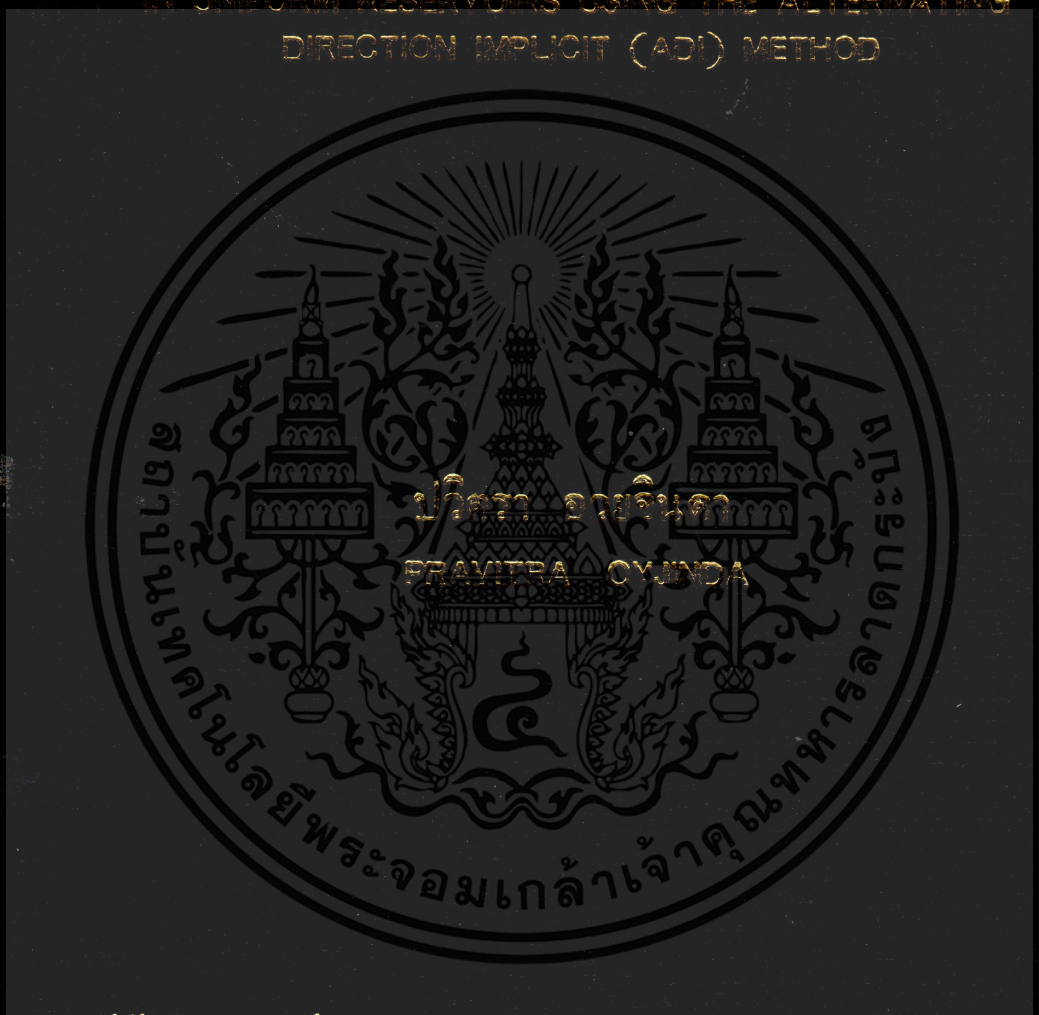
การคำนวณเชิงตัวเลขในรูปไร้มิติของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ไม่เชิงเส้น ในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ

NUMERICAL COMPUTATION FOR THE NON-DIMENSIONAL FORM OF A NONLINEAR HYDRODYNAMIC MODEL IN UNIFORM RESERVOIRS USING THE ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT (ADI) METHOD



ปวิตรา อายุจินดา

PRAVITRA OYJINDA

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2556

KMITL-2013-SC-M-001-048

การคำนวณเชิงตัวเลขในรูปไร้มิติของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ไม่เชิงเส้น ในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ

NUMERICAL COMPUTATION FOR THE NON-DIMENSIONAL FORM OF A NONLINEAR HYDRODYNAMIC MODEL IN UNIFORM RESERVOIRS USING THE ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT (ADI) METHOD

ปวิตรา อวยจินดา

PRAVITRA OYJINDA

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2556

KMITL-2013-SC-M-001-048

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

NUMERICAL COMPUTATION FOR THE NON-DIMENSIONAL FORM OF A NONLINEAR HYDRODYNAMIC MODEL IN UNIFORM RESERVOIRS USING THE ALTERNATING DIRECTION IMPLICIT (ADI) METHOD

PRAVITRA OYJINDA

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF

MASTER OF SCIENCE IN APPLIED MATHEMATICS

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

2013

KMITL-2013-SC-M-001-048

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

COPYRIGHT 2013

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การคำนวณเชิงตัวเลขในรูปไร้มิติของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ
Numerical Computation for the Non-dimensional Form of a Nonlinear Hydrodynamic Model in Uniform Reservoirs Using the Alternating Direction Implicit (ADI) Method

นักศึกษา นางสาวปวิตรา อวยจินดา
รหัสประจำตัว 54650704
ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ดร.วรรณพร	สรรประเสริฐ	
รศ.ดร.ฉัฐไชย์	ลีนาวงศ์	
ดร.สุรีรัตน์	อารีรักษ์สกุล ก้องโลก	
ผศ.ดร.นพรัตน์	โพธิ์ชัย	

วัน / เดือน/ ปี ที่สอบ 28 พฤศจิกายน พ.ศ. 2556 เวลา 09.00 - 12.00 น.
สถานที่สอบ ณ ห้อง 207 ชั้น 2 อาคารจุฬาภรณวลัยลักษณ์ 1

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิทยาศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร.ดุษณี ธนะบริพัฒน์)
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์

วันที่ 27 **เดือน** ตุลาคม **พ.ศ.** 57

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การคำนวณเชิงตัวเลขในรูปไร้มิติของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ
นักศึกษา	นางสาวปวิตรา อวยจินดา
รหัสประจำตัว	54650704
ปริญญา	วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
พ.ศ.	2556
อาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.นพรัตน์ โพธิ์ชัย

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้มุ่งศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อจำลองแบบการไหลของกระแสน้ำด้วยตัวแบบอุทกพลศาสตร์ที่อยู่ในรูปของสมการน้ำตื้น 2 มิติ โดยมีผลลัพธ์เป็นความเร็วของกระแสน้ำและการยกตัวของระดับน้ำ สามารถนำผลลัพธ์ที่ได้เป็นข้อมูลเข้าสำหรับ ตัวแบบคุณภาพน้ำที่อยู่ในรูปสมการการพา-การแพร่ 2 มิติ โดยมีผลลัพธ์เป็นความเข้มข้นของมลพิษในน้ำ โดยงานวิจัยที่ผ่านมา การคำนวณจะมีข้อจำกัดของเงื่อนไขของความเสถียรในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ด้วยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ งานวิจัยนี้ได้พัฒนาการคำนวณที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้นสำหรับตัวแบบดังกล่าวโดยใช้การปรับรูปสมการให้อยู่ในรูปไร้มิติเสียก่อน แล้วใช้วิธีปริยายทิศทางสลับมาคำนวณ ผลลัพธ์ที่ได้คือ ขั้นตอนการคำนวณที่มีความสะดวกและมีความแม่นยำสูง อีกทั้งเป็นวิธีผลต่างจำกัดที่มีความเสถียรที่ปราศจากเงื่อนไข ขั้นตอนการคำนวณที่ผู้วิจัยได้พัฒนาขึ้น จึงมีความเหมาะสมในการใช้งานในพื้นที่จริงที่ต้องการความละเอียดสูงต่อไป

คำสำคัญ : ตัวแบบอุทกพลศาสตร์, ความเร็วของน้ำ, การยกตัวของน้ำ, วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์, วิธีดักลาส-รัทฟอร์ด, วิธีพีซแมน-รัทฟอร์ด, วิธีปริยายทิศทางสลับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis Title	Numerical Computation for the Non-dimensional Form of a Nonlinear Hydrodynamic Model in Uniform Reservoirs Using the Alternating Direction Implicit (ADI) Method
Student	Pravitra Oyjinda
Student ID	54650704
Degree	Master of Science
Program	Applied Mathematics
Year	2013
Thesis Advisor	Asst. Prof. Dr. Nopparat Pochai

ABSTRACT

The research studies a mathematical to simulate the water current using the hydrodynamic model of two-dimensional shallow water equation. It turns out that the results are the velocity and elevation of the water current that the data to input into the water quality model. It yields the concentration of the pollutant in a reservoir. In previous research, the numerical computation of the hydrodynamic model as the Lax-Wendroff method is limited by a stability condition. In this research, a numerical method via a non-dimensional form of equations is proposed. The Alternating Direction Implicit (ADI) method is applied and results in a finite difference method without the stability condition. The ADI gives more accurate solutions and also economical to use. The method can be applied to the real-world problems.

Keywords : Hydrodynamic Model, Water Velocity, Water Elevation, Lax-Wendroff Method, Douglas-Rachford Method, Peaceman-Rachford Method, Alternating Direction Implicit Method

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำวิทยานิพนธ์ เรื่อง การคำนวณเชิงตัวเลขในรูปไร้มิติของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ไม่เชิงเส้นในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับเล่มนี้ ผู้จัดทำขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นพรัตน์ โพธิ์ชัย อย่างสูง ที่ได้กรุณาสละเวลาเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ อีกทั้งได้ให้ความช่วยเหลือให้คำปรึกษาแนะนำ แนวทางการแก้ปัญหาและตรวจสอบแก้ไข ปรับปรุงในการทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ รวมถึงเป็นแรงผลักดันให้ผู้จัดทำมีความพยายามในการทำวิทยานิพนธ์ให้ประสบผลสำเร็จและสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอกราบขอบพระคุณ ประธานกรรมการสอบ ดร. วรรณพร สรรประเสริฐ อาจารย์บัณฑิตประจำสาขา รองศาตราจารย์ ดร. ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์ และผู้ทรงคุณวุฒิจากภายนอกสถาบันฯ ดร. สุรีรัตน์ อารีรักษ์สกุล ก้องโลก จากมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ที่ได้ให้ข้อเสนอแนะและความรู้ที่เป็นประโยชน์ รวมทั้งช่วยตรวจสอบแก้ไขในการทำวิทยานิพนธ์ให้ถูกต้องสมบูรณ์ และกรุณาสละเวลามาเป็นกรรมการสอบวิทยานิพนธ์เล่มนี้

ขอขอบคุณ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ผู้จัดทำได้รับทุนสนับสนุนการทำวิทยานิพนธ์จากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทำให้การค้นคว้าวิจัยนี้ สำเร็จและสมบูรณ์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

ขอขอบคุณ คุณชุติกาญจน์ ตันยะสิทธิ์ เจ้าหน้าที่ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ รวมทั้งเจ้าหน้าที่ท่านอื่น ที่ให้ความร่วมมือ ความช่วยเหลือและอำนวยความสะดวกในการทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้ให้สำเร็จลุลวงไปด้วยดี

ขอขอบคุณ นางสาว นภาลัย สีสด นักศึกษาปริญญาโทและเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆที่รักทุกคน ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ ให้คำปรึกษาและให้กำลังใจระหว่างการทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้

สุดท้ายนี้ผู้จัดทำ ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ และบุคคลในครอบครัว ที่ได้ให้การสนับสนุนในทุกๆด้าน และให้กำลังใจด้วยความรักและห่วงใยตลอดมา

นางสาวปวิตรา อวยจินดา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญตาราง	VI
สารบัญรูป	IX
บทที่ 1 บทนำ	**1**
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย	5
1.3 ขอบเขตการวิจัย	5
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	6
1.5 ขั้นตอนของการวิจัย	7
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	**8**
2.1 ตัวแบบอุทกพลศาสตร์	8
2.1.1 สมการน้ำตื้น	8
2.2 วิธีผลต่างจำกัด	12
2.2.1 ระบบไฮเพอร์โบลิกอันดับหนึ่งใน 2 มิติ	12
2.2.2 วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	13
2.2.3 วิธีปริยายทิศทางสลับ	25
บทที่ 3 การดำเนินงานวิจัยและผลการวิจัย	**31**
3.1 การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด	31
3.2 ตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด	32

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

3.3 การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ 149

3.4 ตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ 153

3.5 การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด 199

3.6 ตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด 205

บทที่ 4 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ 260

4.1 สรุปผลการวิจัย 260

4.2 ข้อเสนอแนะ 261

เอกสารอ้างอิง 262

ภาคผนวก 264

ประวัติผู้เขียน 276

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
2.1	การยกตัวของระดับน้ำ $\zeta(x,y,t)$ เมตร สำหรับ $0 \le x, y \le 3200$ เมตร เมื่อ t คือ 1 ชั่วโมง 24 นาที	22
2.2	ความเร็ว $u(x,y,t)$ เมตร/วินาที สำหรับ $0 \le x, y \le 3200$ เมตร เมื่อ t คือ 1 ชั่วโมง 24 นาที	23
2.3	ความเร็ว $v(x,y,t)$ เมตร/วินาที สำหรับ $0 \le x, y \le 3200$ เมตร เมื่อ t คือ 1 ชั่วโมง 24 นาที	23
3.1	แสดงผลเฉลย u_1 เมื่อ $t = 0.01$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด	145
3.2	แสดงผลเฉลย u_2 เมื่อ $t = 0.01$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด	146
3.3	แสดงผลเฉลยของ $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.1$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	164
3.4	แสดงผลเฉลยของ $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.1$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	164
3.5	แสดงผลเฉลยของ $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.1$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	164
3.6	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.25$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	165
3.7	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.25$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	166
3.8	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.25$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	167
3.9	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.3$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	170
3.10	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.3$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	171
3.11	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.3$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	172
3.12	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.5$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	175
3.13	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.5$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	176
3.14	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.5$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	177
3.15	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.6$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	180
3.16	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.6$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	181
3.17	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.6$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	182
3.18	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	186

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่		หน้า
3.19	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=255.55$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	187
3.20	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=255.55$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	188
3.21	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t=306.66$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	189
3.22	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=306.66$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	190
3.23	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=306.66$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	191
3.24	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t=511.10$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	192
3.25	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=511.10$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	193
3.26	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=511.10$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	194
3.27	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t=613.32$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	195
3.28	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=613.32$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	196
3.29	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=613.32$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	197
3.30	แสดงผลเฉลยของ $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	220
3.31	แสดงผลเฉลยของ $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	220
3.32	แสดงผลเฉลยของ $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	220
3.33	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.25$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	221
3.34	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.25$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	222
3.35	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.25$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	223
3.36	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.5$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	226
3.37	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.5$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	227
3.38	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.5$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	228
3.39	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.3$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	233
3.40	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.3$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	234
3.41	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.3$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	235
3.42	$Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.6$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	238

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่		หน้า
3.43	$U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.6$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	239
3.44	$V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.6$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	240
3.45	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t=255.55$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	246
3.46	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=255.55$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	247
3.47	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=255.55$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	248
3.48	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t=511.10$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	249
3.49	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=511.10$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	250
3.50	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=511.10$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	251
3.51	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t=306.66$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	252
3.52	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=306.66$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	253
3.53	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=306.66$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	254
3.54	ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t=613.32$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	255
3.55	ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t=613.32$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	256
3.56	ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t=613.32$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	257
3.57	ตารางการเปรียบเทียบความเสถียรระหว่างวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ และวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	259

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่		หน้า
2.1	ภาพตัดตามขวางของน้ำในอ่างเก็บน้ำ	9
2.2	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง 24 นาที	24
2.3	ความเร็วของน้ำในแกน x ที่จุดศูนย์กลางของอ่างเก็บน้ำตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งเวลา 1 ชั่วโมง 24 นาที	24
2.4	แผนภาพโครงสร้างวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด	30
3.1	เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ $(t = 0)$	33
3.2	เงื่อนไขขอบ $(t > 0)$	34
3.3	เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ $(T = 0)$	148
3.4	เงื่อนไขขอบ $(T > 0)$	149
3.5	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	168
3.6	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	168
3.7	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	169
3.8	สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ $(p = 0.5)$	169
3.9	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	173
3.10	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	173
3.11	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	174
3.12	สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ $(p = 0.6)$	174
3.13	การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	178

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
3.14	การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำ ในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	178
3.15	การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำ ในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	179
3.16	สนามความเร็ว เมื่อ $T=0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ($p=1.0$)	179
3.17	การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของการยกตัวของระดับน้ำ ในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T=0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	183
3.18	การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำ ในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	183
3.19	การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำ ในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์	184
3.20	สนามความเร็ว เมื่อ $T=0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ($p=1.2$)	184
3.21	แผนภาพโครงสร้างวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด	204
3.22	เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ ($T=0$)	206
3.23	เงื่อนไขขอบ ($T>0$)	206
3.24	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T=0.25$ ($p=0.5$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	224
3.25	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.25$ ($p=0.5$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	224
3.26	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.25$ ($p=0.5$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	225

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
3.27	สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p = 0.5$)	225
3.28	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.5$ ($p = 1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	229
3.29	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.5$ ($p = 1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	229
3.30	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.5$ ($p = 1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	230
3.31	สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p = 1.0$)	230
3.32	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $Y = 0.8 =, T = 0.5$ ($p = 0.6$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	231
3.33	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $Y = 0.8 =, T = 0.5$ ($p = 1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	231
3.34	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $Y = 0.8 =, T = 0.5$ ($p = 1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	232
3.35	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.3$ ($p = 0.6$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	236

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
3.36	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.3$ ($p=0.6$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	236
3.37	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.3$ ($p=0.6$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	237
3.38	สนามความเร็ว เมื่อ $T=0.3$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p=0.6$)	237
3.39	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T=0.6$ ($p=1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	241
3.40	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.6$ ($p=1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	241
3.41	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.6$ ($p=1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	242
3.42	สนามความเร็ว เมื่อ $T=0.6$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p=1.2$)	242
3.43	การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $X=0.2, T=0.6$ ($p=1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	243
3.44	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $X=0.2, T=0.6$ ($p=1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	243

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่		หน้า
3.45	ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $X = 0.2, T = 0.6$ ($p = 1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนค่าขอบ	244

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

มลพิษทางน้ำ (Water pollution) [1] หมายถึง ภาวการณ์ที่มีสารปนเปื้อนลงไปในน้ำแล้วทำให้สมบัติของน้ำเปลี่ยนแปลงผิดไปจากสมบัติตามธรรมชาติ จนไม่สามารถใช้น้ำนั้นได้ตามต้องการ โดยอาจเป็นพิษหรืออันตรายต่อมนุษย์และสิ่งแวดล้อมอื่นๆ หรือจนสิ่งมีชีวิตบางชนิดหรือหลายชนิดไม่สามารถอาศัยอยู่ได้ ทำให้แหล่งน้ำนั้นสูญเสียสมดุลธรรมชาติไป โดยแหล่งกำเนิดของมลพิษทางน้ำแบ่งหลักๆได้ดังนี้

1. **แหล่งชุมชน** น้ำเสียจากชุมชนเป็นน้ำที่ไม่ต้องการหรือน้ำที่ถูกใช้ในชุมชน เกิดจากการใช้น้ำในชีวิตประจำวัน จะประกอบด้วย น้ำที่มาจากห้องน้ำ และน้ำทิ้งจากกิจกรรมต่างๆของมนุษย์
2. **โรงงานอุตสาหกรรม** ของเสียจากโรงงานอุตสาหกรรม มาจากส่วนของสารเคมีที่ใช้ในการผลิต หรือวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิต หรือสารเคมีที่เกิดขึ้นในระหว่างการผลิตที่โรงงานไม่ต้องการและทิ้งไป หรืออาจมีสิ่งต่างๆเหล่านี้รวมกัน
3. **เกษตรกรรม** ของเสียจากการเกษตรกรรม มักมีการใช้สารเคมีต่างๆเพื่อเพิ่มผลผลิต โดยเฉพาะอย่างยิ่งทางการกสิกรรม เช่น มีการใช้ปุ๋ย และสารฆ่าศัตรูพืชและสัตว์ เป็นต้น

ซึ่งในทางด้านงานวิชาการ ได้มีการศึกษาและวิจัย วิธีการหาปริมาณของมลพิษในน้ำ ซึ่งส่วนใหญ่แล้วมีความเกี่ยวข้องกับการวัดสนามเวกเตอร์ และการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการนำปัญหาที่เกิดขึ้นจริงมาแปลงให้อยู่ในรูปของสมการคณิตศาสตร์ เพื่อง่ายต่อการวิเคราะห์วิจัย โดยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เหล่านี้ แสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงของค่าต่างๆในรูปของสมการคณิตศาสตร์ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการน้ำตื้น (Shallow water equation) เป็นสมการที่ได้มาจากหลักการของกฎการอนุรักษ์มวลและกฎการอนุรักษ์โมเมนตัม เป็นการอธิบายถึงการไหลของของไหลใต้พื้นผิวน้ำ โดยเขียนในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย [3] คือ

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Hu)+\frac{\partial}{\partial y}(Hv)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-fv+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+fu+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0$$

โดย

$H=H(x,y,t)$ คือ ความสูงของการไหลของกระแสน้ำ (เมตร)

$\zeta=\zeta(x,y,t)$ คือ ความสูงของผิวน้ำ วัดจากระดับน้ำเฉลี่ย (เมตร)

$u=u(x,y,t)$ คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วตามแนวแกน x (เมตร/วินาที)

$v=v(x,y,t)$ คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วตามแนวแกน y (เมตร/วินาที)

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (เมตร/วินาที^{2})

f คือ แรงโคริโอลิส ที่ขึ้นอยู่กับค่าละติจูด (เมตร/วินาที^{2})

อ่างเก็บน้ำ (Reservoirs) หมายถึง สระหรือทะเลสาบน้ำจืดที่มนุษย์สร้างขึ้น เพื่อที่จะเก็บกักน้ำที่มีปริมาณมากในช่วงฤดูฝน สำหรับไว้ใช้ในช่วงฤดูแล้งหรือช่วงที่มีน้ำน้อย และเก็บกักน้ำเพื่อชะลอน้ำหลากได้บางส่วน จะทำให้ช่วยลดความเสียหายที่เกิดจากน้ำท่วมบริเวณท้ายอ่างเก็บน้ำได้ โดยอ่างเก็บน้ำมีหน้าที่หลัก คือการทำให้เกิดเสถียรภาพของการไหลของน้ำ ทั้งการควบคุมการเปลี่ยนแปลงปริมาณน้ำจากแม่น้ำลำธารตามธรรมชาติที่ไหลลงอ่างเก็บน้ำ และควบคุมการใช้น้ำที่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาให้เพียงพอต่อการอุปโภคบริโภคน้ำของมนุษย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในงานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้กล่าวถึง อ่างเก็บน้ำในทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะแบ่งประเภทของอ่างเก็บน้ำตามรูปทรงออกเป็น 2 แบบดังนี้

1. **อ่างเก็บน้ำเอกรูป (Uniform Reservoirs)** คือ อ่างเก็บน้ำที่มีพื้นที่ขอบเขตล้อมรอบคล้ายรูปทรงเรขาคณิต ในที่นี้หมายถึง รูปทรงสี่เหลี่ยม เช่น อ่างเก็บน้ำพระรามเก้า
2. **อ่างเก็บน้ำไม่เอกรูป (Non-uniform Reservoirs)** คือ อ่างเก็บน้ำที่มีพื้นที่ขอบเขตล้อมรอบ รูปทรงเรขาคณิตต่างๆที่ไม่ใช่สี่เหลี่ยม หรือไม่ใช่รูปทรงเรขาคณิตก็ได้

โดยการศึกษาวิจัยนี้ ได้นำเสนอเฉพาะอ่างเก็บน้ำแบบเอกรูปเท่านั้น ซึ่งอ่างเก็บน้ำเอกรูปนี้ ทำให้ง่ายต่อการวิเคราะห์วิจัยและการจำลองอ่างเก็บน้ำ สำหรับการคำนวณเชิงตัวเลขอีกด้วย

ในการวิจัยที่เกี่ยวกับมลพิษในน้ำ มีนักวิชาการหลายท่านได้ทำการศึกษาวิจัยในลักษณะนี้มาแล้ว เช่น

A. Garzon and L. D'alpaos [2] (1992) ได้ทำการศึกษาวิจัยเรื่อง A modified method of characteristic technique combined with Galerkin finite element method to solve shallow water mass transport problems โดยมี 2 ตัวแบบสมาชิกจำกัดที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการ สมการที่ 1 คือสมการน้ำตื้น และสมการที่ 2 คือสมการการแพร่ ซึ่งในงานวิจัยนี้ได้ทำการพัฒนาเฉพาะตัวแบบการแพร่เท่านั้น โดยใช้วิธีออยเลอร์-ลากรางจ์ (Eulerian-Lagrangian Method : ELM) ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของ Modified Method of Characteristics (MMOC) รวมกับวิธี Galerkin finite element method ทำให้เห็นว่าความแม่นยำของตัวแบบมีการวิเคราะห์ด้วยการเปรียบเทียบกับผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ แสดงให้เห็นถึงความสอดคล้องระหว่างผลเฉลยของตัวแบบและผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ นอกจากนั้นการทดสอบ แสดงให้เห็นว่าเมื่อใช้ขั้นเวลากว้างๆ จะทำให้ความแม่นยำของตัวแบบ MMOC ลดลงไม่มากนัก

P. Tabuenca, J. Vila, J. Cardona and A. Samartin [3] (1997) ได้ทำการศึกษาวิจัยเรื่อง Finite element simulation of dispersion in the Bay of Santander ซึ่งเป็นการศึกษาการจำลองวิวัฒนาการของมลพิษในอ่าวซานทานแดร์ด้วย 2 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ คือตัวแบบอุทกพลศาสตร์ และตัวแบบการแพร่ ซึ่งเป็นสมการ 2 มิติโดยใช้วิธีสมาชิกจำกัด สำหรับสมการอุทกพลศาสตร์ใช้วิธีชัดแจ้ง 2 ขั้นตอน (a explicit two-step method) และสมการการแพร่ใช้วิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริยายทำซ้ำ (a iterative implicit scheme) โดยผลเฉลยความเร็วที่ได้จากตัวแบบที่ 1 นำไปเป็นข้อมูลเข้าให้กับตัวแบบที่ 2 เพื่อใช้ในการคำนวณความเข้มข้นของมลพิษในน้ำ

Nopparat Pochai, Suwon Tangmanee, L. J. Crane and J. J. H. Miller [4] (2006) ได้ทำการศึกษาวิจัยเรื่อง A Mathematical Model of Water Pollution Control Using the Finite Element Method เป็นการศึกษาปัญหาน้ำเสียด้วยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาการแพร่ที่มีสภาวะคงตัวใน 1 มิติกับสัมประสิทธิ์ค่าคงที่ของมลพิษในน้ำ ในการประมาณค่าซีโอดี (Chemical Oxygen Demand : COD) ในน้ำโดยใช้วิธีสมาชิกจำกัด ซึ่งผลเฉลยที่ได้ คือความเข้มข้นของมลพิษในน้ำ และนำไปคำนวณการควบคุมที่เหมาะสมของโรงงานบำบัดน้ำเสียให้ใช้ต้นทุนในการบำบัดน้ำเสียที่น้อยที่สุด

Nopparat Pochai, Suwon Tangmanee, Lawrence J. Crane and John J. H. Miller [5] (2009) ได้ทำการศึกษาวิจัยเรื่อง A water quality computation in the uniform reservoir ซึ่งเป็นการศึกษา 2 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เป็นการใช้วิธีผลต่างจำกัดกับตัวแบบอุทกพลศาสตร์โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ และตัวแบบการแพร่โดยเทคนิค forward in time and backward in space : FTBS ในการประมาณค่าความเร็วของกระแสน้ำ การยกตัวของระดับน้ำและความเข้มข้นของมลพิษในน้ำตามลำดับ นอกจากนั้นยังมีการคำนวณหาผลเฉลยเชิงทฤษฎี เพื่อใช้ผลเฉลยนี้ในการตรวจสอบความแม่นยำของการประมาณค่าได้อีกด้วย จากผลการวิจัยพบว่าการประมาณค่าความเข้มข้นของมลพิษในน้ำ ที่ได้มาจากความเร็วของกระแสน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับกรณีที่เกิดขึ้นจริง สำหรับน้ำเสียที่ปล่อยจากโรงงานในอ่างเก็บน้ำไม่เอกรูปได้

Nopparat Pochai and Chunya Sornsri [6] (2011) ได้ทำการศึกษาวิจัยเรื่อง A Non-dimensional Form of Hydrodynamic Model with Variable Coefficients in a Uniform Reservoir Using Lax-Wendroff Method ซึ่งเป็นการหาผลเฉลยของปัญหาตัวแบบอุทกพลศาสตร์กับสัมประสิทธิ์ตัวแปรในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ซึ่งเป็นวิธีผลต่างจำกัด การประมาณค่าผลเฉลยที่ได้ คือความเร็วของกระแสน้ำและการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ จะพบว่าผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปไร้มิติ ซึ่งสามารถแปลงให้เป็นผลเฉลยเชิงมิติได้และนำไปเป็นข้อมูลเข้าในการคำนวณผลเฉลยให้กับสมการการแพร่ของตัวแบบคุณภาพน้ำได้อีกด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยจำลองแบบการไหลของกระแสน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป ด้วยสมการน้ำตื้น 2 มิติที่ทำการแปลงให้อยู่ในรูปไร้มิติโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ เพื่อคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณซึ่งเป็นความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y และการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณเหล่านี้สามารถนำไปเป็นข้อมูลเข้าสำหรับตัวแบบคุณภาพน้ำ เพื่อใช้ในการคำนวณหาความเข้มข้นของมลพิษในน้ำได้ และนำไปประยุกต์ใช้กับพื้นที่จริงตามแหล่งน้ำธรรมชาติที่ต้องการทราบถึงทิศทางการไหลและการยกตัวของระดับน้ำได้อย่างมีประสิทธิภาพ

1.2 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. เพื่อนำเสนอทฤษฎีและความรู้ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับตัวแบบคุณภาพน้ำ
2. เพื่อนำเสนอตัวแบบอุทกพลศาสตร์ และการกำหนดเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น
3. เพื่อนำเสนอวิธีเชิงตัวเลขของการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไฮเพอร์โบลิกโดยใช้วิธีผลต่างจำกัด คือวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์
4. พัฒนาขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลขเพื่อประมาณค่าผลเฉลยของตัวแบบอุกพลศาสตร์โดยใช้วิธีผลต่างจำกัด คือวิธีปริยายทิศทางสลับ

1.3 ขอบเขตการวิจัย

1. จำลองแบบการไหลของกระแสน้ำและการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป
2. ศึกษาสมการน้ำตื้นไม่เชิงเส้น 2 มิติในรูปของสมการไร้มิติ
3. ศึกษาวิธีผลต่างจำกัดด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ สำหรับสมการน้ำตื้นใน 2 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ปรับปรุงและพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างมาจากปัญหาที่เกิดขึ้นจริงในรูปของตัวแบบอุทกพลศาสตร์
2. นำเสนอขั้นตอนของการคำนวณวิธีเชิงตัวเลขสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไฮเพอร์โบลิกโดยการใช้วิธีผลต่างจำกัด
3. พัฒนาขั้นตอนวิธีปริยายทิศทางสลับ เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในอ่างเก็บน้ำเอกรูป
4. นำเสนอขั้นตอนการคำนวณที่มีประสิทธิภาพสำหรับการหาผลเฉลยโดยการประมาณของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ เพื่อการพัฒนาขั้นตอนการคำนวณตัวแบบคุณภาพน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูปต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนของการวิจัย

ขั้นตอนการดำเนินงาน	ระยะเวลาในการดำเนินงานวิจัย (พ.ศ.2556)								
	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.	ส.ค.	ก.ย.	ต.ค.	พ.ย.
1. ศึกษาค้นคว้าและรวบรวมเอกสารข้อมูลที่เกี่ยวข้อง	←	→							
2. ศึกษาตัวแบบอุทกพลศาสตร์			←	→					
3. ศึกษาวิธีผลต่างจำกัดของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไฮเพอร์โบลิก				←	→				
4. นำวิธีผลต่างจำกัดมาประยุกต์ใช้กับปัญหาสมการน้ำตื้น						←	→		
5. สรุปและวิเคราะห์ผลการคำนวณ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่ได้จากวิธีผลต่างจำกัด								←	→
6. จัดทำรูปเล่มวิทยานิพนธ์									← →

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ตัวแบบอุทกพลศาสตร์ (Hydrodynamic model)

2.1.1 สมการน้ำตื้น (Shallow water equation)

สมการเชิงอนุรักษ์มวลและสมการเชิงโมเมนตัม ซึ่งได้สร้างมาจากความจริงที่ว่ามวลนั้นไม่มีการสูญหายและการใช้กฎข้อที่ 2 ของนิวตัน ตามลำดับ ดังนั้นทั้ง 2 สมการนี้จึงเป็นสมการควบคุม สำหรับสมการน้ำตื้นที่นำมาใช้พิจารณาในอ่างเก็บน้ำ โดยจะตัดเทอมที่เกี่ยวกับแรงโคริโอลิส, ความเค้นเฉือน และลมบนพื้นผิวออกทั้งหมด จึงทำให้เกิดเป็นสมการน้ำตื้น [7] ดังนี้

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u]+\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)v]=0, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0 \tag{2.3}$$

โดยที่

$h=h(x,y)$ คือ ฟังก์ชันภูมิลักษณ์ท้องน้ำ (Bottom topography function) (เมตร)

$\zeta=\zeta(x,y,t)$ คือ การยกตัวของระดับน้ำจากระดับน้ำเฉลี่ยไปถึงผิวน้ำ (เมตร)

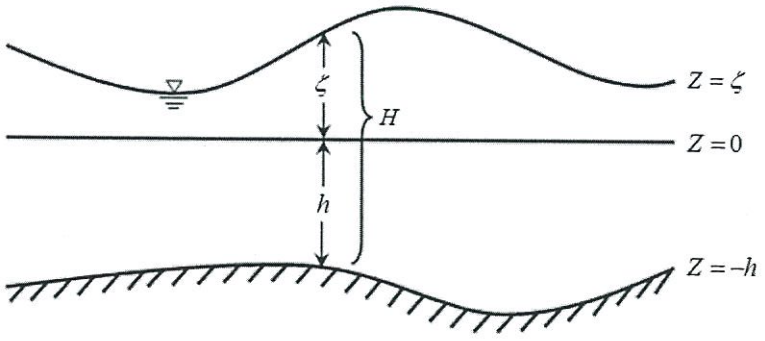
$u=u(x,y,t)$ คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วตามแนวแกน x (เมตร/วินาที)

$v=v(x,y,t)$ คือ ส่วนประกอบของเวกเตอร์ความเร็วตามแนวแกน y (เมตร/วินาที)

g คือ ความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (เมตร/วินาที^{2})

และ $H=H(x,y,t)=h(x,y)+\zeta(x,y,t)$ ดังรูปที่ 2.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.1 ภาพตัดตามขวางของน้ำในอ่างเก็บน้ำ

โดยกำหนดให้เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเชิงมิติ เป็นดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น $$\zeta(\frac{x}{l},\frac{y}{l},0)=f(\frac{x}{l},\frac{y}{l})h(\frac{x}{l},\frac{y}{l})$$

และ $$u(\frac{x}{l},\frac{y}{l},0)=v(\frac{x}{l},\frac{y}{l},0)=0$$

เงื่อนไขขอบ $$\zeta(0,\frac{y}{l},\frac{t\sqrt{gh}}{l})=\zeta(1,\frac{y}{l},\frac{t\sqrt{gh}}{l})=0$$

และ $$\zeta(\frac{x}{l},0,\frac{t\sqrt{gh}}{l})=\zeta(\frac{x}{l},1,\frac{t\sqrt{gh}}{l})=0$$

พิจารณาสมการน้ำตื้นในพจน์ไร้มิติ โดยต้องการเขียนสมการ (2.1), (2.2) และ (2.3) ให้อยู่ในรูปของสมการไร้มิติ กำหนดตัวแปรไร้มิติได้ดังนี้ [7]

$$U=\frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (2.4), \qquad V=\frac{v}{\sqrt{gh}}, \quad (2.5)$$

$$X=\frac{x}{l} \quad (2.6), \qquad Y=\frac{y}{l}, \quad (2.7)$$

$$Z=\frac{\zeta}{h} \quad (2.8), \qquad T=\frac{t\sqrt{gh}}{l} \quad (2.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติให้การยกตัวของระดับน้ำ น้อยกว่าระดับน้ำเฉลี่ย กล่าวคือ $\zeta << h$ ได้ว่า $h+\zeta \cong h$ ดังนั้น สมการ (2.1) จึงเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(hu)+\frac{\partial}{\partial y}(hv)=0 \tag{2.10}$$

จะได้ว่า

$$\frac{\partial Zh}{\partial\left(\frac{Tl}{\sqrt{gh}}\right)}+\frac{\partial}{\partial(Xl)}\left(hU\sqrt{gh}\right)+\frac{\partial}{\partial(Yl)}\left(hV\sqrt{gh}\right)=0,$$

$$\left(\frac{h\sqrt{gh}}{l}\right)\frac{\partial Z}{\partial T}+\left(\frac{h\sqrt{gh}}{l}\right)\frac{\partial U}{\partial X}+\left(\frac{h\sqrt{gh}}{l}\right)\frac{\partial V}{\partial Y}=0,$$

ดังนั้น $$\frac{\partial Z}{\partial T}+\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0 \tag{2.11}$$

ในทำนองเดียวกันสมการ (2.2) จะได้

$$\frac{\partial\left(U\sqrt{gh}\right)}{\partial\left(\frac{Tl}{\sqrt{gh}}\right)}+g\frac{\partial(Zh)}{\partial(Xl)}=0,$$

$$\left(\frac{gh}{l}\right)\frac{\partial U}{\partial T}+\left(\frac{gh}{l}\right)\frac{\partial Z}{\partial X}=0,$$

ดังนั้น $$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial Z}{\partial X}=0 \tag{2.12}$$

และจากสมการ (2.3) จะได้

$$\frac{\partial\left(V\sqrt{gh}\right)}{\partial\left(\frac{Tl}{\sqrt{gh}}\right)}+g\frac{\partial(Zh)}{\partial(Yl)}=0,$$

$$\left(\frac{gh}{l}\right)\frac{\partial V}{\partial T}+\left(\frac{gh}{l}\right)\frac{\partial Z}{\partial Y}=0,$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น $$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial Z}{\partial Y}=0 \tag{2.13}$$

จะได้รูปไร้มิติของระบบสมการ (2.10), (2.2) และ (2.3) คือ

$$\frac{\partial Z}{\partial T}+\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0, \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial Z}{\partial X}=0, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial Z}{\partial Y}=0 \tag{2.16}$$

เนื่องจากปัญหาเปิดของ [7] ต้องการทราบว่า ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของการยกตัวของระดับน้ำเพิ่มขึ้นเล็กน้อยเท่ากับ XY คือ มีปัจจัยภายนอกมากระทำ เช่น แรงที่เกิดจากดวงจันทร์ที่กระทำต่อโลก หรือการสูบน้ำเข้า ฯลฯ เป็นต้น แล้วจะต้องพัฒนาวิธีผลต่างจำกัดสำหรับการหาผลเฉลยในสมการนี้ใหม่ ผู้วิจัยจึงได้ทำการแก้ไขแบบจำลอง โดยสมมติให้ สัมประสิทธิ์ของ $\frac{\partial Z}{\partial X}$ และ $\frac{\partial Z}{\partial Y}$ เป็น $g(X,Y)$ ซึ่ง $g(X,Y)\geq 1$ โดยเลือก $g(X,Y)=1+XY$ เมื่อ $0\leq X,Y\leq 1$ เพื่อเป็นการเพิ่มอัตราการเปลี่ยนแปลงการยกตัวของระดับน้ำขึ้นอีกเล็กน้อย

ดังนั้น จากสมการ (2.14), (2.15) และ (2.16) คือ

$$\frac{\partial Z}{\partial T}+\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0, \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}+(1+XY)\frac{\partial Z}{\partial X}=0, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial V}{\partial T}+(1+XY)\frac{\partial Z}{\partial Y}=0 \tag{2.19}$$

เมื่อ $(X,Y)\in\Omega$ โดยที่ $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ และ $T\in[0,\tau]$ เมื่อ τ คือ ค่าคงตัว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบในรูปไร้มิติ ดังนี้

1. เงื่อนไขเริ่มต้น $Z(X,Y,0) = f(X,Y)$

และ $U(X,Y,0) = V(X,Y,0) = 0$ สำหรับทุก $0 \le X,Y \le 1$

โดยที่ $f(X,Y)$ แทนฟังก์ชันที่ขึ้นกับ X และ Y

2. เงื่อนไขขอบ $Z(0,Y,T) = Z(1,Y,T) = 0$

และ $Z(X,0,T) = Z(X,1,T) = 0$ สำหรับทุก $0 \le X,Y \le 1$

และสำหรับทุก $T \in (0,\tau)$

2.2 วิธีผลต่างจำกัด (Finite difference method)

2.2.1 ระบบไฮเพอร์โบลิกอันดับหนึ่งใน 2 มิติ (First-order hyperbolic systems in two space dimensions) [8]

เป็นระบบที่ใช้ในการแก้ปัญหาเชิงตัวเลขในระบบไฮเพอร์โบลิกอันดับหนึ่งของสมการอนุพันธ์ย่อย สำหรับในปัญหาพื้นที่ 2 มิติ นั้นคือวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ และวิธีปริยายทิศทางสลับ เป็นดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.20}$$

โดยที่ A, B คือ เมทริกซ์ขนาด $n \times n$

และ u คือ เวกเตอร์ขนาด n

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2 วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ (Lax-Wendroff method)

วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ [8] เป็นวิธีหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการไฮเพอร์โบลิกในการแก้ปัญหาของระบบสมการไฮเพอร์โบลิกอันดับหนึ่งใน 2 มิติที่มีขอบเขตคือ $-\infty < x, y < +\infty$, $t \geq 0$ โดยแบ่งเป็นสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่เท่าๆกันบนแกน x, y และ t โดยให้ช่วงแบ่งบนแกน x คือ $x = lh$, บนแกน y คือ $y = mh$ และบนแกน t คือ $t = nk$ โดยที่ h คือ ความกว้างของช่วงย่อย k คือ เวลาของช่วงย่อยและ l, m, n คือ จำนวนช่วงย่อยที่เป็นจำนวนเต็ม

สามารถใช้แก้ปัญหาค่าเริ่มต้นได้ โดยสมการ (2.20) พร้อมกับเงื่อนไข $u = U(x, y)$ บนระนาบ $t = 0$ $(-\infty < x, y < +\infty)$ โดยการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ที่มีความแม่นยำถึงอันดับสองของฟังก์ชันสามตัวแปร จะเขียนได้ว่า

$$u(x, y, t+k) = u(x, y, t) + k\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$$

จาก ระบบไฮเพอร์โบลิกอันดับหนึ่งใน 2 มิติ จะได้

$$u(x, y, t+k) = u(x, y, t) + k\left(A\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{k^2}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(A\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right),$$

$$= u(x, y, t) + k\left(A\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + B\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}\right)$$

$$+\frac{k^2}{2}\left(A^2\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + AB\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + BA\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y} + B^2\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2}\right),$$

$$= u(x, y, t) + kA\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} + kB\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} + \frac{k^2 A^2}{2}\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2}$$

$$+\frac{k^2 B^2}{2}\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + \frac{k^2(AB + BA)}{2}\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x \partial y}, \qquad (2.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และใช้การประมาณค่าผลต่างตรงกลางของอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งและอันดับสอง [9] แทนในสมการ (2.21) จะได้

$$u(x,y,t+k)$$

$$=u(x,y,t)+kA\left(\frac{u(x+h,y,t)-u(x-h,y,t)}{2h}\right)+kB\left(\frac{u(x,y+h,t)-u(x,y-h,t)}{2h}\right)$$

$$+\frac{k^2A^2}{2}\left(\frac{u(x+h,y,t)-2u(x,y,t)+u(x-h,y,t)}{h^2}\right)$$

$$+\frac{k^2B^2}{2}\left(\frac{u(x,y+h,t)-2u(x,y,t)+u(x,y-h,t)}{h^2}\right)$$

$$+\frac{k^2(AB+BA)}{2}\left(\frac{u(x+h,y+h,t)-u(x+h,y-h,t)-u(x-h,y+h,t)+u(x-h,y-h,t)}{4h^2}\right),$$

$$=u(x,y,t)+\frac{kA}{2h}\big(u(x+h,y,t)-u(x-h,y,t)\big)+\frac{kB}{2h}\big(u(x,y+h,t)-u(x,y-h,t)\big)$$

$$+\frac{k^2A^2}{2h^2}\big(u(x+h,y,t)-2u(x,y,t)+u(x-h,y,t)\big)$$

$$+\frac{k^2B^2}{2h^2}\big(u(x,y+h,t)-2u(x,y,t)+u(x,y-h,t)\big)$$

$$+\frac{k^2(AB+BA)}{8h^2}\big(u(x+h,y+h,t)-u(x+h,y-h,t)-u(x-h,y+h,t)+u(x-h,y-h,t)\big),$$

เมื่อ กำหนดให้ $p=\frac{k}{h}$ จะได้ว่า

$$u(x,y,t+k)$$

$$=u(x,y,t)+\frac{1}{2}pA\big(u(x+h,y,t)-u(x-h,y,t)\big)+\frac{1}{2}pB\big(u(x,y+h,t)-u(x,y-h,t)\big)$$

$$+\frac{1}{2}p^2A^2\big(u(x+h,y,t)-2u(x,y,t)+u(x-h,y,t)\big)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\frac{1}{2}p^2B^2\big(u(x,y+h,t)-2u(x,y,t)+u(x,y-h,t)\big)$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)\big(u(x+h,y+h,t)-u(x+h,y-h,t)-u(x-h,y+h,t)+u(x-h,y-h,t)\big),$$

$$=u(x,y,t)+\frac{1}{2}pA\big(u(x+h,y,t)-u(x,y,t)-u(x-h,y,t)+u(x,y,t)\big)$$

$$+\frac{1}{2}pB\big(u(x,y+h,t)-u(x,y,t)-u(x,y-h,t)+u(x,y,t)\big)$$

$$+\frac{1}{2}p^2A^2\big(u(x+h,y,t)-2u(x,y,t)+u(x-h,y,t)\big)$$

$$+\frac{1}{2}p^2B^2\big(u(x,y+h,t)-2u(x,y,t)+u(x,y-h,t)\big)$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)[u(x+h,y+h,t)-u(x,y+h,t)-u(x+h,y,t)+u(x,y,t)$$

$$+u(x+h,y,t)-u(x,y,t)-u(x+h,y-h,t)-u(x,y-h,t)$$

$$+u(x,y+h,t)-u(x-h,y+h,t)-u(x,y,t)+u(x-h,y,t)$$

$$+u(x,y,t)-u(x-h,y,t)-u(x,y-h,t)+u(x-h,y-h,t)] \qquad (2.22)$$

โดยมีสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันหลายตัวแปร ดังนี้

กำหนดให้ $U(x,y,t)$ แทนฟังก์ชัน ที่จุดกริด (grid point) แทนโดย $x=lh$, $y=mh$, $t=nk$ โดยที่ l,m และ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นพิกัด (x,y,t) มีค่าเป็น (lh,mh,nk) นั่นคือ ค่าของฟังก์ชัน $U(x,y,t)$ เขียนแทนโดย $U(x,y,t)=U(lh,mh,nk)$ และให้สัญลักษณ์เป็น

$$U(lh,mh,nk)=U_{l,m}^{n}$$

ดังนั้น เขียนค่าของฟังก์ชัน U ที่จุด (x,y,t) ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มาจากการประมาณค่า ได้ดังนี้

$$U=U(x,y,t)=U(lh,mh,nk)=U_{l,m}^{n}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.22) สามารถจัดรูปและเขียนสมการใหม่ได้

$$U_{l,m}^{n+1} = U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pA(\Delta_x + \nabla_x)U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pB(\Delta_y + \nabla_y)U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}p^2A^2\Delta_x\nabla_x U_{l,m}^{n}$$

$$+\frac{1}{2}p^2B^2\Delta_y\nabla_y U_{l,m}^{n} + \frac{1}{8}p^2(AB+BA)(\Delta_x + \nabla_x)(\Delta_y + \nabla_y)U_{l,m}^{n}$$

เมื่อให้ $\Delta_x U_{l,m}^{n} = U_{l+1,m}^{n} - U_{l,m}^{n}$ คือผลต่างข้างหน้าเมื่อเทียบกับ x

$\Delta_y U_{l,m}^{n} = U_{l,m+1}^{n} - U_{l,m}^{n}$ คือผลต่างข้างหน้าเมื่อเทียบกับ y

$\nabla_x U_{l,m}^{n} = U_{l,m}^{n} - U_{l-1,m}^{n}$ คือผลต่างข้างหลังเมื่อเทียบกับ x

$\nabla_y U_{l,m}^{n} = U_{l,m}^{n} - U_{l,m-1}^{n}$ คือผลต่างข้างหลังเมื่อเทียบกับ y

ดังนั้น จะได้การประมาณค่าของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ คือ

$$U_{l,m}^{n+1} = [I + \frac{1}{2}pA(\Delta_x + \nabla_x) + \frac{1}{2}pB(\Delta_y + \nabla_y) + \frac{1}{2}p^2A^2\Delta_x\nabla_x$$

$$+\frac{1}{2}p^2B^2\Delta_y\nabla_y + \frac{1}{8}p^2(AB+BA)(\Delta_x + \nabla_x)(\Delta_y + \nabla_y)]U_{l,m}^{n} \qquad (2.23)$$

จากสมการ (2.17), (2.18) และ (3.19) จะสามารถเขียนในรูปของเมตริกซ์ W ได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial Z}{\partial T} = -\frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y}$$

$$= 0\frac{\partial Z}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial X} + 0\frac{\partial V}{\partial X} + 0\frac{\partial Z}{\partial Y} + 0\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = -(1+XY)\frac{\partial Z}{\partial X}$$

$$= -(1+XY)\frac{\partial Z}{\partial X} + 0\frac{\partial U}{\partial X} + 0\frac{\partial V}{\partial X} + 0\frac{\partial Z}{\partial Y} + 0\frac{\partial U}{\partial Y} + 0\frac{\partial V}{\partial Y}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -(1+XY)\frac{\partial Z}{\partial Y}$$

$$= 0\frac{\partial Z}{\partial X} + 0\frac{\partial U}{\partial X} + 0\frac{\partial V}{\partial X} - (1+XY)\frac{\partial Z}{\partial Y} + 0\frac{\partial U}{\partial Y} + 0\frac{\partial V}{\partial Y}$$

เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial T} \\ \frac{\partial U}{\partial T} \\ \frac{\partial V}{\partial T} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -(1+XY) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial X} \\ \frac{\partial U}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial X} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(1+XY) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \end{Bmatrix} \tag{2.24}$$

กำหนดให้ $W = \begin{Bmatrix} Z \\ U \\ V \end{Bmatrix}$

ดังนั้นสมการ (2.24) สามารถเขียนให้อยู่ในรูประบบไฮเพอร์โบลิกอันดับหนึ่งในสองมิติ คือ

$$\frac{\partial W}{\partial T} = A\frac{\partial W}{\partial X} + B\frac{\partial W}{\partial Y} \tag{2.25}$$

เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -(1+XY) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -(1+XY) & 0 & 0 \end{bmatrix}$

แบ่งช่วง [0,1] โดยที่ L และ M เป็นจำนวนช่องย่อยและความกว้างของแต่ละช่วงย่อย เท่ากับ ΔX และ ΔY ตามลำดับ ดังนั้น $\Delta X = \frac{1}{L}$ และ $\Delta Y = \frac{1}{M}$ และแบ่งช่วง $[0,\tau]$ โดยที่ N เป็นจำนวนช่วงย่อยและความกว้างของแต่ละช่วงย่อย เท่ากับ ΔT ดังนั้น $\Delta T = \frac{\tau}{N}$ เมื่อ τ คือ ขอบบนของเวลาที่ต้องการพิจารณา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยมีสัญลักษณ์แทนฟังก์ชันหลายตัวแปรดังนี้

กำหนดให้ $W(X,Y,T)$ แทนฟังก์ชันที่จุดกริด แทนโดย $X = l\Delta X$, $Y = m\Delta Y$ และ $T = n\Delta T$ โดยที่ l, m และ n เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้นพิกัด (X,Y,T) มีค่าเป็น $(l\Delta X, m\Delta Y, n\Delta T)$ นั่นคือ ค่าของฟังก์ชัน $W(X,Y,T)$ เขียนแทนโดย $W(X,Y,T) = W(l\Delta X, m\Delta Y, n\Delta T)$ และให้สัญลักษณ์เป็น

$$W(l\Delta X, m\Delta Y, n\Delta T) = W_{l,m}^{n}$$

ดังนั้น เขียนค่าของฟังก์ชัน W ที่จุด (X,Y,T) ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มาจากการประมาณค่า ได้ดังนี้

$$W = W(X,Y,T) = W(l\Delta X, m\Delta Y, n\Delta T) = W_{l,m}^{n}$$

จากสมการ (2.25) เขียนวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ W จะได้

$$W_{l,m}^{n+1} = W_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pA_{l,m}(\Delta_x + \nabla_x)W_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pB_{l,m}(\Delta_y + \nabla_y)W_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}p^2A_{l,m}^2\Delta_x\nabla_x W_{l,m}^{n}$$

$$+\frac{1}{2}p^2B_{l,m}^2\Delta_y\nabla_y W_{l,m}^{n} + \frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m} + B_{l,m}A_{l,m})(\Delta_x + \nabla_x)(\Delta_y + \nabla_y)W_{l,m}^{n} \quad (2.26)$$

โดยพิจารณาพจน์ที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}pA_{l,m}(\Delta_x + \nabla_x)W_{l,m}^{n} &= \frac{1}{2}pA_{l,m}\Delta_x W_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pA_{l,m}\nabla_x W_{l,m}^{n},\\ &= \frac{1}{2}pA_{l,m}\left(W_{l+1,m}^{n} - W_{l,m}^{n}\right) + \frac{1}{2}pA_{l,m}\left(W_{l,m}^{n} - W_{l-1,m}^{n}\right),\\ &= \frac{1}{2}pA_{l,m}\left(W_{l+1,m}^{n} - W_{l-1,m}^{n}\right)\end{aligned}$$

พิจารณาพจน์ที่ 3 จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}pB_{l,m}(\Delta_y + \nabla_y)W_{l,m}^{n} &= \frac{1}{2}pB_{l,m}\Delta_y W_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pB_{l,m}\nabla_y W_{l,m}^{n},\\ &= \frac{1}{2}pB_{l,m}\left(W_{l,m+1}^{n} - W_{l,m}^{n}\right) + \frac{1}{2}pB_{l,m}\left(W_{l,m}^{n} - W_{l,m-1}^{n}\right),\\ &= \frac{1}{2}pB_{l,m}\left(W_{l,m+1}^{n} - W_{l,m-1}^{n}\right)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาพจน์ที่ 4 จะได้

$$\frac{1}{2}p^2A_{l,m}^2\Delta_x\nabla_xW_{l,m}^n = \frac{1}{4}p^2\left(A_{l,m}\Delta_xA_{l,m}\nabla_x + A_{l,m}\nabla_xA_{l,m}\Delta_x\right)W_{l,m}^n,$$

$$= \frac{1}{4}p^2A_{l,m}\left[\Delta_xA_{l,m}\left(W_{l,m}^n - W_{l-1,m}^n\right) + \nabla_xA_{l,m}\left(W_{l+1,m}^n - W_{l,m}^n\right)\right],$$

$$= \frac{1}{4}p^2A_{l,m}\left[\Delta_xA_{l,m}W_{l,m}^n - \Delta_xA_{l,m}W_{l-1,m}^n + \nabla_xA_{l,m}W_{l+1,m}^n - \nabla_xA_{l,m}W_{l,m}^n\right],$$

$$= \frac{1}{4}p^2A_{l,m}[\left(A_{l+1,m}W_{l+1,m}^n - A_{l,m}W_{l,m}^n\right) - \left(A_{l+1,m}W_{l,m}^nA_{l,m}W_{l-1,m}^n\right)$$

$$+ (A_{l,m}W_{l+1,m}^n - A_{l-1,m}W_{l,m}^n) - (A_{l,m}W_{l,m}^n - A_{l-1,m}W_{l-1,m}^n)]$$

พิจารณาพจน์ที่ 5 จะได้

$$\frac{1}{2}p^2B_{l,m}^2\Delta_y\nabla_yW_{l,m}^n = \frac{1}{4}p^2(B_{l,m}\Delta_yB_{l,m}\nabla_y + B_{l,m}\nabla_yB_{l,m}\Delta_y)W_{l,m}^n,$$

$$= \frac{1}{4}p^2B_{l,m}[\Delta_yB_{l,m}(W_{l,m}^n - W_{l,m-1}^n) + \nabla_yB_{l,m}(W_{l,m+1}^n - W_{l,m}^n)],$$

$$= \frac{1}{4}p^2B_{l,,m}[\Delta_yB_{l,m}W_{l,m}^n - \Delta_yB_{l,m}W_{l,m-1}^n + \nabla_yB_{l,m}W_{l,m+1}^n - \nabla_yB_{l,m}W_{l,m}^n],$$

$$= \frac{1}{4}p^2B_{l,m}[(B_{l,m+1}W_{l,m+1}^n - B_{l,m}W_{l,m}^n) - (B_{l,m+1}W_{l,m}^n - B_{l,m}W_{l,m-1}^n)$$

$$+ (B_{l,m}W_{l,m+1}^n - B_{l,m-1}W_{l,m}^n) - (B_{l,m}W_{l,m}^n - B_{l,m-1}W_{l,m-1}^n)]$$

พิจารณาพจน์ที่ 6 จะได้

$$\frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m} + B_{l,m}A_{l,m})(\Delta_x + \nabla_x)(\Delta_y + \nabla_y)W_{l,m}^n$$

$$= \frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m} + B_{l,m}A_{l,m})[\Delta_x\Delta_y + \Delta_x\nabla_y + \nabla_x\Delta_y + \nabla_x\nabla_y]W_{l,m}^n,$$

$$= \frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m} + B_{l,m}A_{l,m})[\Delta_x\Delta_yW_{l,m}^n + \Delta_x\nabla_yW_{l,m}^n + \nabla_x\Delta_yW_{l,m}^n + \nabla_x\nabla_yW_{l,m}^n],$$

$$= \frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m} + B_{l,m}A_{l,m})[\Delta_x(W_{l,m+1}^n - W_{l,m}^n) + \Delta_x(W_{l,m}^n - W_{l,m-1}^n)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+\nabla_x(W^n_{l,m+1}-W^n_{l,m})+\nabla_x(W^n_{l,m}-W^n_{l,m-1})],$$

$$=\frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m}+B_{l,m}A_{l,m})[\Delta_x W^n_{l,m+1}-\Delta_x W^n_{l,m}+\Delta_x W^n_{l,m}-\Delta_x W^n_{l,m-1}$$

$$+\nabla_x W^n_{l,m+1}-\nabla_x W^n_{l,m}+\nabla_x W^n_{l,m}-\nabla_x W^n_{l,m-1}],$$

$$=\frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m}+B_{l,m}A_{l,m})[(W^n_{l+1,m+1}-W^n_{l,m+1})-(W^n_{l+1,m-1}-W^n_{l,m-1})$$

$$+(W^n_{l,m+1}-W^n_{l-1,m+1})-(W^n_{l,m-1}-W^n_{l-1,m-1})],$$

$$=\frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m}+B_{l,m}A_{l,m})[W^n_{l+1,m+1}-W^n_{l+1,m-1}-W^n_{l-1,m+1}+W^n_{l-1,m-1}]$$

ดังนั้น จาก (2.26) จะเป็นตามสมการ โดยวิธีผลต่างจำกัด คือ

$$\begin{aligned}W^{n+1}_{l,m} &= W^n_{l,m}+\frac{1}{2}pA_{l,m}(W^n_{l+1,m}-W^n_{l-1,m})+\frac{1}{2}pB_{l,m}(W^n_{l,m+1}-W^n_{l,m-1})\\
&+\frac{1}{4}p^2A_{l,m}[(A_{l+1,m}W^n_{l+1,m}-A_{l,m}W^n_{l,m})-(A_{l+1,m}W^n_{l,m}-A_{l,m}W^n_{l-1,m})\\
&+(A_{l,m}W^n_{l+1,m}-A_{l-1,m}W^n_{l,m})-(A_{l,m}W^n_{l,m}-A_{l-1,m}W^n_{l-1,m})]\\
&+\frac{1}{4}p^2B_{l,m}[(B_{l,m+1}W^n_{l,m+1}-B_{l,m}W^n_{l,m})-(B_{l,m+1}W^n_{l,m}-B_{l,m}W^n_{l,m-1})\\
&+(B_{l,m}W^n_{l,m+1}-B_{l,m-1}W^n_{l,m})-(B_{l,m}W^n_{l,m}-B_{l,m-1}W^n_{l,m-1})]\\
&+\frac{1}{8}p^2(A_{l,m}B_{l,m}+B_{l,m}A_{l,m})(W^n_{l+1,m+1}-W^n_{l-1,m+1}-W^n_{l+1,m-1}+W^n_{l-1,m-1})\end{aligned} \qquad (2.27)$$

โดยที่ $W^n_{l.m}=\begin{Bmatrix}Z^n_{l,m}\\U^n_{l,m}\\V^n_{l,m}\end{Bmatrix}$ และ $p=\frac{\Delta T}{\Delta X}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างการหาผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ [7]

พิจารณาอ่างเก็บน้ำเอกรูปขนาด 3.2×3.2 ตารางกิโลเมตร ($l=3.2$ กิโลเมตร) และความลึกคงที่ $h=1$ เมตร อ่างเก็บน้ำถูกตีกริดด้วย 1600 กริดกับ $\Delta x=\Delta y=80$ เมตรและช่วงเวลา $\Delta t=2.56$ วินาที โดยสมมติให้น้ำในอ่างเก็บน้ำมีการเคลื่อนที่ ($u=0, v=0$) และการยกตัวของระดับน้ำ กำหนดให้เป็น $\zeta(x,y,0)=(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2})(\frac{y}{l}-\frac{y^2}{l^2})$

<u>วิธีทำ</u>

จากตัวอย่างมีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเชิงมิติ เป็นดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น $$\zeta(\frac{x}{l},\frac{y}{l},0)=(\frac{x}{l}-\frac{x^2}{l^2})(\frac{y}{l}-\frac{y^2}{l^2})$$

และ $$u(\frac{x}{l},\frac{y}{l},0)=v(\frac{x}{l},\frac{y}{l},0)=0$$

เงื่อนไขขอบ $$\zeta(0,\frac{y}{l},\frac{t\sqrt{gh}}{l})=\zeta(1,\frac{y}{l},\frac{t\sqrt{gh}}{l})=0$$

และ $$\zeta(\frac{x}{l},0,\frac{t\sqrt{gh}}{l})=\zeta(\frac{x}{l},1,\frac{t\sqrt{gh}}{l})=0$$

โดยพิจารณาการแปลงให้อยู่ในรูปไร้มิติ จะได้

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$Z(X,Y,0)=(X-X^2)(Y-Y^2) \quad \text{เมื่อ } 0\le X,Y\le 1 \text{ และ } T=0$$

และ $$U(X,Y,0)=V(X,Y,0)=0 \quad \text{เมื่อ } 0\le X,Y\le 1 \text{ และ } T=0$$

และเงื่อนไขขอบ คือ

$$Z(0,Y,T)=Z(1,Y,T)=0 \quad \text{เมื่อ } 0\le Y\le 1 \text{ และ } T>0$$

และ $$Z(X,0,T)=Z(X,1,T)=0 \quad \text{เมื่อ } 0\le X\le 1 \text{ และ } T>0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เลือก $\Delta t = 2.56$ วินาที ดังนั้น $\Delta T = \frac{t\sqrt{gh}}{l} = \frac{2.56\sqrt{(9.8)(1)}}{3200} = 0.0025$

$\Delta x = \Delta y = 80$ เมตร ดังนั้น $\Delta X = \frac{x}{l} = \frac{80}{3200} = 0.025$

และ $\Delta Y = \frac{y}{l} = \frac{80}{3200} = 0.025$

ดังนั้น $p = \frac{\Delta T}{\Delta X} = \frac{0.0025}{0.025} = 0.1$ เมื่อ $h = 1$ เมตร, $l = 3200$ เมตร

โดยใช้สมการ (2.27) มาประมาณค่าผลเฉลย ได้แก่ การยกตัวของระดับน้ำและความเร็วในทิศทางแกน x และ แกน y ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 2.1-2.3 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.1 การยกตัวของระดับน้ำ $\zeta(x, y, t)$ เมตร

สำหรับ $0 \le x, y \le 3200$ เมตร เมื่อ t คือ 1 ชั่วโมง 24 นาที

y \ x	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
400	0.0000	-0.0107	-0.0063	0.0068	0.0110	0.0083	0.0038	0.0015	0.0000
800	0.0000	-0.0061	0.0079	0.0264	0.0292	0.0214	0.0111	0.0040	0.0000
1200	0.0000	0.0069	0.0263	0.0345	0.0306	0.0233	0.0135	0.0051	0.0000
1600	0.0000	0.0108	0.0288	0.0302	0.0305	0.0315	0.0236	0.0120	0.0000
2000	0.0000	0.0101	0.0211	0.0234	0.0337	0.0327	0.0251	0.0121	0.0000
2400	0.0000	0.0029	0.0100	0.0127	0.0233	0.0264	0.0236	0.0153	0.0000
2800	0.0000	0.0006	0.0028	0.0041	0.0113	0.0150	0.0156	0.0096	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.2 ความเร็ว $u(x,y,t)$ เมตร/วินาที สำหรับ $0 \le x, y \le 3200$ เมตร เมื่อ t คือ 1 ชั่วโมง 24 นาที

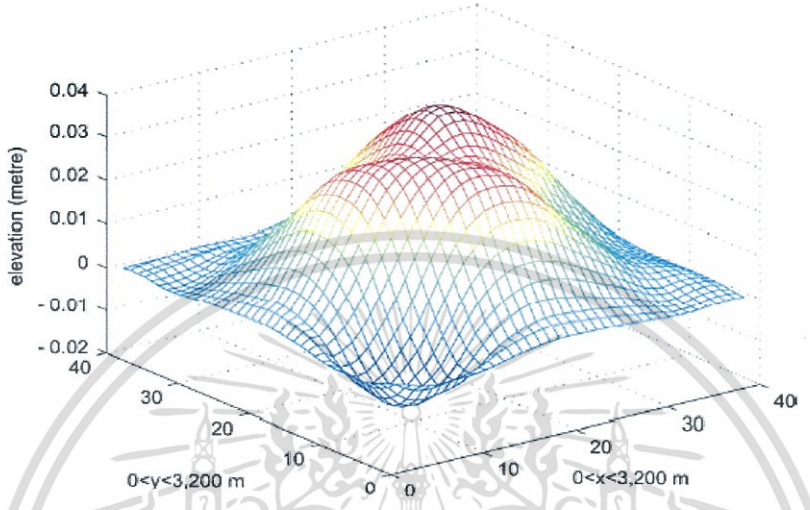
y \ x	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
400	0.0055	0.0258	0.0387	0.0340	0.0199	0.0070	-0.0004	-0.0013	-0.0004
800	0.0021	0.0077	0.0053	-0.0013	-0.0035	-0.0040	-0.0036	-0.0022	-0.0005
1200	-0.0020	-0.0117	-0.0217	-0.0203	-0.0082	0.0010	0.0038	0.0017	0.0003
1600	-0.0038	-0.0188	-0.0288	-0.0232	-0.0113	-0.0035	0.0004	0.0009	0.0003
2000	-0.0033	-0.0153	-0.0228	-0.0202	-0.0156	-0.0096	-0.0029	0.0000	0.0003
2400	-0.0015	-0.0061	-0.0079	-0.0087	-0.0096	-0.0065	-0.0018	-0.0005	0.0004
2800	-0.0006	-0.0018	-0.0002	-0.0012	-0.0039	-0.0043	-0.0047	0.0000	-0.0008
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 2.3 ความเร็ว $v(x,y,t)$ เมตร/วินาที สำหรับ $0 \le x, y \le 3200$ เมตร เมื่อ t คือ 1 ชั่วโมง 24 นาที

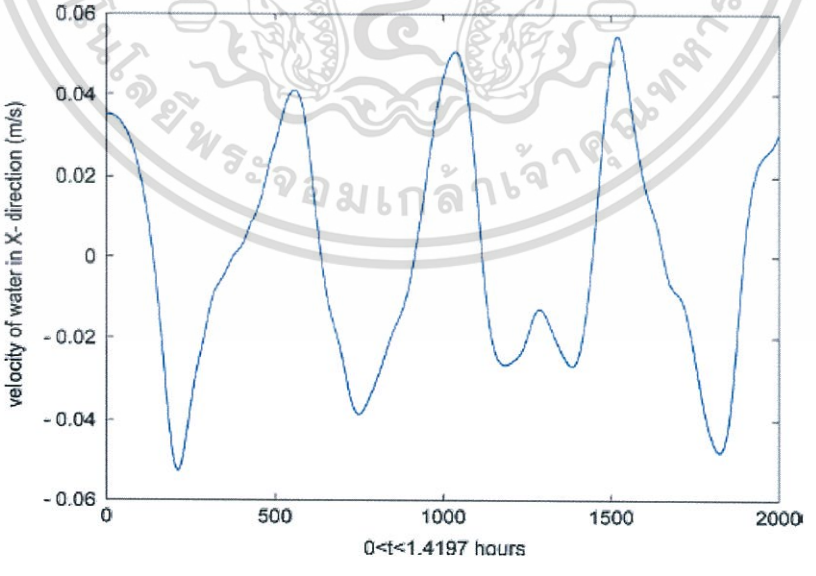
y \ x	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200
0	0.0000	0.0057	0.0023	-0.0020	-0.0039	-0.0034	-0.0016	-0.0006	0.0000
400	0.0000	0.0259	0.0080	-0.0113	-0.0186	-0.0153	-0.0062	-0.0017	0.0000
800	0.0000	0.0387	0.0057	-0.0212	-0.0283	-0.0224	-0.0078	0.0002	0.0000
1200	0.0000	0.0337	-0.0011	-0.0197	-0.0225	-0.0194	-0.0081	-0.0003	0.0000
1600	0.0000	0.0194	-0.0034	-0.0076	-0.0106	-0.0144	-0.0084	-0.0024	0.0000
2000	0.0000	0.0159	0.0063	-0.0042	0.0014	-0.0028	-0.0083	-0.0048	0.0000
2400	0.0000	-0.0013	-0.0043	0.0036	0.0009	-0.0016	0.0004	-0.0018	0.0000
2800	0.0000	-0.0023	-0.0035	0.0007	0.0007	0.0007	0.0021	0.0037	0.0000
3200	0.0000	-0.0008	0.0011	0.0043	0.0068	0.0078	0.0067	0.0027	0.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง 24 นาทีและความเร็วของน้ำในแกน x ที่จุดศูนย์กลางของอ่างเก็บน้ำตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งเวลา 1 ชั่วโมง 24 นาที ได้แสดงกราฟไว้บนรูปที่ 2.2 และ 2.3 ตามลำดับ



รูปที่ 2.2 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมง 24 นาที [7]



รูปที่ 2.3 ความเร็วของน้ำในแกน x ที่จุดศูนย์กลางของอ่างเก็บน้ำตั้งแต่เริ่มต้นจนกระทั่งเวลา 1 ชั่วโมง 24 นาที [7]

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.3 วิธีปริยายทิศทางสลับ (Alternating Direction Implicit method : ADI)

วิธีปริยายทิศทางสลับ [8] เป็นอีกวิธีหนึ่งในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการไฮเพอร์โบลิก ในการแก้ปัญหาของระบบสมการไฮเพอร์โบลิกอันดับหนึ่ง ซึ่งในงานวิจัยนี้ จะทำการศึกษาวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด (The eight point ADI method) ใน 2 มิติ โดยมีความแม่นยำถึงอันดับสอง คือ

$$[I+\frac{1}{2}(I-pB)\Delta y][I+\frac{1}{2}(I-pA)\Delta x]U_{l,m}^{n+1}$$

$$=[I+\frac{1}{2}(I+pB)\Delta y][I+\frac{1}{2}(I+pA)\Delta x]U_{l,m}^{n} \tag{2.28}$$

จากสูตร (2.28) สามารถแบ่งออกเป็นสองส่วนในรูปแบบวิธีดักลาส-รัทฟอร์ด [8] คือ

$$[I+\frac{1}{2}(I-pB)\Delta y]U_{l,m}^{n+1*}=[I+\frac{1}{2}(I+pA)\Delta x]U_{l,m}^{n} \tag{2.29a}$$

และ

$$(I-pB)[I+\frac{1}{2}(I-pA)\Delta x]U_{l,m}^{n+1}$$

$$=-2pBU_{l,m}^{n+1*}+(I+pB)[I+\frac{1}{2}(I+pA)\Delta x]U_{l,m}^{n} \tag{2.29b}$$

ในรูปแบบวิธีพีซแมน-รัทฟอร์ด [8] คือ

$$[I+\frac{1}{2}(I-pB)\Delta y]U_{l,m}^{n+1*}=[I+\frac{1}{2}(I+pA)\Delta x]U_{l,m}^{n} \tag{2.30a}$$

และ

$$[I+\frac{1}{2}(I-pA)\Delta x]U_{l,m}^{n+1}=[I+\frac{1}{2}(I+pB)\Delta y]U_{l,m}^{n+1*} \tag{2.30b}$$

เมื่อ $U_{l,m}^{n+1*}$ คือ ค่าระหว่างกลาง (Intermediate Value)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (2.29) และ (2.30) ก่อให้เกิดวิธีปริยายทิศทางสลับ ในการแก้ปัญหาของสมการ (2.28) และผู้วิจัยต้องการผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนบังเกิดของ 2 จุด ดังนี้

(i) ขั้นที่ 1 ในทิศทางแกน y

(ii) ขั้นที่ 2 ในทิศทางแกน x

จะแสดงให้เห็นว่า ผลเฉลยของสมการ (2.20) โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ (2.30) ใช้สำหรับกรณีของเมทริกซ์ A และ B มีค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) เป็นค่าลบเท่านั้น และเวกเตอร์ U อยู่บนระนาบ $0 \le x, y < \infty, t = 0;\ 0 \le y, t < \infty, x = 0;\ 0 \le x, t < \infty, y = 0$ ผลเฉลยที่ต้องการจะอยู่ในรูปทรง 3 มิติ ซึ่งมีอัฐภาค (octant) $0 < x, y, t < \infty$

ดังนั้น ในงานวิจัยนี้ ใช้การหาผลเฉลยโดยรูปแบบวิธีพีซแมน-รัทฟอร์ด รวมกับรูปแบบวิธีดักลาส-รัทฟอร์ด โดย

<u>ขั้นที่ 1</u> ในทิศทางแกน y (in the y-direction at the first step)

การหาค่าแรกซึ่งได้มาจากการคำนวณนั้น หามาจากจุดกริดบนระนาบ $t = 1 * k$ (ดูจากรูปที่ 2.4) เป็นระนาบที่บอกค่าระหว่างกลาง ซึ่งเริ่มจาก $t = 0$ ถึง $t = k$ โดยเริ่มที่จุดกริดแรกบนจุดเริ่มต้นของเส้นตรงที่ A ซึ่งคือ จุด $x = 0, y = 0, t = 1 * k$ เดินขนานแกน y โดยใช้สมการ (2.30a) กระทำที่จุดกริดตามลำดับบนเส้นตรงนี้

ดังนั้น จากสมการ (2.30a) จะได้

$$U_{l,m}^{n+1*} + \frac{1}{2}\Delta y U_{l,m}^{n+1*} - \frac{1}{2} pB\Delta y U_{l,m}^{n+1*} = U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}\Delta x U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2} pA\Delta x U_{l,m}^{n},$$

$$U_{l,m}^{n+1*} + \frac{1}{2}\left(U_{l,m+1}^{n+1*} - U_{l,m}^{n+1*}\right) - \frac{1}{2} pB\left(U_{l,m+1}^{n+1*} - U_{l,m}^{n+1*}\right)$$

$$= U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}\left(U_{l+1,m}^{n} - U_{l,m}^{n}\right) + \frac{1}{2} pA\left(U_{l+1,m}^{n} - U_{l,m}^{n}\right),$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$U_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}U_{l,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{2}U_{l,m}^{n+1*}-\frac{1}{2}pBU_{l,m+1}^{n+1*}+\frac{1}{2}pBU_{l,m}^{n+1*}$$

$$=U_{l,m}^{n}+\frac{1}{2}U_{l+1,m}^{n}-\frac{1}{2}U_{l,m}^{n}+\frac{1}{2}pAU_{l+1,m}^{n}-\frac{1}{2}pAU_{l,m}^{n},$$

$$\frac{1}{2}U_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}pBU_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}U_{l,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{2}pBU_{l,m+1}^{n+1*}$$

$$=\frac{1}{2}U_{l,m}^{n}-\frac{1}{2}pAU_{l,m}^{n}+\frac{1}{2}U_{l+1,m}^{n}+\frac{1}{2}pAU_{l+1,m}^{n},$$

$$\left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}pB\right)U_{l,m}^{n+1*}+\left(\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}pB\right)U_{l,m+1}^{n+1*}$$

$$=\left(\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}pA\right)U_{l,m}^{n}+\left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}pA\right)U_{l+1,m}^{n} \qquad (2.31)$$

นำ 2 คูณตลอดทั้งสองข้างของสมการ (2.31) จะได้

$$(I+pB)U_{l,m}^{n+1*}+(I-pB)U_{l,m+1}^{n+1*}=(I-pA)U_{l,m}^{n}+(I+pA)U_{l+1,m}^{n}$$

ดังนั้น

$$(I-pB)U_{l,m+1}^{n+1*}=-(I+pB)U_{l,m}^{n+1*}+(I-pA)U_{l,m}^{n}+(I+pA)U_{l+1,m}^{n} \qquad (2.32)$$

และสามารถเขียนตัวอย่างได้เป็น

$$(I-pB)U_{0,1}^{1*}=-(I+pB)U_{0,0}^{1*}+(I-pA)U_{0,0}^{0}+(I+pA)U_{1,0}^{0},$$

$$(I-pB)U_{0,2}^{1*}=-(I+pB)U_{0,1}^{1*}+(I-pA)U_{0,1}^{0}+(I+pA)U_{1,1}^{0},$$

$$(I-pB)U_{0,3}^{1*}=-(I+pB)U_{0,2}^{1*}+(I-pA)U_{0,2}^{0}+(I+pA)U_{1,2}^{0},$$ และอื่นๆ

ดังนั้น $U_{0,1}^{1*},U_{0,2}^{1*},U_{0,3}^{1*}$, และอื่นๆ สามารถคำนวณแบบวิธีชัดแจ้ง ภายใต้เงื่อนไขของค่า $U_{0,0}^{1*}$ ซึ่งสามารถหาค่า $U_{0,0}^{1*}$ ได้มาจากสมการ (2.29b) จะได้

$$2pBU_{l,m}^{n+1*}=(I+pB)[I+\frac{1}{2}(I+pA)\Delta x]U_{l,m}^{n}-(I-pB)[I+\frac{1}{2}(I-pA)\Delta x]U_{l,m}^{n+1},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= (I + pB)[U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}\Delta x U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2} pA\Delta x U_{l,m}^{n}]$$

$$-(I - pB)[U_{l,m}^{n+1} + \frac{1}{2}\Delta x U_{l,m}^{n+1} - \frac{1}{2} pA\Delta x U_{l,m}^{n+1}],$$

$$= (I + pB)[U_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}(U_{l+1,m}^{n} - U_{l,m}^{n}) + \frac{1}{2} pA(U_{l+1,m}^{n} - U_{l,m}^{n})]$$

$$-(I - pB)[U_{l,m}^{n+1} + \frac{1}{2}(U_{l+1,m}^{n+1} - U_{l,m}^{n+1}) - \frac{1}{2} pA(U_{l+1,m}^{n+1} - U_{l,m}^{n+1})],$$

$$= \frac{1}{2}(I + pB)[2U_{l,m}^{n} + U_{l+1,m}^{n} - U_{l,m}^{n} + pAU_{l+1,m}^{n} - pAU_{l,m}^{n}]$$

$$-\frac{1}{2}(I - pB)[2U_{l,m}^{n+1} + U_{l+1,m}^{n+1} - U_{l,m}^{n+1} - pAU_{l+1,m}^{n+1} + pAU_{l,m}^{n+1}] \qquad (2.33)$$

นำ 2 คูณตลอดทั้งสองข้างของสมการ (2.33) จะได้

$$4pBU_{l,m}^{n+1*} = (I + pB)[U_{l,m}^{n} - pAU_{l,m}^{n} + U_{l+1,m}^{n} + pAU_{l+1,m}^{n}]$$

$$-(I - pB)[U_{l,m}^{n+1} + pAU_{l,m}^{n+1} + U_{l+1,m}^{n+1} - pAU_{l+1,m}^{n+1}],$$

$$= (I + pB)[(I - pA)U_{l,m}^{n} + (I + pA)U_{l+1,m}^{n}]$$

$$-(I - pB)[(I + pA)U_{l,m}^{n+1} + (I - pA)U_{l+1,m}^{n+1}] \qquad (2.34)$$

และสามารถเขียนตัวอย่างได้เป็น

$$4pBU_{0,0}^{1*} = (I + pB)[(I - pA)U_{0,0}^{0} + (I + pA)U_{1,0}^{0}] - (I - pB)[(I + pA)U_{0,0}^{1} + (I - pA)U_{1,0}^{1}]$$

โดยค่าของ U^{1*} ที่จุดกริดบนจุดเริ่มต้นของเส้นที่จุด $x = h, y = 0, t = 1*k$ ที่เดินขนานแกน y และที่จุดอื่นๆสามารถหาค่าได้ในลักษณะเดียวกันนี้ จนกระทั่งครบจุดกริดทั้งหมดที่ต้องการบนระนาบ $t = 1*k$ ที่ครอบคลุมอยู่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ขั้นที่ 2</u> ในทิศทางแกน x (in the x-direction at the second step)

ค่าในทิศทางแกน x ได้มาจากการคำนวณนั้น หามาจากจุดกริดบนระนาบ $t=k$ โดยเริ่มที่จุดกริดบนจุดเริ่มต้นของเส้นตรงที่ B ซึ่งคือจุด $x=0, y=h, t=k$ เดินขนานตามแนวแกน x โดยใช้สมการ (2.30b) กระทำที่จุดกริดตามลำดับบนเส้นตรงนี้

ดังนั้น จากสมการ (2.30b) จะได้

$$U_{l,m}^{n+1}+\frac{1}{2}\Delta x U_{l,m}^{n+1}-\frac{1}{2}pA\Delta x U_{l,m}^{n+1}=U_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}\Delta y U_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}pB\Delta y U_{l,m}^{n+1*},$$

$$U_{l,m}^{n+1}+\frac{1}{2}\left(U_{l+1,m}^{n+1}-U_{l,m}^{n+1}\right)-\frac{1}{2}pA\left(U_{l+1,m}^{n+1}-U_{l,m}^{n+1}\right)$$

$$=U_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}\left(U_{l,m+1}^{n+1*}-U_{l,m}^{n+1*}\right)+\frac{1}{2}pB\left(U_{l,m+1}^{n+1*}-U_{l,m}^{n+1*}\right),$$

$$U_{l,m}^{n+1}+\frac{1}{2}U_{l+1,m}^{n+1}-\frac{1}{2}U_{l,m}^{n+1}-\frac{1}{2}pAU_{l+1,m}^{n+1}+\frac{1}{2}pAU_{l,m}^{n+1}$$

$$=U_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}U_{l,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{2}U_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}pBU_{l,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{2}pBU_{l,m}^{n+1*},$$

$$\frac{1}{2}U_{l,m}^{n+1}+\frac{1}{2}pAU_{l,m}^{n+1}+\frac{1}{2}U_{l+1,m}^{n+1}-\frac{1}{2}pAU_{l+1,m}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2}U_{l,m}^{n+1*}-\frac{1}{2}pBU_{l,m}^{n+1*}+\frac{1}{2}U_{l,m+1}^{n+1*}+\frac{1}{2}pBU_{l,m+1}^{n+1*},$$

$$\left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}pA\right)U_{l,m}^{n+1}+\left(\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}pA\right)U_{l+1,m}^{n+1}$$

$$=\left(\frac{1}{2}I-\frac{1}{2}pB\right)U_{l,m}^{n+1*}+\left(\frac{1}{2}I+\frac{1}{2}pB\right)U_{l,m+1}^{n+1*} \qquad (2.35)$$

นำ 2 คูณตลอดทั้งสองข้างของสมการ (2.35) จะได้

$$\left(I+pA\right)U_{l,m}^{n+1}+\left(I-pA\right)U_{l+1,m}^{n+1}=\left(I-pB\right)U_{l,m}^{n+1*}+\left(I+pB\right)U_{l,m+1}^{n+1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$(I-pA)U_{l+1,m}^{n+1} = -(I+pA)U_{l,m}^{n+1} + (I-pB)U_{l,m}^{n+1*} + (I+pB)U_{l,m+1}^{n+1*} \tag{2.36}$$

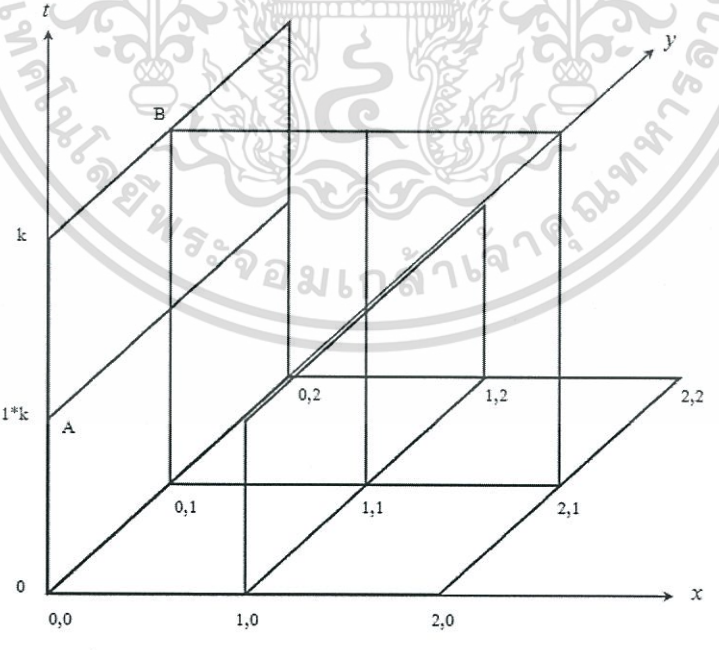
และสามารถเขียนตัวอย่างได้เป็น

$$(I-pA)U_{1,1}^{1} = -(I+pA)U_{0,1}^{1} + (I-pB)U_{0,1}^{1*} + (I+pB)U_{0,2}^{1*},$$

$$(I-pA)U_{2,1}^{1} = -(I+pA)U_{1,1}^{1} + (I-pB)U_{1,1}^{1*} + (I+pB)U_{1,2}^{1*},$$

$$(I-pA)U_{3,1}^{1} = -(I+pA)U_{2,1}^{1} + (I-pB)U_{2,1}^{1*} + (I+pB)U_{2,2}^{1*},$$ และอื่นๆ

ดังนั้น $U_{1,1}^{1}, U_{2,1}^{1}, U_{3,1}^{1}$, และอื่นๆ สามารถคำนวณแบบวิธีชัดแจ้ง โดยเริ่มจาก $U_{0,1}^{1}$ และค่าจุดต่อ (nodal values) ที่ $t = 1*k$ ซึ่งค่าของ U^{1} ที่จุดกริดบนจุดเริ่มต้นของเส้นตรงที่จุด $x = 0,\ y = 2h,$ $t = k$ เดินขนานตามแนวแกน x และที่จุดอื่นๆสามารถหาค่าได้ในลักษณะเดียวกันนี้ จนกระทั่งหาผลเฉลยได้ที่บนจุดกริดในบริเวณที่ต้องการ



รูปที่ 2.4 แผนภาพโครงสร้างวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การดำเนินงานวิจัยและผลการวิจัย

ผู้วิจัยได้พัฒนาขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลขของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไฮเพอร์โบลิก สำหรับการประมาณค่าผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยวิธีผลต่างจำกัด คือวิธีปริยายทิศทางสลับกับการกำหนดเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น โดยผู้วิจัยมุ่งหวังให้ขั้นตอนการคำนวณที่พัฒนาขึ้นนี้ ใช้ในการหาผลเฉลยโดยการประมาณของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังการคำนวณเชิงตัวเลข ตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงตัวเลขที่แสดงรายละเอียดไว้ในบทนี้

3.1 การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด

ผู้วิจัยได้นำเสนอการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด ในรูปแบบวิธีดักลาส-รัทฟอร์ทรวมกับรูปแบบวิธีพีซแมน-รัทฟอร์ท เพื่อนำไปพัฒนาขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลขในการประมาณค่าผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ โดยขั้นตอนการคำนวณวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุดแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนดังต่อไปนี้ [8]

ขั้นที่ 1 การคำนวณในทิศทางตามแกน y

หาค่า $U_{l,m+1}^{n+1*}$ ได้โดย

$$(I-pB)U_{l,m+1}^{n+1*} = -(I+pB)U_{l,m}^{n+1*} + (I-pA)U_{l,m}^{n} + (I+pA)U_{l+1,m}^{n} \tag{3.1}$$

โดยค่าเริ่มต้นของ $U_{l,m+1}^{n+1*}$ หาได้จาก

$$\begin{aligned} 4pBU_{l,m}^{n+1*} &= (I+pB)[(I-pA)U_{l,m}^{n} + (I+pA)U_{l+1,m}^{n}] \\ &\quad -(I-pB)[(I+pA)U_{l,m}^{n+1} + (I-pA)U_{l+1,m}^{n+1}] \end{aligned} \tag{3.2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่ 2 การคำนวณในทิศทางตามแกน x

หาค่า $U_{l+1,m}^{n+1}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยโดยประมาณได้จาก

$$(I-pA)U_{l+1,m}^{n+1}=-(I+pA)U_{l,m}^{n+1}+(I-pB)U_{l,m}^{n+1*}+(I+pB)U_{l,m+1}^{n+1*} \tag{3.3}$$

เมื่อให้ $p=\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ และ l,m,n เป็นจำนวนเต็ม

3.2 ตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด

ตัวอย่าง พิจารณาระบบไฮเพอร์โบลิก [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial y}$$

ใช้ในการแก้ระบบเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด ใน $0\le x,y\le 1,\ 0\le t\le T$

ผลเฉลยเชิงทฤษฎี คือ $u=\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}$

เมื่อ $$u_1=\sin(x-t)+\sin(y-t)$$

และ $$u_2=\sin(x-t)+\cos(y-t)$$

โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u=\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sin(x)+\sin(y)\\ \sin(x)+\cos(y)\end{Bmatrix}\qquad \text{สำหรับ } 0\le x,y\le 1,\ t=0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขขอบ

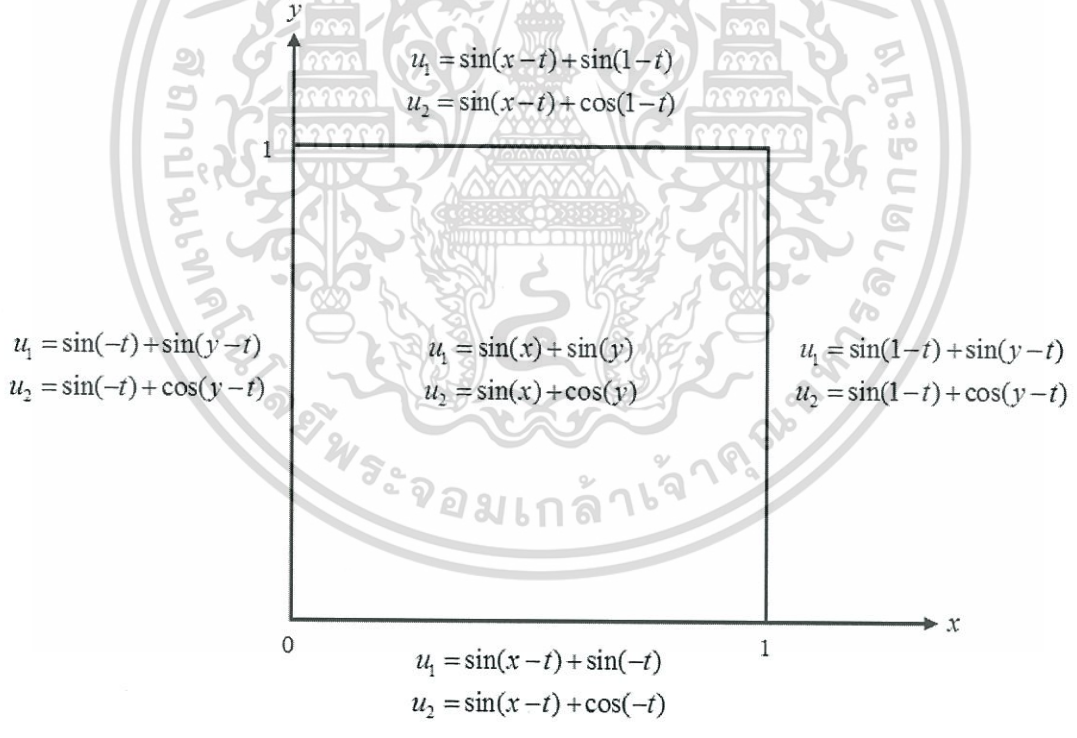
$$u=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sin(-t)+\sin(y-t)\\\sin(-t)+\cos(y-t)\end{Bmatrix} \qquad \text{สำหรับ } x=0,\ t>0$$

$$u=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sin(1-t)+\sin(y-t)\\\sin(1-t)+\cos(y-t)\end{Bmatrix} \qquad \text{สำหรับ } x=1,\ t>0$$

$$u=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sin(x-t)+\sin(-t)\\\sin(x-t)+\cos(-t)\end{Bmatrix} \qquad \text{สำหรับ } y=0,\ t>0$$

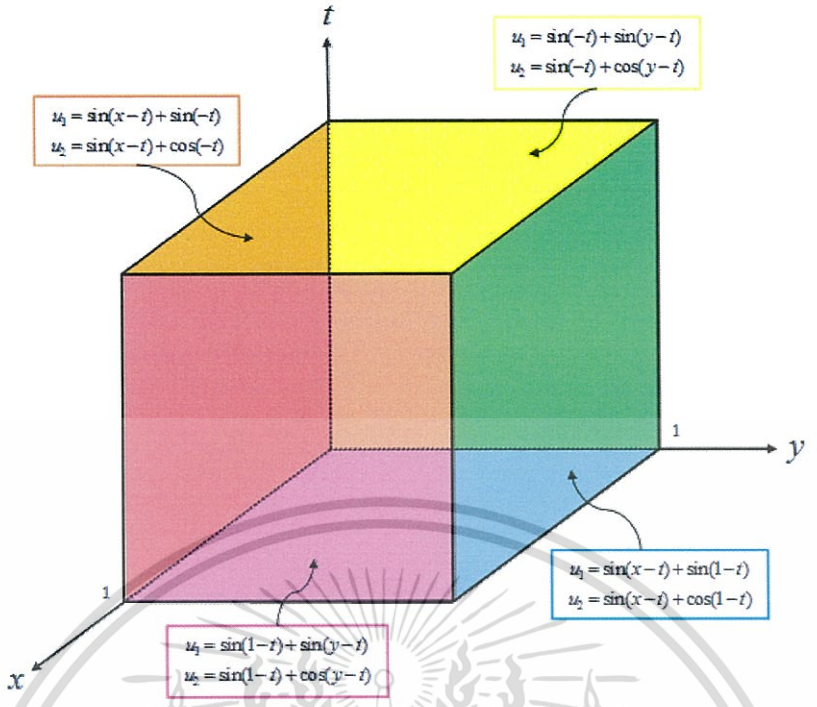
$$u=\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sin(x-t)+\sin(1-t)\\\sin(x-t)+\cos(1-t)\end{Bmatrix} \qquad \text{สำหรับ } y=1,\ t>0$$

โดยแสดงเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นไว้ดังรูปที่ 3.1 และ 3.2



รูปที่ 3.1 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ $(t=0)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 เงื่อนไขขอบ $(t > 0)$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

เลือก $\Delta x = \Delta y = 0.1$ และ $\Delta t = 0.01$ แล้ว $p = \dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{0.01}{0.1} = 0.1$

จะได้ $I - pA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (0.1)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}$

$$I + pA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (0.1)\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$I - pB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - (0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}$$

$$I + pB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อกำหนดให้คำนวณที่ $n=0$

<u>ขั้นที่ 1</u> ในทิศทางตามแกน y

1) หาค่า $U_{0,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU_{0,0}^{1*}$$

$$=(I+pB)[(I-pA)U_{0,0}^{0}+(I+pA)U_{1,0}^{0}]-(I-pB)[(I+pA)U_{0,0}^{1}+(I-pA)U_{1,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}U_{0,0}^{1*}$

$$=\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.0998\\ 1.0998\end{Bmatrix}\right)$$

$$-\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-0.0200\\ 0.9900\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.0799\\ 1.0898\end{Bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}-0.4 & 0\\ 0 & -0.4\end{bmatrix}U_{0,0}^{1*}$$

$$=\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}-0.1\\ 1.2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.1898\\ 0.8898\end{Bmatrix}\right)-\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0.0830\\ 0.7900\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-0.0131\\ 1.2998\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.0898\\ 2.0898\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.0699\\ 2.0898\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}0.0808\\ 1.8808\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0.0769\\ 2.2988\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0039\\ -0.4180\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}-0.4 & 0\\ 0 & -0.4\end{bmatrix}U_{0,0}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0039\\ -0.4180\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{0,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.0098 \\ 1.0450 \end{Bmatrix}$

ให้ $n = 0, l = 0, m = 0$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{0,1}^{1*} = -(I + pB)U_{0,0}^{1*} + (I - pA)U_{0,0}^{0} + (I + pA)U_{1,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -0.0098 \\ 1.0450 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.0998 \\ 1.0998 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0088 \\ -0.9405 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.1 \\ 1.2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1898 \\ 0.8898 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0986 \\ 1.1493 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.0986 \\ 1.1493 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.0896 \\ 1.0448 \end{Bmatrix}$

ให้ $n = 0, l = 0, m = 1$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{0,2}^{1*} = -(I + pB)U_{0,1}^{1*} + (I - pA)U_{0,1}^{0} + (I + pA)U_{1,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.0896 \\ 1.0448 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.0998 \\ 0.9950 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1997 \\ 1.0948 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.0806 \\ -0.9403 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0203 \\ 1.1840 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2692 \\ 0.8958 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2089 \\ 1.1395 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.2089 \\ 1.1395 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.1899 \\ 1.0359 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 0, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{0,3}^{1*} = -(I + pB)U_{0,2}^{1*} + (I - pA)U_{0,2}^{0} + (I + pA)U_{1,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1899 \\ 1.0359 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1987 \\ 0.9801 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2985 \\ 1.0799 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.1709 \\ -0.9323 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1404 \\ 1.1563 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3468 \\ 0.8938 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3163 \\ 1.1178 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.3163 \\ 1.1178 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.2875 \\ 1.0162 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 0, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{0,4}^{1*} = -(I + pB)U_{0,3}^{1*} + (I - pA)U_{0,3}^{0} + (I + pA)U_{1,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2875 \\ 1.0162 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2955 \\ 0.9553 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3954 \\ 1.0552 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-0.2588\\-0.9146\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.2591\\1.1168\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.4218\\0.8837\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.4221\\1.0859\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{0,4}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.4221\\1.0859\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,4}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.3837\\0.9872\end{Bmatrix}$

$n=0, l=0, m=4$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{0,5}^{1*}=-(I+pB)U_{0,4}^{1*}+(I-pA)U_{0,4}^{0}+(I+pA)U_{1,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{0,5}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.3837\\0.9872\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.3894\\0.9211\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.4893\\1.0209\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.3453\\-0.8885\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.3752\\1.0664\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.4935\\0.8657\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.5234\\1.0436\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{0,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.5234\\1.0436\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.4758\\0.9487\end{Bmatrix}$

$n=0, l=0, m=5$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{0,6}^{1*}=-(I+pB)U_{0,5}^{1*}+(I-pA)U_{0,5}^{0}+(I+pA)U_{1,5}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,6}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4758 \\ 0.9487 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4794 \\ 0.8776 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5793 \\ 0.9774 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4282 \\ -0.8538 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4875 \\ 1.0052 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5612 \\ 0.8399 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6205 \\ 0.9913 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,6}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6205 \\ 0.9913 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,6}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5641 \\ 0.9012 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 0, m = 6$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{0,7}^{1*} = -(I + pB)U_{0,6}^{1*} + (I - pA)U_{0,6}^{0} + (I + pA)U_{1,6}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,7}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5641 \\ 0.9012 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5646 \\ 0.8253 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6645 \\ 0.9252 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5077 \\ -0.8111 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5950 \\ 0.9339 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6241 \\ 0.8066 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7114 \\ 0.9294 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7114 \\ 0.9294 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6467 \\ 0.8449 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=0, m=7$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{0,8}^{1*} = -(I+pB)U_{0,7}^{1*} + (I-pA)U_{0,7}^{0} + (I+pA)U_{1,7}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,8}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6467 \\ 0.8449 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6442 \\ 0.7648 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7441 \\ 0.8647 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5820 \\ -0.7604 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6966 \\ 0.8533 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6818 \\ 0.7662 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7964 \\ 0.8591 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7964 \\ 0.8591 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7240 \\ 0.7810 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=0, m=8$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{0,9}^{1*} = -(I+pB)U_{0,8}^{1*} + (I-pA)U_{0,8}^{0} + (I+pA)U_{1,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7240 \\ 0.7810 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7174 \\ 0.6967 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8172 \\ 0.7965 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6516 \\ -0.7029 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7912 \\ 0.7643 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7334 \\ 0.7189 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8730 \\ 0.7803 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8730 \\ 0.7803 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{0,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7936 \\ 0.7094 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 0, m = 9$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{0,10}^{1*} = -(I + pB)U_{0,9}^{1*} + (I - pA)U_{0,9}^{0} + (I + pA)U_{1,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7936 \\ 0.7094 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7833 \\ 0.6216 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8832 \\ 0.7214 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7142 \\ -0.6385 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8778 \\ 0.6676 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7787 \\ 0.6654 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9423 \\ 0.6945 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{0,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9423 \\ 0.6945 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{0,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8566 \\ 0.6314 \end{Bmatrix}$

2) หาค่า $U_{1,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$4pBU_{1,0}^{1*}$

$$= (I + pB)[(I - pA)U_{1,0}^{0} + (I + pA)U_{2,0}^{0}] - (I - pB)[(I + pA)U_{1,0}^{1} + (I - pA)U_{2,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_{1,0}^{1*}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.0998 \\ 1.0998 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1987 \\ 1.1987 \end{Bmatrix}\right)$$

$$-\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.0799 \\ 1.0898 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1789 \\ 1.1888 \end{Bmatrix}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{1,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.0098 \\ 1.3098 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2788 \\ 0.9788 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.1729 \\ 0.8798 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0958 \\ 1.4087 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2886 \\ 2.2886 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2687 \\ 2.2885 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.2597 \\ 2.0597 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.2956 \\ 2.5174 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0359 \\ -0.4577 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{1,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.0359 \\ -0.4577 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.0898 \\ 1.1443 \end{Bmatrix}$

ให้ $n = 0, l = 1, m = 0$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,1}^{1*} = -(I + pB)U_{1,0}^{1*} + (I - pA)U_{1,0}^{0} + (I + pA)U_{2,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0898 \\ 1.1443 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0998 \\ 1.0998 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1987 \\ 1.1987 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.0808 \\ -1.0299 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0098 \\ 1.3098 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2788 \\ 0.9788 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2078 \\ 1.2587 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.2078 \\ 1.2587 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{1,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.1889 \\ 1.1443 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 1$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,2}^{1*} = -(I + pB)U_{1,1}^{1*} + (I - pA)U_{1,1}^{0} + (I + pA)U_{2,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1889 \\ 1.1443 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1997 \\ 1.0948 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2985 \\ 1.1937 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.1700 \\ -1.0299 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1302 \\ 1.2938 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3582 \\ 0.9848 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3184 \\ 1.2487 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.3184 \\ 1.2487 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.2895 \\ 1.1352 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,3}^{1*} = -(I + pB)U_{1,2}^{1*} + (I - pA)U_{1,2}^{0} + (I + pA)U_{2,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2895 \\ 1.1352 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2985 \\ 1.0799 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3973 \\ 1.1787 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.2606 \\ -1.0217 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2502 \\ 1.2660 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4357 \\ 0.9827 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4253 \\ 1.2270 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,3}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.4253 \\ 1.2270 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,3}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.3866 \\ 1.1155 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,4}^{1^*} = -(I + pB)U_{1,3}^{1^*} + (I - pA)U_{1,3}^{0} + (I + pA)U_{2,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,4}^{1^*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3866 \\ 1.1155 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3954 \\ 1.0552 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4942 \\ 1.1540 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.3479 \\ -1.0040 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3690 \\ 1.2267 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5108 \\ 0.9726 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5319 \\ 1.1953 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,4}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.5319 \\ 1.1953 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,4}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.4835 \\ 1.0866 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,5}^{1^*} = -(I + pB)U_{1,4}^{1^*} + (I - pA)U_{1,4}^{0} + (I + pA)U_{2,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,5}^{1^*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4835 \\ 1.0866 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4893 \\ 1.0209 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5881 \\ 1.1197 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.4352 \\ -0.9779 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4851 \\ 1.1762 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5825 \\ 0.9546 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6324 \\ 1.1529 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,5}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.6324 \\ 1.1529 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,5}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.5749 \\ 1.0481 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 5$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,6}^{1^*} = -(I + pB)U_{1,5}^{1^*} + (I - pA)U_{1,5}^{0} + (I + pA)U_{2,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,6}^{1^*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5749 \\ 1.0481 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5793 \\ 0.9774 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6781 \\ 1.0763 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5174 \\ -0.9433 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5974 \\ 1.1150 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6501 \\ 0.9289 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7301 \\ 1.1006 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,6}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.7301 \\ 1.1006 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,6}^{1^*} = \begin{Bmatrix} 0.6637 \\ 1.0005 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 6$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,7}^{1^*} = -(I + pB)U_{1,6}^{1^*} + (I - pA)U_{1,6}^{0} + (I + pA)U_{2,6}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,7}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6637 \\ 1.0005 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6645 \\ 0.9252 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7633 \\ 1.0240 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5973 \\ -0.9005 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7049 \\ 1.0438 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7130 \\ 0.8955 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8206 \\ 1.0388 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7460 \\ 0.9444 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7460 \\ 0.9444 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 7$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{1,8}^{1*} = -(I + pB)U_{1,7}^{1*} + (I - pA)U_{1,7}^{0} + (I + pA)U_{2,7}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,8}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7460 \\ 0.9444 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7441 \\ 0.8647 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8429 \\ 0.9635 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6714 \\ -0.8500 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8065 \\ 0.9632 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7707 \\ 0.8551 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9058 \\ 0.9683 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9058 \\ 0.9683 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8235 \\ 0.8803 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=1, m=8$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{1,9}^{1*} = -(I+pB)U_{1,8}^{1*} + (I-pA)U_{1,8}^{0} + (I+pA)U_{2,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8235 \\ 0.8803 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8172 \\ 0.7965 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9160 \\ 0.8954 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7412 \\ -0.7923 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9010 \\ 0.8741 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8223 \\ 0.8079 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9821 \\ 0.8897 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9821 \\ 0.8897 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8928 \\ 0.8088 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=1, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{1,10}^{1*} = -(I+pB)U_{1,9}^{1*} + (I-pA)U_{1,9}^{0} + (I+pA)U_{2,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8928 \\ 0.8088 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8832 \\ 0.7214 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9820 \\ 0.8203 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8035 \\ -0.7279 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9877 \\ 0.7774 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8676 \\ 0.7544 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0518 \\ 0.8039 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{1,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0518 \\ 0.8039 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{1,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9562 \\ 0.7308 \end{Bmatrix}$

3) หาค่า $U_{2,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$4pBU_{2,0}^{1*}$

$$= (I+pB)[(I-pA)U_{2,0}^{0} + (I+pA)U_{3,0}^{0}] - (I-pB)[(I+pA)U_{2,0}^{1} + (I-pA)U_{3,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_{2,0}^{1*}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1987 \\ 1.1987 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2955 \\ 1.2955 \end{Bmatrix} \right)$$

$$- \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1789 \\ 1.1888 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2760 \\ 1.2859 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{2,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.1186 \\ 1.4186 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3660 \\ 1.0660 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.2620 \\ 0.9689 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2026 \\ 1.5155 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4846 \\ 2.4846 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4646 \\ 2.4844 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.4361 \\ 2.2361 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.5111 \\ 2.7328 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{2,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.0750 \\ -0.4967 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.1875 \\ 1.2418 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $n=0, l=2, m=0$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{2,1}^{1*} = -(I+pB)U_{2,0}^{1*} + (I-pA)U_{2,0}^{0} + (I+pA)U_{3,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1875 \\ 1.2418 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.1987 \\ 1.1987 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2955 \\ 1.2955 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.1688 \\ -1.1176 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.1186 \\ 1.4186 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3660 \\ 1.0660 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3158 \\ 1.3670 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.3158 \\ 1.3670 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.2871 \\ 1.2427 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=2, m=1$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{2,2}^{1*} = -(I+pB)U_{2,1}^{1*} + (I-pA)U_{2,1}^{0} + (I+pA)U_{3,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2871 \\ 1.2427 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2985 \\ 1.1937 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3954 \\ 1.2905 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.2584 \\ -1.1184 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2388 \\ 1.4026 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4454 \\ 1.0719 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4258 \\ 1.3561 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.4258 \\ 1.3561 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{2,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1.2328 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{2,3}^{1*} = -(I + pB)U_{2,2}^{1*} + (I - pA)U_{2,2}^{0} + (I + pA)U_{3,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1.2328 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3973 \\ 1.1787 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4942 \\ 1.2756 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.3484 \\ -1.1095 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3588 \\ 1.3747 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5229 \\ 1.0699 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5333 \\ 1.3351 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5333 \\ 1.3351 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.4848 \\ 1.2137 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{2,4}^{1*} = -(I + pB)U_{2,3}^{1*} + (I - pA)U_{2,3}^{0} + (I + pA)U_{3,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4848 \\ 1.2137 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4942 \\ 1.1540 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5910 \\ 1.2509 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4363 \\ -1.0923 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4776 \\ 1.3353 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5979 \\ 1.0598 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6392 \\ 1.3028 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6392 \\ 1.3028 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5811 \\ 1.1844 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{2,5}^{1*} = -(I + pB)U_{2,4}^{1*} + (I - pA)U_{2,4}^{0} + (I + pA)U_{3,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5811 \\ 1.1844 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5881 \\ 1.1197 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6849 \\ 1.2166 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5230 \\ -1.0660 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5938 \\ 1.2848 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6696 \\ 1.0418 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7404 \\ 1.2606 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7404 \\ 1.2606 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6731 \\ 1.1460 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 5$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{2,6}^{1*} = -(I + pB)U_{2,5}^{1*} + (I - pA)U_{2,5}^{0} + (I + pA)U_{3,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,6}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6731 \\ 1.1460 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6781 \\ 1.0763 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7749 \\ 1.1731 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.6058 \\ -1.0314 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7061 \\ 1.2238 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7372 \\ 1.0160 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8375 \\ 1.2084 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,6}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8375 \\ 1.2084 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,6}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7614 \\ 1.0985 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 6$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{2,7}^{1*} = -(I + pB)U_{2,6}^{1*} + (I - pA)U_{2,6}^{0} + (I + pA)U_{3,6}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,7}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7614 \\ 1.0985 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7633 \\ 1.0240 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8602 \\ 1.1209 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6853 \\ -0.9887 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8136 \\ 1.1525 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8003 \\ 0.9827 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9286 \\ 1.1465 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9286 \\ 1.1465 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8442 \\ 1.0423 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 7$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{2,8}^{1*} = -(I + pB)U_{2,7}^{1*} + (I - pA)U_{2,7}^{0} + (I + pA)U_{3,7}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,8}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8442 \\ 1.0423 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8429 \\ 0.9635 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9397 \\ 1.0604 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7598 \\ -0.9381 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9151 \\ 1.0719 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8578 \\ 0.9423 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0131 \\ 1.0761 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0131 \\ 1.0761 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9210 \\ 0.9783 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 8$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{2,9}^{1*} = -(I + pB)U_{2,8}^{1*} + (I - pA)U_{2,8}^{0} + (I + pA)U_{3,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9210 \\ 0.9783 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9160 \\ 0.8954 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0129 \\ 0.9922 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8289 \\ -0.8805 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0097 \\ 0.9829 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9095 \\ 0.8951 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0903 \\ 0.9975 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{2,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0903 \\ 0.9975 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9912 \\ 0.9068 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=2, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U^{1*}_{2,10} = -(I+pB)U^{1*}_{2,9} + (I-pA)U^{0}_{2,9} + (I+pA)U^{0}_{3,9}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U^{1*}_{2,10}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9912 \\ 0.9068 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9820 \\ 0.8203 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0788 \\ 0.9171 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8921 \\ -0.8161 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0964 \\ 0.8862 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9548 \\ 0.8416 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1591 \\ 0.9117 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U^{1*}_{2,10} = \begin{Bmatrix} 1.1591 \\ 0.9117 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1*}_{2,10} = \begin{Bmatrix} 1.0537 \\ 0.8288 \end{Bmatrix}$

4) หาค่า $U^{1*}_{3,0}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU^{1*}_{3,0}$$

$$= (I+pB)[(I-pA)U^{0}_{3,0} + (I+pA)U^{0}_{4,0}] - (I-pB)[(I+pA)U^{1}_{3,0} + (I-pA)U^{1}_{4,0}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U^{1*}_{3,0}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2955 \\ 1.2955 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3894 \\ 1.3894 \end{Bmatrix}\right)$$

$$-\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.2760 \\ 1.2859 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3702 \\ 1.3801 \end{Bmatrix}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{3,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.2251 \\ 1.5251 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4505 \\ 1.1505 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.3494 \\ 1.0563 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3062 \\ 1.6191 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6756 \\ 2.6756 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6556 \\ 2.6754 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.6080 \\ 2.4080 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.7212 \\ 2.9429 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1132 \\ -0.5349 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{3,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.1132 \\ -0.5349 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.2830 \\ 1.3373 \end{Bmatrix}$

ให้ $n = 0, l = 3, m = 0$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{3,1}^{1*} = -(I + pB)U_{3,0}^{1*} + (I - pA)U_{3,0}^{0} + (I + pA)U_{4,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2830 \\ 1.3373 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2955 \\ 1.2955 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3894 \\ 1.3894 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.2547 \\ -1.2036 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2251 \\ 1.5251 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4505 \\ 1.1505 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4209 \\ 1.4720 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.4209 \\ 1.4720 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{3,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.3826 \\ 1.3382 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 1$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{3,2}^{1*} = -(I + pB)U_{3,1}^{1*} + (I - pA)U_{3,1}^{0} + (I + pA)U_{4,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3826 \\ 1.3382 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3954 \\ 1.2905 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4893 \\ 1.3844 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.3443 \\ -1.2044 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3454 \\ 1.5091 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5299 \\ 1.1565 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5310 \\ 1.4612 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5310 \\ 1.4612 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.4827 \\ 1.3284 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{3,3}^{1*} = -(I + pB)U_{3,2}^{1*} + (I - pA)U_{3,2}^{0} + (I + pA)U_{4,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4827 \\ 1.3284 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4942 \\ 1.2756 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5881 \\ 1.3695 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4344 \\ -1.1956 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4655 \\ 1.4813 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6074 \\ 1.1544 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6385 \\ 1.4401 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6385 \\ 1.4401 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5805 \\ 1.3092 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{3,4}^{1*} = -(I + pB)U_{3,3}^{1*} + (I - pA)U_{3,3}^{0} + (I + pA)U_{4,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5805 \\ 1.3092 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5910 \\ 1.2509 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6849 \\ 1.3448 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5225 \\ -1.1783 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5841 \\ 1.4420 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6824 \\ 1.1443 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7440 \\ 1.4080 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7440 \\ 1.4080 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6764 \\ 1.2800 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{3,5}^{1*} = -(I + pB)U_{3,4}^{1*} + (I - pA)U_{3,4}^{0} + (I + pA)U_{4,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6764 \\ 1.2800 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6849 \\ 1.2166 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7788 \\ 1.3105 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-0.6088\\-1.1520\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.7002\\1.3914\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.7541\\1.1263\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.8455\\1.3657\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{3,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.8455\\1.3657\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.7686\\1.2415\end{Bmatrix}$

$n=0, l=3, m=5$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{3,6}^{1*}=-(I+pB)U_{3,5}^{1*}+(I-pA)U_{3,5}^{0}+(I+pA)U_{4,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{3,6}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.7686\\1.2415\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.7749\\1.1731\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8688\\1.2670\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.6917\\-1.1174\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.8126\\1.3302\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.8217\\1.1005\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.9426\\1.3133\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{3,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.9426\\1.3133\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.8569\\1.1939\end{Bmatrix}$

$n=0, l=3, m=6$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{3,7}^{1*}=-(I+pB)U_{3,6}^{1*}+(I-pA)U_{3,6}^{0}+(I+pA)U_{4,6}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,7}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8569 \\ 1.1939 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8602 \\ 1.1209 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9541 \\ 1.2148 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7712 \\ -1.0745 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9202 \\ 1.2591 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8848 \\ 1.0673 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0338 \\ 1.2519 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0338 \\ 1.2519 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9398 \\ 1.1381 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 7$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{3,8}^{1*} = -(I + pB)U_{3,7}^{1*} + (I - pA)U_{3,7}^{0} + (I + pA)U_{4,7}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,8}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9398 \\ 1.1381 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9397 \\ 1.0604 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0336 \\ 1.1543 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8458 \\ -1.0243 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0216 \\ 1.1785 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9423 \\ 1.0268 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1181 \\ 1.1810 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1181 \\ 1.1810 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0165 \\ 1.0736 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=3, m=8$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{3,9}^{1*} = -(I+pB)U_{3,8}^{1*} + (I-pA)U_{3,8}^{0} + (I+pA)U_{4,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0165 \\ 1.0736 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0129 \\ 0.9922 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1068 \\ 1.0861 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.9149 \\ -0.9662 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1163 \\ 1.0894 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9941 \\ 0.9796 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1955 \\ 1.1028 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1955 \\ 1.1028 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0868 \\ 1.0025 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=3, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{3,10}^{1*} = -(I+pB)U_{3,9}^{1*} + (I-pA)U_{3,9}^{0} + (I+pA)U_{4,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0868 \\ 1.0025 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0788 \\ 0.9171 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1727 \\ 1.0110 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.9781 \\ -0.9023 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2029 \\ 0.9926 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0393 \\ 0.9261 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2641 \\ 1.0164 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{3,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2641 \\ 1.0164 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{3,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1492 \\ 0.9240 \end{Bmatrix}$

5) หาค่า $U_{4,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU_{4,0}^{1*}$$

$$= (I+pB)[(I-pA)U_{4,0}^{0} + (I+pA)U_{5,0}^{0}] - (I-pB)[(I+pA)U_{4,0}^{1} + (I-pA)U_{5,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_{4,0}^{1*}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3894 \\ 1.3894 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4794 \\ 1.4794 \end{Bmatrix} \right)$$

$$- \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3702 \\ 1.3801 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4606 \\ 1.4706 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{4,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.3283 \\ 1.6283 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5315 \\ 1.2315 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.4342 \\ 1.1411 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4057 \\ 1.7187 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8598 \\ 2.8598 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8399 \\ 2.8598 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.7738 \\ 2.5738 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.9239 \\ 3.1458 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1501 \\ -0.5720 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{4,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.1501 \\ -0.5720 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.3753 \\ 1.4300 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $n=0, l=4, m=0$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{4,1}^{1*} = -(I+pB)U_{4,0}^{1*} + (I-pA)U_{4,0}^{0} + (I+pA)U_{5,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3753 \\ 1.4300 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3894 \\ 1.3894 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4794 \\ 1.4794 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.3378 \\ -1.2870 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3283 \\ 1.6283 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5315 \\ 1.2315 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5220 \\ 1.5728 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5220 \\ 1.5728 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.4745 \\ 1.4298 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=4, m=1$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{4,2}^{1*} = -(I+pB)U_{4,1}^{1*} + (I-pA)U_{4,1}^{0} + (I+pA)U_{5,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4745 \\ 1.4298 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4893 \\ 1.3844 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5793 \\ 1.4744 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4271 \\ -1.2868 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4487 \\ 1.6124 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6109 \\ 1.2375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6325 \\ 1.5631 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6325 \\ 1.5631 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{4,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5750 \\ 1.4210 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{4,3}^{1*} = -(I + pB)U_{4,2}^{1*} + (I - pA)U_{4,2}^{0} + (I + pA)U_{5,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5750 \\ 1.4210 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5881 \\ 1.3695 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6781 \\ 1.4595 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5175 \\ -1.2789 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5688 \\ 1.5845 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6884 \\ 1.2354 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7397 \\ 1.5410 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7397 \\ 1.5410 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6725 \\ 1.4009 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{4,4}^{1*} = -(I + pB)U_{4,3}^{1*} + (I - pA)U_{4,3}^{0} + (I + pA)U_{5,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6725 \\ 1.4009 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6849 \\ 1.3448 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7749 \\ 1.4348 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6053 \\ -1.2608 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6874 \\ 1.5453 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7634 \\ 1.2253 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8455 \\ 1.5098 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8455 \\ 1.5098 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7686 \\ 1.3725 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{4,5}^{1*} = -(I + pB)U_{4,4}^{1*} + (I - pA)U_{4,4}^{0} + (I + pA)U_{5,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7686 \\ 1.3725 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7788 \\ 1.3105 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8688 \\ 1.4005 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6917 \\ -1.2353 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8035 \\ 1.4947 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8351 \\ 1.2073 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9469 \\ 1.4667 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9469 \\ 1.4667 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8608 \\ 1.3334 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 5$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{4,6}^{1*} = -(I + pB)U_{4,5}^{1*} + (I - pA)U_{4,5}^{0} + (I + pA)U_{5,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,6}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8608 \\ 1.3334 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8688 \\ 1.2670 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9589 \\ 1.3570 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-0.7747\\-1.2001\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9159\\1.4335\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9028\\1.1815\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.0440\\1.4149\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{4,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.0440\\1.4149\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.9491\\1.2863\end{Bmatrix}$

$n=0, l=4, m=6$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{4,7}^{1*}=-(I+pB)U_{4,6}^{1*}+(I-pA)U_{4,6}^{0}+(I+pA)U_{5,6}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{4,7}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9491\\1.2863\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9541\\1.2148\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0441\\1.3048\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8542\\-1.1577\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0234\\1.3624\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9658\\1.1483\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.1350\\1.3530\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{4,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1350\\1.3530\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.0318\\1.2300\end{Bmatrix}$

$n=0, l=4, m=7$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{4,8}^{1*}=-(I+pB)U_{4,7}^{1*}+(I-pA)U_{4,7}^{0}+(I+pA)U_{5,7}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{4,8}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0318\\ 1.2300\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0336\\ 1.1543\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1236\\ 1.2443\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9286\\ -1.1070\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1249\\ 1.2818\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0233\\ 1.1078\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2196\\ 1.2826\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{4,8}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.2196\\ 1.2826\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,8}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1087\\ 1.1660\end{Bmatrix}$

$n=0, l=4, m=8$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{4,9}^{1*}=-(I+pB)U_{4,8}^{1*}+(I-pA)U_{4,8}^{0}+(I+pA)U_{5,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{4,9}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1087\\ 1.1660\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1068\\ 1.0861\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1968\\ 1.1761\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9978\\ -1.0494\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2196\\ 1.1926\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0751\\ 1.0606\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2969\\ 1.2038\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{4,9}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.2969\\ 1.2038\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,9}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1790\\ 1.0944\end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=4, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{4,10}^{1*} = -(I+pB)U_{4,9}^{1*} + (I-pA)U_{4,9}^{0} + (I+pA)U_{5,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1790 \\ 1.0944 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1727 \\ 1.0110 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2628 \\ 1.1010 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0611 \\ -0.9850 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3061 \\ 1.0959 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1203 \\ 1.0071 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3653 \\ 1.1180 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{4,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.3653 \\ 1.1180 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2412 \\ 1.0164 \end{Bmatrix}$

6) หาค่า $U_{5,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU_{5,0}^{1*}$$

$$= (I+pB)[(I-pA)U_{5,0}^{0} + (I+pA)U_{6,0}^{0}] - (I-pB)[(I+pA)U_{5,0}^{1} + (I-pA)U_{6,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_{5,0}^{1*}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4794 \\ 1.4794 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5646 \\ 1.5646 \end{Bmatrix}\right)$$

$$- \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4606 \\ 1.4706 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5464 \\ 1.5563 \end{Bmatrix}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{5,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.4273 \\ 1.7273 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6081 \\ 1.3081 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.5155 \\ 1.2225 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5001 \\ 1.8129 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0354 \\ 3.0354 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0156 \\ 3.0354 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.9319 \\ 2.7319 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.1172 \\ 3.3389 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.1853 \\ -0.6070 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{5,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.1853 \\ -0.6070 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.4633 \\ 1.5175 \end{Bmatrix}$

ให้ $n = 0, l = 5, m = 0$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{5,1}^{1*} = -(I + pB)U_{5,0}^{1*} + (I - pA)U_{5,0}^{0} + (I + pA)U_{6,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4633 \\ 1.5175 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4794 \\ 1.4794 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5646 \\ 1.5646 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4170 \\ -1.3658 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4273 \\ 1.7273 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6081 \\ 1.3081 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6184 \\ 1.6696 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6184 \\ 1.6696 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{5,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5622 \\ 1.5178 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 5, m = 1$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{5,2}^{1*} = -(I + pB)U_{5,1}^{1*} + (I - pA)U_{5,1}^{0} + (I + pA)U_{6,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5622 \\ 1.5178 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5793 \\ 1.4744 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6645 \\ 1.5596 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5060 \\ -1.3660 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5477 \\ 1.7114 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6876 \\ 1.3141 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7293 \\ 1.6595 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7293 \\ 1.6595 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6630 \\ 1.5086 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 5, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{5,3}^{1*} = -(I + pB)U_{5,2}^{1*} + (I - pA)U_{5,2}^{0} + (I + pA)U_{6,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6630 \\ 1.5086 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6781 \\ 1.4595 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7633 \\ 1.5447 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5967 \\ -1.3577 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6678 \\ 1.6836 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7651 \\ 1.3121 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8362 \\ 1.6380 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8362 \\ 1.6380 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7602 \\ 1.4891 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 5, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{5,4}^{1*} = -(I + pB)U_{5,3}^{1*} + (I - pA)U_{5,3}^{0} + (I + pA)U_{6,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7602 \\ 1.4891 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7749 \\ 1.4348 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8602 \\ 1.5200 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6842 \\ -1.3402 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7864 \\ 1.6443 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8402 \\ 1.3020 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9424 \\ 1.6061 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9424 \\ 1.6061 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8567 \\ 1.4601 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 5, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{5,5}^{1*} = -(I + pB)U_{5,4}^{1*} + (I - pA)U_{5,4}^{0} + (I + pA)U_{6,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8567 \\ 1.4601 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8688 \\ 1.4005 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9541 \\ 1.4857 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-0.7710\\-1.3141\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9025\\1.5937\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9119\\1.2840\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.0434\\1.5636\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{5,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.0434\\1.5636\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.9485\\1.4215\end{Bmatrix}$

$n=0, l=5, m=5$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{5,6}^{1*}=-(I+pB)U_{5,5}^{1*}+(I-pA)U_{5,5}^{0}+(I+pA)U_{6,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{5,6}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9485\\1.4215\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9589\\1.3570\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0441\\1.4422\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8537\\-1.2794\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0150\\1.5325\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9795\\1.2582\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.1408\\1.5113\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{5,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1408\\1.5113\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.0371\\1.3739\end{Bmatrix}$

$n=0, l=5, m=6$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{5,7}^{1*}=-(I+pB)U_{5,6}^{1*}+(I-pA)U_{5,6}^{0}+(I+pA)U_{6,6}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{5,7}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0371\\ 1.3739\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0441\\ 1.3048\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1293\\ 1.3900\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9334\\ -1.2365\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1224\\ 1.4614\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0424\\ 1.2249\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2314\\ 1.4498\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{5,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.2314\\ 1.4498\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1195\\ 1.3180\end{Bmatrix}$

$n=0, l=5, m=7$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{5,8}^{1*}=-(I+pB)U_{5,7}^{1*}+(I-pA)U_{5,7}^{0}+(I+pA)U_{6,7}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{5,8}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1195\\ 1.3180\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1236\\ 1.2443\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2089\\ 1.3295\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.0076\\ -1.1862\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2239\\ 1.3808\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1001\\ 1.1845\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.3164\\ 1.3791\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{5,8}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.3164\\ 1.3791\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,8}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1967\\ 1.2537\end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=5, m=8$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{5,9}^{1*} = -(I+pB)U_{5,8}^{1*} + (I-pA)U_{5,8}^{0} + (I+pA)U_{6,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1967 \\ 1.2537 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1968 \\ 1.1761 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2820 \\ 1.2613 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0770 \\ -1.1283 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3186 \\ 1.2916 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1517 \\ 1.1372 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3933 \\ 1.3005 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.3933 \\ 1.3005 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2666 \\ 1.1823 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=5, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{5,10}^{1*} = -(I+pB)U_{5,9}^{1*} + (I-pA)U_{5,9}^{0} + (I+pA)U_{6,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2666 \\ 1.1823 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2628 \\ 1.1010 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3480 \\ 1.1863 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.1399 \\ -1.0641 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4053 \\ 1.1949 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1970 \\ 1.0838 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.4624 \\ 1.2146 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{5,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4624 \\ 1.2146 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{5,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.3295 \\ 1.1042 \end{Bmatrix}$

7) หาค่า $U_{6,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU_{6,0}^{1*}$$

$$= (I+pB)[(I-pA)U_{6,0}^{0} + (I+pA)U_{7,0}^{0}] - (I-pB)[(I+pA)U_{6,0}^{1} + (I-pA)U_{7,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_{6,0}^{1*}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5646 \\ 1.5646 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6442 \\ 1.6442 \end{Bmatrix} \right)$$

$$- \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5464 \\ 1.5563 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6265 \\ 1.6365 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{6,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.5211 \\ 1.8211 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6798 \\ 1.3798 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.5928 \\ 1.2997 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5882 \\ 1.9012 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2009 \\ 3.2009 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1810 \\ 3.2009 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.0808 \\ 2.8808 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.2991 \\ 3.5210 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2183 \\ -0.6402 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{6,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.2183 \\ -0.6402 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.5458 \\ 1.6005 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $n=0, l=6, m=0$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{6,1}^{1*} = -(I+pB)U_{6,0}^{1*} + (I-pA)U_{6,0}^{0} + (I+pA)U_{7,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5458 \\ 1.6005 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5646 \\ 1.5646 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6442 \\ 1.6442 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4912 \\ -1.4405 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5211 \\ 1.8211 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6798 \\ 1.3798 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7097 \\ 1.7604 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7097 \\ 1.7604 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6452 \\ 1.6004 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=6, m=1$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{6,2}^{1*} = -(I+pB)U_{6,1}^{1*} + (I-pA)U_{6,1}^{0} + (I+pA)U_{7,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6452 \\ 1.6004 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6645 \\ 1.5596 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7441 \\ 1.6392 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5807 \\ -1.4404 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6414 \\ 1.8051 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7592 \\ 1.3858 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8199 \\ 1.7505 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8199 \\ 1.7505 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{6,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7454 \\ 1.5914 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{6,3}^{1*} = -(I + pB)U_{6,2}^{1*} + (I - pA)U_{6,2}^{0} + (I + pA)U_{7,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7454 \\ 1.5914 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7633 \\ 1.5447 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8429 \\ 1.6243 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6709 \\ -1.4323 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7615 \\ 1.7773 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8368 \\ 1.3837 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9274 \\ 1.7287 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9274 \\ 1.7287 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8431 \\ 1.5715 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{6,4}^{1*} = -(I + pB)U_{6,3}^{1*} + (I - pA)U_{6,3}^{0} + (I + pA)U_{7,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8431 \\ 1.5715 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8602 \\ 1.5200 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9397 \\ 1.5996 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7588 \\ -1.4144 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8802 \\ 1.7380 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9117 \\ 1.3737 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0331 \\ 1.6973 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0331 \\ 1.6973 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9392 \\ 1.5430 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{6,5}^{1*} = -(I + pB)U_{6,4}^{1*} + (I - pA)U_{6,4}^{0} + (I + pA)U_{7,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9392 \\ 1.5430 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9541 \\ 1.4857 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0336 \\ 1.5653 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8453 \\ -1.3887 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9964 \\ 1.6874 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9834 \\ 1.3556 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1345 \\ 1.6543 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1345 \\ 1.6543 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0314 \\ 1.5039 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 5$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{6,6}^{1*} = -(I + pB)U_{6,5}^{1*} + (I - pA)U_{6,5}^{0} + (I + pA)U_{7,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,6}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0314 \\ 1.5039 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0441 \\ 1.4422 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1236 \\ 1.5218 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.9283 \\ -1.3535 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1087 \\ 1.6262 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0511 \\ 1.3298 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2315 \\ 1.6025 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,6}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2315 \\ 1.6025 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,6}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1195 \\ 1.4568 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 6$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{6,7}^{1*} = -(I + pB)U_{6,6}^{1*} + (I - pA)U_{6,6}^{0} + (I + pA)U_{7,6}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,7}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1195 \\ 1.4568 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1293 \\ 1.3900 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2089 \\ 1.4696 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0076 \\ -1.3111 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2162 \\ 1.5551 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1141 \\ 1.2966 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3227 \\ 1.5406 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.3227 \\ 1.5406 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2025 \\ 1.4005 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 7$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{6,8}^{1*} = -(I + pB)U_{6,7}^{1*} + (I - pA)U_{6,7}^{0} + (I + pA)U_{7,7}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,8}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2025 \\ 1.4005 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2089 \\ 1.3295 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2884 \\ 1.4091 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0823 \\ -1.2605 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3177 \\ 1.4745 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1716 \\ 1.2561 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.4070 \\ 1.4701 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4070 \\ 1.4701 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2791 \\ 1.3365 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 8$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{6,9}^{1*} = -(I + pB)U_{6,8}^{1*} + (I - pA)U_{6,8}^{0} + (I + pA)U_{7,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2791 \\ 1.3365 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2820 \\ 1.2613 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.3616 \\ 1.3409 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.1512 \\ -1.2029 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4123 \\ 1.3854 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2234 \\ 1.2089 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.4845 \\ 1.3914 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4845 \\ 1.3914 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.3495 \\ 1.2649 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=6, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{6,10}^{1*} = -(I+pB)U_{6,9}^{1*} + (I-pA)U_{6,9}^{0} + (I+pA)U_{7,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3495 \\ 1.2649 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3480 \\ 1.1863 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4275 \\ 1.2658 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.2146 \\ -1.1384 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4990 \\ 1.2888 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2686 \\ 1.1554 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5530 \\ 1.3058 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{6,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.5530 \\ 1.3058 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4118 \\ 1.1871 \end{Bmatrix}$

8) หาค่า $U_{7,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU_{7,0}^{1*}$$

$$= (I+pB)[(I-pA)U_{7,0}^{0} + (I+pA)U_{8,0}^{0}] - (I-pB)[(I+pA)U_{7,0}^{1} + (I-pA)U_{8,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_{7,0}^{1*}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6442 \\ 1.6442 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7174 \\ 1.7174 \end{Bmatrix}\right)$$

$$- \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6265 \\ 1.6365 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7004 \\ 1.7103 \end{Bmatrix}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{7,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.6086 \\ 1.9086 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7457 \\ 1.4457 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.6649 \\ 1.3719 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6695 \\ 1.9823 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.3543 \\ 3.3543 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.3344 \\ 3.3542 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.2189 \\ 3.0189 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.4678 \\ 3.6896 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2489 \\ -0.6707 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{7,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.2489 \\ -0.6707 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6223 \\ 1.6768 \end{Bmatrix}$

ให้ $n = 0, l = 7, m = 0$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{7,1}^{1*} = -(I + pB)U_{7,0}^{1*} + (I - pA)U_{7,0}^{0} + (I + pA)U_{8,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6223 \\ 1.6768 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6442 \\ 1.6442 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7174 \\ 1.7174 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5601 \\ -1.5091 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6086 \\ 1.9086 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7457 \\ 1.4457 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7942 \\ 1.8452 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7942 \\ 1.8452 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7220 \\ 1.6775 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 7, m = 1$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{7,2}^{1*} = -(I + pB)U_{7,1}^{1*} + (I - pA)U_{7,1}^{0} + (I + pA)U_{8,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7220 \\ 1.6775 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7441 \\ 1.6392 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8172 \\ 1.7124 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6498 \\ -1.5098 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7290 \\ 1.8926 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8250 \\ 1.4516 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9042 \\ 1.8344 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9042 \\ 1.8344 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8220 \\ 1.6676 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 7, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{7,3}^{1*} = -(I + pB)U_{7,2}^{1*} + (I - pA)U_{7,2}^{0} + (I + pA)U_{8,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8220 \\ 1.6676 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8429 \\ 1.6243 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9160 \\ 1.6974 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7398 \\ -1.5008 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8491 \\ 1.8649 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9025 \\ 1.4495 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0118 \\ 1.8136 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0118 \\ 1.8136 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9198 \\ 1.6487 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 7, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{7,4}^{1*} = -(I + pB)U_{7,3}^{1*} + (I - pA)U_{7,3}^{0} + (I + pA)U_{8,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9198 \\ 1.6487 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9397 \\ 1.5996 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0129 \\ 1.6727 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8278 \\ -1.4838 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9677 \\ 1.8256 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9776 \\ 1.4395 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1175 \\ 1.7813 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1175 \\ 1.7813 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0159 \\ 1.6194 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 7, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{7,5}^{1*} = -(I + pB)U_{7,4}^{1*} + (I - pA)U_{7,4}^{0} + (I + pA)U_{8,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0159 \\ 1.6194 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0336 \\ 1.5653 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1068 \\ 1.6384 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-0.9143\\-1.4575\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0838\\1.7750\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0493\\1.4214\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2188\\1.7389\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{7,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.2188\\1.7389\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1080\\1.5808\end{Bmatrix}$

$n=0, l=7, m=5$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{7,6}^{1*}=-(I+pB)U_{7,5}^{1*}+(I-pA)U_{7,5}^{0}+(I+pA)U_{8,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{7,6}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1080\\1.5808\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1236\\1.5218\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1968\\1.5949\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9972\\-1.4227\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1961\\1.7138\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1169\\1.3956\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.3158\\1.6867\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{7,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.3158\\1.6867\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.1962\\1.5334\end{Bmatrix}$

$n=0, l=7, m=6$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{7,7}^{1*}=-(I+pB)U_{7,6}^{1*}+(I-pA)U_{7,6}^{0}+(I+pA)U_{8,6}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{7,7}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1962\\ 1.5334\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2089\\ 1.4696\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2820\\ 1.5427\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.0766\\ -1.3801\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.3037\\ 1.6426\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1799\\ 1.3624\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.4070\\ 1.6249\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{7,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.4070\\ 1.6249\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.2791\\ 1.4772\end{Bmatrix}$

$n=0, l=7, m=7$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{7,8}^{1*}=-(I+pB)U_{7,7}^{1*}+(I-pA)U_{7,7}^{0}+(I+pA)U_{8,7}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{7,8}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2791\\ 1.4772\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2884\\ 1.4091\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3616\\ 1.4822\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.1512\\ -1.3295\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.4052\\ 1.5621\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2375\\ 1.3219\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.4915\\ 1.5545\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}U_{7,8}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.4915\\ 1.5545\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,8}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.3559\\ 1.4132\end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=7, m=8$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{7,9}^{1*} = -(I+pB)U_{7,8}^{1*} + (I-pA)U_{7,8}^{0} + (I+pA)U_{8,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3559 \\ 1.4132 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3616 \\ 1.3409 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4347 \\ 1.4141 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.2203 \\ -1.2719 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4998 \\ 1.4729 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2892 \\ 1.2748 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5687 \\ 1.4758 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.5687 \\ 1.4758 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{7,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4261 \\ 1.3416 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=7, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{7,10}^{1*} = -(I+pB)U_{7,9}^{1*} + (I-pA)U_{7,9}^{0} + (I+pA)U_{8,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4261 \\ 1.3416 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4275 \\ 1.2658 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5007 \\ 1.3390 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.2835 \\ -1.2074 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.5864 \\ 1.3762 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3345 \\ 1.2213 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6374 \\ 1.3901 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{7,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.6374 \\ 1.3901 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4885 \\ 1.2637 \end{Bmatrix}$

9) หาค่า $U_{8,0}^{1*}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU_{8,0}^{1*}$$

$$= (I+pB)[(I-pA)U_{8,0}^{0} + (I+pA)U_{9,0}^{0}] - (I-pB)[(I+pA)U_{8,0}^{1} + (I-pA)U_{9,0}^{1}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U_{8,0}^{1*}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7174 \\ 1.7174 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7833 \\ 1.7833 \end{Bmatrix} \right)$$

$$- \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7004 \\ 1.7103 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7671 \\ 1.7770 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{8,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.6891 \\ 1.9891 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8050 \\ 1.5050 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.7314 \\ 1.4383 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7428 \\ 2.0557 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.4941 \\ 3.4941 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.4742 \\ 3.4940 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.3447 \\ 3.1447 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.6216 \\ 3.8434 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.2769 \\ -0.6987 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{8,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.2769 \\ -0.6987 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.6923 \\ 1.7468 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ให้ $n=0, l=8, m=0$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{8,1}^{1*} = -(I+pB)U_{8,0}^{1*} + (I-pA)U_{8,0}^{0} + (I+pA)U_{9,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6923 \\ 1.7468 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7174 \\ 1.7174 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7833 \\ 1.7833 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6231 \\ -1.5721 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6891 \\ 1.9891 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8050 \\ 1.5050 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8710 \\ 1.9220 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8710 \\ 1.9220 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7918 \\ 1.7473 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=8, m=1$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{8,2}^{1*} = -(I+pB)U_{8,1}^{1*} + (I-pA)U_{8,1}^{0} + (I+pA)U_{9,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7918 \\ 1.7473 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8172 \\ 1.7124 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8832 \\ 1.7783 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7126 \\ -1.5726 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8094 \\ 1.9732 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8844 \\ 1.5110 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9812 \\ 1.9116 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9812 \\ 1.9116 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{8,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8920 \\ 1.7378 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 8, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{8,3}^{1*} = -(I + pB)U_{8,2}^{1*} + (I - pA)U_{8,2}^{0} + (I + pA)U_{9,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8920 \\ 1.7378 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9160 \\ 1.6974 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9820 \\ 1.7634 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8028 \\ -1.5640 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9295 \\ 1.9453 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9619 \\ 1.5089 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0886 \\ 1.8902 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0886 \\ 1.8902 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9896 \\ 1.7184 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 8, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{8,4}^{1*} = -(I + pB)U_{8,3}^{1*} + (I - pA)U_{8,3}^{0} + (I + pA)U_{9,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9896 \\ 1.7184 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0129 \\ 1.6727 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0788 \\ 1.7387 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8906 \\ -1.5466 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0482 \\ 1.9060 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0369 \\ 1.4988 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1945 \\ 1.8582 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1945 \\ 1.8582 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0859 \\ 1.6893 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 8, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{8,5}^{1*} = -(I + pB)U_{8,4}^{1*} + (I - pA)U_{8,4}^{0} + (I + pA)U_{9,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0859 \\ 1.6893 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1068 \\ 1.6384 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1727 \\ 1.7044 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.9773 \\ -1.5204 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1643 \\ 1.8554 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1086 \\ 1.4808 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2956 \\ 1.8158 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2956 \\ 1.8158 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,5}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1778 \\ 1.6507 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 8, m = 5$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{8,6}^{1*} = -(I + pB)U_{8,5}^{1*} + (I - pA)U_{8,5}^{0} + (I + pA)U_{9,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,6}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1778 \\ 1.6507 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1968 \\ 1.5949 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2628 \\ 1.6609 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-1.0600\\-1.4856\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2767\\1.7942\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1763\\1.4550\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.3930\\1.7636\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{8,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.3930\\1.7636\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.2664\\1.6033\end{Bmatrix}$

$n=0, l=8, m=6$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{8,7}^{1*}=-(I+pB)U_{8,6}^{1*}+(I-pA)U_{8,6}^{0}+(I+pA)U_{9,6}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{8,7}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2664\\1.6033\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2820\\1.5427\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3480\\1.6087\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.1398\\-1.4430\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.3841\\1.7230\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2393\\1.4218\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.4836\\1.7018\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{8,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.4836\\1.7018\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,7}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.3487\\1.5471\end{Bmatrix}$

$n=0, l=8, m=7$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{8,8}^{1*}=-(I+pB)U_{8,7}^{1*}+(I-pA)U_{8,7}^{0}+(I+pA)U_{9,7}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,8}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3487 \\ 1.5471 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3616 \\ 1.4822 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4275 \\ 1.5482 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.2138 \\ -1.3924 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4857 \\ 1.6425 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2968 \\ 1.3813 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5687 \\ 1.6314 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.5687 \\ 1.6314 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4261 \\ 1.4831 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 8, m = 8$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{8,9}^{1*} = -(I + pB)U_{8,8}^{1*} + (I - pA)U_{8,8}^{0} + (I + pA)U_{9,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4261 \\ 1.4831 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4347 \\ 1.4141 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5007 \\ 1.4800 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.2835 \\ -1.3348 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.5802 \\ 1.5535 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3486 \\ 1.3341 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6453 \\ 1.5528 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{8,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.6453 \\ 1.5528 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4957 \\ 1.4116 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=8, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U^{1*}_{8,10} = -(I+pB)U^{1*}_{8,9} + (I-pA)U^{0}_{8,9} + (I+pA)U^{0}_{9,9}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U^{1*}_{8,10}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4957 \\ 1.4116 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5007 \\ 1.3390 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5667 \\ 1.4049 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.3461 \\ -1.2704 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.6669 \\ 1.4567 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3939 \\ 1.2806 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7147 \\ 1.4669 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U^{1*}_{8,10} = \begin{Bmatrix} 1.7147 \\ 1.4669 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1*}_{8,10} = \begin{Bmatrix} 1.5588 \\ 1.3335 \end{Bmatrix}$

10) หาค่า $U^{1*}_{9,0}$ ได้จากสมการ (3.2)

$$4pBU^{1*}_{9,0}$$

$$= (I+pB)[(I-pA)U^{0}_{9,0} + (I+pA)U^{0}_{10,0}] - (I-pB)[(I+pA)U^{1}_{9,0} + (I-pA)U^{1}_{10,0}]$$

จะได้ $4(0.1)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} U^{1*}_{9,0}$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7833 \\ 1.7833 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 1.8415 \end{Bmatrix}\right)$$

$$- \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7671 \\ 1.7770 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8260 \\ 1.8360 \end{Bmatrix}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{9,0}^{1*}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.7616 \\ 2.0616 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8574 \\ 1.5574 \end{Bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.7914 \\ 1.4983 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8076 \\ 2.1206 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.6190 \\ 3.6190 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.5990 \\ 3.6189 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 1.4571 \\ 3.2571 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1.7589 \\ 3.9808 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.3018 \\ -0.7237 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix} U_{9,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} -0.3018 \\ -0.7237 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,0}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.7545 \\ 1.8093 \end{Bmatrix}$

ให้ $n = 0, l = 9, m = 0$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB) U_{9,1}^{1*} = -(I + pB) U_{9,0}^{1*} + (I - pA) U_{9,0}^{0} + (I + pA) U_{10,0}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,1}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7545 \\ 1.8093 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7833 \\ 1.7833 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8415 \\ 1.8415 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6791 \\ -1.6284 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7616 \\ 2.0616 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8574 \\ 1.5574 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9399 \\ 1.9906 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9399 \\ 1.9906 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{9,1}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.8545 \\ 1.8096 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 9, m = 1$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{9,2}^{1*} = -(I + pB)U_{9,1}^{1*} + (I - pA)U_{9,1}^{0} + (I + pA)U_{10,1}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,2}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8545 \\ 1.8096 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8832 \\ 1.7783 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9413 \\ 1.8365 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7691 \\ -1.6286 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8820 \\ 2.0456 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9367 \\ 1.5633 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0496 \\ 1.9803 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0496 \\ 1.9803 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,2}^{1*} = \begin{Bmatrix} 0.9542 \\ 1.8003 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 9, m = 2$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{9,3}^{1*} = -(I + pB)U_{9,2}^{1*} + (I - pA)U_{9,2}^{0} + (I + pA)U_{10,2}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,3}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9542 \\ 1.8003 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9820 \\ 1.7634 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0401 \\ 1.8215 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8588 \\ -1.6203 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0021 \\ 2.0179 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0142 \\ 1.5612 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1575 \\ 1.9588 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1575 \\ 1.9588 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,3}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.0523 \\ 1.7807 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 9, m = 3$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{9,4}^{1*} = -(I + pB)U_{9,3}^{1*} + (I - pA)U_{9,3}^{0} + (I + pA)U_{10,3}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,4}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0523 \\ 1.7807 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0788 \\ 1.7387 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1370 \\ 1.7968 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.9471 \\ -1.6026 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1207 \\ 1.9786 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0893 \\ 1.5511 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2629 \\ 1.9271 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.2629 \\ 1.9271 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,4}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.1481 \\ 1.7519 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 9, m = 4$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{9,5}^{1*} = -(I + pB)U_{9,4}^{1*} + (I - pA)U_{9,4}^{0} + (I + pA)U_{10,4}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,5}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1481 \\ 1.7519 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.1724 \\ 1.7044 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.2309 \\ 1.7625 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-1.0333\\-1.5767\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2368\\1.9280\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1610\\1.5331\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.3645\\1.8844\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{9,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.3645\\1.8844\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,5}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.2405\\1.7131\end{Bmatrix}$

$n=0, l=9, m=5$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{9,6}^{1*}=-(I+pB)U_{9,5}^{1*}+(I-pA)U_{9,5}^{0}+(I+pA)U_{10,5}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{9,6}^{1*}$

$$=-\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2405\\1.7131\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2628\\1.6609\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3209\\1.7191\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.1165\\-1.5418\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.3493\\1.8668\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2286\\1.5074\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.4614\\1.8324\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}U_{9,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.4614\\1.8324\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,6}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.3285\\1.6658\end{Bmatrix}$

$n=0, l=9, m=6$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{9,7}^{1*}=-(I+pB)U_{9,6}^{1*}+(I-pA)U_{9,6}^{0}+(I+pA)U_{10,6}^{0}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,7}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.3285 \\ 1.6658 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.3480 \\ 1.6087 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.4061 \\ 1.6668 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.1957 \\ -1.4992 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4567 \\ 1.7956 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2916 \\ 1.4741 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5526 \\ 1.7705 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.5526 \\ 1.7705 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,7}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4115 \\ 1.6095 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 9, m = 7$ จากสมการ (3.1)

$$(I - pB)U_{9,8}^{1*} = -(I + pB)U_{9,7}^{1*} + (I - pA)U_{9,7}^{0} + (I + pA)U_{10,7}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,8}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.4115 \\ 1.6095 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.4275 \\ 1.5482 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.4857 \\ 1.6063 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.2704 \\ -1.4486 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.5582 \\ 1.7151 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3492 \\ 1.4336 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6370 \\ 1.7001 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.6370 \\ 1.7001 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,8}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.4882 \\ 1.5455 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=9, m=8$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{9,9}^{1*} = -(I+pB)U_{9,8}^{1*} + (I-pA)U_{9,8}^{0} + (I+pA)U_{10,8}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,9}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4882 \\ 1.5455 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5007 \\ 1.4800 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5588 \\ 1.5382 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.3394 \\ -1.3910 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.6528 \\ 1.6259 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4009 \\ 1.3864 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7143 \\ 1.6213 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.7143 \\ 1.6213 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,9}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.5585 \\ 1.4739 \end{Bmatrix}$

$n=0, l=9, m=9$ จากสมการ (3.1)

$$(I-pB)U_{9,10}^{1*} = -(I+pB)U_{9,9}^{1*} + (I-pA)U_{9,9}^{0} + (I+pA)U_{10,9}^{0}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,10}^{1*}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5585 \\ 1.4739 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.5667 \\ 1.4049 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.6248 \\ 1.4631 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.4027 \\ -1.3265 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.7396 \\ 1.5292 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4452 \\ 1.3330 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.7831 \\ 1.5357 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} U_{9,10}^{1*} = \begin{Bmatrix} 1.7831 \\ 1.5357 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{9,10}^{1*}=\begin{Bmatrix}1.6210\\1.3961\end{Bmatrix}$

<u>ขั้นที่ 2</u> ในทิศทางตามแกน x

1) ให้ $n=0, l=0, m=1$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{1,1}^{1}=-(I+pA)U_{0,1}^{1}+(I-pB)U_{0,1}^{1*}+(I+pB)U_{0,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{1,1}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.0799\\0.9860\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.0896\\1.0448\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.1899\\1.0359\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.1625\\-0.7968\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.0986\\1.1493\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.1709\\0.9323\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.1070\\1.2848\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{1,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.1070\\1.2848\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.1796\\1.0856\end{Bmatrix}$

$n=0, l=1, m=1$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{2,1}^{1}=-(I+pA)U_{1,1}^{1}+(I-pB)U_{1,1}^{1*}+(I+pB)U_{1,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{2,1}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.1796\\1.0856\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.1889\\1.1443\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.2895\\1.1352\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.2522 \\ -0.8864 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2078 \\ 1.2587 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2606 \\ 1.0217 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2162 \\ 1.3940 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.2162 \\ 1.3940 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.2789 \\ 1.1849 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 1$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{3,1}^{1} = -(I + pA)U_{2,1}^{1} + (I - pB)U_{2,1}^{1*} + (I + pB)U_{2,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,1}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2789 \\ 1.1849 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2871 \\ 1.2427 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3871 \\ 1.2328 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.3416 \\ -0.9758 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3158 \\ 1.3670 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3484 \\ 1.1095 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3226 \\ 1.5007 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.3226 \\ 1.5007 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.3757 \\ 1.2819 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 1$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{4,1}^{1} = -(I + pA)U_{3,1}^{1} + (I - pB)U_{3,1}^{1*} + (I + pB)U_{3,2}^{1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,1}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3757 \\ 1.2819 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3826 \\ 1.3382 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4827 \\ 1.3284 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4288 \\ -1.0631 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4209 \\ 1.4720 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4344 \\ 1.1956 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4265 \\ 1.6045 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.4265 \\ 1.6045 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.4701 \\ 1.3763 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 1$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,1}^{1} = -(I + pA)U_{4,1}^{1} + (I - pB)U_{4,1}^{1*} + (I + pB)U_{4,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,1}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4701 \\ 1.3763 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4745 \\ 1.4298 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5750 \\ 1.4210 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5137 \\ -1.1481 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5220 \\ 1.5728 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5175 \\ 1.2789 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5258 \\ 1.7036 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5258 \\ 1.7036 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5604 \\ 1.4664 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=5, m=1$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{6,1}^{1}=-(I+pA)U_{5,1}^{1}+(I-pB)U_{5,1}^{1*}+(I+pB)U_{5,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,1}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5604\\ 1.4664\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5622\\ 1.5178\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.6630\\ 1.5086\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.5950\\ -1.2292\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.6184\\ 1.6696\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.5967\\ 1.3577\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.6201\\ 1.7981\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.6201\\ 1.7981\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.6461\\ 1.5523\end{Bmatrix}$

$n=0, l=6, m=1$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{7,1}^{1}=-(I+pA)U_{6,1}^{1}+(I-pB)U_{6,1}^{1*}+(I+pB)U_{6,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,1}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.6461\\ 1.5523\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.6452\\ 1.6004\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.7454\\ 1.5914\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.6721\\ -1.3065\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.7097\\ 1.7604\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.6709\\ 1.4323\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.7085\\ 1.8862\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.7085\\ 1.8862\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.7264\\1.6324\end{Bmatrix}$

$n=0, l=7, m=1$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,1}^{1}=-(I+pA)U_{7,1}^{1}+(I-pB)U_{7,1}^{1*}+(I+pB)U_{7,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,1}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.7264\\1.6324\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.7220\\1.6775\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8220\\1.6676\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.7444\\-1.3786\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.7942\\1.8453\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.7398\\1.5008\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.7896\\1.9675\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.7896\\1.9675\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,1}^{1}=\begin{Bmatrix}0.8002\\1.7063\end{Bmatrix}$

$n=0, l=8, m=1$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,1}^{1}=-(I+pA)U_{8,1}^{1}+(I-pB)U_{8,1}^{1*}+(I+pB)U_{8,2}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,1}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8002\\1.7063\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.7918\\1.7473\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8920\\1.7378\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8108\\-1.4451\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.8710\\1.9220\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.8028\\1.5640\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.8630\\2.0409\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8630 \\ 2.0409 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8669 \\ 1.7730 \end{Bmatrix}$

2) ให้ $n = 0, l = 0, m = 2$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,2}^{1} = -(I + pA)U_{0,2}^{1} + (I - pB)U_{0,2}^{1*} + (I + pB)U_{0,3}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,2}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1789 \\ 0.9720 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.1899 \\ 1.0359 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2875 \\ 1.0162 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.2403 \\ -0.7955 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2089 \\ 1.1395 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.2588 \\ 0.9146 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.2274 \\ 1.2586 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.2274 \\ 1.2586 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.2788 \\ 1.0721 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 2$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,2}^{1} = -(I + pA)U_{1,2}^{1} + (I - pB)U_{1,2}^{1*} + (I + pB)U_{1,3}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,2}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2788 \\ 1.0721 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2895 \\ 1.1352 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3866 \\ 1.1155 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-0.3303\\-0.8856\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.3185\\1.2487\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.3479\\1.0040\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.3361\\1.3671\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U^{1}_{2,2}=\begin{Bmatrix}0.3361\\1.3671\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1}_{2,2}=\begin{Bmatrix}0.3776\\1.1707\end{Bmatrix}$

$n=0, l=2, m=2$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U^{1}_{3,2}=-(I+pA)U^{1}_{2,2}+(I-pB)U^{1^*}_{2,2}+(I+pB)U^{1^*}_{2,3}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U^{1}_{3,2}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.3776\\1.1707\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.3871\\1.2328\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.4848\\1.2137\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.4192\\-0.9743\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.4258\\1.3561\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.4363\\1.0923\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.4429\\1.4741\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U^{1}_{3,2}=\begin{Bmatrix}0.4429\\1.4741\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1}_{3,2}=\begin{Bmatrix}0.4747\\1.2680\end{Bmatrix}$

$n=0, l=3, m=2$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U^{1}_{4,2}=-(I+pA)U^{1}_{3,2}+(I-pB)U^{1^*}_{3,2}+(I+pB)U^{1^*}_{3,3}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,2}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4747 \\ 1.2680 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.4827 \\ 1.3284 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5805 \\ 1.3092 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5066 \\ -1.0619 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5310 \\ 1.4612 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5225 \\ 1.1783 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5469 \\ 1.5776 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5469 \\ 1.5776 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5693 \\ 1.3621 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 2$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,2}^{1} = -(I + pA)U_{4,2}^{1} + (I - pB)U_{4,2}^{1*} + (I + pB)U_{4,3}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,2}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5693 \\ 1.3621 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.5750 \\ 1.4210 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6725 \\ 1.4009 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5917 \\ -1.1466 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6325 \\ 1.5631 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6053 \\ 1.2608 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6461 \\ 1.6773 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6461 \\ 1.6773 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6595 \\ 1.4527 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n = 0, l = 5, m = 2$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^1_{6,2} = -(I + pA)U^1_{5,2} + (I - pB)U^{1*}_{5,2} + (I + pB)U^{1*}_{5,3}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{6,2}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6595 \\ 1.4527 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6630 \\ 1.5086 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7602 \\ 1.4891 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6729 \\ -1.2281 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7293 \\ 1.6595 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6842 \\ 1.3402 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7406 \\ 1.7716 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{6,2} = \begin{Bmatrix} 0.7406 \\ 1.7716 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^1_{6,2} = \begin{Bmatrix} 0.7454 \\ 1.5384 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 2$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^1_{7,2} = -(I + pA)U^1_{6,2} + (I - pB)U^{1*}_{6,2} + (I + pB)U^{1*}_{6,3}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{7,2}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7454 \\ 1.5384 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7454 \\ 1.5914 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8431 \\ 1.5715 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7502 \\ -1.3053 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8199 \\ 1.7505 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7588 \\ 1.4144 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8285 \\ 1.8596 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{7,2} = \begin{Bmatrix} 0.8285 \\ 1.8596 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,2}^{1}=\begin{Bmatrix}0.8253\\1.6184\end{Bmatrix}$

$n=0,l=7,m=2$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,2}^{1}=-(I+pA)U_{7,2}^{1}+(I-pB)U_{7,2}^{1*}+(I+pB)U_{7,3}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,2}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8253\\1.6184\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8220\\1.6676\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9198\\1.6487\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8221\\-1.3773\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9042\\1.8344\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.8278\\1.4838\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.9099\\1.9409\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,2}^{1}=\begin{Bmatrix}0.9099\\1.9409\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,2}^{1}=\begin{Bmatrix}0.8993\\1.6924\end{Bmatrix}$

$n=0,l=8,m=2$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,2}^{1}=-(I+pA)U_{8,2}^{1}+(I-pB)U_{8,2}^{1*}+(I+pB)U_{8,3}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,2}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8993\\1.6924\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8920\\1.7378\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9896\\1.7184\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8887\\-1.4439\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9812\\1.9116\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.8906\\1.5466\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.9831\\2.0143\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9831 \\ 2.0143 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9658 \\ 1.7591 \end{Bmatrix}$

3) ให้ $n = 0, l = 0, m = 3$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,3}^{1} = -(I + pA)U_{0,3}^{1} + (I - pB)U_{0,3}^{1*} + (I + pB)U_{0,4}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,3}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2760 \\ 0.9482 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.2875 \\ 1.0162 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3837 \\ 0.9872 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.3156 \\ -0.7862 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3163 \\ 1.1178 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.3453 \\ 0.8885 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3460 \\ 1.2201 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.3460 \\ 1.2201 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.3757 \\ 1.0481 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 3$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,3}^{1} = -(I + pA)U_{1,3}^{1} + (I - pB)U_{1,3}^{1*} + (I + pB)U_{1,4}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,3}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3757 \\ 1.0481 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3866 \\ 1.1155 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4835 \\ 1.0866 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$=\begin{Bmatrix}-0.4054\\-0.8761\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.4253\\1.2271\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.4352\\0.9779\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.4551\\1.3289\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U^{1}_{2,3}=\begin{Bmatrix}0.4551\\1.3289\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1}_{2,3}=\begin{Bmatrix}0.4748\\1.1470\end{Bmatrix}$

$n=0, l=2, m=3$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U^{1}_{3,3}=-(I+pA)U^{1}_{2,3}+(I-pB)U^{1^*}_{2,3}+(I+pB)U^{1^*}_{2,4}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U^{1}_{3,3}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.4748\\1.1470\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.4848\\1.2137\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.5811\\1.1844\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.4945\\-0.9651\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.5333\\1.3351\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.5230\\1.0660\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.5618\\1.4360\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U^{1}_{3,3}=\begin{Bmatrix}0.5618\\1.4360\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1}_{3,3}=\begin{Bmatrix}0.5719\\1.2443\end{Bmatrix}$

$n=0, l=3, m=3$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U^{1}_{4,3}=-(I+pA)U^{1}_{3,3}+(I-pB)U^{1^*}_{3,3}+(I+pB)U^{1^*}_{3,4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,3}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5719 \\ 1.2443 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5805 \\ 1.3092 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6764 \\ 1.2800 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5820 \\ -1.0526 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6386 \\ 1.4401 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6088 \\ 1.1520 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6654 \\ 1.5395 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6654 \\ 1.5395 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6660 \\ 1.3384 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 3$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,3}^{1} = -(I + pA)U_{4,3}^{1} + (I - pB)U_{4,3}^{1*} + (I + pB)U_{4,4}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,3}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6660 \\ 1.3384 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6725 \\ 1.4009 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7686 \\ 1.3725 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6666 \\ -1.1373 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7398 \\ 1.5410 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6917 \\ 1.2353 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7649 \\ 1.6390 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7649 \\ 1.6390 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7565 \\ 1.4289 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n = 0, l = 5, m = 3$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^1_{6,3} = -(I + pA)U^1_{5,3} + (I - pB)U^{1*}_{5,3} + (I + pB)U^{1*}_{5,4}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{6,3}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7565 \\ 1.4289 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7602 \\ 1.4891 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8567 \\ 1.4601 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7481 \\ -1.2188 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8362 \\ 1.6380 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7710 \\ 1.3141 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8591 \\ 1.7333 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{6,3} = \begin{Bmatrix} 0.8591 \\ 1.7333 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^1_{6,3} = \begin{Bmatrix} 0.8421 \\ 1.5146 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 3$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^1_{7,3} = -(I + pA)U^1_{6,3} + (I - pB)U^{1*}_{6,3} + (I + pB)U^{1*}_{6,4}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{7,3}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8421 \\ 1.5146 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8431 \\ 1.5715 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9392 \\ 1.5430 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8251 \\ -1.2959 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9274 \\ 1.7287 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8453 \\ 1.3887 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9476 \\ 1.8215 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{7,3} = \begin{Bmatrix} 0.9476 \\ 1.8215 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,3}^{1}=\begin{Bmatrix}0.9226\\1.5948\end{Bmatrix}$

$n=0,l=7,m=3$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,3}^{1}=-(I+pA)U_{7,3}^{1}+(I-pB)U_{7,3}^{1*}+(I+pB)U_{7,4}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,3}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9226\\1.5948\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9198\\1.6487\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0159\\1.6194\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8976\\-1.3681\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0118\\1.8136\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9143\\1.4575\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.0285\\1.9030\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,3}^{1}=\begin{Bmatrix}1.0285\\1.9030\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,3}^{1}=\begin{Bmatrix}0.9962\\1.6688\end{Bmatrix}$

$n=0,l=8,m=3$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,3}^{1}=-(I+pA)U_{8,3}^{1}+(I-pB)U_{8,3}^{1*}+(I+pB)U_{8,4}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,3}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9962\\1.6688\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9896\\1.7184\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0859\\1.6893\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9638\\-1.4347\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0886\\1.8902\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9773\\1.5204\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.1021\\1.9759\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1021 \\ 1.9759 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0630 \\ 1.7352 \end{Bmatrix}$

4) ให้ $n = 0, l = 0, m = 4$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,4}^{1} = -(I + pA)U_{0,4}^{1} + (I - pB)U_{0,4}^{1*} + (I + pB)U_{0,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,4}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3702 \\ 0.9149 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.3837 \\ 0.9872 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4758 \\ 0.9487 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.3877 \\ -0.7689 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4221 \\ 1.0859 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.4282 \\ 0.8538 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.4626 \\ 1.1708 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.4626 \\ 1.1708 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.4701 \\ 1.0148 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 4$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,4}^{1} = -(I + pA)U_{1,4}^{1} + (I - pB)U_{1,4}^{1*} + (I + pB)U_{1,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,4}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4701 \\ 1.0148 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4835 \\ 1.0866 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5749 \\ 1.0481 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.4776 \\ -0.8589 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5319 \\ 1.1953 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5174 \\ 0.9433 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5717 \\ 1.2797 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5717 \\ 1.2797 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5692 \\ 1.1139 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 4$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{3,4}^{1} = -(I + pA)U_{2,4}^{1} + (I - pB)U_{2,4}^{1*} + (I + pB)U_{2,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,4}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5692 \\ 1.1139 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5811 \\ 1.1844 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6731 \\ 1.1460 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5668 \\ -0.9480 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6392 \\ 1.3028 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6058 \\ 1.0314 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6782 \\ 1.3862 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6782 \\ 1.3862 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6661 \\ 1.2107 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 4$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{4,4}^{1} = -(I + pA)U_{3,4}^{1} + (I - pB)U_{3,4}^{1*} + (I + pB)U_{3,5}^{1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,4}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6661 \\ 1.2107 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.6764 \\ 1.2800 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7686 \\ 1.2415 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6540 \\ -1.0352 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7440 \\ 1.4080 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6917 \\ 1.1174 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7817 \\ 1.4902 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7817 \\ 1.4902 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7602 \\ 1.3052 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 4$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,4}^{1} = -(I + pA)U_{4,4}^{1} + (I - pB)U_{4,4}^{1*} + (I + pB)U_{4,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,4}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7602 \\ 1.3052 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7686 \\ 1.3725 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8608 \\ 1.3334 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7387 \\ -1.1202 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8455 \\ 1.5098 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7747 \\ 1.2001 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8815 \\ 1.5897 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8815 \\ 1.5897 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8509 \\ 1.3957 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=5, m=4$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{6,4}^{1}=-(I+pA)U_{5,4}^{1}+(I-pB)U_{5,4}^{1*}+(I+pB)U_{5,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,4}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8509\\ 1.3957\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.8567\\ 1.4601\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9485\\ 1.4215\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8203\\ -1.2017\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9424\\ 1.6061\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.8537\\ 1.2794\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.9758\\ 1.6838\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,4}^{1}=\begin{Bmatrix}0.9758\\ 1.6838\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,4}^{1}=\begin{Bmatrix}0.9366\\ 1.4812\end{Bmatrix}$

$n=0, l=6, m=4$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{7,4}^{1}=-(I+pA)U_{6,4}^{1}+(I-pB)U_{6,4}^{1*}+(I+pB)U_{6,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,4}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9366\\ 1.4812\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9392\\ 1.5430\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0314\\ 1.5039\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8974\\ -1.2786\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0331\\ 1.6973\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9283\\ 1.3535\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.0640\\ 1.7722\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,4}^{1}=\begin{Bmatrix}1.0640\\ 1.7722\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,4}^{1}=\begin{Bmatrix}1.0168\\1.5616\end{Bmatrix}$

$n=0, l=7, m=4$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,4}^{1}=-(I+pA)U_{7,4}^{1}+(I-pB)U_{7,4}^{1*}+(I+pB)U_{7,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,4}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0168\\1.5616\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0159\\1.6194\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1080\\1.5808\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9696\\-1.3510\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1175\\1.7813\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9972\\1.4227\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.1451\\1.8530\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,4}^{1}=\begin{Bmatrix}1.1451\\1.8530\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,4}^{1}=\begin{Bmatrix}1.0905\\1.6350\end{Bmatrix}$

$n=0, l=8, m=4$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,4}^{1}=-(I+pA)U_{8,4}^{1}+(I-pB)U_{8,4}^{1*}+(I+pB)U_{8,5}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,4}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0905\\1.6350\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0859\\1.6893\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1778\\1.6507\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.0359\\-1.4171\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1945\\1.8582\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0600\\1.4856\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2186\\1.9267\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.2186 \\ 1.9267 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,4}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1573 \\ 1.7020 \end{Bmatrix}$

5) ให้ $n = 0, l = 0, m = 5$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,5}^{1} = -(I + pA)U_{0,5}^{1} + (I - pB)U_{0,5}^{1*} + (I + pB)U_{0,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,5}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4606 \\ 0.8723 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.4758 \\ 0.9487 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5641 \\ 0.9012 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.4557 \\ -0.7439 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5234 \\ 1.0436 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5077 \\ 0.8111 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5754 \\ 1.1108 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5754 \\ 1.1108 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.5605 \\ 0.9724 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 5$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,5}^{1} = -(I + pA)U_{1,5}^{1} + (I - pB)U_{1,5}^{1*} + (I + pB)U_{1,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,5}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5605 \\ 0.9724 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5749 \\ 1.0481 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6637 \\ 1.0005 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.5456 \\ -0.8340 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6324 \\ 1.1529 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5973 \\ 0.9005 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6841 \\ 1.2194 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6841 \\ 1.2194 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6593 \\ 1.0711 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 5$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{3,5}^{1} = -(I + pA)U_{2,5}^{1} + (I - pB)U_{2,5}^{1*} + (I + pB)U_{2,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,5}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6593 \\ 1.0711 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6731 \\ 1.1460 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7614 \\ 1.0985 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6346 \\ -0.9228 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7404 \\ 1.2606 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6853 \\ 0.9887 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7911 \\ 1.3265 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7911 \\ 1.3265 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7566 \\ 1.1685 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 5$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{4,5}^{1} = -(I + pA)U_{3,5}^{1} + (I - pB)U_{3,5}^{1*} + (I + pB)U_{3,6}^{1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,5}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7566 \\ 1.1685 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.7686 \\ 1.2415 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8569 \\ 1.1939 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7221 \\ -1.0105 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8455 \\ 1.3657 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7712 \\ 1.0745 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8942 \\ 1.4297 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8942 \\ 1.4297 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8504 \\ 1.2623 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 5$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,5}^{1} = -(I + pA)U_{4,5}^{1} + (I - pB)U_{4,5}^{1*} + (I + pB)U_{4,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,5}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8504 \\ 1.2623 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8608 \\ 1.3334 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9491 \\ 1.2863 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8066 \\ -1.0949 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9469 \\ 1.4667 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8542 \\ 1.1577 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9945 \\ 1.5295 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9945 \\ 1.5295 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9415 \\ 1.3530 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=5, m=5$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{6,5}^{1}=-(I+pA)U_{5,5}^{1}+(I-pB)U_{5,5}^{1*}+(I+pB)U_{5,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,5}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9415\\ 1.3530\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0.9485\\ 1.4215\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0371\\ 1.3739\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.8885\\ -1.1766\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0434\\ 1.5637\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0.9334\\ 1.2365\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.0883\\ 1.6236\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,5}^{1}=\begin{Bmatrix}1.0883\\ 1.6236\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,5}^{1}=\begin{Bmatrix}1.0268\\ 1.4386\end{Bmatrix}$

$n=0, l=6, m=5$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{7,5}^{1}=-(I+pA)U_{6,5}^{1}+(I-pB)U_{6,5}^{1*}+(I+pB)U_{6,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,5}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0268\\ 1.4386\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0314\\ 1.5039\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1195\\ 1.4568\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9653\\ -1.2536\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1345\\ 1.6543\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0076\\ 1.3111\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.1768\\ 1.7118\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,5}^{1}=\begin{Bmatrix}1.1768\\ 1.7118\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,5}^{1}=\begin{Bmatrix}1.1072\\1.5188\end{Bmatrix}$

$n=0, l=7, m=5$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,5}^{1}=-(I+pA)U_{7,5}^{1}+(I-pB)U_{7,5}^{1*}+(I+pB)U_{7,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,5}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1072\\1.5188\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1080\\1.5808\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1962\\1.5334\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.0376\\-1.3258\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2188\\1.7389\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0766\\1.3801\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2578\\1.7932\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,5}^{1}=\begin{Bmatrix}1.2578\\1.7932\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,5}^{1}=\begin{Bmatrix}1.1809\\1.5927\end{Bmatrix}$

$n=0, l=8, m=5$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,5}^{1}=-(I+pA)U_{8,5}^{1}+(I-pB)U_{8,5}^{1*}+(I+pB)U_{8,6}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,5}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1809\\1.5927\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1778\\1.6507\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2664\\1.6033\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.1040\\-1.3923\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2956\\1.8158\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1398\\1.4430\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.3314\\1.8665\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.3314 \\ 1.8665 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,5}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.2478 \\ 1.6594 \end{Bmatrix}$

6) ให้ $n = 0, l = 0, m = 6$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,6}^{1} = -(I + pA)U_{0,6}^{1} + (I - pB)U_{0,6}^{1*} + (I + pB)U_{0,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,6}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5464 \\ 0.8209 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5641 \\ 0.9012 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6467 \\ 0.8449 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5192 \\ -0.7114 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6205 \\ 0.9913 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.5820 \\ 0.7604 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6833 \\ 1.0403 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6833 \\ 1.0403 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.6461 \\ 0.9208 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 6$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,6}^{1} = -(I + pA)U_{1,6}^{1} + (I - pB)U_{1,6}^{1*} + (I + pB)U_{1,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,6}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6461 \\ 0.9208 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6637 \\ 1.0005 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7460 \\ 0.9444 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.6090 \\ -0.8013 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7301 \\ 1.1006 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6714 \\ 0.8500 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7925 \\ 1.1493 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7925 \\ 1.1493 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7454 \\ 1.0199 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 6$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{3,6}^{1} = -(I + pA)U_{2,6}^{1} + (I - pB)U_{2,6}^{1*} + (I + pB)U_{2,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,6}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7454 \\ 1.0199 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7614 \\ 1.0985 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8442 \\ 1.0423 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6983 \\ -0.8905 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8375 \\ 1.2084 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7598 \\ 0.9381 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8990 \\ 1.2560 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8990 \\ 1.2560 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8422 \\ 1.1169 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 6$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{4,6}^{1} = -(I + pA)U_{3,6}^{1} + (I - pB)U_{3,6}^{1*} + (I + pB)U_{3,7}^{1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,6}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8422 \\ 1.1169 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.8569 \\ 1.1939 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9398 \\ 1.1381 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7855 \\ -0.9777 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9426 \\ 1.3133 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8458 \\ 1.0243 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0029 \\ 1.3599 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0029 \\ 1.3599 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9367 \\ 1.2113 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 6$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,6}^{1} = -(I + pA)U_{4,6}^{1} + (I - pB)U_{4,6}^{1*} + (I + pB)U_{4,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,6}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9367 \\ 1.2113 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9491 \\ 1.2863 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0318 \\ 1.2300 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8705 \\ -1.0627 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0440 \\ 1.4149 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9286 \\ 1.1070 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1021 \\ 1.4592 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1021 \\ 1.4592 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0269 \\ 1.3016 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n=0, l=5, m=6$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{6,6}^{1}=-(I+pA)U_{5,6}^{1}+(I-pB)U_{5,6}^{1*}+(I+pB)U_{5,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,6}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0269\\ 1.3016\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.0371\\ 1.3739\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1195\\ 1.3180\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-0.9517\\ -1.1440\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1408\\ 1.5113\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0076\\ 1.1862\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.1967\\ 1.5535\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{6,6}^{1}=\begin{Bmatrix}1.1967\\ 1.5535\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{6,6}^{1}=\begin{Bmatrix}1.1129\\ 1.3873\end{Bmatrix}$

$n=0, l=6, m=6$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{7,6}^{1}=-(I+pA)U_{6,6}^{1}+(I-pB)U_{6,6}^{1*}+(I+pB)U_{6,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,6}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1129\\ 1.3873\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\ 0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1195\\ 1.4568\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\ 0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2025\\ 1.4005\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.0291\\ -1.2211\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2315\\ 1.6025\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.0823\\ 1.2605\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2847\\ 1.6419\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\ -0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{7,6}^{1}=\begin{Bmatrix}1.2847\\ 1.6419\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,6}^{1}=\begin{Bmatrix}1.1929\\1.4677\end{Bmatrix}$

$n=0,l=7,m=6$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,6}^{1}=-(I+pA)U_{7,6}^{1}+(I-pB)U_{7,6}^{1*}+(I+pB)U_{7,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,6}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1929\\1.4677\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.1962\\1.5334\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2791\\1.4772\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.1011\\-1.2935\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.3158\\1.6867\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.1512\\1.3295\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.3659\\1.7227\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,6}^{1}=\begin{Bmatrix}1.3659\\1.7227\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,6}^{1}=\begin{Bmatrix}1.2667\\1.5411\end{Bmatrix}$

$n=0,l=8,m=6$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,6}^{1}=-(I+pA)U_{8,6}^{1}+(I-pB)U_{8,6}^{1*}+(I+pB)U_{8,7}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,6}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2667\\1.5411\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2664\\1.6033\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3487\\1.5471\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.1675\\-1.3596\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.3930\\1.7636\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2138\\1.3924\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.4393\\1.7964\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.4393 \\ 1.7964 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,6}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.3334 \\ 1.6081 \end{Bmatrix}$

7) ให้ $n = 0, l = 0, m = 7$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,7}^{1} = -(I + pA)U_{0,7}^{1} + (I - pB)U_{0,7}^{1*} + (I + pB)U_{0,8}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,7}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6265 \\ 0.7612 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.6467 \\ 0.8449 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7240 \\ 0.7810 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.5773 \\ -0.6716 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7114 \\ 0.9294 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.6516 \\ 0.7029 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7857 \\ 0.9607 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7857 \\ 0.9607 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.7265 \\ 0.8611 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 7$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,7}^{1} = -(I + pA)U_{1,7}^{1} + (I - pB)U_{1,7}^{1*} + (I + pB)U_{1,8}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,7}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7265 \\ 0.8611 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7460 \\ 0.9444 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8235 \\ 0.8803 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.6673 \\ -0.7615 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8206 \\ 1.0388 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7412 \\ 0.7923 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8945 \\ 1.0696 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8945 \\ 1.0696 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8254 \\ 0.9601 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 7$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{3,7}^{1} = -(I + pA)U_{2,7}^{1} + (I - pB)U_{2,7}^{1*} + (I + pB)U_{2,8}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,7}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8254 \\ 0.9601 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8442 \\ 1.0423 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9210 \\ 0.9783 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.7563 \\ -0.8506 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9286 \\ 1.1465 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8289 \\ 0.8805 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0012 \\ 1.1764 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0012 \\ 1.1764 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9224 \\ 1.0572 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 7$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{4,7}^{1} = -(I + pA)U_{3,7}^{1} + (I - pB)U_{3,7}^{1*} + (I + pB)U_{3,8}^{1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,7}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9224 \\ 1.0572 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9398 \\ 1.1381 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0165 \\ 1.0736 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8436 \\ -0.9380 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0338 \\ 1.2519 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9149 \\ 0.9662 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1051 \\ 1.2801 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1051 \\ 1.2801 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0169 \\ 1.1515 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 7$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,7}^{1} = -(I + pA)U_{4,7}^{1} + (I - pB)U_{4,7}^{1*} + (I + pB)U_{4,8}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,7}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0169 \\ 1.1515 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0318 \\ 1.2300 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1087 \\ 1.1660 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.9287 \\ -1.0229 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1350 \\ 1.3530 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9978 \\ 1.0494 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2041 \\ 1.3795 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.2041 \\ 1.3795 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1069 \\ 1.2418 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n = 0, l = 5, m = 7$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^1_{6,7} = -(I + pA)U^1_{5,7} + (I - pB)U^{1*}_{5,7} + (I + pB)U^{1*}_{5,8}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{6,7}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1069 \\ 1.2418 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1195 \\ 1.3180 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1967 \\ 1.2537 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0097 \\ -1.1041 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2315 \\ 1.4498 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0770 \\ 1.1283 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2988 \\ 1.4740 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{6,7} = \begin{Bmatrix} 1.2988 \\ 1.4740 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^1_{6,7} = \begin{Bmatrix} 1.1930 \\ 1.3277 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 7$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^1_{7,7} = -(I + pA)U^1_{6,7} + (I - pB)U^{1*}_{6,7} + (I + pB)U^{1*}_{6,8}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{7,7}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1930 \\ 1.3277 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2025 \\ 1.4005 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2791 \\ 1.3365 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0872 \\ -1.1815 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3228 \\ 1.5406 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1512 \\ 1.2029 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3868 \\ 1.5620 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^1_{7,7} = \begin{Bmatrix} 1.3868 \\ 1.5620 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,7}^{1}=\begin{Bmatrix}1.2730\\1.4077\end{Bmatrix}$

$n=0,l=7,m=7$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,7}^{1}=-(I+pA)U_{7,7}^{1}+(I-pB)U_{7,7}^{1*}+(I+pB)U_{7,8}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,7}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2730\\1.4077\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.2791\\1.4772\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3559\\1.4132\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.1592\\-1.2535\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.4070\\1.6249\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2203\\1.2719\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.4681\\1.6433\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,7}^{1}=\begin{Bmatrix}1.4681\\1.6433\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,7}^{1}=\begin{Bmatrix}1.3469\\1.4817\end{Bmatrix}$

$n=0,l=8,m=7$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,7}^{1}=-(I+pA)U_{8,7}^{1}+(I-pB)U_{8,7}^{1*}+(I+pB)U_{8,8}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,7}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3469\\1.4817\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3487\\1.5471\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4261\\1.4831\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.2257\\-1.3201\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.4836\\1.7018\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2835\\1.3348\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.5414\\1.7165\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.5414 \\ 1.7165 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,7}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.4135 \\ 1.5482 \end{Bmatrix}$

8) ให้ $n = 0, l = 0, m = 8$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,8}^{1} = -(I + pA)U_{0,8}^{1} + (I - pB)U_{0,8}^{1*} + (I + pB)U_{0,9}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,8}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7004 \\ 0.6938 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7240 \\ 0.7810 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7936 \\ 0.7094 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6297 \\ -0.6251 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7964 \\ 0.8591 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7142 \\ 0.6385 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.8809 \\ 0.8725 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8809 \\ 0.8725 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8002 \\ 0.7938 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 8$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,8}^{1} = -(I + pA)U_{1,8}^{1} + (I - pB)U_{1,8}^{1*} + (I + pB)U_{1,9}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,8}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8002 \\ 0.7938 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8235 \\ 0.8803 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8928 \\ 0.8088 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.7195 \\ -0.7151 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9059 \\ 0.9683 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8035 \\ 0.7279 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9899 \\ 0.9811 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9899 \\ 0.9811 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8993 \\ 0.8925 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 8$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{3,8}^{1} = -(I + pA)U_{2,8}^{1} + (I - pB)U_{2,8}^{1*} + (I + pB)U_{2,9}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,8}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8993 \\ 0.8925 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9210 \\ 0.9783 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9912 \\ 0.9068 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8087 \\ -0.8039 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0131 \\ 1.0761 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8921 \\ 0.8161 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0965 \\ 1.0883 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0965 \\ 1.0883 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9962 \\ 0.9899 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 8$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{4,8}^{1} = -(I + pA)U_{3,8}^{1} + (I - pB)U_{3,8}^{1*} + (I + pB)U_{3,9}^{1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,8}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.9962 \\ 0.9899 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0165 \\ 1.0736 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0868 \\ 1.0025 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8960 \\ -0.8915 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1182 \\ 1.1810 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9781 \\ 0.9023 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2003 \\ 1.1918 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.2003 \\ 1.1918 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0906 \\ 1.0840 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 8$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,8}^{1} = -(I + pA)U_{4,8}^{1} + (I - pB)U_{4,8}^{1*} + (I + pB)U_{4,9}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,8}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0906 \\ 1.0840 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1087 \\ 1.1660 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1790 \\ 1.0944 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.9809 \\ -0.9763 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2196 \\ 1.2826 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0611 \\ 0.9850 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2998 \\ 1.2913 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.2998 \\ 1.2913 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1810 \\ 1.1745 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n = 0, l = 5, m = 8$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^{1}_{6,8} = -(I + pA)U^{1}_{5,8} + (I - pB)U^{1*}_{5,8} + (I + pB)U^{1*}_{5,9}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{6,8}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1810 \\ 1.1745 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1967 \\ 1.2537 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2666 \\ 1.1823 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0623 \\ -1.0577 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3164 \\ 1.3791 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1399 \\ 1.0641 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3940 \\ 1.3855 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{6,8} = \begin{Bmatrix} 1.3940 \\ 1.3855 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1}_{6,8} = \begin{Bmatrix} 1.2667 \\ 1.2601 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 8$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^{1}_{7,8} = -(I + pA)U^{1}_{6,8} + (I - pB)U^{1*}_{6,8} + (I + pB)U^{1*}_{6,9}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{7,8}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2667 \\ 1.2601 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2791 \\ 1.3365 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3495 \\ 1.2649 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.1394 \\ -1.1348 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4070 \\ 1.4702 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2146 \\ 1.1384 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.4822 \\ 1.4738 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{7,8} = \begin{Bmatrix} 1.4822 \\ 1.4738 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,8}^{1}=\begin{Bmatrix}1.3469\\1.3404\end{Bmatrix}$

$n=0,l=7,m=8$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,8}^{1}=-(I+pA)U_{7,8}^{1}+(I-pB)U_{7,8}^{1*}+(I+pB)U_{7,9}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,8}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3469\\1.3404\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.3559\\1.4132\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4261\\1.3416\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.2116\\-1.2070\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.4915\\1.5545\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.2835\\1.2074\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.5634\\1.5549\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,8}^{1}=\begin{Bmatrix}1.5634\\1.5549\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,8}^{1}=\begin{Bmatrix}1.4207\\1.4141\end{Bmatrix}$

$n=0,l=8,m=8$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,8}^{1}=-(I+pA)U_{8,8}^{1}+(I-pB)U_{8,8}^{1*}+(I+pB)U_{8,9}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,8}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4207\\1.4141\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4261\\1.4831\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4957\\1.4116\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.2780\\-1.2734\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.5687\\1.6314\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.3461\\1.2704\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.6368\\1.6284\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.6368 \\ 1.6284 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,8}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.4874 \\ 1.4810 \end{Bmatrix}$

9) ให้ $n = 0, l = 0, m = 9$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{1,9}^{1} = -(I + pA)U_{0,9}^{1} + (I - pB)U_{0,9}^{1*} + (I + pB)U_{0,10}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,9}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7671 \\ 0.6194 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.7936 \\ 0.7094 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8566 \\ 0.6314 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.6756 \\ -0.5722 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8730 \\ 0.7803 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.7709 \\ 0.5683 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9683 \\ 0.7764 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{1,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9683 \\ 0.7764 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{1,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.8669 \\ 0.7192 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 1, m = 9$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{2,9}^{1} = -(I + pA)U_{1,9}^{1} + (I - pB)U_{1,9}^{1*} + (I + pB)U_{1,10}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,9}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8669 \\ 0.7192 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.8928 \\ 0.8088 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9562 \\ 0.7308 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \begin{Bmatrix} -0.7654 \\ -0.6621 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9821 \\ 0.8897 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.8606 \\ 0.6577 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0773 \\ 0.8853 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{2,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0773 \\ 0.8853 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{2,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.9659 \\ 0.8182 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 2, m = 9$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{3,9}^{1} = -(I + pA)U_{2,9}^{1} + (I - pB)U_{2,9}^{1*} + (I + pB)U_{2,10}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,9}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9659 \\ 0.8182 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.9912 \\ 0.9068 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1.0537 \\ 0.8288 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.8545 \\ -0.7512 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0903 \\ 0.9975 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.9483 \\ 0.7459 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1841 \\ 0.9922 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{3,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1841 \\ 0.9922 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{3,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.0630 \\ 0.9154 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 3, m = 9$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{4,9}^{1} = -(I + pA)U_{3,9}^{1} + (I - pB)U_{3,9}^{1*} + (I + pB)U_{3,10}^{1*}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,9}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0630 \\ 0.9154 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.0868 \\ 1.0025 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1492 \\ 0.9240 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.9419 \\ -0.8386 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1955 \\ 1.1028 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.0343 \\ 0.8316 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2879 \\ 1.0958 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{4,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.2879 \\ 1.0958 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{4,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.1574 \\ 1.0096 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 4, m = 9$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U_{5,9}^{1} = -(I + pA)U_{4,9}^{1} + (I - pB)U_{4,9}^{1*} + (I + pB)U_{4,10}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,9}^{1}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1574 \\ 1.0096 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.1790 \\ 1.0944 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2412 \\ 1.0164 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.0269 \\ -0.9234 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2969 \\ 1.2038 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1171 \\ 0.9148 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.3871 \\ 1.1952 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{5,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.3871 \\ 1.1952 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{5,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.2476 \\ 1.1000 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$n = 0, l = 5, m = 9$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^{1}_{6,9} = -(I + pA)U^{1}_{5,9} + (I - pB)U^{1*}_{5,9} + (I + pB)U^{1*}_{5,10}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{6,9}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2476 \\ 1.1000 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.2666 \\ 1.1823 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3295 \\ 1.1042 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.1081 \\ -1.0048 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.3933 \\ 1.3005 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.1966 \\ 0.9938 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.4818 \\ 1.2895 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{6,9} = \begin{Bmatrix} 1.4818 \\ 1.2895 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U^{1}_{6,9} = \begin{Bmatrix} 1.3336 \\ 1.1857 \end{Bmatrix}$

$n = 0, l = 6, m = 9$ จากสมการ (3.3)

$$(I - pA)U^{1}_{7,9} = -(I + pA)U^{1}_{6,9} + (I - pB)U^{1*}_{6,9} + (I + pB)U^{1*}_{6,10}$$

จะได้ $\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{7,9}$

$$= -\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3336 \\ 1.1857 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.3495 \\ 1.2649 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1.4118 \\ 1.1871 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -1.1855 \\ -1.0819 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.4845 \\ 1.3914 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1.2706 \\ 1.0684 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.5696 \\ 1.3779 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U^{1}_{7,9} = \begin{Bmatrix} 1.5696 \\ 1.3779 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้ $U_{7,9}^{1}=\begin{Bmatrix}1.4135\\1.2660\end{Bmatrix}$

$n=0,l=7,m=9$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{8,9}^{1}=-(I+pA)U_{7,9}^{1}+(I-pB)U_{7,9}^{1*}+(I+pB)U_{7,10}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,9}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4135\\1.2660\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4261\\1.3416\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4885\\1.2637\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.2574\\-1.1542\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.5687\\1.4758\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.3397\\1.1373\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.6510\\1.4589\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{8,9}^{1}=\begin{Bmatrix}1.6510\\1.4589\end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{8,9}^{1}=\begin{Bmatrix}1.4875\\1.3397\end{Bmatrix}$

$n=0,l=8,m=9$ จากสมการ (3.3)

$$(I-pA)U_{9,9}^{1}=-(I+pA)U_{8,9}^{1}+(I-pB)U_{8,9}^{1*}+(I+pB)U_{8,10}^{1*}$$

จะได้ $\begin{bmatrix}1.2 & -0.1\\-0.1 & 1.2\end{bmatrix}U_{9,9}^{1}$

$$=-\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\0.1 & 0.8\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4875\\1.3397\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1.1 & 0\\0 & 1.1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.4957\\1.4116\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0.9 & 0\\0 & 0.9\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.5588\\1.3335\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}-1.3240\\-1.2205\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.6453\\1.5528\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1.4029\\1.2002\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.7242\\1.5325\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} 1.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix} U_{9,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.7242 \\ 1.5325 \end{Bmatrix}$$

จะได้ $U_{9,9}^{1} = \begin{Bmatrix} 1.5540 \\ 1.4066 \end{Bmatrix}$

จากการคำนวณข้างต้นนี้ เป็นการแสดงการหาผลเฉลยของการคำนวณเชิงตัวเลขของ u_1 และ u_2 ด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด เมื่อ $t = 0.01$ ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้ถูกแสดงไว้ในตารางที่ 3.1-3.2 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.1 แสดงผลเฉลย u_1 เมื่อ $t = 0.01$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด

x / y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	-0.0200	0.0799	0.1789	0.2760	0.3702	0.4606	0.5464	0.6265	0.7004	0.7671	0.8260
0.1	0.0799	0.1796	0.2789	0.3757	0.4701	0.5604	0.6461	0.7264	0.8002	0.8669	0.9259
0.2	0.1789	0.2788	0.3776	0.4747	0.5693	0.6595	0.7454	0.8253	0.8993	0.9658	1.0249
0.3	0.2760	0.3757	0.4748	0.5719	0.6660	0.7565	0.8421	0.9226	0.9962	1.0630	1.1220
0.4	0.3702	0.4701	0.5692	0.6661	0.7602	0.8509	0.9366	1.0168	1.0905	1.1573	1.2162
0.5	0.4606	0.5605	0.6593	0.7566	0.8504	0.9415	1.0268	1.1072	1.1809	1.2478	1.3067
0.6	0.5464	0.6461	0.7454	0.8422	0.9367	1.0269	1.1129	1.1929	1.2667	1.3334	1.3924
0.7	0.6265	0.7265	0.8254	0.9224	1.0169	1.1069	1.1930	1.2730	1.3469	1.4135	1.4726
0.8	0.7004	0.8002	0.8993	0.9962	1.0906	1.1810	1.2667	1.3469	1.4207	1.4874	1.5464
0.9	0.7671	0.8669	0.9659	1.0630	1.1574	1.2476	1.3336	1.4135	1.4875	1.5540	1.6131
1.0	0.8260	0.9259	1.0249	1.1220	1.2162	1.3067	1.3924	1.4726	1.5464	1.6131	1.6721

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 แสดงผลเฉลย u_2 เมื่อ $t = 0.01$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด

x / y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9900	1.0898	1.1888	1.2859	1.3801	1.4706	1.5563	1.6365	1.7103	1.7770	1.8360
0.1	0.9860	1.0856	1.1849	1.2819	1.3763	1.4664	1.5523	1.6324	1.7063	1.7730	1.8320
0.2	0.9720	1.0721	1.1707	1.2680	1.3621	1.4527	1.5384	1.6184	1.6924	1.7591	1.8180
0.3	0.9482	1.0481	1.1470	1.2443	1.3384	1.4289	1.5146	1.5948	1.6688	1.7352	1.7943
0.4	0.9149	1.0148	1.1139	1.2107	1.3052	1.3957	1.4812	1.5616	1.6350	1.7020	1.7609
0.5	0.8723	0.9724	1.0711	1.1685	1.2623	1.3530	1.4386	1.5188	1.5927	1.6594	1.7184
0.6	0.8209	0.9208	1.0199	1.1169	1.2113	1.3016	1.3873	1.4677	1.5411	1.6081	1.6670
0.7	0.7612	0.8611	0.9601	1.0572	1.1515	1.2418	1.3277	1.4077	1.4817	1.5482	1.6073
0.8	0.6938	0.7938	0.8925	0.9899	1.0840	1.1745	1.2601	1.3404	1.4141	1.4810	1.5399
0.9	0.6194	0.7192	0.8182	0.9154	1.0096	1.1000	1.1857	1.2660	1.3397	1.4066	1.4654
1.0	0.5387	0.6386	0.7375	0.8346	0.9289	1.0193	1.1051	1.1852	1.2590	1.3258	1.3847

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผู้วิจัยได้นำเสนอตัวแบบอุทกพลศาสตร์ ด้วยสมการน้ำตื้น 2 มิติที่แปลงให้อยู่ในรูปไร้มิติ กับปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์ (Derivative Condition) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ สำหรับการหาผลเฉลยโดยประมาณ ผลลัพธ์ที่ได้คือ การยกตัวของระดับน้ำ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y ในอ่างเก็บน้ำเอกรูป

โดยผู้วิจัยมุ่งหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในรูปไร้มิติ มีสมการดังนี้

$$\frac{\partial Z}{\partial T}+\frac{\partial U}{\partial X}+\frac{\partial V}{\partial Y}=0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial Z}{\partial X}=0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial Z}{\partial Y}=0 \tag{3.6}$$

โดยกำหนดให้เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นดังนี้

1. เงื่อนไขเริ่มต้น

$$\begin{aligned} &Z(X,Y,0)=X(1-X)Y(1-Y)\\ &U(X,Y,0)=0 \qquad \text{สำหรับ } 0\le X,Y\le 1,\ T=0\\ &V(X,Y,0)=0 \end{aligned}$$

2. เงื่อนไขขอบ

$$\begin{aligned} &Z(0,Y,T)=0\\ &\frac{\partial U}{\partial X}=0 \qquad \text{สำหรับ } X=0,\ T>0\\ &V(0,Y,T)=0 \end{aligned}$$

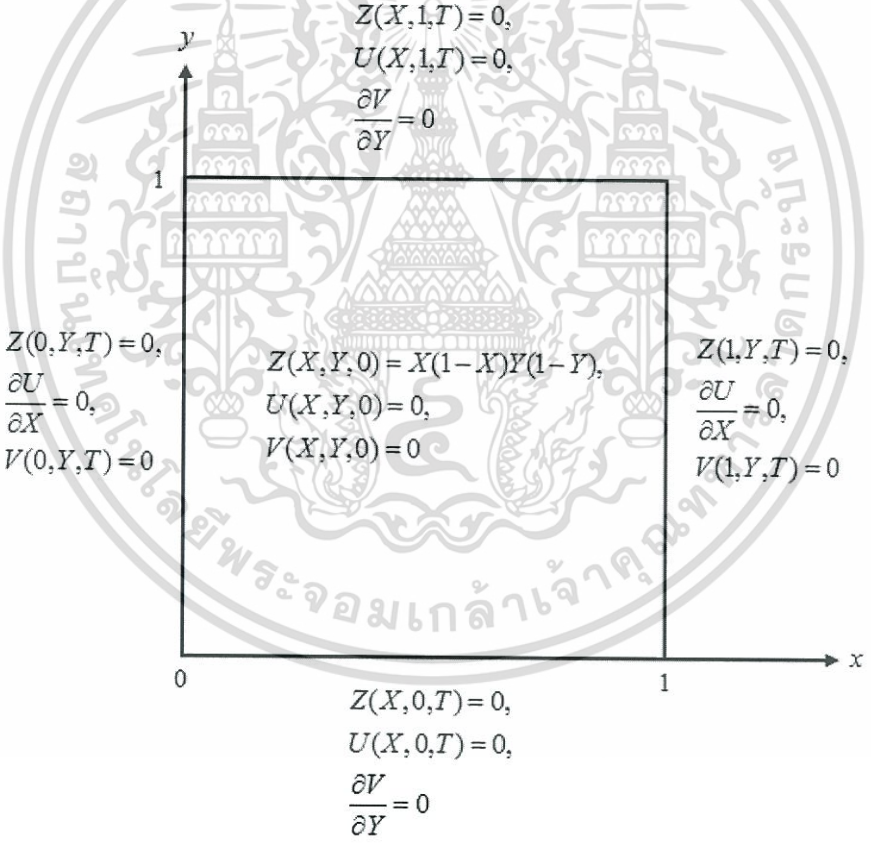
$$\begin{aligned} &Z(1,Y,T)=0\\ &\frac{\partial U}{\partial X}=0 \qquad \text{สำหรับ } X=1,\ T>0\\ &V(1,Y,T)=0 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Z(X,0,T)=0$$
$$U(X,0,T)=0 \qquad \text{สำหรับ } Y=0,\ T>0$$
$$\frac{\partial V}{\partial Y}=0$$

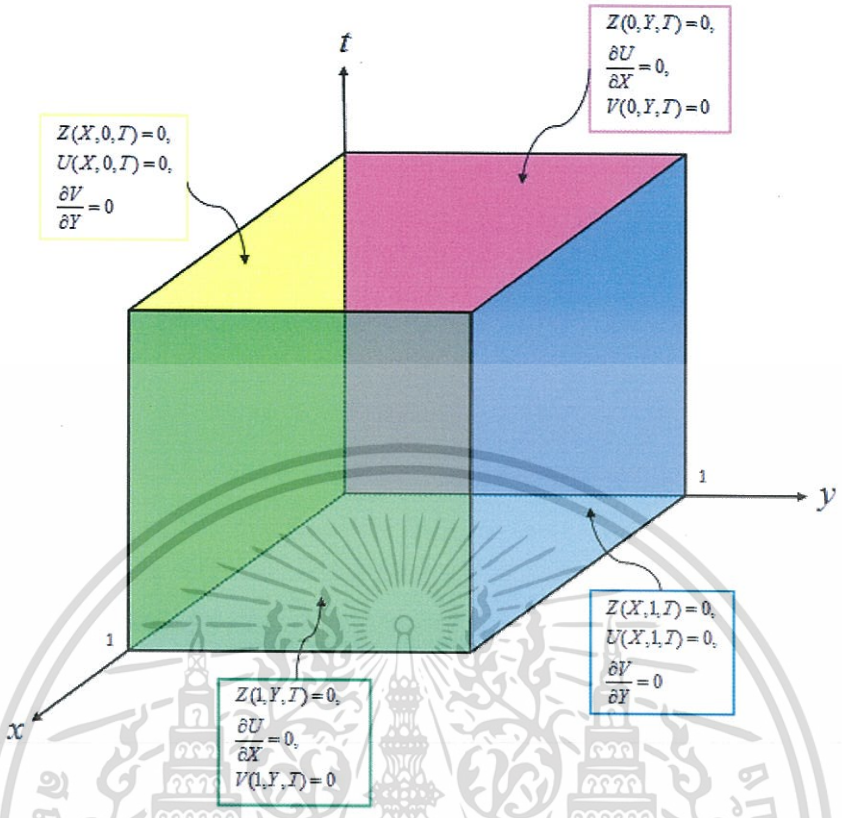
$$Z(X,1,T)=0$$
$$U(X,1,T)=0 \qquad \text{สำหรับ } Y=1,\ T>0$$
$$\frac{\partial V}{\partial Y}=0$$

โดยแสดงเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นไว้ดังรูปที่ 3.3 และ 3.4



รูปที่ 3.3 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ ($T=0$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.4 เงื่อนไขขอบ ($T>0$)

3.3 การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

ผู้วิจัยได้นำเสนอการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ของระบบไฮเพอร์โบลิก 2 มิติ ในการแก้ปัญหาค่าขอบโดยแบ่งช่วงบนแกน x คือ $X=l\Delta X$ บนแกน y คือ $Y=m\Delta Y$ และบนแกน t คือ $T=n\Delta T$ โดยที่ ΔX และ ΔY คือ ความกว้างของแต่ละช่วงย่อย, ΔT คือ เวลาของแต่ละช่วงย่อยและ l,m,n คือจำนวนช่องย่อยที่เป็นจำนวนเต็ม โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ [8] คือ

$$W_{l,m}^{n+1}=W_{l,m}^{n}+\frac{1}{2}pA(\Delta_x+\nabla_x)W_{l,m}^{n}+\frac{1}{2}pB(\Delta_y+\nabla_y)W_{l,m}^{n}+\frac{1}{2}p^2A^2\Delta_x\nabla_xW_{l,m}^{n}$$

$$+\frac{1}{2}p^2B^2\Delta_y\nabla_yW_{l,m}^{n}+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(\Delta_x+\nabla_x)(\Delta_y+\nabla_y)W_{l,m}^{n} \qquad (3.7)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยพิจารณาพจน์ที่ 2 จะได้

$$\frac{1}{2}pA(\Delta_x+\nabla_x)W_{l,m}^n = \frac{1}{2}pA\Delta_x W_{l,m}^n + \frac{1}{2}pA\nabla_x W_{l,m}^n,$$

$$= \frac{1}{2}pA\left(W_{l+1,m}^n - W_{l,m}^n\right) + \frac{1}{2}pA\left(W_{l,m}^n - W_{l-1,m}^n\right),$$

$$= \frac{1}{2}pA\left(W_{l+1,m}^n - W_{l-1,m}^n\right),$$

$$= \frac{1}{2}pAW_{l+1,m}^n - \frac{1}{2}pAW_{l-1,m}^n$$

พิจารณาพจน์ที่ 3 จะได้

$$\frac{1}{2}pB(\Delta_y+\nabla_y)W_{l,m}^n = \frac{1}{2}pB\Delta_y W_{l,m}^n + \frac{1}{2}pB\nabla_y W_{l,m}^n,$$

$$= \frac{1}{2}pB\left(W_{l,m+1}^n - W_{l,m}^n\right) + \frac{1}{2}pB\left(W_{l,m}^n - W_{l,m-1}^n\right),$$

$$= \frac{1}{2}pB\left(W_{l,m+1}^n - W_{l,m-1}^n\right),$$

$$= \frac{1}{2}pBW_{l,m+1}^n - \frac{1}{2}pBW_{l,m-1}^n$$

พิจารณาพจน์ที่ 4 จะได้

$$\frac{1}{2}p^2A^2\Delta_x\nabla_x W_{l,m}^n = \frac{1}{2}p^2A^2\Delta_x(W_{l,m}^n - W_{l-1,m}^n),$$

$$= \frac{1}{2}p^2A^2\Delta_x W_{l,m}^n - \frac{1}{2}p^2A^2\Delta_x W_{l-1,m}^n,$$

$$= \frac{1}{2}p^2A^2(W_{l+1,m}^n - W_{l,m}^n) - \frac{1}{2}p^2A^2(W_{l,m}^n - W_{l-1,m}^n),$$

$$= \frac{1}{2}p^2A^2W_{l+1,m}^n - p^2A^2W_{l,m}^n + \frac{1}{2}p^2A^2W_{l-1,m}^n$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณาพจน์ที่ 5 จะได้

$$\frac{1}{2}p^2B^2\Delta_y\nabla_y W^n_{l,m} = \frac{1}{2}p^2B^2\Delta_y(W^n_{l,m}-W^n_{l,m-1}),$$

$$= \frac{1}{2}p^2B^2\Delta_y W^n_{l,m} - \frac{1}{2}p^2B^2\Delta_y W^n_{l,m-1},$$

$$= \frac{1}{2}p^2B^2(W^n_{l,m+1}-W^n_{l,m}) - \frac{1}{2}p^2B^2(W^n_{l,m}-W^n_{l,m-1}),$$

$$= \frac{1}{2}p^2B^2W^n_{l,m+1} - p^2B^2W^n_{l,m} + \frac{1}{2}p^2B^2W^n_{l,m-1},$$

พิจารณาพจน์ที่ 6 จะได้

$$\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(\Delta_x+\nabla_x)(\Delta_y+\nabla_y)W^n_{l,m}$$

$$= \frac{1}{8}p^2(AB+BA)[\Delta_x\Delta_y+\Delta_x\nabla_y+\nabla_x\Delta_y+\nabla_x\nabla_y]W^n_{l,m},$$

$$= \frac{1}{8}p^2(AB+BA)[\Delta_x\Delta_y W^n_{l,m}+\Delta_x\nabla_y W^n_{l,m}+\nabla_x\Delta_y W^n_{l,m}+\nabla_x\nabla_y W^n_{l,m}],$$

$$= \frac{1}{8}p^2(AB+BA)[\Delta_x(W^n_{l,m+1}-W^n_{l,m})+\Delta_x(W^n_{l,m}-W^n_{l,m-1})$$

$$+\nabla_x(W^n_{l,m+1}-W^n_{l,m})+\nabla_x(W^n_{l,m}-W^n_{l,m-1})],$$

$$= \frac{1}{8}p^2(AB+BA)[\Delta_x W^n_{l,m+1}-\Delta_x W^n_{l,m}+\Delta_x W^n_{l,m}-\Delta_x W^n_{l,m-1}$$

$$+\nabla_x W^n_{l,m+1}-\nabla_x W^n_{l,m}+\nabla_x W^n_{l,m}-\nabla_x W^n_{l,m-1}],$$

$$= \frac{1}{8}p^2(AB+BA)[(W^n_{l+1,m+1}-W^n_{l,m+1})-(W^n_{l+1,m-1}-W^n_{l,m-1})$$

$$+(W^n_{l,m+1}-W^n_{l-1,m+1})-(W^n_{l,m-1}-W^n_{l-1,m-1})],$$

$$= \frac{1}{8}p^2(AB+BA)[W^n_{l+1,m+1}-W^n_{l+1,m-1}-W^n_{l-1,m+1}+W^n_{l-1,m-1}]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (3.7) จะได้

$$W_{l,m}^{n+1} = W_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pAW_{l+1,m}^{n} - \frac{1}{2}pAW_{l-1,m}^{n} + \frac{1}{2}pBW_{l,m+1}^{n} - \frac{1}{2}pBW_{l,m-1}^{n}$$

$$+\frac{1}{2}p^2A^2W_{l+1,m}^{n} - p^2A^2W_{l,m}^{n} - \frac{1}{2}p^2A^2W_{l-1,m}^{n}$$

$$+\frac{1}{2}p^2B^2W_{l,m+1}^{n} - p^2B^2W_{l,m}^{n} - \frac{1}{2}p^2B^2W_{l,m-1}^{n}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)[W_{l+1,m+1}^{n} - W_{l+1,m-1}^{n} - W_{l-1,m+1}^{n} + W_{l-1,m-1}^{n}]$$

ดังนั้นการหาผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มีสูตรดังนี้

$$W_{l,m}^{n+1} = [I - p^2(A^2+B^2)]W_{l,m}^{n} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{l+1,m}^{n} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{l-1,m}^{n}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{l,m+1}^{n} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{l,m-1}^{n}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{l+1,m+1}^{n} - W_{l+1,m-1}^{n} - W_{l-1,m+1}^{n} + W_{l-1,m-1}^{n}) \qquad (3.8)$$

เมื่อ $p = \frac{\Delta T}{\Delta X}$ โดยมีความเสถียร คือ $p|\lambda_m| \le 1$ เมื่อ $|\lambda_m| = \max_{A,B}[|\lambda_A|, |\lambda_B|]$

ซึ่งในงานวิจัยนี้ ความเสถียร คือ $p < 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.4 ตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาตัวแบบอุทกพลศาสตร์

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial T} \\ \frac{\partial U}{\partial T} \\ \frac{\partial V}{\partial T} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial X} \\ \frac{\partial U}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial X} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \end{Bmatrix}$$

ใช้ในการแก้ระบบเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ใน $0 \le X, Y \le 1, T \ge 0$

โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$\begin{aligned} &Z(X,Y,0) = X(1-X)Y(1-Y) \\ &U(X,Y,0) = 0 \qquad \text{สำหรับ } 0 \le X, Y \le 1,\ T = 0 \\ &V(X,Y,0) = 0 \end{aligned}$$

และเงื่อนไขขอบ คือ

$$\begin{aligned} &Z(0,Y,T) = 0 \\ &\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \qquad \text{สำหรับ } X = 0,\ T > 0 \\ &V(0,Y,T) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Z(1,Y,T) = 0 \\ &\frac{\partial U}{\partial X} = 0 \qquad \text{สำหรับ } X = 1,\ T > 0 \\ &V(1,Y,T) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Z(X,0,T) = 0 \\ &U(X,0,T) = 0 \qquad \text{สำหรับ } Y = 0,\ T > 0 \\ &\frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Z(X,1,T)=0$$
$$U(X,1,T)=0 \qquad \text{สำหรับ } Y=1,\ T>0$$
$$\frac{\partial V}{\partial Y}=0$$

<u>วิธีทำ</u>

ให้ $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$

เลือก $\Delta X=\Delta Y=0.25$ และ $\Delta T=0.1$ แล้ว $p=\dfrac{\Delta T}{\Delta X}=\dfrac{0.1}{0.25}=0.4$

จะได้ $\dfrac{1}{2}pA(I+pA)=\begin{bmatrix}0&-0.2&0\\-0.2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-0.4&0\\-0.4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.08&-0.2&0\\-0.2&0.08&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$\frac{1}{2}pA(I-pA)=\begin{bmatrix}0&-0.2&0\\-0.2&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0.4&0\\0.4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.08&-0.2&0\\-0.2&-0.08&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}pB(I+pB)=\begin{bmatrix}0&0&-0.2\\0&0&0\\-0.2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-0.4\\0&1&0\\-0.4&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.08&0&-0.2\\0&0&0\\-0.2&0&0.08\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}pB(I-pB)=\begin{bmatrix}0&0&-0.2\\0&0&0\\-0.2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0.4\\0&1&0\\0.4&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.08&0&-0.2\\0&0&0\\-0.2&0&-0.08\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{8}p^2(AB+BA)=\frac{1}{8}(0.16)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0.02\\0&0.02&0\end{bmatrix}$$

$$I-p^2(A^2+B^2)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-(0.16)\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.68&0&0\\0&0.84&0\\0&0&0.84\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1) ให้ $n=0, l=1, m=1$ จากสมการ (3.8)

$$W_{1,1}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{1,1}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{2,1}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{0,1}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{1,2}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{1,0}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{2,2}^{0} - W_{2,0}^{0} - W_{0,2}^{0} + W_{0,0}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{1,1}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0239 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0038 \\ -0.0094 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0038 \\ 0 \\ -0.0094 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{1,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0315 \\ -0.0094 \\ -0.0094 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) ให้ $n=0, l=2, m=1$ จากสมการ (3.8)

$$W_{2,1}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{2,1}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{3,1}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{1,1}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{2,2}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{2,0}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{3,2}^{0} - W_{3,0}^{0} - W_{1,2}^{0} + W_{1,0}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{2,1}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0319 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0028 \\ -0.0070 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0028 \\ -0.0070 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0050 \\ 0 \\ -0.0125 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{2,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0425 \\ 0 \\ -0.0125 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) ให้ $n=0, l=3, m=1$ จากสมการ (3.8)

$$W_{3,1}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{3,1}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{4,1}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{2,1}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{3,2}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{3,0}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{4,2}^{0} - W_{4,0}^{0} - W_{2,2}^{0} + W_{2,0}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{3,1}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0239 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0038 \\ -0.0094 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0038 \\ 0 \\ -0.0094 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{3,1}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0315 \\ 0.0094 \\ -0.0094 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4) ให้ $n=0, l=1, m=2$ จากสมการ (3.8)

$$W_{1,2}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{1,2}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{2,2}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{0,2}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{1,3}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{1,1}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{2,3}^{0} - W_{2,1}^{0} - W_{0,3}^{0} + W_{0,1}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{1,2}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0319 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0050 \\ -0.0125 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0028 \\ 0 \\ -0.0070 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0028 \\ 0 \\ -0.0070 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{1,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0425 \\ -0.0125 \\ 0 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5) ให้ $n=0, l=2, m=2$ จากสมการ (3.8)

$$W_{2,2}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{2,2}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{3,2}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{1,2}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{2,3}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{2,1}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{3,3}^{0} - W_{3,1}^{0} - W_{1,3}^{0} + W_{1,1}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{2,2}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0425 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0038 \\ -0.0094 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0038 \\ -0.0094 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0038 \\ 0 \\ -0.0094 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0038 \\ 0 \\ -0.0094 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{2,2}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0577 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6) ให้ $n=0, l=3, m=2$ จากสมการ (3.8)

$$W^1_{3,2} = [I-p^2(A^2+B^2)]W^0_{3,2} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W^0_{4,2} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W^0_{2,2}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W^0_{3,3} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W^0_{3,1}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W^0_{4,3} - W^0_{4,1} - W^0_{2,3} + W^0_{2,1})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W^1_{3,2} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0319 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0050 \\ -0.0125 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0028 \\ 0 \\ -0.0070 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0028 \\ 0 \\ -0.0070 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W^1_{3,2} = \begin{Bmatrix} 0.0425 \\ 0.0125 \\ 0 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7) ให้ $n=0, l=1, m=3$ จากสมการ (3.8)

$$W_{1,3}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{1,3}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{2,3}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{0,3}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{1,4}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{1,2}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{2,4}^{0} - W_{2,2}^{0} - W_{0,4}^{0} + W_{0,2}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{1,3}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0239 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0038 \\ -0.0094 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0038 \\ 0 \\ -0.0094 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{1,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0315 \\ -0.0094 \\ 0.0094 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8) ให้ $n=0, l=2, m=3$ จากสมการ (3.8)

$$W_{2,3}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{2,3}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{3,3}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{1,3}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{2,4}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{2,2}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{3,4}^{0} - W_{3,2}^{0} - W_{1,4}^{0} + W_{1,2}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{2,3}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right\}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0319 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0028 \\ -0.0070 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0028 \\ -0.0070 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0050 \\ 0 \\ -0.0125 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{2,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0425 \\ 0 \\ 0.0125 \end{Bmatrix}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

9) ให้ $n=0, l=3, m=3$ จากสมการ (3.8)

$$W_{3,3}^{1} = [I-p^2(A^2+B^2)]W_{3,3}^{0} + \frac{1}{2}pA(I+pA)W_{4,3}^{0} - \frac{1}{2}pA(I-pA)W_{2,3}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}pB(I+pB)W_{3,4}^{0} - \frac{1}{2}pB(I-pB)W_{3,2}^{0}$$

$$+\frac{1}{8}p^2(AB+BA)(W_{4,4}^{0} - W_{4,2}^{0} - W_{2,4}^{0} + W_{2,2}^{0})$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$W_{3,3}^{1} = \begin{bmatrix} 0.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84 & 0 \\ 0 & 0 & 0.84 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & -0.08 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & 0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.08 & 0 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0 & -0.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0469 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \\ 0 & 0.02 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.0625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0239 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0038 \\ -0.0094 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -0.0038 \\ 0 \\ -0.0094 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น $W_{3,3}^{1} = \begin{Bmatrix} 0.0315 \\ 0.0094 \\ 0.0094 \end{Bmatrix}$

จากการคำนวณข้างต้นนี้ เป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยด้วยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ เมื่อ $T=0.1$ ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในตารางต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.3 แสดงผลเฉลยของ $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

Y \ X	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0000	0.0315	0.0425	0.0315	0.0000
0.50	0.0000	0.0425	0.0577	0.0425	0.0000
0.75	0.0000	0.0315	0.0425	0.0315	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.4 แสดงผลเฉลยของ $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

Y \ X	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	-0.0094	-0.0094	0.0000	0.0094	0.0094
0.50	-0.0125	-0.0125	0.0000	0.0125	0.0125
0.75	-0.0094	-0.0094	0.0000	0.0094	0.0094
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.5 แสดงผลเฉลยของ $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

Y \ X	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0	0.0000	-0.0094	-0.0125	-0.0094	0.0000
0.25	0.0000	-0.0094	-0.0125	-0.0094	0.0000
0.50	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.75	0.0000	0.0094	0.0125	0.0094	0.0000
1.0	0.0000	0.0094	0.0125	0.0094	0.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

จากสูตรการคำนวณวิธีแลกซ์-แวนดรอฟฟ์นี้ (3.8) มาคำนวณหาผลเฉลยโดยประมาณของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในรูปไร้มิติในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เพื่อนำผลเฉลยที่ได้มาเปรียบเทียบและประยุกต์ใช้ กับวิธีปริยายทิศทางสลับที่ต้องการพัฒนา ผู้วิจัยจึงได้แสดงผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ไว้ 4 กรณีคือ

<u>กรณีที่ 1</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.005$ และ $p = 0.5$ ดังนั้นผลเฉลยค่า Z,U,V ที่ได้จากการคำนวณ ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.6-3.8 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.6 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.25$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
0.2	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
0.3	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
0.4	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
0.5	0.0000	0.0079	0.0163	0.0251	0.0307	0.0326	0.0307	0.0251	0.0163	0.0079	0.0000
0.6	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
0.7	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
0.8	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
0.9	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.6 แสดงผลเฉลยของค่า Z นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.25$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.7 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.25$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.0136	-0.0129	-0.0108	-0.0074	-0.0037	0.0000	0.0037	0.0074	0.0108	0.0129	0.0136
0.2	-0.0258	-0.0245	-0.0205	-0.0139	-0.0070	0.0000	0.0070	0.0139	0.0205	0.0245	0.0258
0.3	-0.0351	-0.0333	-0.0279	-0.0189	-0.0095	0.0000	0.0095	0.0189	0.0279	0.0333	0.0351
0.4	-0.0407	-0.0387	-0.0323	-0.0219	-0.0110	0.0000	0.0110	0.0219	0.0323	0.0387	0.0407
0.5	-0.0426	-0.0404	-0.0337	-0.0229	-0.0115	0.0000	0.0115	0.0229	0.0337	0.0404	0.0426
0.6	-0.0407	-0.0387	-0.0323	-0.0219	-0.0110	0.0000	0.0110	0.0219	0.0323	0.0387	0.0407
0.7	-0.0351	-0.0333	-0.0279	-0.0189	-0.0095	0.0000	0.0095	0.0189	0.0279	0.0333	0.0351
0.8	0.0258	-0.0245	-0.0205	-0.0139	-0.0070	0.0000	0.0070	0.0139	0.0205	0.0245	0.0258
0.9	-0.0136	-0.0129	-0.0108	-0.0074	-0.0037	0.0000	0.0037	0.0074	0.0108	0.0129	0.0136
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.7 แสดงผลเฉลยของค่า U นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.25$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

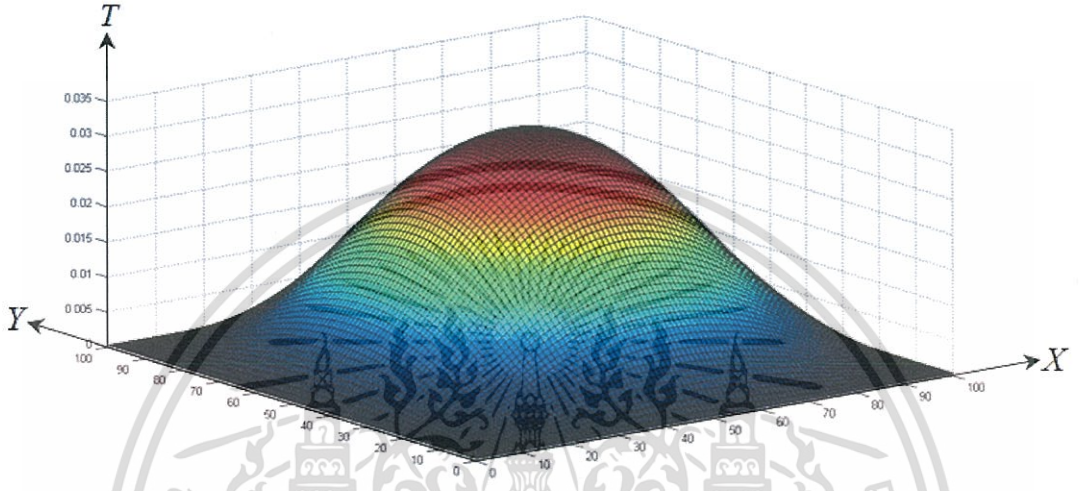
ตารางที่ 3.8 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.25$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	-0.0136	-0.0258	-0.0351	-0.0407	-0.0426	-0.0407	-0.0351	-0.0258	-0.0136	0.0000
0.1	0.0000	-0.0129	-0.0245	-0.0333	-0.0387	-0.0404	-0.0387	-0.0333	-0.0245	-0.0129	0.0000
0.2	0.0000	-0.0108	-0.0205	-0.0279	-0.0323	-0.0337	-0.0323	-0.0279	-0.0205	-0.0108	0.0000
0.3	0.0000	-0.0074	-0.0139	-0.0189	-0.0219	-0.0229	-0.0219	-0.0189	-0.0139	-0.0074	0.0000
0.4	0.0000	-0.0037	-0.0070	-0.0095	-0.0110	-0.0115	-0.0110	-0.0095	-0.0070	-0.0037	0.0000
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.0000	0.0037	0.0070	0.0095	0.0110	0.0115	0.0110	0.0095	0.0070	0.0037	0.0000
0.7	0.0000	0.0074	0.0139	0.0189	0.0219	0.0229	0.0219	0.0189	0.0139	0.0074	0.0000
0.8	0.0000	0.0108	0.0205	0.0279	0.0323	0.0337	0.0323	0.0279	0.0205	0.0108	0.0000
0.9	0.0000	0.0129	0.0245	0.0333	0.0387	0.0404	0.0387	0.0333	0.0245	0.0129	0.0000
1.0	0.0000	0.0136	0.0258	0.0351	0.0407	0.0426	0.0407	0.0351	0.0258	0.0136	0.0000

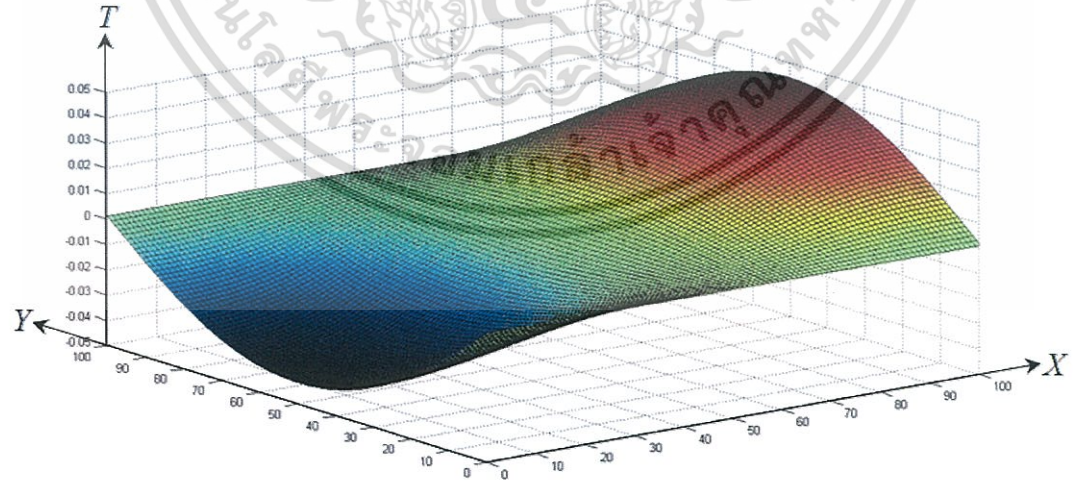
ตารางที่ 3.8 แสดงผลเฉลยของค่า V นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.25$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.25$ และความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.25$ ที่ได้จากผลเฉลยโดยประมาณได้แสดงกราฟไว้ดังรูปที่ 3.5-3.7 ตามลำดับ

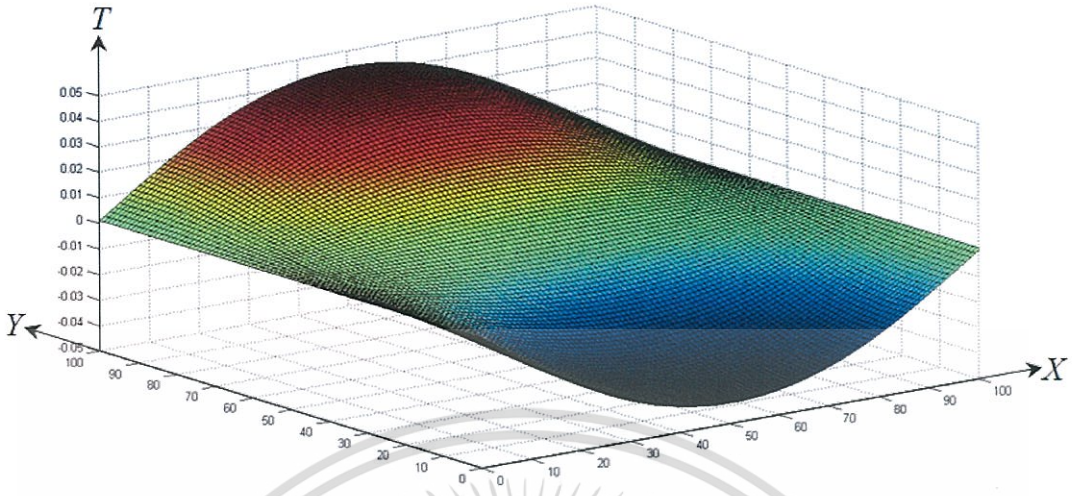


รูปที่ 3.5 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์



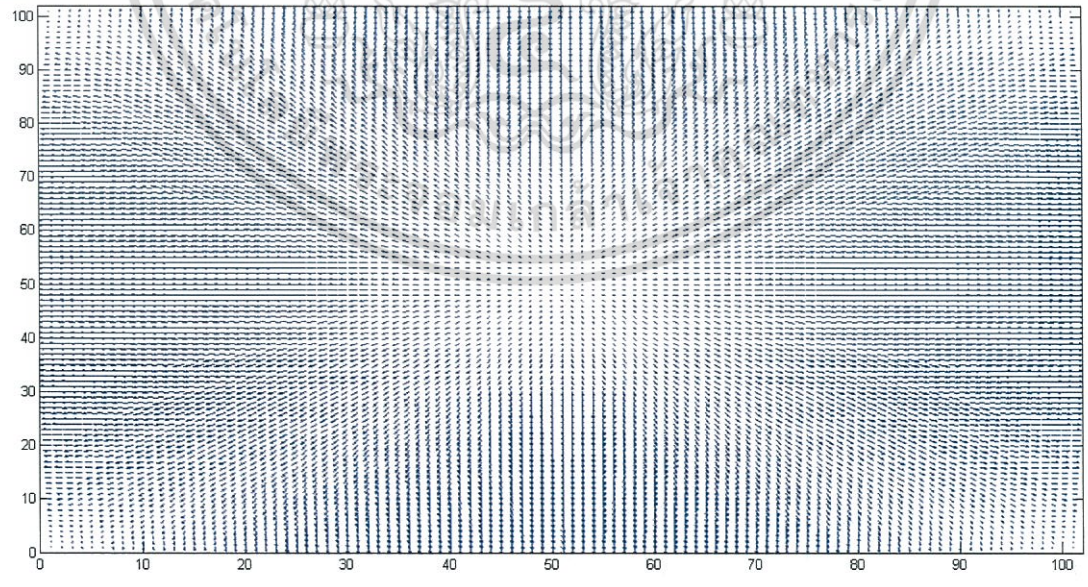
รูปที่ 3.6 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.7 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.25$ แล้วนำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็ว (Velocity field) ได้ดังนี้



รูปที่ 3.8 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ($p = 0.5$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 2</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.006$ และ $p = 0.6$ ดังนั้นผลเฉลยค่า Z, U, V ที่ได้จากการคำนวณ ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.9-3.11 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.9 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.3$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

Y \ X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
0.2	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
0.3	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0126	0.0138	0.0126	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
0.4	0.0000	0.0034	0.0074	0.0126	0.0171	0.0186	0.0171	0.0126	0.0074	0.0034	0.0000
0.5	0.0000	0.0038	0.0082	0.0138	0.0186	0.0202	0.0186	0.0138	0.0082	0.0038	0.0000
0.6	0.0000	0.0034	0.0074	0.0126	0.0171	0.0186	0.0171	0.0126	0.0074	0.0034	0.0000
0.7	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0126	0.0138	0.0126	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
0.8	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
0.9	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.9 แสดงผลเฉลยของค่า Z นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.10 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.3$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.0141	-0.0135	-0.0116	-0.0083	-0.0041	0.0000	0.0041	0.0083	0.0116	0.0135	0.0141
0.2	-0.0269	-0.0257	-0.0221	-0.0157	-0.0079	0.0000	0.0079	0.0157	0.0221	0.0257	0.0269
0.3	-0.0371	-0.0355	-0.0304	-0.0216	-0.0108	0.0000	0.0108	0.0216	0.0304	0.0355	0.0371
0.4	-0.0434	-0.0415	-0.0355	-0.0252	-0.0126	0.0000	0.0126	0.0252	0.0355	0.0415	0.0434
0.5	-0.0455	-0.0434	-0.0372	-0.0264	-0.0132	0.0000	0.0132	0.0264	0.0372	0.0434	0.0455
0.6	-0.0434	-0.0415	-0.0355	-0.0252	-0.0126	0.0000	0.0126	0.0252	0.0355	0.0415	0.0434
0.7	-0.0371	-0.0355	-0.0304	-0.0216	-0.0108	0.0000	0.0108	0.0216	0.0304	0.0355	0.0371
0.8	-0.0269	-0.0257	-0.0221	-0.0157	-0.0079	0.0000	0.0079	0.0157	0.0221	0.0257	0.0269
0.9	-0.0141	-0.0135	-0.0116	-0.0083	-0.0041	0.0000	0.0041	0.0083	0.0116	0.0135	0.0141
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.10 แสดงผลเฉลยของค่า U นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

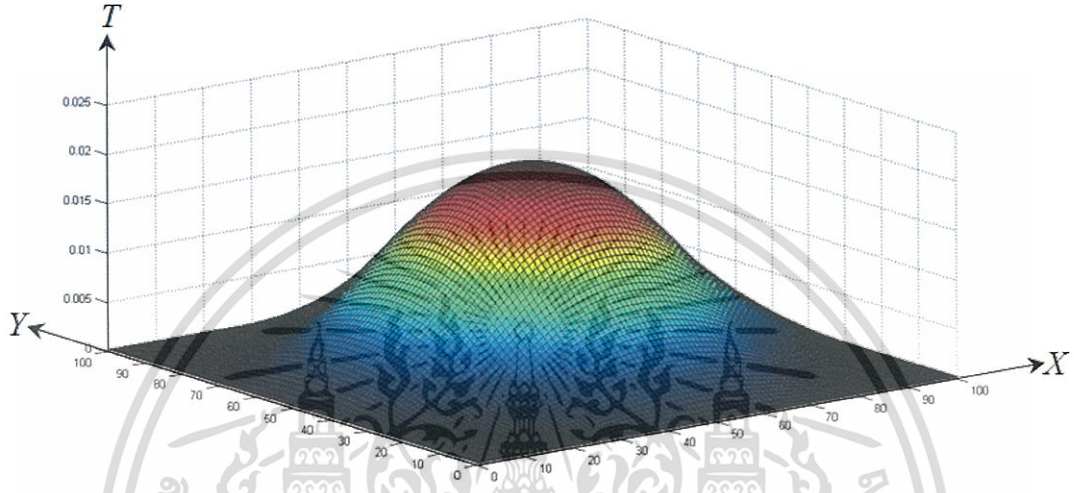
ตารางที่ 3.11 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.3$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	-0.0141	-0.0269	-0.0371	-0.0434	-0.0455	-0.0434	-0.0371	-0.0269	-0.0141	0.0000
0.1	0.0000	-0.0135	-0.0257	-0.0355	-0.0415	-0.0434	-0.0415	-0.0355	-0.0257	-0.0135	0.0000
0.2	0.0000	-0.0116	-0.0221	-0.0304	-0.0355	-0.0372	-0.0355	-0.0304	-0.0221	-0.0116	0.0000
0.3	0.0000	-0.0083	-0.0157	-0.0216	-0.0252	-0.0264	-0.0252	-0.0216	-0.0157	-0.0083	0.0000
0.4	0.0000	-0.0041	-0.0079	-0.0108	-0.0126	-0.0132	-0.0126	-0.0108	-0.0079	-0.0041	0.0000
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.0000	0.0041	0.0079	0.0108	0.0126	0.0132	0.0126	0.0108	0.0079	0.0041	0.0000
0.7	0.0000	0.0083	0.0157	0.0216	0.0252	0.0264	0.0252	0.0216	0.0157	0.0083	0.0000
0.8	0.0000	0.0116	0.0221	0.0304	0.0355	0.0372	0.0355	0.0304	0.0221	0.0116	0.0000
0.9	0.0000	0.0135	0.0257	0.0355	0.0415	0.0434	0.0415	0.0355	0.0257	0.0135	0.0000
1.0	0.0000	0.0141	0.0269	0.0371	0.0434	0.0455	0.0434	0.0371	0.0269	0.0141	0.0000

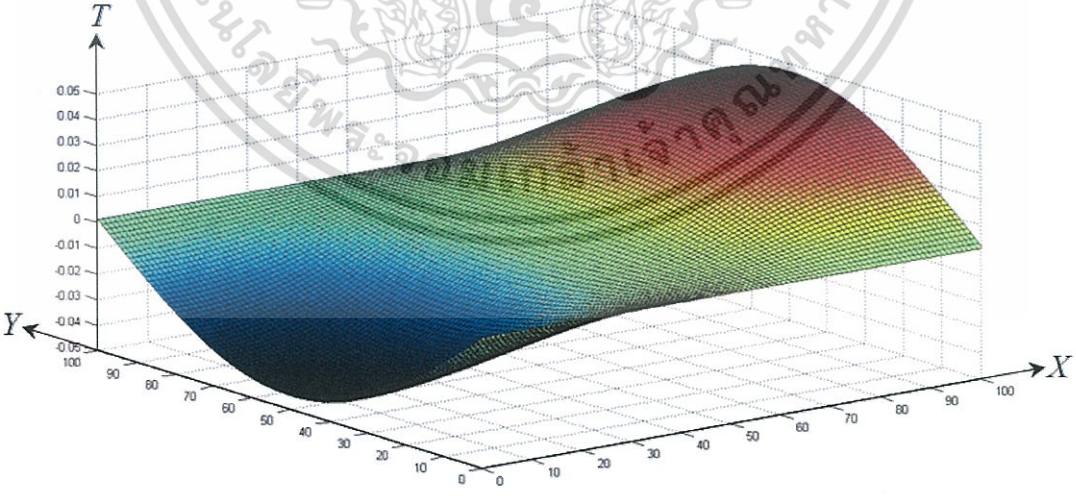
ตารางที่ 3.11 แสดงผลเฉลยของค่า V นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.3$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.3$ และความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.3$ ที่ได้จากผลเฉลยโดยประมาณได้แสดงกราฟไว้ดังรูปที่ 3.9-3.11 ตามลำดับ

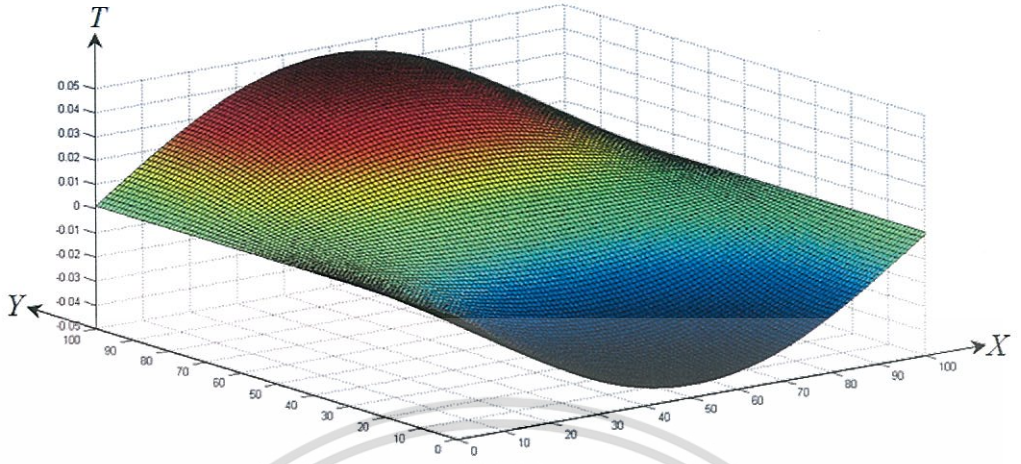


รูปที่ 3.9 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์



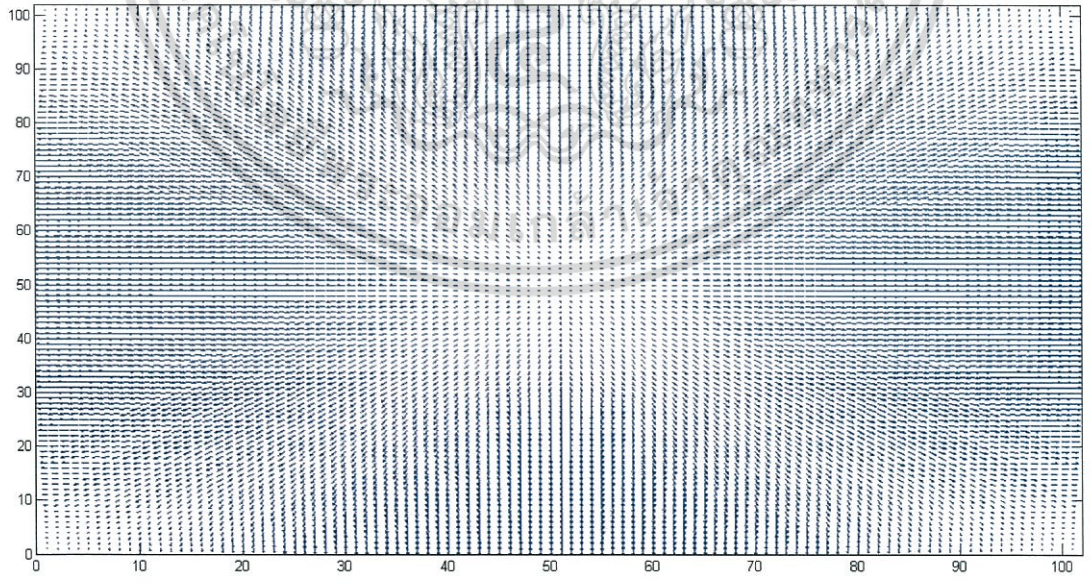
รูปที่ 3.10 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.11 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.3$ แล้ว นำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็ว ได้ดังนี้



รูปที่ 3.12 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ($p = 0.6$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 3</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.01$ และ $p = 1.0$ ดังนั้นผลเฉลยค่า Z, U, V ที่ได้จากการคำนวณ ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.12-3.114 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.12 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.5$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

Y \ X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	4.81E+10	4.91E+08	-2.65E+04	-3.08E+04	5.18E+04	-2.12E+04	-8.60E+03	4.91E+08	4.81E+10	0.0000
0.2	0.0000	4.91E+08	1.92E+05	8.00E+03	-7.12E+04	-3.80E+04	-1.02E+05	-7.00E+04	7.82E+04	4.91E+08	0.0000
0.3	0.0000	4.90E+03	2.98E+04	5.72E+03	-2.76E+04	-3.90E+04	-2.19E+05	-1.61E+05	-1.10E+05	-3.89E+03	0.0000
0.4	0.0000	-8.09E+04	-4.06E+04	-5.71E+04	-2.69E+04	-6.95E+04	-1.90E+05	-1.46E+05	-2.03E+05	-6.94E+04	0.0000
0.5	0.0000	1.15E+04	1.24E+05	-2.37E+04	-1.53E+04	-6.68E+04	-1.20E+05	-1.45E+04	2.64E+04	1.73E+04	0.0000
0.6	0.0000	3.81E+04	7.23E+04	-3.00E+03	-1.51E+04	-2.41E+04	-1.19E+05	1.50E+04	1.85E+05	6.24E+04	0.0000
0.7	0.0000	6.52E+04	3.70E+04	1.34E+04	2.31E+04	9.09E+04	-1.20E+03	-3.31E+04	1.58E+05	1.26E+05	0.0000
0.8	0.0000	4.91E+08	1.82E+05	-3.43E+04	1.10E+05	7.11E+04	1.01E+05	-5.64E+04	1.20E+05	4.91E+08	0.0000
0.9	0.0000	4.81E+10	4.91E+08	3.21E+04	1.43E+04	-3.55E+04	1.98E+03	1.33E+04	4.91E+08	4.81E+10	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.12 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า Z นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.13 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.5$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	1.14E+10	5.96E+09	1.55E+08	1.22E+04	-3.82E+03	3.27E+02	2.88E+03	-1.30E+04	-1.55E+08	-5.96E+09	-1.14E+10
0.2	1.68E+08	7.29E+07	4.02E+04	6.19E+03	-1.24E+03	2.49E+03	3.64E+02	-2.01E+03	-4.16E+04	-7.29E+07	-1.68E+08
0.3	3.93E+04	4.30E+02	-7.46E+01	3.25E+03	-2.79E+03	1.00E+04	-4.64E+02	-1.08E+03	-4.95E+03	-7.11E+03	-4.35E+04
0.4	-7.63E+03	-2.98E+03	3.18E+03	-4.83E+03	9.91E+02	1.09E+04	-8.45E+03	8.46E+03	-4.85E+03	-6.30E+03	1.32E+03
0.5	-1.16E+03	-5.00E+03	9.20E+02	5.25E+03	-1.91E+03	9.36E+03	-7.63E+03	-2.80E+03	6.60E+02	-9.81E+02	-2.59E+03
0.6	1.39E+03	-2.65E+03	1.00E+03	4.97E+03	-3.49E+03	7.06E+03	-1.92E+03	-1.18E+04	1.91E+03	4.36E+03	-2.76E+03
0.7	4.44E+04	3.06E+03	-1.66E+03	5.68E+03	-6.58E+03	5.11E+02	8.62E+03	-1.02E+04	-1.42E+03	-9.73E+01	-4.81E+04
0.8	1.68E+08	7.29E+07	4.48E+04	-1.26E+03	-5.24E+03	1.53E+03	3.79E+03	3.34E+03	-4.31E+04	-7.29E+07	-1.68E+08
0.9	1.14E+10	5.96E+09	1.55E+08	1.17E+04	1.09E+03	7.27E+02	-1.07E+03	-1.17E+04	-1.55E+08	-5.96E+09	-1.14E+10
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.13 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า U นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

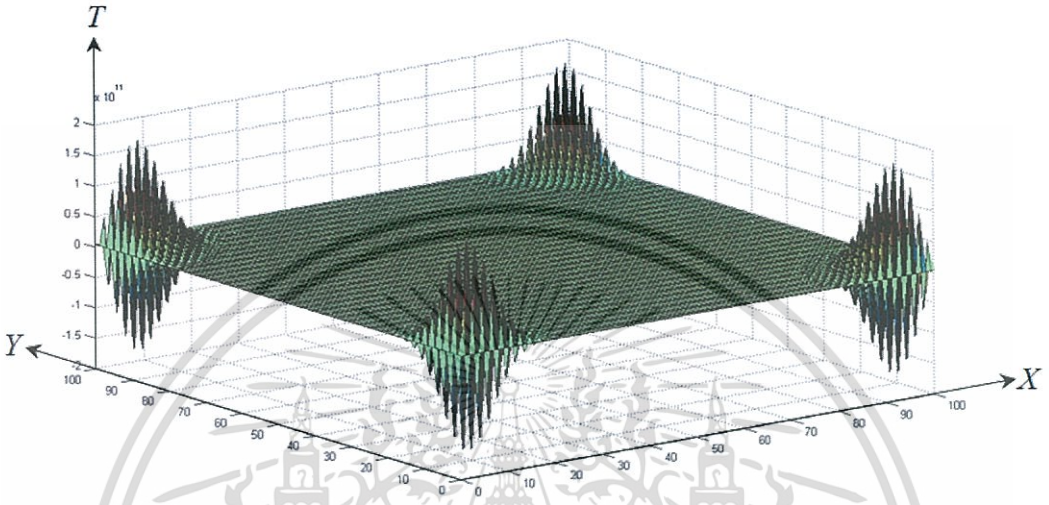
ตารางที่ 3.14 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.5$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	1.14E+10	1.68E+08	4.07E+04	7.27E+02	4.38E+03	-2.50E+02	4.19E+04	1.68E+08	1.14E+10	0.0000
0.1	0.0000	5.96E+09	7.29E+07	4.50E+03	5.05E+03	2.77E+03	2.84E+03	5.61E+03	7.29E+07	5.96E+09	0.0000
0.2	0.0000	1.55E+08	3.65E+04	-3.12E+03	-2.98E+03	1.23E+03	5.18E+03	3.40E+03	4.37E+04	1.55E+08	0.0000
0.3	0.0000	1.45E+04	6.16E+03	1.69E+03	-2.44E+03	-6.15E+02	1.51E+03	2.65E+03	5.39E+03	1.44E+04	0.0000
0.4	0.0000	1.62E+03	-3.51E+03	2.49E+03	4.77E+03	5.09E+03	-4.20E+02	-4.82E+03	-3.28E+03	-5.39E+02	0.0000
0.5	0.0000	-6.84E+03	-6.16E+03	-3.52E+03	-6.21E+03	-5.65E+03	-5.38E+03	-4.76E+03	-1.28E+04	-4.93E+03	0.0000
0.6	0.0000	2.01E+03	5.95E+03	-1.16E+03	3.77E+03	-7.93E+02	9.63E+02	8.03E+02	-3.26E+03	-1.65E+03	0.0000
0.7	0.0000	-1.43E+04	9.33E+02	4.09E+03	-7.31E+03	-7.92E+03	-1.03E+04	3.33E+03	6.25E+03	-1.20E+04	0.0000
0.8	0.0000	-1.55E+08	-4.38E+04	-3.91E+03	1.73E+03	8.92E+03	1.62E+03	-3.12E+03	-3.52E+04	-1.55E+08	0.0000
0.9	0.0000	-5.96E+09	-7.29E+07	-1.43E+03	4.28E+03	1.36E+03	5.24E+03	-2.84E+03	-7.29E+07	-5.96E+09	0.0000
1.0	0.0000	-1.14E+10	-1.68E+08	-4.09E+04	9.48E+02	3.50E+03	2.80E+03	-4.07E+04	-1.68E+08	-1.14E+10	0.0000

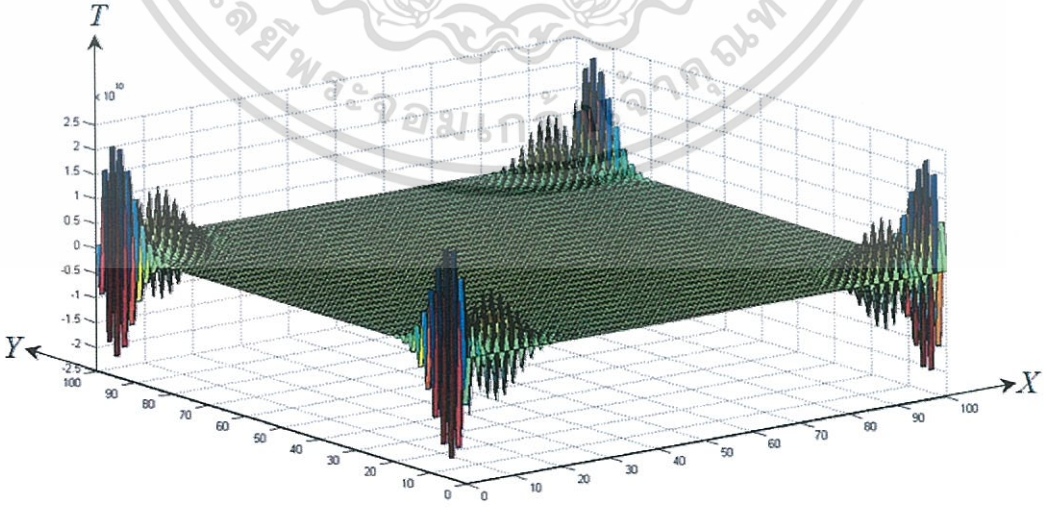
ตารางที่ 3.14 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า V นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.5$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.5$ และความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อเวลา $T = 0.5$ ที่ได้จากผลเฉลยโดยประมาณได้แสดงกราฟไว้ดังรูปที่ 3.13-3.15 ตามลำดับ

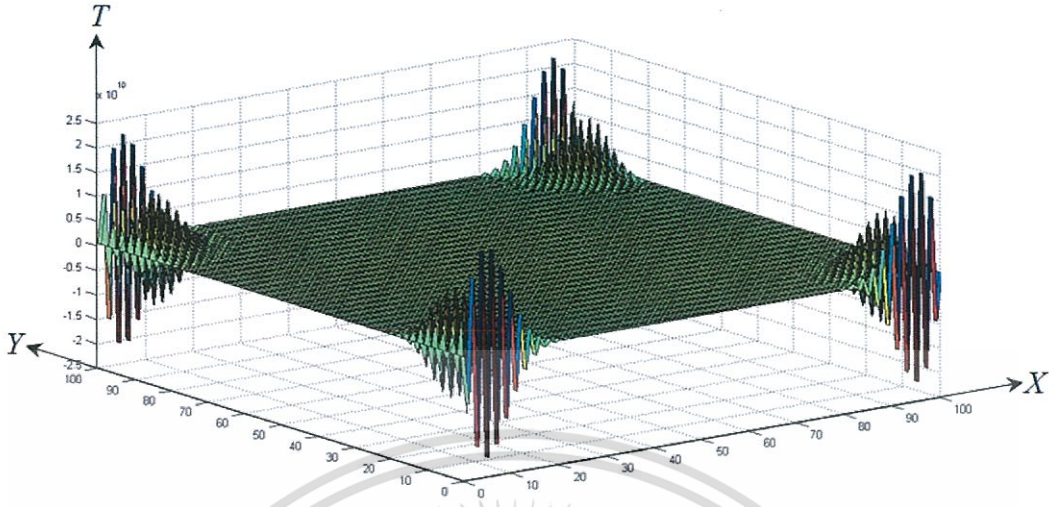


รูปที่ 3.13 การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์



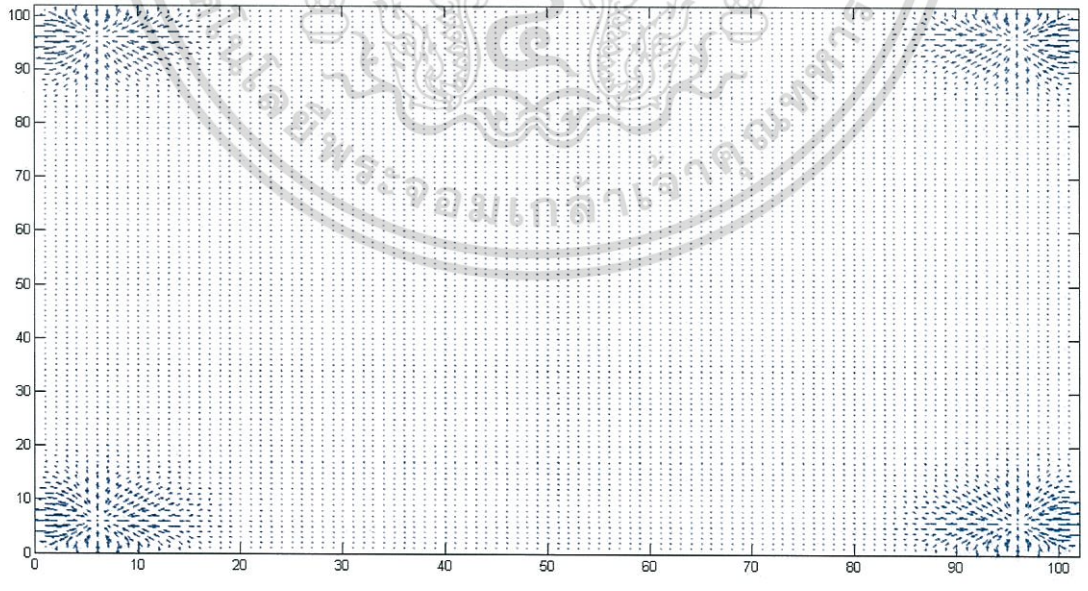
รูปที่ 3.14 การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.15 การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำ ในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.5$ แล้ว นำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็วที่เกิดการลู่ออกของผลเฉลย ได้ดังนี้



รูปที่ 3.16 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ($p = 1.0$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 4</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.012$ และ $p = 1.2$ ดังนั้นผลเฉลยค่า Z, U, V ที่ได้จากการคำนวณ ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.15-3.17 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.15 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.6$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

Y \ X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	2.52E+20	4.55E+17	-4.50E+14	-1.76E+14	8.39E+14	-1.64E+14	2.03E+14	4.55E+17	2.52E+20	0.0000
0.2	0.0000	4.56E+17	1.82E+15	1.08E+15	-3.13E+14	-1.73E+14	-6.85E+14	5.27E+14	2.83E+14	4.55E+17	0.0000
0.3	0.0000	2.14E+14	7.84E+14	-1.39E+15	-5.52E+14	-2.41E+14	-2.29E+15	-3.03E+15	-9.42E+14	-2.35E+13	0.0000
0.4	0.0000	-3.69E+14	9.17E+13	-3.91E+14	-2.98E+14	-1.12E+15	-1.94E+15	-1.21E+15	-2.97E+15	-7.23E+14	0.0000
0.5	0.0000	6.31E+14	3.31E+15	1.11E+15	5.12E+14	-2.01E+15	1.48E+14	6.69E+14	1.80E+15	2.53E+14	0.0000
0.6	0.0000	8.85E+14	1.91E+15	5.09E+13	-3.62E+14	-2.00E+14	-2.28E+15	-5.95E+14	2.23E+15	7.89E+14	0.0000
0.7	0.0000	3.18E+14	1.46E+15	-1.31E+15	-1.84E+15	5.76E+13	-2.50E+15	-1.40E+15	2.27E+15	1.10E+15	0.0000
0.8	0.0000	4.56E+17	1.36E+15	-5.53E+14	3.87E+14	2.81E+14	3.73E+14	-8.30E+14	-3.12E+13	4.55E+17	0.0000
0.9	0.0000	2.52E+20	4.56E+17	1.93E+14	6.29E+12	-4.79E+14	1.82E+14	-1.23E+14	4.55E+17	2.52E+20	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.15 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า Z นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.6$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.16 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.6$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	7.80E+19	3.62E+19	1.54E+17	3.60E+13	-5.70E+13	1.26E+13	2.53E+13	-2.76E+13	-1.54E+17	-3.62E+19	-7.80E+19
0.2	2.82E+17	7.14E+16	9.48E+11	6.15E+13	3.44E+13	3.05E+13	-5.08E+13	-3.34E+13	2.83E+13	-7.15E+16	-2.82E+17
0.3	-7.47E+12	-5.00E+13	4.62E+13	9.76E+13	-1.12E+14	7.80E+13	6.69E+13	-7.28E+13	-6.51E+13	-3.29E+13	-3.50E+13
0.4	-5.70E+13	-5.55E+13	6.62E+13	-6.11E+13	5.21E+13	1.05E+14	-1.40E+14	1.12E+14	-4.37E+13	-8.57E+13	-1.01E+12
0.5	5.83E+12	-7.02E+13	-5.43E+13	9.85E+13	7.36E+13	4.68E+13	-1.50E+14	-2.09E+13	4.39E+13	5.54E+12	-3.62E+13
0.6	2.20E+13	-6.03E+13	2.82E+13	9.43E+13	-7.48E+13	1.16E+14	-2.69E+13	-1.30E+14	1.61E+13	2.24E+13	-4.29E+13
0.7	3.62E+12	-3.25E+13	-3.44E+13	2.40E+14	-1.84E+14	3.76E+13	1.49E+14	-2.61E+14	1.55E+13	3.61E+13	-5.35E+13
0.8	2.82E+17	7.15E+16	2.34E+13	5.68E+13	-8.42E+13	3.90E+13	2.67E+13	1.61E+13	-3.64E+13	-7.15E+16	-2.82E+17
0.9	7.80E+19	3.62E+19	1.54E+17	-5.46E+12	2.13E+13	-1.58E+11	-2.92E+13	4.99E+13	-1.54E+17	-3.62E+19	-7.80E+19
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.16 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า U นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.6$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

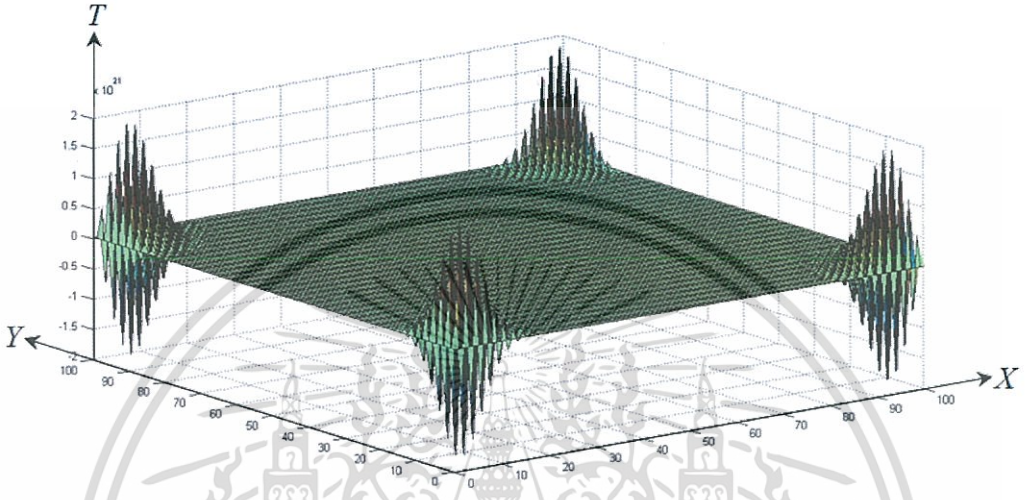
ตารางที่ 3.17 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.6$ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	7.80E+19	2.82E+17	-9.37E+11	5.31E+12	4.31E+13	-1.49E+13	2.31E+13	2.82E+17	7.80E+19	0.0000
0.1	0.0000	3.62E+19	7.15E+16	2.00E+12	2.88E+13	1.34E+13	-7.35E+12	-9.66E+12	7.15E+16	3.62E+19	0.0000
0.2	0.0000	1.54E+17	-4.85E+13	-2.43E+13	-2.98E+13	-1.37E+13	4.43E+13	5.32E+13	1.79E+13	1.54E+17	0.0000
0.3	0.0000	3.01E+13	8.54E+13	8.12E+13	7.79E+12	5.12E+13	4.39E+13	1.15E+14	1.23E+14	2.71E+13	0.0000
0.4	0.0000	3.09E+13	-7.79E+13	-8.38E+13	2.22E+13	4.88E+13	-6.02E+13	-1.81E+14	-9.06E+13	2.68E+13	0.0000
0.5	0.0000	-8.26E+13	-7.16E+13	-4.92E+13	-1.21E+14	-9.87E+13	-4.11E+13	3.52E+13	-1.42E+14	-6.84E+13	0.0000
0.6	0.0000	4.37E+13	7.20E+13	1.22E+14	2.05E+14	6.52E+13	1.63E+14	4.66E+13	3.63E+13	-2.05E+13	0.0000
0.7	0.0000	-9.64E+12	4.46E+13	-1.55E+13	-1.20E+14	-1.20E+14	-1.71E+14	-5.00E+13	1.64E+13	2.16E+13	0.0000
0.8	0.0000	-1.54E+17	-4.80E+13	-7.02E+13	-3.55E+13	9.08E+13	-2.08E+13	-4.34E+13	9.31E+13	-1.54E+17	0.0000
0.9	0.0000	-3.62E+19	-7.14E+16	3.34E+13	3.68E+13	-7.19E+12	3.92E+13	3.04E+13	-7.15E+16	-3.62E+19	0.0000
1.0	0.0000	-7.80E+19	-2.82E+17	9.63E+12	1.34E+13	2.25E+13	1.86E+13	2.10E+13	-2.82E+17	-7.80E+19	0.0000

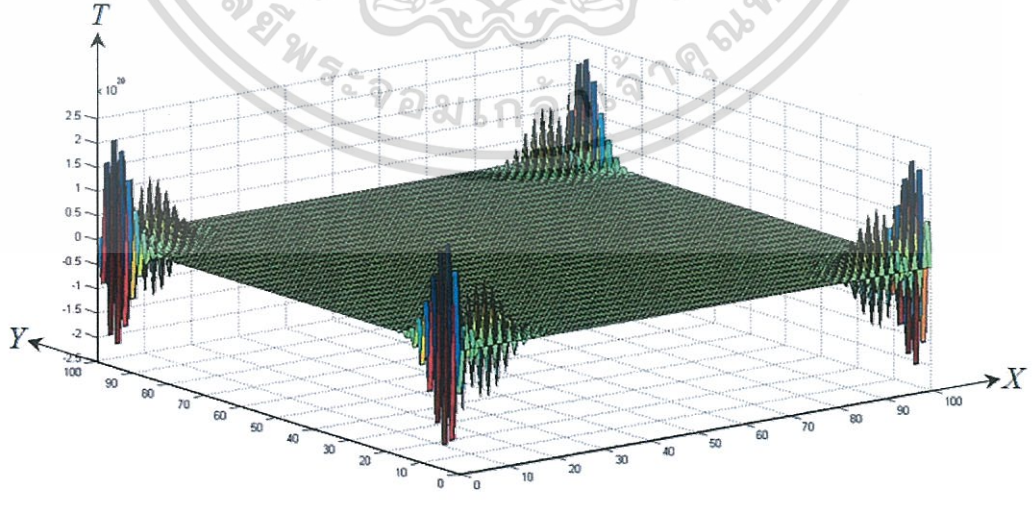
ตารางที่ 3.17 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า V นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.6$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.6$ และความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.6$ ที่ได้จากผลเฉลยโดยประมาณได้แสดงกราฟไว้ดังรูปที่ 3.17-3.19 ตามลำดับ

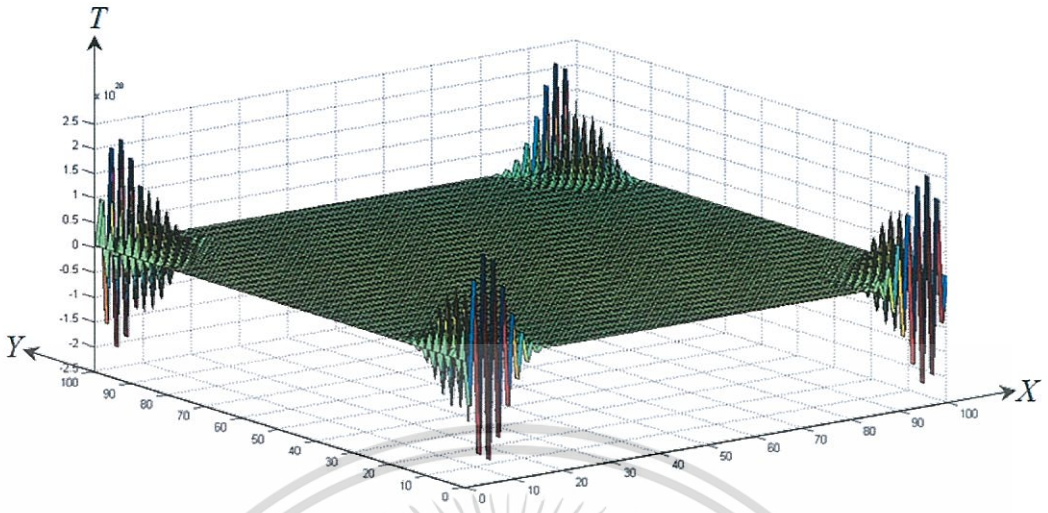


รูปที่ 3.17 การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์



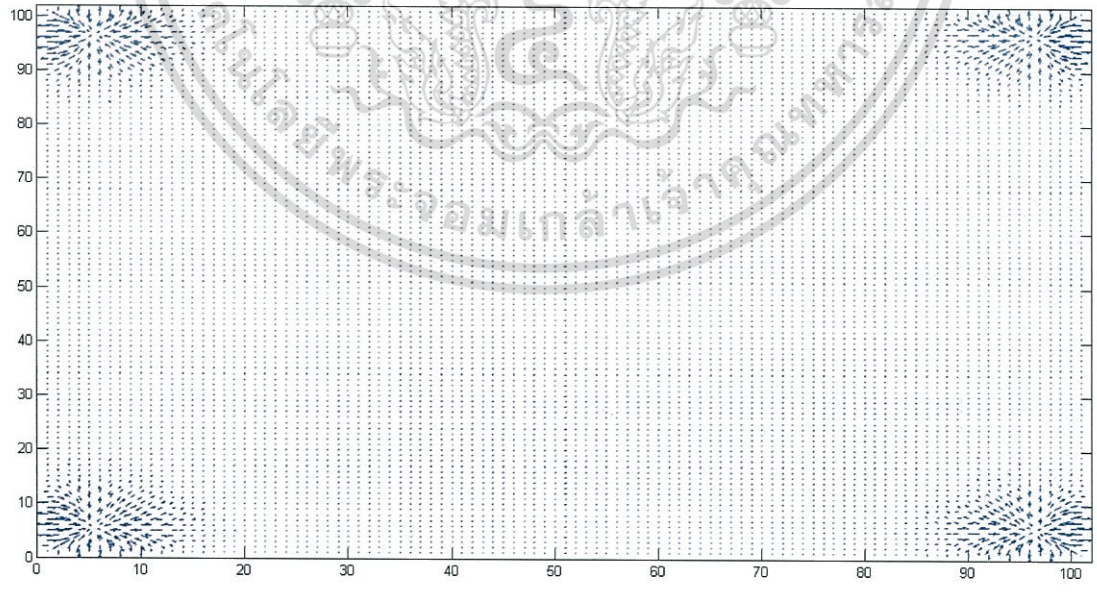
รูปที่ 3.18 การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.19 การลู่ออกของผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.6$ แล้วนำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็วที่เกิดการลู่ออกของผลเฉลย ได้ดังนี้



รูปที่ 3.20 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.6$ โดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ($p = 1.2$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก ผู้วิจัยพิจารณาสมการน้ำตื้นในรูปของพจน์ไร้มิติ โดยกำหนดให้ ตัวแปรไร้มิติมีดังนี้ [7]

$$U=\frac{u}{\sqrt{gh}} \quad (3.9), \qquad V=\frac{v}{\sqrt{gh}}, \quad (3.10)$$

$$X=\frac{x}{l} \quad (3.11), \qquad Y=\frac{y}{l}, \quad (3.12)$$

$$Z=\frac{\zeta}{h} \quad (3.13), \qquad T=\frac{t\sqrt{gh}}{l} \quad (3.14)$$

จากผลเฉลยโดยประมาณของค่า Z,U,V ที่อยู่ในรูปไร้มิติแล้ว สามารถนำมาแปลงกลับให้อยู่ในรูปเชิงมิติได้ดังนี้

$$u=U\sqrt{gh} \quad (3.15), \qquad v=V\sqrt{gh} \quad (3.16)$$

$$x=Xl \quad (3.17), \qquad y=Yl \quad (3.18)$$

$$\zeta=Zh \quad (3.19), \qquad t=\frac{Tl}{\sqrt{gh}} \quad (3.20)$$

โดยกำหนดให้ $h=1$ เมตร , $l=3200$ เมตร , $g=9.8$ เมตร/วินาที^{2}

ตัวอย่าง การแปลงค่าผลเฉลย Z,U,V ให้อยู่ในรูปเชิงมิติ

จากตารางที่ 3.6 ถ้า $Z=0.0236$

แล้ว $\zeta=(0.0236)(1)$ จะได้ $\zeta=0.0236$ เมตร

ตารางที่ 3.7 ถ้า $U=-0.0219$

แล้ว $u=(-0.0219)\sqrt{(9.8)(1)}$ จะได้ $u=-0.0686$ เมตร/วินาที

ตารางที่ 3.8 ถ้า $V=0.0245$

แล้ว $v=(0.0245)\sqrt{(9.8)(1)}$ จะได้ $v=0.0767$ เมตร/วินาที

ดังนั้นผลเฉลยทั้ง 4 กรณีของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ที่อยู่ในรูปเชิงมิติเป็นดังตารางต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 1</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.005$ และ $p = 0.5$ จากตารางที่ 3.6-3.8 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.25)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 255.55$ วินาที ดังนั้นค่าผลเฉลย ζ, u, v ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.18-3.20 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.18 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
640	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
960	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
1280	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
1600	0.0000	0.0079	0.0163	0.0251	0.0307	0.0326	0.0307	0.0251	0.0163	0.0079	0.0000
1920	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
2240	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
2560	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
2880	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.18 แสดงผลเฉลยของค่า ζ เมตร นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 255.55$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.19 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	-0.0426	-0.0405	-0.0339	-0.0231	-0.0115	0.0000	0.0115	0.0231	0.0339	0.0405	0.0426
640	-0.0807	-0.0767	-0.0642	-0.0436	-0.0218	0.0000	0.0218	0.0436	0.0642	0.0767	0.0807
960	-0.1099	-0.1044	-0.0872	-0.0592	-0.0296	0.0000	0.0296	0.0592	0.0872	0.1044	0.1099
1280	-0.1275	-0.1210	-0.1010	-0.0686	-0.0343	0.0000	0.0343	0.0686	0.1010	0.1210	0.1275
1600	-0.1334	-0.1266	-0.1057	-0.0717	-0.0359	0.0000	0.0359	0.0717	0.1057	0.1266	0.1334
1920	-0.1275	-0.1210	-0.1010	-0.0686	-0.0343	0.0000	0.0343	0.0686	0.1010	0.1210	0.1275
2240	-0.1099	-0.1044	-0.0872	-0.0592	-0.0296	0.0000	0.0296	0.0592	0.0872	0.1044	0.1099
2560	-0.0807	-0.0767	-0.0642	-0.0436	-0.0218	0.0000	0.0218	0.0436	0.0642	0.0767	0.0807
2880	-0.0426	-0.0405	-0.0339	-0.0231	-0.0115	0.0000	0.0115	0.0231	0.0339	0.0405	0.0426
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.19 แสดงผลเฉลยของค่า u เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $t = 255.55$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.20 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	-0.0426	-0.0807	-0.1099	-0.1275	-0.1334	-0.1275	-0.1099	-0.0807	-0.0426	0.0000
320	0.0000	-0.0405	-0.0767	-0.1044	-0.1210	-0.1266	-0.1210	-0.1044	-0.0767	-0.0405	0.0000
640	0.0000	-0.0339	-0.0642	-0.0872	-0.1010	-0.1057	-0.1010	-0.0872	-0.0642	-0.0339	0.0000
960	0.0000	-0.0231	-0.0436	-0.0592	-0.0686	-0.0717	-0.0686	-0.0592	-0.0436	-0.0231	0.0000
1280	0.0000	-0.0115	-0.0218	-0.0296	-0.0343	-0.0359	-0.0343	-0.0296	-0.0218	-0.0115	0.0000
1600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1920	0.0000	0.0115	0.0218	0.0296	0.0343	0.0359	0.0343	0.0296	0.0218	0.0115	0.0000
2240	0.0000	0.0231	0.0436	0.0592	0.0686	0.0717	0.0686	0.0592	0.0436	0.0231	0.0000
2560	0.0000	0.0339	0.0642	0.0872	0.1010	0.1057	0.1010	0.0872	0.0642	0.0339	0.0000
2880	0.0000	0.0405	0.0767	0.1044	0.1210	0.1266	0.1210	0.1044	0.0767	0.0405	0.0000
3200	0.0000	0.0426	0.0807	0.1099	0.1275	0.1334	0.1275	0.1099	0.0807	0.0426	0.0000

ตารางที่ 3.20 แสดงผลเฉลยของค่า v เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $t = 255.55$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 2</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.006$ และ $p = 0.6$ จากตารางที่ 3.9-3.11 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.3)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 306.66$ วินาที ดังนั้นค่าผลเฉลย ζ, u, v ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.21-3.23 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.21 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
640	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
960	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0126	0.0138	0.0126	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
1280	0.0000	0.0034	0.0074	0.0126	0.0171	0.0186	0.0171	0.0126	0.0074	0.0034	0.0000
1600	0.0000	0.0038	0.0082	0.0138	0.0186	0.0202	0.0186	0.0138	0.0082	0.0038	0.0000
1920	0.0000	0.0034	0.0074	0.0126	0.0171	0.0186	0.0171	0.0126	0.0074	0.0034	0.0000
2240	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0126	0.0138	0.0126	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
2560	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
2880	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.21 แสดงผลเฉลยของค่า ζ เมตร นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 306.66$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.22 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	-0.0441	-0.0422	-0.0363	-0.0259	-0.0130	0.0000	0.0130	0.0259	0.0363	0.0422	0.0441
640	-0.0842	-0.0805	-0.0691	-0.0492	-0.0246	0.0000	0.0246	0.0492	0.0691	0.0805	0.0842
960	-0.1161	-0.1110	-0.0951	-0.0675	-0.0338	0.0000	0.0338	0.0675	0.0951	0.1110	0.1161
1280	-0.1358	-0.1298	-0.1111	-0.0788	-0.0394	0.0000	0.0394	0.0788	0.1111	0.1298	0.1358
1600	-0.1424	-0.1360	-0.1164	-0.0825	-0.0413	0.0000	0.0413	0.0825	0.1164	0.1360	0.1424
1920	-0.1358	-0.1298	-0.1111	-0.0788	-0.0394	0.0000	0.0394	0.0788	0.1111	0.1298	0.1358
2240	-0.1161	-0.1110	-0.0951	-0.0675	-0.0338	0.0000	0.0338	0.0675	0.0951	0.1110	0.1161
2560	-0.0842	-0.0805	-0.0691	-0.0492	-0.0246	0.0000	0.0246	0.0492	0.0691	0.0805	0.0842
2880	-0.0441	-0.0422	-0.0363	-0.0259	-0.0130	0.0000	0.0130	0.0259	0.0363	0.0422	0.0441
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.22 แสดงผลเฉลยของค่า u เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำใน ทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $t = 306.66$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.23 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	-0.0441	-0.0842	-0.1161	-0.1358	-0.1424	-0.1358	-0.1161	-0.0842	-0.0441	0.0000
320	0.0000	-0.0422	-0.0805	-0.1110	-0.1298	-0.1360	-0.1298	-0.1110	-0.0805	-0.0422	0.0000
640	0.0000	-0.0363	-0.0691	-0.0951	-0.1111	-0.1164	-0.1111	-0.0951	-0.0691	-0.0363	0.0000
960	0.0000	-0.0259	-0.0492	-0.0675	-0.0788	-0.0825	-0.0788	-0.0675	-0.0492	-0.0259	0.0000
1280	0.0000	-0.0130	-0.0246	-0.0338	-0.0394	-0.0413	-0.0394	-0.0338	-0.0246	-0.0130	0.0000
1600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1920	0.0000	0.0130	0.0246	0.0338	0.0394	0.0413	0.0394	0.0338	0.0246	0.0130	0.0000
2240	0.0000	0.0259	0.0492	0.0675	0.0788	0.0825	0.0788	0.0675	0.0492	0.0259	0.0000
2560	0.0000	0.0363	0.0691	0.0951	0.1111	0.1164	0.1111	0.0951	0.0691	0.0363	0.0000
2880	0.0000	0.0422	0.0805	0.1110	0.1298	0.1360	0.1298	0.1110	0.0805	0.0422	0.0000
3200	0.0000	0.0441	0.0842	0.1161	0.1358	0.1424	0.1358	0.1161	0.0842	0.0441	0.0000

ตารางที่ 3.23 แสดงผลเฉลยของค่า v เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $t = 306.66$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 3</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.01$ และ $p = 1.0$ จากตารางที่ 3.12-3.14 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.5)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 511.10$ วินาที ดังนั้นค่าผลเฉลย ζ, u, v ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.24-3.26 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.24 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	4.81E+10	4.91E+08	-2.65E+04	-3.08E+04	5.18E+04	-2.12E+04	-8.60E+03	4.91E+08	4.81E+10	0.0000
640	0.0000	4.91E+08	1.92E+05	8.00E+03	-7.12E+04	-3.80E+04	-1.02E+05	-7.00E+04	7.82E+04	4.91E+08	0.0000
960	0.0000	4.90E+03	2.98E+04	5.72E+03	-2.76E+04	-3.90E+04	-2.19E+05	-1.61E+05	-1.10E+05	-3.89E+03	0.0000
1280	0.0000	-8.09E+04	-4.06E+04	-5.71E+04	-2.69E+04	-6.95E+04	-1.90E+05	-1.46E+05	-2.03E+05	-6.94E+04	0.0000
1600	0.0000	1.15E+04	1.24E+05	-2.37E+04	-1.53E+04	-6.68E+04	-1.20E+05	-1.45E+04	2.64E+04	1.73E+04	0.0000
1920	0.0000	3.81E+04	7.23E+04	-3.00E+03	-1.51E+04	-2.41E+04	-1.19E+05	1.50E+04	1.85E+05	6.24E+04	0.0000
2240	0.0000	6.52E+04	3.70E+04	1.34E+04	2.31E+04	9.09E+04	-1.20E+03	-3.31E+04	1.58E+05	1.26E+05	0.0000
2560	0.0000	4.91E+08	1.82E+05	-3.43E+04	1.10E+05	7.11E+04	1.01E+05	-5.64E+04	1.20E+05	4.91E+08	0.0000
2880	0.0000	4.81E+10	4.91E+08	3.21E+04	1.43E+04	-3.55E+04	1.98E+03	1.33E+04	4.91E+08	4.81E+10	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.24 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า ζ เมตร นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 511.10$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.25 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	3.57E+10	1.86E+10	4.86E+08	3.81E+04	-1.20E+04	1.02E+03	9.00E+03	-4.08E+04	-4.86E+08	-1.86E+10	-3.57E+10
640	5.27E+08	2.28E+08	1.26E+05	1.94E+04	-3.87E+03	7.81E+03	1.14E+03	-6.30E+03	-1.30E+05	-2.28E+08	-5.27E+08
960	1.23E+05	1.35E+03	-2.33E+02	1.02E+04	-8.72E+03	3.14E+04	-1.45E+03	-3.38E+03	-1.55E+04	-2.23E+04	-1.36E+05
1280	-2.39E+04	-9.32E+03	9.95E+03	-1.51E+04	3.10E+03	3.40E+04	-2.65E+04	2.65E+04	-1.52E+04	-1.97E+04	4.12E+03
1600	-3.65E+03	-1.56E+04	2.88E+03	1.64E+04	-5.97E+03	2.93E+04	-2.39E+04	-8.76E+03	2.07E+03	-3.07E+03	-8.09E+03
1920	4.35E+03	-8.29E+03	3.14E+03	1.56E+04	-1.09E+04	2.21E+04	-6.02E+03	-3.71E+04	5.99E+03	1.37E+04	-8.65E+03
2240	1.39E+05	9.57E+03	-5.20E+03	1.78E+04	-2.06E+04	1.60E+03	2.70E+04	-3.19E+04	-4.43E+03	-3.05E+02	-1.51E+05
2560	5.27E+08	2.28E+08	1.40E+05	-3.95E+03	-1.64E+04	4.79E+03	1.19E+04	1.04E+04	-1.35E+05	-2.28E+08	-5.27E+08
2880	3.57E+10	1.86E+10	4.86E+08	3.66E+04	3.41E+03	2.27E+03	-3.34E+03	-3.66E+04	-4.86E+08	-1.86E+10	-3.57E+10
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.25 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า u เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $t = 511.10$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.26 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	3.57E+10	5.27E+08	1.27E+05	2.28E+03	1.37E+04	-7.82E+02	1.31E+05	5.27E+08	3.57E+10	0.0000
320	0.0000	1.86E+10	2.28E+08	1.41E+04	1.58E+04	8.67E+03	8.88E+03	1.76E+04	2.28E+08	1.86E+10	0.0000
640	0.0000	4.86E+08	1.14E+05	-9.76E+03	-9.33E+03	3.84E+03	1.62E+04	1.06E+04	1.37E+05	4.86E+08	0.0000
960	0.0000	4.52E+04	1.93E+04	5.28E+03	-7.62E+03	-1.93E+03	4.73E+03	8.29E+03	1.69E+04	4.50E+04	0.0000
1280	0.0000	5.09E+03	-1.10E+04	7.80E+03	1.49E+04	1.59E+04	-1.32E+03	-1.51E+04	-1.03E+04	-1.69E+03	0.0000
1600	0.0000	-2.14E+04	-1.93E+04	-1.10E+04	-1.95E+04	-1.77E+04	-1.68E+04	-1.49E+04	-4.02E+04	-1.54E+04	0.0000
1920	0.0000	6.28E+03	1.86E+04	-3.62E+03	1.18E+04	-2.48E+03	3.01E+03	2.51E+03	-1.02E+04	-5.16E+03	0.0000
2240	0.0000	-4.48E+04	2.92E+03	1.28E+04	-2.29E+04	-2.48E+04	-3.24E+04	1.04E+04	1.96E+04	-3.74E+04	0.0000
2560	0.0000	-4.86E+08	-1.37E+05	-1.22E+04	5.43E+03	2.79E+04	5.06E+03	-9.75E+03	-1.10E+05	-4.86E+08	0.0000
2880	0.0000	-1.86E+10	-2.28E+08	-4.48E+03	1.34E+04	4.27E+03	1.64E+04	-8.89E+03	-2.28E+08	-1.86E+10	0.0000
3200	0.0000	-3.57E+10	-5.27E+08	-1.28E+05	2.97E+03	1.09E+04	8.77E+03	-1.27E+05	-5.27E+08	-3.57E+10	0.0000

ตารางที่ 3.26 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า v เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $t = 511.10$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 4</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.012$ และ $p = 1.2$ จากตารางที่ 3.15-3.17 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.6)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 613.32$ วินาที ดังนั้นค่าผลเฉลย ζ, u, v ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 3.27-3.29 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.27 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	2.52E+20	4.55E+17	-4.50E+14	-1.76E+14	8.39E+14	-1.64E+14	2.03E+14	4.55E+17	2.52E+20	0.0000
640	0.0000	4.56E+17	1.82E+15	1.08E+15	-3.13E+14	-1.73E+14	-6.85E+14	5.27E+14	2.83E+14	4.55E+17	0.0000
960	0.0000	2.14E+14	7.84E+14	-1.39E+15	-5.52E+14	-2.41E+14	-2.29E+15	-3.03E+15	-9.42E+14	-2.35E+13	0.0000
1280	0.0000	-3.69E+14	9.17E+13	-3.91E+14	-2.98E+14	-1.12E+15	-1.94E+15	-1.21E+15	-2.97E+15	-7.23E+14	0.0000
1600	0.0000	6.31E+14	3.31E+15	1.11E+15	5.12E+14	-2.01E+15	1.48E+14	6.69E+14	1.80E+15	2.53E+14	0.0000
1920	0.0000	8.85E+14	1.91E+15	5.09E+13	-3.62E+14	-2.00E+14	-2.28E+15	-5.95E+14	2.23E+15	7.89E+14	0.0000
2240	0.0000	3.18E+14	1.46E+15	-1.31E+15	-1.84E+15	5.76E+13	-2.50E+15	-1.40E+15	2.27E+15	1.10E+15	0.0000
2560	0.0000	4.56E+17	1.36E+15	-5.53E+14	3.87E+14	2.81E+14	3.73E+14	-8.30E+14	-3.12E+13	4.55E+17	0.0000
2880	0.0000	2.52E+20	4.56E+17	1.93E+14	6.29E+12	-4.79E+14	1.82E+14	-1.23E+14	4.55E+17	2.52E+20	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.27 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า ζ เมตร นั่นคือ การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 613.32$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.28 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	2.44E+20	1.13E+20	4.81E+17	1.13E+14	-1.78E+14	3.94E+13	7.93E+13	-8.64E+13	-4.81E+17	-1.13E+20	-2.44E+20
640	8.82E+17	2.24E+17	2.97E+12	1.92E+14	1.08E+14	9.55E+13	-1.59E+14	-1.05E+14	8.87E+13	-2.24E+17	-8.82E+17
960	-2.34E+13	-1.56E+14	1.45E+14	3.06E+14	-3.51E+14	2.44E+14	2.09E+14	-2.28E+14	-2.04E+14	-1.03E+14	-1.10E+14
1280	-1.79E+14	-1.74E+14	2.07E+14	-1.91E+14	1.63E+14	3.29E+14	-4.37E+14	3.50E+14	-1.37E+14	-2.68E+14	-3.17E+12
1600	1.82E+13	-2.20E+14	-1.70E+14	3.08E+14	2.30E+14	1.47E+14	-4.71E+14	-6.55E+13	1.37E+14	1.73E+13	-1.13E+14
1920	6.89E+13	-1.89E+14	8.81E+13	2.95E+14	-2.34E+14	3.63E+14	-8.41E+13	-4.07E+14	5.04E+13	7.01E+13	-1.34E+14
2240	1.13E+13	-1.02E+14	-1.08E+14	7.51E+14	-5.76E+14	1.18E+14	4.68E+14	-8.16E+14	4.86E+13	1.13E+14	-1.68E+14
2560	8.82E+17	2.24E+17	7.32E+13	1.78E+14	-2.64E+14	1.22E+14	8.36E+13	5.05E+13	-1.14E+14	-2.24E+17	-8.82E+17
2880	2.44E+20	1.13E+20	4.81E+17	-1.71E+13	6.65E+13	-4.96E+11	-9.14E+13	1.56E+14	-4.81E+17	-1.13E+20	-2.44E+20
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.28 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า u เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $t = 613.32$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.29 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	2.44E+20	8.82E+17	-2.93E+12	1.66E+13	1.35E+14	-4.67E+13	7.23E+13	8.82E+17	2.44E+20	0.0000
320	0.0000	1.13E+20	2.24E+17	6.25E+12	9.00E+13	4.20E+13	-2.30E+13	-3.02E+13	2.24E+17	1.13E+20	0.0000
640	0.0000	4.81E+17	-1.52E+14	-7.60E+13	-9.32E+13	-4.28E+13	1.39E+14	1.67E+14	5.60E+13	4.81E+17	0.0000
960	0.0000	9.41E+13	2.67E+14	2.54E+14	2.44E+13	1.60E+14	1.38E+14	3.60E+14	3.84E+14	8.49E+13	0.0000
1280	0.0000	9.69E+13	-2.44E+14	-2.62E+14	6.95E+13	1.53E+14	-1.88E+14	-5.67E+14	-2.84E+14	8.39E+13	0.0000
1600	0.0000	-2.59E+14	-2.24E+14	-1.54E+14	-3.78E+14	-3.09E+14	-1.29E+14	1.10E+14	-4.45E+14	-2.14E+14	0.0000
1920	0.0000	1.37E+14	2.26E+14	3.82E+14	6.42E+14	2.04E+14	5.11E+14	1.46E+14	1.14E+14	-6.42E+13	0.0000
2240	0.0000	-3.02E+13	1.40E+14	-4.86E+13	-3.75E+14	-3.76E+14	-5.37E+14	-1.56E+14	5.13E+13	6.76E+13	0.0000
2560	0.0000	-4.81E+17	-1.50E+14	-2.20E+14	-1.11E+14	2.84E+14	-6.52E+13	-1.36E+14	2.92E+14	-4.81E+17	0.0000
2880	0.0000	-1.13E+20	-2.24E+17	1.05E+14	1.15E+14	-2.25E+13	1.23E+14	9.51E+13	-2.24E+17	-1.13E+20	0.0000
3200	0.0000	-2.44E+20	-8.82E+17	3.01E+13	4.19E+13	7.06E+13	5.81E+13	6.58E+13	-8.82E+17	-2.44E+20	0.0000

ตารางที่ 3.29 แสดงผลเฉลยที่ลู่ออกของค่า v เมตร/วินาที นั่นคือ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $t = 613.32$ วินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ดังนี้ ถ้ากรณีที่ $p = 0.5$ และ $p = 0.6$ จากผลเฉลยดังตารางและกราฟต่างๆทั้ง 2 กรณีนี้ มีค่า $p < 1$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขของความเสถียร ดังนั้นค่าของผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จึงลู่เข้า ซึ่งจะเห็นว่าการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูปจะมีระดับความสูงของน้ำที่จุดกึ่งกลางของอ่างเก็บน้ำสูงที่สุด เมื่อเวลาผ่านไปถึง $T = 0.25$ และ $T = 0.3$ ตามลำดับ แล้วระดับการยกตัวของระดับน้ำจะลดลงเรื่อยๆไปจนถึงขอบของอ่างเก็บน้ำที่มีการยกตัวของระดับน้ำเป็นศูนย์ หรือไม่มีการยกตัวของระดับน้ำเลย และความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อพิจารณาจากสนามความเร็ว แสดงให้เห็นว่า กระแสน้ำมีการเคลื่อนที่ไปในทิศทางเข้าหาขอบของอ่างเก็บน้ำในทุกทิศทาง แต่ในกรณีที่ $p = 1.0$ และ $p = 1.2$ จากผลเฉลยดังตารางและกราฟต่างๆ ซึ่งมีค่า $p \geq 1$ แล้ว ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขความเสถียร ดังนั้นผลเฉลยลู่ออก (Divergent) และผลเฉลยการยกตัวของระดับน้ำ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y ในอ่างเก็บน้ำ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์เป็นผลเฉลยโดยประมาณที่อยู่ในรูปไร้มิติ ซึ่งสามารถแปลงให้เป็นผลเฉลยเชิงมิติได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.5 การคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีปริยายทิศทางสลับนี้ มาแก้ปัญหาการคำนวณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ ตามหัวข้อก่อนหน้านี้ ที่มีข้อจำกัดของเงื่อนไขของความเสถียรในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวแบบอุทกพลศาสตร์โดยที่ใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ ซึ่งมีข้อจำกัดอยู่ว่า ค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ของเมทริกซ์ A และ B ต้องมีทั้งค่าบวกและลบ และต้องทราบค่าเงื่อนไขขอบทั้งหมดก่อน

ดังนั้นผู้วิจัยได้นำวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาคำนวณก่อนอย่างเช่น ในกรณีที่ ΔX และ $\Delta Y = 0.01,\ \Delta T = 0.005$ คือ $p = 0.5$ และ $\Delta X = \Delta Y = 0.01,\ \Delta T = 0.006$ คือ $p = 0.6$ เพื่อเก็บผลลัพธ์ของค่า Z, U, V ที่ขอบเอาไว้ แล้วจึงนำผลเฉลยที่ขอบของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์นี้ มาเป็นค่าขอบของวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดแทน

ก่อนหน้านี้ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด ซึ่งไม่สามารถนำมาคำนวณกับเมทริกซ์ A และ B ของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ที่มีค่าลักษณะเฉพาะทั้งค่าบวกและลบได้ เพราะวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุดต้องการเมทริกซ์ที่มีค่าลักษณะเฉพาะเฉพาะค่าลบเท่านั้น ฉะนั้นผู้วิจัยจึงได้พัฒนาวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด (The eighteen point ADI method) ที่สามารถประยุกต์ใช้ได้กับตัวแบบอุทกพลศาสตร์ตามความต้องการของงานวิจัยนี้ [8] คือ

$$[I-\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y+\nabla_y\right)][I-\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x+\nabla_x\right)]W_{l+1,m+1}^{n+1}$$

$$=[I+\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y+\nabla_y\right)][I+\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x+\nabla_x\right)]U_{l+1,m+1}^{n} \qquad (3.21)$$

จากสูตร (3.21) สามารถแบ่งออกเป็นสองส่วนในรูปแบบวิธีพีซแมน-รัทฟอร์ด [8] คือ

$$[I-\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y+\nabla_y\right)]W_{l+1,m+1}^{n+1*}=[I+\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x+\nabla_x\right)]W_{l+1,m+1}^{n} \qquad (3.22a)$$

และ $$[I-\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x+\nabla_x\right)]W_{l+1,m+1}^{n+1}=[I+\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y+\nabla_y\right)]W_{l+1,m+1}^{n+1*} \qquad (3.22b)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และในรูปแบบวิธี D'Yakonov [8] คือ

$$[I-\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y+\nabla_y\right)]W_{l+1,m+1}^{n+1*}$$

$$=[I+\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y+\nabla_y\right)][I+\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x+\nabla_x\right)]W_{l+1,m+1}^{n} \qquad (3.23a)$$

และ $$[I-\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x+\nabla_x\right)]W_{l+1,m+1}^{n+1}=W_{l+1,m+1}^{n+1*} \qquad (3.23b)$$

เมื่อ $W_{l+1,m+1}^{n+1*}$ คือ ค่าระหว่างกลาง (Intermediate Value)

จากสูตรข้างต้นจะใช้ได้เมื่อเมทริกซ์ A และ B ต้องมีค่าลักษณะเฉพาะเป็นทั้งค่าบวกและค่าลบ และต้องทราบค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบทั้งหมดก่อน โดยสูตรการคำนวณของวิธีปริยายทิศทางสลับนี้ สามารถเขียนอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้นและแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้ [8]

<u>ขั้นที่ 1</u> การคำนวณในทิศทางตามแกน y

การหาค่าแรกที่ได้มาจากการคำนวณเป็นค่าที่อยู่บนระนาบ $t=1*k$ โดยเริ่มที่จุดกริดแรกบนเส้นตรงที่จุด $x=h, y=0, t=1*k$ เดินขนานตามแกน y โดยใช้สมการ (3.22a) กระทำที่จุดกริดตามลำดับบนเส้นตรงนี้

จากสมการ (3.22a) จะได้

$$W_{l+1,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y W_{l+1,m+1}^{n+1*}+\nabla_y W_{l+1,m+1}^{n+1*}\right)=W_{l+1,m+1}^{n}+\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x W_{l+1,m+1}^{n}+\nabla_x W_{l+1,m+1}^{n}\right)$$

$$W_{l+1,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{4}pB\left[\left(W_{l+1,m+2}^{n+1*}-W_{l+1,m+1}^{n+1*}\right)+\left(W_{l+1,m+1}^{n+1*}-W_{l+1,m}^{n+1*}\right)\right]$$

$$=W_{l+1,m+1}^{n}+\frac{1}{4}pA\left[\left(W_{l+2,m+1}^{n}-W_{l+1,m+1}^{n}\right)+\left(W_{l+1,m+1}^{n}-W_{l,m+1}^{n}\right)\right],$$

$$W_{l+1,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{4}pBW_{l+1,m+2}^{n+1*}+\frac{1}{4}pBW_{l+1,m}^{n+1*}=W_{l+1,m+1}^{n}+\frac{1}{4}pAW_{l+2,m+1}^{n}-\frac{1}{4}pAW_{l,m+1}^{n},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{1}{4}pBW_{l+1,m}^{n+1*}+W_{l+1,m+1}^{n+1*}-\frac{1}{4}pBW_{l+1,m+2}^{n+1*}=-\frac{1}{4}pAW_{l,m+1}^{n}+W_{l+1,m+1}^{n}+\frac{1}{4}pAW_{l+2,m+1}^{n} \tag{3.24}$$

นำสมการ (3.24) เขียนอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pB & & & 0 \\ \frac{1}{4}pB & I & -\frac{1}{4}pB & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{4}pB & I & -\frac{1}{4}pB \\ 0 & & & \frac{1}{4}pB & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{l+1,m+1}^{n+1*} \\ W_{l+1,m+2}^{n+1*} \\ \vdots \\ W_{l+1,M-2}^{n+1*} \\ W_{l+1,M-1}^{n+1*} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}pAW_{l,m+1}^{n}+W_{l+1,m+1}^{n}+\frac{1}{4}pAW_{l+2,m+1}^{n}-\frac{1}{4}pBW_{l+1,0}^{n+1*} \\ -\frac{1}{4}pAW_{l,m+2}^{n}+W_{l+1,m+2}^{n}+\frac{1}{4}pAW_{l+2,m+2}^{n} \\ \vdots \\ -\frac{1}{4}pAW_{l,M-2}^{n}+W_{l+1,M-2}^{n}+\frac{1}{4}pAW_{l+2,M-2}^{n} \\ -\frac{1}{4}pAW_{l,M-1}^{n}+W_{l+1,M-1}^{n}+\frac{1}{4}pAW_{l+2,M-1}^{n}+\frac{1}{4}pBW_{l+1,M}^{n+1*} \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

เมื่อ $W_{l+1,0}^{n+1*}$ คำนวณได้โดย

$$W_{l+1,0}^{n+1*}=\frac{1}{2}W_{l+1,0}^{n}+\frac{1}{8}pA(W_{l+2,0}^{n}-W_{l,0}^{n})+\frac{1}{2}W_{l+1,0}^{n+1}-\frac{1}{8}pA(W_{l+2,0}^{n+1}-W_{l,0}^{n+1}) \tag{3.26}$$

และ $W_{l+1,M}^{n+1*}$ คำนวณได้โดย

$$W_{l+1,M}^{n+1*}=\frac{1}{2}W_{l+1,M}^{n}+\frac{1}{8}pA(W_{l+2,M}^{n}-W_{l,M}^{n})+\frac{1}{2}W_{l+1,M}^{n+1}-\frac{1}{8}pA(W_{l+2,M}^{n+1}-W_{l,M}^{n+1}) \tag{3.27}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น ระบบสมการเชิงเส้น (3.25) นี้ สามารถหาผลเฉลยของตัวที่ไม่ทราบค่าได้ โดยค่าของ W^{1*} ที่จุดกริดบนเส้นเริ่มต้นที่จุด $x=2h, y=0, t=1*k$ ที่เดินขนานตามแกน y และที่เส้นตรงอื่นๆสามารถหาค่าได้ในลักษณะเดียวกันนี้ จนกระทั่งครบจุดกริดทั้งหมดที่ต้องการบนระนาบ $t=1*k$ ที่ครอบคลุมอยู่

<u>ขั้นที่ 2</u> การคำนวณในทิศทางตามแกน x

ค่าในทิศทางแกน x ได้มาจากการคำนวณนั้น หามาจากจุดกริดบนระนาบ $t=k$ โดยเริ่มที่จุดกริดบนเส้นเริ่มต้นที่จุด $x=0, y=h, t=k$ เดินขนานตามแนวแกน x โดยใช้สมการ (3.22b) กระทำที่จุดกริดตามลำดับบนเส้นตรงนี้

จากสมการ (3.22b) จะได้

$$W_{l+1,m+1}^{n+1}-\frac{1}{4}pA\left(\Delta_x W_{l+1,m+1}^{n+1}+\nabla_x W_{l+1,m+1}^{n+1}\right)=W_{l+1,m+1}^{n+1*}+\frac{1}{4}pB\left(\Delta_y W_{l+1,m+1}^{n+1*}+\nabla_y W_{l+1,m+1}^{n+1*}\right)$$

$$W_{l+1,m+1}^{n+1}-\frac{1}{4}pA\left[\left(W_{l+2,m+1}^{n+1}-W_{l+1,m+1}^{n+1}\right)+\left(W_{l+1,m+1}^{n+1}-W_{l,m+1}^{n+1}\right)\right]$$

$$=W_{l+1,m+1}^{n+1*}+\frac{1}{4}pB\left[\left(W_{l+1,m+2}^{n+1*}-W_{l+1,m+1}^{n+1*}\right)+\left(W_{l+1,m+1}^{n+1*}-W_{l+1,m}^{n+1*}\right)\right],$$

$$W_{l+1,m+1}^{n+1}-\frac{1}{4}pAW_{l+2,m+1}^{n+1}+\frac{1}{4}pAW_{l,m+1}^{n+1}=W_{l+1,m+1}^{n+1*}+\frac{1}{4}pBW_{l+1,m+2}^{n+1*}-\frac{1}{4}pBW_{l+1,m}^{n+1*},$$

ดังนั้น จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{1}{4}pAW_{l,m+1}^{n+1}+W_{l+1,m+1}^{n+1}-\frac{1}{4}pAW_{l+2,m+1}^{n+1}=-\frac{1}{4}pBW_{l+1,m}^{n+1*}+W_{l+1,m+1}^{n+1*}+\frac{1}{4}pBW_{l+1,m+2}^{n+1*} \qquad (3.28)$$

นำสมการ (3.28) เขียนอยู่ในรูปของระบบสมการเชิงเส้น ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

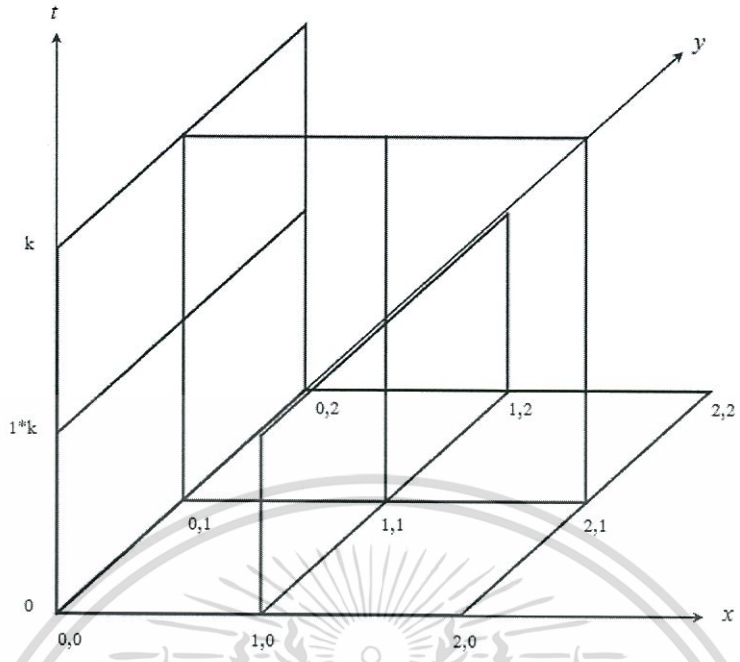
$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pA & & & 0 \\ \frac{1}{4}pA & I & -\frac{1}{4}pA & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{4}pA & I & -\frac{1}{4}pA \\ 0 & & & \frac{1}{4}pA & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{l+1,m+1}^{n+1} \\ W_{l+1,m+2}^{n+1} \\ \vdots \\ W_{l+1,M-2}^{n+1} \\ W_{l+1,M-1}^{n+1} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}pBW_{l+1,m}^{n+1*} + W_{l+1,m+1}^{n+1*} + \frac{1}{4}pBW_{l+1,m+2}^{n+1*} - \frac{1}{4}pAW_{0,m+1}^{n+1} \\ -\frac{1}{4}pBW_{l+2,m}^{n+1*} + W_{l+2,m+1}^{n+1*} + \frac{1}{4}pBW_{l+2,m+2}^{n+1*} \\ \vdots \\ -\frac{1}{4}pBW_{L-2,m}^{n+1*} + W_{L-2,m+1}^{n+1*} + \frac{1}{4}pBW_{L-2,m+2}^{n+1*} \\ -\frac{1}{4}pBW_{L-1,m}^{n+1*} + W_{L-1,m+1}^{n+1*} + \frac{1}{4}pBW_{L-1,m+2}^{n+1*} + \frac{1}{4}pAW_{L,m+1}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

เมื่อ $p = \frac{\Delta T}{\Delta X}$

โดยระบบสมการ (3.29) เป็นประเภทเดียวกันกับระบบสมการ (3.25) ที่สามารถหาผลเฉลยของตัวที่ไม่ทราบค่าได้ โดยค่าของ W^1 ที่จุดกริดบนเส้นเริ่มต้นที่จุด $x = 0,\ y = 2h,\ t = k$ เดินขนานตามแนวแกน x และที่เส้นตรงอื่นๆสามารถหาค่าได้ในลักษณะเดียวกันนี้ จนกระทั่งหาครบจุดกริดทั้งหมดบนระนาบ $t = k$ ที่ได้รับการพิจารณา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.21 แผนภาพโครงสร้างวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

การทำซ้ำของกระบวนการนี้ อธิบายถึงการสลับการคำนวณในทิศทางแกน y และทิศทางแกน x ทำให้สามารถหาผลเฉลยที่ได้บนจุดกริดทั้งหมดในบริเวณที่ต้องการ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดมีความเสถียรที่ปราศจากเงื่อนไข (Unconditionally Stable) [8] คือ $p > 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.6 ตัวอย่างและผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

<u>ตัวอย่าง</u> พิจารณาตัวแบบอุทกพลศาสตร์

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial T} \\ \frac{\partial U}{\partial T} \\ \frac{\partial V}{\partial T} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial X} \\ \frac{\partial U}{\partial X} \\ \frac{\partial V}{\partial X} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial U}{\partial Y} \\ \frac{\partial V}{\partial Y} \end{Bmatrix}$$

ใช้ในการแก้ระบบเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ใน $0 \le X, Y \le 1, T \ge 0$

โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$\begin{aligned} &Z(X,Y,0) = X(1-X)Y(1-Y) \\ &U(X,Y,0) = 0 \qquad \text{เมื่อ } 0 \le X, Y \le 1 \text{ และ } T = 0 \\ &V(X,Y,0) = 0 \end{aligned}$$

และเงื่อนไขขอบ คือ

$$\begin{aligned} &Z(0,Y,T) = 0 \\ &U(0,Y,T) = \sin(Y\pi)\sin(T) \qquad \text{เมื่อ } 0 \le Y \le 1 \text{ และ } T > 0 \\ &V(0,Y,T) = 0 \end{aligned}$$

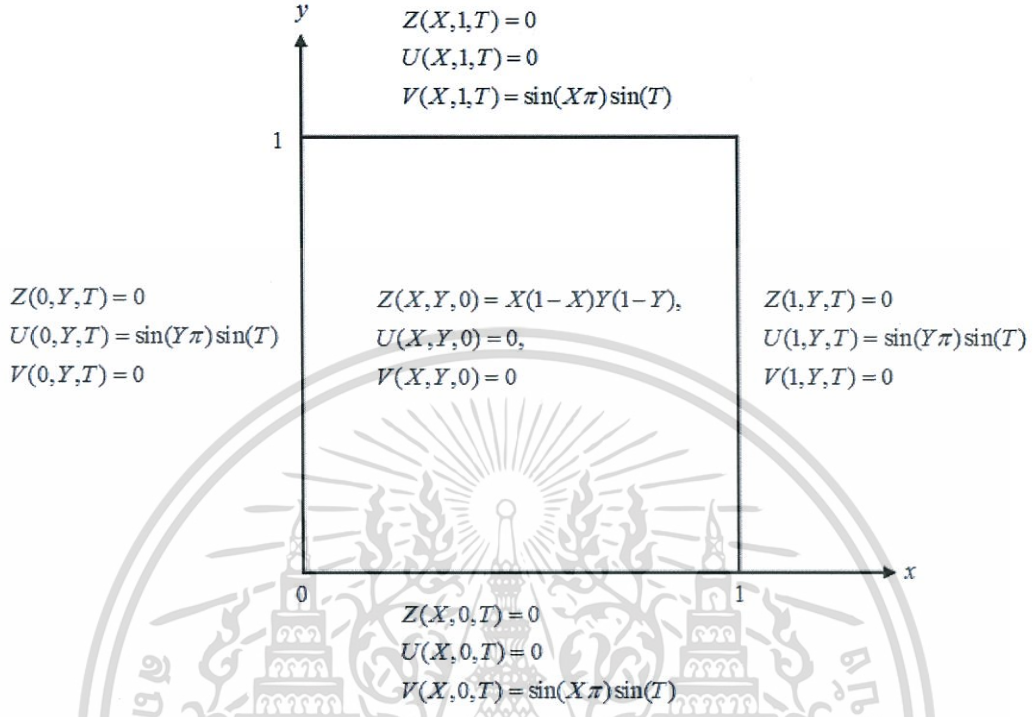
$$\begin{aligned} &Z(1,Y,T) = 0 \\ &U(1,Y,T) = \sin(Y\pi)\sin(T) \qquad \text{เมื่อ } 0 \le Y \le 1 \text{ และ } T > 0 \\ &V(1,Y,T) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Z(X,0,T) = 0 \\ &U(X,0,T) = 0 \qquad \text{เมื่อ } 0 \le X \le 1 \text{ และ } T > 0 \\ &V(X,0,T) = \sin(X\pi)\sin(T) \end{aligned}$$

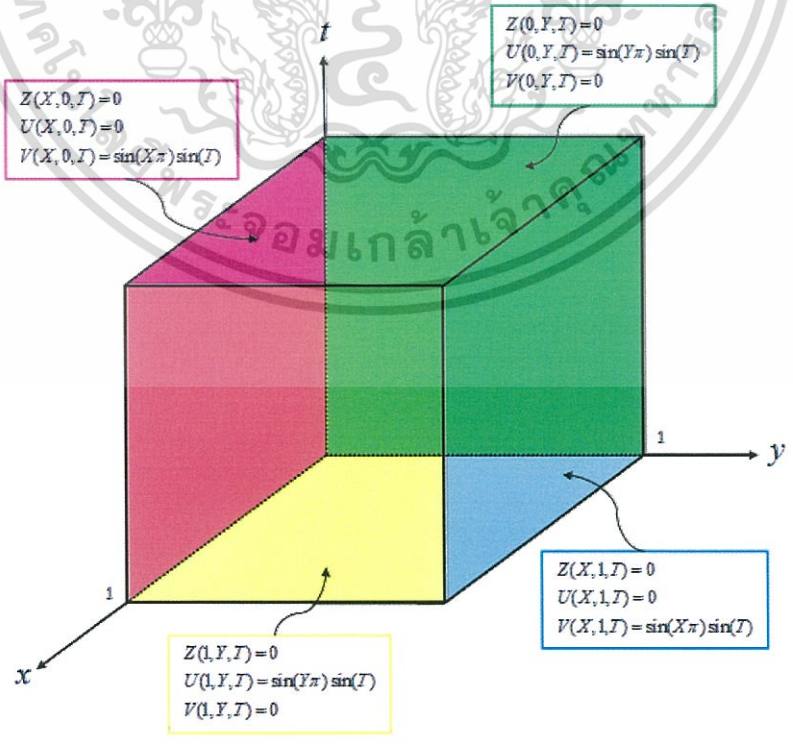
$$\begin{aligned} &Z(X,1,T) = 0 \\ &U(X,1,T) = 0 \qquad \text{เมื่อ } 0 \le X \le 1 \text{ และ } T > 0 \\ &V(X,1,T) = \sin(X\pi)\sin(T) \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยแสดงเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นไว้ดังรูปที่ 3.22 และ 3.23



รูปที่ 3.22 เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบ $(T = 0)$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 3.23 เงื่อนไขขอบ $(T > 0)$

วิธีทำ

ให้ $A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}$

เลือก $\Delta X=\Delta Y=0.25$ และ $\Delta T=0.1$ แล้ว $p=\dfrac{\Delta T}{\Delta X}=\dfrac{0.1}{0.25}=0.4$

จะได้ $\dfrac{1}{4}pA=\dfrac{1}{4}(0.4)\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.1&0\\-0.1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$$-\frac{1}{4}pA=-\frac{1}{4}(0.4)\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.1&0\\0.1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}pB=\frac{1}{4}(0.4)\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-0.1\\0&0&0\\-0.1&0&0\end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{4}pB=-\frac{1}{4}(0.4)\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0.1\\0&0&0\\0.1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{8}pA=\frac{1}{8}(0.4)\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-0.05&0\\-0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{8}pA=-\frac{1}{8}(0.4)\begin{bmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0.05&0\\0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่ 1 ในทิศทางตามแกน y

1) จากสมการ (3.24) ให้ $n=0, l=1, m=1$

$$W_{1,1}^{1*}-\frac{1}{4}pBW_{1,2}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{0,1}^{0}+W_{1,1}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{2,1}^{0}-\frac{1}{4}pBW_{1,0}^{1*}$$

$n=0, l=1, m=2$

$$\frac{1}{4}pBW_{1,1}^{1*}+W_{1,2}^{1*}-\frac{1}{4}pBW_{1,3}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{0,2}^{0}+W_{1,2}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{2,2}^{0}$$

$n=0, l=1, m=3$

$$\frac{1}{4}pBW_{1,2}^{1*}+W_{1,3}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{0,3}^{0}+W_{1,3}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{2,3}^{0}+\frac{1}{4}pBW_{1,4}^{1*}$$

ดังนั้น เขียนในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pB & 0 \\ \frac{1}{4}pB & I & -\frac{1}{4}pB \\ 0 & \frac{1}{4}pB & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_{1,1}^{1*} \\ W_{1,2}^{1*} \\ W_{1,3}^{1*} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}pAW_{0,1}^{0}+W_{1,1}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{2,1}^{0}-\frac{1}{4}pBW_{1,0}^{1*} \\ -\frac{1}{4}pAW_{0,2}^{0}+W_{1,2}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{2,2}^{0} \\ -\frac{1}{4}pAW_{0,3}^{0}+W_{1,3}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{2,3}^{0}+\frac{1}{4}pBW_{1,4}^{1*} \end{Bmatrix}$$

แล้ว $W_{1,0}^{1*}$ คำนวณได้จากสมการ (3.26)

$$W_{1,0}^{1*}=\frac{1}{2}W_{1,0}^{0}+\frac{1}{8}pA(W_{2,0}^{0}-W_{0,0}^{0})+\frac{1}{2}W_{1,0}^{1}-\frac{1}{8}pA(W_{2,0}^{1}-W_{0,0}^{1})$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-0.05&0\\-0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0.05&0\\0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0998\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $W_{1,4}^{1*}$ คำนวณได้จากสมการ (3.27)

$$W_{1,4}^{1*}=\frac{1}{2}W_{1,4}^{0}+\frac{1}{8}pA(W_{2,4}^{0}-W_{0,4}^{0})+\frac{1}{2}W_{1,4}^{1}-\frac{1}{8}pA(W_{2,4}^{1}-W_{0,4}^{1})$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-0.05&0\\-0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0.05&0\\0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0998\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}$$

จาก ระบบสมการเชิงเส้น แทนค่าทั้งหมด จะได้

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0.1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0.1&0&0&0&0&0\\0&0&-0.1&1&0&0&0&0&0.1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\-0.1&0&0&0&0&1&0.1&0&0\\0&0&0&0&0&-0.1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&-0.1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Z_{1,1}^{1*}\\U_{1,1}^{1*}\\V_{1,1}^{1*}\\Z_{1,2}^{1*}\\U_{1,2}^{1*}\\V_{1,2}^{1*}\\Z_{1,3}^{1*}\\U_{1,3}^{1*}\\V_{1,3}^{1*}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}0+0.0352+0+0.0035\\0+0-0.0047+0\\0+0+0+0\\0+0.0469+0\\0+0-0.0063\\0+0+0\\0+0.0352+0-0.0035\\0+0-0.0047+0\\0+0+0+0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0387\\-0.0047\\0.0000\\0.0469\\-0.0063\\0.0000\\0.0317\\-0.0047\\0.0000\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$W_{1,1}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0386\\-0.0047\\-0.0046\end{Bmatrix}\ W_{1,2}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0460\\-0.0063\\0.0007\end{Bmatrix}\ W_{1,3}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0318\\-0.0047\\0.0046\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) จากสมการ (3.24) ให้ $n=0, l=2, m=1$

$$W_{2,1}^{1*}-\frac{1}{4}pBW_{2,2}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{1,1}^{0}+W_{2,1}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{3,1}^{0}-\frac{1}{4}pBW_{2,0}^{1*}$$

$n=0, l=2, m=2$

$$\frac{1}{4}pBW_{2,1}^{1*}+W_{2,2}^{1*}-\frac{1}{4}pBW_{2,3}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{1,2}^{0}+W_{2,2}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{3,2}^{0}$$

$n=0, l=2, m=3$

$$\frac{1}{4}pBW_{2,2}^{1*}+W_{2,3}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{1,3}^{0}+W_{2,3}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{3,3}^{0}+\frac{1}{4}pBW_{2,4}^{1*}$$

ดังนั้น เขียนในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pB & 0 \\ \frac{1}{4}pB & I & -\frac{1}{4}pB \\ 0 & \frac{1}{4}pB & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_{2,1}^{1*} \\ W_{2,2}^{1*} \\ W_{2,3}^{1*} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}pAW_{1,1}^{0}+W_{2,1}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{3,1}^{0}-\frac{1}{4}pBW_{2,0}^{1*} \\ -\frac{1}{4}pAW_{1,2}^{0}+W_{2,2}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{3,2}^{0} \\ -\frac{1}{4}pAW_{1,3}^{0}+W_{2,3}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{3,3}^{0}+\frac{1}{4}pBW_{2,4}^{1*} \end{Bmatrix}$$

แล้ว $W_{2,0}^{1*}$ คำนวณได้จากสมการ (3.26)

$$W_{2,0}^{1*}=\frac{1}{2}W_{2,0}^{0}+\frac{1}{8}pA(W_{3,0}^{0}-W_{1,0}^{0})+\frac{1}{2}W_{2,0}^{1}-\frac{1}{8}pA(W_{3,0}^{1}-W_{1,0}^{1})$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -0.05 & 0\\ -0.05 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0499\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0.05 & 0\\ 0.05 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0706\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0706\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0499\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0499\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $W_{2,4}^{1*}$ คำนวณได้จากสมการ (3.27)

$$W_{2,4}^{1*}=\frac{1}{2}W_{2,4}^{0}+\frac{1}{8}pA(W_{3,4}^{0}-W_{1,4}^{0})+\frac{1}{2}W_{2,4}^{1}-\frac{1}{8}pA(W_{3,4}^{1}-W_{1,4}^{1})$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-0.05&0\\-0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0499\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0.05&0\\0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0706\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0706\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0499\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0499\end{Bmatrix}$$

จาก ระบบสมการเชิงเส้น แทนค่าทั้งหมด จะได้

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0.1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0.1&0&0&0&0&0\\0&0&-0.1&1&0&0&0&0&0.1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\-0.1&0&0&0&0&1&0.1&0&0\\0&0&0&0&0&-0.1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&-0.1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Z_{2,1}^{1*}\\U_{2,1}^{1*}\\V_{2,1}^{1*}\\Z_{2,2}^{1*}\\U_{2,2}^{1*}\\V_{2,2}^{1*}\\Z_{2,3}^{1*}\\U_{2,3}^{1*}\\V_{2,3}^{1*}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}0+0.0469+0+0.0050\\0.0035+0-0.0035+0\\0+0+0+0\\0+0.0625+0\\0.0047+0-0.0047\\0+0+0\\0+0.0469+0-0.0050\\0.0035+0-0.0035+0\\0+0+0+0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0519\\0.0000\\0.0000\\0.0625\\0.0000\\0.0000\\0.0419\\0.0000\\0.0000\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระสมการ คือ

$$W_{2,1}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0518\\0.0000\\-0.0061\end{Bmatrix}\ W_{2,2}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0613\\0.0000\\0.0010\end{Bmatrix}\ W_{2,3}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0420\\0.0000\\0.0061\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) จากสมการ (3.24) ให้ $n=0, l=3, m=1$

$$W_{3,1}^{1*}-\frac{1}{4}pBW_{3,2}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{2,1}^{0}+W_{3,1}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{4,1}^{0}-\frac{1}{4}pBW_{3,0}^{1*}$$

$n=0, l=3, m=2$

$$\frac{1}{4}pBW_{3,1}^{1*}+W_{3,2}^{1*}-\frac{1}{4}pBW_{3,3}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{2,2}^{0}+W_{3,2}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{4,2}^{0}$$

$n=0, l=3, m=3$

$$\frac{1}{4}pBW_{3,2}^{1*}+W_{3,3}^{1*}=-\frac{1}{4}pAW_{2,3}^{0}+W_{3,3}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{4,3}^{0}+\frac{1}{4}pBW_{3,4}^{1*}$$

ดังนั้น เขียนในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pB & 0 \\ \frac{1}{4}pB & I & -\frac{1}{4}pB \\ 0 & \frac{1}{4}pB & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_{3,1}^{1*} \\ W_{3,2}^{1*} \\ W_{3,3}^{1*} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}pAW_{2,1}^{0}+W_{3,1}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{4,1}^{0}-\frac{1}{4}pBW_{3,0}^{1*} \\ -\frac{1}{4}pAW_{2,2}^{0}+W_{3,2}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{4,2}^{0} \\ -\frac{1}{4}pAW_{2,3}^{0}+W_{3,3}^{0}+\frac{1}{4}pAW_{4,3}^{0}+\frac{1}{4}pBW_{3,4}^{1*} \end{Bmatrix}$$

แล้ว $W_{3,0}^{1*}$ คำนวณได้จากสมการ (3.26)

$$W_{3,0}^{1*}=\frac{1}{2}W_{3,0}^{0}+\frac{1}{8}pA(W_{4,0}^{0}-W_{2,0}^{0})+\frac{1}{2}W_{3,0}^{1}-\frac{1}{8}pA(W_{4,0}^{1}-W_{2,0}^{1})$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-0.05&0\\-0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0.05&0\\0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0988\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ $W_{3,4}^{1*}$ คำนวณได้จากสมการ (3.27)

$$W_{3,4}^{1*}=\frac{1}{2}W_{3,4}^{0}+\frac{1}{8}pA(W_{4,4}^{0}-W_{2,4}^{0})+\frac{1}{2}W_{3,4}^{1}-\frac{1}{8}pA(W_{4,4}^{1}-W_{2,4}^{1})$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-0.05&0\\-0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}\right)+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0.05&0\\0.05&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\left(\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0988\end{Bmatrix}\right)$$

$$=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0.0353\end{Bmatrix}$$

จาก ระบบสมการเชิงเส้น แทนค่าทั้งหมด จะได้

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0.1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0.1&0&0&0&0&0\\0&0&-0.1&1&0&0&0&0&0.1\\0&0&0&0&1&0&0&0&0\\-0.1&0&0&0&0&1&0.1&0&0\\0&0&0&0&0&-0.1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&-0.1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Z_{3,1}^{1*}\\U_{3,1}^{1*}\\V_{3,1}^{1*}\\Z_{3,2}^{1*}\\U_{3,2}^{1*}\\V_{3,2}^{1*}\\Z_{3,3}^{1*}\\U_{3,3}^{1*}\\V_{3,3}^{1*}\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}0+0.0352+0+0.0035\\0.0047+0+0+0\\0+0+0+0\\0+0.0469+0\\0.0063+0+0\\0+0+0\\0+0.0352+0-0.0035\\0.0047+0+0+0\\0+0+0+0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0.0387\\0.0047\\0.0000\\0.0469\\0.0063\\0.0000\\0.0317\\0.0047\\0.0000\end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$W_{3,1}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0386\\0.0047\\-0.0046\end{Bmatrix}\ W_{3,2}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0460\\0.0063\\0.0007\end{Bmatrix}\ W_{3,3}^{1*}=\begin{Bmatrix}0.0318\\0.0047\\0.0046\end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>ขั้นที่ 2</u> ในทิศทางตามแกน x

1) จากสมการ (3.28) ให้ $n=0, l=1, m=1$

$$W_{1,1}^{1}-\frac{1}{4}pAW_{2,1}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{1,0}^{1*}+W_{1,1}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{1,2}^{1*}-\frac{1}{4}pAW_{0,1}^{1}$$

$n=0, l=2, m=1$

$$\frac{1}{4}pAW_{1,1}^{1}+W_{2,1}^{1}-\frac{1}{4}pAW_{3,1}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{2,0}^{1*}+W_{2,1}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{2,2}^{1*}$$

$n=0, l=3, m=1$

$$\frac{1}{4}pAW_{2,1}^{1}+W_{3,1}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{3,0}^{1*}+W_{3,1}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{3,2}^{1*}+\frac{1}{4}pAW_{4,1}^{1}$$

ดังนั้น เขียนในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pA & 0 \\ \frac{1}{4}pA & I & -\frac{1}{4}pA \\ 0 & \frac{1}{4}pA & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_{1,1}^{1} \\ W_{2,1}^{1} \\ W_{3,1}^{1} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}pBW_{1,0}^{1*}+W_{1,1}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{1,2}^{1*}-\frac{1}{4}pAW_{0,1}^{1} \\ -\frac{1}{4}pBW_{2,0}^{1*}+W_{2,1}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{2,2}^{1*} \\ -\frac{1}{4}pBW_{3,0}^{1*}+W_{3,1}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{3,2}^{1*}+\frac{1}{4}pAW_{4,1}^{1} \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก ระบบสมการเชิงเส้น แทนค่าทั้งหมด จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_{1,1}^1 \\ U_{1,1}^1 \\ V_{1,1}^1 \\ Z_{2,1}^1 \\ U_{2,1}^1 \\ V_{2,1}^1 \\ Z_{3,1}^1 \\ U_{3,1}^1 \\ V_{3,1}^1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0035+0.0386-0.0001+0.0071 \\ 0-0.0047+0+0 \\ 0-0.0046-0.0046+0 \\ 0.0050+0.0518-0.0001 \\ 0+0+0 \\ 0-0.0061-0.0061 \\ 0.0035+0.0386-0.0001-0.0071 \\ 0+0.0047+0+0 \\ 0-0.0046-0.0046+0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0491 \\ -0.0047 \\ -0.0092 \\ 0.0567 \\ 0.0000 \\ -0.0122 \\ 0.0349 \\ 0.0047 \\ -0.0092 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$W_{1,1}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0490 \\ -0.0102 \\ -0.0092 \end{Bmatrix} \quad W_{2,1}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0547 \\ 0.0014 \\ -0.0122 \end{Bmatrix} \quad W_{3,1}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0350 \\ 0.0102 \\ -0.0092 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2) จากสมการ (3.28) ให้ $n=0, l=1, m=2$

$$W_{1,2}^{1}-\frac{1}{4}pAW_{2,2}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{1,1}^{1*}+W_{1,2}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{1,3}^{1*}-\frac{1}{4}pAW_{0,2}^{1}$$

$n=0, l=2, m=2$

$$\frac{1}{4}pAW_{1,2}^{1}+W_{2,2}^{1}-\frac{1}{4}pAW_{3,2}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{2,1}^{1*}+W_{2,2}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{2,3}^{1*}$$

$n=0, l=3, m=2$

$$\frac{1}{4}pAW_{2,2}^{1}+W_{3,2}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{3,1}^{1*}+W_{3,2}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{3,3}^{1*}+\frac{1}{4}pAW_{4,2}^{1}$$

ดังนั้น เขียนในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pA & 0 \\ \frac{1}{4}pA & I & -\frac{1}{4}pA \\ 0 & \frac{1}{4}pA & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_{1,2}^{1} \\ W_{2,2}^{1} \\ W_{3,2}^{1} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}pBW_{1,1}^{1*}+W_{1,2}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{1,3}^{1*}-\frac{1}{4}pAW_{0,2}^{1} \\ -\frac{1}{4}pBW_{2,1}^{1*}+W_{2,2}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{2,3}^{1*} \\ -\frac{1}{4}pBW_{3,1}^{1*}+W_{3,2}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{3,3}^{1*}+\frac{1}{4}pAW_{4,2}^{1} \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก ระบบสมการเชิงเส้น แทนค่าทั้งหมด จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_{1,2}^1 \\ U_{1,2}^1 \\ V_{1,2}^1 \\ Z_{2,2}^1 \\ U_{2,2}^1 \\ V_{2,2}^1 \\ Z_{3,2}^1 \\ U_{3,2}^1 \\ V_{3,2}^1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0.0005 + 0.0460 - 0.0005 + 0.0100 \\ 0 - 0.0063 + 0 + 0 \\ 0.0039 + 0.0007 - 0.0032 + 0 \\ -0.0006 + 0.0613 - 0.0006 \\ 0 + 0 + 0 \\ 0.0052 + 0.0010 - 0.0042 \\ -0.0005 + 0.0460 - 0.0005 - 0.0100 \\ 0 + 0.0063 + 0 + 0 \\ 0.0039 + 0.0007 - 0.0032 + 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0550 \\ -0.0063 \\ 0.0014 \\ 0.0601 \\ 0.0000 \\ 0.0020 \\ 0.0350 \\ 0.0063 \\ 0.0014 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$W_{1,2}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0548 \\ -0.0121 \\ 0.0014 \end{Bmatrix} \quad W_{2,2}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0577 \\ 0.0020 \\ 0.0020 \end{Bmatrix} \quad W_{3,2}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0352 \\ 0.0121 \\ 0.0014 \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) จากสมการ (3.28) ให้ $n=0, l=1, m=3$

$$W_{1,3}^{1}-\frac{1}{4}pAW_{2,3}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{1,2}^{1*}+W_{1,3}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{1,4}^{1*}-\frac{1}{4}pAW_{0,3}^{1}$$

$n=0, l=2, m=3$

$$\frac{1}{4}pAW_{1,3}^{1}+W_{2,3}^{1}-\frac{1}{4}pAW_{3,3}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{2,2}^{1*}+W_{2,3}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{2,4}^{1*}$$

$n=0, l=3, m=3$

$$\frac{1}{4}pAW_{2,3}^{1}+W_{3,3}^{1}=-\frac{1}{4}pBW_{3,2}^{1*}+W_{3,3}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{3,4}^{1*}+\frac{1}{4}pAW_{4,3}^{1}$$

ดังนั้น เขียนในรูปของระบบสมการเชิงเส้น คือ

$$\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{4}pA & 0 \\ \frac{1}{4}pA & I & -\frac{1}{4}pA \\ 0 & \frac{1}{4}pA & I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} W_{1,3}^{1} \\ W_{2,3}^{1} \\ W_{3,3}^{1} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4}pBW_{1,2}^{1*}+W_{1,3}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{1,4}^{1*}-\frac{1}{4}pAW_{0,3}^{1} \\ -\frac{1}{4}pBW_{2,2}^{1*}+W_{2,3}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{2,4}^{1*} \\ -\frac{1}{4}pBW_{3,2}^{1*}+W_{3,3}^{1*}+\frac{1}{4}pBW_{3,4}^{1*}+\frac{1}{4}pAW_{4,3}^{1} \end{Bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก ระบบสมการเชิงเส้น แทนค่าทั้งหมด จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_{1,3}^1 \\ U_{1,3}^1 \\ V_{1,3}^1 \\ Z_{2,3}^1 \\ U_{2,3}^1 \\ V_{2,3}^1 \\ Z_{3,3}^1 \\ U_{3,3}^1 \\ V_{3,3}^1 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0.0001+0.0318-0.0035+0.0071 \\ 0-0.0047+0+0 \\ 0.0046+0.0046+0+0 \\ 0.0001+0.0420-0.0050 \\ 0+0+0 \\ 0.0061+0.0061+0 \\ 0.0001+0.0318-0.0035-0.0071 \\ 0+0.0047+0+0 \\ 0.0046+0.0046+0+0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0355 \\ -0.0047 \\ 0.0092 \\ 0.0371 \\ 0.0000 \\ 0.0122 \\ 0.0213 \\ 0.0047 \\ 0.0092 \end{Bmatrix}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของระบบสมการ คือ

$$W_{1,3}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0354 \\ -0.0082 \\ 0.0092 \end{Bmatrix} \quad W_{2,3}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0355 \\ 0.0014 \\ 0.0122 \end{Bmatrix} \quad W_{3,3}^1 = \begin{Bmatrix} 0.0214 \\ 0.0082 \\ 0.0092 \end{Bmatrix}$$

จากการคำนวณข้างต้นนี้ เป็นการแสดงขั้นตอนการหาผลเฉลยด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อ $T = 0.1$ ดังนั้นผลลัพธ์ที่ได้แสดงไว้ในตารางดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.30 แสดงผลเฉลยของ $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

Y \ X	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0000	0.0490	0.0547	0.0350	0.0000
0.50	0.0000	0.0548	0.0577	0.0352	0.0000
0.75	0.0000	0.0354	0.0355	0.0214	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.31 แสดงผลเฉลยของ $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

Y \ X	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0706	-0.0102	0.0014	0.0102	0.0706
0.50	0.0998	-0.0121	0.0020	0.0121	0.0998
0.75	0.0706	-0.0082	0.0014	0.0082	0.0706
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.32 แสดงผลเฉลยของ $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.1$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

Y \ X	0	0.25	0.50	0.75	1.0
0	0.0000	0.0706	0.0998	0.0706	0.0000
0.25	0.0000	-0.0092	-0.0122	-0.0092	0.0000
0.50	0.0000	0.0014	0.0020	0.0014	0.0000
0.75	0.0000	0.0092	0.0122	0.0092	0.0000
1.0	0.0000	0.0706	0.0998	0.0706	0.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลการคำนวณเชิงตัวเลขโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

จากการคำนวณด้วยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ เมื่อ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.005$ คือ $p = 0.5$ แล้วผู้วิจัยจึงนำค่าผลลัพธ์ที่ขอบมาเป็นค่าเงื่อนไขขอบของวิธีปริยายทิศทางสลับ เพื่อใช้กับ 2 กรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.005$ แล้ว $p = \frac{0.005}{0.01} = 0.5$ ดังนั้น ผลเฉลยค่า Z, U, V โดยประมาณที่ได้จากการคำนวณ เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.33 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.25$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

Y \ X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
0.2	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
0.3	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
0.4	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
0.5	0.0000	0.0079	0.0163	0.0251	0.0307	0.0326	0.0307	0.0251	0.0163	0.0079	0.0000
0.6	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
0.7	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
0.8	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
0.9	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.33 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.34 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.25$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.0136	-0.0129	-0.0108	-0.0074	-0.0037	0.0000	0.0037	0.0074	0.0108	0.0129	0.0136
0.2	-0.0258	-0.0245	-0.0205	-0.0139	-0.0070	0.0000	0.0070	0.0139	0.0205	0.0245	0.0258
0.3	-0.0351	-0.0333	-0.0278	-0.0189	-0.0095	0.0000	0.0095	0.0189	0.0278	0.0333	0.0351
0.4	-0.0407	-0.0386	-0.0323	-0.0219	-0.0110	0.0000	0.0110	0.0219	0.0323	0.0386	0.0407
0.5	-0.0426	-0.0404	-0.0337	-0.0229	-0.0115	0.0000	0.0115	0.0229	0.0337	0.0404	0.0426
0.6	-0.0407	-0.0386	-0.0323	-0.0219	-0.0110	0.0000	0.0110	0.0219	0.0323	0.0386	0.0407
0.7	-0.0351	-0.0333	-0.0278	-0.0189	-0.0095	0.0000	0.0095	0.0189	0.0278	0.0333	0.0351
0.8	-0.0258	-0.0245	-0.0205	-0.0139	-0.0070	0.0000	0.0070	0.0139	0.0205	0.0245	0.0258
0.9	-0.0136	-0.0129	-0.0108	-0.0074	-0.0037	0.0000	0.0037	0.0074	0.0108	0.0129	0.0136
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.34 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.25$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

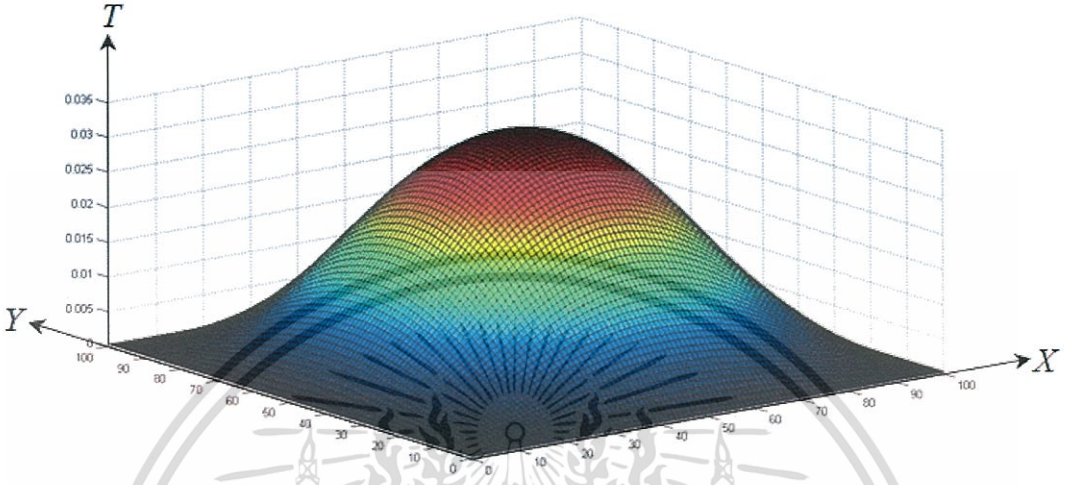
ตารางที่ 3.35 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.25$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	-0.0136	-0.0258	-0.0351	-0.0407	-0.0426	-0.0407	-0.0351	-0.0258	-0.0136	0.0000
0.1	0.0000	-0.0129	-0.0245	-0.0333	-0.0386	-0.0404	-0.0386	-0.0333	-0.0245	-0.0129	0.0000
0.2	0.0000	-0.0108	-0.0205	-0.0278	-0.0323	-0.0337	-0.0323	-0.0278	-0.0205	-0.0108	0.0000
0.3	0.0000	-0.0074	-0.0139	-0.0189	-0.0219	-0.0229	-0.0219	-0.0189	-0.0139	-0.0074	0.0000
0.4	0.0000	-0.0037	-0.0070	-0.0095	-0.0110	-0.0115	-0.0110	-0.0095	-0.0070	-0.0037	0.0000
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.0000	0.0037	0.0070	0.0095	0.0110	0.0115	0.0110	0.0095	0.0070	0.0037	0.0000
0.7	0.0000	0.0074	0.0139	0.0189	0.0219	0.0229	0.0219	0.0189	0.0139	0.0074	0.0000
0.8	0.0000	0.0108	0.0205	0.0278	0.0323	0.0337	0.0323	0.0278	0.0205	0.0108	0.0000
0.9	0.0000	0.0129	0.0245	0.0333	0.0386	0.0404	0.0386	0.0333	0.0245	0.0129	0.0000
1.0	0.0000	0.0136	0.0258	0.0351	0.0407	0.0426	0.0407	0.0351	0.0258	0.0136	0.0000

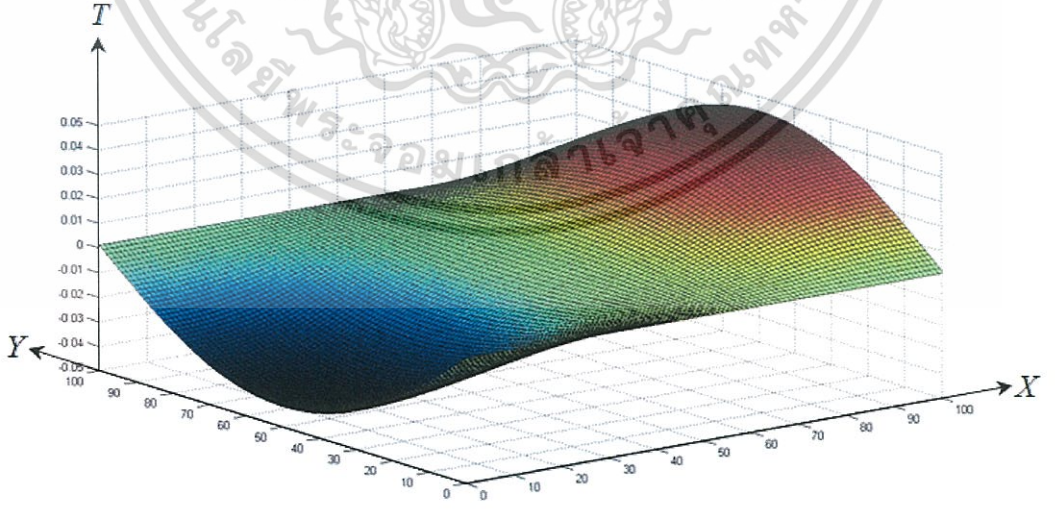
ตารางที่ 3.35 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.25$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลเฉลยโดยประมาณที่ได้โดยตารางที่ 3.33-3.35 นำมาแสดงให้อยู่ในรูปของกราฟไว้ดังรูปที่ 3.24-3.26 ตามลำดับ

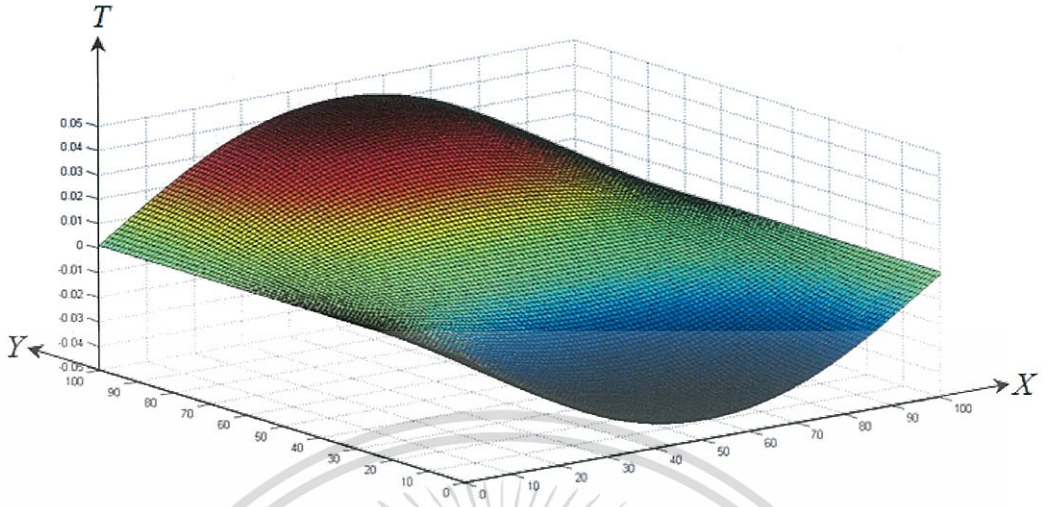


รูปที่ 3.24 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.25$ ($p = 0.5$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดเมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ



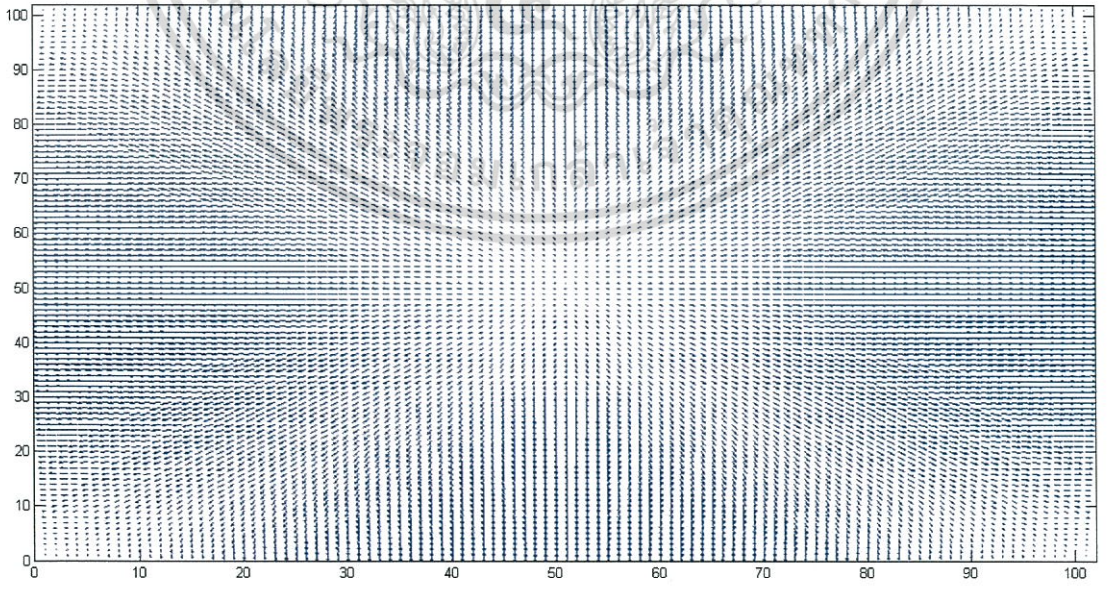
รูปที่ 3.25 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.25$ ($p = 0.5$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.26 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.25$ ($p = 0.5$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.25$ แล้วนำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็ว ได้ดังนี้



รูปที่ 3.27 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.25$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p = 0.5$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 2</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.01$ แล้ว $p = \frac{0.01}{0.01} = 1.0$ ดังนั้น ผลเฉลยค่า Z, U, V โดยประมาณที่ได้จากการคำนวณ เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.36 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.5$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	-0.0035	-0.0068	-0.0096	-0.0116	-0.0123	-0.0116	-0.0096	-0.0068	-0.0035	0.0000
0.2	0.0000	-0.0068	-0.0132	-0.0185	-0.0223	-0.0236	-0.0223	-0.0185	-0.0132	-0.0068	0.0000
0.3	0.0000	-0.0096	-0.0185	-0.0259	-0.0311	-0.0328	-0.0311	-0.0259	-0.0185	-0.0096	0.0000
0.4	0.0000	-0.0116	-0.0223	-0.0311	-0.0372	-0.0392	-0.0372	-0.0311	-0.0223	-0.0116	0.0000
0.5	0.0000	-0.0123	-0.0236	-0.0328	-0.0392	-0.0413	-0.0392	-0.0328	-0.0236	-0.0123	0.0000
0.6	0.0000	-0.0116	-0.0223	-0.0311	-0.0372	-0.0392	-0.0372	-0.0311	-0.0223	-0.0116	0.0000
0.7	0.0000	-0.0096	-0.0185	-0.0259	-0.0311	-0.0328	-0.0311	-0.0259	-0.0185	-0.0096	0.0000
0.8	0.0000	-0.0068	-0.0132	-0.0185	-0.0223	-0.0236	-0.0223	-0.0185	-0.0132	-0.0068	0.0000
0.9	0.0000	-0.0035	-0.0068	-0.0096	-0.0116	-0.0123	-0.0116	-0.0096	-0.0068	-0.0035	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.36 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.37 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.5$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.0136	-0.0095	-0.0061	-0.0032	-0.0010	0.0000	0.0010	0.0032	0.0061	0.0095	0.0136
0.2	-0.0258	-0.0180	-0.0115	-0.0061	-0.0021	0.0000	0.0021	0.0061	0.0115	0.0180	0.0258
0.3	-0.0351	-0.0246	-0.0159	-0.0086	-0.0032	0.0000	0.0032	0.0086	0.0159	0.0246	0.0351
0.4	-0.0407	-0.0288	-0.0188	-0.0104	-0.0041	0.0000	0.0041	0.0104	0.0188	0.0288	0.0407
0.5	-0.0426	-0.0303	-0.0199	-0.0112	-0.0045	0.0000	0.0045	0.0112	0.0199	0.0303	0.0426
0.6	-0.0407	-0.0288	-0.0188	-0.0104	-0.0041	0.0000	0.0041	0.0104	0.0188	0.0288	0.0407
0.7	-0.0351	-0.0246	-0.0159	-0.0086	-0.0032	0.0000	0.0032	0.0086	0.0159	0.0246	0.0351
0.8	-0.0258	-0.0180	-0.0115	-0.0061	-0.0021	0.0000	0.0021	0.0061	0.0115	0.0180	0.0258
0.9	-0.0136	-0.0095	-0.0061	-0.0032	-0.0010	0.0000	0.0010	0.0032	0.0061	0.0095	0.0136
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.37 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.5$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

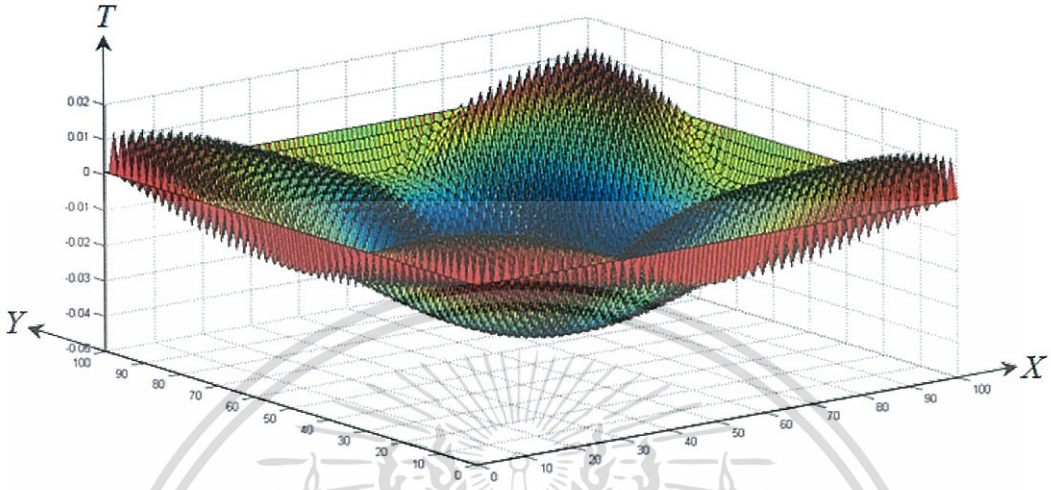
ตารางที่ 3.38 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.5$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	-0.0136	-0.0258	-0.0351	-0.0407	-0.0426	-0.0407	-0.0351	-0.0258	-0.0136	0.0000
0.1	0.0000	-0.0095	-0.0180	-0.0246	-0.0288	-0.0303	-0.0288	-0.0246	-0.0180	-0.0095	0.0000
0.2	0.0000	-0.0061	-0.0115	-0.0159	-0.0188	-0.0199	-0.0188	-0.0159	-0.0115	-0.0061	0.0000
0.3	0.0000	-0.0032	-0.0061	-0.0086	-0.0104	-0.0112	-0.0104	-0.0086	-0.0061	-0.0032	0.0000
0.4	0.0000	-0.0010	-0.0021	-0.0032	-0.0041	-0.0045	-0.0041	-0.0032	-0.0021	-0.0010	0.0000
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.0000	0.0010	0.0021	0.0032	0.0041	0.0045	0.0041	0.0032	0.0021	0.0010	0.0000
0.7	0.0000	0.0032	0.0061	0.0086	0.0104	0.0112	0.0104	0.0086	0.0061	0.0032	0.0000
0.8	0.0000	0.0061	0.0115	0.0159	0.0188	0.0199	0.0188	0.0159	0.0115	0.0061	0.0000
0.9	0.0000	0.0095	0.0180	0.0246	0.0288	0.0303	0.0288	0.0246	0.0180	0.0095	0.0000
1.0	0.0000	0.0136	0.0258	0.0351	0.0407	0.0426	0.0407	0.0351	0.0258	0.0136	0.0000

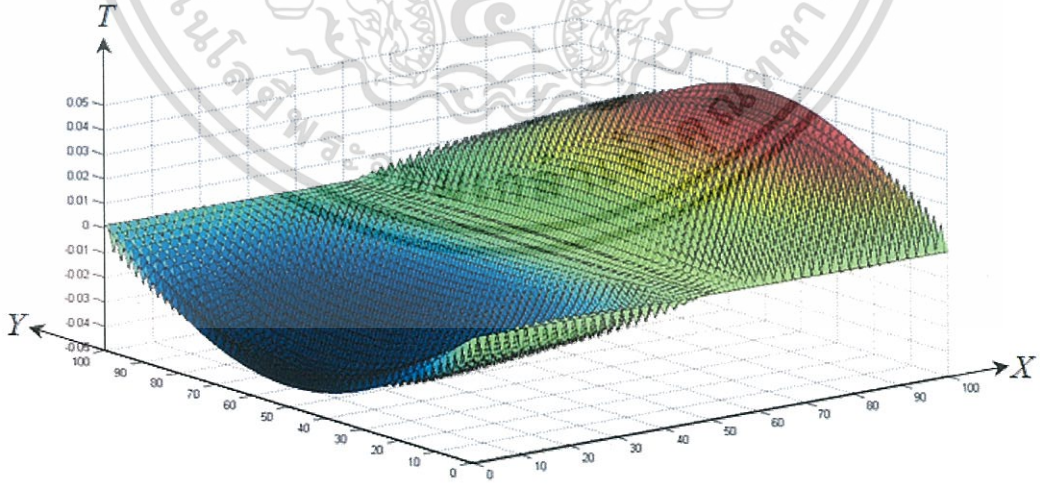
ตารางที่ 3.38 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.5$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการคำนวณผลเฉลยที่ได้ดังตารางที่ 3.36-3.38 นำมาแสดงผลเฉลยในรูปของกราฟไว้ดังรูปที่ 3.28-3.30 ตามลำดับ

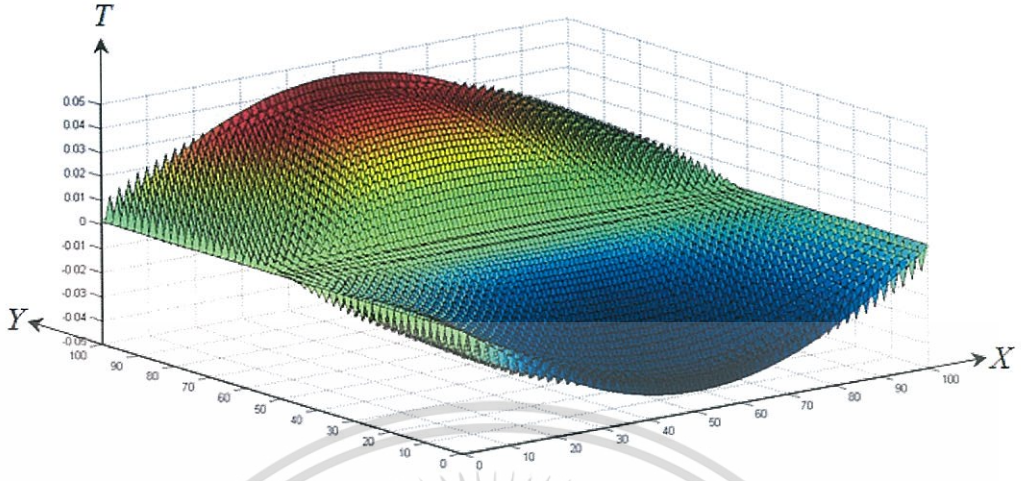


รูปที่ 3.28 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.5$ ($p = 1.0$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ



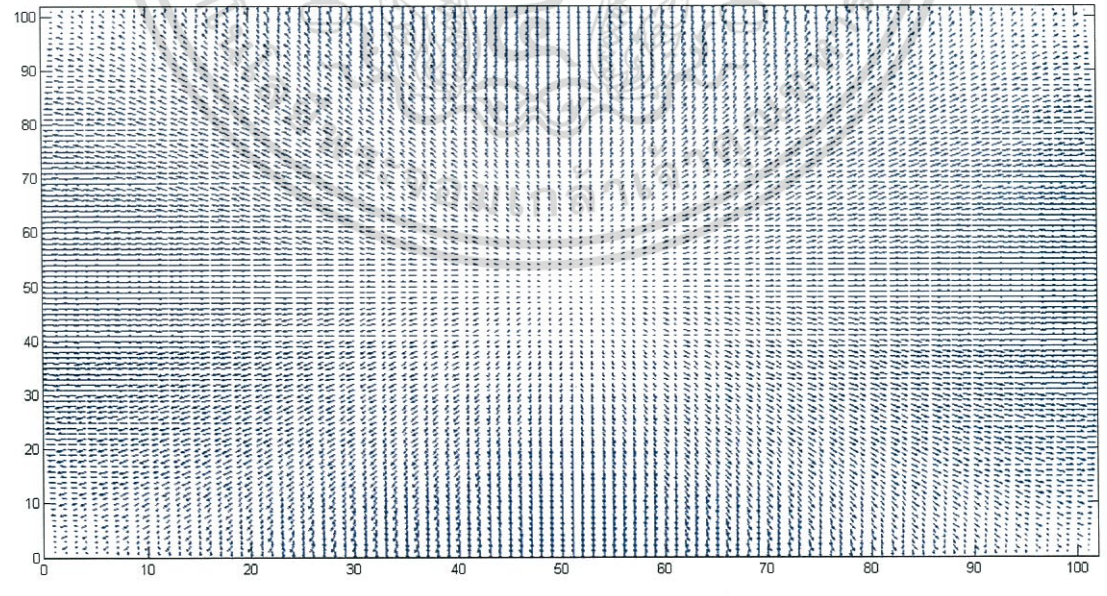
รูปที่ 3.29 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.5$ ($p = 1.0$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.30 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.5$ ($p = 1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

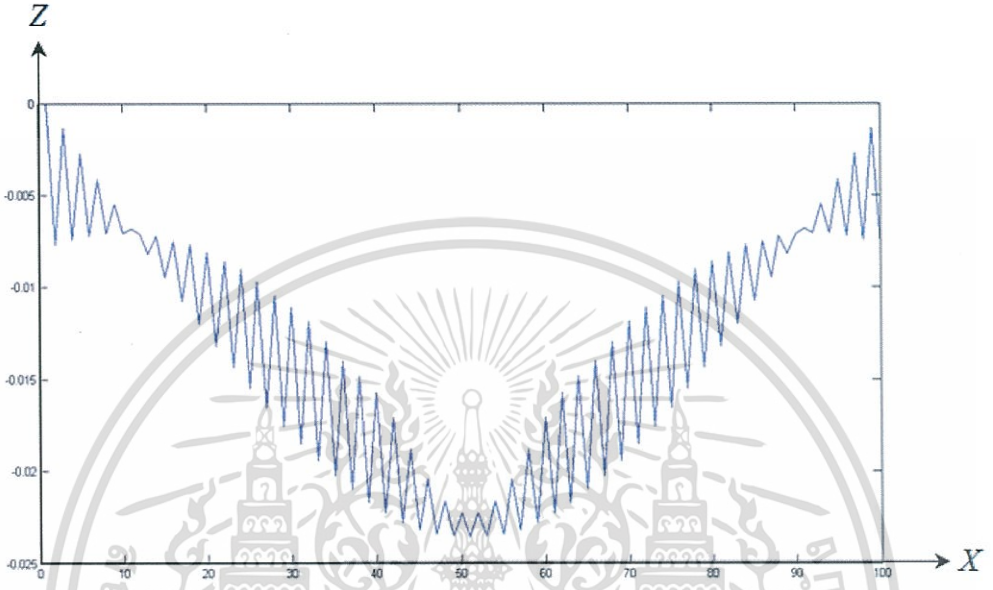
จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.5$ แล้วนำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็ว ได้ดังนี้



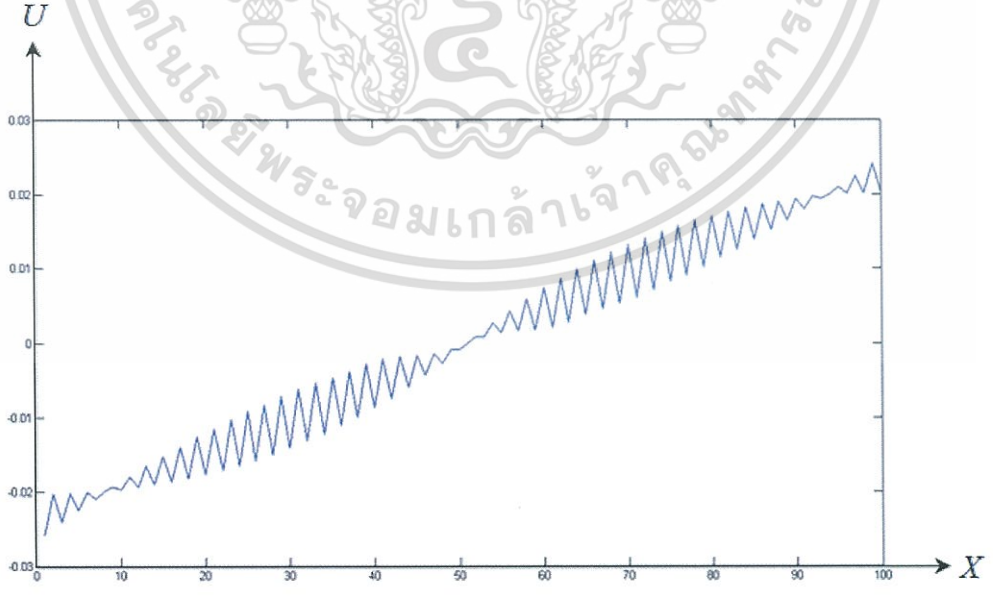
รูปที่ 3.31 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.5$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p = 1.0$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 3.28-3.30 ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อ $p=1.0$ นำมาแสดงในรูปของกราฟเชิงเส้น โดยกำหนดให้ $Y=0.8, T=0.5$ และ $0 \le X \le 1$ ดังรูปที่ 3.32-3.34 ตามลำดับ

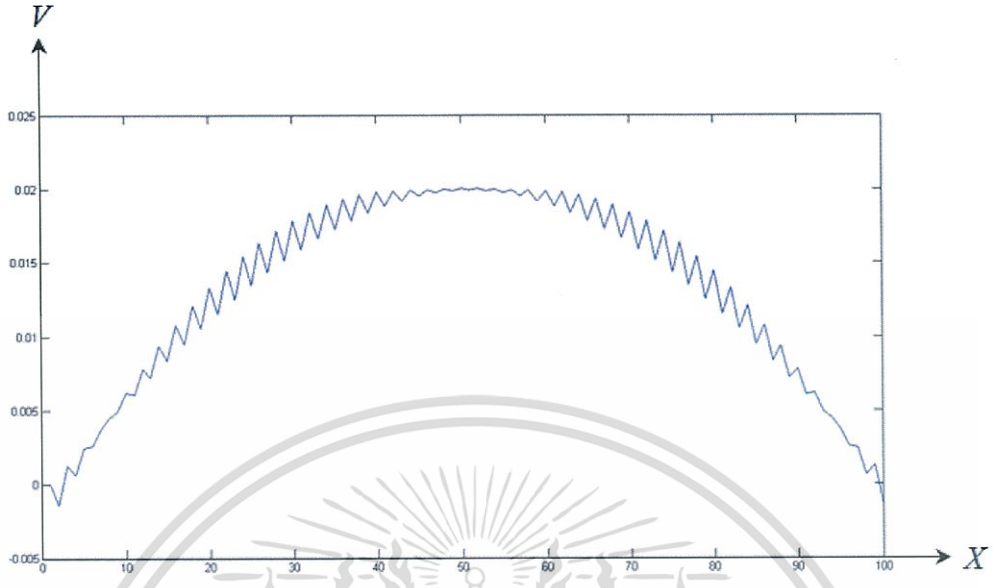


รูปที่ 3.32 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $Y=0.8, T=0.5$ ($p=1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ



รูปที่ 3.33 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $Y=0.8, T=0.5$ ($p=1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.34 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $Y = 0.8, T = 0.5$ ($p = 1.0$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

จะเห็นว่า ผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ และความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $Y = 0.8, T = 0.5$ และ $0 \le X \le 1$ ที่ได้นั้น จะเกิดการแกว่งเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และจากการคำนวณด้วยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ เมื่อ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.006$ คือ $p = 0.6$ แล้วนำค่าผลลัพธ์ที่ขอบมาเป็นค่าเงื่อนไขขอบของวิธีปริยายทิศทางสลับ เพื่อใช้ดังนี้

<u>กรณีที่ 3</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.006$ แล้ว $p = \frac{0.006}{0.01} = 0.6$ ดังนั้น ผลเฉลยค่า Z, U, V โดยประมาณที่ได้จากการคำนวณ เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.39 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.3$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
0.2	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
0.3	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0127	0.0139	0.0127	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
0.4	0.0000	0.0034	0.0074	0.0127	0.0171	0.0186	0.0171	0.0127	0.0074	0.0034	0.0000
0.5	0.0000	0.0038	0.0082	0.0139	0.0186	0.0202	0.0186	0.0139	0.0082	0.0038	0.0000
0.6	0.0000	0.0034	0.0074	0.0127	0.0171	0.0186	0.0171	0.0127	0.0074	0.0034	0.0000
0.7	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0127	0.0139	0.0127	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
0.8	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
0.9	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.39 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.40 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.3$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.0141	-0.0135	-0.0116	-0.0082	-0.0041	0.0000	0.0041	0.0082	0.0116	0.0135	0.0141
0.2	-0.0269	-0.0257	-0.0221	-0.0157	-0.0079	0.0000	0.0079	0.0157	0.0221	0.0257	0.0269
0.3	-0.0371	-0.0354	-0.0304	-0.0215	-0.0108	0.0000	0.0108	0.0215	0.0304	0.0354	0.0371
0.4	-0.0434	-0.0414	-0.0355	-0.0251	-0.0126	0.0000	0.0126	0.0251	0.0355	0.0414	0.0434
0.5	-0.0455	-0.0434	-0.0372	-0.0263	-0.0132	0.0000	0.0132	0.0263	0.0372	0.0434	0.0455
0.6	-0.0434	-0.0414	-0.0355	-0.0251	-0.0126	0.0000	0.0126	0.0251	0.0355	0.0414	0.0434
0.7	-0.0371	-0.0354	-0.0304	-0.0215	-0.0108	0.0000	0.0108	0.0215	0.0304	0.0354	0.0371
0.8	-0.0269	-0.0257	-0.0221	-0.0157	-0.0079	0.0000	0.0079	0.0157	0.0221	0.0257	0.0269
0.9	-0.0141	-0.0135	-0.0116	-0.0082	-0.0041	0.0000	0.0041	0.0082	0.0116	0.0135	0.0141
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.40 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.3$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

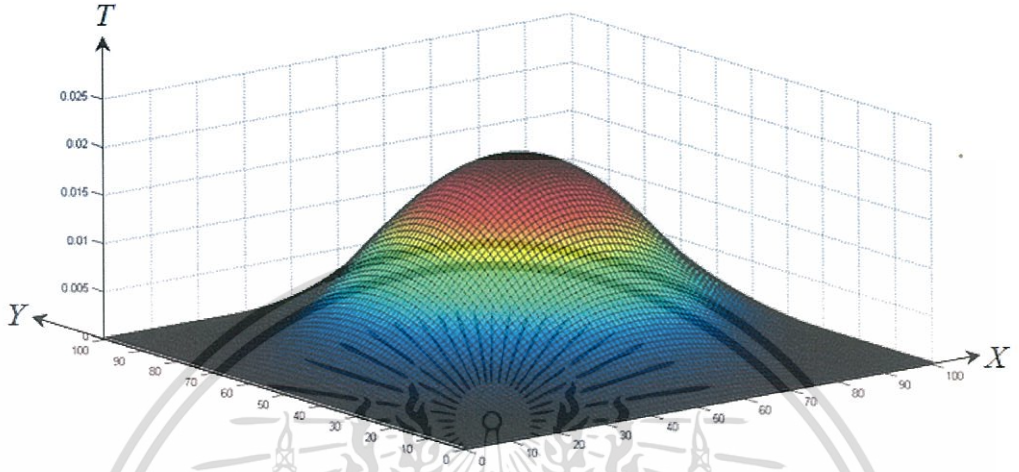
ตารางที่ 3.41 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.3$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	-0.0141	-0.0269	-0.0371	-0.0434	-0.0455	-0.0434	-0.0371	-0.0269	-0.0141	0.0000
0.1	0.0000	-0.0135	-0.0257	-0.0354	-0.0414	-0.0434	-0.0414	-0.0354	-0.0257	-0.0135	0.0000
0.2	0.0000	-0.0116	-0.0221	-0.0304	-0.0355	-0.0372	-0.0355	-0.0304	-0.0221	-0.0116	0.0000
0.3	0.0000	-0.0082	-0.0157	-0.0215	-0.0251	-0.0263	-0.0251	-0.0215	-0.0157	-0.0082	0.0000
0.4	0.0000	-0.0041	-0.0079	-0.0108	-0.0126	-0.0132	-0.0126	-0.0108	-0.0079	-0.0041	0.0000
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.0000	0.0041	0.0079	0.0108	0.0126	0.0132	0.0126	0.0108	0.0079	0.0041	0.0000
0.7	0.0000	0.0082	0.0157	0.0215	0.0251	0.0263	0.0251	0.0215	0.0157	0.0082	0.0000
0.8	0.0000	0.0116	0.0221	0.0304	0.0355	0.0372	0.0355	0.0304	0.0221	0.0116	0.0000
0.9	0.0000	0.0135	0.0257	0.0354	0.0414	0.0434	0.0414	0.0354	0.0257	0.0135	0.0000
1.0	0.0000	0.0141	0.0269	0.0371	0.0434	0.0455	0.0434	0.0371	0.0269	0.0141	0.0000

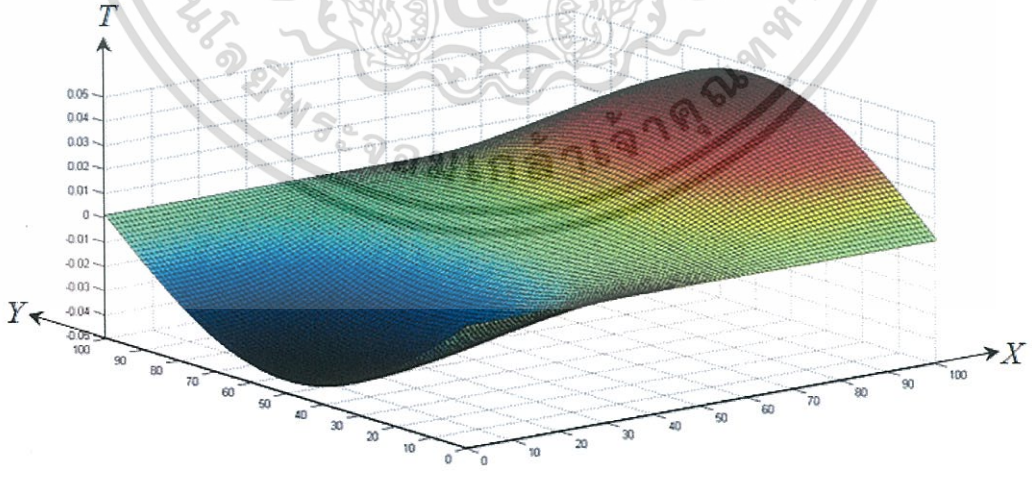
ตารางที่ 3.41 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.3$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลเฉลยโดยประมาณที่ได้โดยตารางที่ 3.39-3.41 นำมาแสดงให้อยู่ในรูปของกราฟไว้ดังรูปที่ 3.35-3.37 ตามลำดับ

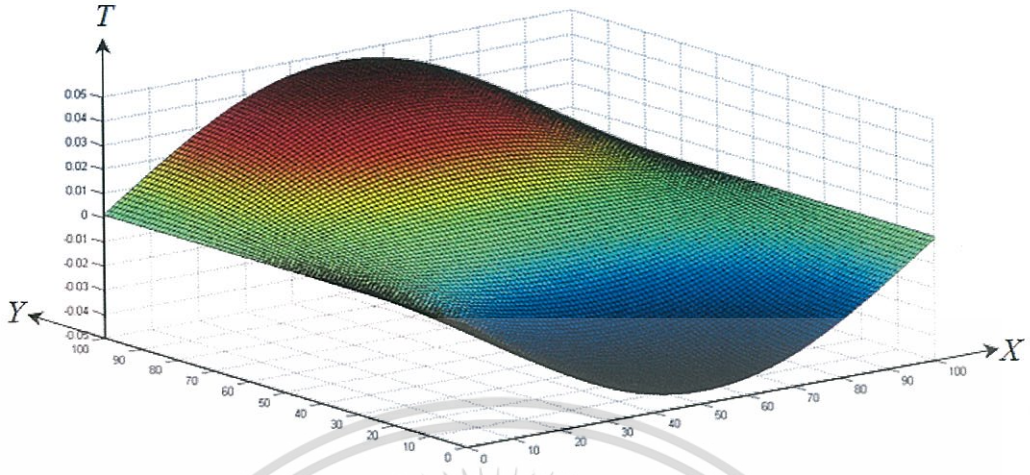


รูปที่ 3.35 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.3$ ($p = 0.6$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ



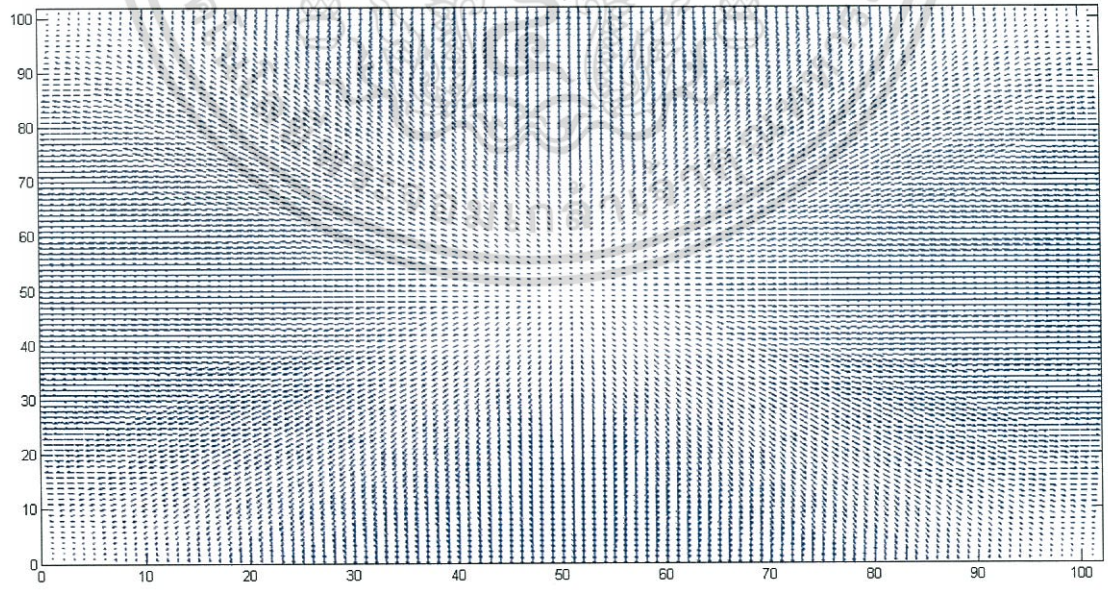
รูปที่ 3.36 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.3$ ($p = 0.6$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.37 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.3$ ($p = 0.6$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.3$ แล้วนำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็ว ได้ดังนี้



รูปที่ 3.38 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.3$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p = 0.6$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 4</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.012$ แล้ว $p = \frac{0.012}{0.01} = 1.2$ ดังนั้น ผลเฉลยค่า Z,U,V โดยประมาณที่ได้จากการคำนวณ เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.42 $Z(X,Y,T)$ เมื่อ $T = 0.6$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

Y \ X	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.0000	-0.0048	-0.0092	-0.0132	-0.0164	-0.0178	-0.0164	-0.0132	-0.0092	-0.0048	0.0000
0.2	0.0000	-0.0092	-0.0180	-0.0257	-0.0318	-0.0345	-0.0318	-0.0257	-0.0180	-0.0092	0.0000
0.3	0.0000	-0.0132	-0.0257	-0.0367	-0.0453	-0.0491	-0.0453	-0.0367	-0.0257	-0.0132	0.0000
0.4	0.0000	-0.0164	-0.0318	-0.0453	-0.0558	-0.0604	-0.0558	-0.0453	-0.0318	-0.0164	0.0000
0.5	0.0000	-0.0178	-0.0345	-0.0491	-0.0604	-0.0654	-0.0604	-0.0491	-0.0345	-0.0178	0.0000
0.6	0.0000	-0.0164	-0.0318	-0.0453	-0.0558	-0.0604	-0.0558	-0.0453	-0.0318	-0.0164	0.0000
0.7	0.0000	-0.0132	-0.0257	-0.0367	-0.0453	-0.0491	-0.0453	-0.0367	-0.0257	-0.0132	0.0000
0.8	0.0000	-0.0092	-0.0180	-0.0257	-0.0318	-0.0345	-0.0318	-0.0257	-0.0180	-0.0092	0.0000
0.9	0.0000	-0.0048	-0.0092	-0.0132	-0.0164	-0.0178	-0.0164	-0.0132	-0.0092	-0.0048	0.0000
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.42 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $T = 0.6$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.43 $U(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.6$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	-0.0141	-0.0092	-0.0049	-0.0013	0.0011	0.0000	-0.0011	0.0013	0.0049	0.0092	0.0141
0.2	-0.0269	-0.0175	-0.0094	-0.0025	0.0022	0.0000	-0.0022	0.0025	0.0094	0.0175	0.0269
0.3	-0.0371	-0.0240	-0.0127	-0.0033	0.0031	0.0000	-0.0031	0.0033	0.0127	0.0240	0.0371
0.4	-0.0434	-0.0280	-0.0147	-0.0036	0.0038	0.0000	-0.0038	0.0036	0.0147	0.0280	0.0434
0.5	-0.0455	-0.0292	-0.0153	-0.0036	0.0040	0.0000	-0.0040	0.0036	0.0153	0.0292	0.0455
0.6	-0.0434	-0.0280	-0.0147	-0.0036	0.0038	0.0000	-0.0038	0.0036	0.0147	0.0280	0.0434
0.7	-0.0371	-0.0240	-0.0127	-0.0033	0.0031	0.0000	-0.0031	0.0033	0.0127	0.0240	0.0371
0.8	-0.0269	-0.0175	-0.0094	-0.0025	0.0022	0.0000	-0.0022	0.0025	0.0094	0.0175	0.0269
0.9	-0.0141	-0.0092	-0.0049	-0.0013	0.0011	0.0000	-0.0011	0.0013	0.0049	0.0092	0.0141
1.0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.43 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T=0.6$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

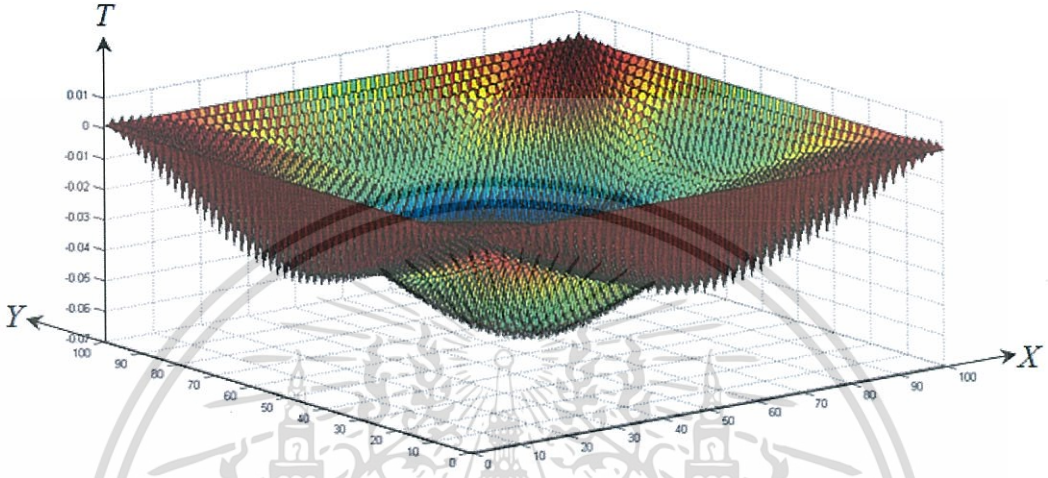
ตารางที่ 3.44 $V(X,Y,T)$ เมื่อ $T=0.6$ โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

X / Y	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.0000	-0.0141	-0.0269	-0.0371	-0.0434	-0.0455	-0.0434	-0.0371	-0.0269	-0.0141	0.0000
0.1	0.0000	-0.0092	-0.0175	-0.0240	-0.0280	-0.0292	-0.0280	-0.0240	-0.0175	-0.0092	0.0000
0.2	0.0000	-0.0049	-0.0094	-0.0127	-0.0147	-0.0153	-0.0147	-0.0127	-0.0094	-0.0049	0.0000
0.3	0.0000	-0.0013	-0.0025	-0.0033	-0.0036	-0.0036	-0.0036	-0.0033	-0.0025	-0.0013	0.0000
0.4	0.0000	0.0011	0.0022	0.0031	0.0038	0.0040	0.0038	0.0031	0.0022	0.0011	0.0000
0.5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.6	0.0000	-0.0011	-0.0022	-0.0031	-0.0038	-0.0040	-0.0038	-0.0031	-0.0022	-0.0011	0.0000
0.7	0.0000	0.0013	0.0025	0.0033	0.0036	0.0036	0.0036	0.0033	0.0025	0.0013	0.0000
0.8	0.0000	0.0049	0.0094	0.0127	0.0147	0.0153	0.0147	0.0127	0.0094	0.0049	0.0000
0.9	0.0000	0.0092	0.0175	0.0240	0.0280	0.0292	0.0280	0.0240	0.0175	0.0092	0.0000
1.0	0.0000	0.0141	0.0269	0.0371	0.0434	0.0455	0.0434	0.0371	0.0269	0.0141	0.0000

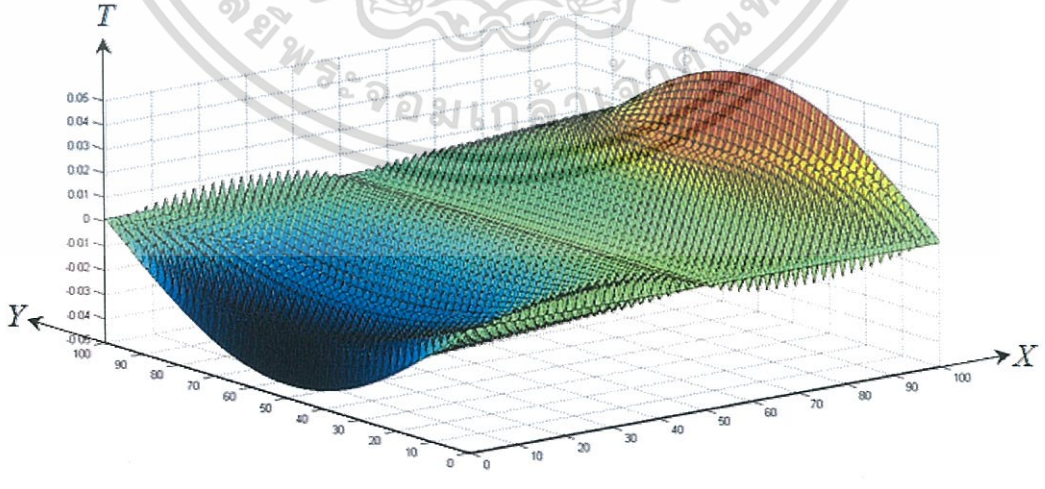
ตารางที่ 3.44 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T=0.6$ โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลเฉลยโดยประมาณที่ได้นำมาแสดงในรูปของกราฟ โดยมีผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.6$ และผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.6$ ได้แสดงไว้ดังรูปที่ 3.39-3.41 ตามลำดับ

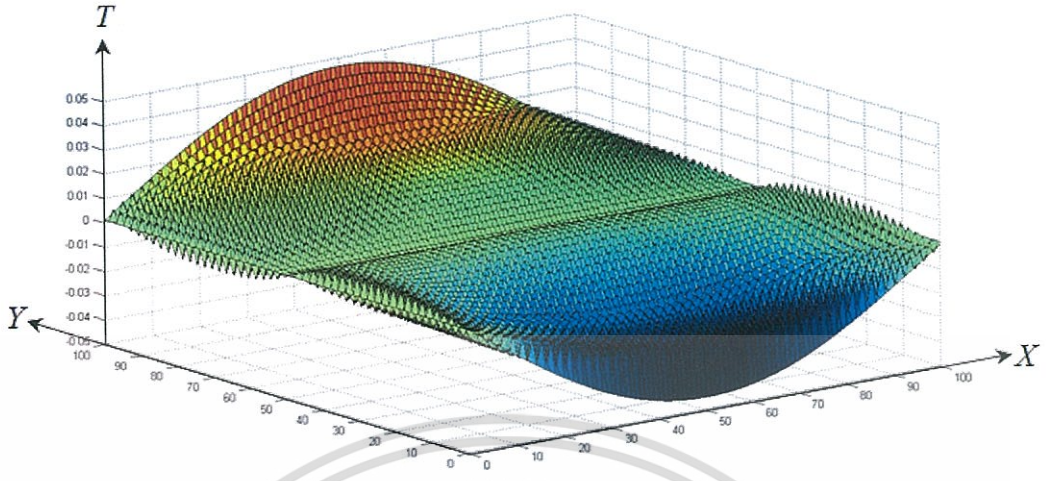


รูปที่ 3.39 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $T = 0.6$ ($p = 1.2$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ



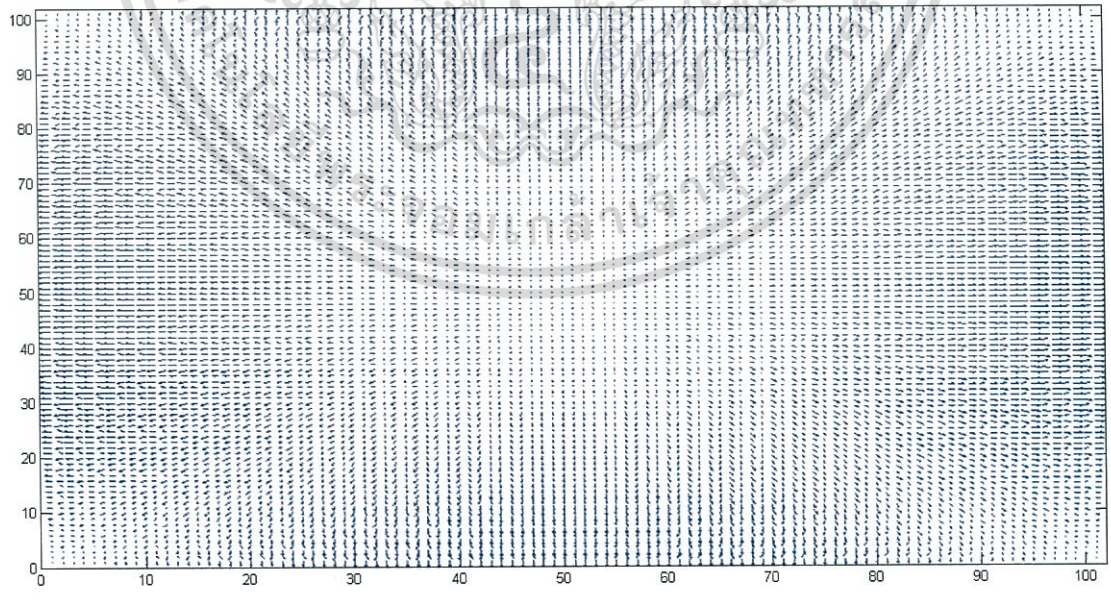
รูปที่ 3.40 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $T = 0.6$ ($p = 1.2$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.41 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $T = 0.6$ ($p = 1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

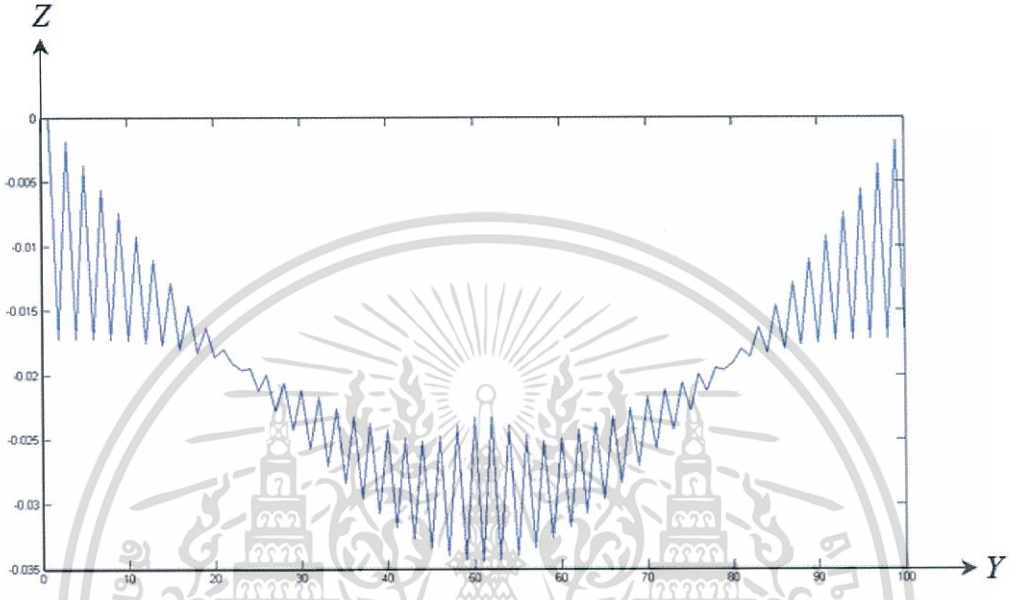
จากความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $T = 0.6$ แล้วนำมาแสดงให้อยู่ในรูปของสนามความเร็ว ได้ดังนี้



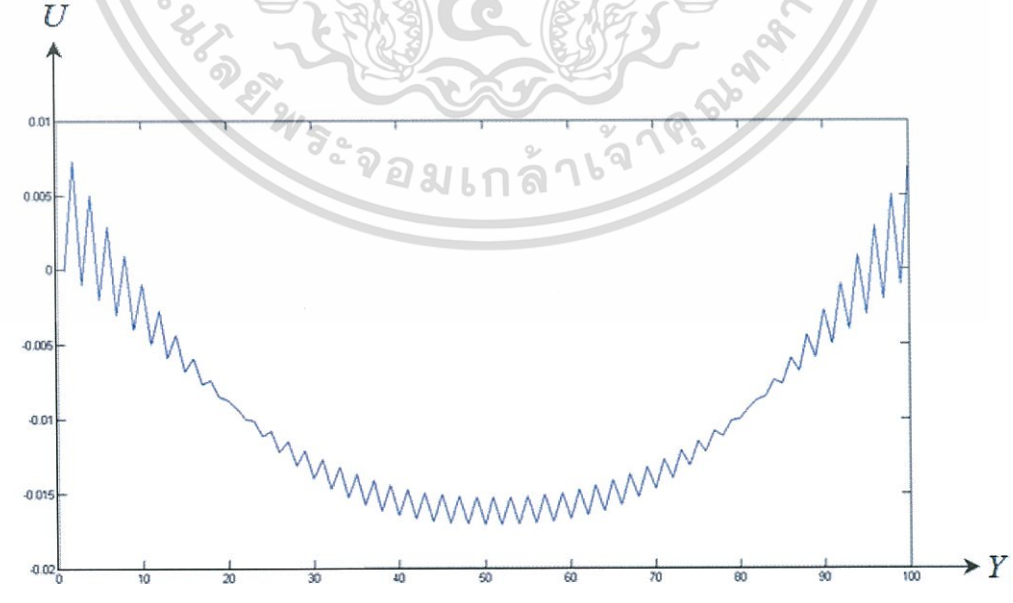
รูปที่ 3.42 สนามความเร็ว เมื่อ $T = 0.6$ โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ($p = 1.2$)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 3.39-3.41 ผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อ $p=1.2$ นำมาแสดงในรูปของกราฟเชิงเส้น โดยกำหนดให้ $X=0.2, T=0.6$ และ $0 \le Y \le 1$ ดังรูปที่ 3.43-3.45 ตามลำดับ

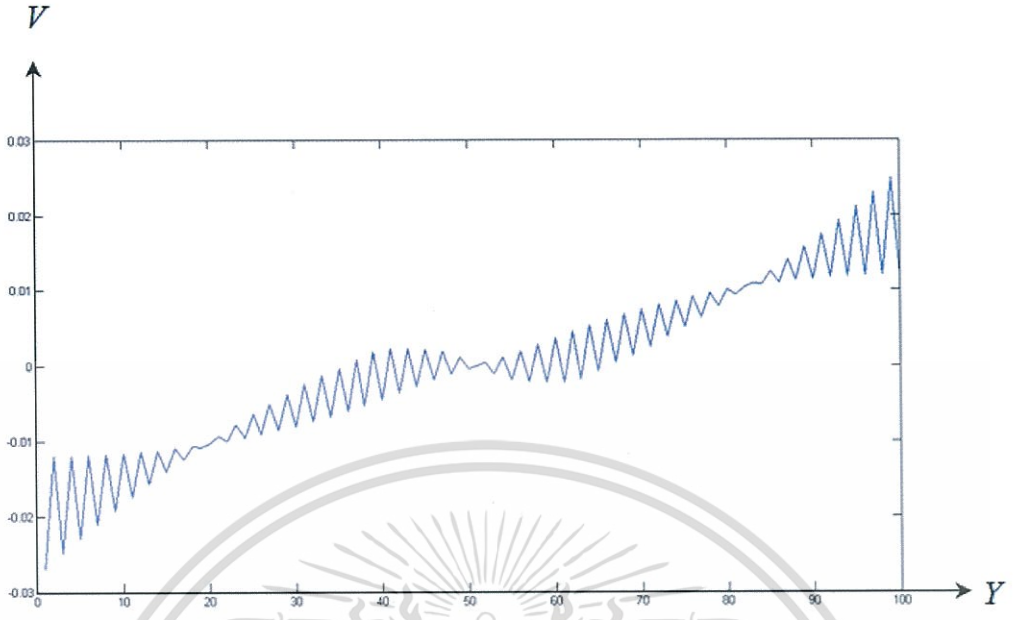


รูปที่ 3.43 การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ เมื่อ $X=0.2, T=0.6$ ($p=1.2$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ



รูปที่ 3.44 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x เมื่อ $X=0.2, T=0.6$ ($p=1.2$)
โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.45 ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y เมื่อ $X = 0.2, T = 0.6$ ($p = 1.2$) โดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อใช้ผลเฉลยของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

จะเห็นว่า ผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำ และความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อ $X = 0.2, T = 0.6$ และ $0 \le Y \le 1$ ที่ได้นั้น จะเกิดการแกว่งเพียงเล็กน้อยเท่านั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก ผู้วิจัยพิจารณาสมการน้ำตื้นในรูปของพจน์ไร้มิติ โดยกำหนดให้ตัวแปรไร้มิติมีดังสมการ (3.9)-(3.14) จากผลเฉลยโดยประมาณของค่า Z,U,V ที่อยู่ในรูปไร้มิติแล้ว สามารถนำมาแปลงกลับให้อยู่ในรูปเชิงมิติได้สมการ (3.15)-(3.20)

โดยกำหนดให้ $h=1$ เมตร , $l=3200$ เมตร , $g=9.8$ เมตร/วินาที^{2}

ตัวอย่าง การแปลงค่าผลเฉลย Z,U,V ให้อยู่ในรูปเชิงมิติ

จากตารางที่ 3.36 ถ้า $Z=-0.0311$

แล้ว $\zeta=(-0.0311)(1)$ จะได้ $\zeta=-0.0311$ เมตร

ตารางที่ 3.42 ถ้า $Z=-0.0048$

แล้ว $\zeta=(-0.0048)(1)$ จะได้ $\zeta=-0.0048$ เมตร

ตารางที่ 3.37 ถ้า $U=0.0086$

แล้ว $u=(0.0086)\sqrt{(9.8)(1)}$ จะได้ $u=0.0269$ เมตร/วินาที

ตารางที่ 3.43 ถ้า $U=-0.0127$

แล้ว $u=(-0.0127)\sqrt{(9.8)(1)}$ จะได้ $u=-0.0398$ เมตร/วินาที

ตารางที่ 3.38 ถ้า $V=-0.0180$

แล้ว $v=(-0.0180)\sqrt{(9.8)(1)}$ จะได้ $v=-0.0563$ เมตร/วินาที

และจากตารางที่ 3.44 ถ้า $V=0.0240$

แล้ว $v=(0.0240)\sqrt{(9.8)(1)}$ จะได้ $v=0.0751$ เมตร/วินาที

ดังนั้นผลเฉลยทั้ง 4 กรณีของวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ที่อยู่ในรูปเชิงมิติเป็นดังตารางต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 1</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.005$ แล้ว $p = \frac{0.005}{0.01} = 0.5$ จากตารางที่ 3.33-3.35 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.25)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 255.55$ วินาที ดังนั้น ค่าผลเฉลย ζ, u, v ที่ได้เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.45 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
640	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
960	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
1280	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
1600	0.0000	0.0079	0.0163	0.0251	0.0307	0.0326	0.0307	0.0251	0.0163	0.0079	0.0000
1920	0.0000	0.0074	0.0153	0.0236	0.0289	0.0307	0.0289	0.0236	0.0153	0.0074	0.0000
2240	0.0000	0.0059	0.0123	0.0192	0.0236	0.0251	0.0236	0.0192	0.0123	0.0059	0.0000
2560	0.0000	0.0036	0.0077	0.0123	0.0153	0.0163	0.0153	0.0123	0.0077	0.0036	0.0000
2880	0.0000	0.0017	0.0036	0.0059	0.0074	0.0079	0.0074	0.0059	0.0036	0.0017	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.45 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำ (เมตร) ในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.46 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	-0.0426	-0.0404	-0.0339	-0.0231	-0.0115	0.0000	0.0115	0.0231	0.0339	0.0404	0.0426
640	-0.0807	-0.0767	-0.0642	-0.0436	-0.0218	0.0000	0.0218	0.0436	0.0642	0.0767	0.0807
960	-0.1099	-0.1043	-0.0871	-0.0592	-0.0296	0.0000	0.0296	0.0592	0.0871	0.1043	0.1099
1280	-0.1275	-0.1210	-0.1010	-0.0686	-0.0343	0.0000	0.0343	0.0686	0.1010	0.1210	0.1275
1600	-0.1334	-0.1265	-0.1056	-0.0717	-0.0359	0.0000	0.0359	0.0717	0.1056	0.1265	0.1334
1920	-0.1275	-0.1210	-0.1010	-0.0686	-0.0343	0.0000	0.0343	0.0686	0.1010	0.1210	0.1275
2240	-0.1099	-0.1043	-0.0871	-0.0592	-0.0296	0.0000	0.0296	0.0592	0.0871	0.1043	0.1099
2560	-0.0807	-0.0767	-0.0642	-0.0436	-0.0218	0.0000	0.0218	0.0436	0.0642	0.0767	0.0807
2880	-0.0426	-0.0404	-0.0339	-0.0231	-0.0115	0.0000	0.0115	0.0231	0.0339	0.0404	0.0426
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.46 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.47 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	-0.0426	-0.0807	-0.1099	-0.1275	-0.1334	-0.1275	-0.1099	-0.0807	-0.0426	0.0000
320	0.0000	-0.0404	-0.0767	-0.1043	-0.1210	-0.1265	-0.1210	-0.1043	-0.0767	-0.0404	0.0000
640	0.0000	-0.0339	-0.0642	-0.0871	-0.1010	-0.1056	-0.1010	-0.0871	-0.0642	-0.0339	0.0000
960	0.0000	-0.0231	-0.0436	-0.0592	-0.0686	-0.0717	-0.0686	-0.0592	-0.0436	-0.0231	0.0000
1280	0.0000	-0.0115	-0.0218	-0.0296	-0.0343	-0.0359	-0.0343	-0.0296	-0.0218	-0.0115	0.0000
1600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1920	0.0000	0.0115	0.0218	0.0296	0.0343	0.0359	0.0343	0.0296	0.0218	0.0115	0.0000
2240	0.0000	0.0231	0.0436	0.0592	0.0686	0.0717	0.0686	0.0592	0.0436	0.0231	0.0000
2560	0.0000	0.0339	0.0642	0.0871	0.1010	0.1056	0.1010	0.0871	0.0642	0.0339	0.0000
2880	0.0000	0.0404	0.0767	0.1043	0.1210	0.1265	0.1210	0.1043	0.0767	0.0404	0.0000
3200	0.0000	0.0426	0.0807	0.1099	0.1275	0.1334	0.1275	0.1099	0.0807	0.0426	0.0000

ตารางที่ 3.47 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 255.55$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 2</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.01$ แล้ว $p = \frac{0.01}{0.01} = 1.0$ จากตารางที่ 3.36-3.38 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.5)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 511.10$ วินาที ดังนั้น ค่าผลเฉลย ζ, u, v ที่ได้เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.48 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	-0.0035	-0.0068	-0.0096	-0.0116	-0.0123	-0.0116	-0.0096	-0.0068	-0.0035	0.0000
640	0.0000	-0.0068	-0.0132	-0.0185	-0.0223	-0.0236	-0.0223	-0.0185	-0.0132	-0.0068	0.0000
960	0.0000	-0.0096	-0.0185	-0.0259	-0.0311	-0.0328	-0.0311	-0.0259	-0.0185	-0.0096	0.0000
1280	0.0000	-0.0116	-0.0223	-0.0311	-0.0372	-0.0392	-0.0372	-0.0311	-0.0223	-0.0116	0.0000
1600	0.0000	-0.0123	-0.0236	-0.0328	-0.0392	-0.0413	-0.0392	-0.0328	-0.0236	-0.0123	0.0000
1920	0.0000	-0.0116	-0.0223	-0.0311	-0.0372	-0.0392	-0.0372	-0.0311	-0.0223	-0.0116	0.0000
2240	0.0000	-0.0096	-0.0185	-0.0259	-0.0311	-0.0328	-0.0311	-0.0259	-0.0185	-0.0096	0.0000
2560	0.0000	-0.0068	-0.0132	-0.0185	-0.0223	-0.0236	-0.0223	-0.0185	-0.0132	-0.0068	0.0000
2880	0.0000	-0.0035	-0.0068	-0.0096	-0.0116	-0.0123	-0.0116	-0.0096	-0.0068	-0.0035	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.48 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำ (เมตร) ในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.49 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	-0.0426	-0.0297	-0.0190	-0.0100	-0.0032	0.0000	0.0032	0.0100	0.0190	0.0297	0.0426
640	-0.0807	-0.0563	-0.0362	-0.0192	-0.0065	0.0000	0.0065	0.0192	0.0362	0.0563	0.0807
960	-0.1099	-0.0771	-0.0498	-0.0269	-0.0099	0.0000	0.0099	0.0269	0.0498	0.0771	0.1099
1280	-0.1275	-0.0902	-0.0589	-0.0326	-0.0127	0.0000	0.0127	0.0326	0.0589	0.0902	0.1275
1600	-0.1334	-0.0948	-0.0623	-0.0350	-0.0140	0.0000	0.0140	0.0350	0.0623	0.0948	0.1334
1920	-0.1275	-0.0902	-0.0589	-0.0326	-0.0127	0.0000	0.0127	0.0326	0.0589	0.0902	0.1275
2240	-0.1099	-0.0771	-0.0498	-0.0269	-0.0099	0.0000	0.0099	0.0269	0.0498	0.0771	0.1099
2560	-0.0807	-0.0563	-0.0362	-0.0192	-0.0065	0.0000	0.0065	0.0192	0.0362	0.0563	0.0807
2880	-0.0426	-0.0297	-0.0190	-0.0100	-0.0032	0.0000	0.0032	0.0100	0.0190	0.0297	0.0426
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.49 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.50 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	-0.0426	-0.0807	-0.1099	-0.1275	-0.1334	-0.1275	-0.1099	-0.0807	-0.0426	0.0000
320	0.0000	-0.0297	-0.0563	-0.0771	-0.0902	-0.0948	-0.0902	-0.0771	-0.0563	-0.0297	0.0000
640	0.0000	-0.0190	-0.0362	-0.0498	-0.0589	-0.0623	-0.0589	-0.0498	-0.0362	-0.0190	0.0000
960	0.0000	-0.0100	-0.0192	-0.0269	-0.0326	-0.0350	-0.0326	-0.0269	-0.0192	-0.0100	0.0000
1280	0.0000	-0.0032	-0.0065	-0.0099	-0.0127	-0.0140	-0.0127	-0.0099	-0.0065	-0.0032	0.0000
1600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1920	0.0000	0.0032	0.0065	0.0099	0.0127	0.0140	0.0127	0.0099	0.0065	0.0032	0.0000
2240	0.0000	0.0100	0.0192	0.0269	0.0326	0.0350	0.0326	0.0269	0.0192	0.0100	0.0000
2560	0.0000	0.0190	0.0362	0.0498	0.0589	0.0623	0.0589	0.0498	0.0362	0.0190	0.0000
2880	0.0000	0.0297	0.0563	0.0771	0.0902	0.0948	0.0902	0.0771	0.0563	0.0297	0.0000
3200	0.0000	0.0426	0.0807	0.1099	0.1275	0.1334	0.1275	0.1099	0.0807	0.0426	0.0000

ตารางที่ 3.50 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 511.10$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 3</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.006$ แล้ว $p = \frac{0.006}{0.01} = 0.6$ จากตารางที่ 3.39-3.41 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.3)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 306.66$ วินาที ดังนั้น ค่าผลเฉลย ζ, u, v ที่ได้เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.51 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
640	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
960	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0127	0.0139	0.0127	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
1280	0.0000	0.0034	0.0074	0.0127	0.0171	0.0186	0.0171	0.0127	0.0074	0.0034	0.0000
1600	0.0000	0.0038	0.0082	0.0139	0.0186	0.0202	0.0186	0.0139	0.0082	0.0038	0.0000
1920	0.0000	0.0034	0.0074	0.0127	0.0171	0.0186	0.0171	0.0127	0.0074	0.0034	0.0000
2240	0.0000	0.0022	0.0050	0.0091	0.0127	0.0139	0.0127	0.0091	0.0050	0.0022	0.0000
2560	0.0000	0.0010	0.0025	0.0050	0.0074	0.0082	0.0074	0.0050	0.0025	0.0010	0.0000
2880	0.0000	0.0004	0.0010	0.0022	0.0034	0.0038	0.0034	0.0022	0.0010	0.0004	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.51 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำ (เมตร) ในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.52 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	-0.0441	-0.0422	-0.0362	-0.0258	-0.0129	0.0000	0.0129	0.0258	0.0362	0.0422	0.0441
640	-0.0842	-0.0805	-0.0691	-0.0491	-0.0246	0.0000	0.0246	0.0491	0.0691	0.0805	0.0842
960	-0.1161	-0.1110	-0.0950	-0.0674	-0.0338	0.0000	0.0338	0.0674	0.0950	0.1110	0.1161
1280	-0.1358	-0.1297	-0.1110	-0.0787	-0.0394	0.0000	0.0394	0.0787	0.1110	0.1297	0.1358
1600	-0.1424	-0.1360	-0.1163	-0.0824	-0.0413	0.0000	0.0413	0.0824	0.1163	0.1360	0.1424
1920	-0.1358	-0.1297	-0.1110	-0.0787	-0.0394	0.0000	0.0394	0.0787	0.1110	0.1297	0.1358
2240	-0.1161	-0.1110	-0.0950	-0.0674	-0.0338	0.0000	0.0338	0.0674	0.0950	0.1110	0.1161
2560	-0.0842	-0.0805	-0.0691	-0.0491	-0.0246	0.0000	0.0246	0.0491	0.0691	0.0805	0.0842
2880	-0.0441	-0.0422	-0.0362	-0.0258	-0.0129	0.0000	0.0129	0.0258	0.0362	0.0422	0.0441
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.52 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.53 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	-0.0441	-0.0842	-0.1161	-0.1358	-0.1424	-0.1358	-0.1161	-0.0842	-0.0441	0.0000
320	0.0000	-0.0422	-0.0805	-0.1110	-0.1297	-0.1360	-0.1297	-0.1110	-0.0805	-0.0422	0.0000
640	0.0000	-0.0362	-0.0691	-0.0950	-0.1110	-0.1163	-0.1110	-0.0950	-0.0691	-0.0362	0.0000
960	0.0000	-0.0258	-0.0491	-0.0674	-0.0787	-0.0824	-0.0787	-0.0674	-0.0491	-0.0258	0.0000
1280	0.0000	-0.0129	-0.0246	-0.0338	-0.0394	-0.0413	-0.0394	-0.0338	-0.0246	-0.0129	0.0000
1600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1920	0.0000	0.0129	0.0246	0.0338	0.0394	0.0413	0.0394	0.0338	0.0246	0.0129	0.0000
2240	0.0000	0.0258	0.0491	0.0674	0.0787	0.0824	0.0787	0.0674	0.0491	0.0258	0.0000
2560	0.0000	0.0362	0.0691	0.0950	0.1110	0.1163	0.1110	0.0950	0.0691	0.0362	0.0000
2880	0.0000	0.0422	0.0805	0.1110	0.1297	0.1360	0.1297	0.1110	0.0805	0.0422	0.0000
3200	0.0000	0.0441	0.0842	0.1161	0.1358	0.1424	0.1358	0.1161	0.0842	0.0441	0.0000

ตารางที่ 3.53 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 306.66$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 4</u> กำหนดให้ $\Delta X = \Delta Y = 0.01$, $\Delta T = 0.012$ แล้ว $p = \frac{0.012}{0.01} = 1.2$ จากตารางที่ 3.42-3.44 เมื่อแปลงผลเฉลยทั้งหมดให้อยู่ในรูปเชิงมิติแล้ว $t = \frac{(0.6)(3200)}{\sqrt{(9.8)(1)}} = 613.32$ วินาที ดังนั้น ค่าผลเฉลย ζ, u, v ที่ได้เป็นดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.54 ผลเฉลยค่า ζ เมตร เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	0.0000	-0.0048	-0.0092	-0.0132	-0.0164	-0.0178	-0.0164	-0.0132	-0.0092	-0.0048	0.0000
640	0.0000	-0.0092	-0.0180	-0.0257	-0.0318	-0.0345	-0.0318	-0.0257	-0.0180	-0.0092	0.0000
960	0.0000	-0.0132	-0.0257	-0.0367	-0.0453	-0.0491	-0.0453	-0.0367	-0.0257	-0.0132	0.0000
1280	0.0000	-0.0164	-0.0318	-0.0453	-0.0558	-0.0604	-0.0558	-0.0453	-0.0318	-0.0164	0.0000
1600	0.0000	-0.0178	-0.0345	-0.0491	-0.0604	-0.0654	-0.0604	-0.0491	-0.0345	-0.0178	0.0000
1920	0.0000	-0.0164	-0.0318	-0.0453	-0.0558	-0.0604	-0.0558	-0.0453	-0.0318	-0.0164	0.0000
2240	0.0000	-0.0132	-0.0257	-0.0367	-0.0453	-0.0491	-0.0453	-0.0367	-0.0257	-0.0132	0.0000
2560	0.0000	-0.0092	-0.0180	-0.0257	-0.0318	-0.0345	-0.0318	-0.0257	-0.0180	-0.0092	0.0000
2880	0.0000	-0.0048	-0.0092	-0.0132	-0.0164	-0.0178	-0.0164	-0.0132	-0.0092	-0.0048	0.0000
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.54 แสดงผลเฉลยของการยกตัวของระดับน้ำ (เมตร) ในอ่างเก็บน้ำเอกรูป เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.55 ผลเฉลยค่า u เมตร/วินาที เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

x / y	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
320	-0.0441	-0.0287	-0.0155	-0.0042	0.0036	0.0000	-0.0036	0.0042	0.0155	0.0287	0.0441
640	-0.0842	-0.0547	-0.0293	-0.0077	0.0069	0.0000	-0.0069	0.0077	0.0293	0.0547	0.0842
960	-0.1161	-0.0750	-0.0399	-0.0102	0.0098	0.0000	-0.0098	0.0102	0.0399	0.0750	0.1161
1280	-0.1358	-0.0875	-0.0461	-0.0114	0.0118	0.0000	-0.0118	0.0114	0.0461	0.0875	0.1358
1600	-0.1424	-0.0915	-0.0479	-0.0114	0.0126	0.0000	-0.0126	0.0114	0.0479	0.0915	0.1424
1920	-0.1358	-0.0875	-0.0461	-0.0114	0.0118	0.0000	-0.0118	0.0114	0.0461	0.0875	0.1358
2240	-0.1161	-0.0750	-0.0399	-0.0102	0.0098	0.0000	-0.0098	0.0102	0.0399	0.0750	0.1161
2560	-0.0842	-0.0547	-0.0293	-0.0077	0.0069	0.0000	-0.0069	0.0077	0.0293	0.0547	0.0842
2880	-0.0441	-0.0287	-0.0155	-0.0042	0.0036	0.0000	-0.0036	0.0042	0.0155	0.0287	0.0441
3200	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ตารางที่ 3.55 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.56 ผลเฉลยค่า v เมตร/วินาที เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

y \ x	0	320	640	960	1280	1600	1920	2240	2560	2880	3200
0	0.0000	-0.0441	-0.0842	-0.1161	-0.1358	-0.1424	-0.1358	-0.1161	-0.0842	-0.0441	0.0000
320	0.0000	-0.0287	-0.0547	-0.0750	-0.0875	-0.0915	-0.0875	-0.0750	-0.0547	-0.0287	0.0000
640	0.0000	-0.0155	-0.0293	-0.0399	-0.0461	-0.0478	-0.0461	-0.0399	-0.0293	-0.0155	0.0000
960	0.0000	-0.0041	-0.0077	-0.0102	-0.0113	-0.0114	-0.0113	-0.0102	-0.0077	-0.0041	0.0000
1280	0.0000	0.0036	0.0069	0.0098	0.0118	0.0126	0.0118	0.0098	0.0069	0.0036	0.0000
1600	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1920	0.0000	-0.0036	-0.0069	-0.0098	-0.0118	-0.0126	-0.0118	-0.0098	-0.0069	-0.0036	0.0000
2240	0.0000	0.0041	0.0077	0.0102	0.0113	0.0114	0.0113	0.0102	0.0077	0.0041	0.0000
2560	0.0000	0.0155	0.0293	0.0399	0.0461	0.0478	0.0461	0.0399	0.0293	0.0155	0.0000
2880	0.0000	0.0287	0.0547	0.0750	0.0875	0.0915	0.0875	0.0750	0.0547	0.0287	0.0000
3200	0.0000	0.0441	0.0842	0.1161	0.1358	0.1424	0.1358	0.1161	0.0842	0.0441	0.0000

ตารางที่ 3.56 แสดงผลเฉลยของความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน y (เมตร/วินาที) เมื่อ $t = 613.32$ วินาที โดยใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สรุปผลการคำนวณเชิงตัวเลข โดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เมื่อผู้วิจัยได้ใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์นำมาคำนวณ เพื่อใช้เป็นค่าเงื่อนไขขอบก่อนนั้น จะเห็นว่า วิธีปริยายทิศทางสลับนี้สามารถแก้ปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์ได้ โดยถ้า $p = 0.5$ และ $p = 0.6$ ซึ่งมีเงื่อนไขความเสถียร $p < 1$ แล้วผลลัพธ์ที่ได้ออกมาใกล้เคียงกับผลของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ แต่ถ้า $p = 1.0$ และ $p = 1.2$ ซึ่งมีเงื่อนไขความเสถียร $p \geq 1$ แล้วซึ่งสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยไม่ลู่ออก แต่จะเกิดการแกว่งของผลเฉลย (Oscillatory solutions) เมื่อเปรียบเทียบกับวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ซึ่งจะลู่ออก

ดังนั้น จากผลเฉลยดังตารางและกราฟต่างๆ จะแสดงให้เห็นว่า การยกตัวของระดับน้ำในอ่างเก็บน้ำเอกรูป จะมีระดับความสูงของน้ำที่จุดกึ่งกลางอ่างเก็บน้ำสูงที่สุด หรือต่ำที่สุดได้ เมื่อ $T = 0.25, 0.5, 0.3$ และ 0.6 ตามลำดับกรณี แล้วระดับการยกตัวของระดับน้ำจะลดลง หรือเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ไปจนถึงขอบอ่างเก็บน้ำที่มีการยกตัวของระดับน้ำเป็นศูนย์ โดยความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y เมื่อพิจารณาจากสนามความเร็ว แสดงให้เห็นว่ากระแสน้ำมีการเคลื่อนที่ไปในทิศทางเข้าหาขอบของอ่างเก็บน้ำในทุกทิศทาง และผลเฉลยการยกตัวของระดับน้ำ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y ในอ่างเก็บน้ำโดยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดเป็นผลเฉลยโดยประมาณที่อยู่ในรูปไร้มิติ ซึ่งสามารถแปลงให้เป็นผลเฉลยเชิงมิติตามปัญหาจริงๆ ได้อีกด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผู้วิจัยได้นำการคำนวณของวิธีทั้ง 2 วิธีในแต่ละกรณีมาเขียนเปรียบเทียบในตารางจะได้ดังนี้

ตารางที่ 3.57 ตารางการเปรียบเทียบความเสถียรระหว่างวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์และวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

Meshing Sizes		**P**	**Lax-Wendroff Method**	**The Eighteen Point ADI Method**
ΔX	ΔT			
0.01	0.005	0.5	Stable	Stable
0.01	0.006	0.6	Stable	Stable
0.01	0.01	1.0	Unstable	Stable
0.01	0.012	1.2	Unstable	Stable

จากตารางที่ 3.57 แสดงการเปรียบเทียบความเสถียรระหว่างวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์กับวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด จะเห็นว่าในกรณีที่ $p<1$ ทั้ง 2 วิธีมีความเสถียร (Stable) และในกรณีที่ $p\geq 1$ วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดจะมีความเสถียรเช่นกัน แต่ในวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์จะมีความไม่เสถียร (Unstable)

ดังนั้น จากการเปรียบเทียบผลเฉลยโดยประมาณจากตารางและกราฟของทั้ง 2 วิธี คือวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์และวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด จะเห็นว่าในกรณีที่ $p=0.5$ และ $p=0.6$ การคำนวณและผลเฉลยของทั้ง 2 วิธีนี้ สามารถหาผลเฉลยโดยประมาณได้และให้ค่าที่ใกล้เคียงกัน ส่วนในกรณีที่ $p=1.0$ และ $p=1.2$ การคำนวณด้วยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มีค่าความเสถียรไม่เป็นไปตามเงื่อนไขทำให้ผลเฉลยลู่ออก ซึ่งในการคำนวณด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด มีค่าความเสถียรอย่างปราศจากเงื่อนไขคือ $p>0$ ทำให้คำนวณหาผลเฉลยได้ไม่เกิดการลู่ออก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

4.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยนี้ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาค่าการยกตัวของระดับน้ำ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y โดยความเร็วของกระแสน้ำนี้ทำให้ทราบถึงสนามความเร็วของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในอ่างเก็บน้ำเอกรูปโดยใช้วิธีผลต่างจำกัด คือวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุด (The Eight Point ADI method) ในการคำนวณเชิงตัวเลขในระบบไฮเพอร์โบลิก 2 มิติกับปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์ ซึ่งจากการทดลองศึกษาแล้ว จึงทราบว่าวิธีนี้มีข้อจำกัดเกี่ยวกับค่าลักษณะเฉพาะ (eigenvalue) ของเมทริกซ์ A และ B ที่ต้องมีค่าเป็นลบเท่านั้น แต่ตัวแบบอุทกพลศาสตร์ที่ใช้ในการศึกษานี้ มีค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ A และ B เป็นทั้งค่าบวกและลบ ดังนั้นวิธีปริยายทิศทางสลับ 8 จุดจึงไม่สามารถนำมาคำนวณและนำไปใช้พัฒนาต่อกับงานวิจัยนี้ได้

จากนั้นผู้วิจัยจึงได้ศึกษาวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ (Lax-Wendroff method) และวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด (The Eighteen Point ADI method) เป็นวิธีการคำนวณเชิงตังเลขในระบบไฮเพอร์โบลิก 2 มิติ โดยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขในระบบไฮเพอร์โบลิก 2 มิติที่มีจุดเด่นในการแก้ไขปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์ได้ แต่ไม่สามารถหาผลเฉลยได้ทุกกรณี คือสามารถคำนวณหาค่าผลเฉลยได้เฉพาะกรณีที่มีค่าความเสถียร $p<1$ มิฉะนั้นผลเฉลยที่ได้จะลู่ออก ทำให้เกิดข้อกำจัดในการคำนวณโดยต้องเลือกขั้นเวลา (ΔT) ขนาดเล็กมาก ทำให้การคำนวณเป็นไปได้ช้ามากตามขนาดของขั้นเวลา

ผู้วิจัยได้นำเสนอวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด เพื่อมาแก้ไขปัญหาการคำนวณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ที่มีข้อจำกัดของเงื่อนไขความเสถียรในการหาผลเฉลย และนำวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาประยุกต์ใช้กับข้อจำกัดของวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดที่ไม่สามารถแก้ไขปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นในงานวิจัยนี้ได้นำวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดมาพัฒนาขั้นตอนการคำนวณเชิงตัวเลข เพื่อให้แก้ไขปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์ได้ โดยมีจุดเด่น คือกรณีที่เงื่อนไขความเสถียร $p \geq 1$ สามารถหาผลเฉลยได้โดยไม่ลู่ออก กล่าวคือความเสถียรปราศจากเงื่อนไขของวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด แต่มีจุดด้อย คือการแก้ปัญหาค่าขอบแบบนี้ได้นั้นจะต้องคำนวณด้วยวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์เสียก่อน โดยนำค่าผลเฉลยของ Z,U,V ที่ขอบมาใช้เป็นค่าเงื่อนไขขอบของวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด ฉะนั้นผลเฉลยที่ได้จะไม่เกิดการลู่ออก โดยวิธีนี้ทำให้สามารถเลือกขนาดของ ΔT ได้กว้างกว่า ΔT ของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ทั่วๆไป ดังนั้นการคำนวณจึงเป็นไปได้อย่างรวดเร็ว แต่ทำให้เกิดการแกว่งของผลเฉลยเล็กน้อย โดยไม่ทำให้ผลเฉลยลู่ออกแต่อย่างใด และเมื่อเปรียบเทียบความเสถียรระหว่างวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์และวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดแล้ว จะแสดงให้เห็นว่าวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดนั้นเกิดความเสถียรในทุกๆกรณีที่ได้ทำการศึกษา

4.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษางานวิจัยนี้ ผู้วิจัยทำการศึกษาและนำเสนอด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดในการคำนวณหาผลเฉลย แต่ยังคงต้องอาศัยการผนวกวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาช่วยในการประมาณค่าผลเฉลยที่ขอบของโดเมน แล้วจึงใช้วิธีปริยายทิศทางสลับมาคำนวณต่อ ซึ่งมีความยุ่งยากมากพอสมควร ดังนั้นในอนาคตสามารถนำวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดไปพัฒนาและศึกษาต่อโดยปรับปรุงและประยุกต์ใช้รวมกับเทคนิคและวิธีอื่นๆ หรือพัฒนาวิธีปริยายทิศทางสลับให้สามารถใช้กับเงื่อนไขขอบชนิดนี้ได้โดยวิธีปริยายทิศทางสลับเอง เพื่อให้ผลเฉลยโดยประมาณที่ได้มีความเสถียรและแม่นยำมากยิ่งขึ้น อย่างเช่นการใช้ Least Squares method มาช่วยแก้ไขการแกว่งของผลเฉลยที่คำนวณด้วยวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดนี้ ซึ่งน่าจะทำให้มีผลเฉลยที่เกิดการแกว่งลดลง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เอกสารอ้างอิง

[1] กัณฑรีย์ ศรีพงศ์พันธุ์. **มลพิษทางน้ำ (WATER POLLUTION).** พิมพ์ครั้งที่ 3. นครปฐม : โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร วิทยาเขตพระราชวังสนามจันทร์. 2547.

[2] A. Garzon, L.D'Alpaos. "A Modified Method of Characteristic Technique Combined with Galerkin Finite Element Method to Solve Shallow Water Mass Transport Problems." **Proceedings 23rd International Conference in Coastal Engineering 3**. 1992. pp. 3068-3080.

[3] P. Tabuenca, J. Vila, J. Cardona and A. Samartin. "Finite Element Simulation of Dispersion in the Bay of Santander." **Advances in Engineering Software 28**. 1997. pp. 313-332.

[4] Nopparat Pochai, Suwon Tangmenee, L. J. Crane and J. J. H. Miller. "A Mathematical Model of Water Pollution Control Using the Finite Element Method." **Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics 6**. 2006. pp. 755-756.

[5] Nopparat Pochai, Suwon Tangmenee, Lawrence J. Crane and John J. H. Miller. "A Water Quality Computation in the Uniform Reservoir." **Journal of Interdisciplinary Mathematics**. vol. 12, no. 1, 2009. pp. 19-28.

[6] Nopparat Pochai, Chunya Sornsri. "A Non-dimensional Form of Hydrodynamic Model with Variable Coefficients in a Uniform Reservoir Using Lax-Wendroff Method." **Procedia Engineering 8**. 2011. pp. 89-93.

[7] Nopparat Pochai. "A Numerical Computation of the Non-dimensional Form of a Non-linear Hydrodynamic Model in a Uniform reservoir." **Nonlinear Analysis: Hybrid Systems 3**. 2009. pp. 463-466.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[8] A.R. Mitchell. **Computation Method in Partial Differential Equations.** New York : Wiley. 1969.

[9] Chung-Yau Lam. **Applied Numerical Methods for Partial Differential Equations.** Singapore : Prentice Hall. 1994.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

วิธีผลต่างจำกัดกับโปรแกรม Matlab

จากวิธีผลต่างจำกัดในงานวิจัยนี้จะกล่าวถึงตัวอย่างการเขียนโปรแกรม Matlab ของการคำนวณเชิงตัวเลขในการประมาณค่าผลเฉลยของตัวแบบอุทกพลศาสตร์ในอ่างเก็บน้ำเอกรูป ที่ผู้วิจัยได้ทำการเขียนขึ้นมาโดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์และวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดกับปัญหาค่าขอบ ซึ่งผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยโปรแกรม Matlab คือการยกตัวของระดับน้ำ ความเร็วของกระแสน้ำในทิศทางตามแนวแกน x และแกน y (Z,U,V) ดังนั้นโปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขของ 2 วิธีเป็นดังต่อไปนี้

1. โปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta X=\Delta Y=0.006$, $\Delta T=0.01$

และ $N=50$

```
% ----------------------------------------------------------------------------------------
clear all;
clc;
format short;

% กำหนดค่าคงที่ต่างๆ
A = [0 -1 0; -1 0 0; 0 0 0];
B = [0 0 -1; 0 0 0; -1 0 0];
N = 50;
I = eye(3);
dT = 0.006;
dX = 0.01;
dY = dX;
p = dT/dX;
L = 1/dX;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
M = 1/dY;
AA = A*A;
BB = B*B;
AB = A*B;
BA = B*A;
F1 = I-((p^2)*(AA+BB));
F2 = (1/2)*p*A*(I+(p*A));
F3 = (1/2)*p*A*(I-(p*A));
F4 = (1/2)*p*B*(I+(p*B));
F5 = (1/2)*p*B*(I-(p*B));
F6 = (1/8)*(p^2)*(AB+BA);

% การคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์
WLax = cell(L+1,M+1,N+1);

% ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น เมื่อ t = 0
for m = 0 : M
   for l = 0 : L
      WLax{l+1,m+1,1} = [(l*dX)*(1-(l*dX))*(m*dY)*(1-(m*dY)); 0; 0];
   end
end

% การหาผลเฉลย W
for n = 1 : N
   for m = 2 : M
      for l = 2 : L
         WLax{l,m,n+1} = (F1*WLax{l,m,n})+(F2*WLax{l+1,m,n})-(F3*WLax{l-1,m,n})
          +(F4*WLax{l,m+1,n})-(F5*WLax{l,m-1,n})+(F6*(WLax{l+1,m+1,n}
          -WLax{l+1,m-1,n}-WLax{l-1,m+1,n}+WLax{l-1,m-1,n}));
      end
   end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
% ค่าเงื่อนไขขอบ t > 0
  for l = 1 : L-1
     fVW = WLax{l+1,2,n+1};
     fV = fVW(3,1);
     bVW = WLax{l+1,M,n+1};
     bV = bVW(3,1);
     WLax{l+1,1,n+1} = [0; 0; fV];
     WLax{l+1,M+1,n+1} = [0; 0; bV];
  end
  for m = 1 : M-1
     bUW = WLax{2,m+1,n+1};
     bU = bUW(2,1);
     fUW = WLax{L,m+1,n+1};
     fU = fUW(2,1);
     WLax{1,m+1,n+1} = [0; bU; 0];
     WLax{L+1,m+1,n+1} = [0; fU; 0];
  end
  WLax{1,1,n+1} = [0; 0; 0];
  WLax{1,M+1,n+1} = [0; 0; 0];
  WLax{L+1,1,n+1} = [0; 0; 0];
  WLax{L+1,M+1,n+1} = [0; 0; 0];
end

savefile = 'W_LAX.mat';
save(savefile, 'WLax')

% ------------------------------------------------------------------------------------------------------
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. โปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด

การคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดนี้ เมื่อใช้ผลเฉลยโดยประมาณของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์มาแทนค่าขอบ

กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\Delta X=\Delta Y=0.012$, $\Delta T=0.01$

และ $N=50$

```
% ----------------------------------------------------------------------------------------------------
clear all;
clc;
format short;

% กำหนดค่าคงที่ต่างๆ
A = [0 -1 0; -1 0 0; 0 0 0];
B = [0 0 -1; 0 0 0; -1 0 0];
N = 50;
I = eye(3);

% ค่าคงที่ ที่ใช้ในวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์
dT = 0.006;
dX = 0.01;
dY = dX;
p = dT/dX;
L = 1/dX;
M = 1/dY;

% ค่าคงที่ ที่ใช้ในวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด
dTADI = 0.012;
dXADI = 0.01;
dYADI = dXADI;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
pADI = dTADI/dXADI;
LADI = 1/dXADI;
MADI = 1/dYADI;
pb1 = (-1/4)*(pADI*B);
pb2 = (1/4)*(pADI*B);
pa1 = (-1/4)*(pADI*A);
pa2 = (1/4)*(pADI*A);
pa3 = (-1/8)*(pADI*A);
pa4 = (1/8)*(pADI*A);

% ค่าขอบของวิธีวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์ มาแทนในการคำนวณของวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด
% เพื่อแก้ปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์
[ ULeft,URight,VSouth,VNorth ] = BcForADI( L,M,N);

% การคำนวณเชิงตัวเลขโดยใช้วิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุด
WADI = cell(LADI+1,MADI+1,N+1);
Wstar = cell(LADI+1,MADI+1,N+1);

% ค่าเงื่อนไขเริ่มต้น เมื่อ t = 0
for m = 0 : MADI
   for l = 0 : LADI
      WADI{l+1,m+1,1} = [(l*dXADI)*(1-(l*dXADI))*(m*dYADI)*(1-(m*dYADI)); 0; 0];
   end
end

% ค่าเงื่อนไขขอบ เมื่อ t > 0
for n = 1 : N
   for l = 0 : LADI
      WADI{l+1,1,n+1} = [0; 0; VSouth(n,l+1)];
      WADI{l+1,MADI+1,n+1} = [0; 0; VNorth(n,l+1)];
   end
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
for m = 0 : MADI
    WADI{1,m+1,n+1} = [0; ULeft(n,m+1); 0];
    WADI{LADI+1,m+1,n+1} = [0; URight(n,m+1); 0];
  end
end

% Find System A of W Star
sysA = findSysA( LADI,pb1,pb2,I );

% Find System A of W (ADI)
sysAw = findSysAw( LADI,pa1,pa2,I );

% การคำนวณหา W Star
b1 = cell(LADI,N);
b2 = cell(LADI,N);
b3 = cell(LADI,N);
sysX = cell(LADI+1,1);
for n = 1 : N
  for l = 2 : LADI
    Wstar{l,1,n+1} = ((0.5)*WADI{l,1,n})+(pa4*(WADI{l+1,1,n}-WADI{l-1,1,n}))
      +((0.5)*WADI{l,1,n+1})+(pa3*(WADI{l+1,1,n+1}-WADI{l-1,1,n+1}));
    Wstar{l,MADI+1,n+1} = ((0.5)*WADI{l,MADI+1,n})+(pa4*(WADI{l+1,MADI+1,n}
      -WADI{l-1,MADI+1,n}))+((0.5)*WADI{l,MADI+1,n+1})
      +(pa3*(WADI{l+1,MADI+1,n+1}-WADI{l-1,MADI+1,n+1}));
    b1{l,1} = (pa1*WADI{l-1,2,n})+WADI{l,2,n}+(pa2*WADI{l+1,2,n})
      +(pb1*Wstar{l,1,n+1});
    sysB = [b1{l,1}];
    adSysBstar = sysB;
    for m = 3 : MADI-1
      b2{l,m-2} = (pa1*WADI{l-1,m,n})+WADI{l,m,n}+(pa2*WADI{l+1,m,n});
      sysB = [adSysBstar; b2{l,m-2}];
      adSysBstar = sysB;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    end
    b3{l,1} = (pa1*WADI{l-1,MADI,n})+WADI{l,MADI,n}+(pa2*WADI{l+1,MADI,n})
        +(pb2*Wstar{l,MADI+1,n+1});
    sysB = [adSysBstar; b3{l,1}];
    sysX{l,1} = sysA\sysB;
  end

%การแยกเก็บค่า Z,U,V
  Wstar = splitWstar( LADI,MADI,n,sysX,Wstar );

% การคำนวณหา W
bw1 = cell(LADI,N);
bw2 = cell(LADI,N);
bw3 = cell(LADI,N);
col = LADI-1;
sysXw = cell(LADI+1,1);
  for m = 2 : MADI
    bw1{m,1} = (pb1*Wstar{2,m-1,n+1})+Wstar{2,m,n+1}+(pb2*Wstar{2,m+1,n+1})
        +(pa1*WADI{1,m,n+1});
    sysBw = [bw1{m,1}];
    adSysBw = sysBw;
    loop = col-2;
    count = 1;
    while count <= loop
      bw2{m,1} = (pb1*Wstar{count+2,m-1,n+1})+Wstar{count+2,m,n+1}
       +(pb2*Wstar{count+2,m+1,n+1});
      sysBw = [adSysBw; bw2{m,1}];
      adSysBw = sysBw;
      count = count+1;
    end
    bw3{m,1} = (pb1*Wstar{MADI,m-1,n+1})+Wstar{MADI,m,n+1}
        +(pb2*Wstar{MADI,m+1,n+1})+(pa2*WADI{MADI+1,m,n+1});
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
    sysBw = [adSysBw; bw3{m,1}];
    sysXw{m,1} = sysAw\sysBw;
  end

%การแยกเก็บค่า Z,U,V
  WADI = splitWADI( LADI,MADI,n,sysXw,WADI );
end

savefile = 'W_ADI.mat';
save(savefile, 'WADI')

% ------------------------------------------------------------------------------
```

จากตัวอย่างโปรแกรม Matlab การคำนวณเชิงตัวเลขของวิธีแลกซ์-เวนดรอฟฟ์และวิธีปริยายทิศทางสลับ 18 จุดนี้ ผู้วิจัยได้เขียนขึ้นมาเพื่อใช้ในการศึกษาวิเคราะห์ วิจัยค่าผลเฉลยจากการคำนวณ สำหรับตัวแบบอุทกพลศาสตร์กับปัญหาค่าขอบแบบอนุพันธ์ โดยได้นำเสนอผลเฉลย Z,U,V ของทั้ง 2 วิธีนี้ไว้ในตารางดังบทที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

International Conference on Engineering, Applied Sciences, and Technology
August 21-24, 2013, The Sukosol, Bangkok, Thailand

Numerical Solutions to a Non-dimensional Form of a Hydrodynamic Model in a Uniform Reservoir Using the Eighteen Point ADI Method

Pravitra Oyjinda[1]
[1]Department of Mathematics, Faculty of Science
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang
Bangkok, 10520, Thailand
Email: pravitra.o@gmail.com

Nopparat Pochai[1,2]
[2]Centre of Excellence in Mathematics,
CHE, Si Ayutthaya Rd.,
Bangkok 10400, Thailand
Email: konoppar@kmitl.ac.th

Abstract— **The water current simulation is important for the water-quality measurement in reservoirs. A mathematical model of the water current in a uniform reservoir is proposed. It is simulated by using a hydrodynamic model of a two-dimensional shallow water equation. The model gives the velocity and elevation of the water in the reservoir. The results can be used as the input data for the advection-diffusion-reaction equation as water quality model. In previous research, the numerical solution of the hydrodynamic model is introduced by the Lax-Wendroff method that limited by a stability condition. In this research, an agreement numerical method to a non-dimensional form of the hydrodynamic model is proposed. The eighteen point alternating direction implicit (ADI) method can approximate the solutions without the limitation of the stability condition. The ADI is a second-order accuracy scheme that gives more accurate solutions.**

I. Introduction

The mathematical simulation is an important method to detect the quality of water in consideration areas. For the shallow water mass transport problems that presented in [1], the method of characteristics has been reported as being applied with success, but it presents in real cases some difficulties. In [6] and [19], the finite element method for solving the water pollution models in one- and two-dimensional water areas are presented, respectively. The most of mathematical model require data concerning with velocity of the current at any point in the domain. The hydrodynamic model provides the velocity field and tidal elevation of the water. Those results are data for the dispersion model. In [7]-[18], they used the finite difference method to the hydrodynamic model with constant coefficients in the uniform reservoir.

The most of nonuniform flow model require data concerned with velocity of the current at any point and any time in the domain. The hydrodynamic model provides the velocity field and tidal elevation of the water.

Researches on finite difference schemes have considered on numerical accuracy and stability. There are several high quality numerical schemes, such as QUICK/QUICKest schemes, Lax-Wendroff scheme, Crandall scheme, and Dufort-Frankel scheme, etc. have been developed to enhance model performances. These schemes have outstanding stability and high order accuracy. They are requirement for advection dominated systems. Although, these schemes need boundary and initial conditions that make them difficult to use. They need more computing effort since iterations for more grids are involved in each computation step. For example, the QUICKest scheme uses a three-point upstream-weighted quadratic interpolation, and needs the stop criteria controlled iterations for each grid in order to enhance accuracy. The scheme carry out a heavy computing load. Since it involves two upstream points, the upper boundary conditions need to be defined carefully before starting computation [3].

Averaging the equation over the depth, discarding the term due to Coriolis force, shearing stresses and surface wind, it follows that the two-dimensional linear shallow water equation is applicable [5]. In this research, we use the alternating direction implicit (ADI) method to approximate the velocity and the tidal elevation of water in a uniform (rectangular) reservoir.

II. The Hydrodynamic Model

The continuity and momentum equations are govern the hydrodynamic behavior of the reservoir. Averaging the equations over the depth, discarding the term due to Coriolis parameter, shearing stresses and surface wind. The well-known two-dimensional shallow water equations

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)v] = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

where $h(x,y)$ be the depth measured from the mean water level to the bed of the reservoir, $\zeta(x,y,t)$ is the elevation from the mean water level to the temporary water surface or the tidal elevation, g is the acceleration due to gravity, and $u(x,y,t)$ and $v(x,y,t)$ are the velocity components, for all $(x,y) \in [0,l]\times[0,l]$. We now introduce the two-dimensional non-linear shallow water equations with dimensionless form [7] by letting

เอกสารนี้เป็นเอกสารของงานบริการวิชาการและวิจัย ที่ได้รับการคุ้มครองลิขสิทธิ์
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

International Conference on Engineering, Applied Sciences, and Technology
August 21-24, 2013, The Sukosol, Bangkok, Thailand

$U = u/\sqrt{gh}, V = v/\sqrt{gh}, X = x/l, Y = y/l, Z = \zeta/h$ and $T = t\sqrt{gh}/l$,

$$\frac{\partial Z}{\partial T} + \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\partial Z}{\partial X} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial T} + \frac{\partial Z}{\partial Y} = 0 \quad (6)$$

in $\Omega \times [0,T]$ where $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ with the initial conditions given for $Z(X,Y,0) = f(X,Y)$ and $U(X,Y,0) = V(X,Y,0) = 0$. The boundary conditions given for $Z(0,Y,T) = Z(1,Y,T) = Z(X,0,T) = Z(X,1,T) = 0$ and $U(0,Y,T) = U(1,Y,T) = r(Y,T)$ and $V(X,0,T) = V(X,1,T) = s(X,T)$ at $\partial\Omega$.

III. A Numerical Technique

A. Numerical solution of the hydrodynamic model

The equations (4)-(6) can be written in the matrix form

$$\frac{\partial W}{\partial T} = A\frac{\partial W}{\partial X} + B\frac{\partial W}{\partial Y}, \quad (7)$$

where

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$W_1 = Z, W_2 = U$ and $W_3 = V$. We now discretize Eq.(7) by dividing the interval $[0,1]$ into L and M subintervals such that $L\Delta X = 1$ and $M\Delta Y = 1$, and the interval $[0,T]$ into N subintervals such that $N\Delta T = T$. We can then approximate $W_1(X_l, Y_m, T_n)$ by $W^n_{1_{l,m}}$, value of the difference approximation of $W_1(X,Y,T)$ at point $X = l\Delta X$, $Y = m\Delta Y$ and $T = n\Delta T$, where $0 \le l \le L$, $0 \le m \le M$ and $0 \le n \le N$, and similarly defined for $W^n_{2_{l,m}}$ and $W^n_{3_{l,m}}$. The grid point (X_l, Y_m, T_n) are defined by $X_l = l\Delta X$ for all $l = 0,1,2,\ldots,L$, $Y_m = m\Delta Y$ for all $m = 0,1,2,\ldots,M$ and $T_n = n\Delta T$ for all $n = 0,1,2,\ldots,N$ in which L, M and N are positive integers. Using the eighteen point alternating direction implicit (ADI) method in [2] and [4] to Eq.(7), the finite difference equation can be obtained as follows:

$$[I - \frac{1}{4}pB(\Delta_Y + \nabla_Y)][I - \frac{1}{4}pA(\Delta_X + \nabla_X)]W^{n+1}_{l,m}$$
$$= [I + \frac{1}{4}pB(\Delta_Y + \nabla_Y)][I + \frac{1}{4}pA(\Delta_X + \nabla_X)]W^n_{l,m}. \quad (10)$$

It concerns nine grid points at each time steps and is results an eighteen point formula. Equation (10) can be split in Peaceman-Rachford form [4] as

Step I: determine $W^{n+1^*}_{l,m}$ involving Y-direction,

$$[I - \frac{1}{4}pB(\Delta_Y + \nabla_Y)]W^{n+1*}_{l,m} = [I + \frac{1}{4}pA(\Delta_X + \nabla_X)]W^n_{l,m}.$$

TABLE I
Table of water velocity $u(x,y,t)$ in the x-direction when $\Delta x = \Delta y = 800m$ and $\Delta t = 102.22sec$

x, y	0	0.25	0.50	0.75	1
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.2210	-0.0319	0.0044	0.0319	0.2210
0.50	0.3124	-0.0379	0.0063	0.0379	0.3124
0.75	0.2210	-0.0257	0.0044	0.0257	0.2210
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Step II: determine $W^{n+1}_{l,m}$ involving X-direction,

$$[I - \frac{1}{4}pA(\Delta_X + \nabla_X)]W^{n+1}_{l,m} = [I + \frac{1}{4}pB(\Delta_Y + \nabla_Y)]W^{n+1*}_{l,m}$$

where $W^{n+1^*}_{l,m}$ is an intermediate value,

$$W^n_{l,m} = \begin{pmatrix} W^n_{1_{l,m}} \\ W^n_{2_{l,m}} \\ W^n_{3_{l,m}} \end{pmatrix}, \Delta_X W^n_i = W^n_{i+1} - W^n_i,$$

$$\nabla_X W^n_i = W^n_i - W^n_{i-1},$$

and $p = \Delta T/\Delta X$. A finite difference equation (10) has second-order accuracy and the condition for its stability is satified unconditionally [2], [4].

IV. Water Quality Evaluation

We consider the uniform reservoir with dimension 3.2×3.2 km^2 and the constant depth $h = 1$ m. The reservoir is meshed with 16 grids points with $\Delta x = \Delta y = 800$ m and taking time interval $\Delta t = 102.22$ sec.

In order to simulate the problem, we change the variables into dimensionless form of equations (4)-(6). Initially the water in the reservoir is assumed to be motionless $u = 0$, $v = 0$. The water elevation is also transformed into a non-dimensional form. In this example, it is assumed to be a function that satisfied all initial and boundary conditions as $Z(X,Y,0) = f(X,Y) = X(1-X)Y(1-Y)$ and $U(0,Y,T) = U(1,Y,T) = \sin(Y\pi)\sin(T)$ and $V(X,0,T) = V(X,1,T) = \sin(X\pi)\sin(T)$.

After we take Eq.(10), following their steps and solving the system of linear equations using LU-decomposition, we can obtain the finite difference solution of water velocity in x-,y-directions and water elevation at each time increments as shown in Tables I-III, respectively.

V. Conclusion

The model for evaluation of the velocity and elevation of the reservoir is approximated by using the eighteen point ADI method with constant coefficients. In this research, an agreement numerical method to a non-dimensional form of the hydrodynamic model is introduced. The 18 point ADI method can calculate the solutions without the problems of the stability condition. The method governs a large linear system for each step of calculations. Although, it turn out good agreement

เอกสารนี้มีลิขสิทธิ์ สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

TABLE II

TABLE OF WATER VELOCITY $v(x, y, t)$ IN THE Y-DIRECTION WHEN $\Delta x = \Delta y = 800m$ AND $\Delta t = 102.22sec$

x, y	0	0.25	0.50	0.75	1
0	0.0000	0.2210	0.3124	0.2210	0.0000
0.25	0.0000	-0.0288	-0.0382	-0.0288	0.0000
0.50	0.0000	0.0044	0.0063	0.0044	0.0000
0.75	0.0000	0.0288	0.0382	0.0288	0.0000
1	0.0000	0.2210	0.3124	0.2210	0.0000

TABLE III

TABLE OF WATER ELEVATIONS $\zeta(x, y, t)$ WHEN $\Delta x = \Delta y = 800m$ AND $\Delta t = 102.22sec$

x, y	0	0.25	0.50	0.75	1
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.25	0.0000	0.0490	0.0547	0.0350	0.0000
0.50	0.0000	0.0548	0.0577	0.0352	0.0000
0.75	0.0000	0.0354	0.0355	0.0214	0.0000
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

solutions without stability limitation. These means that we can choose large time increment (Δt). Therefore, the computer time of calculation of our technique as fast as we required.

ACKNOWLEDGMENT

This research is supported by the Centre of Excellence in Mathematics, the Commission on Higher Education, Thailand. The author greatly appreciate valuable comments received from the referees.

REFERENCES

[1] A. Garzon, L. D'Alpaos, A modified method of the characteristic technique combined with Gelerkin finite element method to solve shallow water mass transport problems, *Proceedings 23rd International Conference in Coastal Engineering*, **3** (1992), 3068 - 3080.

[2] Gourlay, A.R. and Mitchell, A.R., A stable implicit difference method for hyperbolic system s in two space variables, *Numer. Math.*, **8** (1966), 367 - 375.

[3] Li, G. and Jackson, C.R., *Simple, accurate and efficient revisions to MacCormack and Saulyev schemes: High Peclet numbers*, Applied Mathematics and Computation, **186** (2007), 610-622.

[4] A. R. Mitchell, *Computational methods in partial differential equations*, Wiley, New York, 1969.

[5] H. Ninomiya and K. Onishi, *Flow analysis using a PC*, Computational Mechanics Publications, CRC Press, Boca Raton, 1991.

[6] Pochai, N., Tangmanee, S., Crane, L.J. and Miller,J.J.H., A mathematical model of water pollution control using the finite element method, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, **6(1)** (2006), 755 - 756.

[7] Pochai, N., Tangmanee, S., Crane, L.J. and Miller,J.J.H., A Water Quality Computation in the Uniform Reservoir, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, **11(6)** (2008), 803 - 814.

[8] Pochai, N. and Tangmanee, S., A Mathematical Model of Water Pollution Using Finite Element Method, *Contributions in Mathematics and Applications, East-West J. Math. Spec. Vol.* (2007) 143-154.

[9] Pochai, N., Tangmanee, S., Crane, L. J. and Miller, J. J. H., A Water Quality Computation in the Uniform Channel, *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, **12(1)** (2008), 19-28.

[10] Pochai, N., A Numerical Computation of Non-dimensional Form of a Nonlinear Hydrodynamic Model in a Uniform Reservoir,*Journal of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, **3** (2009), 463-466.

[11] Pochai, N., A Numerical Computation of Non-linear Hydrodynamic Model,*Appl. Math. Sci.*, **3(29-32)** (2009), 1513-1517.

[12] Pochai, N., Tangmanee, S., Crane, L. J. and Miller, J. J. H., A Finite Element Simulation of Water Quality Measurement in the Open Reservoir, *Thai Journal of Mathematics*,**7(2)** (2009), 7793.

[13] Pochai, N., A Numerical Computation of Non-dimensional Form of Stream Water Quality Model with Hydrodynamic Advection-Dispersion-Reaction Equations, *Journal of Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*,**3** (2009), 666-673.

[14] Pochai, N.,A Computation of a Non-linear Hydrodynamic Model in a Uniform Reservoir,*5th Asian Mathematical Conference Proceedings (Volume II)*, **June 2009**, 596 - 600.

[15] Pochai, N., and Depana, R. A Numerical Computation of Water Quality Measurement in a Uniform Channel Using a Finite Difference Method, *Procedia Engineering*,**8**, (2011), 85-88.

[16] Pochai, N., and Sornsri, J. A non-dimensional form of hydrodynamic model with variable coefficients in a uniform reservoir using Lax-Wendroff method,*Procedia Engineering*,**8**, (2011), 89-93.

[17] Pochai, N., A Numerical Treatment of Non-dimensional Form of Water Quality Model in a Non-Uniform Flow Stream Using Saulyev Scheme, *Mathematical Problems in Engineering. 2011*, Article ID 491317.

[18] Pochai, N., and Depana, R. An Optimal Control of Water Pollution in a Stream Using a Finite Difference Method,*World Academy of Science, Engineering and Technology*,**6(56)** (2011), 1186-1188.

[19] P. Tabuenca, J. Vila, J. Cardona and A. Samartin, Finite element simulation of dispersion in the bay of Santander, *Advanced in Engineering Software*, **28** (1997), 313 - 332.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	ปวิตรา อวยจินดา
วัน เดือน ปีเกิด	4 ตุลาคม พ.ศ. 2531
ที่อยู่	53/62 เมืองทองธานี ถ.แจ้งวัฒนะ ต.บางพูด อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี 11120
อีเมล์	pravitra.o@gmail.com
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง กรุงเทพฯ
ปีที่สำเร็จการศึกษา	2553
ผลงานวิชาการ	Numerical Solutions to a Non-dimensional Form of a Hydrodynamic Model in a Uniform Reservoir Using the Eighteen Point ADI Method. International Conference on Engineering, Applied Sciences, and Technology (ICEAST 2013) "Integrated Solutions for Innovative Community" August 21-24, 2013 at The Sukosol Bangkok, Thailand.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้