omega t$ คือ

$$\mathrm{G}_3(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega F_{11}(k-1) + F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.63}$$

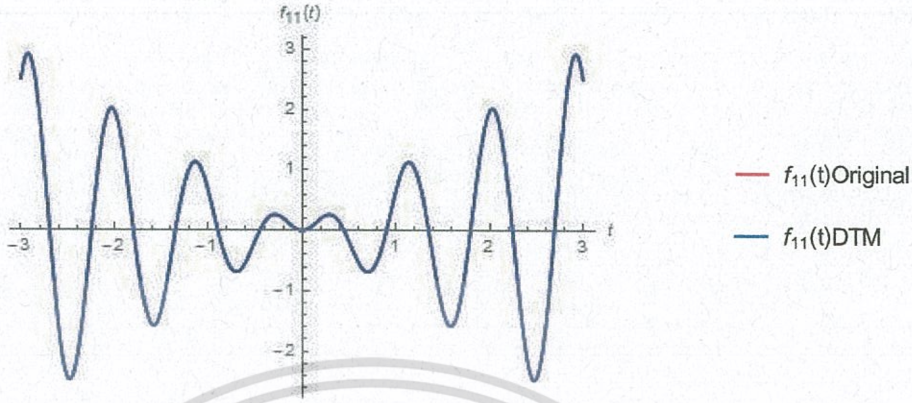
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$f_9(t) = cos\omega t$ จากสมการที่ (3.48) และ $v_1(t) = sin\omega t$ จากสมการที่ (3.49) คือ

$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.64}$$

และ $$V_1(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.65}$$

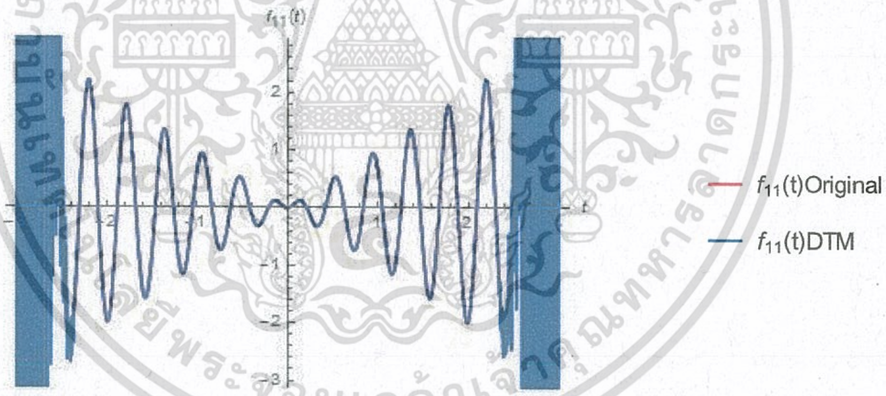
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11\leq\omega\leq11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega<-11$ และ $\omega>11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.2.19 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{11}(t)=tsin\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.11

และ $f_{11}(t)=0t^0+0t^1+5t^2+0t^3-\dfrac{152}{6}t^4+0t^5+...-2.3\times10^{-987}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=7,k=600$ และ $t\in[-3,3]$



รูปที่ 3.2.20 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{11}(t)=tsin\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.11

และ $f_{11}(t)=0t^0+0t^1+15t^2+0t^3-\dfrac{1125}{2}t^4+0t^5+...-1.4\times10^{-701}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=15,k=600$ และ $t\in[-3,3]$

3.2.12 พิจารณา $f_{12}(t)=\frac{1}{2\omega}(sin\omega t+\omega tcos\omega t)$

โดยที่ $f_9(t)=cos\omega t$

$v_1(t)=sin\omega t$

$f_{11}(t)=tsin\omega t$

$g_3(t)=tcos\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{12}(0)=\left[\frac{1}{2\omega}(sin\omega t+\omega tcos\omega t)\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{2\omega}(sin\omega(0)+\omega(0)cos\omega(0))$$

$$=0 \qquad (3.67)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{12}(t)=\frac{1}{2\omega}(sin\omega t+\omega tcos\omega t)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{12}(t)}{dt}=\frac{1}{2\omega}(\omega sin\omega t+(-\omega^2 tsin\omega t+\omega cos\omega t))$$

$$=\frac{1}{2\omega}(2\omega cos\omega t-w^2\,\mathrm{t}\,sin\omega t)$$

$$=cos\omega t-\frac{1}{2}\omega tsin\omega t$$

$$=f_9(t)-\frac{1}{2}\omega f_{11}(t) \qquad (3.68)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.68) จะได้

$$(k+1)F_{12}(k+1) \;=F_9(k)-\frac{1}{2}\omega F_{11}(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_{12}(k) = F_9(k-1) - \frac{1}{2}\omega F_{11}(k-1)$$

$$F_{12}(k) = \frac{1}{k}\left[F_9(k-1) - \frac{1}{2}\omega F_{11}(k-1)\right], \quad k \ge 1 \tag{3.69}$$

รวมสมการ (3.67) และ (3.69) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{12}(t) = \frac{1}{2\omega}(sin\omega t + \omega t cos\omega t)$ คือ

$$F_{12}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{1}{k}\left[F_9(k-1) - \frac{1}{2}\omega F_{11}(k-1)\right], & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.70}$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$f_9(t) = cos\omega t$ จากสมการที่ (3.48) , $v_1(t) = sin\omega t$ จากสมการที่ (3.49) ,

$f_{11}(t) = tsin\omega t$ จากสมการที่ (3.62) และ $g_3(t) = tcos\omega t$ จากสมการที่ (3.63) คือ

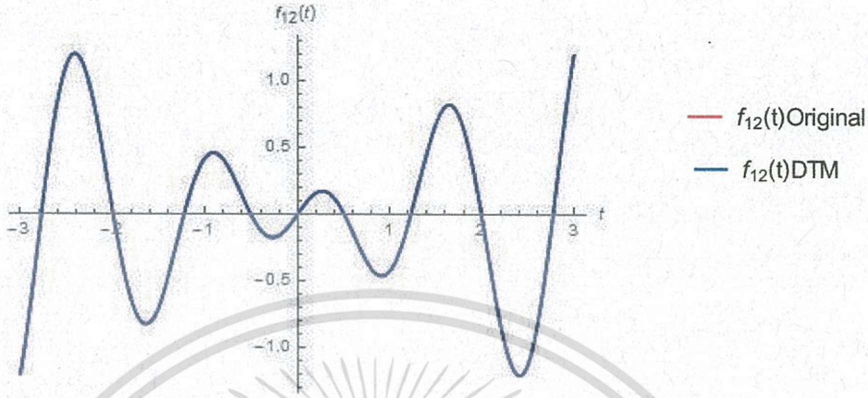
$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\omega}{k} V_1(k-1), & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.71}$$

$$V_1(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{\omega}{k} F_9(k-1), & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.72}$$

$$F_{11}(k) = \begin{cases} 0, & k = 1 \\ \frac{\omega G_3(k-1) + V_1(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.73}$$

$$\mathrm{G}_3(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{-\omega F_{11}(k-1) + F_9(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \tag{3.74}$$

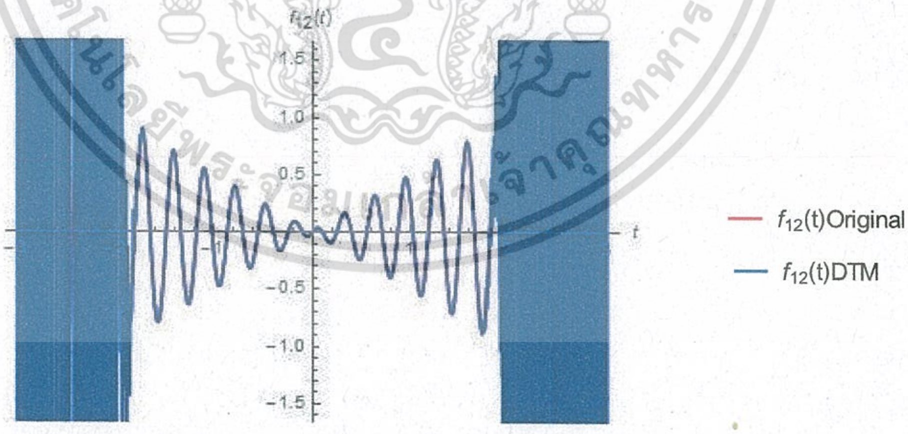
กำหนด $k=600$ และ $t \in [-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11 \le \omega \le 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega < -11$ และ $\omega > 11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $\omega \neq 0$



รูปที่ 3.2.21 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{12}(t) = \dfrac{1}{2\omega}(sin\omega t + \omega tcos\omega t)$

ในหัวข้อ 3.2.12 และ $f_{12}(t) = 0t^0 + 1t^1 + 0t^2 - \dfrac{16}{3}t^3 + 0t^4 + \dfrac{32}{5}t^5 + \ldots + 0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = -4, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$



รูปที่ 3.2.22 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{12}(t) = \dfrac{1}{2\omega}(sin\omega t + \omega tcos\omega t)$

ในหัวข้อ 3.2.12 และ $f_{12}(t) = 0t^0 + 1t^1 + 0t^2 - \dfrac{400}{3}t^3 + 0t^4 + 4000t^5 + \ldots + 0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = 20, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$

3.2.13 พิจารณา $f_{13}(t)=\dfrac{1}{\omega}sin\omega t$

โดยที่ $h_3(t)=\dfrac{1}{\omega}cos\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{13}(0)=\left[\frac{1}{\omega}sin\omega t\right]_{t=0}=\frac{1}{\omega}sin\omega(0)=0 \tag{3.75}$$

$$G_3(0)=\left[\frac{1}{\omega}cos\omega t\right]_{t=0}=\frac{1}{\omega}cos\omega(0)=\frac{1}{\omega} \tag{3.76}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{13}(t)=\dfrac{1}{\omega}sin\omega t$ และ $h_3(t)=\dfrac{1}{\omega}cos\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned}\frac{df_{13}(t)}{dt}&=\frac{1}{\omega}\omega cos\omega t=\omega\frac{1}{\omega}cos\omega t=\omega h_3(t)\\ \frac{dh_3(t)}{dt}&=-\frac{1}{\omega}\omega sin\omega t=-\omega\frac{1}{\omega}sin\omega t=-\omega f_{13}(t)\end{aligned} \tag{3.77}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.77) จะได้

$$(k+1)F_{13}(k+1)=\omega H_3(k)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$(k+1)H_3(k+1)=-\omega F_{13}(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$\begin{aligned}k+1&=k_1\\ k&=k_1-1\end{aligned}$$

$$kF_{13}(k)=\omega H_3(k-1)$$

$$F_{13}(k)=\frac{\omega H_3(k-1)}{k},\qquad k\geq 1 \tag{3.78}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$kH_3(k)=-\omega F_{13}(k-1)$$

$$H_3(k) = \frac{-\omega F_{13}(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \tag{3.79}$$

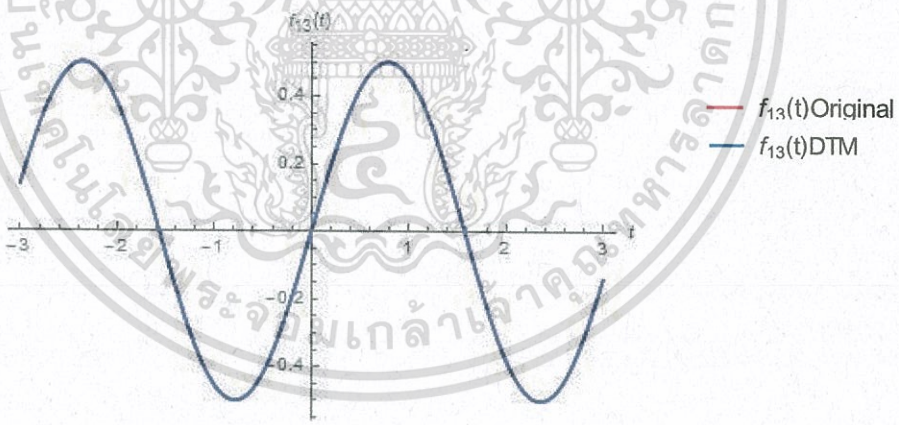
รวมสมการ (3.75) และ (3.78) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{13}(t) = \frac{1}{\omega} sin\omega t$ คือ

$$F_{13}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{\omega H_3(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.80}$$

รวมสมการ (3.76) และ (3.79) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $h_3(t) = \frac{1}{\omega} cos\omega t$ คือ

$$H_3(k) = \begin{cases} \frac{1}{\omega}, & k = 0 \\ \frac{-\omega F_{13}(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.81}$$

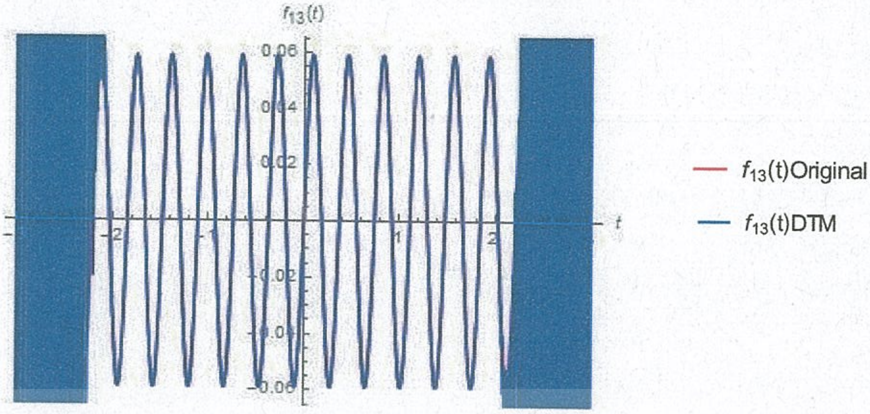
กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11 \leq \omega \leq 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega < -11$ และ $\omega > 11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $\omega \neq 0$



รูปที่ 3.2.23 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{13}(t) = \frac{1}{\omega} sin\omega t$

ในหัวข้อ 3.2.13 และ $f_{13}(t) = 0t^0 + 1t^1 + 0t^2 - \frac{2}{3}t^3 + 0t^4 + \frac{2}{15}t^5 + \ldots + 0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = 2, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$



รูปที่ 3.2.24 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{13}(t) = \dfrac{1}{\omega} sin\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.13 และ

$$f_{13}(t) = 0t^0 + 1t^1 + 0t^2 - \frac{289}{\cdot 6}t^3 + 0t^4 + \frac{83521}{120}t^5 + ... + 0t^{600}$$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = 2, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$

3.2.14 พิจารณา $f_{14}(t) = \dfrac{1}{a} sinhat$

โดยที่ $g_4(t) = \dfrac{1}{a} coshat$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$F_{14}(0) = \left[\frac{1}{a} sinhat\right]_{t=0} = \frac{1}{a} sinha(0) = 0 \quad (3.82)$$

$$G_4(0) = \left[\frac{1}{a} coshat\right]_{t=0} = \frac{1}{a} cosh\, a(0) = \frac{1}{a} \quad (3.83)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{14}(t) = \dfrac{1}{a} sinhat$ และ $g_4(t) = \dfrac{1}{a} coshat$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned}\frac{df_{14}(t)}{dt} &= \frac{1}{a}acoshat = a\frac{1}{a}coshat = ag(t) \\ \frac{dg_4(t)}{dt} &= \frac{1}{a}asinhat = a\frac{1}{a}sinhat = af_{14}(t)\end{aligned} \tag{3.84}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.84) จะได้

$$(k+1)F_{14}(k+1) = aG_4(k)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$(k+1)G_4(k+1) = aF_{14}(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_{14}(k) = aG_4(k-1)$$

$$F_{14}(k) = \frac{aG_4(k-1)}{k}, \qquad k \geq 1 \tag{3.85}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$kG_4(k) = aF_{14}(k-1)$$

$$G_4(k) = \frac{aF_{14}(k-1)}{k}, \qquad k \geq 1 \tag{3.86}$$

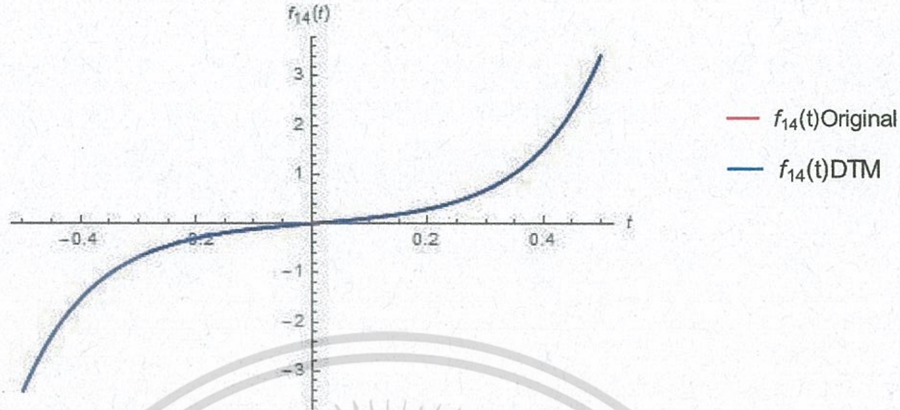
รวมสมการ (3.82) และ (3.85) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{14}(t) = \frac{1}{a}sinhat$ คือ

$$F_{14}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{aG_4(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.87}$$

รวมสมการ (3.83) และ (3.86) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $g_4(t) = \frac{1}{a}coshat$ คือ

$$G_4(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}, & k = 0 \\ \dfrac{aF_{14}(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.88}$$

กำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-69000\le a\le 69000$ กราฟถึงจะทับกันสนิท โดยที่ $a\neq 0$



รูปที่ 3.2.25 แสดงการทบสนทกนระหวางกราฟของ $f_{14}(t)=\frac{-sinhat}{a}$ ในหัวข้อ 3.2.14 และ $f_{14}(t)=0t^0+1t^1+0t^2+\frac{32}{3}t^3+0t^4+\frac{512}{15}t^5+...+0t^{600}$ จากวิธี DTM เมื่อ $a=8,k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$

3.2.15 พิจารณา $f_{15}(t)=\frac{1}{\omega^2}(1-cos\,\omega t)$

โดยที่ $f_{13}(t)=\frac{1}{\omega}sin\,\omega t$

$g_3(t)=\frac{1}{\omega}cos\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{15}(0)=\left[\frac{1}{\omega^2}(1-cos\,\omega t)\right]_{t=0}=\frac{1}{\omega^2}\left(1-cos\,\omega(0)\right)=0 \quad (3.89)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{15}(t)=\frac{1}{\omega^2}(1-cos\,\omega t)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{15}(t)}{dt}=\frac{1}{\omega^2}(0+\omega sin\omega t)+(1-cos\omega t)(0)$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\,\omega sin\omega t = \frac{1}{\omega}\,sin\omega t = g(t) \qquad (3.90)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.90) จะได้

$$(k+1)F_{15}(k+1) = G_3(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_{15}(k) = G_3(k-1)$$

$$F_{15}(k) = \frac{G_3(k-1)}{k}, \qquad k \ge 1 \qquad (3.91)$$

รวมสมการ (3.89) และ (3.91) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{15}(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - cos\omega t)$ คือ

$$F_{15}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{G_3(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \qquad (3.92)$$

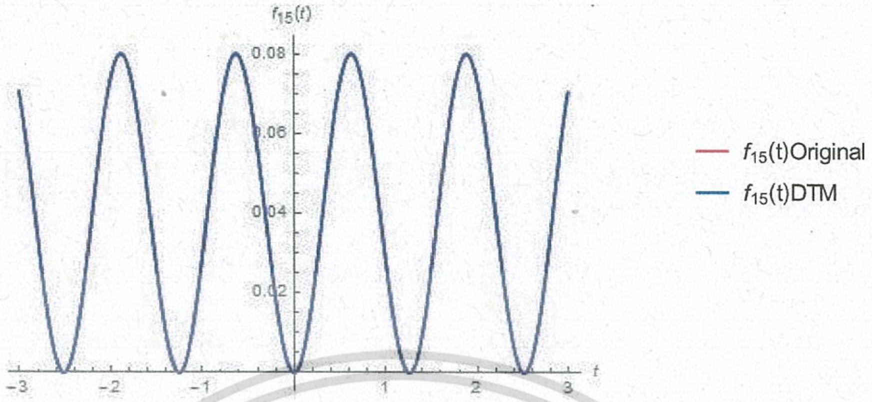
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ

$f_{13}(t) = \frac{1}{\omega} sin\omega t$ จากสมการที่ (3.80) และ $g_3(t) = \frac{1}{\omega} cos\omega t$ จากสมการที่ (3.81) คือ

$$F_{13}(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & k = 0 \\ \dfrac{\omega G_3(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \qquad (3.93)$$

$$G_3(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega}, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega F_{13}(k-1)}{k}, & k \ge 1 \end{cases} \qquad (3.94)$$

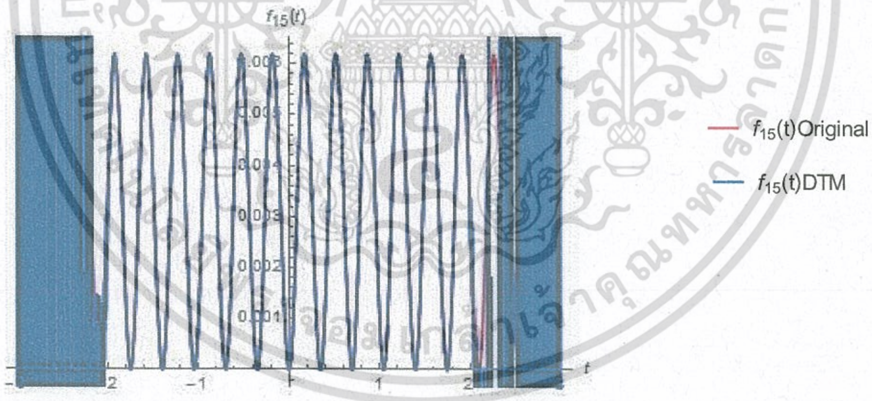
กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11 \le \omega \le 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega < -11$ และ $\omega > 11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $\omega \ne 0$



รูปที่ 3.2.26 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{15}(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - cos\,\omega t)$

ในหัวข้อ3.2.15และ $f_{15}(t) = 0t^0 + 0t^1 + \frac{1}{2}t^2 + 0t^3 - \frac{25}{14}t^4 + 0t^5 + \ldots - 7.6\times10^{-991}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = -5, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$



รูปที่ 3.2.27 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{15}(t) = \frac{1}{\omega^2}(1 - cos\,\omega t)$

ในหัวข้อ3.2.15และ $f_{15}(t) = 0t^0 + 0t^1 + \frac{1}{2}t^2 + 0t^3 - \frac{27}{2}t^4 + 0t^5 + \ldots - 3.6\times10^{-658}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = 18, k = 600$ และ $t \in [-3,3]$

3.2.16 พิจารณา $f_{16}(t)=\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sin\omega t)$

โดยที่ $f_{15}(t)=\frac{1}{\omega^2}(1-cos\,\omega t)$

$$f_{13}(t)=\frac{1}{\omega}sin\omega t$$

$$g_3(t)=\frac{1}{\omega}cos\,\omega t$$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{16}(0)=\left[\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sin\omega t)\right]_{t=0}=\frac{1}{\omega^3}(\omega(0)-sin\omega(0))\ =0 \qquad (3.95)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{16}(t)=\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sin\omega t)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{15}(t)}{dt}=\frac{1}{\omega^3}(\omega-\omega cos\,\omega t)+(\omega t-sin\omega t)(0)$$

$$=\frac{1}{\omega^2}-\frac{1}{\omega^2}cos\,\omega t=\frac{1}{\omega^2}(1-cos\,\omega t)\ =\ f_{15}(t) \qquad (3.96)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.96) จะได้

$$(k+1)F_{16}(k+1)\ =F_{15}(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_{16}(k)\ =F_{15}(k-1)$$

$$F_{16}(k)\ =\frac{F_{15}(k-1)}{k},\qquad k\geq 1 \qquad (3.97)$$

รวมสมการ (3.95) และ (3.97) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{16}(t)=\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sin\omega t)$ คือ

$$F_{16}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{F_{15}(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.98}$$

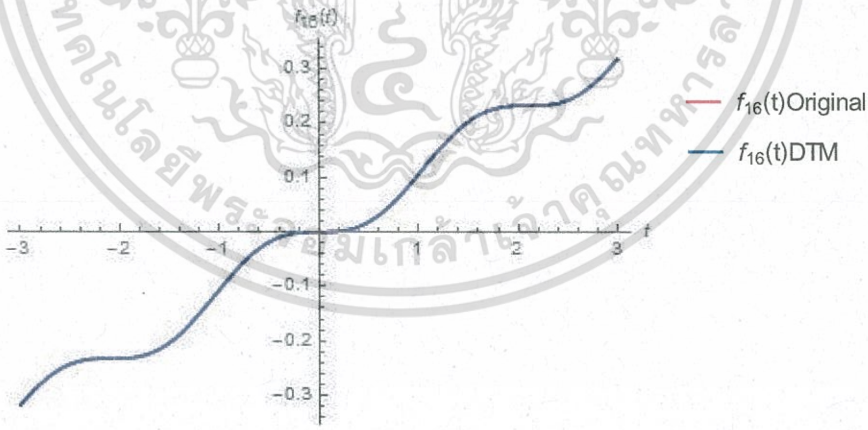
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$f_{15}(t)=\frac{1}{\omega^2}(1-cos\omega t)$ จากสมการที่ (3.92) คือ

$$F_{15}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{G_3(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.99}$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{13}(t)=\frac{1}{\omega}sin\,\omega t$, $g_3(t)=\frac{1}{\omega}cos\,\omega t$ เป็นไปตามสมการ(3.93)และ(3.94)

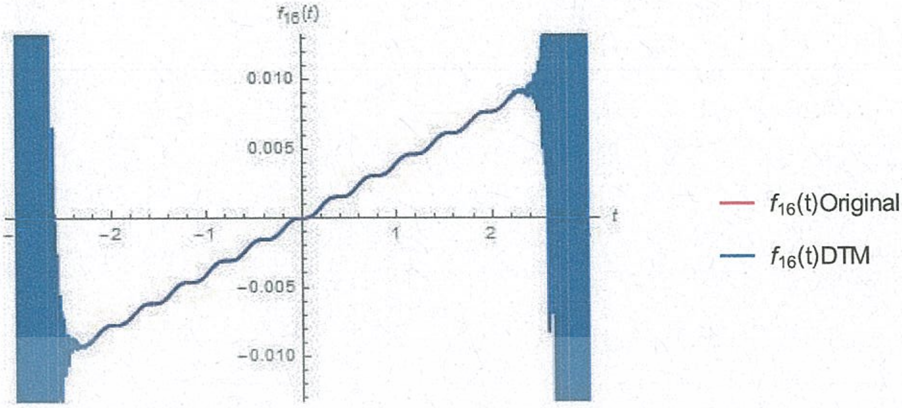
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11\leq\omega\leq 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega<-11$ และ $\omega>11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $\omega\neq 0$



รูปที่ 3.2.28 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{16}(t)=\frac{1}{\omega^3}(\omega t-sin\,\omega t)$

ในหัวข้อ 3.2.16 และ $f_{16}(t)=0t^0+0t^1+0t^2+\frac{1}{6}t^3+0t^4-\frac{3}{40}t^5+...+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=3,k=600$ และ $t\in[-3,3]$



รูปที่ 3.2.29 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{16}(t)=\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$ ในหัวข้อ 3.2.16 และ

$f_{16}(t)=0t^0+0t^1+0t^2+\dfrac{1}{6}t^3+0t^4-\dfrac{32}{15}t^5+\ldots+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=16, k=600$ และ $t\in[-3,3]$

3.2.17 พิจารณา $f_{17}(t)=\dfrac{t}{2\omega}\sin\omega t$

โดยที่ $v_1(t)=sin\omega t$

$f_9(t)=cos\omega t$

$g_3(t)=tcos\omega t$

$f_{11}(t)=tsin\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{17}(0)=\left[\frac{t}{2\omega}sin\omega t)\right]_{t=0}=\frac{0}{2\omega}sin\omega(0)=0 \tag{3.100}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{17}(t)=\dfrac{t}{2\omega}sin\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{14}(t)}{dt} = \frac{t}{2\omega}\omega cos\omega t + \frac{1}{2\omega}sin\omega t$$

$$= \frac{1}{2\omega}(sin\omega t + \omega t cos\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\omega}(v_1(t) + \omega g_3(t)) \qquad (3.101)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.101) จะได้

$$(k+1)F_{17}(k+1) = \frac{1}{2\omega}\left[V_1(k) + \omega G_3(k)\right]$$

$$k+1 = k_1$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k = k_1 - 1$$

$$kF_{17}(k) = \frac{1}{2\omega}\left[V_1(k-1) + \omega G_3(k-1)\right]$$

$$F_{17}(k) = \frac{1}{2\omega k}\left(V_1(k-1) + \omega G_3(k-1)\right), \qquad k \geq 1 \qquad (3.102)$$

รวมสมการ (3.100) และ (3.102) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{17}(t) = \frac{t}{2\omega}sin\omega t$ คือ

$$F_{17}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{1}{2\omega k}\left[V_1(k-1) + \omega G_3(k-1)\right], & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.103)$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$v_1(t) = sin\omega t$ จากสมการที่ (3.49) , $f_9(t) = cos\omega t$ จากสมการที่ (3.48) ,

$g_3(t) = tcos\omega t$ จากสมการที่ (3.63) และ $f_{11}(t) = tsin\omega t$ จากสมการที่ (3.62) คือ

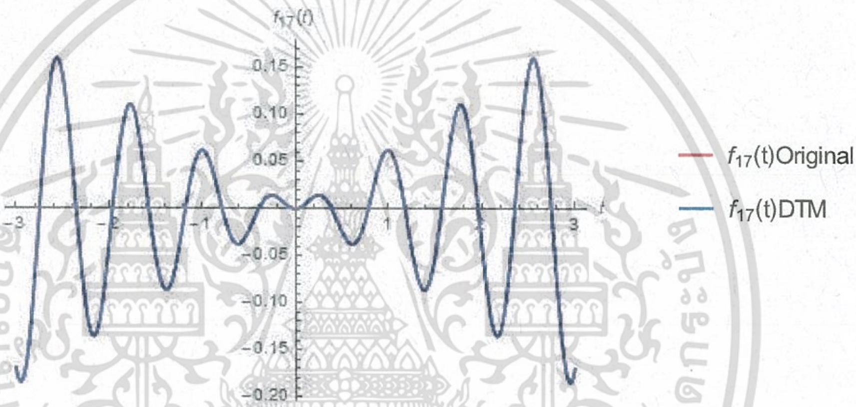
$$V_1(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.104)$$

$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.105)$$

$$G_3(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{-\omega F_{11}(k-1)+F_9(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.106}$$

$$F_{11}(k)=\begin{cases}0, & k=1\\ \dfrac{\omega G_3(k-1)+V_1(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.107}$$

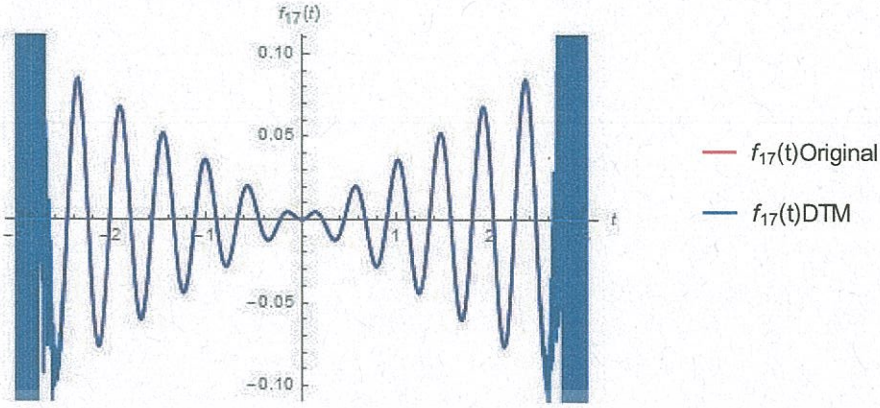
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11\leq\omega\leq 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega<-11$ และ $\omega>11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $\omega\neq 0$



รูปที่ 3.2.30 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{17}(t)=\dfrac{1}{2\omega}sin\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.17

และ $f_{17}(t)=0t^0+0t^1+\dfrac{1}{2}t^2+0t^3-\dfrac{16}{3}t^4+0t^5+\ldots-2.6\times10^{-866}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=-8, k=600$ และ $t\in[-3,3]$



รูปที่ 3.2.31 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{17}(t)=\dfrac{1}{2\omega}sin\omega t$ ในหัวข้อ 3.2.17

และ $f_{17}(t)=0t^0+0t^1+\dfrac{1}{2}t^2+0t^3-\dfrac{49}{3}t^4+0t^5+...-5.7\times10^{-721}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=-14, k=600$ และ $t\in[-3,3]$

3.2.18 พิจารณา $f_{18}(t)=\dfrac{1}{b^2-a^2}(cosat-cos\,bt)$

โดยที่ $g_6(t)=sin\,at$

$h_4(t)=cosat$

$u_2(t)=sinbt$

$v_3(t)=cos\,bt$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{18}(0)=\left[\frac{1}{b^2-a^2}(cos\,at-cos\,bt)\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(cosa(0)-cos\,b(0)\right)$$

$$=0 \tag{3.107}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{18}(t)=\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{18}(t)}{dt}=\frac{1}{b^2-a^2}(-a\sin at+b\sin bt)$$

$$=\frac{1}{b^2-a^2}\left(-ag_6(t)+bu_2(t)\right) \qquad (3.108)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.108) จะได้

$$(k+1)F_{18}(k+1)=\frac{1}{b^2-a^2}\left[-aG_6(k)+bU_2(k)\right]$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_{18}(k)=\frac{1}{b^2-a^2}\left[-aG_6(k-1)+bU_2(k-1)\right]$$

$$F_{18}(k)=\frac{1}{k(b^2-a^2)}\left[-aG(k-1)+bU(k-1)\right],\qquad k\ge 1 \qquad (3.109)$$

รวมสมการ (3.107) และ (3.109) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{18}(t)=\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$ คือ

$$F_{18}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{k(b^2-a^2)}\left[-aG_6(k-1)+bU_2(k-1)\right], & k\ge 1\end{cases} \qquad (3.110)$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$g_6(t)=\sin at \;:(\omega=a)$ จากสมการที่ (3.49), $h_4(t)=\cos at \;:(\omega=a)$ จากสมการที่ (3.48),

$u_2(t)=\sin bt:(\omega=b)$ จากสมการที่ (3.49), และ $v_3(t)=\cos bt \;:(\omega=b)$ จากสมการที่ (3.48) คือ

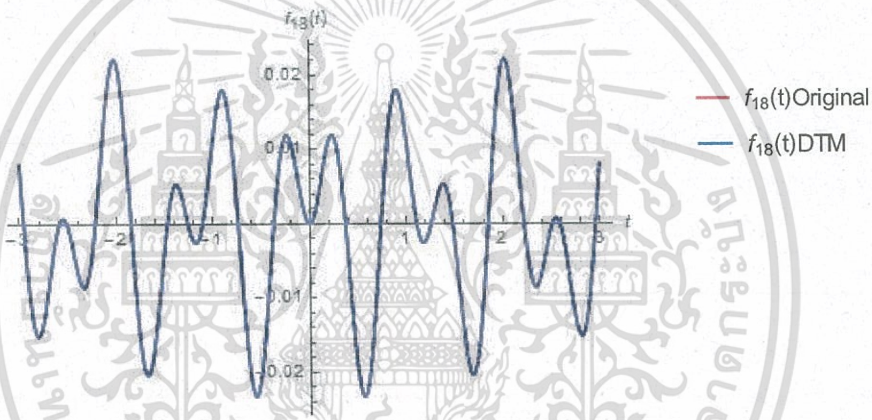
$$G_6(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{aH_4(k-1)}{k}, & k\ge 1\end{cases} \qquad (3.111)$$

$$H_4(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{-aG_6(k-1)}{k}, & k\ge 1\end{cases} \qquad (3.112)$$

$$U_2(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{bV_3(k-1)+G_6(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \quad (3.113)$$

$$V_3(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{-bU_2(k-1)+H_4(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \quad (3.114)$$

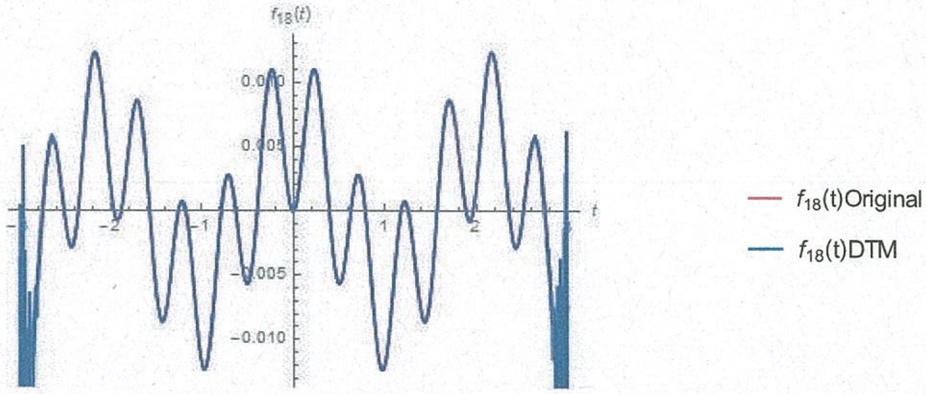
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-11\leq a\leq 11$ และจะต้องใช้ b ในช่วง $-11\leq b\leq 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a<-11, a>11$ หรือ $b<-11, b>11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $a\neq b$



รูปที่ 3.2.32 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{18}(t)=\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$

ในหัวข้อ 3.2.18 และ $f_{18}(t)=0t^0+0t^1+\dfrac{1}{2}t^2+0t^3-\dfrac{159}{24}t^4+0t^5+\ldots-6.4\times10^{-786}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=-6, b=11, k=600$ และ $t\in[-3,3]$



รูปที่ 3.2.33 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{18}(t)=\dfrac{1}{b^2-a^2}(cos\,at-cos\,bt)$

ในหัวข้อ 3.2.18 และ $f_{18}(t)=0t^0+0t^1+\dfrac{1}{2}t^2+0t^3-\dfrac{89}{12}t^4+0t^5+...-1.1\times10^{-742}t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=3, b=13, k=600$ และ $t\in[-3,3]$

3.2.19 พิจารณา $f_{19}(t)=\dfrac{1}{2\omega^3}(sin\omega t-\omega tcos\,\omega t)$

โดยที่ $v_1(t)=sin\omega t$

$f_9(t)=cos\omega t$

$g_3(t)=tcos\omega t$

$f_{11}(t)=tsin\omega t$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^kf(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{19}(0)=\left[\frac{1}{2\omega^3}(sin\omega t-\omega tcos\,\omega t)\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{2\omega^3}(sin\omega(0)-\omega(0)cos\,\omega(0))$$

$$=0 \qquad (3.115)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{19}(t)=\dfrac{1}{2\omega^3}(sin\omega t-\omega tcos\omega t)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{19}(t)}{dt} = \frac{1}{2\omega^3}\left(\omega cos\omega t - (-\omega^2 tsin\omega t + \omega cos\omega t)\right)$$

$$= \frac{1}{2\omega^3}\omega^2 tsin\omega t$$

$$= \frac{1}{2\omega} tsin\omega t$$

$$= \frac{1}{2\omega} f_{11}(t) \qquad (3.116)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.116) จะได้

$$(k+1)F_{19}(k+1) = \frac{1}{2\omega}F_{11}(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_{19}(k) = \frac{1}{2\omega}F_{11}(k-1)$$

$$F_{19}(k) = \frac{1}{2\omega k}F_{11}(k-1), \qquad k \geq 1 \qquad (3.117)$$

รวมสมการ (3.115) และ (3.117) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{19}(t) = \frac{1}{2\omega^3}(sin\omega t - \omega tcos\,\omega t)$ คือ

$$F_{19}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{1}{2\omega k}F_{11}(k-1), & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.118)$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$v_1(t) = sin\omega t$ จากสมการที่ (3.49) , $f_9(t) = cos\omega t$ จากสมการที่ (3.48) ,

$g_3(t) = tcos\omega t$ จากสมการที่ (3.63) และ $f_{11}(t) = tsin\omega t$ จากสมการที่ (3.62) คือ

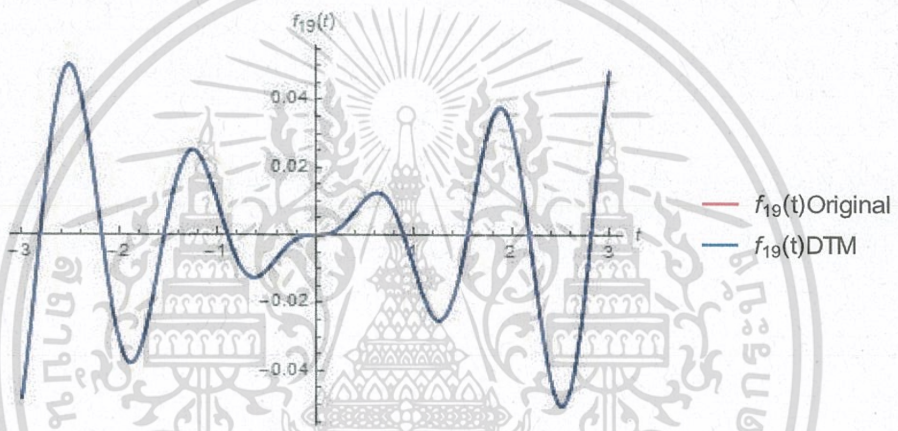
$$V_1(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.119)$$

$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.120)$$

$$G_3(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{-\omega F_{11}(k-1)+F_9(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.121}$$

$$F_{11}(k)=\begin{cases}0, & k=1\\ \dfrac{\omega G_3(k-1)+V_1(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.122}$$

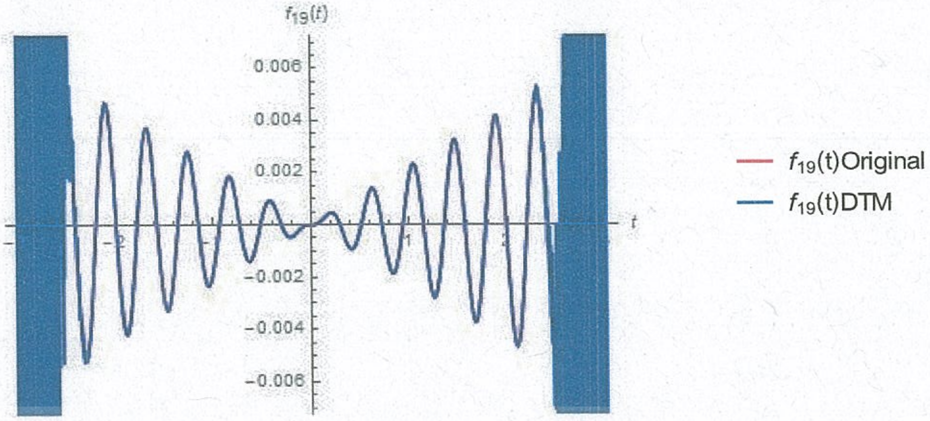
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-11\leq\omega\leq 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega<-11$ และ $\omega>11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $\omega\neq 0$



รูปที่ 3.2.34 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{19}(t)=\dfrac{1}{2\omega^3}(sin\omega t-\omega tcos\,\omega t)$

ในหัวข้อ 3.2.19 และและ $f_{19}(t)=0t^0+0t^1+0t^2+\dfrac{1}{6}t^3+0t^4-\dfrac{5}{12}t^5+...+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=5,k=600$ และ $t\in[-3,3]$



รูปที่ 3.2.35 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{19}(t)=\dfrac{1}{2\omega^3}(sin\omega t-\omega tcos\,\omega t)$

ในหัวข้อ 3.2.19 และและ $f_{19}(t)=0t^0+0t^1+0t^2+\dfrac{1}{6}t^3+0t^4-\dfrac{15}{4}t^5+...+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=15, k=600$ และ $t\in[-3,3]$

3.2.20 พิจารณา $f_{20}(t)=\dfrac{1}{4l^3}(sinltcoslt-cosltsinhlt)$

โดยที่ $g_7(t)=coshlt$

$h_5(t)=sinhlt$

$u_3(t)=coslt$

$v_4(t)=sinlt$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{20}(0)=\left[\frac{1}{4l^3}(sinltcoslt-cosltsinhlt)\right]_{t=0}$$

$$=\frac{1}{4l^3}\left(sinl(0)cosl(0)-cosl(0)sinhl(0)\right)$$

$$=0 \qquad (3.123)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{20}(t)=\frac{1}{4l^3}(sinltcoslt-cosltsinhlt)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{20}(t)}{dt}=\frac{1}{4l^3}sinlt(-1sinlt)+coslt\left(\frac{1}{4l^3}1coslt\right)$$

$$-\frac{1}{4l^3}coslt(lcos\,\mathrm{h}\,lt)-sinhlt\left(\frac{1}{4l^3}(-lsinlt)\right)$$

$$=-\frac{l}{4l^3}sinltsinlt+\frac{l}{4l^3}cosltcoslt-\frac{l}{4l^3}cosltcoshlt$$

$$+\frac{l}{4l^3}sinhlt+sinlt$$

$$=\frac{l}{4l^3}\left[-sinhltsinlt+cosltcoslt-cosltcoshlt+sinhltsinlt\right]$$

$$=\frac{l}{4l^3}\left[-v_4(t)v_4(t)+u_3(t)u_3(t)-u_3(t)g_7(t)+h_5(t)v_4(t)\right] \tag{3.124}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.124) จะได้

$$(k+1)F_{20}(k+1)=\frac{1}{4l^2}\left[-\sum_{m=0}^{k}V_4(m)V_4(k-m)+\sum_{m=0}^{k}U_3(m)U_3(k-m)\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^{k}U_3(m)G_7(k-m)+\sum_{m=0}^{k}H_5(m)V_4(k-m)\right]$$

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$kF_{20}(k)=\frac{1}{4l^2}\left[-\sum_{m=0}^{k-1}V_4(m)V_4(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)U_3(k-1-m)\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)G_7(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}H_5(m)V_4(k-1-m)\right]$$

$$F_{20}(k)=\frac{1}{4kl^2}\left[-\sum_{m=0}^{k-1}V_4(m)V_4(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)U_3(k-1-m)\right.$$
$$\left.-\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)G_7(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}H_5(m)V_4(k-1-m)\right],\quad k\geq 1 \tag{3.125}$$

รวมสมการ (3.123) และ (3.125) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{20}(t)=\dfrac{1}{4l^3}(sinltcoslt-cosltsinhlt)$ คือ

$$F_{20}(k)=\begin{cases}0\ , & k=0\\ \dfrac{1}{4kl^2}\left[-\sum_{m=0}^{k-1}V_4(m)V_4(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)U_3(k-1-m)\right. & \\ \left.-\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)G_7(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}H_5(m)V_4(k-1-m)\right], & k\geq 1\end{cases} \quad (3.126)$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$g_7(t)=coshlt\ :(a=l)$ จากสมการที่ (3.55) ,$h_5(t)=sinhlt\ :(a=l)$ จากสมการที่ (3.56), $u_3(t)=coslt\ :(\omega=l)$ จากสมการที่ (3.48) และ $v_4(t)=sinlt\ :(\omega=l)$ จากสมการที่ (3.49) คือ

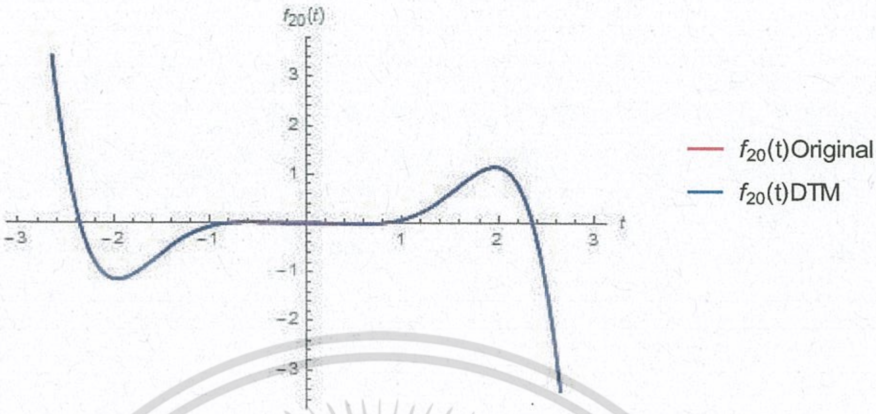
$$G_7(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{lH_5(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \quad (3.127)$$

$$H_5(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{lG_7(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \quad (3.128)$$

$$U_3(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{-\omega V_4(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \quad (3.129)$$

$$V_4(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{\omega U_3(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \quad (3.130)$$

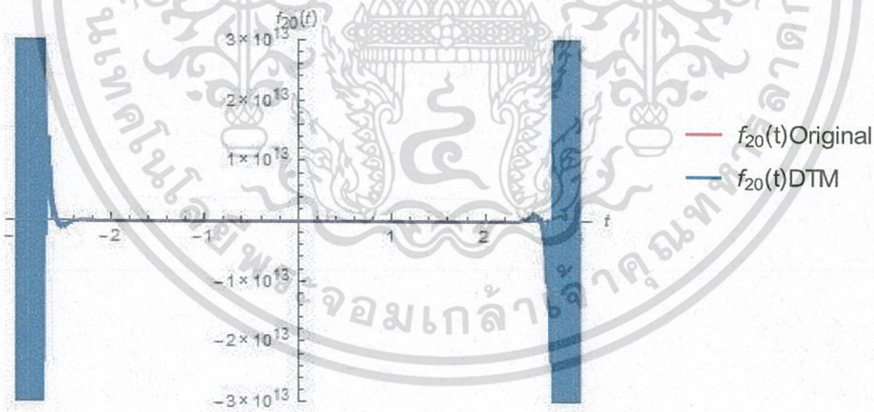
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-3,3]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ l ในช่วง $-11\le l\le 11$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $l<-11$ และ $l>11$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $l\neq 0$



รูปที่ 3.2.36 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{20}(t)=\dfrac{1}{4l^3}(sinltcoslt-cosltsinhlt)$

ในหัวข้อ 3.2.20 และ $f_{20}(t)=0t^0+0t^1+0t^2-\dfrac{1}{6}t^3+0t^4+\dfrac{1}{3}t^5+...+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $l=7,k=600$ และ $t\in[-3,3]$



รูปที่ 3.2.37 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{20}(t)=\dfrac{1}{4l^3}(sinltcoslt-cosltsinhlt)$

ในหัวข้อ 3.2.20 และ $f_{20}(t)=0t^0+0t^1+0t^2-\dfrac{7}{6}t^3+0t^4+\dfrac{343}{3}t^5+...+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $l=15,k=600$ และ $t\in[-3,3]$

3.2.21 พิจารณา $f_{21}(t)=\frac{1}{2l^2}(sinltsinhlt)$

โดยที่ $g_7(t)=coshlt$

$h_5(t)=sinhlt$

$u_3(t)=coslt$

$v_4(t)=sinlt$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{21}(0)=\left[\frac{1}{2l^2}(sin\,ltsinh\,lt)\right]_{t=0}=\frac{1}{2l^2}sinl(0)sinhl(0)=0 \qquad (3.131)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{21}(t)=\frac{1}{2l^2}(sinltsinhlt)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{21}(t)}{dt}=\frac{1}{2l^2}sinltl\,lcoshlt+sinhlt\frac{1}{2l^2}coslt$$

$$=\frac{1}{2l^2}(sinltcoshlt+cosltsinhlt$$

$$=\frac{1}{2l}(v_4(t)g_7(t)+u_3(t)h_5(t)) \qquad (3.132)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.132) จะได้

$$(k+1)F_{21}(k+1)=\frac{1}{2l}\left[\sum_{m=0}^{k}V_4(m)G_7(k-m)+\sum_{m=0}^{k}U_3(m)H_5(k-m)\right]$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$kF_{21}(k)=\frac{1}{2l}\left[\sum_{m=0}^{k-1}V_4(m)G_7(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)H_5(k-1-m)\right]$$

$$F_{21}(k)=\frac{1}{2kl}\left[\sum_{m=0}^{k-1}V_4(m)G_7(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)H_5(k-1-m)\right],\quad k\geq 1 \qquad (3.133)$$

รวมสมการ (3.131) และ (3.133) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{21}(t)=\frac{1}{2l^2}(sinltsinhlt)$ คือ

$$F_{21}(k)=\begin{cases}0\ , & k=0\\ \frac{1}{4kl}\left[\sum_{m=0}^{k-1}V_4(m)G_7(k-1-m)+\sum_{m=0}^{k-1}U_3(m)H_5(k-1-m)\right], & k\geq 1\end{cases} \quad (3.134)$$

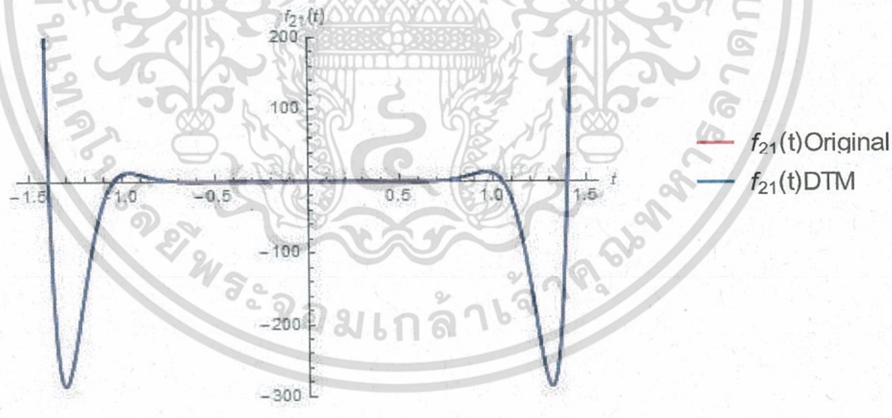
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$g_7(t)=coshlt\ :(a=l)$ จากสมการที่ (3.55) $,h_5(t)=sinhlt\ :(a=l)$ จากสมการที่ (3.56),

$u_3(t)=coslt\ :(\omega=l)$ จากสมการที่ (3.48) และ $v_4(t)=sinlt\ :(\omega=l)$ จากสมการที่ (3.49)

เป็นไปตามสมการ(3.127), (3.128), (3.129), (3.130)

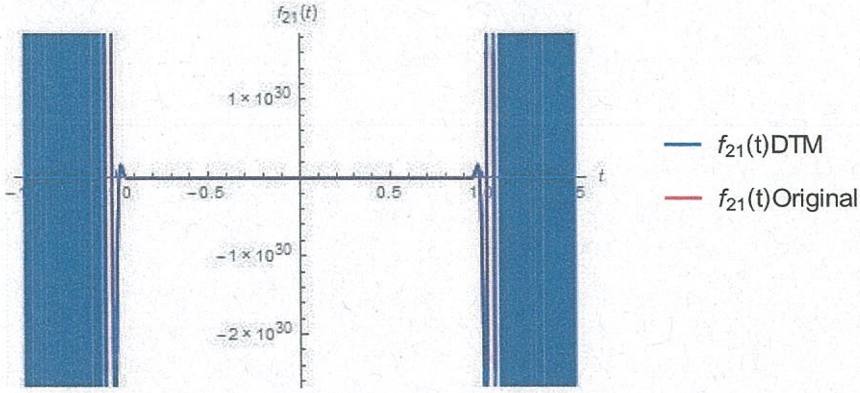
กำหนด $k=600$ และ $t\in[-1.5,1.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ l ในช่วง $-55\leq l\leq 55$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $l<-55$ และ $l>55$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $l\neq 0$



รูปที่ 3.2.38 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{21}(t)=\frac{1}{2l^2}(sinltsinhlt)$

ในหัวข้อ 3.2.21 และ $f_{21}(t)=0t^0+0t^1+\frac{1}{2}t^2+0t^3+0t^4+0t^5+...+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $l=-9,k=600$ และ $t\in[-1.5,1.5]$



รูปที่ 3.2.39 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_{21}(t)=\dfrac{1}{2l^2}(sinltsinhlt)$ ในหัวข้อ 3.2.21

และ $f_{21}(t)=0t^0+0t^1+\dfrac{1}{2}t^2+0t^3+0t^4+0t^5+...+0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $l=80,k=600$ และ $t\in[-1.5,1.5]$

3.2.22 พิจารณา $f_{22}(t)=\dfrac{1}{2l^3}(sinhlt-sinlt)$

โดยที่ $g_7(t)=coshlt$

$h_5(t)=sinhlt$

$u_3(t)=coslt$

$v_4(t)=sinlt$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_{22}(0)=\left[\frac{1}{2l^3}(sinhlt-sinlt)\right]_{t=0}=\frac{1}{2l^3}\left(sinhl(0)-sinl(0)\right)=0 \tag{3.135}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{22}(t)=\dfrac{1}{2l^3}(sinhlt-sinlt)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{22}(t)}{dt}=\frac{1}{2l^3}\left(lcoshlt-lcoslt\right)$$

$$= \frac{1}{2l^2}\left(coshlt - coslt\right)$$

$$= \frac{1}{2l^2}\left(g(t) - u(t)\right) \qquad (3.136)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.136) จะได้

$$(k+1)F_{22}(k+1) = \frac{1}{2l^2}\left[G_7(k) - U_3(k)\right]$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_{22}(k) = \frac{1}{2l^2}\left[G_7(k-1) - U_3(k-1)\right]$$

$$F_{22}(k) = \frac{1}{2kl^2}\left[G_7(k-1) - U_3(k-1)\right], \quad k \geq 1 \qquad (3.137)$$

รวมสมการ (3.135) และ (3.137) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{22}(t) = \frac{1}{2l^3}(sinhlt - sinlt)$ คือ

$$F_{22}(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{1}{2kl^2}\left[G_7(k-1) - U_3(k-1)\right], & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.138)$$

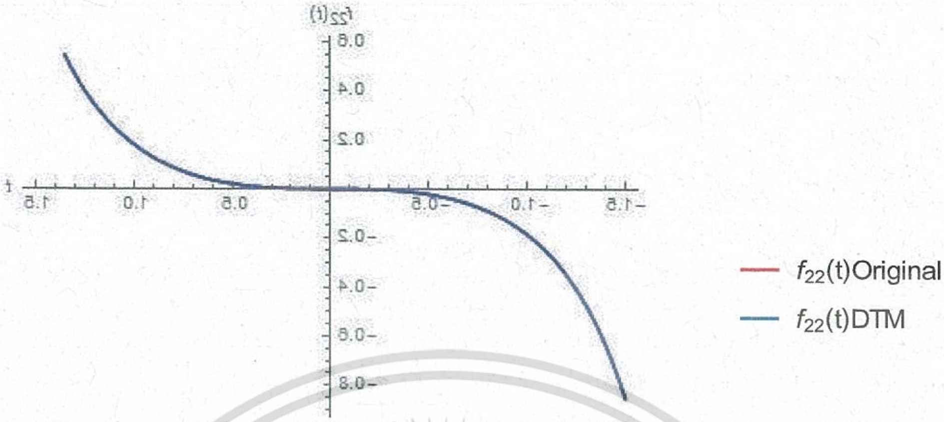
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

$g_7(t) = coshlt$ $:(a = l)$ จากสมการที่ (3.55) , $h_5(t) = sinhlt$ $:(a = l)$ จากสมการที่ (3.56),

$u_3(t) = coslt$ $:(\omega = l)$ จากสมการที่ (3.48) และ $v_4(t) = sinlt$ $:(\omega = l)$ จากสมการที่ (3.49)

เป็นไปตามสมการ(3.127), (3.128), (3.129), (3.130)

กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-1.5, 1.5]$ ในการวาดกราฟจะต้องใช้ l ในช่วง $-22000 \le l \le 22000$ กราฟถึงจะทับกันสนิท โดยที่ $l \neq 0$



รูปที่ (3.2.40) แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{22}(t) = \frac{1}{2l^3}(sinhlt - sinlt)$

ในหัวข้อ 3.2.21 และ $f_{22}(t) = 0t^0 + 0t^1 + 0t^2 + \frac{1}{6}t^3 + 0t^4 + 0\,t^5 + ... + 0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $l = 3, k = 600$ และ $t \in [-1.5, 1.5]$

3.2.23 พิจารณา $f_{23}(t) = \frac{1}{2l^2}(coshlt - coslt)$

โดยที่ $g_7(t) = coshlt$

$h_5(t) = sinhlt$

$u_3(t) = coslt$

$v_4(t) = sinlt$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$F_{23}(0) = \left[\frac{1}{2l^2}(coshlt - coslt)\right]_{t=0} = \frac{1}{2l^2}\left(coshl(0) - cosl(0)\right) = 0 \qquad (3.139)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{23}(t)=\frac{1}{2l^2}(coshlt-coslt)$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_{23}(t)}{dt}=\frac{1}{2l^2}(lsinhlt+lsinlt)$$

$$=\frac{1}{2l^2}(sinhlt+sinlt)$$

$$=\frac{1}{2l}(u_3(t)+g_7(t)) \qquad (3.140)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.140) จะได้

$$(k+1)F_{23}(k+1)=\frac{1}{2l}(U_3(k)+G_7(k))$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้ $\quad k+1=k_1$

$$k=k_1-1$$

$$kF_{23}(k)=\frac{1}{2l}(U_3(k-1)+G_7(k-1))$$

$$F_{23}(k)=\frac{1}{2kl}(U_3(k-1)+G_7(k-1)),\quad k\ge 1 \qquad (3.141)$$

รวมสมการ (3.139) และ (3.141) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_{23}(t)=\frac{1}{2l^3}(coshlt-coslt)$ คือ

$$F_{23}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \frac{1}{2kl}(U_3(k-1)+G_7(k-1)), & k\ge 1\end{cases} \qquad (3.150)$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ

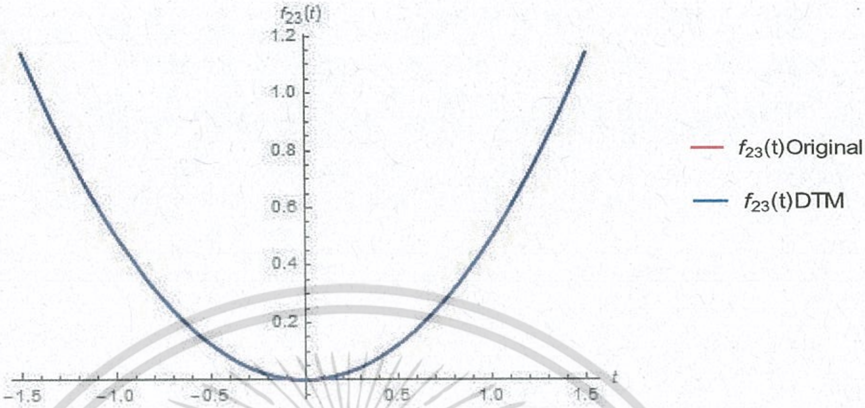
$g_7(t)=coshlt\ :(a=l)$ จากสมการที่ (3.55) , $h_5(t)=sinhlt\ :(a=l)$ จากสมการที่ (3.56),

$u_3(t)=coslt\ :(\omega=l)$ จากสมการที่ (3.48) และ $v_4(t)=sinlt\ :(\omega=l)$ จากสมการที่ (3.49)

เป็นไปตามสมการ(3.127), (3.128), (3.129), (3.130)

กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-1.5, 1.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ l ในช่วง $-5000 < l < 5000$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $l \le -5000$ และ $l \ge 5000$ กราฟจะมีบางส่วนทับกันไม่สนิท

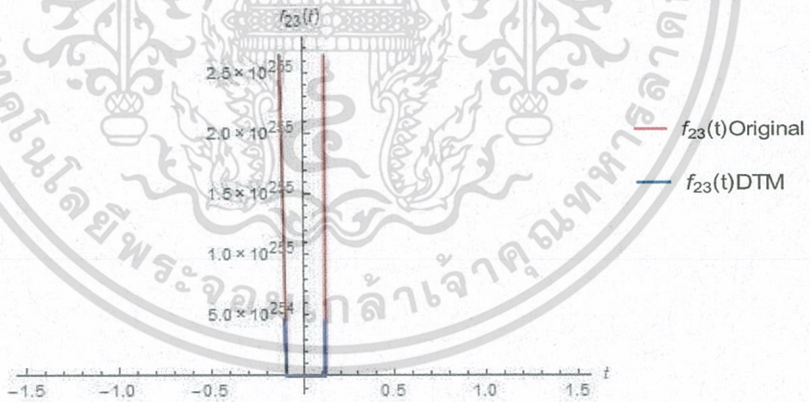
โดยที่ $l \neq 0$



รูปที่ 3.2.41 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{23}(t) = \dfrac{1}{2l^3}(coshlt - coslt)$

ในหัวข้อ 3.2.21 และ $f_{23}(t) = 0t^0 + 0t^1 + \dfrac{1}{2}t^2 + 0t^3 + 0t^4 + 0t^5 + \ldots + 0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $l = 1, k = 600$ และ $t \in [-1.5, 1.5]$



รูปที่ 3.2.42 แสดงกราฟบางส่วนทับกันไม่สนิท $f_{23}(t) = \dfrac{1}{2l^3}(coshlt - coslt)$

ในหัวข้อ 3.2.21 และ $f_{23}(t) = 0t^0 + 0t^1 + \dfrac{1}{2}t^2 + 0t^3 + 0t^4 + 0t^5 + \ldots + 0t^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $l = 5000, k = 600$ และ $t \in [-1.5, 1.5]$

3.3 ตัวอย่างการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซที่จุด $t \neq 0$

จากหัวข้อ 3.2 นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์ที่เราศึกษาจะพิจารณากรณีที่ $t=0$ เท่านั้น ในหัวข้อนี้จึงจะแสดงตัวอย่างการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่เชิงเส้นในตารางการแปลงลาปลาซที่ใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์กรณีที่ $t \neq 0$

3.3.1 พิจารณา $f_{24}(t) = lnt - \gamma$, $(\gamma = 0.5772)$

โดยใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์กรณีที่ $t=1$

จากนิยามของการแปลง $F(k)\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=1}$ จะได้

$$F_{24}(0) = \left[-lnt - 0.5772\right]_{t=1} = -ln(1) - 0.5772 = -0.5772$$

หาอนุพันธ์ของ $f_{24}(t) = -lnt - 0.5772$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{t} = -t^{-1} \qquad (3.3.1)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.3.1) และ จาก**ทฤษฎีบทที่ 9**

ถ้า $f(t) = t^m, m = -1, -2, -3, \ldots$ แล้ว $F(\mathrm{k}) = \dfrac{1}{k!}\left[m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)\right]$ จะได้

$$(k+1)F(k+1) = \frac{1}{k!}\left[(-1)(-2)\ldots(-1-k+1)\right]$$

$$(k+1)F(k+1) = \frac{1}{k!}\left[(-1)\ldots(-k)\right]$$

แทน $k+1$ ด้วย k จะได้

$$(k)F(k) = -\frac{1}{(k-1)!}\left[(-1)\ldots(-k+1)\right]$$

พิจารณาที่ $k=1$

$$(1)F(1) = -\frac{1}{(0)!}$$

$$F(1) = -1$$

พิจารณาที่ $k=2$,

$$2F(2) = -\frac{1}{1!}(-1)$$

$$F(2) = \frac{1}{2}$$

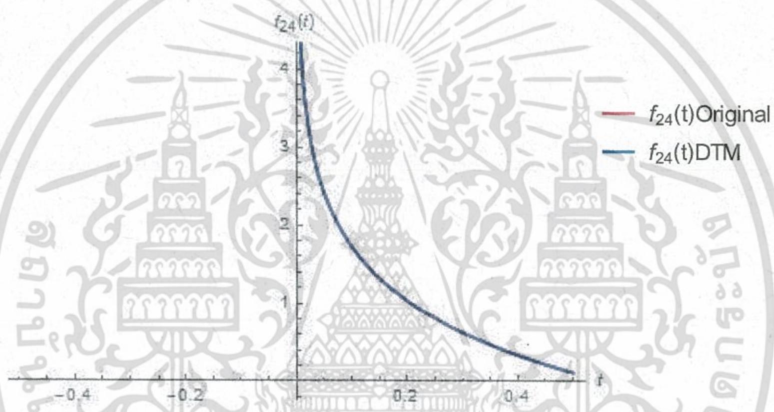
พิจารณาที่ $k=3$,

$$3F(3)=-\frac{1}{2!}\left[(-1)(-2)\right]$$
$$F(3)=-\frac{1}{3}$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณT-functionของ $f_{24}(t)=-lnt-0.5772$ คือ

$$F_{24}(k)=\begin{cases}-0.5772, & k=0\\ \dfrac{(-1)^k}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{3.3.2}$$

กำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$ ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.3.1 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_{24}(t)=-lnt-0.5772$ ในหัวข้อ 3.3.1

และ $f_{24}(t)=-0.5772-1(t-1)+\frac{1}{2}(t-1)^2-\frac{1}{3}(t-1)^3+...+\frac{1}{600}(t-1)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $k=600$ และใช้ t ในช่วง -0.5 ถึง 0.5

3.3.2 พิจารณา $f_3(t)=e^{at}$

โดยใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์กรณีที่ $t=1$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=1}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$

$$F_3(0) = e^a \qquad (3.3.3)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_3(t)=e^{at}$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_3(t)}{dt} = ae^{at} = af_3(t) \qquad (3.3.4)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.3.4) จะได้

$$(k+1)F_3(k+1) = aF_3(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

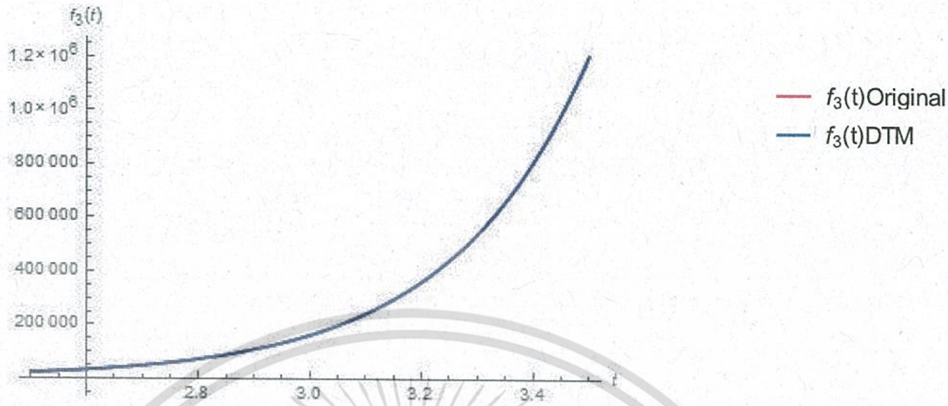
$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$\begin{aligned} kF_3(k) &= aF_3(k-1) \\ F_3(k) &= \frac{aF_3(k-1)}{k}, \quad k\geq 1 \end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

ดังนั้นความสัมพันธ์เวียนเกิด สำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_3(t)=e^{at}$ คือ

$$F_3(k)=\begin{cases} e^a, & k=0 \\ \dfrac{aF_3(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases} \qquad (3.3.6)$$

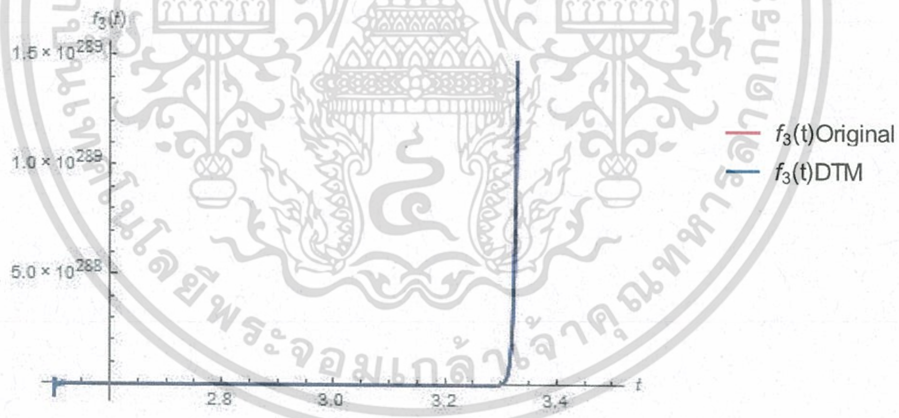
กำหนด $k = 600$ และ $t \in [2.5, 3.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-185 \le a \le 185$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a < -185$ และ $a > 185$ กราฟจะลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.3.4 แสดงการทับสนิทกันระหว่างกราฟของ $f_3(t) = e^{at}$ ในหัวข้อ 3.3.2

และ $f_3(t) = 1.6\times10^5 + 1.3\times10^6(t-3) + 1.7\times10^6(t-3)^2 + \ldots + 2.2\times10^{-1042}(t-3)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a = 4, k = 600$ และ $t \in [2.5, 3.5]$



รูปที่ 3.3.5 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_3(t) = e^{at}$ ในหัวข้อ 3.3.2

และ $f_3(t) = 7.5\times10^{262} + 7.5\times10^{264}(t-3) + 5\times10^{266}(t-3)^2 + \ldots + 1.2\times10^{233}(t-3)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a = 200, k = 600$ และ $t \in [2.5, 3.5]$

3.3.3 พิจารณา $f_7(t) = e^{at} cos\omega t$

โดยที่ $h_2(t) = e^{at} sin\omega t$

โดยใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์กรณีที่ $t = 3$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=3}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$\begin{aligned} F_7(0) &= \left[e^{at} cos\,\omega t)\right]_{t=3} = e^{3a} cos3\omega \\ H_2(0) &= \left[e^{at} sin\omega t\right]_{t=3} = e^{3a} sin3\omega \end{aligned} \qquad (3.3.11)$$

หาอนุพันธ์ของ $f_7(t) = e^{at} cos\,\omega t,\ h_2(t) = e^{at} sin\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{df_7(t)}{dt} &= -\omega(e^{at} sin\omega t) + a(e^{at} cos\omega t) = -\omega h_2(t) + af_7(t) \\ \frac{dh_2(t)}{dt} &= \omega(e^{at} cos\omega t) + a(e^{at} sin\omega t) = \omega f_7(t) + ah_2(t) \end{aligned} \qquad (3.3.12)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.3.12) จะได้

$$\frac{df_7(t)}{dt} = -\omega h_2(t) + af_7(t)$$

$$(k+1)F_7(k+1) = -\omega H_2(k) + aF_7(k)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \omega f_7(t) + ah_2(t)$$

$$(k+1)H_2(k+1) = \omega F_7(k) + aH_2(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$F_7(k) = \frac{-\omega H_2(k-1) + aF_7(k-1)}{k},\ k \ge 1 \qquad (3.3.13)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$H_2(k) = \frac{\omega F_7(k-1) + aH_2(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \tag{3.2.14}$$

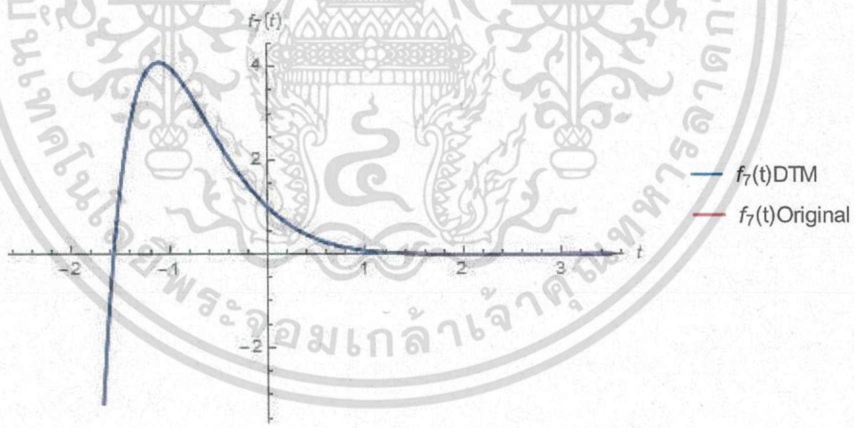
ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_7(t) = e^{at}\cos\omega t$ คือ

$$F_7(k) = \begin{cases} e^{3a}\cos 3\omega\,, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega H_2(k-1) + aF_7(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.15}$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $h_2(t) = e^{at}\sin\omega t$ คือ

$$H_2(k) = \begin{cases} e^{3a}\sin 3\omega, & k = 0 \\ \dfrac{\omega F_7(k-1) + aH_2(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.16}$$

กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-2.5, 3.5]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-5 \leq a \leq 5$ และใช้ ω ในช่วง $-5 \leq \omega \leq 5$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a < -5, a > 5$ หรือ $\omega < -5, \omega > 5$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $a \neq b$

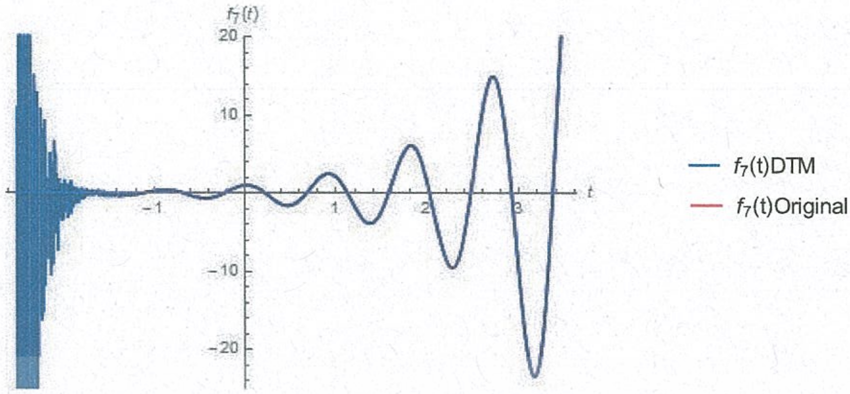


รูปที่ 3.3.6 แสดงการทับกันสนิทของกราฟ $f_7(t) = e^{at}\cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.3

และ $f_7(t) = -0.0025 + 0.0046(t-3) - 0.0030(t-3)^2 + \ldots + 2.8\times10^{-1202}(t-3)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a = -2, \omega = 1, k = 600$ และ

$t \in [-2.5, 3.5]$



รูปที่ 3.3.7 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_7(t)=e^{at}\cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.3

และ $f_7(t)=-11-1.3\times10^2(t-3)+1.5\times10^2(t-3)^2+...+2\times10^{-898}(t-3)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=1,\omega=7,k=600$ และ $t\in[-2.5,3.5]$

โดยใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์กรณีที่ $t=5$

จากนิยามการแปลง

$$F(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=5}$$

พิจารณาเมื่อ $k=0$ จะได้

$$F(0)=\left[e^{at}\cos\omega t)\right]_{t=5}=e^{5a}\cos3\omega$$
$$H(0)=\left[e^{at}\sin\omega t\right]_{t=5}=e^{5a}\sin3\omega \tag{3.3.17}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_7(t)=e^{at}\cos\omega t$, $h_2(t)=e^{at}\sin\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{df_7(t)}{dt}=-\omega(e^{at}\sin\omega t)+a(e^{at}\cos\omega t)=-\omega h_2(t)+af_7(t)$$
$$\frac{dh(t)}{dt}=\omega(e^{at}\cos\omega t)+a(e^{at}\sin\omega t)=\omega f_7(t)+ah_2(t) \tag{3.3.18}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.3.18) จะได้

$$\frac{df_7(t)}{dt}=-\omega h_2(t)+af_7(t)$$

$$(k+1)F_7(k+1)=-\omega H_2(k)+aF_7(k)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{dh_2(t)}{dt} = \omega f_7(t) + ah_2(t)$$

$$(k+1)H_2(k+1) = \omega F_7(k) + aH_2(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$F_7(k) = \frac{-\omega H_2(k-1) + aF_7(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \tag{3.3.19}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$H_2(k) = \frac{\omega F_7(k-1) + aH_2(k-1)}{k}, \quad k \geq 1 \tag{3.2.20}$$

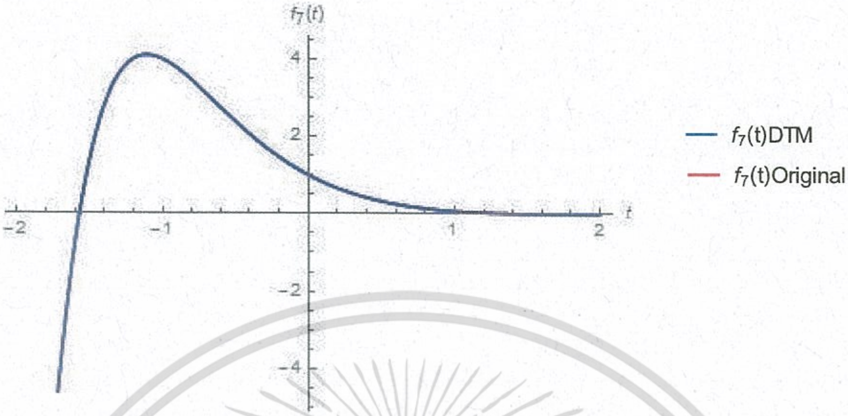
ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_7(t) = e^{at}cos\,\omega t$ คือ

$$F_7(k) = \begin{cases} e^{5a}cos5\omega\,, & k=0 \\ \dfrac{-\omega H_2(k-1) + aF_7(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.21}$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $h_2(t) = e^{at}sin\omega t$ คือ

$$H_2(k) = \begin{cases} e^{5a}sin5\omega, & k=0 \\ \dfrac{\omega F_7(k-1) + aH_2(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.22}$$

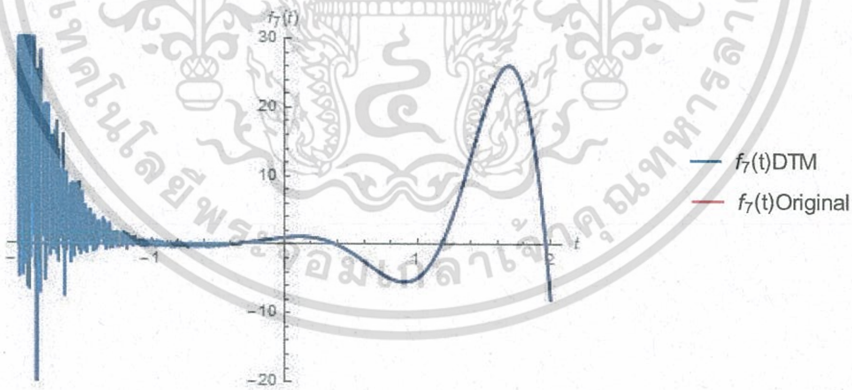
กำหนด $k=600$ $t\in[-2,2]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ a ในช่วง $-2\le a\le 2$ และใช้ ω ในช่วง $-3\le\omega\le 3$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $a<-2, a>2$ หรือ $\omega<-3,\omega>3$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก โดยที่ $a\neq b$



รูปที่ 3.3.8 แสดงการทับกันสนิทของกราฟ $f_7(t)=e^{at}\cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.3

และ $f_7(t)=0.000013+0.000018(t-5)-0.000068(t-5)^2+...-1.7\times10^{-1203}(t-5)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=-2,\omega=1,k=600$ และ $t\in[-2,2]$



รูปที่ 3.3.9 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_7(t)=e^{at}\cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.3

และ $f_7(t)=9\times10^3-3\times10^4(t-5)-2.1\times10^5(t-5)^2+...+3.0\times10^{-1014}(t-5)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $a=2,\omega=4,k=600$ และ $t\in[-2,2]$

3.3.4 พิจารณา $f_9(t) = cos\omega t$

โดยที่ $v_1(t) = sin\omega t$

โดยใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์กรณีที่ $t = 3$
จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=3}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$\begin{aligned} F_9(0) &= [cos\omega t)]_{t=3} = cos3\omega \\ V_1(0) &= [sin\omega t]_{t=3} = sin3\omega \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_7(t) = cos\omega t$ และ $v_1(t) = sin\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{df_9(t)}{dt} &= -\omega sin\omega t = -\omega v_1(t) \\ \frac{dv_1(t)}{dt} &= \omega cos\omega t = \omega f_9(t) \end{aligned} \tag{3.2.24}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.2.24) จะได้

$$\frac{df_9(t)}{dt} = -\omega v_1(t)$$

$$(k+1)F_9(k+1) = -\omega V_1(k)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \omega f_9(t)$$

$$(k+1)V_1(k+1) = \omega F_9(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_9(k) = -\omega V_1(k-1)$$

$$F_9(k) = \frac{-\omega V_1(k-1)}{k},\ k \geq 1 \tag{3.2.25}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$kV_1(k) = \omega F_9(k-1)$$

$$V_1(k) = \frac{\omega F_9(k-1)}{k},\ k \geq 1 \tag{3.2.26}$$

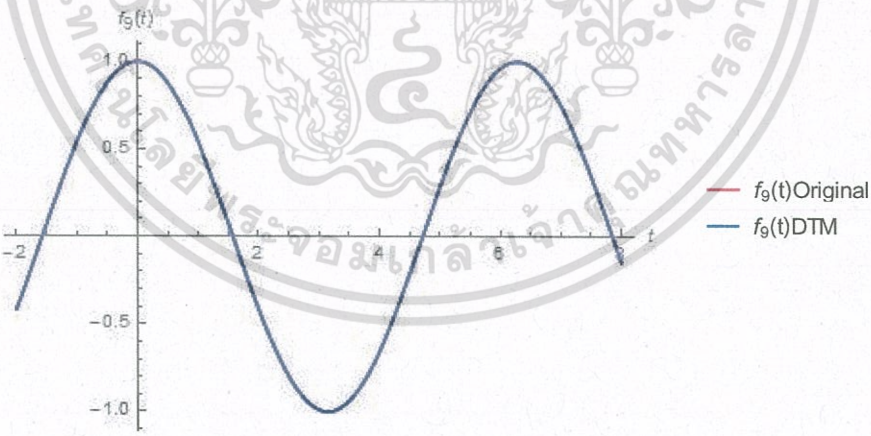
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_9(t) = cos\omega t$ คือ

$$F_9(k) = \begin{cases} cos3\omega, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.27}$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $v_1(t) = sin\omega t$ คือ

$$V_1(k) = \begin{cases} sin3\omega, & k = 0 \\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.2.28}$$

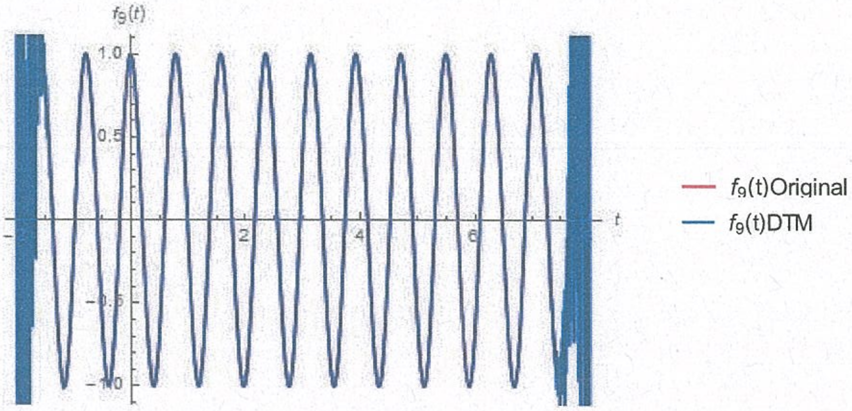
กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-2,8]$ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-7 \leq \omega \leq 7$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega < -7$ และ $\omega > 7$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.3.10 แสดงการทับกันสนิทของกราฟ $f_9(t) = cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.4

และ $f_9(t) = -0.99 - 0.14(t-3) + 0.49(t-3)^2 + \ldots - 7.9 \times 10^{-1409}(t-3)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega = 1, k = 600$ และ $t \in [-2,8]$



รูปที่ 3.3.11 แสดงกราไม่ลู่เข้าสู่ $f_9(t) = cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.4 และ

$f_9(t) = -0.42 + 7.2(t-3) - 14(t-3)^2 + ... + 2.4\times10^{-867}(t-3)^{600}$ จากวิธี DTM

เมื่อ $\omega = 8, k = 600$ และ $t \in [-2,8]$

โดยใช้นิยามการแปลงเชิงอนุพันธ์กรณีที่ $t = 7$

จากนิยามการแปลง

$$F(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=7}$$

พิจารณาเมื่อ $k = 0$

$$\begin{aligned} F_9(0) &= [cos\,\omega t)]_{t=7} = cos7\omega \\ V_1(0) &= [sin\omega t]_{t=7} = sin7\omega \end{aligned} \tag{3.2.29}$$

หาอนุพันธ์ของ $f_7(t) = cos\omega t$ และ $v_1(t) = sin\omega t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\begin{aligned} \frac{df_9(t)}{dt} &= -\omega sin\omega t = -\omega v_1(t) \\ \frac{dv_1(t)}{dt} &= \omega cos\omega t = \omega f_9(t) \end{aligned} \tag{3.2.30}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.2.22) จะได้

$$\frac{df_9(t)}{dt} = -\omega v_1(t)$$

$$(k+1)F_9(k+1) = -\omega V_1(k)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = \omega f_9(t)$$

$$(k+1)V_1(k+1) \ = \omega F_9(k)$$

แทนที่ $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$kF_9(k) \ = -\omega V_1(k-1)$$

$$F_9(k) = \frac{-\omega V_1(k-1)}{k}, \ k \geq 1 \qquad (3.2.31)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$kV_1(k) = \omega F_9(k-1)$$

$$V_1(k) = \frac{\omega F_9(k-1)}{k}, \ k \geq 1 \qquad (3.2.24)$$

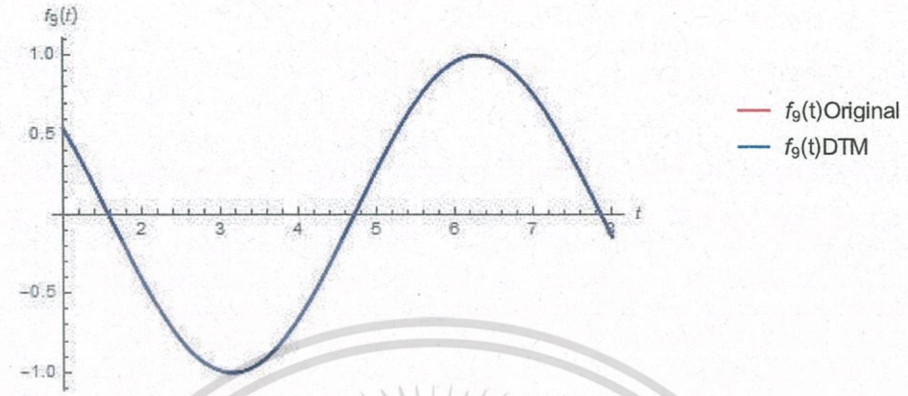
โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_9(t) = cos\omega t$ คือ

$$F_9(k) = \begin{cases} cos7\omega, & k = 0 \\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.2.32)$$

และความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $v_1(t) = sin\omega t$ คือ

$$V_1(k) = \begin{cases} sin7\omega\,, & k = 0 \\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.2.33)$$

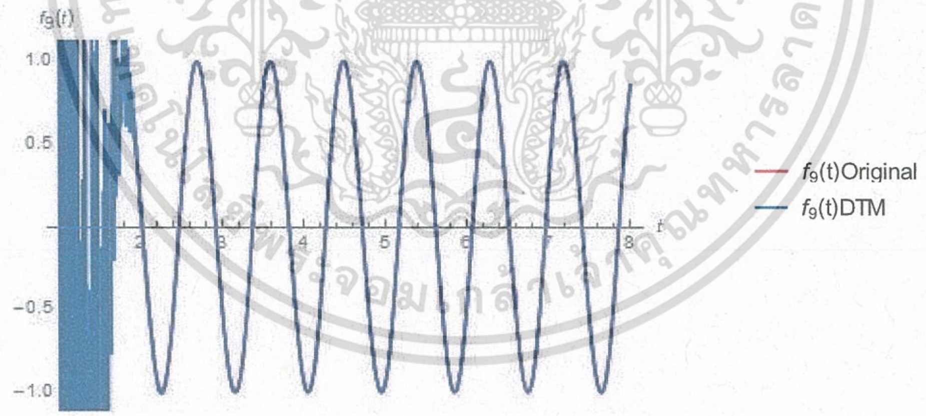
กำหนด $k=600$ และ $t\in[1,8]$ ในการวาดกราฟ จะต้องใช้ ω ในช่วง $-5\le\omega\le5$ กราฟถึงจะทับกันสนิท และถ้าใช้ $\omega<-5$ และ $\omega>5$ กราฟจะมีลักษณะลู่ออก



รูปที่ 3.3.12 แสดงการทับกันสนิทของกราฟ $f_9(t)=cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.4

และ $f_9(t)=0.75-0.66(t-7)-0.38(t-7)^2+...+6.0\times10^{-1409}(t-7)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=1,k=600$ และ $t\in[1,8]$



รูปที่ 3.3.13 แสดงกราฟไม่ลู่เข้าสู่ $f_9(t)=cos\omega t$ ในหัวข้อ 3.3.4

และ $f_9(t)=0.30+6.7(t-7)-7.4(t-7)^2+...+2.7\times10^{-902}(t-7)^{600}$

จากวิธี DTM เมื่อ $\omega=7,k=600$ และ $t\in[1,8]$

3.4 การแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ได้อยู่ในตารางการแปลงลาปลาซ

เนื่องจากฟังก์ชันในหัวข้อ3.2นั้นไม่เพียงพอที่จะนำไปใช้ในการหาผลเฉลยในบทที่4ได้จึงจำเป็นที่จะต้องทำการหาการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ได้อยู่ในตารางการแปลงลาปลาซ ซึ่งฟังก์ชันที่อยู่ในหัวข้อนี้จำเป็นต้องนำไปใช้ในการหาผลเฉลยในบทที่4

3.4.1 พิจารณา $u(y)=y^2$

จากนิยามของการแปลง $F(k)\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$ จะได้

$$U(0)=\left[y(t)\right]_{t=0}^2=\left[y(0)\right]^2=\left[Y(0)\right]^2 \tag{3.4.1}$$

หาอนุพันธ์ของ $u(y)=y^2$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{du(y)}{dt}=2y\frac{dy}{dt} \tag{3.4.2}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.4.2) จะได้

$$(k+1)U(k+1)=2\sum_{m=0}^{k}(m+1)Y(m+1)Y(k-m) \quad \text{(ใช้ทฤษฎีบทที่ 7)}$$

แทน $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1=k_1$$
$$k=k_1-1$$

$$(k)U(k)=2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)$$

$$U(k)=\frac{1}{k}\left[2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)\right] \quad , k\ge 1$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $u(y)=y^2$ คือ

$$U(k)=\begin{cases}\left(Y(0)\right)^2, & k=0\\ \frac{1}{k}\left[2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)\right], & k\ge 1\end{cases} \tag{3.4.3}$$

3.4.2 พิจารณา $g_5(t) = cos^2 t$

โดยที่ $f_9(t) = cost$, $v_1(t) = sint$

จากนิยามของการแปลง $F(k)\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$ จะได้

$$G_5(0) = \left[cos^2 t\right]_{t=0} = 1 \tag{3.4.4}$$

หาอนุพันธ์ของ $g_5(t) = cos^2 t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{dg_5(t)}{dt} = -2costsint = -2f_9(t)v_1(t) \tag{3.4.5}$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.4.5) จะได้

$$(k+1)G_5(k+1) = -2\sum_{m=0}^{k} F_9(m)V_1(k-m)$$

แทน $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$(k)G_5(k) = -2\sum_{m=0}^{k-1} F_9(m)V_1(k-1-m)$$

$$G_5(k) = \frac{1}{k}\left[-2\sum_{m=0}^{k-1} F_9(m)V_1(k-1-m)\right], \quad k \geq 1 \tag{3.4.6}$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $g_5(t) = cos^2 t$ คือ

$$G_5(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{1}{k}\left[-2\sum_{m=0}^{k-1} F_9(m)V_1(k-1-m)\right], & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.4.7}$$

โดยความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $v_1(t) = sin t : (\omega = l)$

จากสมการ (3.49) คือ

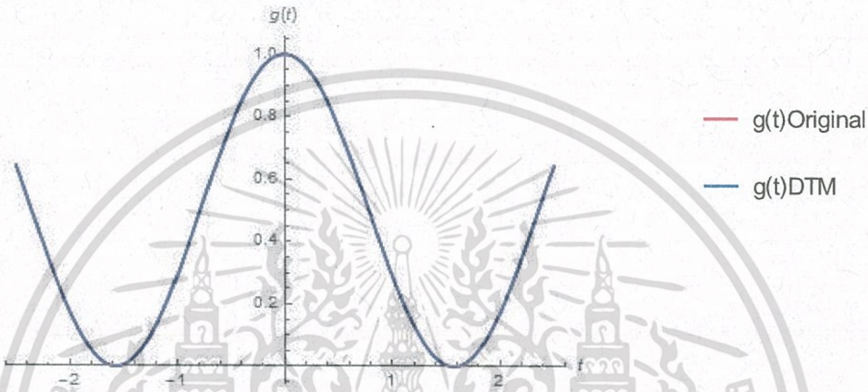
$$V_1(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{3.4.8}$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $f_9(t) = cost : (\omega = l)$

จากสมการ (3.48) คือ

$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \quad (3.4.9)$$

กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-2.5, 2.5]$ ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.4.1 แสดงการทับกันสนิทของกราฟ $g_5(t) = cos^2 t$ ในหัวข้อ 3.4.2

และ $g_5(t) = 1 + 0t - 1t^2 + 0t^3 ... + 1.6 \times 10^{-1228} t^{600}$ จากวิธี DTM เมื่อ $k = 600$

และ $t \in [-2.5, 2.5]$

3.4.3 พิจารณา $r(t) = cos^3 t$

โดยที่ $f_9(t) = cost,\ v_1(t) = sint,\ g_5(t) = cos^2 t$

จากนิยามของการแปลง $F(k)\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{d^k f(t)}{dt^k}\right]_{t=0}$ จะได้

$$R(0) = \left[cos^3(0)\right] = 1 \quad (3.4.10)$$

หาอนุพันธ์ของ $r(t) = cos^3 t$ เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{dr(t)}{dt} = -3cos^2 t sint = -3g_5(t)v_1(t) \quad (3.4.11)$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.4.11) จะได้

$$(k+1)R(k+1) = -3\sum_{m=0}^{k} G_5(m)V_1(k-m)$$

แทน $k+1$ ด้วย k จะได้

$$k+1 = k_1$$
$$k = k_1 - 1$$

$$(k)R(k) = -3\sum_{m=0}^{k-1} G_5(m)V_1(k-1-m)$$

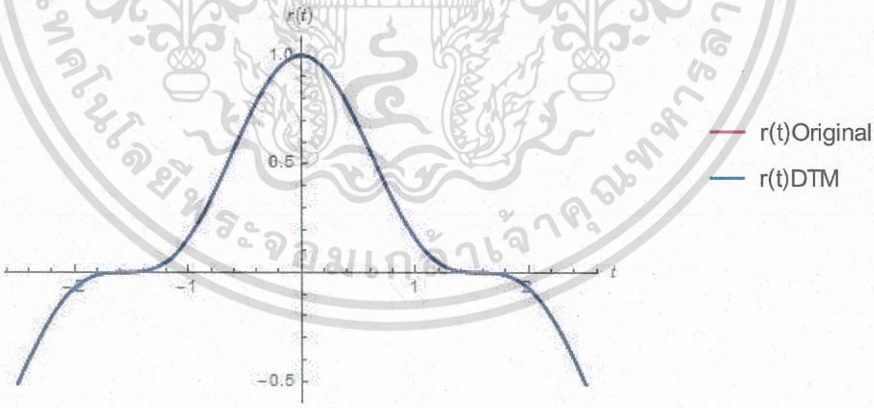
$$R(k) = \frac{1}{k}\left[-3\sum_{m=0}^{k-1} G_5(m)V_2(k-1-m)\right], \quad k \geq 1 \qquad (3.4.12)$$

ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ $r(t) = cos^3 t$ คือ

$$R(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{1}{k}\left[-3\sum_{m=0}^{k-1} G_5(m)V_1(k-1-m)\right], & k \geq 1 \end{cases} \qquad (3.4.13)$$

โดยที่ความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับการคำนวณ T-function ของ
$g_5(t) = cos^2 t,\ v_1(t) = sin\, t : (\omega = l)$ และ $f_9(t) = cos t : (\omega = l)$ เป็นไปตามสมการที่ (3.4.7) , (3.4.8) และ (3.4.9)

กำหนด $k = 600$ และ $t \in [-2.5, 2.5]$ ในการวาดกราฟ



รูปที่ 3.4.2 แสดงการทับกันสนิทของกราฟ $r(t) = cos^3 t$ ในหัวข้อ 3.4.3

และ $r(t) = 1 + 0t - \frac{3}{2}t^2 + 0t^3 \ldots + 3.7 \times 10^{-1123} t^{600}$ จากวิธี DTM

เมื่อ $k = 600$ และ $t \in [-2.5, 2.5]$

หา A_0 , B_0 โดย แทน $y_p = A_0e^{-2t}cost + B_0e^{-2t}sint$ ใน (4.1) จะได้

$$\left(A_0e^{-2t}cost + B_0e^{-2t}sint\right)'' + \left(A_0e^{-2t}cost + B_0e^{-2t}sint\right) = e^{-2t}sint$$

$$e^{-2t}cost(-A_0 + 4A_0 - 2B_0 - 2B_0 + A_0) + e^{-2t}sint(2A_0 + 2A_0 - B_0 + 4B_0 + B_0) = e^{-2t}sint$$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$4A_0 - 4B_0 = 0 \qquad (4.2)$$

$$4A_0 + 4B_0 = 1 \qquad (4.3)$$

(4.2) + (4.3) ; $8A_0 = 1$

$$A_0 = \frac{1}{8}$$

แทน $A_0 = \frac{1}{8}$ ในสมการ (4.2) จะได้

$$4\left(\frac{1}{8}\right) - 4B_0 = 0$$

$$-4B_0 = -\frac{1}{2}$$

$$B_0 = \frac{1}{8}$$

ดังนั้น $y_p = \frac{1}{8}e^{-2t}cost + \frac{1}{8}e^{-2t}sint$

$$\therefore \quad y = y_c + y_p = c_1cost + c_2sint + \frac{1}{8}e^{-2t}cost + \frac{1}{8}e^{-2t}sint$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ จะได้ว่า

$$y' = -c_1sint + c_2cost + \frac{1}{8}(-e^{-2t}sint - 2e^{-2t}cost + e^{-2t}cost - 2e^{-2t}sint)$$

$$= -c_1sint + c_2cost + \frac{1}{8}(-3e^{-2t}sint - e^{-2t}cost)$$

แทน $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 0$ เพื่อหา c_1 และ c_2

$$y(0) = 0 = c_1cos(0) + c_2sin(0) + \frac{1}{8}\left(e^{-2(0)}cos(0) + e^{-2(0)}sin(0)\right)$$

$$0 = c_1 + \frac{1}{8}$$

$$c_1 = -\frac{1}{8}$$

$$y'(0) = 0 = -c_1 sin(0) + c_2 cos(0) + \frac{1}{8}\left(-3e^{-2(0)} sin(0) - e^{-2(0)} cos(0)\right)$$

$$0 = c_2 - \frac{1}{8}$$

$$c_2 = \frac{1}{8}$$

จาก $y = c_1 cost + c_2 sint + \frac{1}{8}(e^{-2t} cost + e^{-2t} sint)$

$$= -\frac{1}{8}cost + \frac{1}{8}sint + \frac{1}{8}(e^{-2t} cost + e^{-2t} sint)$$

จะได้ผลเฉลยโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธ์ คือ $\boxed{y = \frac{1}{8}(sint - cost) + \frac{e^{-2t}}{8}(sint + cost)}$

<u>โดยวิธีการหาการแปลงลาปลาซ</u>

จากปัญหา $y'' + y = e^{-2t} sint$ (4.4)

$B.C.$ $y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 0$ (4.5)

หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง $\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{e^{-2t} sint\}$ (4.6)

จากตาราง 4.2 ในภาคผนวก จะได้ว่า

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\ ,\ \ \mathcal{L}\{\mathrm{y}\} = Y(s)\ ,\ \ \mathcal{L}\{e^{-2t} sint\} = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

ใช้เงื่อนไขค่าเริ่มต้นในสมการ (4.5) จะได้

$$s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$$

จะได้สมการ $(s^2+1)Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$ (4.7)

หาค่า $Y(s)$ จากสมการที่ (4.7) จะได้

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)\left((s+2)^2+1\right)}$$

ต้องการหา

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)\left((s+2)^2+1\right)}\right\}$$

ใช้เศษส่วนย่อยให้การแก้สมการ จะได้

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4s+5}$$

$$1=(As+B)(s^2+4s+5)+(Cs+D)(s^2+1)$$

$$=(A+C)s^3+(4A+B+D)s^2+(5A+4B+C)s+(5B+D)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$A+C=0$$
$$4A+B+D=0$$
$$5A+4B+C=0$$
$$5B+D=1$$

แก้สมการจะได้ค่า $A=-\frac{1}{8}, B=\frac{1}{8}, C=\frac{1}{8}, D=\frac{3}{8}$

และดังนั้น

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\}=-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} +\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}+\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\} \quad (4.8)$$

ทำการหา $\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4s+5}\right\}+\frac{3}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+5}\right\}$ (4.9)

เนื่องจาก $\frac{s}{s^2+4s+5}=\frac{s+2}{(s+2)^2+1}-\frac{2}{(s+2)^2+1}$

เพราะฉะนั้นจากสมการที่ (4.9) จะได้

$$\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\}+\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}$$

ดังนั้นสมการที่ (4.8) จะเขียนได้ดังนี้

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+5)}\right\} = -\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+1}\right\} + \frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+1}\right\}$$

เราใช้ค่าจากตารางการแปลงลาปลาซ (ตาราง4.2 ในภาคผนวก) จะได้

$$y = -\frac{1}{8}cos\,t + \frac{1}{8}sin\,t + \frac{1}{8}e^{-2t}cos\,t + \frac{1}{8}e^{-2t}sin\,t \tag{4.10}$$

จะได้ผลเฉลยโดยวิธีการแปลงลาปลาซคือ $\boxed{y = \frac{1}{8}(sint - cost) + \frac{e^{-2t}}{8}(sint + cost)}$

การหาผลเฉลยโดยวิธี DTM

จากปัญหา $y'' + y = e^{-2t}sint$

$B.C.\quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0$

จากทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $w(t) = \dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$ แล้ว $W(k) = \dfrac{(k+1)!}{k!}Y(k+n)$

โดยวิธีDTM จะสามารถแปลงได้เป็น

พิจารณาที่ $n = 2;$ $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+2)!}{k!}Y(k+2) = \dfrac{(k+2)(k+1)k!}{k!}Y(k+2)$

ดังนั้น $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+2)(k+1)Y(k+2)$

จากทฤษฎีบทที่ 1 ถ้า $w(\mathrm{t}) = y(t)$ แล้ว $W(k) = Y(k)$

จะได้ว่า $y(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $Y(k)$ และกำหนดให้ $e^{-2t}sint = F_7(k)$

ดังนั้นจากปัญหา $y'' + y = e^{-2t}sint$

จะได้ว่า
$$(k+2)(k+1)Y(k+2) + Y(k) = F_7(k) \tag{4.11}$$

$$Y(0) = 0\,,\ Y(1) = 0 \tag{4.12}$$

โดยที่ $F_7(k)$ เป็น T-function ของ $e^{-2t}sint$ ซึ่งได้มาจากสมการ(3.35) $:(a=-2,\omega=1)$

$$F_7(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1H_2(k-1)+(-2)F_7(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{4.13}$$

โดยที่ $H_2(k)$ เป็น T-function ของ $e^{-2t}cost$ ซึ่งได้มาจากสมการ(3.34) $:(a=-2,\omega=1)$

$$H_2(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{-1F_7(k-1)+(-2)H_2(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{4.14}$$

ที่ $k=0$

แทนค่า $k=0$ ในสมการ (4.13) จะได้

$$F_7(0)=0$$

แทนค่า $k=0$ ในสมการ (4.11) และใช้เงื่อนไขตามสมการ (4.12) และ $F_7(0)=0$ จะได้

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)Y(k+2)+Y(k)&=F_7(k)\\ (0+2)(0+1)Y(0+2)+Y(0)&=F_7(0)\\ (2)Y(2)+0&=0\\ Y(2)&=0\end{aligned}$$

ฉะนั้น $F_7(0)=0, Y(2)=0$ (4.15)

ที่ $k=1$

แทนค่า $k=1$ ในสมการ (4.13) จะได้

$$\begin{aligned}F_7(1)&=\frac{1H_2(1-1)+(-2)F_7(1-1)}{1}\\ &=H_2(0)-2F_7(0)\\ &=1-2(0)\\ F_7(1)&=1\end{aligned}$$

แทนค่า $k=1$ ในสมการ (4.14) จะได้

$$\begin{aligned}H_2(1)&=\frac{-1F_7(1-1)+(-2)H_2(1-1)}{1}\\ &=-1F_7(0)-2H_2(0)\\ &=-1(0)-2(1)\\ H_2(1)&=-2\end{aligned}$$

แทนค่า $k=1$ ในสมการ (4.11) และใช้เงื่อนไขตามสมการ (4.12) และ $F_7(1)=1$ จะได้

$$
\begin{aligned}
(1+2)(1+1)Y(1+2)+Y(1) &= F_7(1) \\
(3)(2)Y(3)+Y(1) &= 1 \\
(6)Y(3)+0 &= 1 \\
Y(3) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น $$F_7(1)=1, H_2(1)=-2, Y(3)=\frac{1}{6} \tag{4.16}$$

ที่ $k=2$

แทนค่า $k=2$ ในสมการ (4.13) จะได้

$$
\begin{aligned}
F_7(2) &= \frac{1H_2(2-1)+(-2)F_7(2-1)}{2} \\
&= \frac{H_2(1)-2F_7(1)}{2} \\
&= \frac{(-2)-2(1)}{2} \\
F_7(2) &= -2
\end{aligned}
$$

แทนค่า $k=2$ ในสมการ (4.14) จะได้

$$
\begin{aligned}
H_2(2) &= \frac{-1F_7(2-1)+(-2)H_2(2-1)}{2} \\
&= \frac{-1F_7(1)-2H_2(1)}{2} \\
&= \frac{-1(1)-2(-2)}{2} \\
H_2(2) &= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

แทนค่า $k=2$ ในสมการ (4.11) และจาก $F_7(2)=-2$ จะได้

$$
\begin{aligned}
(2+2)(2+1)Y(2+2)+Y(2) &= F_7(2) \\
(12)Y(4)+0 &= -2 \\
Y(4) &= -\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

ฉะนั้น $$F_7(2)=-2, H_2(2)=\frac{3}{2}, Y(4)=-\frac{1}{6} \tag{4.17}$$

ที่ $k=3$

แทนค่า $k=3$ ในสมการ (4.13) จะได้

$$F_7(3)=\frac{1H_2(3-1)+(-2)F_7(3-1)}{3}$$
$$=\frac{H_2(2)-2F_7(2)}{3}$$
$$=\frac{(\frac{3}{2})-2(-2)}{3}$$
$$F_7(3)=\frac{11}{6}$$

แทนค่า $k=3$ ในสมการ (4.14) จะได้

$$H_2(3)=\frac{-1F_7(3-1)+(-2)H_2(3-1)}{3}$$
$$=\frac{-1F_7(2)-2H_2(2)}{3}$$
$$=\frac{-1(-2)-2(\frac{3}{2})}{3}$$
$$H_2(3)=-\frac{1}{3}$$

แทนค่า $k=3$ ในสมการ (4.11) และจาก $F_7(3)=\frac{11}{6}$ จะได้

$$(3+2)(3+1)Y(3+2)+Y(3)=F_7(3)$$
$$(5)(4)Y(5)+Y(3)=\frac{11}{6}$$
$$(20)Y(5)+\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$$
$$(20)Y(5)=\frac{11}{6}-\frac{1}{6}$$
$$Y(5)=\frac{1}{12}$$

ฉะนั้น $F_7(3)=\frac{11}{6}\ ,H_3(3)=-\frac{1}{3},Y(5)=\frac{1}{12}$ (4.18)

ที่ $k=4$

แทนค่า $k=4$ ในสมการ (4.13) จะได้

$$F_7(4)=\frac{1H_2(4-1)+(-2)F_7(4-1)}{4}$$
$$=\frac{H_2(3)-2F_7(3)}{4}$$
$$=\frac{(-\frac{1}{2})-2(\frac{11}{6})}{4}$$
$$F_7(4)=-1$$

แทนค่า $k=4$ ในสมการ (4.14) จะได้

$$H_2(4)=\frac{-1F_7(4-1)+(-2)H_2(4-1)}{4}$$
$$=\frac{-1F_7(3)-2H_2(3)}{4}$$
$$=\frac{-1(\frac{11}{6})-2(-\frac{1}{3})}{4}$$
$$H_2(4)=-\frac{7}{24}$$

แทนค่า $k=4$ ในสมการ (4.11) และจาก $F_7(4)=-1$ จะได้

$$(4+2)(4+1)Y(4+2)+Y(4)=F_7(4)$$
$$(6)(5)Y(6)+Y(4)=-1$$
$$(30)Y(6)-\frac{1}{6}=-1$$
$$Y(6)=\left(-1+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{30}$$
$$Y(6)=-\frac{1}{36}$$

ฉะนั้น $$F_7(4)=-1\,,H_2(4)=-\frac{7}{24},\,Y(6)=-\frac{1}{36} \qquad (4.19)$$

ที่ $k=5$

แทนค่า $k=5$ ในสมการ (4.13) จะได้

$$F_7(5)=\frac{1H_2(5-1)+(-2)F_7(5-1)}{5}$$
$$=\frac{H_2(4)-2F_7(4)}{5}$$
$$=\frac{(-\frac{7}{24})-2(-1)}{5}$$
$$F_7(5)=\frac{41}{120}$$

แทนค่า $k=5$ ในสมการ (4.14) จะได้

$$H_2(5)=\frac{-1F_7(5-1)+(-2)H_2(5-1)}{5}$$
$$=\frac{-1F_7(4)-2H_2(4)}{5}$$
$$=\frac{-1(-1)-2(-\frac{7}{24})}{5}$$
$$H_2(4)=\frac{19}{60}$$

แทนค่า $k=5$ ในสมการ (4.11) และจาก $F_7(5)=\frac{41}{120}$ จะได้

$$(5+2)(5+1)Y(5+2)+Y(5)=F_7(5)$$
$$(7)(6)Y(7)+Y(5)=\frac{41}{120}$$
$$(42)Y(7)+\frac{1}{12}=\frac{41}{120}$$
$$Y(7)=\frac{\frac{41}{120}-\frac{1}{12}}{42}$$
$$Y(7)=\frac{31}{5040}$$

ฉะนั้น $$F_7(5)=\frac{41}{120},H_2(4)=\frac{19}{60},Y(7)=\frac{31}{5040} \qquad (4.20)$$

จะได้ว่า

$$Y(0)=0,\ Y(1)=0,\ Y(2)=0, Y(3)=\frac{1}{6},$$
$$Y(4)=-\frac{1}{6}, Y(5)=\frac{1}{12}, Y(6)=-\frac{1}{36},\quad Y(7)=\frac{31}{5040}$$

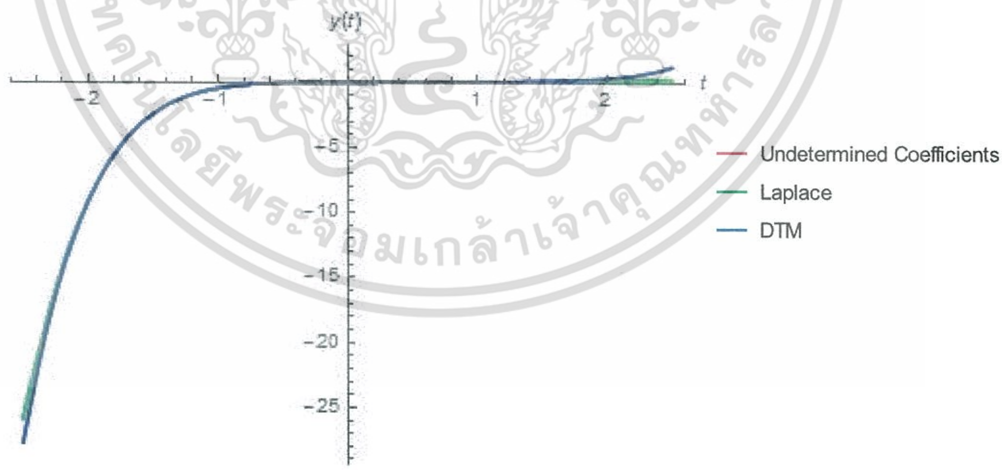
แทน $Y(k)$ ทั้งหมดในสมการ $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k$ จะได้ผลเฉลยแบบอนุกรมคือ

$$y(t)=\frac{1}{6}t^3-1t^4+\frac{1}{12}t^5-\frac{1}{36}t^6+\frac{31}{5040}t^7+\cdots$$

ดังนั้นผลเฉลยโดยวิธี DTM คือ

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{6}t^3-1t^4+\frac{1}{12}t^5-\frac{1}{36}t^6+\frac{31}{5040}t^7+\cdots}$$

จากการหาผลเฉลยโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธ์ วิธีการแปลงลาปลาซและวิธีDTM จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้จากทั้ง 3 วิธีนั้นมีผลเฉลยที่เท่ากันและเมื่อนำผลเฉลยทั้ง3วิธีมาวาดกราฟจะพบว่ากราฟจะทับกันสนิทเมื่อ $t \in [-1.5, 1.5]$



รูปที่ 4.1 แสดงกราฟของผลเฉลยที่ได้จากวิธีการเทียบสัมประสิทธ์ วิธีการแปลงลาปลาซ(กราฟทับกันสนิททุกช่วง t ที่กำหนด)และวิธีDTM ของปัญหาในตัวอย่าง4.1 เมื่อ $t \in [-2.5, 2.5]$ พบว่ากราฟของผลเฉลยทั้ง3วิธีทับกันสนิทเมื่อ $t \in [-1.5, 1.5]$

<u>ตัวอย่างที่4.2</u>[10] จงหาผลเฉลยของ $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10cost$ (4.21)

$$B.C. \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 0 \ , \ y''(0) = 3$$

<u>โดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ของสมการอันดับ 2</u>

หารากของพหุนามลักษณะเฉพาะจาก $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10cost$ จะได้

$$r^3 + 4r^2 + 5r + 2 = 0$$

$$(r+1)(r+1)(r+2) = 0$$

ซึ่งมีรากคือ $r = -1, -1, 2$

$$\therefore \quad y_c = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3e^{-2t}$$

จากตาราง4.1 ในภาคผนวก จะได้ y_p อยู่ในรูปแบบ $E_1cos\beta t$ เมื่อ $E_1 = 10$, $\beta = 1$

พิจารณา $10cost$

เนื่องจาก i ไม่เป็นรากของสมการลักษณะเฉพาะ

ฉะนั้น $y_p = A_0cost + B_0sint$

แทน y_p ในสมการ (4.21) จะได้

$$(A_0cost + B_0sint)''' + 4(A_0cost + B_0sint)'' + 5(A_0cost + B_0sint)'$$
$$+2(A_0cost + B_0sint) = 10cost$$

$$A_0sint - B_0cost - 4A_0cost - 4B_0sint - 5A_0sint + 5B_0cost$$
$$+2A_0cost + 2B_0sint) = 10cost$$

$$(A_0 - 4B_0 - 5A_0 + 2B_0)sint + (-B_0 - 4A_0 + 5B_0 + 2A_0)cos\,t = 10cost$$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$-4A_0 - 2B_0 = 0 \qquad (4.22)$$

$$-2A_0 + 4B_{.0} = 10 \qquad (4.23)$$

$(4.22) \times 2$; $\quad -3A_0 - 4B_{.0} = 0$ (4.24)

$(4.23) + (4.24)$; $\quad -10A_0 = 10$

$$A_0 = -1$$

กำหนดให้ $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^3+4s^2+5s+2)}\right\}$$

เราสามารถหาค่าสมการ $Y(s)$ ได้จากตารางการแปลงลาปลาซ (ตาราง4.2ในภาคผนวก) จะได้ว่า

ทำการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^2+4s^2+5s+2)}=\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s+1)^2(s+2)}$$

$$=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{(s+1)^2}+\frac{Ds+E}{s^2+1} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}3s^2+10s+3&=A(s+1)^2(s^2+1)+B(s+2)(s+1)(s^2+1)\\&+C(s+2)(s^2+1)+(Ds+E)(s+2)(s+1)^2\end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned}3s^2+10s+3&=(A+B+D)s^4+(2A+3B+C+4D+E)s^3\\&+(2A+3B+2C+5D+4E)s^2+(2A+3B+C+2D+5E)s\\&+(A+2B+2C+2E)\end{aligned}$$

เทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned}A+B+D&=0\\2A+3B+C+4D+E&=0\\2A+3B+2C+5D+4E&=3\\2A+3B+C+2D+5E&=10\\A+2B+2C+2E&=3\end{aligned} \quad (4.36)$$

แทน $s=-1$ ในสมการที่ (4.35) จะได้ $C=-2$ แทน $s=-2$ ในสมการที่ (4.35) จะได้ $A=-1$

นำค่า A , C แทนในสมการ (4.36) จะได้ $B=2$, $C=-1$ และ $E=2$

นำค่า A , B , C , D และ E แทนในสมการ (4.34) จะได้

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2+10s+3}{(s^2+1)(s^3+4s^2+5s+2)}\right\}&=-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}\\&-\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}\end{aligned}$$

เราใช้ค่าจากตารางการแปลงลาปลาซ (ตาราง4.2ในภาคผนวก)

จะได้ผลเฉลยโดยวิธีการแปลงลาปลาซ คือ $\boxed{y=-e^{-2t}+2e^{-t}-2te^{-t}-cost+2sint}$

<u>การหาผลเฉลยโดยวิธี DTM</u>

จากปัญหา $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10cost$

$B.C.$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 3$

จากทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $w(t) = \dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$ แล้ว $W(k) = \dfrac{(k-1)!}{k!} y(k+n)$

โดยวิธีDTM จะสามารถแปลงได้เป็น

พิจารณา $n = 3,$ $y'''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+3)!}{k!} Y(k+3)$

ดังนั้น $y'''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+3)(k+2)(k+1)Y(k+3)$

พิจารณา $n = 2,$ $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+2)!}{k!} Y(k+2)$

ดังนั้น $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+2)(k+1)Y(k+2)$

พิจารณา $n = 1,$ $y'(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+1)!}{k!} Y(k+1)$

ดังนั้น $y'(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+1)Y(k+1)$

จากทฤษฎีบทที่ 2 ถ้า $w(t) = cy(t)$ แล้ว $W(k) = cY(\mathrm{k})$

จะได้ว่า $2y(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $2Y(k)$ และกำหนด $10cost = 10F_9(k)$

ดังนั้นจากปัญหา $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 10cost$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}&(k+3)(k+2)(k+1)Y(k+3) + 4(k+2)(k+1)Y(k+2)\\&+5(k+1)Y(k+1) + 2Y(k) = 10F_9(k)\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$Y(0) = 0 \text{ , } Y(1) = 0 \text{ , } Y(2) = \frac{3}{2} \tag{4.38}$$

โดยที่ $F_9(k)$ เป็น T-function ของ $cost$ ซึ่งได้มาจากสมการ (3.48): $(\omega = 1)$ ดังนั้น

$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \tag{4.39}$$

โดยที่ $V_1(k)$ เป็น T-function ของ $sint$ ซึ่งได้มาจากสมการ (3.49): $(\omega = 1)$ ดังนั้น

$$V_1(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{F_9(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases} \tag{4.40}$$

ที่ $k=0$

แทนค่า $k=0$ ในสมการ (4.39)จะได้

$$F_9(k)=F_9(0)=1$$

แทนค่า $k=0$ ในสมการ (4.40) จะได้

$$V_1(k)=V_1(0)=0$$

แทนค่า $k=0$ ในสมการ(4.37)และจาก $F_9(0)=1$ จะได้

$$(k+3)(k+2)(k+1)Y(k+3)+4(k+2)(k+1)Y(k+2)$$
$$+5(k+1)Y(k+1)+2Y(k)=10F_9(k)$$

$$(0+3)(0+2)(0+1)Y(0+3)+4(0+2)(0+1)Y(0+2)$$
$$+5(0+1)Y(0+1)+2Y(0)=10F_9(0)$$

$$6Y(3)+8Y(2)+5Y(1)+2Y(0)=10F_9(0)$$

$$6Y(3)+8(\frac{3}{2})+5(0)+2(0)=10(1)$$

$$6Y(3)+12=10$$

$$Y(3)=-\frac{1}{3}$$

ฉะนั้น $$F_9(0)=1, V_1(0)=0, Y(3)=-\frac{1}{3} \tag{4.41}$$

ที่ $k=1$

แทนค่า $k=1$ ในสมการ (4.39) จะได้

$$\begin{aligned}F_9(1)&=\frac{-V_1(1-1)}{1}\\&=-V_1(0)\\&=0\end{aligned}$$

แทนค่า $k=1$ ในสมการ (4.40) จะได้

$$\begin{aligned} V_1(1) &= \frac{F_9(1-1)}{1} \\ &= F_9(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

แทนค่า $k=1$ ในสมการ (4.37) และจาก $F_9(1)=0$ จะได้

$$(1+3)(1+2)(1+1)Y(1+3)+4(1+2)(1+1)Y(1+2)$$
$$+5(1+1)Y(1+1)+2Y(1)=10F_9(1)$$

$$24Y(4)+24Y(3)+10Y(2)+2Y(1)=10(0)$$

$$24Y(4)+24(-\frac{1}{3})+10(\frac{3}{2})+2(0)=0$$

$$24Y(4)-8+15=0$$

$$Y(4)=-\frac{7}{24}$$

ฉะนั้น $$F_9(1)=0, V_1(1)=1, Y(4)=-\frac{7}{24} \tag{4.42}$$

ที่ $k=2$

แทนค่า $k=2$ ในสมการ (4.39) จะได้

$$\begin{aligned} F_9(2) &= \frac{-V_1(2-1)}{2} \\ &= \frac{-V_1(1)}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

แทนค่า $k=2$ ในสมการ (4.40) จะได้

$$\begin{aligned} V_1(2) &= \frac{F_9(2-1)}{2} \\ &= \frac{F_9(1)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

แทนค่า $k=2$ ในสมการ (4.37) และจาก $F_9(2)=-\frac{1}{2}$ จะได้

$$(2+3)(2+2)(2+1)Y(2+3)+4(2+2)(2+1)Y(2+2)$$
$$+5(2+1)Y(2+1)+2Y(2)=10F_9(2)$$

$$60Y(5)+48Y(4)+15Y(3)+2Y(2)=10(-\frac{1}{2})$$

$$60Y(5)+48(-\frac{7}{24})+15(-\frac{1}{3})+2(\frac{3}{2})=-5$$

$$60Y(5)-14-5+3=-5$$

$$Y(5)=\frac{11}{60}$$

ฉะนั้น $$F_9(2)=-\frac{1}{2}, V_1(2)=0, Y(5)=\frac{11}{60} \qquad (4.43)$$

แทนค่า $k=3$ ในสมการ (4.39) จะได้

$$F_9(3)=\frac{-V_1(3-1)}{2}$$
$$=\frac{-V_1(2)}{2}$$
$$=0$$

แทนค่า $k=3$ ในสมการ (4.40) จะได้

$$V_1(3)=\frac{F_9(3-1)}{2}$$
$$=\frac{\frac{-1}{2}}{2}$$
$$=\frac{-1}{4}$$

แทนค่า $k=3$ ในสมการ (4.37) และจาก $F_9(3)=0$ จะได้

$$(3+3)(3+2)(3+1)Y(3+3)+4(3+2)(3+1)Y(3+2)$$
$$+5(3+1)Y(3+1)+2Y(3)=10F_9(3)$$

$$120Y(6)+80Y(5)+20Y(4)+2Y(3)=10(0)$$

$$120Y(6)+80(\frac{11}{60})+20(-\frac{7}{24})+2(-\frac{1}{3})=0$$

$$Y(6) = -\frac{49}{720}$$

ฉะนั้น $$F_9(3) = 0, V_1(3) = \frac{-1}{4}, Y(6) = -\frac{49}{720} \tag{4.44}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$Y(7) = \frac{11}{504},\ Y(8) = -\frac{239}{40320},\ Y(9) = \frac{247}{181440}$$
$$Y(10) = -\frac{143}{518400},\ Y(11) = \frac{337}{6652800},\ Y(12) = -\frac{1357}{159667200}$$
$$Y(13) = -\frac{1361}{1037836800},\ Y(14) = -\frac{1817}{9686476800},\ Y(15) = \frac{1259}{50295168000}$$

แทน $Y(k)$ ทั้งหมดในสมการ $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k$ จะได้ผลเฉลยแบบอนุกรมคือ

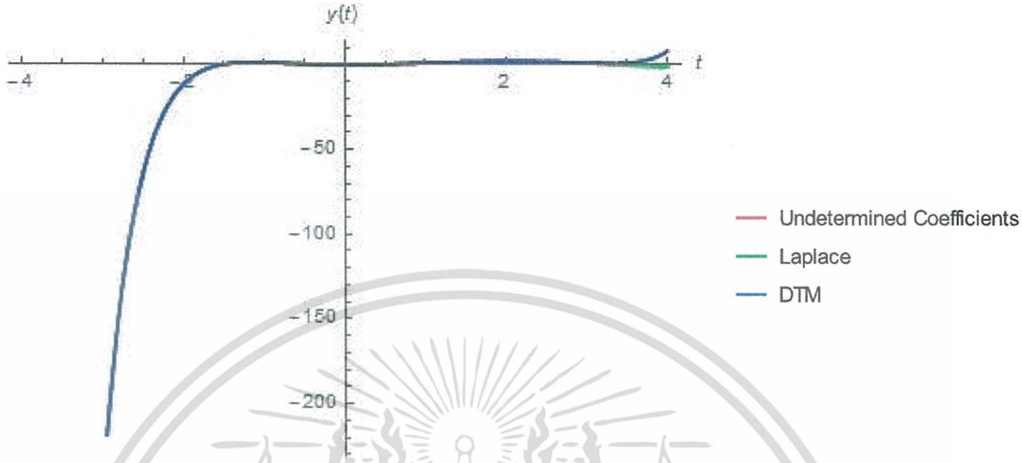
$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{24}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{49}{720}t^6 + \frac{11}{504}t^7 - \frac{239}{40320}t^8 \\ &+ \frac{247}{181440}t^9 - \frac{143}{518400}t^{10} + \frac{337}{6652800}t^{11} - \frac{1357}{159667200}t^{12} \\ &- \frac{1361}{1037836800}t^{13} - \frac{1817}{9686476800}t^{14} + \frac{1259}{50295168000}t^{15} + \ldots \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยโดยวิธีDTMคือ

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{24}t^4 + \frac{11}{60}t^5 - \frac{49}{720}t^6 + \frac{11}{504}t^7 - \frac{239}{40320}t^8 \\ &+ \frac{247}{181440}t^9 - \frac{143}{518400}t^{10} + \frac{337}{6652800}t^{11} - \frac{1357}{159667200}t^{12} \\ &- \frac{1361}{1037836800}t^{13} - \frac{1817}{9686476800}t^{14} + \frac{1259}{50295168000}t^{15} + \ldots \end{aligned}}$$

จากการหาผลเฉลยโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธ์ วิธีการแปลงลาปลาซและวิธีDTM จะเห็นว่าผลเฉลยที่ได้จากทั้ง 3 วิธีนั้นมีผลเฉลยที่เท่ากันและเมื่อนำผลเฉลยทั้ง3วิธีมาวาดกราฟจะพบว่า

กราฟจะทับกันสนิทเมื่อ $t \in [-3.5, 3.5]$



รูปที่ 4.2 แสดงกราฟของผลเฉลยที่ได้จากวิธีการเทียบสัมประสิทธ์ วิธีการแปลงลาปลาซ(กราฟทับกันสนิททุกช่วง t ที่กำหนด)และวิธีDTM ของปัญหาในตัวอย่าง4.2 เมื่อ $t \in [-4, 4]$ พบว่ากราฟของผลเฉลยทั้ง3วิธีจะทับกันสนิทเมื่อ $t \in [-3.5, 3.5]$

<u>ตัวอย่างที่4.3</u>[11] พิจารณาปัญหาลูกตุ้มแบบไม่เชิงเส้น

$$y'' = -0.3y' - \sin y$$

$$B.C. \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, \; y'(0) = 0$$

จากทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $w(t) = \dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$ แล้ว $W(k) = \dfrac{(k+1)!}{k!} Y(k+n)$

โดยวิธีDTM จะสามารถแปลงได้เป็น

พิจารณา $n = 2$, $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+2)!}{k!} Y(k+2)$

ดังนั้น $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+2)(k+1)Y(k+2)$

พิจารณา $n = 1$, $y'(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+1)!}{k!} Y(k+1)$

ดังนั้น $y'(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+1)Y(k+1)$

ดังนั้นจากปัญหา $y'' = -0.3y' - siny$

จะได้ว่า $$(k+2)(k+1)Y(k+2) = -0.3(k+1)Y(k+1) - F(k) \tag{4.45}$$

$$Y(0) = \frac{\pi}{2}\ , Y(1) = 0 \tag{4.46}$$

โดยที่ $F(k)$ เป็น T-function ของ $siny$ ซึ่งได้มาจากสมการ(2.19) : $(a=1)$

$$F(k) = \begin{cases} sin\big(Y(0)\big)\ , & k=0 \\ \sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k} G(m)Y(k-m), & k \geq 1 \end{cases} \tag{4.47}$$

และ $G(k)$ เป็น T-function ของ $cos\,y$ ซึ่งได้มาจากสมการ(2.20) : $(a=1)$

$$G(k) = \begin{cases} cos\big(Y(0)\big), & k=0 \\ -\sum_{m=0}^{k-1} \frac{k-m}{k} F(m)Y(k-m), & k \geq 1 \end{cases} \tag{4.48}$$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.47) และใช้เงื่อนไขของสมการ (4.46) จะได้

$$\begin{aligned} F(k) &= sin\big(Y(0)\big) \\ F(0) &= sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.48) และใช้เงื่อนไขของสมการ (4.46) จะได้

$$\begin{aligned} G(k) &= cos\big(Y(0)\big) \\ G(0) &= cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ที่ $k=0,$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.45) และ $F(0)=0$

$$\begin{aligned} (k+2)(k+1)Y(k+2) &= -0.3(k+1)Y(k+1) - F(k) \\ (0+2)(0+1)Y(0+2) &= -0.3(0+1)Y(0+1) - F(0) \end{aligned}$$

$$2Y(2) = -0.3Y(1) - F(0)$$
$$Y(2) = \frac{-0.3(0)-1}{2}$$
$$Y(2) = -\frac{1}{2} = -0.5$$

ฉะนั้น $\quad F(0)=1, G(0)=0, Y(2)=-0.5 \qquad (4.49)$

ที่ $k=1$,

แทน $k=1$ ในสมการ (4.47) และใช้เงื่อนไขของสมการ (4.46) จะได้

$$\begin{aligned} F(1) &= \sum_{m=0}^{1-1} \frac{1-m}{1} G(m)Y(1-m) \\ &= \sum_{m=0}^{0} \frac{1-m}{1} G(m)Y(1-m) \\ &= (1-0)G(0)Y(1-0) \\ &= G(0)Y(1) \\ &= (0)(0) = 0 \end{aligned}$$

แทน $k=1$ ในสมการ (4.48) และใช้เงื่อนไขของสมการ (4.46) จะได้

$$\begin{aligned} G(1) &= -\sum_{m=0}^{1-1} \frac{1-m}{1} F(m)Y(1-m) \\ &= -\sum_{m=0}^{0} (1-m)F(m)Y(1-m) \\ &= -(1-0)F(0)Y(1-0) \\ &= -F(0)Y(1) \\ &= -1(0) = 0 \end{aligned}$$

แทน $k=1$ ในสมการ (4.45) และ $F(0)=1$ จะได้

$$(k+2)(k+1)Y(k+2) = -0.3(k+1)Y(k+1) - F(k)$$
$$(1+2)(1+1)Y(1+2) = -0.3(1+1)Y(1+1) - F(1)$$
$$(3)(2)Y(3) = -0.3Y(2) - F(1)$$
$$Y(3) = \frac{-0.6\left(-\frac{1}{2}\right)-0}{6}$$
$$Y(3) = \frac{6}{120} = 0.05$$

ฉะนั้น $\quad F(1)=0, G(1)=-\frac{\pi}{2}, Y(2)=0.05 \qquad (4.50)$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

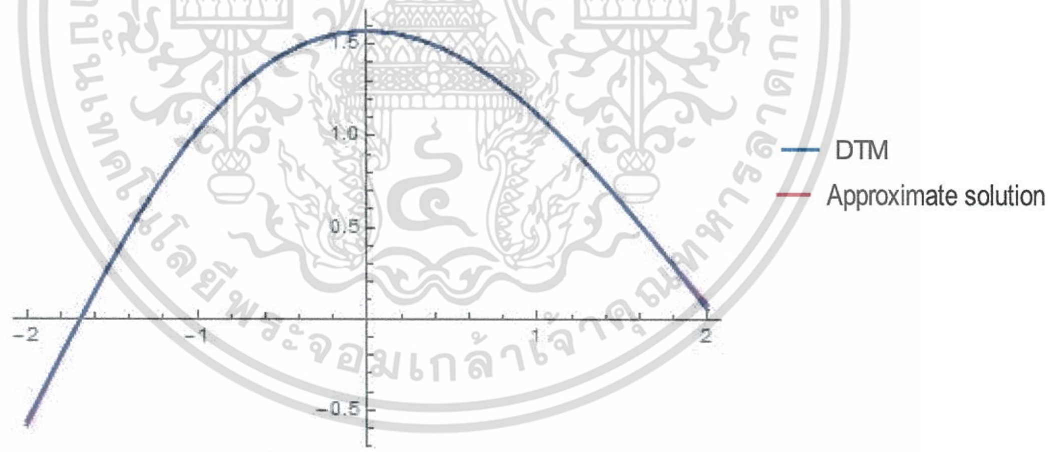
$$Y(4) = -0.00375,\ Y(5) = 0.000225\ ,\ Y(6) = 0.00415542$$
$$Y(7) = -0.000773327,\ Y(8) = 0.0000848033\ ,\ Y(9) = -6.99344 \times 10^{-6}$$
$$Y(10) = -0.0000516072$$

แทน $Y(k)$ ทั้งหมดในสมการ $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k$ จะได้ผลเฉลยแบบอนุกรม คือ

$$y(t) = \frac{\pi}{2} - 0.5t^2 + 0.05t^3 - 0.0037t^4 + 0.000225t^5 + 0.00415542t^6 - 0.000773327t^7$$
$$+ 0.0000848033t^8 - 6.99344 \times 10^{-6}t^9 - 0.0000516072t^{10}$$

จะได้ผลเฉลยโดยวิธี DTM คือ

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = {} & \frac{\pi}{2} - 0.5t^2 + 0.05t^3 - 0.0037t^4 + 0.000225t^5 + 0.00415542t^6 - 0.000773327t^7 \\ & + 0.0000848033t^8 - 6.99344 \times 10^{-6}t^9 - 0.0000516072t^{10} \end{aligned}}$$



รูปที่ 4.3 แสดงกราฟของผลเฉลยที่ได้จากวิธีDTMและผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จากโปรแกรม Mathematica ของปัญหาในตัวอย่าง4.3 เมื่อ $t \in [-2, 2]$ พบว่ากราฟทับกันสนิทเมื่อ $t \in [-1.5, 1.5]$

ตัวอย่างที่4.4[12] พิจารณาปัญหา $y'' - 2y' = y^2 - e^{4t}$

$$B.C. \quad y(0)=1\ ,\ y'(0)=2$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์แปลงสมการ ODE และใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=1\ ,\ y'(0)=2$

จากทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $w(t)=\dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$ แล้ว $W(k)=\dfrac{(k+1)!Y(k+n)}{k!}$

โดยวิธีDTM จะสามารถแปลงได้เป็น

พิจารณา $n=2$ $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $\dfrac{(k+2)!}{k!}Y(k+2)$

ดังนั้น $y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+2)(k+1)Y(k+2)$

และ $2y'$ จะถูกแปลงได้เป็น $2(k+1)Y(k+1)$

กำหนดให้ $y^2 - e^{4t} = U(k) - F_3(k)$

ดังนั้นจากปัญหา $y'' - 2y' = y^2 - e^{4t}$

จะได้ว่า $(k+2)(k+1)Y(k+2) - 2(k+1)Y(k+1) = U(k) - F_3(k)$ (4.51)

$Y(0)=1\ ,\ Y(1)=2$ (4.52)

โดยที่ $F(k)$ เป็น T-function ของ e^{4t} ซึ่งได้มาจาก (3.13) : $(a=4)$

$$F_3(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 4, & k=1\\ \dfrac{4F_3(k-1)}{k}, & k\ge 2\end{cases} \tag{4.53}$$

และ โดยที่ $U(k)$ เป็น T-function ของ y^2 ซึ่งได้มาจากสมการ (3.4.3) : $\left(Y(0)=1\right)$

$$U(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)\ , & k\ge 1\end{cases} \tag{4.54}$$

ที่ $k=0,$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.53) จะได้

$$F_3(k)=1$$
$$F_3(0)=1$$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.54) จะได้

$$U(k)=1$$
$$U(0)=1$$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.51) และใช้เงื่อนไขของสมการ (4.52) จะได้

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)Y(k+2)-2(k+1)Y(k+1) &= U(k)-F_3(k)\\ (0+2)(0+1)Y(0+2)-2(0+1)Y(0+1) &= U(0)-F_3(0)\\ 2(1)Y(2)-2(1)Y(1) &= 1-1\\ 2Y(2)-2(2) &= 0\\ Y(2) &= \frac{4}{2}=2\end{aligned}$$

ฉะนั้น $F_3(0)=1$, $U(0)=1$, $Y(2)=2$ (4.55)

ที่ $k=1$,

แทน $k=1$ ในสมการ (4.53) จะได้

$$F_3(k)=4$$
$$F_3(1)=4$$

แทน $k=1$ ในสมการ (4.54)และใช้เงื่อนไขของสมการ (4.52) จะได้

$$U(k)=\frac{2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)}{k}$$

$$\begin{aligned}U(1) &= 2\sum_{m=0}^{0}(m+1)Y(m+1)Y(0-1-m)\\ &= 2(0+1)Y(0+1)Y(0)\\ &= 2(1)(2)(1)\\ U(1) &= 4\end{aligned}$$

แทน $k=1$ ในสมการ (4.51) จะได้

$$\begin{aligned}(k+2)(k+1)Y(k+2)-2(k+1)Y(k+1) &= U(k)-F_3(k)\\ (1+2)(1+1)Y(1+2)-2(1+1)Y(1+1) &= U(1)-F_3(1)\\ (3)(2)Y(3)-(2)(2)Y(2) &= 4-4\\ 6Y(3)-4(2) &= 0\\ 6Y(3) &= 8\\ Y(3) &= \frac{8}{6}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

ฉะนั้น $F_3(1)=4\ ,\ U(1)=4\ ,\ Y(3)=\frac{4}{3}$ (4.56)

ที่ $k=2,$

แทน $k=2$ ในสมการ (4.53) จะได้

$$F_3(k)=\frac{4F_3(k-1)}{k}$$
$$F_3(2)=\frac{4F_3(1)}{2}=2(4)=8$$

แทน $k=2$ ในสมการ (4.51) และใช้เงื่อนไขของสมการ (4.52) จะได้

$$U(k)=\frac{1}{k}\left[2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)\right]$$
$$U(2)=\frac{1}{2}\left[2\sum_{m=0}^{1}(m+1)Y(m+1)Y(2-1-m)\right]$$
$$=(0+1)Y(0+1)Y(1)+(1+1)Y(1+1)Y(0)$$
$$=(1)(2)(2)+(2)(2)(1)$$
$$U(2)=8$$

แทน $k=2$ ในสมการ (4.51) จะได้

$$(k+2)(k+1)Y(k+2)-2(k+1)Y(k+1)\ =\ U(k)-F_3(k)$$
$$(2+2)(2+1)Y(2+2)-2(2+1)Y(2+1)\ =\ U(2)-F_3(2)$$
$$(4)(3)Y(4)-(2)(3)Y(3)\ =\ 8-8$$
$$12Y(4)-6(\frac{4}{3})\ =\ 0$$
$$12Y(4)\ =\ 8$$
$$Y(4)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

ฉะนั้น $F_3(2)=8\ ,\ U(2)=8\ ,\ Y(4)=\frac{2}{3}$ (4.57)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$F_3(3)=\frac{32}{3}\ ,\ U(3)=\frac{32}{3}\ ,\ Y(5)=\frac{4}{15}$$

แทน $Y(k)$ ทั้งหมดใน $y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}Y(k)t^k$ จะได้ผลเฉลยแบบอนุกรมคือ

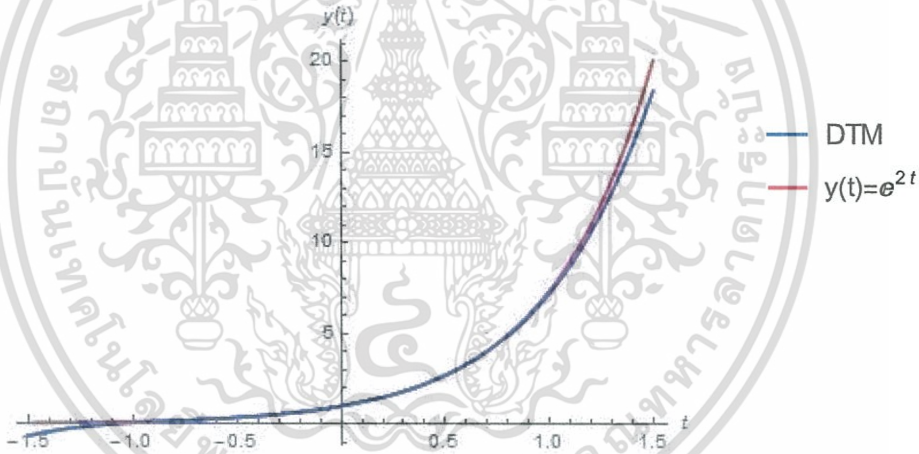
$$y(t)=1+2t+2t^2+\frac{4}{3}t^3+\frac{2}{3}t^4+\frac{4}{15}t^5+\ldots$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีDTM มีผลลัพธ์เช่นเดียวกับวิธี Volterra integral equation นั่นคือ

$$y(t)\approx \mathrm{e}^{2t}$$

ผลเฉลยโดยวิธี DTM คือ $\boxed{y(t)=1+2t+2t^2+\frac{4}{3}t^3+\frac{2}{3}t^4+\frac{4}{15}t^5+\ldots}$

จากการวาดกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีDTMและค่า exact solution พบว่ากราฟทับกันสนิทเมื่อ $t\in[-1,1]$



รูปที่ 4.4 แสดงกราฟของผลเฉลยที่ได้จากวิธีDTM และ $y(t)\approx \mathrm{e}^{2t}$ ของปัญหาในตัวอย่าง4.4 เมื่อ $t\in[-1.5,1.5]$ พบว่ากราฟทับกันสนิทเมื่อ $t\in[-1,1]$

<u>ตัวอย่างที่4.5</u> [12] พิจารณาปัญหา $y'' + y' + y + y^2 y' = 2cost - cos^3 t$

$$B.C. \quad y(0) = 0 \ , \ y'(0) = 1$$

ใช้การแปลงเชิงอนุพันธ์แปลงสมการ ODE และใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

จากทฤษฎีบทที่ 4 ถ้า $w(t) = \dfrac{d^n y(t)}{dt^n}$ แล้ว $W(k) = \dfrac{(k+1)!Y(k+n)}{k!}$

โดยวิธีDTM จะสามารถแปลงได้เป็น

$y''(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+2)(k+1)Y(k+2)$

และ $y'(t)$ จะถูกแปลงได้เป็น $(k+1)Y(k+1)$

จากทฤษฎีบทที่ 7 ถ้า $w(t) = y(t)z'(t)$ แล้ว $W(k) = \sum_{m=0}^{k} (k+1-m)Y(m)Z(k+1-m)$

จะได้ว่า $y^2 y'$ จะถูกแปลงได้เป็น $\sum_{m=0}^{k} (k+1-m)U(m)Y(k+1-m)$

และกำหนดให้ $2cost - cos^3 t = 2F_9(k) - R(k)$

ดังนั้นจากปัญหา $y'' + y' + y + y^2 y' = 2cost - cos^3 t$

จะได้ว่า

$$(k+2)(k+1)Y(k+2) + (k+1)Y(k+1) + Y(k)$$

$$+ \sum_{m=0}^{k} (k+1-m)U(m)Y(k+1-m) = 2F_9(k) - R(k) \qquad (4.58)$$

$$Y(0) = 0 \ , \ Y(1) = 1 \qquad (4.59)$$

โดยที่ $F_9(k)$ เป็น T-function ของ $cost$ ซึ่งได้มาจาก (3.48) ; $(\omega = 1)$

$$F_9(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{-V_1(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (4.60)$$

$$V_1(k) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \dfrac{F_9(k-1)}{k}, & k \geq 1 \end{cases} \qquad (4.61)$$

และ โดยที่ $R(k)$ เป็น T-function ของ $cos^3 t$ ซึ่งได้มาจากสมการ (3.4.13)

$$R(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \dfrac{1}{k}\left[-3\sum_{m=0}^{k-1} G_5(m)V_1(k-1-m) \right], & k \geq 1 \end{cases} \qquad (4.62)$$

$$G_5(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{1}{k}\left[-2\sum_{m=0}^{k-1}F_9(m)V_1(k-1-m)\right], & k\geq 1\end{cases} \tag{4.63}$$

และ โดยที่ $U(k)$ เป็น T-function ของ y^2 ซึ่งได้มาจากสมการ (3.4.3)

$$U(k)=\begin{cases}\left(Y(0)\right)^2, & k=0\\ \dfrac{1}{k}\left[2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)\right], & k\geq 1\end{cases} \tag{4.64}$$

ที่ $k=0,$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.60) และ (4.61) จะได้

$$F_9(k)=1$$

$$F_9(0)=1 \tag{4.65}$$

และ $$V_1(k)=0$$

$$V_1(0)=0 \tag{4.66}$$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.62) และ (4.63) จะได้

$$R(k)=1$$

$$R(0)=1 \tag{4.67}$$

และ $$G_5(k)=1$$

$$G_5(0)=1 \tag{4.68}$$

แทน $k=0$ ในสมการ (4.64) จะได้

$$U(k)=\left(Y(0)\right)^2$$

$$U(0)=1 \tag{4.69}$$

แทนสมการที่ (4.59) , (4.65) - (4.69) ลงในสมการ (4.58)

$$(k+2)(k+1)Y(k+2)+(k+1)Y(k+1)+Y(k)+\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)U(m)Y(k+1-m)=2F_9(k)-R(k)$$

$$(0+2)(0+1)Y(0+2)+(0+1)Y(0+1)+Y(0)+\sum_{m=0}^{0}(0+1-m)U(m)Y(0+1-m)=2F_9(0)-R(0)$$

$$2Y(2)+Y(1)+Y(0)+(1)U(0)Y(1)\ =2(1)-1$$

$$2Y(2)+1+1(0)(1) = 1$$

$$Y(2) = 0 \quad (4.70)$$

ฉะนั้น $F_9(0)=1, V_1(0)=0, R(0)=1, G_5(0)=1, U(0)=1, Y(2) = 0$ (4.71)

ที่ $k=1$,

แทน $k=1$ ในสมการ (4.62) และ (4.63) จะได้

$$F_9(k)=\frac{-V_1(k-1)}{k}$$

$$F_9(1)=\frac{-V_1(0)}{1}=0 \quad (4.72)$$

และ

$$V_9(k)=\frac{F_1(k-1)}{k}$$

$$V_1(1)=\frac{F_9(0)}{1}=1 \quad (4.73)$$

แทน $k=1$ ในสมการ (4.62) และ (4.63) จะได้

$$R(k)=\frac{1}{k}\left[-3\sum_{m=0}^{k-1}G_5(m)V_1(k-1-m)\right]$$

$$\begin{aligned}R(1)&=-3\sum_{m=0}^{0}G_5(m)V_1(-m)\\&=-3G_5(0)V_1(0)\\&=-3(1)(0)\\&=0\end{aligned} \quad (4.74)$$

$$G_5(k)=\frac{1}{k}\left[-2\sum_{m=0}^{k-1}F_9(m)V_1(k-1-m)\right]$$

$$\begin{aligned}G_5(1)&=-2\sum_{m=0}^{0}F_9(m)V_1(-m)\\&=-2F_9(0)V_1(0)\\&=-2(1)(0)\\&=0\end{aligned} \quad (4.75)$$

แทน $k=1$ ในสมการ (4.64) จะได้

$$U(k)=\frac{1}{k}\left[2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)\right]$$

$$\begin{aligned}U(1) &= 2\sum_{m=0}^{0}(m+1)Y(m+1)Y(-m)\\ &= 2(1)Y(1)Y(0)\\ &= 2(1)(1)(0)\\ &= 0\end{aligned} \quad (4.76)$$

แทน $k=1$ และสมการ (4.59) , (4.71) - (4.76) ลงในสมการ (4.58)

$$(k+2)(k+1)Y(k+2)+(k+1)Y(k+1)+Y(k)+\sum_{m=0}^{k}(k+1-m)U(m)Y(k+1-m)=2F_9(k)-R(k)$$

$$(1+2)(1+1)Y(1+2)+(1+1)Y(1+1)+Y(1)+\sum_{m=0}^{1}(1+1-m)U(m)Y(1+1-m)=2F_9(1)-R(1)$$

$$(3)(2)Y(3)+2Y(2)+Y(1)+\left[(2)U(0)Y(2)+(1)U(1)Y(1)\right]=2(0)-0$$

$$6Y(3)+2(0)+1+\left[2(0)(0)+(1)(0)(1)\right]=0$$

$$6Y(3)+1=0$$

$$Y(3)=\frac{-1}{6} \quad (4.77)$$

ฉะนั้น $F_9(1)=0\ ,\ V_1(1)=1\ ,\ R(1)=0\ ,\ G_5(1)=0\ ,\ U(1)=0\ ,\ Y(3)=-\frac{1}{6}$ (4.78)

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$Y(4)=0\ ,\ Y(5)=\frac{1}{120},\ Y(6)=0\ ,\ Y(7)=-\frac{1}{5040},\ Y(8)=0$$

$$Y(9)=\frac{1}{362880}\ ,\ Y(10)=0\ ,\ Y(11)=-\frac{1}{3628800},\ Y(12)=0$$

$$Y(13)=\frac{1}{6227020800},\ Y(14)=0,\ Y(15)=-\frac{1}{130767436800}$$

แทน $Y(k)$ ทั้งหมดใน $y(t)=\sum_{m=0}^{k}Y(k)t^k$ จะได้ผลเฉลยแบบอนุกรม คือ

$$y(t)=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\frac{t^7}{5040}+\frac{t^9}{362880}-\frac{t^{11}}{39916800}+\frac{t^{13}}{6227020800}-\dots$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีDTM มีผลลัพธ์เช่นเดียวกับวิธี Volterra integral equation นั่นคือ

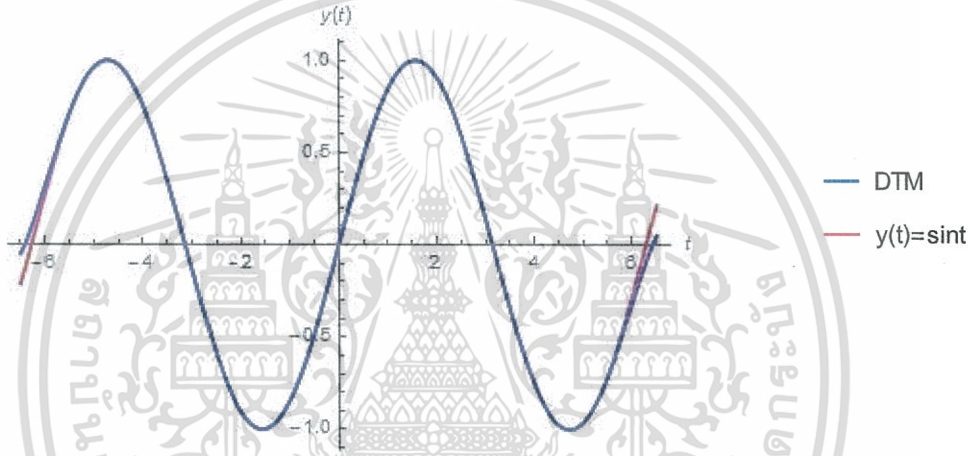
$$y(t)\approx\sin t$$

ผลเฉลยโดยวิธี DTM คือ

$$y(t)=t-\frac{t^3}{6}+\frac{t^5}{120}-\frac{t^7}{5040}+\frac{t^9}{362880}-\frac{t^{11}}{39916800}+\frac{t^{13}}{6227020800}-\ldots$$

จากการวาดกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยที่ได้จากวิธีDTMและค่า exact solution

พบว่ากราฟทับกันสนิทเมื่อ $t\in[-5.5,5.5]$



รูปที่ 4.5 แสดงการทับกันสนิทของกราฟผลเฉลยที่ได้จากวิธีDTMและ $y(t)\approx\sin t$ ของปัญหาในตัวอย่าง4.5 เมื่อ $t\in[-6.5,6.5]$ พบว่ากราฟทับกันสนิทเมื่อ $t\in[-5.5,5.5]$

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันซึ่งอยู่ในตารางการแปลงลาปลาซ(Original function) โดยเขียนโปรแกรมเพื่อหาฟังก์ชันการแปลงที่อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังและถูกนำไปใช้ประมาณค่าของฟังก์ชัน แล้วสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟที่ได้จากผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์(Differential Transform Method:DTM)จนถึงพจน์ที่ k และกราฟที่ได้จากฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซดังแสดงผลไว้ในบทที่3 ในงานวิจัยนี้กำหนดให้ a,b,k และ ω เป็นจำนวนจริงและ t มีหน่วยเป็น เรเดียน

ตารางที่ 5.1 แสดงการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซที่จุด $t=0$

หัวข้อที่	ฟังก์ชันการแปลง (Transform function)	ฟังก์ชันเดิม (Original function)	ช่วงของค่าคงที่ (a,b,ω,l) ที่ทำให้กราฟทับกันสนิท
3.2.1	$F_1(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ 0, & k\ge 1\end{cases}$	$f_1(t)=1$	–
3.2.2	$F_2(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{F_1(k-1)}{k}, & k\ge 1\end{cases}$	$f_2(t)=t$	–
3.2.3	$F_3(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ a, & k=1\\ \dfrac{aF_3(k-1)}{k}, & k\ge 2\end{cases}$	$f_3(t)=e^{at}$	$-450<a<450$
3.2.4	$F_4(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ 1, & k=1\\ \dfrac{aF_4(k-1)+F_3(k-1)}{k}, & k\ge 2\end{cases}$	$f_4(t)=te^{at}$	$-450<a<450$

3.2.5	$F_5(k)=\begin{cases}0, & k=1\\ \dfrac{1}{k(a-b)}\begin{bmatrix}aF_3(k-1)-\\ bH_1(k-1)\end{bmatrix}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_5(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at}-e^{bt})$ $(a\neq b)$	$-450<a<450$ $-450<b<450$
3.2.6	$F_6(k)=\begin{cases}1, & k=1\\ \dfrac{1}{k(a-b)}\begin{bmatrix}a^2G(k-1)-\\ b^2H(k-1)\end{bmatrix}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_6(t)=\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at}-be^{bt})$ $(a\neq b)$	$-450<a<450$ $-450<b<450$
3.2.7	$F_7(k)=\begin{cases}1, & k=1\\ \dfrac{-\omega H_2(k-1)+aF_7(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_7(t)=e^{at}cos\omega t$	$-180<a<180$ $-70<\omega<70$
3.2.8	$F_8(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{\omega G_1(k-1)+aF_8(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_8(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}sin\omega t$ $(\omega\neq 0)$	$-180<a<180$ $-70<\omega<70$
3.2.9	$F_9(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_9(t)=cos\omega t$	$-11\leq\omega\leq 11$
3.2.10	$F_{10}(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{aG_2(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{10}(t)=cosh(at)$	$-50,500\leq a\leq 50,500$
3.2.12	$F_{12}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{k}\begin{bmatrix}F_9(k-1)-\\ \dfrac{1}{2}\omega F_{11}(k-1)\end{bmatrix}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{12}(t)=\dfrac{1}{2\omega}(sin\omega t+\omega tcos\omega t)$	$-11\leq\omega\leq 11$
3.2.13	$F_{13}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{\omega G_3(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{13}(t)=\dfrac{1}{\omega}sin\omega t$ $(\omega\neq 0)$	$-11\leq\omega\leq 11$
3.2.14	$F_{14}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{aG_4(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{14}(t)=\dfrac{1}{a}sinhat$ $(a\neq 0)$	$-69000\leq a\leq 69000$

3.2.15	$F_{13}(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & k=0\\ \dfrac{\omega G_3(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{15}(t)=\dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$ $(\omega\neq 0)$	$-11\leq\omega\leq 11$
3.2.16	$F_{16}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{F_{15}(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{16}(t)=\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t-\sin\omega t)$ $(\omega\neq 0)$	$-11\leq\omega\leq 11$
3.2.17	$F_{17}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{2\omega k}\begin{bmatrix}V_1(k-1)+\\ \omega G_3(k-1)\end{bmatrix}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{17}(t)=\dfrac{t}{2\omega}\sin\omega t$ $(\omega\neq 0)$	$-11\leq\omega\leq 11$
3.2.18	$F_{18}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{k(b^2-a^2)}\begin{bmatrix}-aG_6(k-1)+\\ bU_2(k-1)\end{bmatrix}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{18}(t)=\dfrac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$ $(a\neq b)$	$-11\leq a\leq 11$ $-11\leq b\leq 11$
3.2.19	$F_{19}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{2\omega k}F_{11}(k-1), & k\geq 1\end{cases}$	$f_{19}(t)=\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$ $(\omega\neq 0)$	$-11\leq\omega\leq 11$
3.2.20	$F_{20}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{4kl^2}\begin{bmatrix}-\sum\limits_{m=0}^{k-1}V_4(m)V_4(k-1-m)\\ +\sum\limits_{m=0}^{k-1}U_3(m)U_3(k-1-m)\\ -\sum\limits_{m=0}^{k-1}U_3(m)G_7(k-1-m)\\ +\sum\limits_{m=0}^{k-1}H_5(m)V_4(k-1-m)\end{bmatrix}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{20}(t)=\dfrac{1}{4l^3}(\sin lt\cosh lt-\cos lt\sinh lt)$ $(l\neq 0)$	$-11\leq l\leq 11$
3.2.21	$F_{21}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{4kl}\begin{bmatrix}\sum\limits_{m=0}^{k-1}V_4(m)G_7(k-1-m)\\ +\sum\limits_{m=0}^{k-1}U_3(m)H_5(k-1-m)\end{bmatrix}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{21}(t)=\dfrac{1}{2l^2}(\sin lt\sinh lt)$ $(l\neq 0)$	$-55\leq l\leq 55$

3.2.22	$F_{22}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{2kl^2}\left[G_7(k-1)-U_3(k-1)\right], & k\geq 1\end{cases}$	$f_{22}(t)=\dfrac{1}{2l^3}(sinhlt-sinlt)$ $(l\neq 0)$	$-22000\leq l\leq 22000$
3.2.23	$F_{23}(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{1}{2kl}\left(U_3(k-1)+G_7(k-1)\right), & k\geq 1\end{cases}$	$f_{23}(t)=\dfrac{1}{2l^2}(coshlt-coslt)$ $(l\neq 0)$	$-5000<l<5000$
3.2.24	$F_{24}(k)=\begin{cases}-0.5772, & k=0\\ \dfrac{(-1)^k}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{24}(t)=lnt-\gamma$ $(\gamma=0.5772)$	–

เนื่องจาก $k=600$ พจน์เป็นจำนวนพจน์ที่น้อยที่สุดที่ทำให้กราฟมีความเสถียรในงานวิจัยจึงใช้ $k=600$ พจน์

จากหัวข้อที่ 3.2.1, 3.2.2, 3.2.24 จะเห็นว่าเมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีDTMและกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนด $k=600$ ลักษณะของกราฟจะทับกันสนิททุกช่วงของ t ที่กำหนดในการวาดกราฟ

จากหัวข้อที่ 3.2.3-3.2.6 จะเห็นว่าเมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังและกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.2,0.2]$ ในการวาดกราฟ จะเห็นว่าช่วงของค่าคงที่อยู่ในช่วงเดียวกันที่ทำให้กราฟทับกันสนิท

จากหัวข้อที่ 3.2.7, 3.2.8 จะเห็นว่าเมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีDTMและกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$ ในการวาดกราฟ จะเห็นว่าช่วงของค่าคงที่อยู่ในช่วงเดียวกันที่ทำให้กราฟทับกันสนิท

จากหัวข้อที่ 3.2.9, 3.2.12, 3.2.15-3.2.20 จะเห็นว่าเมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีDTM และกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.3,0.3]$ ในการวาดกราฟ จะเห็นว่าช่วงของค่าคงที่อยู่ในช่วงเดียวกันที่ทำให้กราฟทับกันสนิท

จากหัวข้อที่ 3.2.21-3.2.23 จะเห็นว่าเมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีDTMและกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนด $k=600$ และ $t\in[-1.5,1.5]$ ในการวาดกราฟ จะเห็นว่าช่วงของค่าคงที่จะอยู่ในช่วงที่แตกต่างกันไปที่ทำให้กราฟทับกันสนิท

จากหัวข้อที่ 3.2.10, 3.2.14 จะเห็นว่าเมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีDTMและกราฟของ

ฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนด $k=600$ และ $t\in[-0.5,0.5]$ ในการวาดกราฟ จะเห็นว่าช่วงของค่าคงที่จะอยู่ในช่วงที่แตกต่างกันไปที่ทำให้กราฟทับกันสนิท

ตารางที่ 5.2 แสดงฟังก์ชันการแปลงที่เกี่ยวข้องกับตาราง5.1

หัวข้อที่	**ฟังก์ชันการแปลง** (Transform function)	**ฟังก์ชันเดิม** (Original function)
3.2.5	$H_1(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ b, & k=1\\ \dfrac{bH(k-1)}{k}, & k\ge 2\end{cases}$	$h_1(t)=e^{bt}$
3.2.7	$H_2(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{\omega F_7(k-1)+aH_2(k-1)}{k}, & k\ge 1\end{cases}$	$h_2(t)=e^{at}sin\omega t$
3.2.8	$G_1(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & k=0\\ \dfrac{-\omega F_8(k-1)+aG_1(k-1)}{k}, & k\ge 1\end{cases}$	$g_1(t)=\dfrac{1}{\omega}e^{at}cos\omega t$
3.2.9	$V_1(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k\ge 1\end{cases}$	$v_1(t)=sin\omega t$
3.2.10	$G_2(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{aF_{10}(k-1)}{k}, & k\ge 1\end{cases}$	$g_2(t)=sinh(at)$

3.2.11	$F_{11}(k)=\begin{cases}0, & k=1\\ \dfrac{\omega G_3(k-1)+V_1(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$f_{11}(t)=tsin\omega t$
	$\mathrm{G}_3(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{-\omega F_{11}(k-1)+F_9(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$g_3(t)=tcos\omega t$
3.2.13	$H_3(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & k=0\\ \dfrac{-\omega F_{13}(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$h_3(t)=\dfrac{1}{\omega}cos\omega t$
3.2.14	$G_4(k)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & k=0\\ \dfrac{aF_{14}(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$g_4(t)=\dfrac{1}{a}coshat$
	$G_6(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{aH_4(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$g_6(t)=sin\,at$
3.2.18	$H_4(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{-aG_6(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$h_4(t)=cosat$
	$U_2(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{bV_3(k-1)+G_6(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$u_2(t)=sinbt$
	$V_3(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{-bU_2(k-1)+H_4(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$v_3(t)=cos\,bt$

3.2.20	$G_7(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{lH_5(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$g_7(t)=coshlt$
	$H_5(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{lG_7(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$h_5(t)=sinhlt$
	$U_3(k)=\begin{cases}1, & k=0\\ \dfrac{-\omega V_4(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$u_3(t)=coslt$
	$V_4(k)=\begin{cases}0, & k=0\\ \dfrac{\omega U_3(k-1)}{k}, & k\geq 1\end{cases}$	$v_4(t)=sinlt$

ตารางที่5.3 ตัวอย่างการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซที่จุด $t \neq 0$

หัวข้อที่	ฟังก์ชันการแปลง (Transform function)	ฟังก์ชันเดิม (Original function)	จุดศูนย์กลาง	ช่วงของค่าคงที่ (a,b,ω,l) ที่ทำให้กราฟทับกัน สนิท
3.3.2	$F_3(k)=\begin{cases} e^{a}, & k=0 \\ \dfrac{aF_3(k-1)}{k}, & k\ge 1 \end{cases}$	$f_3(t)=e^{at}$	$t=1$	$-180 \le a \le 180$
	$F_3(k)=\begin{cases} e^{3a}, & k=0 \\ \dfrac{aF_3(k-1)}{k}, & k\ge 1 \end{cases}$	$f_3(t)=e^{at}$	$t=3$	$-185 \le a \le 185$
3.3.3	$F_7(k)=\begin{cases} e^{3a}cos3\omega\,, & k=0 \\ \dfrac{-\omega H_2(k-1)+aF_7(k-1)}{k}, & k\ge 1 \end{cases}$	$f_7(t)=e^{at}cos\omega t$ $(a \neq b)$	$t=3$	$-5 \le a \le 5$ $-5 \le \omega \le 5$
	$F_7(k)=\begin{cases} e^{5a}cos5\omega\,, & k=0 \\ \dfrac{-\omega H_2(k-1)+aF_7(k-1)}{k}, & k\ge 1 \end{cases}$	$f_7(t)=e^{at}cos\omega t$ $(a \neq b)$	$t=5$	$-2 \le a \le 2$ $-3 \le \omega \le 3$
3.3.4	$F_9(k)=\begin{cases} cos3\omega, & k=0 \\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k\ge 1 \end{cases}$	$f_9(t)=cos\omega t$	$t=3$	$-7 \le \omega \le 7$
	$F_9(k)=\begin{cases} cos7\omega, & k=0 \\ \dfrac{-\omega V_1(k-1)}{k}, & k\ge 1 \end{cases}$	$f_9(t)=cos\omega t$	$t=7$	$-5 \le \omega \le 5$

จากบทที่3 จะเห็นว่าจากการวาดกราฟมีบางฟังก์ชันที่ทำให้กราฟมีลักษณะลู่ออก เมื่อใช้จุดศูนย์กลางที่ $t=0$ จึงมีการเปลี่ยนจุดศูนย์กลางเพื่อดูลักษณะของกราฟและพบว่ากราฟจะมีลักษณะลู่เข้ารอบๆจุดศูนย์กลางที่กำหนด

จากหัวข้อ3.3.2-3.3.4 จะเห็นว่าเมื่อใช้จุดศูนย์กลางที่แตกต่างกันและกำหนดช่วงของ t ในการวาดกราฟที่แตกต่างกันและกำหนด $k=600$ เมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีDTMและกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ จะเห็นว่าช่วงของค่าคงที่จะอยู่ในช่วงที่แตกต่างกันไปที่ทำให้กราฟทับกันสนิท

ตารางที่5.4 แสดงฟังก์ชันการแปลงซึ่งเกี่ยวข้องกับตาราง5.3

หัวข้อที่	ฟังก์ชันการแปลง (Transform function)	ฟังก์ชันเดิม (Original function)	จุดศูนย์กลาง
3.3.3	$H_2(k)=\begin{cases} e^{3a}sin3\omega, & k=0 \\ \dfrac{\omega F_7(k-1)+aH_2(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases}$	$h_2(t)=e^{at}sin\omega t$	$t=3$
	$H_2(k)=\begin{cases} e^{5a}sin5\omega, & k=0 \\ \dfrac{\omega F_7(k-1)+aH_2(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases}$	$h_2(t)=e^{at}sin\omega t$	$t=5$
3.3.4	$V_1(k)=\begin{cases} sin3\omega, & k=0 \\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases}$	$v_1(t)=sin\omega t$	$t=3$
	$V_1(k)=\begin{cases} sin7\omega, & k=0 \\ \dfrac{\omega F_9(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases}$	$v_1(t)=sin\omega t$	$t=7$

ตารางที่5.5 แสดงการแปลงเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ไม่ได้อยู่ในตารางการแปลงลาปลาซ

หัวข้อที่	ฟังก์ชันการแปลง (Transform function)	ฟังก์ชันเดิม (Original function)
3.4.1	$U(k)=\begin{cases} \left(Y(0)\right)^2, & k=0 \\ \dfrac{1}{k}\left[2\sum_{m=0}^{k-1}(m+1)Y(m+1)Y(k-1-m)\right], & k\geq 1 \end{cases}$	$u(y)=\left[y(t)\right]^2$
3.4.2	$G_5(k)=\begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{1}{k}\left[-2\sum_{m=0}^{k-1}F_9(m)V_1(k-1-m)\right], & k\geq 1 \end{cases}$	$g_5(t)=cos^2t$
3.4.3	$R(k)=\begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{1}{k}\left[-3\sum_{m=0}^{k-1}G_5(m)V_1(k-1-m)\right], & k\geq 1 \end{cases}$	$r(t)=cos^3t$

จากหัวข้อที่ 3.4.2, 3.4.3 จะเห็นว่าเมื่อนำฟังก์ชันการแปลงซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมกำลังมาสร้างกราฟเปรียบเทียบระหว่างกราฟของผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังซึ่งได้จากวิธีDTMและกราฟของฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซ เมื่อกำหนด $k=600$ ลักษณะของกราฟจะทับกันสนิททุกช่วงของ t ที่กำหนดในการวาดกราฟ

ตารางที่5.6 แสดงฟังก์ชันการแปลงที่เกี่ยวข้องกับตาราง5.5

หัวข้อที่	ฟังก์ชันการแปลง (Transform function)	ฟังก์ชันเดิม (Original function)
3.4.1 และ 3.4.2	$F_9(k)=\begin{cases} 1, & k=0 \\ \dfrac{-V_1(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases}$	$f_9(t)=cost$
	$V_1(k)=\begin{cases} 0, & k=0 \\ \dfrac{F_9(k-1)}{k}, & k\geq 1 \end{cases}$	$v_1(t)=sint$

จากตัวอย่างที่4.1 จะเห็นว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นซึ่งสามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธ์ วิธีการแปลงลาปลาซและวิธีDTMได้ ซึ่งผลเฉลยที่ได้ของทั้ง 3 วิธีนั้นมีผลเฉลยที่เท่ากันจากการวาดกราฟเปรียบเทียบผลเฉลยของทั้ง3วิธี กราฟจะทับกันสนิทเมื่อ $k=7$ และ $t\in[-1.5,1.5]$

จากตัวอย่างที่4.2 จะเห็นว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นซึ่งสามารถใช้วิธีการเทียบสัมประสิทธ์ วิธีการแปลงลาปลาซและวิธีDTMได้ ซึ่งผลเฉลยที่ได้ของทั้ง 3 วิธีนั้นมีผลเฉลยที่เท่ากันจากการวาดกราฟเปรียบเทียบผลเฉลยของทั้ง3วิธี กราฟจะทับกันสนิทเมื่อ $k=15$ และ $t\in[-3.5,3.5]$

จากตัวอย่างที่4.3 จะเห็นว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นซึ่งใช้วิธีDTMและโปรแกรมMathematicaในการแก้ปัญหา ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากทั้ง2วิธีมีผลเฉลยที่เท่ากันจากการวาดกราฟเปรียบเทียบผลเฉลยของทั้ง2วิธี กราฟจะทับกันสนิทเมื่อ $k=10$ และ $t\in[-1.5,1.5]$

จากตัวอย่างที่4.4 จะเห็นว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นซึ่งใช้วิธีDTMในการแก้ปัญหาและจากการวาดกราฟเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีDTMและค่าexact solutionพบว่า กราฟจะทับกันสนิทเมื่อ $k=5$ และ $t\in[-1,1]$

จากตัวอย่างที่4.5 จะเห็นว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้นซึ่งใช้วิธีDTMในการแก้ปัญหาและจากการวาดกราฟเปรียบเทียบผลเฉลยจากวิธีDTMและค่าexact solutionพบว่า กราฟจะทับกันสนิทเมื่อ $k=13$ และ $t\in[-5.5,5.5]$

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากปัญหาที่เราได้ดำเนินการแล้วนั้น เราสามารถสรุปปัญหาที่เกิดขึ้นและข้อเสนอแนะสำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษาต่อในงานนี้ ดังต่อไปนี้

1. เนื่องจากในงานวิจัยนี้ศึกษาบางฟังก์ชันในตารางการแปลงลาปลาซเท่านั้น เราสามารถนำแนวทางในงานวิจัยนี้ไปศึกษาฟังก์ชันอื่นๆเพิ่มเติม

2.วิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์นอกจากจะใช้กับปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์อื่นๆ เช่น สมการเบสเซล สมการเลอจองด์

เอกสารอ้างอิง

[1] **อนุกรมกำลัง อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคลอริน**[ออนไลน์][ค้นเมื่อ 29 พฤศจิกายน 2559] สืบค้นจาก : http://infinite-series.tripod.com/SourceCode/power.htm

[2] บุญญาพร เกิดผล. 2558. **ผลเฉลยโดยประมาณของสมการเบสเซลและสมการเลอจองด์โดยวิธีการแปลงเชิงอนุพันธ์ (Approximated Solutions of Bessel's Equation and Legendre's Equation by Differential Transform Method).** กรุงเทพฯ : สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[3] Shih-Hsiang Chang,I-Ling Chang, **A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions**, Applied mathematics and computation 195(2008)799-808

[4] J.K. Zhou, **Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits**, Huazhong University Press, Wuhan, China, 1986(in Chinese).

[5] L.T. Yu, C.K. Chen, **The solution of the Blasius equation by the differential transformation method,** Math. Comput. Model. 28(1998) 101–111.

[6] C.L. Chen, S.H. Lin, C.K. Chen, **Application of Taylor transformation to nonlinear predictive control problem,** Appl. Math. Model.20 (1996) 699–710.

[7] A.M. Wazwaz, **Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations**, Appl. Math. Comput. 166(2005) 652–663.

[8] ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.พรชัย สารทวาหา. (2544). **สมการเชิงอนุพันธ์(Differential Equations)**. กรุงเทพมหานคร:โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

[9] **Laplace transform table full**. [Online]. Available: http://www.math.purdue.edu/~zcai/MA527cai/lectures/ Table%20of%20Laplace%20Transforms.pdf. เข้าถึงเมื่อวันที่ 24 เม.ษ. 2560

[10] Shepley L. Ross. (1989). **Introduction to ordinary differential equation**. United States of America: Malloy Lithographing.

[11] Laurene V. Fausett. (1999). **Applied Numerical Analysis Using Matlab.** United States of America: Tom Robbins.

[12] Sita Charkrit, **On the Solutions of First and Second Order Nonlinear Initial Value Problems**. Proceedings of the World Congress on Engineering 2013 Vol I, WCE 2013, July 3 - 5, 2013, London, U.K.

[13] รศ.พัชรินทร์ เกมโชติ. (2555). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(Ordinaly Differential Equations)**. พิมพ์ครั้งที่3. กรุงเทพมหานคร:ห้างหุ้นส่วนจำกัด มีนเซอร์วิส ซัพพลาย

[14] **ตารางการแปลงลาปลาซ.**[Online]. Available: http://www.udru.ac.th/attachments/elearning/08/16. เข้าถึงเมื่อวันที่ 26 มี.ค. 2560

ภาคผนวก

ตารางที่4.1[13] **การสมมติผลเฉลยเฉพาะราย** y_p

รูปแบบของ $f(x)$	รูปแบบที่สมมติของ y_p	k เป็นภาวะรากซ้ำของราก
$p(x)$: เป็นพหุนาม ระดับขั้น m	$x^k(A_0 + A_1x + ... + A_mx^m)$	0
$Ee^{\alpha x}$ E: ค่าคงตัว	$Ax^k e^{\alpha x}$	α
$p(x)\mathrm{e}^{2x}$ $p(x)$: พหุนามระดับขั้น m	$x^k[A_0 + A_1x + ... + A_mx^m]e^{\alpha x}$	α
$E_1 \cos\beta x + E_2 \sin\beta x$ E_1, E_2: ค่าคงตัว ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน	$x^k(A_0 \cos\beta x + B_0 \sin\beta x)$	βi
$P(x)\sin\beta x + q(x)\cos\beta x$ $p(x)$: พหุนามระดับขั้น m $\mathrm{q}(x)$: พหุนามระดับขั้น n	$x^k[A_0 + A_1x + ... + A_mx^m]\cos\beta x +$ $x^k[\mathrm{B}_0 + B_1x + ... + B_sx^s]\sin\beta x$ s ค่าที่มากของ m,n	βi
$E_1e^{\alpha x}\cos\beta x + E_2e^{\alpha x}\sin\beta x$ E_1, E_2: ค่าคงตัว ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน	$x^k[A_0 \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + B_0 \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x]$	$\alpha + \beta i$

ตารางที่4.2[14] **ตารางการแปลงลาปลาซใช้กับตัวอย่างที่4.1และ4.2**

ลำดับที่	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$
1	$\frac{1}{s}$	1
2	$\frac{1}{s^2}$	t
3	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
4	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin(at)$
5	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
6	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh(at)$
7	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
8	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$t\sin(at)$
9	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos(at)$
10	$\frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$	$t^{n-1}e^{at}$
11	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\sin(at)$
12	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos(at)$
13	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\sin(at)-at\cos(at)$
14	$\frac{1}{1+as}$	$\frac{1}{a}e^{-t/a}$
15	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{1}{a}(e^{at}-1)$
16	$\frac{1}{s(1+as)}$	$1-e^{-t/a}$
17	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$f''(t)$
18	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)\ldots-f^{(n-1)}(0)$	$f^{(n)}$(t)