การคำนวณผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ของแผนแบบละตินสแควร์ ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหายสองค่าโดยวิธีตรง

DETERMINATION OF TREATMENT SUM OF SQUARES OF LATIN SQUARE DESIGN IN CASES OF TWO MISSING OBSERVATIONS BY EXACT APPROACH

กนกวรรณ ท่าช่วงทำเล
KANOKWAN THACHONGTHUMLA

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2561

KMITL-2018-EN-M-217-124

การคำนวณผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ของแผนแบบละตินสแควร์ ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหายสองค่าโดยวิธีตรง

DETERMINATION OF TREATMENT SUM OF SQUARES OF
LATIN SQUARE DESIGN IN CASES OF TWO MISSING OBSERVATIONS
BY EXACT APPROACH

กนกวรรณ ท่าช่วงทำเล
KANOKWAN THACHONGTHUMLA

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2561
KMITL-2018-EN-M-217-124

DETERMINATION OF TREATMENT SUM OF SQUARES OF LATIN SQUARE DESIGN IN CASES OF TWO MISSING OBSERVATIONS BY EXACT APPROACH

KANOKWAN THACHONGTHUMLA

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN INDUSTRIAL ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT’S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2018
KMITL-2018-EN-M-217-124

คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การคำนวณผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ของแผนแบบละตินสแควร์ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหายสองค่าโดยวิธีตรง

Thesis Title Determination of Treatment Sum of Squares of Latin Square Design in Cases of Two Missing Observations by Exact Approach

นักศึกษา นางสาวกนกวรรณ ท่าช่วงทำเล

รหัสประจำตัว 58601240

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมอุตสาหการ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผศ.ดร.กิตติวัฒน์ สิริเกษมสุข

หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2018-EN-M-217-124

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.บุญอ้อม	โฉมที	
รศ.ดร.ฤดี	มาสุจันท์	
ผศ.ดร.ชุมพล	ยวงใย	
ดร.จรสวรรณ	โกยวานิช	
ผศ.ดร.กิตติวัฒน์	สิริเกษมสุข	

วัน / เดือน/ ปี ที่สอบ วันจันทร์ที่ 9 กรกฎาคม พ.ศ. 2561 เวลา 11.00-13.00 น.

สถานที่สอบ ณ ห้อง HM-304 อาคารเฉลิมพระเกียรติ

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์ ดร. คมสัน มาลีสี)

คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

วันที่ 9 กรกฎาคม พ.ศ. 2561

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การคำนวณผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ของแผนแบบละตินสแควร์ ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหายสองค่าโดยวิธีตรง
นักศึกษา	นางสาวกนกวรรณ ท่าช่วงทำเล
รหัสประจำตัว	58601240
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมอุตสาหการ
พ.ศ.	2561
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	ผศ.ดร.กิตติวัฒน์ สิริเกษมสุข

บทคัดย่อ

แผนแบบละตินสแควร์ถือว่าเป็นแผนการทดลองที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งมีวัตถุประสงค์เพื่อคัดเลือกปัจจัย แผนแบบละตินสแควร์ประกอบด้วย 3 ปัจจัย ได้แก่ 2 ปัจจัยรบกวนและ 1 ปัจจัยที่สนใจศึกษาผลกระทบ ซึ่งจำนวนปัจจัยทางแถว ปัจจัยทางคอลัมน์ และปัจจัยทางทรีตเมนต์จะต้องเท่ากัน ผู้ทดลองอาจจะพบปัญหาข้อมูลจากการทดลองสูญหาย (แผนแบบที่ไม่สมดุล) การทดลองแบบข้อมูลสูญหายปกติแล้วจะไม่สามารถใช้ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบปกติได้ (Analysis of Variance (ANOVA)) เพราะสูตรที่ใช้หาค่าผลบวกกำลังสองต่างๆด้วยวิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนทั่วไป (Classical ANOVA) ยังไม่สามารถใช้ได้ทันที แต่แผนแบบที่ไม่สมดุล (รวมถึงแผนแบบที่สมดุล) จะสามารถวิเคราะห์ได้โดยวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป ซึ่งไม่ต้องประมาณค่าข้อมูลที่สูญหาย แผนแบบละตินสแควร์ที่ไม่สมดุลเมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่าถือเป็นเรื่องที่น่าสนใจในการวิเคราะห์ ดังนั้นในงานวิจัยนี้แผนแบบละตินสแควร์ในทุกอันดับที่มีค่าข้อมูลสูญหายสองค่าจะถูกวิเคราะห์โดยวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) สิ่งสำคัญที่สุดคืองานวิจัยนี้ได้พัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป ซึ่งจะนำไปสู่การหาผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ได้โดยง่าย นอกจากนี้การเปรียบเทียบค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ และค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนของวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไปและวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดจะถูกสร้างขึ้น ผลลัพธ์ที่น่าสนใจที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Missing Plot Technique with Least Square Method) จะให้ค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์มากกว่าวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) แต่ค่าผลบวกกำลังสองของความของความคลาดเคลื่อนทั้งสองวิธีจะเท่ากัน

Thesis	Determination of Treatment Sum of Squares of Latin Square Design in Cases of Two Missing Observations by Exact Approach
Student	Miss Kanokwan Thachongthumla
Student ID	58601240
Degree	Master of Engineering
Program	Industrial Engineering
Year	2018
Thesis Advisor	Asst.Prof.Dr.Kittiwat Sirikasemsuk

ABSTRACT

The Latin square design is one of several efficient experimental design strategies for screening purposes. The Latin square design is comprised of three factors, i.e. two nuisance factors and one potential factor. It is noted that the numbers of row, column and treatment is equal. Experimenters may come across problems of incomplete experimental data (often called the unbalanced design). The incomplete experimental design commonly leads to difficulties in the analysis of variance (ANOVA), because the usual formulae for the determination of all sums of squares are not immediately provided by the principle of classical ANOVA. Notwithstanding, the unbalanced design (including the balanced design) can be analyzed by the exact approach based on general linear model in which no estimate of the missing values is made. The incomplete Latin square design with two missing values poses significant challenges to the analysis. Hence, the Latin square design of any order with two missing values is analyzed by means of the exact approach based on general linear model in this research. Most importantly, this research paper has proposed the explicit and mathematical formulae for the regression sum of squares of the full-effect and reduced-effect models of experimental data for ease of determination of the treatment sum of squares. In addition, comparisons of the treatment and error sums of squares calculated by the exact approach based on general linear model and the missing plot technique with least square method are made. The interesting results of the comparison show that, the missing plot technique with least square method leads to higher the treatment sum of squares than the exact approach based on general linear model, however the error sum of squares using both the two approaches are equal.

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาจากอาจารย์ที่ปรึกษา ผศ.ดร.กิตติวัฒน์ สิริเกษมสุข ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะช่วยแก้ปัญหา ติดตามความคืบหน้าในการจัดทำวิทยานิพนธ์ทุกขั้นตอน แนะนำแนวทางการดำเนินงานให้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี ตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้า ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณท่านคณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์ซึ่งได้แก่ ผศ.ดร.บุญอ้อม โฉมที ประธานสอบ และผศ.ดร.ชุมพล ยวงใย,รศ.ดร.ฤดี มาสุจันท์ และดร.จรสวรรณ โกยวานิช กรรมการสอบ โดยเมตตาให้คำแนะนำและให้ความรู้ที่เป็นประโยชน์ในการปรับปรุงงานวิจัยให้ดียิ่งขึ้น ผู้วิจัยขอบขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณอาจารย์สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการทุกท่านที่ถ่ายทอดความรู้ และประสบการณ์ให้แก่ข้าพเจ้า รวมถึงเจ้าหน้าที่ของภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ และหน่วยงานบัณฑิตศึกษาคณะวิศวกรรมศาสตร์ทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือในการติดต่อประสานงานในเรื่องต่างๆ และเพื่อนนักศึกษาปริญญาโท สาขาวิชาวิศวกรรมอุตสาหการ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกท่านที่ให้กำลังใจในการทำงานวิจัยนี้ด้วยดีเสมอมา

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา รวมถึงคนในครอบครัวของข้าพเจ้าทุกคนที่คอยให้การสนับสนุนในทุกๆ เรื่อง และเป็นกำลังใจ ทำให้ข้าพเจ้าสามารถทำวิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง (ต่อ)

สารบัญตาราง (ต่อ)

สารบัญรูป

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การออกแบบการทดลองใช้ทดสอบว่าอิทธิพลของปัจจัยควบคุม (Independent Variable) ได้แก่ ปัจจัยที่สนใจ และปัจจัยบล็อก ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ของตัวแปรตามหรือไม่ โดยการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรตาม (Dependent Variable) ที่ต้องการศึกษาอาจจะอยู่ในเทอมของตัวแปรที่ไม่อิสระ หรือตัวแปรที่อิสระ ซึ่งการออกแบบการทดลองที่ดีจะทำให้การนำข้อมูลไปวิเคราะห์ผลได้คำตอบที่ถูกต้อง และการเลือกใช้กลยุทธ์ที่เหมาะสมจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนของการทดลองให้น้อยลง

ดังนั้นการออกแบบการทดลองจึงเป็นที่นิยมใช้กันในหลายแขนงวิชาชีพ เช่น ทางการเกษตร วิทยาศาสตร์ การแพทย์ วิศวกรรมศาสตร์ เป็นต้น การออกแบบการทดลองเป็นสิ่งสำคัญเบื้องต้นที่จะต้องพิจารณา ซึ่งขั้นตอนในการออกแบบการทดลองต้องทำการออกแบบ วิเคราะห์ผล ออกแบบอีกครั้งแล้วทำการแก้ไขให้เหมาะสม โดยทั่วไปการทดลองเป็นกระบวนการศึกษาประสิทธิภาพของกระบวนการและระบบผลของการทดลองจะทำให้ทราบถึงข้อเท็จจริงจากการทดลองเพื่อจะยืนยันผลลัพธ์เดิม หรือยอมรับในผลลัพธ์ใหม่ที่เกิดขึ้น กลยุทธ์ของการออกแบบการทดลองมีแผนการทดลองหลายแบบ ได้แก่ แผนแบบการทดลองสุ่มสมบูรณ์ (Completely Randomized Design (CRD)) แผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม (Randomized Complete Block Design (RCBD)) แผนแบบละตินสแควร์ (Latin Square Design (LSD)) และแผนแบบอื่นๆ ซึ่งในแต่ละแผนแบบนั้นจะมีลักษณะของหน่วยทดลองที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับลักษณะของการออกแบบการทดลอง

ในงานวิจัยนี้ได้สนใจแผนแบบละตินสแควร์ (Latin Square Design (LSD)) เป็นแผนแบบที่มีประสิทธิภาพ และใช้จำนวนตัวอย่างน้อย ประกอบด้วย 3 ปัจจัย ได้แก่ 2 ปัจจัยรบกวนและ 1 ปัจจัยที่สนใจศึกษาผลกระทบ สำหรับปัจจัยรบกวนผู้ทดลองต้องการควบคุมด้วยการบล็อก (Blocking) แผนแบบละตินสแควร์เหมาะที่จะนำมาใช้เมื่อมีแหล่งความแปรปรวน 2 ทางที่ต้องการควบคุม คือ (1) ปัจจัยทางแถว และ (2) ปัจจัยทางคอลัมน์ แผนแบบละตินสแควร์จะกำจัดตัวแปรรบกวนที่ไม่ใช่อิทธิพลออกจากความคลาดเคลื่อนของการทดลอง ในการออกแบบการทดลองของแผนแบบละตินสแควร์จำนวนปัจจัยทางแถว ปัจจัยทางคอลัมน์ และปัจจัยทางทรีตเมนต์จะต้องเท่ากันในการวางแผนการทดลองแบบนี้

จากตัวอย่างในงานของจิราวัลย์ จิตรถเวช (2552) ได้ให้ตัวอย่างการศึกษาคุณภาพของยางรถยนต์ 4 ชนิด โดยที่ A B C และ D เป็นตัวแทนของชนิดยางรถยนต์ ในการนี้ผู้ทดลองไม่แน่ใจว่าตำแหน่งของล้อจะมีอิทธิพลต่อการสึกหรอของยางหรือไม่ โดยมีเงื่อนไข คือ รถยนต์ที่ใช้ในการทดลองมี 4 คัน ยางรถยนต์แต่ละชนิดจะต้องถูกทดลองกับล้อใดล้อหนึ่งของรถแต่ละคันได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น แผนแบบละตินสแควร์อันดับ (Order) 4 x 4 จึงถูกใช้ดังตารางที่ 1.1 ซึ่งสามารถทำการทดลองเก็บข้อมูลได้ครบทุกค่าที่ต้องการ และสามารถทำการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance (ANOVA)) ได้ทันทีตามตารางที่ 1.2 เพราะเป็นที่รับรู้ว่ามีตัวแบบการวิเคราะห์แบบสำเร็จให้ใช้แล้วดังตารางที่ 1.3

ตารางที่ 1.1 การเก็บข้อมูลการทดลองของการเปรียบเทียบคุณภาพของยางรถยนต์ 4 ชนิดด้วยแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 โดยมีข้อมูลครบ (จิราวัลย์ จิตรเวช, 2552)

ตำแหน่งล้อ (i)	รถยนต์ (j)				$y_{i..}$
	1	2	3	4	
1 (หน้า-ซ้าย)	C=12	D=11	A=13	B=8	44
2 (หลัง-ซ้าย)	B=14	C=12	D=11	A=13	50
3 (หน้า-ขวา)	A=17	B=14	C=10	D=9	50
4 (หลัง-ขวา)	D=13	A=14	B=13	C=9	49
$y_{.j.}$	56	51	47	39	$y_{...}$=193

ตารางที่ 1.2 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนผลการทดลองเปรียบเทียบยางรถยนต์ 4 ชนิดเมื่อทำการทดลองแบบละตินสแควร์

แหล่งความแปรปรวน	องศาเสรี	ผลบวกกำลังสอง	ค่ากำลังสองเฉลี่ย	การทดสอบแบบเอฟ
ตำแหน่งล้อ (แถว)	3	6.1875	2.0625	2.30
รถยนต์ (คอลัมน์)	3	38.6875	12.8958	14.40**
ยางรถยนต์ (ทรีตเมนต์)	3	30.6875	10.2292	11.42**
ความคลาดเคลื่อน	6	5.3750	0.8958	
Total	15	80.9375		

ตารางที่ 1.3 ตัวแบบการวิเคราะห์ความแปรปรวนของแผนแบบละตินสแควร์ โดยมีข้อมูลจากการทดลองครบ

แหล่งความแปรปรวน	องศาเสรี	ผลบวกกำลังสอง	ค่ากำลังสองเฉลี่ย	การทดสอบแบบเอฟ
แถว (Row)	$(K-1)$	$SS_{Row}=\sum_{i=1}^{K}\frac{y_{i..}^2}{K}-\frac{y_{...}^2}{K^2}$	$MS_{Row}=\frac{SS_{Row}}{K-1}$	$F=\frac{MS_{Row}}{MS_E}$
คอลัมน์ (Column)	$(K-1)$	$SS_{Column}=\sum_{k=1}^{K}\frac{y_{..k}^2}{K}-\frac{y_{...}^2}{K^2}$	$MS_{Column}=\frac{SS_{Column}}{K-1}$	$F=\frac{MS_{Column}}{MS_E}$
ทรีตเมนต์ (Treatment)	$(K-1)$	$SS_{Tr}=\sum_{j=1}^{K}\frac{y_{.j.}^2}{K}-\frac{y_{...}^2}{K^2}$	$MS_{Tr}=\frac{SS_{Tr}}{K-1}$	$F=\frac{MS_{Tr}}{MS_E}$
ความคลาดเคลื่อน (Error)	$(K-1)(K-2)$	$SS_E=SS_T-SS_{Tr}-SS_{Row}-SS_{Column}$	$MS_E=\frac{SS_E}{(K-1)(K-2)}$	
ผลรวม (Total)	K^2-1	$SS_T=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}y_{ijk}^2-\frac{y_{...}^2}{K^2}$		

แหล่งที่มา: Montgomery (2013)

หมายเหตุ จากตารางที่ 1.2 และ 1.3 (ตัวแปรในตารางดูคำอธิบายได้ที่หัวข้อ 1.5 ในบทที่ 1)

ตัวอย่างถัดมาจากงานของ Ott และ Longnecker (2010) ซึ่งทำการศึกษาคุณสมบัติ (เช่น ความแข็งแรง ความยืด และอื่นๆ) ของรูปแบบที่แตกต่างกันของถุงเท้าไนลอนจำนวน 5 รุ่น ซึ่งถุงเท้าทั้ง 5 รุ่นจะได้รับการตรวจสอบความยืดตัวภายใต้ความกดดันโดยแยกทดสอบกับพนักงานจำนวน 5 คน แยกตามวันที่ทดสอบ 5 วัน โดยใช้แผนแบบละตินสแควร์ โดยมีข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ดังตารางที่ 1.4 จึงทำให้การทดลองเป็นแบบไม่สมดุล เมื่อเกิดข้อมูลสูญหายส่วนใหญ่มักจะเป็นเหตุให้เกิดแผนแบบที่ไม่สมดุล (Unbalanced Design) และผู้ทำการทดลองไม่สามารถใช้ตัวแบบสำเร็จในการวิเคราะห์ได้อย่างทันที ซึ่งข้อมูลสูญหายจะสามารถแก้ไขได้หลายวิธี เช่น วิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) และวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Missing Plot Technique with Least Square Method) เป็นต้น ตัวอย่างวิธีการแก้ไขข้อมูลสูญหายแสดงได้ดังตารางที่ 1.5

ตารางที่ 1.4 การเก็บข้อมูลการทดลองของการเปรียบเทียบชนิดของถุงเท้าไนลอน 5 ชนิด ด้วยแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5

พนักงาน (Investigator)	วัน (Day)				
	1	2	3	4	5
1	B=22.1	A=18.6	C=23.0	E=24.3	D=17.1
2	C=23.5	D=16.5	A=18.7	B=22.0	E=*X*
3	D=17.4	E=23.8	B=22.8	C=23.9	A=20.0
4	A=20.3	B=23.4	E=25.9	D=18.7	C=24.2
5	E=25.7	C=24.8	D=18.9	A=20.6	B=24.6

แหล่งที่มา: Ott และ Longnecker (2010)

ตารางที่ 1.5 ตัวอย่างวิธีการแก้ปัญหาข้อมูลสูญหาย

วิธีการ	**ข้อมูลไม่สูญหาย**	**ข้อมูลสูญหาย**
วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนทั่วไป (Classical ANOVA)	วิธีนี้สามารถแก้ได้ (✓)	วิธีนี้ไม่สามารถแก้ได้ (✕)
วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Missing Plot Technique with Least Square Method)	วิธีนี้ไม่สามารถแก้ได้ (✕)	วิธีนี้สามารถแก้ได้ (✓)
วิธีตรง (Exact Approach)	วิธีนี้สามารถแก้ได้ (✓)	วิธีนี้สามารถแก้ได้ (✓)

ในเบื้องต้นวิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนทั่วไป (Classical ANOVA) หมายถึงการวิเคราะห์ความแปรปรวนโดยใช้สูตรจากตารางที่ 1.3 สำหรับกรณีแผนแบบละตินสแควร์ (LSD) (ดูคำอธิบายเพิ่มเติมที่ Montgomery (2013)) แต่เมื่อเกิดค่าข้อมูลสูญหายจะไม่สามารถใช้ตารางที่ 1.3 ได้สำหรับกรณีแผนแบบละตินสแควร์ (LSD) เพื่อวิเคราะห์ความแปรปรวน

ในขณะที่วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดจะเป็นวิธีการเติมข้อมูลที่สูญหายให้ครบ แล้วจะดำเนินงานทำการวิเคราะห์ด้วยวิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนทั่วไป (Classical ANOVA) ได้ แต่ Ott และ Longnecker (2010) และ Montgomery (2013) กล่าวว่าค่าผลบวกกำลังสองที่ได้จะเกิดความเอนเอียง (จากกรณีศึกษาแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม) ถัดมาการแก้ปัญหาด้วยวิธีตรงจะเป็นการแก้ปัญหาโดยปราศจากการประมาณค่าที่สูญหายโดยอาศัยตัวแบบการถดถอยเชิงเส้นซึ่งวิธีตรงนี้จะสามารถแก้ได้ทั้งแผนการออกแบบที่มีข้อมูลไม่สูญหายและข้อมูลสูญหาย แต่จะมี

กระบวนการการแก้ที่ซับซ้อนและนาน ซึ่ง Montgomery (2013) กล่าวว่าค่าผลบวกกำลังสองที่ได้จากวิธีตรงจะไม่เอนเอียง ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นเป็นการแก้ปัญหาแบบข้อมูลสูญหายด้วยวิธีตรง

แต่จากงานวิจัยของ Sirikasemsuk (2016) และ Sirikasemsuk และ Leeojanaprapa (2017) ได้ทำการศึกษาแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยมีข้อมูลจากการทดลองสูญหาย 1 ค่า ทำการวิเคราะห์โดยใช้วิธีตรง (Exact Approach) และมีการนำเสนอตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูปนำไปสู่การพัฒนาตัวแบบในการหาค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ ($SS_{Tr.}$) ได้ทันที จะเห็นว่าแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยมีข้อมูลสูญหายไป 1 ค่ามีผู้จัดทำไปแล้ว ดังนั้นผู้วิจัยจึงเห็นความสำคัญของการพัฒนาตัวแบบของสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูป (The Regression Sum of Squares For The Full Effect Model) และสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบลดรูป (The Regression Sum of Squares For The Reduced Effect Model) เพื่อไปสู่การหาค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ ($SS_{Tr.}$) ต่อไป สำหรับแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหายไป 2 ค่า ซึ่งเป็นการต่อยอดมาจากงานวิจัยของ Sirikasemsuk (2016) และ Sirikasemsuk และ Leeojanaprapa (2017) งานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นวิเคราะห์แผนแบบละตินสแควร์ในกรณีที่ข้อมูลสูญหายไป 2 ค่า ซึ่งจะครอบคลุมตำแหน่งที่สูญหายครบทุกขอบเขต

1.2 วัตถุประสงค์

เพื่อพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ทั้งสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป สำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวนของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ที่ไม่สมบูรณ์ ซึ่งมีข้อมูลจากการทดลองสูญหาย 2 ค่า โดยวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model)

1.3 ขอบเขตของงานวิจัย

วิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไปในหนังสือของ Montgomery (2013) จะเรียกว่า วิธีการทดสอบนัยสำคัญของการถดถอยทั่วไป (General Regression Significance Test) และจะเป็นวิธีเหมือนกับของ Charles (2008) ซึ่งเรียกวิธีการนี้ว่า วิธีการเปรียบเทียบรูปแบบ (Model Comparison Approach) โดยงานวิจัยนี้มีขอบเขตดังนี้

(1) กำหนดให้แผนแบบละตินสแควร์เป็นตัวแบบเชิงบวก (Additive Model) นั่นคือไม่มีปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ระหว่างแถว คอลัมน์ และทรีตเมนต์

(2) กำหนดให้แผนแบบละตินสแควร์เป็นตัวแบบอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model)

(3) ε_{ijk} เป็นค่าความคลาดเคลื่อนซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 หรือ $\varepsilon_{ijk} \sim NID(0,\sigma^2)$

(4) ข้อมูลที่สูญหายของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่าเท่านั้น ซึ่งจะมี 4 ขอบเขต ได้แก่

ขอบเขตที่ 1 คนละแถว และคนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์เดียวกันหายไป ดังตารางที่ 1.6
ขอบเขตที่ 2 คนละแถว และคนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ดังตารางที่ 1.7
ขอบเขตที่ 3 แบบแถวเดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ดังตารางที่ 1.8
ขอบเขตที่ 4 แบบคอลัมน์เดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ดังตารางที่ 1.9

ตารางที่ 1.6 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่าแบบคนละแถว คนละคอลัมน์โดยที่ทรีตเมนต์เดียวกันหายไป (ขอบเขตที่ 1)

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	…
1	A = ✓	B = X	C = ✓	D = ✓	… ✓
2	B = X	C = ✓	D = ✓	E = ✓	… ✓
3	C = ✓	D = ✓	E = ✓	F = ✓	… ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	… ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	… ✓

ตารางที่ 1.7 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่าแบบคนละแถว คนละคอลัมน์โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป (ขอบเขตที่ 2)

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	…
1	A = ✓	B = ✓	C = ✓	D = ✓	… ✓
2	B = X	C = ✓	D = ✓	E = ✓	… ✓
3	C = ✓	D = X	E = ✓	F = ✓	… ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	… ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	… ✓

ตารางที่ 1.8 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่าแบบแถวเดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป (ขอบเขตที่ 3)

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	…
1	A = ✓	B = ✓	C = ✓	D = ✓	… ✓
2	B = X	C = X	D = ✓	E = ✓	… ✓
3	C = ✓	D = ✓	A = ✓	F = ✓	… ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	… ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	… ✓

ตารางที่ 1.9 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่าแบบคอลัมน์เดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป (ขอบเขตที่ 4)

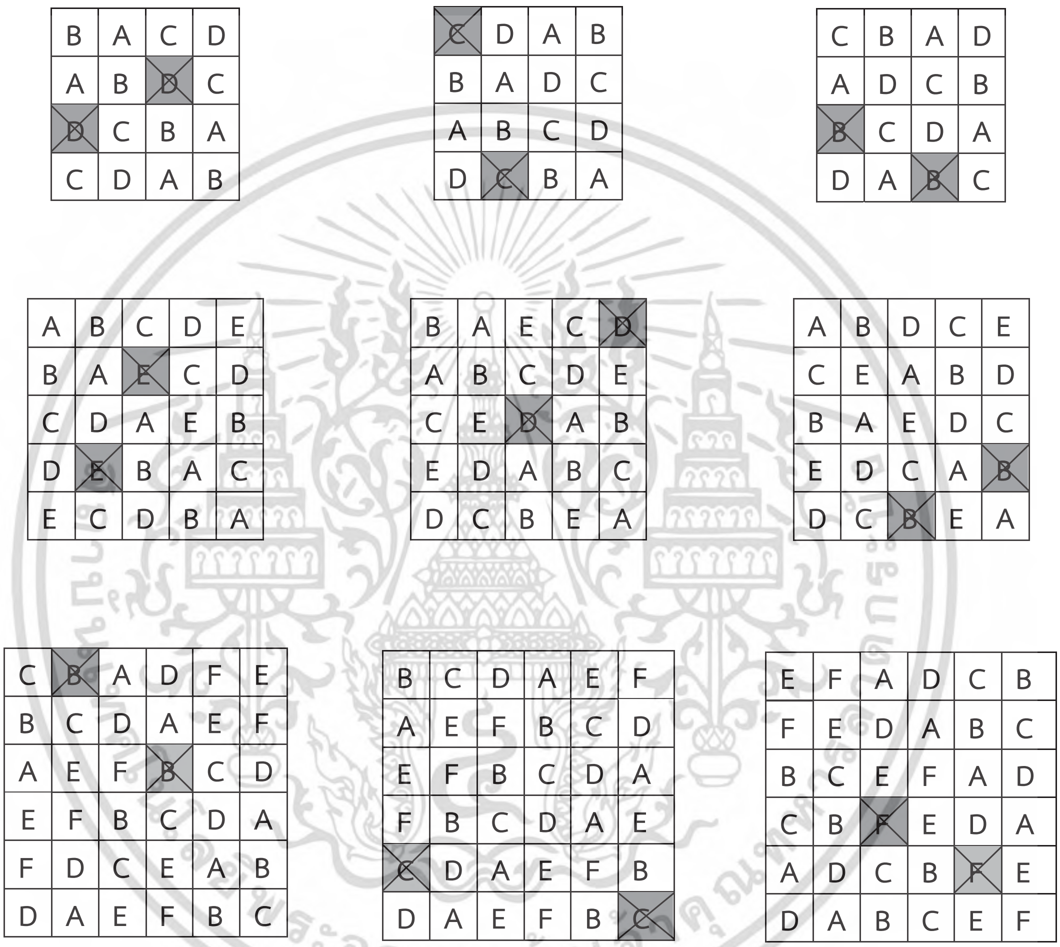
Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	…
1	A = ✓	B = ✓	C = ✓	D = ✓	… ✓
2	B = X	C = ✓	D = ✓	E = ✓	… ✓
3	C = X	D = ✓	A = ✓	F = ✓	… ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	… ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	… ✓

(5) คำว่า “ข้อมูลสูญหาย” ในงานวิจัยนี้ จะหมายถึง

ข้อมูลหรือค่าการทดลองที่ไม่สามารถเก็บได้ อาจจะเป็นผลมาจากจำนวนชิ้นงานที่จำกัดตั้งแต่ต้น หรือต้องหยุดการทดลองหน่วยนั้นกลางคัน รวมถึงข้อมูลหรือค่าการทดลองที่สามารถเก็บได้ แต่ผิดปกติเนื่องจากความคลาดเคลื่อนจากการควบคุมตัวแปรต้น และจากปัจจัยตัวอื่นๆ ที่ควบคุมไม่ได้ จึงต้องตัดค่าการทดลองหน่วยนั้นทิ้งไป

(6) แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยที่ K มีค่าตั้งแต่ 4 ขึ้นไป โดยที่แผนแบบละตินสแควร์ในงานวิจัยนี้จะสนใจพัฒนาตัวแบบของขอบเขตที่ 1, 2, 3 เมื่อมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

ตัวอย่างแผนแบบละตินสแควร์ขอบเขตที่ 1 ที่มีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถวคนละคอลัมน์โดยที่ทรีตเมนต์เดียวกันหายไป ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1 ตัวอย่างของแผนแบบละตินสแควร์ขอบเขตที่ 1 ที่งานวิจัยนี้ครอบคลุม

ตัวอย่างแผนแบบละตินสแควร์ขอบเขตที่ 2 ที่มีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถวคนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ซึ่งจะครอบคลุมทุกกรณี ดังรูปที่ 1.2

B	A	C	D
A	B	D	C
D	C	~~B~~	A
C	~~D~~	A	B

C	~~D~~	A	B
B	A	D	C
~~A~~	B	C	D
D	C	B	A

C	B	A	D
A	~~D~~	C	B
B	C	D	A
D	A	B	~~C~~

A	B	C	D	E
B	A	E	~~C~~	D
C	D	A	E	B
D	~~E~~	B	A	C
E	C	D	B	A

B	A	E	C	D
A	~~B~~	C	D	E
C	E	~~D~~	A	B
E	D	A	B	C
D	C	B	E	A

~~A~~	B	D	C	E
C	E	A	B	D
B	A	E	D	C
E	D	C	A	B
D	C	~~B~~	E	A

C	B	A	D	F	E
B	C	D	A	E	F
A	E	F	~~B~~	C	D
~~E~~	F	B	C	D	A
F	D	C	E	A	B
D	A	E	F	B	C

B	C	D	A	E	F
A	E	F	B	C	~~D~~
E	F	B	C	D	A
F	B	C	D	A	E
~~C~~	D	A	E	F	B
D	A	E	F	B	C

E	F	~~A~~	D	C	B
F	E	D	A	B	C
B	C	E	F	A	D
C	B	F	E	D	A
A	D	C	B	~~F~~	E
D	A	B	C	E	F

รูปที่ 1.2 ตัวอย่างของแผนแบบละตินสแควร์ขอบเขตที่ 2 ที่งานวิจัยนี้ครอบคลุม

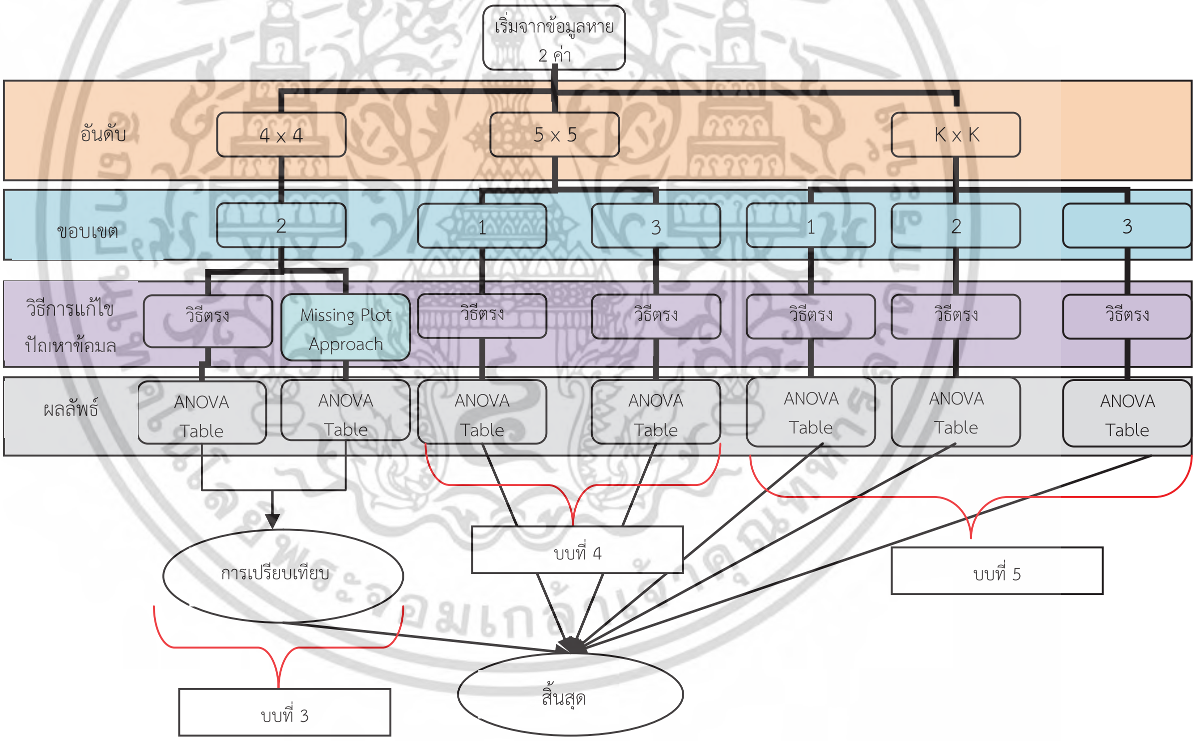
(7) จากตารางที่ 1.6 ถึง 1.9 ตัวอย่างการเก็บข้อมูลของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K โดยมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ตัวแปรหรือปัจจัยที่สนใจ (Treatment) ซึ่งมีอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ ในตารางการเก็บข้อมูลนั้นการกำหนดตัวอักษรจะขึ้นอยู่กับการสุ่มของผู้ทดลอง

(8) ข้อมูลสูญหาย 2 ค่าแบบคอลัมน์เดียวกันดังตารางที่ 1.8 และแบบแถวเดียวกันดังตารางที่ 1.7 จากโครงสร้างที่เหมือนกัน แต่ต่างกันที่ข้อมูลที่หาย 2 ค่าจากแถวมาเป็นคอลัมน์เดียวกัน ดังนั้นงานวิจัยจึงสนใจขอบเขตที่ 3 จะไม่พิจารณาขอบเขตที่ 4

1.4 วิธีการดำเนินงานวิจัย

ในงานวิจัยฉบับนี้ มีแผนการดำเนินงานวิจัยดังรูปที่ 1.3

โครงสร้างของงานวิจัยฉบับนี้ บทที่ 1 จะเริ่มด้วยการกำหนดความสำคัญของปัญหาวัตถุประสงค์และขอบเขต บทที่ 2 จะเป็นการทบทวนวรรณกรรม และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการออกแบบการทดลอง บทที่ 3 การพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ และสมการถดถอยผลบวกกำลังสองทั้งตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 (ขอบเขตที่ 2) และทำการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาระหว่างวิธีตรง และวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด บทที่ 4 การพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ และสมการถดถอยผลบวกกำลังสองทั้งตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 (ขอบเขตที่ 1, 3) บทที่ 5 การพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ และสมการถดถอยผลบวกกำลังสองทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K (ขอบเขตที่ 1, 2, 3) สุดท้ายคือบทที่ 6 จะเป็นการสรุปผลการดำเนินงานจะเห็นว่าผู้วิจัยเริ่มจากอันดับ 4 x 4 , 5 x 5 ซึ่งมีโครงสร้างที่ไม่ยาก หลังจากนั้นไปสู่การพัฒนาตัวแบบอันดับ K x K ที่มีความยากมากกว่าอันดับที่เป็นค่าคงที่



*Missing Plot Approach คือ วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด
*ANOVA Table คือ ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวน

รูปที่ 1.3 แผนการดำเนินงานวิจัย

1.5 สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยฉบับนี้ได้ประกาศดังตารางที่ 1.10

ตารางที่ 1.10 สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

สัญลักษณ์	ความหมาย	ชื่อภาษาอังกฤษ
y_{ijk}	ค่าสังเกตในแถวที่ i ของทรีตเมนต์ที่ j และคอลัมน์ที่ k	The ijk^{th} observation taken under row i, treatment j and column k
i	ดัชนีของแถวที่ i	Index of rows i
j	ดัชนีของทรีตเมนต์ที่ j	Index of treatments j
k	ดัชนีของคอลัมน์ที่ k	Index of columns k
K	อันดับของแผนแบบละตินสแควร์	The order of latin square design
μ	ค่าเฉลี่ยทั้งหมด	Overall mean
ω_i	อิทธิพลของแถวที่ระดับ i	The row effects of level i
τ_j	อิทธิพลของทรีตเมนต์ที่ระดับ j	The treatment effects of level j
λ_k	อิทธิพลของคอลัมน์ที่ระดับ k	The column effects of level k
ε_{ijk}	ความคลาดเคลื่อนสุ่มของ ijk	The statistical error
$\hat{\mu}$	ค่าประมาณของค่าเฉลี่ยทั้งหมด	The estimate of the parameter of μ
$y_{...}$	ผลรวมทั้งหมด	The grand total
$y_{i..}$	ผลรวมแถวที่ i	The i^{th} row total
$y_{.j.}$	ผลรวมทรีตเมนต์ที่ j	The j^{th} treatment total
$y_{..k}$	ผลรวมคอลัมน์ที่ k	The k^{th} column total
SS_{Row}	ผลบวกกำลังสองของแถว	The row sum of squares
SS_{Column}	ผลบวกกำลังสองของคอลัมน์	The column sum of squares
SS_{Tr}	ผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์	The treatment sum of squares
SS_E	ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน	The error sum of squares
SS_T	ผลบวกกำลังสองทั้งหมด	The total sum of squares
MS_{Row}	ค่ากำลังสองเฉลี่ยของแถว	The row mean of squares
MS_{column}	ค่ากำลังสองเฉลี่ยของคอลัมน์	The column mean of squares
MS_{Tr}	ค่ากำลังสองเฉลี่ยของทรีตเมนต์	The treatment mean of squares
MS_E	ค่ากำลังสองของความคลาดเคลื่อนเฉลี่ย	The error mean of squares
F_{test}	การทดสอบแบบเอฟ	F_{test}
$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$	สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูป	The regression sum of squares for the full effect model of y_{ijk}
$R(\mu,\omega,\lambda)$	สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบลดรูป	The regression sum of squares for the full effect model of y_{ijk}

หมายเหตุ คำศัพท์ในงานวิจัยอ้างอิงจากหนังสือพจนานุกรมศัพท์สถิติศาสตร์ (ฉบับราชบัณฑิตยสภา, 2558)

คำอธิบายสัญลักษณ์เพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อมูลที่สูญหาย ดังตารางที่ 1.11

ตารางที่ 1.11 คำอธิบายสัญลักษณ์เพิ่มเติมเกี่ยวกับข้อมูลที่สูญหาย

ขอบเขตที่	ข้อมูลสูญหายตัวที่ 1	ข้อมูลสูญหายตัวที่ 2	คำอธิบาย
ขอบเขตที่ 1	y_{rmc}	$y_{r'mc'}$	r แถวที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 m ทรีตเมนต์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 และ 2 c คอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 r' แถวที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2 c' คอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2
ขอบเขตที่ 2	y_{rmc}	$y_{r'm'c'}$	r แถวที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 m ทรีตเมนต์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 c คอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 r' แถวที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2 m' ทรีตเมนต์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2 c' คอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2
ขอบเขตที่ 3	y_{rmc}	$y_{rm'c'}$	r แถวที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 และ 2 m ทรีตเมนต์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 c คอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 m' ทรีตเมนต์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2 c' คอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2

คำอธิบายสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลสูญหาย และผลรวมข้อมูล ดังตารางที่ 1.12

ตารางที่ 1.12 คำอธิบายสัญลักษณ์ที่เกี่ยวกับตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ซึ่งประกอบด้วยข้อมูลสูญหายและผลรวมข้อมูล

สัญลักษณ์	ความหมาย	ชื่อภาษาอังกฤษ
$y_{r..}$	ผลรวมของแถวที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 ประกอบอยู่	The r^{th} row total
$y_{.m.}$	ผลรวมของทรีตเมนต์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 1 ประกอบอยู่	The m^{th} treatment total
$y_{..c}$	ผลรวมของคอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวตัวที่ 1 ประกอบอยู่	The c^{th} column total
$y_{r'..}$	ผลรวมของแถวที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2 ประกอบอยู่	The r'^{th} row total
$y_{.m'.}$	ผลรวมของทรีตเมนต์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวที่ 2 ประกอบอยู่	The m'^{th} treatment total
$y_{..c'}$	ผลรวมของคอลัมน์ที่มีข้อมูลสูญหายตัวตัวที่ 2 ประกอบอยู่	The c'^{th} column total
$\hat{\omega}_i$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของแถวที่ i กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the i^{th} row effects
$\hat{\tau}_j$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของทรีตเมนต์ที่ j กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the j^{th} treatment effects
$\hat{\lambda}_k$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของคอลัมน์ที่ k กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the k^{th} column effects
$\hat{\omega}_r$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของแถวที่ r กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the r^{th} row effects
$\hat{\omega}_{r'}$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของแถวที่ r' กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the r'^{th} row effects
$\hat{\tau}_m$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของทรีตเมนต์ที่ m กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the m^{th} treatment effects
$\hat{\tau}_{m'}$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของทรีตเมนต์ที่ m' กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the m'^{th} treatment effects
$\hat{\lambda}_c$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของคอลัมน์ที่ c กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the c^{th} column effects
$\hat{\lambda}_{c'}$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของคอลัมน์ที่ c' กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of the parameter of the c'^{th} column effects
$\hat{\mu}^R$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของค่าเฉลี่ยทั้งหมดของตัวแบบลดรูป	The estimate of μ for the reduced model ignoring the treatment effect
$\hat{\omega}_i^R$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของแถวที่ i ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of ω_i for the reduced model ignoring the treatment effect
$\hat{\lambda}_j^R$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของคอลัมน์ที่ j ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of λ_k for the reduced model ignoring the treatment effect
$\hat{\omega}_r^R$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของแถวที่ r ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of ω_r for the reduced model ignoring the treatment effect
$\hat{\omega}_{r'}^R$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของแถวที่ r' ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of $\omega_{r'}$ for the reduced model ignoring the treatment effect
$\hat{\lambda}_c^R$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของคอลัมน์ที่ c ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of λ_c for the reduced model ignoring the treatment effect
$\hat{\lambda}_{c'}^R$	ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ของคอลัมน์ที่ c' ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์	The estimate of $\lambda_{c'}$ for the reduced model ignoring the treatment effect

จากรูปที่ 1.4 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จะสามารถแบ่งข้อมูลจากรูปได้ 2 กลุ่ม ได้แก่

(1) ข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

(2) ข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

โดยจะขอยกตัวอย่างแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของขอบเขตที่ 2 จะได้ข้อมูลที่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ และไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์แสดงได้ดังรูปที่ 1.4

Blocking Variable 2 / Blocking Variable 1		$\lambda_1 = \lambda_c$	$\lambda_2 = \lambda_{c'}$	λ_3	λ_4
		1	2	3	4
ω_1	1	$A = y_{111}$	$B = y_{122}$	$C = y_{133}$	$D = y_{144}$
$\omega_2 = \omega_r$	2	$\cancel{B = y_{221}}$	$C = y_{232}$	$D = y_{243}$	$A = y_{214}$
$\omega_3 = \omega_{r'}$	3	$C = y_{331}$	$\cancel{D = y_{342}}$	$A = y_{353}$	$B = y_{324}$
ω_4	4	$D = y_{441}$	$A = y_{412}$	$B = y_{423}$	$C = y_{434}$

$\tau_1 = \tau_A \quad \tau_2 = \tau_B = \tau_m \quad \tau_3 = \tau_C \quad \tau_4 = \tau_D = \tau_{m'}$

ข้อมูลที่ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้แก่
- อิทธิพลทางแถว ω_1 ω_4
- อิทธิพลทางทรีตเมนต์ τ_1 τ_3
- อิทธิพลทางคอลัมน์ λ_3 λ_4

ข้อมูลที่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้แก่ μ และ
- อิทธิพลทางแถว ω_2 ω_3
- อิทธิพลทางทรีตเมนต์ τ_2 τ_4
- อิทธิพลทางคอลัมน์ λ_1 λ_2

รูปที่ 1.4 ตัวอย่างการแบ่งพารามิเตอร์ออกเป็น 2 กลุ่ม

1.6 คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับวิธีตรง

การวิเคราะห์ข้อมูลด้วยวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) ในงานวิจัยนี้จะเป็นวิธีเหมือนกับของ Montgomery (2013) ซึ่งเรียกวิธีการนี้ว่า วิธีการทดสอบนัยสำคัญของการถดถอยทั่วไป (General Regression Significance Test) และจะเป็นวิธีเหมือนกับของ Charles (2008) ซึ่งเรียกวิธีการนี้ว่า วิธีการเปรียบเทียบรูปแบบ (Model Comparison Approach)

Montgomery (2013) กล่าวว่าวิธีตรงเป็นวิธีการวิเคราะห์ข้อมูลที่ให้ค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์อักษรละตินที่ไม่เอนเอียงเพราะว่าใช้หลักการทดสอบนัยสำคัญการถดถอยทั่วไป (General Regression Significance Test) มาคำนวณโดยแก้สมการเพื่อหาค่าประมาณของพารามิเตอร์แต่ละตัวแบบ (จากสมการที่ 3.1) แล้วคำนวณหาค่าสมการถดถอยของผลบวกกำลังสองแบบอิทธิเต็มรูปและแบบลดรูปอิทธิพลทรีตเมนต์อักษรละติน ความแตกต่างระหว่างสมการถดถอยของผลบวกกำลังสองทั้งสองสมการนี้คือค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์อักษรละตินที่ไม่เอนเอียง

วิธีแบบตรง (Exact Approach) จะไม่มีการประมาณค่าข้อมูลที่สูญหาย ซึ่งแตกต่างจากวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด โดยวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดจะมีการประมาณค่าที่สูญหาย และค่อยทำการวิเคราะห์ความแปรปรวน (Analysis of Variance) ตามปกติตามสูตรของการวิเคราะห์ความแปรปรวนทั่วไป (Classical ANOVA)

ค่าความเอนเอียง (Bias) ในงานวิจัยนี้จะหมายถึงความแตกต่างของผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ระหว่างวิธีแบบตรงและวิธีการประมาณค่าสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

1.7 คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับขนาดของกลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง (N) จะมีค่าเท่ากับขนาดของอันดับคูณกัน (K x K) ซึ่งงานวิจัยนี้จะครอบคลุม K ตั้งแต่ 4 ขึ้นไป และมีคำอธิบายเพิ่มเติมดังนี้

(1) เนื่องจากข้อจำกัดเรื่องการสุ่ม (Randomization) ไม่สามารถทำการควบคุมการสุ่มได้ทุกครั้ง

(2) จากกระบวนการของการวางแผนการทดลอง ซึ่งมีขั้นตอนหลัก 2 ขั้นตอน คือ (1) การคัดเลือกปัจจัย (Screening Experiment) และ (2) การวิเคราะห์ผลตอบที่เหมาะสม (Response Optimization) โดยที่แผนแบบละตินสแควร์อยู่ในขั้นตอนการคัดเลือกปัจจัย ดังนั้นปกติจะไม่นิยมขนาดของอันดับ K ที่มาก ถ้าการทดสอบทรีตเมนต์มีนัยสำคัญส่งผลต่อค่า y ถึงจะไปทำการวิเคราะห์ผลตอบที่เหมาะสมต่อ

Kempthorn (1952) กล่าวว่าอันดับของแผนแบบละตินสแควร์ไม่ควรจะต่ำกว่า 3 เพราะว่าอันดับยิ่งมากความแม่นยำจากการประมาณค่าผลบวกจะมีความคลาดเคลื่อนมาก และไม่ควรจะมากกว่า 9 เนื่องจากข้อจำกัดเรื่องการสุ่มของคอลัมน์ และแถว

1.8 คำอธิบายเพิ่มเติมเกี่ยวกับการวางแผนเริ่มต้นของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4

เมื่อตรึงแถวแรกและคอลัมน์แรกไว้ไม่ให้ตัวอักษรเปลี่ยนแปลง จะสามารถจัดรูปแบบการทดลองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ได้ทั้งหมด 4 แบบ (Fisher และ Yates, 1963) ดังนี้

The 4×4 Latin Squares

First Transformation Set: 3 Self-Conjugate Standard Squares			Second Transformation Set: 1 Self-Conjugate Standard Square
A B C D	A B C D	A B C D	A B C D
B A D C	B C D A	B D A C	B A D C
C D B A	C D A B	C A D B	C D A B
D C A B	D A B C	D C B A	D C B A
1	2	3	4

รูปที่ 1.5 รูปแบบการทดลองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4

ส่วนจะเลือกแบบใด จะขึ้นอยู่กับผู้ทดลองทำการสุ่มเลือกมา หลังจากที่เลือกมาแล้ว และทำการทดลองเพื่อเก็บค่าข้อมูล สมมติว่าเกิดการสูญหาย 2 ค่า ซึ่งจะตำแหน่งใดก็ได้ จะสามารถทำการวิเคราะห์หาค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ (Treatment Sum of Square (SS_{Tr})) ได้จากงานวิจัยนี้ทันที

หมายเหตุ ไม่จำเป็นที่อันดับต้องเป็น 4 x 4 โดยจะเป็นอันดับใดก็ได้ (ตั้งแต่ 4 ขึ้นไป) ตามที่ได้กล่าวไปในเรื่องอันดับของ K x K ในขอบเขตของงานวิจัยหัวข้อที่ 1.3

ลักษณะของข้อมูลแผนแบบละตินสแควร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ดังตารางที่ 1.13

ตารางที่ 1.13 ลักษณะของข้อมูลจากแผนแบบละตินสแควร์

ปัจจัยแถว (Row Factor)	ปัจจัยคอลัมน์ (Column Factor) k = 1,2,...,K						รวม	ค่าเฉลี่ย
i = 1,2,....K	1	2	.	.	.	K		
1	$A = y_{111}$	$B = y_{122}$	.	.	.	$Z = y_{1KK}$	$y_{1..}$	$\bar{y}_{1..}$
2	$B = y_{221}$	$C = y_{232}$	.	.	.	$A = y_{21K}$	$y_{2..}$	$\bar{y}_{2..}$
3	$C = y_{331}$	$D = y_{342}$	.	.	.	$B = y_{32K}$	$y_{3..}$	$\bar{y}_{3..}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.
K	$Z = y_{KK1}$	$A = y_{K12}$	.	.	.	$Y = y_{K(K-1)K}$	$y_{K..}$	$\bar{y}_{K..}$
รวม	$y_{..1}$	$y_{..2}$	.	.	.	$y_{..K}$		
รวม	$y_{.1.}$	$y_{.2.}$				$y_{.K.}$	$y_{...}$	$\bar{y}_{...}$
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_{..1}$	$\bar{y}_{..2}$	.	.	.	$\bar{y}_{..K}$		
ค่าเฉลี่ย	$\bar{y}_{.1.}$	$\bar{y}_{.2.}$				$\bar{y}_{.K.}$		

หมายเหตุ $j = 1, 2, \ldots K$

เมื่อ
$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,K \\ j = 1,2,\ldots,K \\ k = 1,2,\ldots,K \end{cases}$$

$$\bar{y}_{i..} = \frac{y_{i..}}{K}$$

$$y_{.j.} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,K \\ j = 1,2,\ldots,K \\ k = 1,2,\ldots,K \end{cases}$$

$$\bar{y}_{.j.} = \frac{y_{.j.}}{K}$$

$$y_{..k} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K} y_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,\ldots,K \\ j = 1,2,\ldots,K \\ k = 1,2,\ldots,K \end{cases}$$

$$\bar{y}_{..k} = \frac{y_{..k}}{K}$$

$$y_{...} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}$$

$$\bar{y}_{...} = \frac{y_{...}}{K^2}$$

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งประกอบด้วยหัวข้อดังต่อไปนี้

2.1 วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

2.1.1 วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ทำซ้ำ

2.1.1.1 งานวิจัยของ Allan และ Wishart (1930)

-กรณีที่ 1 ข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม

-กรณีที่ 2 ข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ในแผนแบบละตินสแควร์

2.1.1.2 งานวิจัยของ Yates (1933)

2.1.1.3 งานวิจัยของ Kramer และ Glass (1960) ในแผนแบบละตินสแควร์

-กรณีที่ 1 ค่าข้อมูลสูญหายมากกว่า 2 ค่า

-กรณีที่ 2 ค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

2.1.1.4 งานวิจัยของ Rubin (1972)

2.1.2 วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทำซ้ำ

2.1.2.1 งานวิจัยของ Yates (1936)

-กรณีที่ 1 แผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม

-กรณีที่ 2 แผนแบบละตินสแควร์

2.1.2.2 งานวิจัยของ Healy และ Westmacott (1956)

2.2 การแก้ปัญหาซึ่งมีข้อมูลสูญหายวิธีตรง (Exact Approach)

2.3 วิธีอื่นๆ

2.3.1 วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA)

2.3.2 วิธีค่าคาดหมายสูงสุด

2.4 งานวิจัยอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงงานวิจัยล่าสุด

2.1 วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดเป็นวิธีการในการคำนวณหาค่าของข้อมูลสูญหาย แล้วนำค่าข้อมูลสูญหายที่ประมาณได้ไปแทนในแถว คอลัมน์ และทรีตเมนต์ของค่าข้อมูลสูญหายนั้น โดยวิธีนี้จะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยสุด โดยจะมีหัวข้อของวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด ได้แก่ วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ทำซ้ำ (Non Iterative Method) และวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทำซ้ำ (Iterative Method)

2.1.1 วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ทำซ้ำ

ในส่วนนี้จะอธิบายงานวิจัยของ Allan และ Wishart (1930), Yates (1933), Kramer และ Glass (1960) และ Rubin (1972) ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ดังต่อไปนี้

2.1.1.1 งานวิจัยของ Allan และ Wishart (1930)

งานวิจัยของ Allan และ Wishart (1930) เป็นคนแรกที่ได้ศึกษาวิธีการประมาณค่าสูญหายในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม (Randomized Complete Block Design) และแผนแบบละตินสแควร์ (Latin Square Design) โดยใช้หลักการของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยสุด (Minimum Error Sum of Squares) ที่ความแตกต่างของความคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์จากพารามิเตอร์ของตัวแบบเชิงเส้น โดยสนใจแค่ค่าข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ซึ่งในหัวข้อนี้จะมี 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ข้อมูลสูญสูญหาย 1 ค่า ในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม

ตัวแบบของแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม

$$Y = b_p + \tau_j + a \qquad (2.1)$$

โดยที่ b คือ ปัจจัยบล็อก, τ คือ ปัจจัยทรีตเมนต์ และ a คือ ค่าคงที่

การประมาณค่าข้อมูลสูญหายของแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม ได้ดังสมการที่ (2.2)

$$a = \frac{(n+s-1)S - s(S_t) - n(S_b)}{(n-1)(s-1)} \qquad (2.2)$$

เมื่อ S_t คือ ผลบวกทรีตเมนต์ทั้งหมดไม่รวมทรีตเมนต์ที่สูญหาย

S_b คือ ผลบวกบล็อกทั้งหมดไม่รวมทรีตเมนต์ที่สูญหาย

S คือ ผลบวกทั้งหมดที่ทราบค่า โดยไม่รวมกับค่าข้อมูลสูญหายที่ประมาณได้

ตัวแบบของแผนแบบละตินสแควร์

$$Y = i_p + j_q + k_s + a \tag{2.3}$$

โดยที่ i คือ แถว, j คือ ทรีตเมนต์, k คือ คอลัมน์ และ a คือ ค่าคงที่

ดังนั้นการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในแผนแบบละตินสแควร์ ได้ดังสมการที่ (2.4)

$$a = \frac{1}{n-1} S_1 + \frac{2}{(n-1)(n-2)} S_2 \tag{2.4}$$

เมื่อ S_1 คือ ผลบวกของ Y

S_b = ผลบวกบล็อกทั้งหมดไม่รวมทรีตเมนต์ที่สูญหาย

S = ผลบวกทั้งหมดที่ทราบค่า โดยไม่รวมกับค่าข้อมูลสูญหายที่ประมาณได้

2.1.1.2 งานวิจัยของ Yates (1933)

Yates (1933) ได้มีการประยุกต์วิธีการผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดของ Allan และ Wishart (1930) นั่นก็คือ การหาอนุพันธ์ของผลบวกกำลังสองความคลาดเคลื่อนของข้อมูลสูญหายต่างๆ (Differentiating the Error Sum of Squares to Each Missing Value) โดยค่า X ที่สูญหายมาจากค่าประมาณของค่าเฉลี่ยทั้งหมด $\hat{\mu}$ เทียบกับค่าพารามิเตอร์ตัวอื่นๆ ทั้งในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม และแผนแบบละตินสแควร์ แสดงได้ดังสมการที่ (2.5)

$$\frac{dSS_E}{dx} = 0 \tag{2.5}$$

ที่

$$SS_{E\ for\ RCBD} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left[\left(y_{ij} - \bar{y}_{.j}\right) - \left(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}\right)\right]^2$$

$$SS_{E\ for\ LSD} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}\left[y_{ijk} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{..k} + 2\bar{y}_{..}\right]^2$$

ข้อมูลสูญหาย และค่าความไม่เอนเอียงในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (2.6) และสมการที่ (2.7)

$$a_{missing\_RCBD} = \frac{rR' + tT' - G'}{(r-1)(t-1)} \tag{2.6}$$

$$Bias_{RCBD} = \frac{\left[R' - (t-1)X\right]^2}{t(t-1)} \tag{2.7}$$

ข้อมูลสูญหาย และค่าความไม่เอนเอียงในแผนแบบละตินสแควร์ จะสามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (2.8) และสมการที่ (2.9)

$$a_{missing\_LSD} = \frac{t(R' + C' + T') - 2G'}{(t-1)(t-2)} \tag{2.8}$$

$$Bias_{RCBD} = \frac{\left[G' - R' - C' - (t-1)T'\right]^2}{\left[(t-1)(t-2)\right]^2} \tag{2.9}$$

2.1.1.3 งานวิจัยของ Kramer และ Glass (1960) ในแผนแบบละตินสแควร์

ในหัวข้อนี้เป็นวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบไม่ทำซ้ำ (Non Iterative Method) ในแผนแบบละตินสแควร์ (Latin Square Design) นำเสนอโดย Kramer และ Glass (1960) โดยค่าความคลาดเคลื่อนผลบวกกำลังสองต่ำสุด และตัวแบบที่ชัดเจนของค่าข้อมูลสูญหายแต่ละค่า จะได้มาจากกรณีพิเศษ และขั้นตอนที่ได้จากกรณีที่สมบูรณ์ทั่วไป ซึ่งในหัวข้อนี้มีตัวแปรที่ใช้ ความหมายของตัวแปร และขั้นตอนดังนี้

ตัวแปรที่ใช้ในแผนแบบละตินสแควร์

μ คือ ค่าเฉลี่ย

ω_i คือ ผลกระทบทางแถว

τ_j คือ ผลกระทบทางทรีตเมนต์

λ_k คือ ผลกระทบทางคอลัมน์

ตัวแบบของแผนแบบละตินสแควร์

$$y_{ij(k)} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ij(k)}\ ;\ i, j \, and \, k = 1,\ldots,\mathrm{K} \tag{2.10}$$

ที่ μ, ω_i, τ_j และ λ_k เป็นค่าคงที่ $\sum \omega_i = \sum \tau_j = \sum \lambda_k = 0$

-กรณีที่ 1 กรณีที่ค่าข้อมูลสูญหายมากกว่า 2 ค่า

ในกรณีที่ m คือข้อมูลสูญหาย ไม่มีสองคอลัมน์ หรือสองทรีตเมนต์ที่เหมือนกัน ค่าข้อมูลสูญหาย ได้แก่ $x_{fg(h),}\, x_{rs(t),}\, x_{uv(w)}, \ldots, n$ โดยบางส่วนที่แตกต่างแสดงออกในรูปของผลบวกความคลาดเคลื่อนกำลังสอง พิจารณาค่า $x's$ และการเทียบอนุพันธ์สมการเป็นศูนย์ จะได้สมการดังนี้

$$
\begin{aligned}
(K-1)(K-2)x_{fg(h)} + 2x_{rs(t)} + . + 2x_{uv(w)} &= K\left(R'_f + C'_g + T'_h\right) - 2G' \\
2x_{fg(h)} + (K-1)(K-2)x_{rs(t)} + . + 2x_{uv(w)} &= K\left(R'_r + C'_s + T'_t\right) - 2G' \\
. \qquad . \qquad . \qquad . &= \qquad . \\
2x_{fg(h)} + 2x_{rs(t)} + . + (K-1)(K-2)2x_{uv(w)} &= K\left(R'_u + C'_v + T'_w\right) - 2G'
\end{aligned}
$$

การกำหนดค่า P ได้ดังนี้

$$P_{ijk} = K(R'_i + C'_j + T'_k) - 2G' \tag{2.11}$$

ระบบของสมการที่ (2.11) สามารถแสดงในรูปแบบเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} (K-1)(K-2) & 2 & . & 2 \\ 2 & (K-1)(K-2) & . & 2 \\ . & . & . & . \\ 2 & 2 & . & (K-1)(K-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{fg(h)} \\ x_{rs(t)} \\ . \\ x_{uv(w)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{fg(h)} \\ P_{rs(t)} \\ . \\ P_{uv(w)} \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

จากสมการที่ (2.12) จะได้สมการการประมาณค่าดังสมการที่ (2.13)

$$x_{cd(e)} = \frac{\left[(2m-4) + (K-1)(K-2)\right] P_{cd(e)} - 2\sum_{\substack{missing\ plots \\ i \neq c}} P_{i(j)(k)}}{\left[(K-1)(K-2) + (2m-2)\right]\left[(K-1)(K-2) - 2\right]} \tag{2.13}$$

ที่ c, d, e เป็นอันดับค่าที่สอดคล้องกับค่าข้อมูลสูญหาย ผลรวมในตัวเศษแทนที่ด้วยค่าผลรวม P ของทุกค่าข้อมูลสูญหายยกเว้น $cd(e)$

ในกรณีของ m ค่าข้อมูลสูญหายทั้งหมดในแถว คอลัมน์ หรือทรีตเมนต์เดียวกัน

$$\begin{bmatrix} (K-1)(K-2) & (2-K) & . & (2-K) \\ (2-K) & (K-1)(K-2) & . & (2-K) \\ . & . & . & . \\ (2-K) & (2-K) & . & (K-1)(K-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{ig(h)} \\ x_{is(t)} \\ . \\ x_{iv(w)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{ig(h)} \\ P_{is(t)} \\ . \\ P_{iv(w)} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

ตัวแบบของการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย n ในทุกแถว i

$$x_{id(e)} = \frac{(K-m+1)P_{id(e)} + \sum_{\substack{missing\ plots \\ j \neq d}} P_{i(j)(k)}}{K(K-2)(K-m)} \quad (2.15)$$

ตัวแบบของการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย m ในทุกคอลัมน์ k

$$x_{cj(e)} = \frac{(K-m+1)P_{cj(e)} + \sum_{\substack{missing\ plots \\ i \neq c}} P_{i(j)(k)}}{K(K-2)(K-m)} \quad (2.16)$$

ตัวแบบของการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย m ในทุกทรีตเมนต์ j

$$x_{cd(k)} = \frac{(K-m+1)P_{cd(m)} + \sum_{\substack{missing\ plots \\ i \neq c}} P_{i(j)(k)}}{K(K-2)(K-m)} \quad (2.17)$$

-กรณีที่ 2 กรณีที่ค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

เฉพาะค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จำเป็นต้องลดหนึ่งในสี่ประเภทในส่วนก่อนหน้านี้ จากสมการที่ 2.12 และ 2.14 ถึง 2.17 ถ้าค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ใช่ในแถวเดียวกัน คอลัมน์เดียวกัน หรือทรีตเมนต์เดียวกัน จะสามารถแสดงสมการโดย $x_{fg(h)}$ และ $x_{rs(t)}$ ได้ดังสมการที่ (2.18) และ (2.19)

$$x_{fg(h)} = \frac{(K-1)(K-2)P_{fg(h)} - 2P_{rs(t)}}{\left[(K-1)(K-2)+2\right]\left[(K-1)(K-2)-2\right]} \quad (2.18)$$

$$x_{rs(t)} = \frac{(K-1)(K-2)P_{rs(t)} - 2P_{fg(h)}}{\left[(K-1)(K-2)+2\right]\left[(K-1)(K-2)-2\right]} \quad (2.19)$$

ถ้าค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ทั้งแถวที่ i จะได้สมการ $x_{ig(h)}$ และ $x_{is(t)}$ ดังนี้

$$x_{ig(h)} = \frac{(K-1)P_{ig(h)} + P_{is(t)}}{K(K-2)^2} \qquad x_{is(t)} = \frac{(K-1)P_{is(t)} + P_{ig(h)}}{K(K-2)^2} \quad (2.20)$$

จากสมการที่ (2.16) ถ้าค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่าในคอลัมน์ k เดียวกัน จะได้สมการดังนี้

$$x_{cj(e)} = \frac{(K-1)P_{cj(e)} + P_{ij(k)}}{K(K-2)^2} \qquad x_{ij(k)} = \frac{(K-1)P_{ij(k)} + P_{cj(e)}}{K(K-2)^2} \tag{2.21}$$

จากสมการที่ (2.17) ถ้าค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่าในทรีตเมนต์ j เดียวกัน จะได้สมการดังนี้

$$x_{cd(k)} = \frac{(K-1)P_{cd(k)} + P_{ij(k)}}{K(K-2)^2} \qquad x_{ij(k)} = \frac{(K-1)P_{ij(k)} + P_{cd(k)}}{K(K-2)^2} \tag{2.22}$$

2.1.1.4 งานวิจัยของ Rubin (1972)

ขั้นตอนวิธีการที่จะนำเสนอในหัวข้อนี้จะมีการประมาณค่าสูญหายในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม (RCBD) นำเสนอโดย Rubin โดยใช้การวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณเชิงเส้น และใช้เมทริกซ์ในการดำเนินการแก้ไขปัญหา เพื่อหาค่าของข้อมูลสูญหายซึ่งมีตัวอย่าง และขั้นตอนดังนี้

ตารางที่ 2.1 ตัวอย่างตารางเก็บข้อมูลแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม (RCBD) เพื่อไปสู่การแก้ข้อมูลที่สูญหายโดยใช้การวิเคราะห์การถดถอยพหุเชิงเส้น

ทรีตเมนต์ (Treatments)	บล็อก (Blocks) 1	2	3	ผลรวม (Total)
A	6	5	4	15
B	15	x_{22}	8	23
C	x_{31}	15	12	27
ผลรวม (Total)	21	20	24	65

ข้อมูลสูญหายมากกว่า 1 ค่า โดยที่ไม่มีการทำซ้ำของข้อมูล ในตารางข้อมูลสูญหายอยู่ในตำแหน่งที่ x_{31} และ x_{22} ขั้นตอนในการประมาณค่าข้อมูลสูญหายได้แก่

1. สนใจทุกค่าข้อมูลสูญหาย ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกตสามารถคำนวณได้ดังนี้ (65/7 = 9.286 ในตารางที่ 2.1) การพิจารณาความคลาดเคลื่อน d_{ij} ของค่าข้อมูลสูญหายของตารางที่ 2.1 จะได้ค่าความคลาดเคลื่อน d_{31} = -3.619, d_{22} = -1.952 เรียกค่าที่เหมือนว่าแถวของเวกเตอร์ a (a row vector) ในเมทริกซ์

2. จะกำหนดให้ 1 แทนค่าข้อมูลสูญหาย และ 0 แทนค่าอื่นๆ จะได้ข้อมูลเป็นสองแบบดังนี้

	ของ X_{31}			ค่าเฉลี่ย (Means)
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	1	0	0	1/3
Means	1/3	0	0	1/9

$d_{31} = 4/9,\ d_{22} = 1/9$

	ของ X_{22}			ค่าเฉลี่ย (Means)
	0	0	0	0
	0	1	0	1/3
	0	0	0	0
Means	0	1/3	0	1/9

$d_{31} = 1/9,\ d_{22} = 4/9$

3. จัดเรียง d_{ij} ใน เมทริกซ์ 2 x 2 และทำการอินเวิร์ด

$$\begin{bmatrix} 4/9 & 1/9 \\ 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ (Matrix)

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

อินเวิร์ด (Inverse)

$$\begin{bmatrix} C_{22}/D & -C_{12}/D \\ -C_{21}/D & C_{11}/D \end{bmatrix}$$

โดยที่

$D = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}$ จากข้อ 3 จะได้ตารางอินเวิร์ดดังนี้

เมทริกซ์(Matrix)

$$\begin{bmatrix} 4/9 & 1/9 \\ 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}$$

อินเวิร์ด(Inverse)

$$\begin{bmatrix} 12/5 = 2.4 & -3/5 = -0.6 \\ -3/5 = -0.6 & 12/5 = -2.4 \end{bmatrix}$$

4. ก่อนคูณเมทริกซ์อินเวิร์ด โดยเวกเตอร์แถว (-3.619,-1.952) ได้รับในขั้นตอนที่ 1 จะได้ผลลัพธ์ของเวกเตอร์ดังนี้

(-3.619)(2.4) + (-1.952)(-0.6) = -7.514

(-3.619)(-0.6) + (-1.952)(2.4) = -2.513

5. การประมาณค่าผลบวกกำลังสองน้อยสุดของค่าข้อมูลสูญหาย จะได้ค่าข้อมูลสูญหายดังนี้

$$\hat{X}_{31} = 9.286 - (-7.514) = 16.80$$

$$\hat{X}_{22} = 9.286 - (-2.513) = 11.80$$

6. ตารางที่ 2.2 แสดงค่าข้อมูลที่สมบูรณ์ และหลังจากนั้นทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนของค่าประมาณผลรวมกำลังสองน้อยสุดของค่าเฉลี่ยแต่ละทรีตเมนต์ และผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่ถูกต้อง

ตารางที่ 2.2 ข้อมูลที่สมบูรณ์ที่ได้ค่ามาจากการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้การวิเคราะห์การถดถอยพหุเชิงเส้น

ทรีตเมนต์ (Treatments)	บล็อก (Blocks)			ผลรวม (Total)	ค่าเฉลี่ย (Mean)
	1	2	3		
A	6	5	4	15	5
B	15	11.8	8	34.8	11.6
C	16.8	15	12	43.8	14.6
ผลรวม (Total)	37.8	31.8	24	93.6	

2.1.2 วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทำซ้ำ (Iterative Method)

จะอธิบายงานวิจัยของ Yates (1936) และ Healy และ Westmacott (1956) ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ดังต่อไปนี้

2.1.2.1 งานวิจัยของ Yates (1936)

ในหัวข้อนี้ เป็นวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทำซ้ำ (Iterative Method) เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า หรือมากกว่า 2 ค่า ในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม นำเสนอโดย Yates

-กรณีที่ 1 Yates (1936) ได้นำเสนอวิธีการทำซ้ำเมื่อมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม (Randomized Block Design) ดังตัวอย่างตารางที่ 2.3

ตารางที่ 2.3 ตัวอย่างแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่มโดยวิธีการทำซ้ำ โดยมีข้อมูลสูญหายจากการทดลอง 2 ค่า (Rangaswamy, 1995)

ชนิด (Variety)	การทำซ้ำ (Replication)			ผลรวม (Total)
	1	2	3	
1	14.5	14.0	14.0	42.5
2	16.5	16.9	16.7	50.1
3	X_{31}	16.7	17.4	34.1
4	17.6	16.9	17.5	52.0
5	18.5	17.9	17.6	54.0
6	19.3	18.3	18.8	56.4
7	19.5	19.0	X_{73}	38.5
ผลรวม (Total)	105.9	119.7	102.0	327.6

จากตารางค่าข้อมูลของ 3 ชนิด (Variety) ในการทำซ้ำ (Replication) 1 ครั้ง และของ 7 ชนิด (Variety) ในการทำซ้ำ (Replication) 3 ครั้งมีข้อมูลสูญหาย จะกำหนดเป็น X_{31} และ X_{73} ตามอันดับ

การประมาณค่ารอบแรก

$$X_{31} = \left[\frac{105.9}{6} + \frac{34.1}{2}\right] / 2$$

$$= \frac{17.65 + 17.05}{2} = 17.5$$

$$G' = 327.6 + 17.4 = 345.0$$

$$X_{73} = \frac{rR' + tT' - G'}{(r-1)(t-1)}$$

$$= \left[\frac{rR' + tT'}{(r-1)(t-1)} - \frac{G'}{(r-1)(t-1)}\right]$$

$$= \left[\frac{3(102.0) + 7(38.5)}{2x6} + \frac{345.0}{2x6}\right]$$

$$= \left[\frac{575.5}{12} + \frac{345.0}{12}\right]$$

$$= 19.2$$

การประมาณค่ารอบสองแทนค่าใน X_{73} จะได้

$$G' = 327.6 + 19.2 = 346.8$$

$$X_{73} = \frac{3(105.9) + 7(34.1)}{12} - \frac{346.8}{12} = 17.5$$

$$G' = 327.6 + 17.5 = 345.1$$

$$X_{73} = 47.96 - \frac{345.1}{12} = 19.2$$

การประมาณค่าในรอบที่สองมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริง ด้วยเหตุนี้จะมีการประมาณค่า X_{31} = 17.5 และ X_{73} = 19.2

ตารางที่ 2.4 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลในตารางที่ 2.4 กรณีที่มีค่าข้อมูลสูญหายจากการทดลอง 2 ค่า

แหล่งความแปรปรวน	องศาเสรี	ผลบวกกำลังสอง	ค่าเฉลี่ยกำลังสอง	การทดสอบแบบเอฟ
จำนวนซ้ำ(Replication)	2	0.9895	0.4948	5.101
ทรีตเมนต์ (Treatment)	6	45.7845	7.6308	78.668
ความคลาดเคลื่อน (Error)	10	0.9705	0.0970	
ผลรวม (Total)	18	47.7445		

หมายเหตุ SS_R คือ ผลบวกกำลังสองของการทำซ้ำ

-กรณีที่ 2 Yates (1936) ได้นำเสนอวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดโดยวิธีการทำซ้ำ (Iterative Method) ของแผนแบบละตินสแควร์ ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ในแถวที่ 5 และคอลัมน์ที่ 4 ดังตารางที่ 2.5

ตารางที่ 2.5 ตัวอย่างแผนแบบละตินสแควร์ โดยมีข้อมูลสูญหายจากการทดลอง 2 ค่า (Rangaswamy, 1995)

ชนิดของข้าวเปลือก	ผลผลิต					ผลรวม (Total)
1	E = 26	C = 42	D = 39	B = 37	A = 24	168
2	A = 24	D = 33	E = 21	C = X	B = 38	116
3	D = 47	B = 45	A = 31	E = 29	C = 31	183
4	B = 38	A = 24	C = 36	D = 41	E = 34	173
5	C = 41	E = 24	B = X	A = 26	D = 30	121
ผลรวม (Total)	176	168	127	133	157	761

ผลรวมของทรีตเมนต์ได้แก่ A = 129, B = 158, C = 150, D = 190 และ E = 134

ค่าเฉลี่ยของแถวที่สองและคอลัมน์ที่ 4 เมื่อ C คือค่าข้อมูลสูญหาย (116/4 = 29) และ (133/4 = 33.25) ตามอันดับการประมาณค่าขั้นแรกของ C ได้แก่

$$C_1 = \frac{29 + 33.25}{2} = 31.12$$

$$G' = 761 + 31.12 = 792.12$$

$$B_1 = \frac{5(121 + 127 + 158)}{(5-1)(5-2)} = 37.15$$

การประมาณค่าครั้งที่สอง

$$G' = 761 + 37.15 = 798.15$$

$$C_2 = \frac{5(116 + 133 + 150) - 2(798.15)}{12} = 33.22$$

$$G' = 761 + 33.22 = 794.22$$

$$B_2 = 169.17 - \frac{2(794.22)}{12} = 36.8$$

การประมาณค่าครั้งที่สาม

$$G' = 761 + 36.8 = 797.8$$

$$C_3 = 166.25 - \frac{2(797.8)}{12} = 33.3$$

$$G' = 761 + 33.3 = 794.3$$

$$B_3 = 169.17 - \frac{2(794.3)}{12} = 36.8$$

ผลรวมทรีตเมนต์ B = 158+36.8 = 194.8
ผลรวมทรีตเมนต์ C = 150+33.3 = 183.3
ผลรวมแถวที่ 2 = 116+33.3 = 149.3
ผลรวมแถวที่ 5 = 121+36.8 = 157.8
ผลรวมคอลัมน์ที่ 3 = 127+36.8 = 163.8
ผลรวมคอลัมน์ที่ 4 = 133+33.3 = 166.3
ผลรวมทั้งหมด = 761+36.8+33.3 = 831.1

ตารางที่ 2.6 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของข้อมูลในตารางที่ 2.5 กรณีที่มีข้อมูลสูญหายจากการทดลอง 2 ค่า

แหล่งความแปรปรวน	องศาเสรี	ผลบวกกำลังสอง	ค่าเฉลี่ยกำลังสอง	การทดสอบแบบเอฟ
แถว (Row)	4	137.5776	34.3944	1.237
คอลัมน์ (Column)	4	37.9376	9.4844	<1
ทรีตเมนต์ (Treatment)	4	753.5568	188.3892	6.776
ความคลาดเคลื่อน (Error)	10	278.0288	27.8029	
ผลรวม (Total)	22	1273.0416		

ตัวแบบในงานวิจัยของ Allan และ Wishart (1930) ไม่มีการทำซ้ำ แต่ในงานวิจัยของ Yates (1936) ได้มีการนำตัวแบบดังกล่าวมาอ้างอิงใช้ในกรณีของการทำซ้ำ ดังได้กล่าวถึงไปแล้วในหัวข้อของวิธีการทำซ้ำของ Yates (1936) จึงได้ตัวแบบที่ใช้ในกรณีที่ข้อมูลมีการทำซ้ำดังสมการที่ (2.15) และสมการที่ (2.17)

2.1.2.2 งานวิจัยของ Healy และ Westmacott (1956)

ในหัวข้อที่ 2.1.2.2 เป็นวิธีการประมาณค่าสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทำซ้ำ จะประมาณค่าด้วยวิธีการของ Healy และ Westmacott (1956)

วิธีการของ Healy และ Westmacott (1956) มีความสนใจในการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด โดยตัวแบบเชิงเส้นได้แก่

$$y_j = \beta_0 + \beta^T x_j + e_j (j = 1,...,n) \tag{2.23}$$

เมื่อมีข้อมูลบางค่า $y_1,...y_n$ สูญหาย x_j คือ มิติเวกเตอร์ p มีค่าของการออกแบบ ตัวแปรที่สอดคล้องกับ jth ตัวแปรรบกวน y_j และ e_j หมายถึงเทอมความคลาดเคลื่อน ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 $(j=1,...,n)$

Healy และ Westmacott (1956) ได้กำหนดหัวข้อซึ่งใช้ประโยชน์จากการคำนวณโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด กรณีที่ข้อมูลครบในการดำเนินการของกรณีข้อมูลสูญหาย ได้แก่

1. เลือกค่าการทดลองของทุกค่าข้อมูลสูญหาย
2. ดำเนินการวิเคราะห์กรณีข้อมูลครบ กล่าวคือ การคำนวณการประมาณค่าวิธีกำลังสองน้อยสุดของตัวแบบพารามิเตอร์ โดยวิธีการข้อมูลครบ
3. พยากรณ์ค่าข้อมูลสูญหายใช้วิธีการประมาณค่าข้างต้น
4. แทนค่าพยากรณ์ของค่าข้อมูลสูญหาย
5. กลับไปข้อ 2 และทำต่อไปจนกระทั่งการหาข้อมูลสูญหายครบ หรือการหาค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน

ตัวอย่างในงานวิจัยของ Healy และ Westmacott (1956) สามารถอธิบายได้ 2 หัวข้อดังนี้

1. การทำนายสมการถดถอยเชิงเส้นของข้อมูลสูญหาย (Linear Regression to Predict the Missing Value) จะใช้วิธีการนี้ในการวิเคราะห์ของการออกแบบการทดลองแบบเฟคเตอเรียล 3^2 กับค่าข้อมูลสูญหายของ $j=1,...,n$ ตัวแปรรบกวน y_j คือจำนวนของผักกาดหอมที่ jth ระดับรวมของ 2 ปัจจัย, ไนโตเจน (x_{1j}) และฟอสฟอรัส (x_{2j}) 3 ระดับของทั้งไนโตรเจน และฟอสฟอรัสแทนด้วย -1, 0, 1 ผลตอบสนองที่สอดคล้องกับ $(-1,-1)^T$ และ $(0,1)^T$ คือข้อมูลสูญหายข้อมูลประยุกต์มาจากงานของ Cochran และ Cox (1992) ดังตารางที่ 2.7 สมมติว่าต้องการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการถดถอยเชิงเส้น

จากข้อมูลของการออกแบบการทดลองแบบเต็มเฟคเตอเรียล 3^2, การประมาณค่ากำลังสองน้อยสุดสามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y};\ \ \hat{\beta}_1 = \frac{y_{+(1)} - y_{-(1)}}{6};\ \ \hat{\beta}_2 = \frac{y_{+(2)} - y_{-(2)}}{6}, \tag{2.24}$$

ที่ $\bar{y}$ คือ ค่าเฉลี่ยของค่าสังเกต 9 ค่า $y_{+(i)}$ และ $y_{-(i)}$ คือผลรวมของผลตอบสนอง ซึ่ง x_{ij} คือ +1 และ -1 ตามอันดับ ของ $i=1,2$ ค่ากำลังสองน้อยสุดในกรณีที่ข้อมูลไม่สมบูรณ์ส่วนมากค่อนข้างไม่ละเอียด และซับซ้อน เริ่มจากการประมาณแรกของ 358, -51 และ -55 ของ β_0, β_1 และ β_2 ตามอันดับ คำนวณจากจุดข้อมูล $(0,0)^T$, $(-1,0)^T$ และ $(0,-1)^T$

ตารางที่ 2.7 จำนวนผักกาดหอมในการออกแบบการทดลองแบบเต็มเฟคเตอเรียลบางส่วน 3^2

ระดับไนโตรเจน (x_{1j})	ระดับฟอสฟอรัสท (x_{2j})	จำนวนผักกาดหอมn (y_j)
-1	0	409
-1	1	341
0	-1	413
0	0	358
1	-1	326
1	0	291
1	1	312

ข้อมูลประยุกต์มาจากงานของ Cochran และ Cox (1992)

สุดท้ายการประมาณค่าที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุด และการแก้ไขสมการปกติ ได้ดังนี้

$$\bar{y} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{7};\ \ y_{+(1)} - y_{-(1)} = \beta_0 + 5\beta_1 - \beta_2;\ y_{+(2)} - y_{-(2)} = \beta_1 - 4\beta_2, \tag{2.25}$$

2. ข้อมูลสูญหายในแผนแบบละตินสแควร์ (Missing Values in a Latin Square Design)

จากตารางที่ 2.8 มีการประยุกต์มาจากงานของ Cochran และ Cox (1992) ดูความผิดพลาดในการยิงสูงของ 6 ตัวอย่าง (ทรีตเมนต์) พื้นที่ 6 หน่วย (คอลัมน์) และ 6 อันดับของพื้นที่ตัวอย่าง (แถว) จากตารางมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

ในกรณีแผนแบบละตินสแควร์ไม่มีข้อมูลสูญหาย การประมาณของแถว คอลัมน์ และทรีตเมนต์ ความแตกต่างอย่างง่ายเหล่านั้นได้รับจากค่าเฉลี่ยที่สอดคล้องกัน ดังนั้นค่าคาดหวังของค่าสังเกตในแถวที่ i และคอลัมน์ที่ k ทรีตเมนต์ที่ j คือ $(3R_i + 3C_j + 3T_k - G)/18$ ที่ R_i, C_j, T_k คือผลรวมของแถวที่ i^{th} และคอลัมน์ที่ j^{th} ทรีตเมนต์ที่ k^{th} ตามอันดับ

ตารางที่ 2.8 ตัวอย่างความคลาดเคลื่อนในการยิงสูงของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 6 x 6

อันดับ (Order)	พื้นที่ (Areas) 1	2	3	4	5	6	ผลรวม (Total)
I	F 3.5	B 4.2	A 6.7	D 6.6	C 4.1	E 3.8	28.9
II	B 8.9	F 1.9	D ??	A 4.5	E 2.4	C 5.8	28.23
III	C 9.6	E 3.7	F -2.7	B 3.7	D 6.0	A 7.0	27.30
IV	D 10.5	C 10.2	B 4.6	E 3.7	A 5.1	F 3.8	37.90
V	E ??	A 7.2	C 4.0	F -3.3	B 3.5	D 5.0	20.91
VI	A 5.9	D 7.6	E -0.7	C 3.0	F 4.0	B 8.6	28.40
ผลรวม (Total)	42.0	34.8	16.63	18.2	25.1	34.0	171.64

ตารางที่ 2.9 ผลลัพธ์ของความคลาดเคลื่อนในการยิงสูง

การทำซ้ำ (Iteration)	$\hat{y}_{23}$	$\hat{y}_{51}$	ความคลาดเคลื่อนของผลบวกกำลังสอง (Residual Sum of Squares)
1	4.73	3.598	65.847
2	4.73	3.598	65.847

2.2 การแก้ปัญหาซึ่งมีข้อมูลสูญหายวิธีตรง (Exact Approach)

Montgomery (2013) การแก้ปัญหาค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีตรงเป็นวิธีที่ไม่ต้องทำการประมาณค่าที่สูญหาย และสามารถหาสมการปกติ การประมาณค่าพารามิเตอร์ และสมการถดถอยได้ทันที โดยแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่มจะสามารถแสดงตัวแบบของตัวแบบได้ดังสมการที่ (2.26)

ตัวแบบของแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม

$$y_{ij} = \mu + \omega_i + \tau_j + \varepsilon_{ij} \quad \begin{cases} i = 1,2,3,\ldots,K \\ j = 1,2,3,\ldots,K \end{cases} \tag{2.26}$$

โดยที่

y_{ij} คือ ค่าสังเกตในแถวที่ i และทรีตเมนต์ที่ j

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

ω_i คือ อิทธิพลของแถวที่ i

τ_j คือ อิทธิพลของทรีตเมนต์ที่ j

ε_{ij} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่ม ij

จากวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) ของตัวแบบการออกแบบการทดลองสามารถแสดงสมการปกติสมการที่ (2.27)

$$
\begin{array}{ll}
\mu : ab\hat{\mu} + b\hat{\omega}_1 + b\hat{\omega}_2 + \ldots + b\hat{\omega}_a + a\hat{\tau}_1 + a\hat{\tau}_2 + \ldots + a\hat{\tau}_b = y_{..} \\
\omega_1 : b\hat{\mu} + b\hat{\omega}_1 \qquad + \ldots + \qquad \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_b = y_{1.} \\
\omega_2 : b\hat{\mu} \qquad + b\hat{\omega}_2 + \ldots + \qquad \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_b = y_{2.} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\omega_a : b\hat{\mu} \qquad\qquad + \ldots + b\hat{\omega}_a + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \ldots + \hat{\tau}_b = y_{a.} \\
\tau_1 : a\hat{\mu} + \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \ldots + \hat{\omega}_a + a\hat{\tau}_1 \qquad + \ldots + \hat{\tau}_b = y_{.1} \\
\tau_2 : a\hat{\mu} + \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \ldots + \hat{\omega}_a \qquad + a\hat{\tau}_2 \qquad = y_{.2} \\
\vdots \\
\tau_b : a\hat{\mu} + \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \ldots + \hat{\omega}_a \qquad\qquad + a\hat{\tau}_b = y_{.b}
\end{array}
\tag{2.27}
$$

สมการชุดที่ ω_i เมื่อรวมกันจะเท่ากับสมการของ μ และสมการชุดที่ τ_j ก็ได้ผลเช่นเดียวกัน ดังนั้นจึงมีความไม่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการทั้ง 2 ชุด ในการแก้สมการปกติจึงต้องกำหนดเงื่อนไขบังคับ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{4} \hat{\omega}_i = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4} \hat{\tau}_j = 0$$

จากอิทธิพลตรึงเมื่อนำมาแทนค่าในสมการปกติจะสามารถลดรูปสมการ และได้ค่าพารามิเตอร์แต่ละตัวทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป โดยจะนำไปสู่การประมาณค่าพารามิเตอร์ และการหาค่าสมการถดถอยของทั้งสองตัวแบบ ซึ่งสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูปลบด้วยสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบลดรูปซึ่งจะได้ค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ ในส่วนขั้นตอนของวิธีตรงของแผนแบบละตินสแควร์จะกล่าวแบบละเอียดต่อไปในบทที่ 3

2.3 วิธีอื่นๆ

2.3.1 วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม (ANCOVA)

Wilkinson (1957) สมมติว่าต้องการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของค่าสังเกตความแปรปรวน y และตัววัดความสอดคล้องของ p ตัวแปรร่วมกัน $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ถ้ามีค่าสังเกตบางค่าของ y สูญหาย

1. ตัดทิ้งตัววัดทั้งหมดของ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ที่สอดคล้องกับค่าสังเกตที่สูญหาย y

2. การปรับชุดของข้อมูลสูญหายของ y ถึงแม้ว่าของการวิเคราะห์แบบธรรมดา (ละทิ้งค่าความแปรปรวนร่วม)

3. การคำนวณการเปรียบเทียบการปรับชุดที่เหมาะสมของค่าข้อมูลสูญหายของ $x_1, x_2, \ldots, x_p$ เพื่อแทนที่ค่าที่ตัดทิ้ง

4. ทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วมของชุดข้อมูลที่สมบูรณ์ของ y และ $x_1, x_2, ..., x_p$

2.3.2 ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจากข้อมูลสูญหายโดยวิธีค่าคาดหมายสูงสุด

Dempter et al. (1977) ได้นำเสนอการคำนวณวิธีทั่วไปแบบทำซ้ำของการประมาณภาวะความน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อค่าสังเกตที่ใช้เป็นข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากแต่ละซ้ำของอัลกอริทึมประกอบด้วยขั้นตอนการหาความคาดหวัง โดยขั้นตอนการเพิ่มค่าเรียกว่าวิธีค่าคาดหมายสูงสุด (Expectation Maximization Algorithm (EM Algorithm)) จะยืนยันความหนาแน่นของการสุ่มตัวอย่าง $f(x|\phi)$ ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ ϕ และได้รับจากพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับความหนาแน่นของ $g(y|\phi)$ ข้อจำกัดของข้อมูลที่สมบูรณ์ $f(\ldots|\ldots)$ ซึ่งเกี่ยวข้องกับข้อจำกัดของข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ (ข้อมูลสูญหาย) $g(\ldots|\ldots)$ โดย

$$g(y|\phi) = \int_{\chi(y)} f(x|\phi)dx \qquad (2.28)$$

วิธีค่าคาดหมายสูงสุดคือการระบุการหาค่าของ ϕ เมื่อ $g(y|\phi)$ ให้ค่าสังเกต y สูงสุด แต่วิธีการนี้ไม่ได้ นำการใช้ในความจำเป็นของส่วนที่เกี่ยวข้อง $f(x|\phi)$

การทำซ้ำอย่างอื่นของวิธีค่าคาดหมายสูงสุดเกี่ยวข้องกับ 2 ขั้นตอน เรียกว่าขั้นตอนการหาค่าคาดหวัง (E-step) และขั้นตอนการเพิ่มค่า (M-step)

จากวิธีการแก้ไขปัญหาการหาค่าข้อมูลสูญหายในแผนการทดลองที่ไม่สมบูรณ์

ตารางที่ 2.10 วิธีการแก้ไขปัญหาการหาค่าข้อมูลสูญหายในแผนแบบที่ไม่สมบูรณ์

วิธีการ	ชื่อวิธีภาษาไทย	ชื่อวิธีภาษาอังกฤษ	ชื่อผู้แต่ง	ลักษณะของแผนการทดลองในงานวิจัย
วิธีการแบบไม่ทำซ้ำ (Non Iterative Method)	ข้อมูลสูญหาย 1 ค่าแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่มและแผนแบบละตินสแควร์ โดยค่า X ที่สูญหายมาจากค่าประมาณของค่าเฉลี่ยทั้งหมด $\hat{\mu}$ เทียบกับค่าพารามิเตอร์ตัวอื่นๆ	1 missing data in Randomized Block Design (RBD) and Latin Square (LSD)	Allan และ Wishart (1930)	Randomized Block Design (RBD) และ Latin Square Design (LSD)
	การหาอนุพันธ์ของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนของข้อมูลสูญหายต่างๆ	Differentiating the error sum of squares to each missing value	Yates (1933)	Randomized Block Design (RBD) และ Latin Square Design (LSD)
	พิจารณา 2 ข้อมูลสูญหาย หรือข้อมูลสูญหายมากกว่า 2 ค่า	Consider 2 missing data or more than 2 missing data in Latin Square (LSD)	Kramer และ Glass (1960)	Latin Square Design (LSD)
	วิธีการแบบไม่ทำซ้ำของ Rubin	Non–Iterative Rubin Method	Rubin (1972)	Randomized Block Design (RBD)
วิธีการแบบทำซ้ำ (Iterative Method	งานวิจัยของ Yates	Yates Method	Yates (1936)	Randomized Block Design (RBD) และ Latin Square Design (LSD)
	วิธีการของ Healy และ Westmacott -การทำนายการถดถอยเชิงเส้นของข้อมูลสูญหาย -ข้อมูลสูญหายในแผนแบบละตินสแควร์	Healy and Westmacott Method -Linear Regression to Predict the Missing Value -Missing Values in a Latin Square Design	Healy และ Westmacott (1956)	Latin Square Design (LSD)
วิธีตรง	วิธีตรง	Exact Approach	Mongomery (2013)	Randomized Block Design (RBD) และ Latin Square (LSD)
วิธีอื่นๆ	วิธีการวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม	Analysis of Covariance (ANCOVA)	Wilkinson (1957)	-
	ภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจากข้อมูลสูญหายโดยวิธีค่าคาดหมายสูงสุด	Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm	Dempster, Laird และ Rubin (1977)	-

2.4 งานวิจัยอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง รวมถึงงานวิจัยล่าสุด

Allen et al (1930) เป็นคนแรกที่ได้ศึกษาวิธีการประมาณค่าสูญหาย เมื่อมีข้อมูลสูญหาย 1 ค่า โดยจะนำเสนอการหาค่าข้อมูลที่สูญหาย โดยวิธีการประมาณค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยสุด ซึ่งวัดความแตกต่างระหว่างค่าจริงกับค่าพยากรณ์ ในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม และแผนแบบละตินสแควร์

Yates (1933) ได้มีการประยุกต์วิธีการผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดของ Allan และ Wishart ซึ่งมีการซ้ำของค่าข้อมูลสูญหายมากกว่า 1 ค่า โดยค่าที่สูญหายมาจากค่าประมาณของค่าเฉลี่ยทั้งหมด $\hat{\mu}$ เทียบกับค่าพารามิเตอร์ตัวอื่นๆ

Yates (1936) ศึกษาวิธีการประมาณค่าสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทำซ้ำ (Iterative Method) โดยการประมาณค่าผลรวมกำลังสองความคลาดเคลื่อน เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 1 ค่า หรือมากกว่า โดยจะมีการทำซ้ำของข้อมูล (Iteration Method) ในแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม

Anderson (1946) มีการประมาณค่าข้อมูลที่สูญหาย 1 ค่า หรือมากกว่า โดยจะนำไปใช้กับการออกแบบการทดลองหลายรูปแบบ การประมาณค่าที่สูญหายจะใช้วิธีการประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยใช้ตัวแบบเชิงเส้นมาใช้ในประมาณค่า

Lury (1946) ได้ศึกษาการวิเคราะห์ปัญหาค่าข้อมูลสูญหายในกรณี (1) ค่าข้อมูลสูญหาย 1 ค่า หรือมากกว่า (2) ค่าข้อมูลสูญหายหลายคอลัมน์ (3) ค่าข้อมูลสูญหายใน 1 คอลัมน์ (4) ค่าข้อมูลสูญหายใน 2 คอลัมน์ และ (5) มี 1 คอลัมน์ หรือมากกว่า 1 คอลัมน์สูญหาย ในแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 โดยจะเน้นการออกแบบที่เฉพาะเจาะจง แต่วิธีการและเครื่องมือที่สามารถนำมาใช้มีความเหมาะสมกับการปรับเปลี่ยนของปัญหาที่กว้าง

Healy และ Westmacott (1956) จะมีการทำซ้ำของข้อมูลในแผนแบบละตินสแควร์ โดยจะมีการคำนวณไปเรื่อยๆ จนกระทั่งผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนไม่มีการเปลี่ยนแปลง มีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ตัวแบบเชิงเส้น โดยจะใช้การวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นในการทำนายค่าข้อมูลสูญหาย

Wilkinson (1957) ได้นำเสนอวิธีอย่างง่ายของการตั้งค่า และแก้ไขสมการเมื่อมีค่าข้อมูลสูญหายนำตัวแบบเชิงเส้นที่มีการวิเคราะห์ที่เหมาะสมมาใช้กับการออกแบบ และข้อมูลต่างๆ และมีเนื้อหาที่ครอบคลุมไปถึงการวิเคราะห์ความแปรปรวน

Baird และ Kramer (1960) มีการจัดการกับการประมาณค่าของค่าข้อมูลสูญหายที่หายไปหลายค่า ในแผนแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ชนิดสมดุล (Balanced Incomplete Block Design) โดยผลรวมความคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยที่สุด (Minimising The Error Sum of Squares) ตัวแบบที่ชัดเจนของแต่ละค่าข้อมูลที่สูญหายได้มาจากหลายๆ กรณี และวิธีการทั่วไป

Kramer และ Glass (1960) มีการจัดการกับการประมาณค่าของค่าข้อมูลสูญหายที่หายไปหลายค่า ในแผนแบบละตินสแควร์ (Latin Square Design) โดยผลบวกของความคลาดเคลื่อนกำลังสองน้อยที่สุด ตัวแบบที่ชัดเจนของแต่ละค่าข้อมูลที่สูญหายได้มาจากหลายๆ กรณี และวิธีการทั่วไป

Rubin (1972) มีการนำเสนออัลกอริทึมของการประมาณค่าในวิธีกำลังสองน้อยสุด เมื่อ m คือค่าข้อมูลสูญหายในการวิเคราะห์ความแปรปรวน โดยวิธีแบบไม่ทำซ้ำ ต้องการเฉพาะรูปแบบของโปรแกรมที่มีอยู่แล้วในการใช้งาน เพื่อหาเมทริกซ์อินเวิร์ส m x m

Dempter et al. (1977) ได้นำเสนอการคำนวณวิธีทั่วไปแบบทำซ้ำของการประมาณภาวะความน่าจะเป็นสูงสุดเมื่อค่าสังเกตที่ใช้เป็นข้อมูลที่ไม่สมบูรณ์ เนื่องจากแต่ละซ้ำของอัลกอริทึมประกอบด้วยขั้นตอนการหาความ คาดหวัง โดยขั้นตอนการเพิ่มค่า เรียกว่าอีเอ็มอัลกอริทึม (EM Algorithm)

Jarrett (1978) ได้ทำการตรวจสอบวิธีการวิเคราะห์การออกแบบการทดลองกับข้อมูลสูญหายที่ได้มีการเผยแพร่ไปแล้ว โดยได้แสดงวิธีการที่แน่นอนจากวิลกินสัน (Wilkinson) เป็นอีกทางเลือกที่ใช้บ่อยกับเทคนิคการทำซ้ำ วิธีการมีประโยชน์กับตัวอย่างขนาดเล็กของการวิเคราะห์มาตรฐาน โดยใช้เวกเตอร์สร้างข้อมูลสูญหาย และข้อมูลที่ถูกต้อง

Subraman (1993) ได้ทำการศึกษาการประมาณค่าของข้อมูลสูญหายในแผนแบบไฮเปอร์ละตินแกรโคร นอกจากนั้นยังแสดงการประมาณค่าข้อมูลสูญหายในแผนแบบละตินสแควร์ และแผนแบบละตินแกรโคร

Mansson และ Prescott (2002) ได้ทำการศึกษาการลดประสิทธิภาพในการประมาณความแตกต่างของทรีตเมนต์ ในแผนแบบจัตุรัสยูเด็น (Youden Square) เมื่อมีข้อมูลสูญหาย 1 หรือ 2 ค่า ซึ่งค่าสังเกตของแต่ละข้อมูลสูญหายจะได้รับตัวอย่างการออกแบบที่คล้ายกันจะใช้เพื่อแสดงให้เห็นความแตกต่างของความถี่ที่ส่งผลต่อการออกแบบการทดลอง

จริยา แสงสุวรรณ (2551) ได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสูญหายของตัวแปรตามในการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ โดยทำการประมาณค่าสูญหายตัวแปรตาม 4 วิธี ได้แก่ วิธีสูญหาย, วิธีค่าเฉลี่ย, วิธีสมการถดถอย และวิธีการใส่ค่าหลายค่าแทนข้อมูลที่สูญหายแต่ละค่า (วิธีเอ็มไอ)

Ai et al. (2013) ได้กล่าวว่าละตินสแควร์มีการใช้กัน อย่างกว้างขวางในการออกแบบการทดลองปัจจัยบล็อก และปัจจัยทรีตเมนต์มีจำนวนในระดับเดียวกัน ของการทดลองขนาดของบล็อกอาจจะน้อยกว่าจำนวนของทรีตเมนต์ เนื่องจากจำนวนทรีตเมนต์ไม่สามารถเทียบกันในแต่ละบล็อกรูปแบบใหม่ของการออกแบบเรียกว่าบาลานซ์อินคอมพลีทละตินสแควร์ (Balanced Incomplete Latin Square) วิธีการที่เหมาะสมในการนำเสนอการตรวจสอบบาลานซ์อินคอมพลีทละตินสแควร์ จะมีการนำเสนอวิธีการที่มีประสิทธิภาพในการออกแบบของผลกระทบของทุกแถว คอลัมน์ และทรีตเมนต์

Charyulu และ Dharamyadav (2013) ได้ทำการศึกษาค่าข้อมูลสูญหาย m โดยการระบุตำแหน่ง และไม่ระบุตำแหน่งของข้อมูลที่ขาดหายไปแสดงในรูปแบบของแผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่มอย่างสมบูรณ์ในกรณีของข้อมูลสูญหาย (m=2)

Sirikasemsuk (2016) ได้ศึกษาเรื่องการแก้ปัญหาการวิเคราะห์ความแปรปรวนในแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ในกรณีของข้อมูลสูญหาย 1 ค่า โดยใช้วิธีแบบตรง

Sirikasemsuk และ Leeojanaprapa (2017) ได้ทำการพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของแผนแบบละตินสแควร์เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 1 ค่า สำหรับสมการถดถอยผลบวกกำลังสองสำหรับตัวแบบเต็มรูปโดยวิธีตรง ซึ่งสมการปกติถูกสร้างขึ้นเพื่อกำหนดการประมาณค่าพารามิเตอร์ และสมการถดถดอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูป

Ahmed (2016) มุ่งเน้นศึกษาการหาค่าข้อมูลสูญหายในแผนแบบสปลิตพล็อต โดยใช้วิธีในการหาค่าข้อมูลสูญหาย 3 วิธี ได้แก่ Coons, Haseman และ Gaylor, Rubin โดยจะมีการกำหนดตัววัดทางสถิติที่นำมาใช้ ได้แก่ ความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์เฉลี่ย (Absolute Error, (AE)) ความคลาดเคลื่อนกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error, (MSE)) และ เกณฑ์ข้อมูลของ Akaike (Akaike Information)

Appa et al. (2016) ทำการแก้ไขปัญหาของแผนแบบละตินสแควร์แบบสี่เหลี่ยมตั้งฉาก (OLR2) สำหรับ 2 แถว วิธีการ คือ การระบุทุกคู่ที่ไม่สมบูรณ์ 2 แถวของแผนแบบละตินสแควร์แบบสี่เหลี่ยมตั้งฉาก และเปลี่ยนเป็น OLR2

บทที่ 3
วิธีการวิจัย

ในบทนี้ผู้วิจัยได้พัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของสมการถดถอยผลบวกกำลังสองทั้งตัวแบบเต็มรูป, ตัวแบบลดรูปและผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ โดยจะทำการศึกษาแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 โดยมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ซึ่งอยู่ในขอบเขตที่ 2 (ดูบทที่ 1) เพื่อเป็นตัวอย่างในการวิจัยด้วยวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) หรือวิธีตรง (Exact Approach) และนำไปสู่การศึกษาอันดับ 5×5 และ $K \times K$ ในบทที่ 4 และ 5 ต่อไป โดยในบทที่ 3 นี้ จะมีหัวข้อดังต่อไปนี้

3.1 วิธีการที่นำมาใช้ในการวิจัย

3.2 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 ของตัวแบบเต็มรูป

3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 ของตัวแบบเต็มรูป

3.4 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 ของตัวแบบลดรูป

3.5 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 ของตัวแบบลดรูป

3.6 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 ของตัวแบบเต็มรูป

3.7 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 ของตัวแบบลดรูป

3.8 สมการผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4

3.9 ตัวอย่างการคำนวณหาการทดสอบแบบเอฟ (F_{test}) ซึ่งมีข้อมูลสูญหายไป 2 ค่าในขอบเขตที่ 2

3.10 ตัวแบบทั่วไปของวิธีตรงของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 เมื่อข้อมูลสูญหายไป 2 ค่าในขอบเขตที่ 2

3.11 การเปรียบเทียบผลระหว่างวิธีตรงกับวิธีการประมาณค่าสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

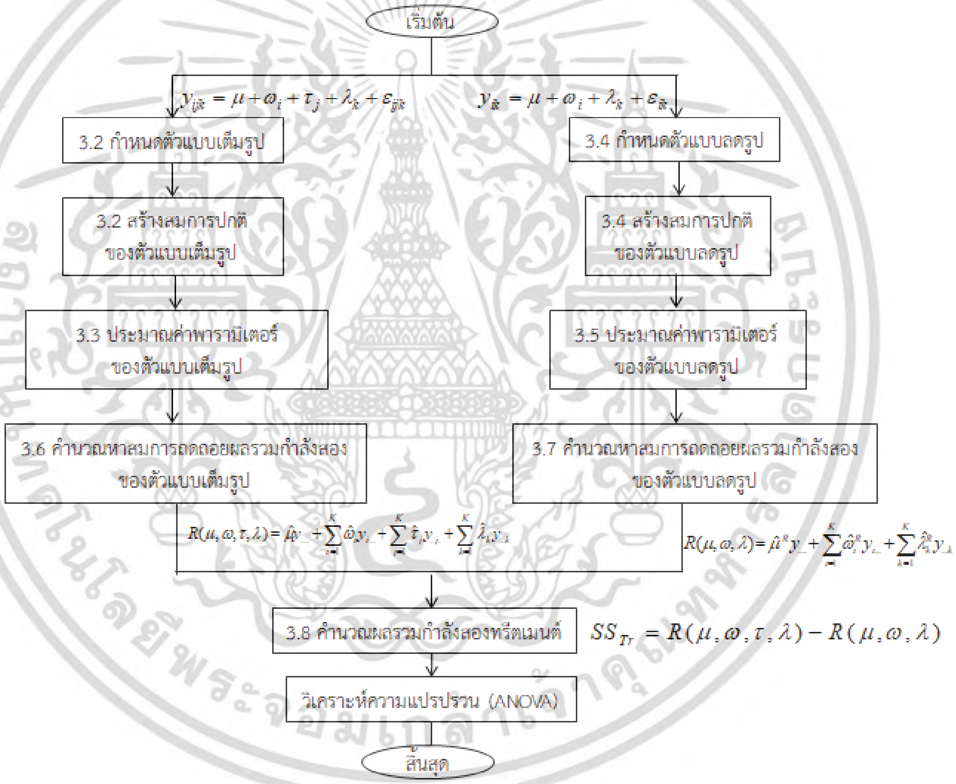
3.11.1 การเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน

3.11.2 การเปรียบเทียบค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ และค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน

3.1 วิธีการที่นำมาใช้ในการวิจัย

จากรูปที่ 3.1 แสดงวิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) ในกรณี 4 x 4 โดยทั่วไปจะมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

(1) สร้างสมการปกติของตัวแบบเต็มรูป
(2) ประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูป
(3) สร้างสมการปกติของตัวแบบลดรูป
(4) ประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลดรูป
(5) คำนวณหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูป
(6) คำนวณหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบลดรูป
(7) คำนวณหาผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์



รูปที่ 3.1 แผนผังแสดงขั้นตอนของวิธีตรง (Exact Approach)

$y_{ijk} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ijk}$

รุ่นของรถยนต์	แบบของเครื่องรถยนต์			
	1	2	3	4
1	A = 25	B = 31	C = 30	D = 26
2	~~B =~~	C = 33	D = 32	A = 34
3	C = 24	~~D =~~	A = 36	B = 41
4	D = 37	A = 28	B = 28	C = 37

ก)ตัวแบบเต็มรูป

$y_{ik} = \mu + \omega_i + \lambda_k + \varepsilon_{ik}$

รุ่นของรถยนต์	แบบของเครื่องรถยนต์			
	1	2	3	4
1	25	31	30	26
2		33	32	34
3	24		36	41
4	37	28	28	37

ข)ตัวแบบลดรูป

รูปที่ 3.2 ตัวอย่างการเปรียบเทียบตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป

จากรูปที่ 3.1 และรูปที่ 3.2 ตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์ คือ $y_{ijk} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ijk}$ (ตามสมการที่ 3.1) และตัวแบบลดรูปจะเป็น $y_{ik} = \mu + \omega_i + \lambda_k + \varepsilon_{ik}$ ซึ่ง τ_j จะไม่ได้ถูกพิจารณาในตัวแบบลดรูป ดังนั้นเมื่อนำสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบลดรูปหักออกจากสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของเต็มรูปจะได้ค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ตามสมการที่ (3.2)

ตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์ ได้แก่

$$y_{ijk} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,3,\ldots,K \\ j = 1,2,3,\ldots,K \\ k = 1,2,3,\ldots,K \end{cases} \tag{3.1}$$

โดยที่

y_{ijk} คือ ค่าสังเกตในแถวที่ i ทรีตเมนต์ที่ j และคอลัมน์ที่ k

μ คือ ค่าเฉลี่ยทั้งหมด

ω_i คือ อิทธิพลของแถวที่ i

τ_j คือ อิทธิพลของทรีตเมนต์ที่ j

λ_k คือ อิทธิพลของคอลัมน์ที่ k

ε_{ijk} คือ ความคลาดเคลื่อนสุ่ม ijk

จาก Montgomery (2013) วิธีตรงบนพื้นฐานของรูปแบบเชิงเส้นทั่วไป (Exact Approach Based on General Linear Model) สามารถกำหนดผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ แถว คอลัมน์ และผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนรวมถึงผลบวกกำลังสองทั้งหมด ได้ดังสมการที่ (3.2) ถึง (3.6)

$$SS_{Tr} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\lambda) \tag{3.2}$$

$$SS_{Row} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\tau,\lambda) \tag{3.3}$$

$$SS_{Column} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\tau) \tag{3.4}$$

$$SS_{E} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - R(\mu,\omega,\tau,\lambda) \tag{3.5}$$

$$SS_{T} = SS_{Tr} + SS_{Row} + SS_{Column} + SS_{E} = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N^2} \tag{3.6}$$

จากแผนแบบละตินสแควร์ ผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ (SS_{Tr}) ดังสมการที่ (3.2) สามารถหาได้จากสมการที่ (3.7) และ (3.8) คือ

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j y_{.j.} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \tag{3.7}$$

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \tag{3.8}$$

โดยที่ $R(\mu,\omega,\lambda)$ เป็นสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบลดรูป ซึ่งจะไม่พิจารณาถึงผลกระทบของทรีตเมนต์ที่ j

จากสมการที่ 3.1 ตัวแบบเต็มรูปจะมีการพิจารณาถึงผลกระทบของทรีตเมนต์ที่ j โดยที่แผนแบบละตินสแควร์ในบทนี้จะแสดงกรณีของข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ซึ่งข้อมูลที่สูญหายคือ y_{221} หายในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 1 โดยมีทรีตเมนต์ที่ B หาย (ω_2, λ_1 และ τ_2) และ y_{342} หายในแถวที่ 3 คอลัมน์ที่ 2 โดยมีทรีตเมนต์ที่ D หาย (ω_3, λ_2 และ τ_4) ซึ่งเป็นกรณีที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ และทรีตเมนต์ที่แตกต่างกัน โดยจัดอยู่ในขอบเขตที่ 2 ดังแสดงในตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป (ตามขอบเขตที่ 2)

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				$y_{i..}$
	1	2	3	4	
1	A = y_{111} = ✓	B = y_{122} = ✓	C = y_{133} = ✓	D = y_{144} = ✓	$y_{1..}$
2	B = y_{221} = X	C = y_{232} = ✓	D = y_{243} = ✓	A = y_{214} = ✓	$y_{2..}$
3	C = y_{331} = ✓	D = y_{342} = X	A = y_{313} = ✓	B = y_{324} = ✓	$y_{3..}$
4	D = y_{441} = ✓	A = y_{412} = ✓	B = y_{423} = ✓	C = y_{434} ✓	$y_{4..}$
$y_{..k}$	$y_{..1}$	$y_{..2}$	$y_{..3}$	$y_{..4}$	$y_{...}$
$y_{.j.}$	$y_{.1.}$	$y_{.2.}$	$y_{.3.}$	$y_{.4.}$	

หมายเหตุ ✓ คือ เก็บข้อมูลได้
X คือ เก็บข้อมูลไม่ได้

จากตารางที่ 3.1 สามารถเขียนสมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบเต็มรูป ได้ดังหัวข้อที่ 3.2

3.2 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบเต็มรูป

จากตารางที่ 3.1 สามารถเขียนสมการปกติ (Normal Equations) แบบเต็มรูปได้ดังสมการที่ (3.9) ถึง (3.21) ดังนี้

$$\mu : 14\hat{\mu} + (4\hat{\omega}_1 + 3\hat{\omega}_2 + 3\hat{\omega}_3 + 4\hat{\omega}_4) + (4\hat{\tau}_1 + 3\hat{\tau}_2 + 4\hat{\tau}_3 + 3\hat{\tau}_4) + (3\hat{\lambda}_1 + 3\hat{\lambda}_2 + 4\hat{\lambda}_3 + 4\hat{\lambda}_4) = y_{...} \quad (3.9)$$

$$\omega_1 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{1..} \quad (3.10)$$

$$\omega_2 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + (\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{2..} \quad (3.11)$$

$$\omega_3 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3) + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{3..} \quad (3.12)$$

$$\omega_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{4..} \quad (3.13)$$

$$\tau_1 : 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 4\hat{\tau}_1 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.1.} \quad (3.14)$$

$$\tau_2 : 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 3\hat{\tau}_2 + (\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.2.} \quad (3.15)$$

$$\tau_3 : 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 4\hat{\tau}_3 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.3.} \quad (3.16)$$

$$\tau_4 : 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_4) + 3\hat{\tau}_4 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.4.} \quad (3.17)$$

$$\lambda_1 : 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + 3\hat{\lambda}_1 = y_{..1} \quad (3.18)$$

$$\lambda_2 : 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3) + 3\hat{\lambda}_2 = y_{..2} \quad (3.19)$$

$$\lambda_3 : 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + 4\hat{\lambda}_3 = y_{..3} \quad (3.20)$$

$$\lambda_4 : 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + 4\hat{\lambda}_4 = y_{..4} \quad (3.21)$$

ขอยกตัวอย่างการเขียนสมการปกติของสมการที่ (3.13) จากสมการที่ (3.1) คือ

$$y_{ijk} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ijk}$$

ดังนั้น $\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_i + \hat{\tau}_j + \hat{\lambda}_k$ เมื่อ $E(\varepsilon_{ijk}) = 0$ ดังนั้นจากตารางที่ 3.1 จะได้

$$y_{441} \approx \hat{y}_{441} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_4 + \hat{\tau}_4 + \hat{\lambda}_1$$
$$y_{412} \approx \hat{y}_{412} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_4 + \hat{\tau}_1 + \hat{\lambda}_2$$
$$y_{423} \approx \hat{y}_{423} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_4 + \hat{\tau}_2 + \hat{\lambda}_3$$
$$y_{434} \approx \hat{y}_{434} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_4 + \hat{\tau}_3 + \hat{\lambda}_4$$

เมื่อนำค่า $\hat{y}_{441}$, $\hat{y}_{412}$, $\hat{y}_{423}$ และ $\hat{y}_{434}$ มารวมกันจะได้

$$\hat{y}_{441} + \hat{y}_{412} + \hat{y}_{423} + \hat{y}_{434} = y_{4..}$$

$$(\mu + \mu + \mu + \mu) + (\omega_4 + \omega_4 + \omega_4 + \omega_4) + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = y_{4..}$$

$$4\mu + 4\omega_4 + (\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = y_{4..}$$

ดังนั้นการพิสูจน์ที่มาของสมการที่ (3.13) เสร็จสิ้น

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{4}\hat{\omega}_i = 0 \quad (3.22)$$

$$\sum_{j=1}^{4}\hat{\tau}_j = 0 \quad (3.23)$$

$$\sum_{k=1}^{4}\hat{\lambda}_k = 0 \quad (3.24)$$

เมื่อนำมาแทนค่าในสมการปกติ จะสามารถลดรูปสมการที่ (3.9) ถึง (3.21) ได้ดังสมการที่ (3.25) ถึง (3.37)

$$\mu : 14\hat{\mu} - (\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3) - (\hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_4) - (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) = y_{...} \quad (3.25)$$

$$\omega_1 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 = y_{1..} \quad (3.26)$$

$$\omega_2 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 - \hat{\tau}_2 - \hat{\lambda}_1 = y_{2..} \quad (3.27)$$

$$\omega_3 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 - \hat{\tau}_4 - \hat{\lambda}_2 = y_{3..} \quad (3.28)$$

$$\omega_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 = y_{4..} \quad (3.29)$$

$$\tau_1 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\tau}_1 = y_{.1.} \quad (3.30)$$

$$\tau_2 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 + 3\hat{\tau}_2 - \hat{\lambda}_1 = y_{.2.} \quad (3.31)$$

$$\tau_3 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\tau}_3 = y_{.3.} \quad (3.32)$$

$$\tau_4 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 + 3\hat{\tau}_4 - \hat{\lambda}_2 = y_{.4.} \quad (3.33)$$

$$\lambda_1 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 - \hat{\tau}_2 + 3\hat{\lambda}_1 = y_{..1} \quad (3.34)$$

$$\lambda_2 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 - \hat{\tau}_4 + 3\hat{\lambda}_2 = y_{..2} \quad (3.35)$$

$$\lambda_3 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_3 = y_{..3} \quad (3.36)$$

$$\lambda_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_4 = y_{..4} \quad (3.37)$$

3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบเต็มรูป

บริบทที่ 3.1 *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ตามตัวอย่างตารางที่ 3.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของ* $\hat{\mu}$, $\hat{\omega}_i$, $\hat{\tau}_j$ *และ* $\hat{\lambda}_k$ *ในตัวแบบเต็มรูปของ* y_{ijk} *สามารถกำหนดได้ดังสมการที่ (3.38) ถึงสมการที่ (3.50)*

$$\hat{\mu} = \frac{y_{...} + y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1} + y_{3..} + y_{.4.} + y_{..2}}{32} \tag{3.38}$$

$$\hat{\omega}_1 = \frac{y_{1..}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.39}$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{2y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1}}{4} - 3\hat{\mu} \tag{3.40}$$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{2y_{3..} + y_{.4.} + y_{..2}}{4} - 3\hat{\mu} \tag{3.41}$$

$$\hat{\omega}_4 = \frac{y_{4..}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.42}$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{y_{.1.}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.43}$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{y_{2..} + 2y_{.2.} + y_{..1}}{4} - 3\hat{\mu} \tag{3.44}$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{y_{.3.}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.45}$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{y_{3..} + 2y_{.4.} + y_{..2}}{4} - 3\hat{\mu} \tag{3.46}$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{y_{2..} + y_{.2.} + 2y_{..1}}{4} - 3\hat{\mu} \tag{3.47}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{y_{3..} + y_{.4.} + 2y_{..2}}{4} - 3\hat{\mu} \tag{3.48}$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{y_{..3}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.49}$$

$$\hat{\lambda}_4 = \frac{y_{..4}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.50}$$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดของสมการที่ (3.25) ถึง (3.37) จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ก.

3.4 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบลดรูป

ตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์ ได้แก่

$$y_{ik} = \mu^R + \omega_i^R + \lambda_k^R + \varepsilon_{ik} \begin{cases} i = 1,2,3,...,K \\ k = 1,2,3,...,K \end{cases} \tag{3.51}$$

จากสมการที่ 3.51 ตัวแบบลดรูปจะไม่มีการพิจารณาถึงผลกระทบของทรีตเมนต์ที่ j โดยที่แผนแบบละตินสแควร์ในบทนี้จะแสดงกรณีของข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ซึ่งข้อมูลที่สูญหายคือ y_{21} หายในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 1 (ω_2, λ_1) และ y_{32} หายในแถวที่ 3 คอลัมน์ที่ 2 (ω_3, λ_2) ซึ่งเป็นกรณีที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ และทรีตเมนต์ที่แตกต่างกัน โดยจัดอยู่ในขอบเขตที่ 2 ดังแสดงในตารางที่ 3.1 และสามารถเขียนสมการสมการปกติ (Normal Equations) ได้ดังสมการที่ (3.52) ถึง (3.60)

$$\mu : 14\hat{\mu} + (4\hat{\omega}_1 + 3\hat{\omega}_2 + 3\hat{\omega}_3 + 4\hat{\omega}_4) + (3\hat{\lambda}_1 + 3\hat{\lambda}_2 + 4\hat{\lambda}_3 + 4\hat{\lambda}_4) = y_{...} \tag{3.52}$$

$$\omega_1 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{1..} \tag{3.53}$$

$$\omega_2 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 + (\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{2..} \tag{3.54}$$

$$\omega_3 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{3..} \tag{3.55}$$

$$\omega_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{4..} \tag{3.56}$$

$$\lambda_1 : 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 3\hat{\lambda}_1 = y_{..1} \tag{3.57}$$

$$\lambda_2 : 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_4) + 3\hat{\lambda}_2 = y_{..2} \tag{3.58}$$

$$\lambda_3 : 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 4\hat{\lambda}_3 = y_{..3} \tag{3.59}$$

$$\lambda_4 : 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 4\hat{\lambda}_4 = y_{..4} \tag{3.60}$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) ในสมการที่ (3.22) และ (3.24) เมื่อนำมาแทนค่าในสมการปกติ จะสามารถลดรูปสมการที่ (3.52) ถึง (3.60) ได้ดังสมการที่ (3.61) ถึง (3.69)

$$\mu : 14\hat{\mu} - (\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3) - (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) = y_{...} \tag{3.61}$$

$$\omega_1 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 = y_{1..} \tag{3.62}$$

$$\omega_2 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 - \hat{\lambda}_1 = y_{2..} \tag{3.63}$$

$$\omega_3 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 - \hat{\lambda}_2 = y_{3..} \tag{3.64}$$

$$\omega_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 = y_{4..} \tag{3.65}$$

$$\hat{\lambda}_1 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 + 3\hat{\lambda}_1 = y_{..1} \tag{3.66}$$

$$\hat{\lambda}_2 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 + 3\hat{\lambda}_2 = y_{..2} \tag{3.67}$$

$$\hat{\lambda}_3 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_3 = y_{..3} \tag{3.68}$$

$$\hat{\lambda}_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_4 = y_{..4} \tag{3.69}$$

3.5 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบลดรูป

<u>บริบทที่ 3.2</u> *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ตามตัวอย่างตารางที่ 3.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของ* $\hat{\mu}^R$, $\hat{\omega}_i^R$ *, และ* $\hat{\lambda}_k^R$ *ในตัวแบบลดรูปของ* y_{ik} *สามารถกำหนดได้ดังสมการที่ (3.70) ถึง (3.78)*

$$\hat{\mu}^R = \frac{2y_{...} + y_{2..} + y_{3..} + y_{..1} + y_{..2}}{40} \tag{3.70}$$

$$\hat{\omega}_1^R = \frac{y_{1..}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.71}$$

$$\hat{\omega}_2^R = \frac{3y_{2..} + y_{..1}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \tag{3.72}$$

$$\hat{\omega}_3^R = \frac{3y_{3..} + y_{..2}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \tag{3.73}$$

$$\hat{\omega}_4^R = \frac{y_{4..}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.74}$$

$$\hat{\lambda}_1^R = \frac{y_{2..} + 3y_{..1}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \tag{3.75}$$

$$\hat{\lambda}_2^R = \frac{y_{3..} + 3y_{..2}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \tag{3.76}$$

$$\hat{\lambda}_3^R = \frac{y_{..3}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.77}$$

$$\hat{\lambda}_4^R = \frac{y_{..4}}{4} - \hat{\mu} \tag{3.78}$$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดของสมการที่ (3.61) ถึง (3.69) จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ข.

3.6 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบเต็มรูป

<u>บริบทที่ 3.3</u> *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ตามตารางที่ 3.1 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์ของตัวแบบเต็มรูปสามารถกำหนดได้ดังสมการที่ (3.79)*

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_{i..}^2 + \sum_{j=1}^{4} y_{.j.}^2 + \sum_{k=1}^{4} y_{..k}^2}{4} + \frac{(y_{sum\_1})^2 + (y_{sum\_2})^2}{4} - \frac{\left[y_{...} + y_{sum\_1} + y_{sum\_2}\right]^2}{16} \tag{3.79}$$

เมื่อ $y_{sum\_1} = y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1}$

$y_{sum\_2} = y_{3..} + y_{.4.} + y_{..2}$

พิสูจน์ แทนค่าสมการที่ (3.38) ถึง (3.50) ลงในสมการที่ (3.7) แก้สมการและจัดเรียงใหม่จะได้ดังสมการที่ (3.79) การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ข. โดยแทนค่า K=4

3.7 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบลดรูป

บริบทที่ 3.4 *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ตามตารางที่ 3.1 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์ของตัวแบบลดรูปสามารถกำหนดได้ดังสมการที่ (3.80)*

$$R(\mu,\omega,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{4}y_{i..}^2+\sum_{k=1}^{4}y_{..k}^2}{4}+\frac{(y_{2..}+y_{..1})^2+(y_{3..}+y_{..2})^2}{8}-\frac{\left[2y_{...}+y_{2..}+y_{3..}+y_{..1}+y_{..2}\right]^2}{80} \quad (3.80)$$

พิสูจน์ แทนค่าในสมการที่ (3.70) ถึง (3.78) ลงในสมการที่ (3.8) แก้สมการและจัดเรียงใหม่จะได้สมการที่ (3.80) การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ค. โดยแทนค่า K=4

3.8 สมการผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4

บริบทที่ 3.5 *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ตามตารางที่ 3.1 สมการผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ของแผนแบบละตินสแควร์สามารถกำหนดได้ดังสมการที่ (3.81)*

$$\begin{aligned}SS_{Tr}&=\frac{\sum_{j=1}^{4}y_{.j.}^2}{4}+\frac{(y_{sum\_1})^2+(y_{sum\_2})^2}{4}-\frac{\left[y_{...}+y_{sum\_1}+y_{sum\_2}\right]^2}{16}\\&\quad-\frac{(y_{2..}+y_{..1})^2+(y_{3..}+y_{..2})^2}{8}+\frac{\left[2y_{...}+y_{2..}+y_{3..}+y_{..1}+y_{..2}\right]^2}{80}\end{aligned} \quad (3.81)$$

เมื่อ $y_{sum\_1}=y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}$

$y_{sum\_2}=y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2}$

3.9 ตัวอย่างการคำนวณหาค่าการทดสอบแบบเอฟ (F_{test}) ซึ่งมีข้อมูลสูญหายไป 2 ค่า ในขอบเขตที่ 2

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างของขอบเขตที่ 2 ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ได้ดังกรณีศึกษาที่ 3.1 โดยดัดแปลงข้อมูลมาจากอัจฉริยา ปราบอริพ่าย (2561)

<u>กรณีศึกษาที่ 3.1</u> การเก็บข้อมูลการทดลองของการเปรียบเทียบบริษัทผู้จำหน่ายส่วนประกอบเครื่องรถยนต์ 4 บริษัทเป็นการศึกษาการเปรียบเทียบบริษัทผู้จำหน่ายส่วนประกอบเครื่องรถยนต์ 4 บริษัท คือ บริษัทผู้จำหน่าย A B C และ D ส่วนประกอบเหล่านี้ใช้ได้กับเครื่องยนต์ที่แตกต่างกัน 4 แบบ ของรุ่นของรถยนต์ที่แตกต่างกัน 4 รุ่น โดยการเก็บข้อมูลความยาวของเวลาในการทำงานของส่วนประกอบได้ข้อมูลดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4×4 โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป (กรณีศึกษาที่ 3.1)

รุ่นของรถยนต์	แบบของเครื่องรถยนต์				$y_{i..}$
	1	2	3	4	
1	A = 25	B = 31	C = 30	D = 26	$y_{1..} = 112$
2	~~B = -~~	C = 33	D = 32	A = 34	$y_{2..} = 99$
3	C = 24	~~D = -~~	A = 36	B = 41	$y_{3..} = 101$
4	D = 37	A = 28	B = 28	C = 37	$y_{4..} = 130$
$y_{..k}$	$y_{..1} = 86$	$y_{..2} = 92$	$y_{..3} = 126$	$y_{..4} = 138$	$y_{...} = 442$
$y_{.j.}$	$y_{.1.} = 123$	$y_{.2.} = 100$	$y_{.3.} = 124$	$y_{.4.} = 95$	

แหล่งที่มา: โดยดัดแปลงมาจาก อัจฉริยา ปราบอริพ่าย (2561)

ข้อมูลจากหนังสือของอัจฉริยา ปราบอริพ่าย (2561) มีข้อมูลครบ โดยในงานวิจัยนี้ได้ทำการลบข้อมูลออก 2 ค่า ในตำแหน่งของขอบเขตที่ 2 เพื่อใช้เป็นตัวอย่างในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ สมการถดถอยผลบวกกำลังสอง และผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ ทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป

จากบริบทที่ 3.1 และ 3.2 จะสามารถคำนวณหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป ดังตารางที่ 3.3

ตารางที่ 3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้งตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปกรณีศึกษาที่ 3.1

พารามิเตอร์ (Parameter)	ตัวแบบเต็มรูป (Full Model)	ตัวแบบลดรูป (Reduced Model)
μ	$\hat{\mu} = 31.7188$	$\hat{\mu}^R = 31.5500$
ω_1	$\hat{\omega}_1 = -3.7188$	$\hat{\omega}_1^R = -3.5500$
ω_2	$\hat{\omega}_2 = 0.8438$	$\hat{\omega}_2^R = 0.5500$
ω_3	$\hat{\omega}_3 = 2.0938$	$\hat{\omega}_3^R = 2.0500$
ω_4	$\hat{\omega}_4 = 0.7813$	$\hat{\omega}_4^R = 0.9500$
τ_1	$\hat{\tau}_1 = -0.9688$	-
τ_2	$\hat{\tau}_2 = 1.0938$	-
τ_3	$\hat{\tau}_3 = -0.7188$	-
τ_4	$\hat{\tau}_4 = 0.5938$	-
λ_1	$\hat{\lambda}_1 = -2.4063$	$\hat{\lambda}_1^R = -2.7000$
λ_2	$\hat{\lambda}_2 = -0.1563$	$\hat{\lambda}_2^R = -0.2000$
λ_3	$\hat{\lambda}_3 = -0.2187$	$\hat{\lambda}_3^R = -0.0500$
λ_4	$\hat{\lambda}_4 = 2.7813$	$\hat{\lambda}_4^R = 2.9500$

ตารางที่ 3.4 การวิเคราะห์ความแปรปรวนของแผนแบบละตินสแควร์กรณีศึกษาที่ 3.1 โดยมีข้อมูลสูญหายจากการทดลอง 2 ค่า

$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$	14092.1875
$R(\mu,\omega,\lambda)$	14082.70
SS_{Tr}	9.4875 (df = 3)
SS_E	197.8125 (df = 4)
MS_{Tr}	3.1625
MS_E	49.4531
$F-test$	0.0639

<u>วิธีการคำนวณค่าต่างๆ ของตารางที่ 3.3</u>

จากค่าในตารางที่ 3.3 จะสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบเต็มรูป ได้ดังนี้

$$\hat{\mu} = \frac{442+99+101+100+95+86+92}{32} = 31.7188$$

$$\hat{\omega}_1 = \frac{112}{4} - 31.7188 = -3.7188$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{2(99)+100+86}{4} - 3(31.7188) = 0.8438$$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{2(101)+95+92}{4} - 3(31.7188) = 2.0938$$

$$\hat{\omega}_4 = \frac{130}{4} - 31.7188 = 0.7813$$

$$\hat{\tau}_1 = \frac{123}{4} - 31.7188 = -0.9688$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{99+2(100)+86}{4} - 3(31.7188) = 1.0938$$

$$\hat{\tau}_3 = \frac{124}{4} - 31.7188 = -0.7188$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{101+2(95)+92}{4} - 3(31.7188) = 0.5938$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{99+100+2(86)}{4} - 3(31.7188) = -2.4063$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{101+95+2(92)}{4} - 3(31.7188) = -0.1563$$

$$\hat{\lambda}_3 = \frac{124}{4} - 31.7188 = -0.2187$$

$$\hat{\lambda}_4 = \frac{138}{4} - 31.7188 = 2.7813$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบลดรูป ได้ดังนี้

$$\hat{\mu}^R = \frac{2(442)+99+101+86+92}{40} = 31.5500$$

$$\hat{\omega}_1^R = \frac{112}{4} - 31.55 = -3.5500$$

$$\hat{\omega}_2^R = \frac{3(99)+86}{8} - \frac{3(31.55)}{2} = 0.5500$$

$$\hat{\omega}_3^R = \frac{3(101)+92}{8} - \frac{3(31.55)}{2} = 2.0500$$

$$\hat{\omega}_4^R = \frac{130}{4} - 31.55 = 0.9500$$

$$\hat{\lambda}_1^R = \frac{99+3(86)}{8} - \frac{3(31.55)}{2} = -2.7000$$

$$\hat{\lambda}_2^R = \frac{101+3(92)}{8} - \frac{3(31.55)}{2} = -0.2000$$

$$\hat{\lambda}_3^R = \frac{126}{4} - 31.55 = -0.0500$$

$$\hat{\lambda}_3^R = \frac{138}{4} - 31.55 = 2.9500$$

<u>วิธีการคำนวณค่าต่างๆ ของตารางที่ 3.4</u>

การหาค่าสมการถดถอยผลบวกกำลังสอง, ผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์, ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน, ค่าเฉลี่ยกำลังสองของความคลาดเคลื่อน, ค่าเฉลี่ยกำลังสองของทรีตเมนต์ และการทดสอบแบบเอฟทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูปสามารถแสดงได้ดังนี้

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{4}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{j=1}^{4}\hat{\tau}_j y_{.j.} + \sum_{k=1}^{4}\hat{\lambda}_k y_{..k}$$

$$= \begin{bmatrix} (31.7188)(442) + (-3.7188)(112) + (0.8438)(99) + (2.0938)(101) + (0.7813)(130) \\ +(-0.9688)(123) + (1.0938)(100) + (-0.7188)(124) + (0.5938)(95) \\ +(-2.4063)(86) + (-0.1563)(92) + (-0.2187)(126) + (2.7813)(138) \end{bmatrix}$$

$$= 14092.1875$$

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{4}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{k=1}^{4}\hat{\lambda}_k y_{..k}$$

$$= \begin{bmatrix} (31.55)(442) + (-3.55)(112) + (0.55)(99) + (2.05)(101) + (0.95)(130) \\ (-2.70)(86) + (-0.20)(92) + (-0.05)(126) + (2.95)(138) \end{bmatrix}$$

$$= 14082.70$$

$$SS_{Tr} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\lambda)$$

$$= 14092.1875 - 14082.70$$

$$= 9.4875$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} y_{ijk}^2 - R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$$

$$= \begin{bmatrix} 25^2 + 31^2 + 30^2 + 26^2 + 0^2 + 33^2 + 32^2 + 34^2 + 24^2 + 0^2 + 36^2 \\ +41^2 + 37^2 + 28^2 + 28^2 + 37^2 \end{bmatrix} - 14092.1875$$

$$= 14290 - 14092.1875$$

$$= 197.8125$$

$$MS_{Tr} = \frac{SS_{Tr}}{K-1}$$

$$= \frac{9.4875}{3}$$

$$= 3.1625$$

$$MS_E = \frac{SS_E}{(K-1)(K-2)}$$
$$= \frac{197.8125}{4}$$
$$= 49.4531$$

และ

$$F_{test} = \frac{MS_{Tr}}{MS_E}$$
$$= \frac{3.1625}{49.4531}$$
$$= 0.0639$$

3.10 ตัวแบบทั่วไปของวิธีตรงของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของข้อมูลที่สูญหายไป 2 ค่าในขอบเขตที่ 2

จากตารางที่ 3.1 ค่าข้อมูลค่าแรกที่สูญหาย คือ y_{221} จะถูกเปลี่ยนมาเป็น y_{rmc} โดยที่ข้อมูลที่หายจะเป็นแถวที่ r ทรีตเมนต์ที่ m และคอลัมน์ที่ c ส่วนค่าข้อมูลที่สองที่สูญหาย คือ y_{342} จะถูกเปลี่ยนมาเป็น $y_{r'm'c'}$ โดยที่ข้อมูลที่หายจะเป็นแถวที่ r' ทรีตเมนต์ที่ m' และคอลัมน์ที่ c' เพื่อแปลงมาสู่ตำแหน่งการสูญหายเป็นแบบทั่วไปตามขอบเขตที่ 2

บริบทที่ 3.6 *การประมาณค่าพารามิเตอร์ และสมการถดถอยทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป ตัวแบบทั่วไปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 กรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่าของขอบเขตที่ 2 สามารถกำหนดได้ดังสมการที่ (3.82) ถึง (3.87) ในตารางที่ 3.5 และ 3.6*

ตารางที่ 3.5 ตัวแบบทั่วไปของการประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบเต็มรูปของข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ของขอบเขตที่ 2

ตัวแบบเต็มรูป (Full Model)
การประมาณค่าพารามิเตอร์ในกรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ $\hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{4} - \hat{\mu} \ for \ i \neq r, r'$; $\hat{\tau}_j = \frac{y_{.j.}}{4} - \hat{\mu} \ for \ j \neq m, m'$; $\hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{4} - \hat{\mu} \ for \ k \neq c, c'$ (3.82)
การประมาณค่าพารามิเตอร์ในกรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ $\hat{\mu} = \frac{y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'}}{32}$; $\hat{\omega}_r = \frac{2y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c}}{4} - 3\hat{\mu}$; $\hat{\omega}_{r'} = \frac{2y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'}}{4} - 3\hat{\mu}$; $\hat{\tau}_m = \frac{y_{r..} + 2y_{.m.} + y_{..c}}{4} - 3\hat{\mu}$; $\hat{\tau}_{m'} = \frac{y_{r'..} + 2y_{.m'.} + y_{..c'}}{4} - 3\hat{\mu}$; $\hat{\lambda}_c = \frac{y_{r..} + y_{.m.} + 2y_{..c}}{4} - 3\hat{\mu}$; $\hat{\lambda}_{c'} = \frac{y_{r'..} + y_{.m'.} + 2y_{..c'}}{4} - 3\hat{\mu}$ (3.83)
$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_{i..}^2 + \sum_{j=1}^{4} y_{.j.}^2 + \sum_{k=1}^{4} y_{..k}^2}{4} + \frac{(y_{sum\_1})^2 + (y_{sum\_2})^2}{4} - \frac{\left[y_{...} + y_{sum\_1} + y_{sum\_2}\right]^2}{16}$ (3.84)

เมื่อ $y_{sum\_1} = y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c}$

$y_{sum\_2} = y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการที่ (3.82) และ (3.83) จะสามารถแก้สมการหาค่าสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูปออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ค. โดยแทนค่า K=4

ตารางที่ 3.6 ตัวแบบทั่วไปของการประมาณค่าพารามิเตอร์ตัวแบบลดรูปของข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ของขอบเขตที่ 2

ตัวแบบลดรูป (Reduced Model)
การประมาณค่าพารามิเตอร์ในกรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ $\left.\begin{array}{l}\hat{\omega}_i^R = \frac{y_{i..}}{4} - \hat{\mu} \;\; for\; i \neq r, r' \\ \hat{\lambda}_k^R = \frac{y_{..k}}{4} - \hat{\mu} \;\; for\; k \neq c, c'\end{array}\right\}$ (3.85)
การประมาณค่าพารามิเตอร์ในกรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ $\left.\begin{array}{l}\hat{\mu}^R = \frac{2y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}}{40} \\ \hat{\omega}_r^R = \frac{3y_{r..} + y_{..c}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \\ \hat{\omega}_{r'}^R = \frac{3y_{r'..} + y_{..c'}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \\ \hat{\lambda}_c^R = \frac{y_{r..} + 3y_{..c}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \\ \hat{\lambda}_{c'}^R = \frac{y_{r'..} + 3y_{..c'}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2}\end{array}\right\}$ (3.86)
$R(\mu,\omega,\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_{i..}^2 + \sum_{k=1}^{4} y_{..k}^2}{4} + \frac{(y_{r..} + y_{..c})^2 + (y_{r'..} + y_{..c'})^2}{8} - \frac{\left[2y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}\right]^2}{80}$ (3.87)

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการที่ (3.85) และ (3.86) จะสามารถแก้สมการหาค่าสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูปออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ฆ. โดยแทนค่า K=4

3.11 การเปรียบเทียบผลระหว่างวิธีตรงกับวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

ในหัวข้อนี้จะทำการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาการวิเคราะห์การทดลองแบบละตินสแควร์ในกรณีศึกษาที่ 3.1 ตามตารางที่ 3.2 ซึ่งมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ระหว่างวิธีตรง (Exact Approach) และวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Missing Plot Technique with Least Square) โดยค่าที่จะทำการวัดเพื่อไปสู่การเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนในรูปของ

1. ค่าความคลาดเคลื่อน
2. ค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ (Treatment Sum of Square ($SS_{Tr.}$)) และค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Error Sum of Square of (SS_E))

3.11.1 การเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน

จะเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างวิธีตรงกับวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด ด้วยค่าความคลาดเคลื่อน (Error (e)) และค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Error ($|e|$)) ดังต่อไปนี้

ในการคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อน (Error (e)) และค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Error ($|e|$)) สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ (3.88) และ (3.89)

$$e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} \tag{3.88}$$

และ

$$\left|e_{ijk}\right| = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk} \tag{3.89}$$

แต่เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} e_{ijk} = 0$ ดังนั้นในหัวข้อนี้จะสนใจเปรียบเทียบ $\left|e_{ijk}\right|$ แทน

เมื่อ

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_i + \hat{\tau}_j + \hat{\lambda}_k \tag{3.90}$$

Yates (1933) วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Missing Plot Technique with Least Square Method) มีตัวแบบการประมาณค่าที่หายไปแสดงได้ดังสมการที่ (3.91) และสมการที่ (3.92)

$$y_{cmr} = \frac{k(y_{..c} + y_{r..} + y_{.m.}) - 2y_{...}}{(k-1)(k-2)} \tag{3.91}$$

และ

$$y_{c'm'r'} = \frac{k(y_{..c'} + y_{r'..} + y_{.m'.}) - 2y_{...}}{(k-1)(k-2)} \tag{3.92}$$

ด้วยวิธีการแบบทำซ้ำของ Yates (1933) ซึ่งได้แสดงวิธีการของหลายข้อมูลสูญหายในหนังสือของ Rangawamy (1995) จะสามารถคำนวณค่าที่หายไปของตารางที่ 3.2 คือ y_{221} และ y_{342} ได้เท่ากับ 31.25 และ 34.25 ตามอันดับ

จากการประมาณค่า y_{221} และ y_{342} แล้วจะนำค่าข้อมูลสูญหายแทนค่ากลับเข้าไปในตารางเพื่อใช้ในการแก้ชุดสมการหาค่าพารามิเตอร์ จะได้ค่าพารามิเตอร์ที่ถูกประมาณค่าดังตารางที่ 3.7 ในคอลัมน์ที่ 3

จากตารางที่ 3.7 คอลัมน์ที่ 2 ค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ของวิธีตรงได้มาจากตารางที่ 3.3 เฉพาะตัวแบบเต็มรูป

ตารางที่ 3.7 การประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ถูกประมาณค่าด้วยตัวแบบทั่วไปของวิธีตรง และวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Parameters)	วิธีตรง	วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด
$\hat{\mu}$	31.7188	31.7188
$\hat{\omega}_1$	-3.7188	-3.7188
$\hat{\omega}_2$	0.8438	0.8438
$\hat{\omega}_3$	2.0938	2.0938
$\hat{\omega}_4$	0.7813	0.7813
$\hat{\tau}_1$	-0.9688	-0.9688
$\hat{\tau}_2$	1.0938	1.0938
$\hat{\tau}_3$	-0.7188	-0.7188
$\hat{\tau}_4$	0.5938	0.5938
$\hat{\lambda}_1$	-2.4063	-2.4063
$\hat{\lambda}_2$	-0.1563	-0.1563
$\hat{\lambda}_3$	-0.2188	-0.2188
$\hat{\lambda}_4$	2.7813	2.7813

จากตารางที่ 3.7 จะเห็นว่าค่าพารามิเตอร์ที่ถูกประมาณค่าจากทั้ง 2 วิธีมีค่าเท่ากัน หลังจากนั้นค่าในตารางนี้จะถูกนำไปใช้ในการคำนวณค่า $\hat{y}$ ในตารางที่ 3.8 ต่อไป

เมื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่สูญหายแล้วจะเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน สัมบูรณ์ของวิธีตรง และวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด โดยค่าความคลาดเคลื่อนคำนวณจากข้อมูลจริงลบด้วยข้อมูลจากการพยากรณ์หรือการประมาณค่า (ตามสมการที่ 3.88) ซึ่งค่าของพารามิเตอร์และผลการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์จะแสดงดังตารางที่ 3.8

ตารางที่ 3.8 การเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ระหว่างวิธีตรงกับวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

วิธีตรง (Exact Approach)			วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (Missing Plot Technique with Least Square Method)		
y_{ijk}	$\hat{y}_{ijk}$	$\lvert e_{ijk}\rvert$	y_{ijk}	$\hat{y}_{ijk}$	$\lvert e_{ijk}\rvert$
$y_{111} = 25$	24.6249	0.3751	$y_{111} = 25$	24.6249	0.3751
$y_{122} = 31$	28.9375	2.0625	$y_{122} = 31$	28.9375	2.0625
$y_{133} = 30$	27.0624	2.9376	$y_{133} = 30$	27.0624	2.9376
$y_{144} = 26$	31.3751	5.3751	$y_{144} = 26$	31.3751	5.3751
$y_{221} = -$	-	-	$y_{221} = 31.2500$	31.2500	0.0000
$y_{232} = 33$	31.6875	1.3125	$y_{232} = 33$	31.6875	1.3125
$y_{243} = 32$	32.9376	0.9376	$y_{243} = 32$	32.9376	0.9376
$y_{214} = 34$	34.3751	0.3751	$y_{214} = 34$	34.3751	0.3751
$y_{331} = 24$	30.6875	6.6875	$y_{331} = 24$	30.6875	6.6875
$y_{342} = -$	-	-	$y_{342} = 34.2500$	34.2500	0.0000
$y_{313} = 36$	32.6250	3.3750	$y_{313} = 36$	32.6250	3.3750
$y_{324} = 41$	37.6877	3.3123	$y_{324} = 41$	37.6877	3.3123
$y_{441} = 37$	30.6876	6.3124	$y_{441} = 37$	30.6876	6.3124
$y_{412} = 28$	31.3750	3.3750	$y_{412} = 28$	31.3750	3.3750
$y_{423} = 28$	33.3751	5.3751	$y_{423} = 28$	33.3751	5.3751
$y_{434} = 37$	34.5626	2.4374	$y_{434} = 37$	34.5626	2.4374
รวม (Total)		44.2502	รวม (Total)		44.2502

ผลลัพธ์ของวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดมาจากการประมาณค่าสูญหาย (Yates (1933)) และนำค่าที่สูญหายแทนกลับเข้าไปในตารางที่ 3.2 และวิเคราะห์โดยใช้สูตรในตารางที่ 1.3 จะได้ผลลัพธ์ตามตารางที่ 3.8 การคำนวณหาค่า $\hat{y}_{ijk}$ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ง.

3.11.2 การเปรียบเทียบค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ และค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนระหว่างวิธีตรงกับวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด โดยสนใจค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์และค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนได้ดังตารางที่ 3.9

ตารางที่ 3.9 ผลการเปรียบเทียบการวิเคราะห์ความแปรปรวนระหว่างวิธีตรงกับวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

	วิธีตรง	วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด
SS_{Tr}	*9.4875 (df = 3)*	*12.0156 (df = 3)*
SS_E	*197.8125 (df = 4)*	*197.8125 (df = 6)*
MS_{Tr}	*3.1625*	*4.0052*
MS_E	49.4531	32.9688
F test	0.0639	0.1215

ในตารางที่ 3.9 ที่มาของผลลัพธ์วิธีตรงมาจากการคำนวณในตารางที่ 3.4

จากตารางที่ 3.9 สามารถแปลความได้ดังนี้

ค่าของผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (SS_E) ทั้งสองวิธีเท่ากัน

วิธีตรงให้ค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ (SS_{Tr}) น้อยกว่าวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด นั่นคือวิธีตรงจะให้ค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนแบบไม่เอนเอียง (Unbias) ในขณะที่วิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดให้ค่าแบบเอนเอียง (Bias)

ค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนเท่ากันอาจนำไปสู่การสรุปผลที่ไม่เหมือนกัน

บทที่ 4
แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5

ในบทที่ 4 จะมีการพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ และสมการถดถอยผลบวกกำลังสองทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป โดยทำการศึกษาแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 โดยมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ในขอบเขตที่ 1, 3 ด้วยวิธีตรง

แผนแบบละตินสแควร์ในบทนี้จะมี 2 ขอบเขต ซึ่งแสดงกรณีของข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ได้แก่

ขอบเขตที่ 1 ข้อมูลที่สูญหาย คือ y_{rmc} และ $y_{r'mc'}$ โดยที่

- y_{rmc} หายในแถวที่ r คอลัมน์ที่ c โดยมีทรีตเมนต์ m หาย (ω_r, τ_m และ λ_c)
- $y_{r'mc'}$ หายในแถวที่ r' คอลัมน์ที่ c' โดยมีทรีตเมนต์ m หาย ($\omega_{r'}$, τ_m และ $\lambda_{c'}$)

กล่าวได้ว่ากรณีที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ แต่ทรีตเมนต์เหมือนกันหายไป จัดอยู่ในขอบเขตที่ 1 ตามบทที่ 1 ตารางที่ 1.6

ขอบเขตที่ 3 ข้อมูลที่สูญหายคือ y_{rmc} และ $y_{rm'c'}$ โดยที่

- y_{rmc} หายในแถวที่ r คอลัมน์ที่ c โดยมีทรีตเมนต์ที่ m หาย (ω_r, τ_m และ λ_c)
- $y_{rm'c'}$ หายในแถวที่ r คอลัมน์ที่ c' โดยมีทรีตเมนต์ที่ m' หาย (ω_r, $\tau_{m'}$ และ $\lambda_{c'}$)

กล่าวได้ว่ากรณีที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่าแบบแถวเดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป จัดอยู่ในขอบเขตที่ 3 ตามบทที่ 1 ตารางที่ 1.8

ตารางที่ 4.1 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์เดียวกันหายไป (ตามขอบเขตที่ 1)

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2					$y_{i..}$
	1	2	3	4	5	
1	A = ✓	B = X	C = ✓	D = ✓	E = ✓	$y_{1..}$
2	B = X	C = ✓	D = ✓	E = ✓	A = ✓	$y_{2..}$
3	C = ✓	D = ✓	E = ✓	A = ✓	B = ✓	$y_{3..}$
4	D = ✓	E = ✓	A = ✓	B = ✓	C = ✓	$y_{4..}$
5	E = ✓	A = ✓	B = ✓	C = ✓	D = ✓	$y_{5..}$
$y_{..k}$	$y_{..1}$	$y_{..2}$	$y_{..3}$	$y_{..4}$	$y_{..5}$	$y_{...}$
$y_{.j.}$	$y_{.1.}$	$y_{.2.}$	$y_{.3.}$	$y_{.4.}$	$y_{.5.}$	

ตารางที่ 4.2 แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบแถวเดียวกันโดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป (ตามขอบเขตที่ 3)

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2					$y_{i..}$
	1	2	3	4	5	
1	E = ✓	C = ✓	D = ✓	B = ✓	A = ✓	$y_{1..}$
2	A = ✓	D = ✓	E = X	C = ✓	B = ✓	$y_{2..}$
3	D = ✓	B = ✓	A = ✓	E = ✓	C = ✓	$y_{3..}$
4	B = ✓	A = ✓	C = ✓	D = ✓	E = ✓	$y_{4..}$
5	C = X	E = X	B = ✓	A = ✓	D = ✓	$y_{5..}$
$y_{..k}$	$y_{..1}$	$y_{..2}$	$y_{..3}$	$y_{..4}$	$y_{..5}$	$y_{...}$
$y_{.j.}$	$y_{.1.}$	$y_{.2.}$	$y_{.3.}$	$y_{.4.}$	$y_{.5.}$	

จากตารางที่ 4.1 มีข้อมูลสูญหาย คือ y_{122} หายในแถวที่ 1 คอลัมน์ที่ 2 โดยมีทรีตเมนต์ที่ B หาย (ω_1, τ_2 และ λ_2) และ y_{222} หายในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 2 โดยมีทรีตเมนต์ที่ B หาย (ω_2, τ_2 และ λ_2) และตารางที่ 4.2 มีข้อมูลสูญหาย คือ y_{513} หายในแถวที่ 5 คอลัมน์ที่ 1 โดยมีทรีตเมนต์ที่ C หาย (ω_5, τ_3 และ λ_1) และ y_{525} หายในแถวที่ 5 คอลัมน์ที่ 2 โดยมีทรีตเมนต์ที่ E หาย (ω_5, τ_5 และ λ_2)

อ้างอิงจากสมการที่ (3.2) ถึง (3.5) และ (3.7) ถึง (3.8) ของบทที่ 3 จะได้

$$SS_{Tr} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\lambda) \tag{4.1}$$

$$SS_{Row} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\tau,\lambda) \tag{4.2}$$

$$SS_{Column} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\tau) \tag{4.3}$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - R(\mu,\omega,\tau,\lambda) \tag{4.4}$$

ที่ซึ่ง

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j y_{.j.} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \tag{4.5}$$

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \tag{4.6}$$

ในงานวิจัยนี้จะทำการคำนวณหาค่า $R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$ และ $R(\mu,\omega,\lambda)$ โดยมีหัวข้อดังนี้

4.1 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบเต็มรูป
4.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบเต็มรูป
4.3 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบลดรูป
4.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบลดรูป
4.5 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบเต็มรูป
4.6 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบลดรูป

4.1 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบเต็มรูป

ตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบวิจัยละตินสแควร์ ได้แก่

$$y_{ijk} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,3,\ldots,5 \\ j = 1,2,3,\ldots 5 \\ k = 1,2,3,\ldots,5 \end{cases} \tag{4.7}$$

จากสมการที่ (4.7) จะสามารถเขียนสมการปกติของตัวแบบเต็มรูป ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ของขอบเขตที่ 1, 3 เมื่อค่าข้อมูลที่สูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ และค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ แสดงได้ดังตารางที่ 4.3 และตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.3 สมการปกติของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 3	$\omega_i : 5\hat{\mu} + 5\hat{\omega}_i + \sum_{j=1}^{5}\hat{\tau}_j + \sum_{k=1}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{i..}$ เมื่อ $i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\tau_j : 5\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{5}\hat{\omega}_i + 5\hat{\tau}_j + \sum_{k=1}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{.j.}$ เมื่อ $j \neq m$ ของขอบเขตที่ 1 และ $j \neq m, m'$ ของขอบเขตที่ 3
	$\lambda_k : 5\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{5}\hat{\omega}_i + \sum_{j=1}^{5}\hat{\tau}_j + 5\hat{\lambda}_k = y_{..k}$ เมื่อ $k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1, 3

ตารางที่ 4.4 สมการปกติของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu: 23\hat{\mu} + 5\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{5}\hat{\omega}_i + 4(\hat{\omega}_r + \hat{\omega}_{r'}) + 5\sum_{j=1,j\neq m}^{5}\hat{\tau}_j + 2\hat{\tau}_m + 5\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{5}\hat{\lambda}_k + 4(\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{...}$ $\omega_r: 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_r + \sum_{j=1,j\neq m}^{5}\hat{\tau}_j + \sum_{k=1,k\neq c}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{r..}$ $\omega_{r'}: 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_{r'} + \sum_{j=1,j\neq m}^{5}\hat{\tau}_j + \sum_{k=1,k\neq c'}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{r'..}$ $\tau_m: 3\hat{\mu} + \sum_{i=1,i\neq r,r'}^{5}\hat{\omega}_i + 3\hat{\tau}_m + \sum_{k=1,k\neq c,c'}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{.m.}$ $\lambda_c: 4\hat{\mu} + \sum_{i=1,i\neq r}^{5}\hat{\omega}_i + \sum_{j=1,j\neq m}^{5}\hat{\tau}_j + 4\hat{\lambda}_c = y_{..c}$ $\lambda_{c'}: 4\hat{\mu} + \sum_{i=1,i\neq r'}^{5}\hat{\omega}_i + \sum_{j=1,j\neq m}^{5}\hat{\tau}_j + 4\hat{\lambda}_{c'} = y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu: 23\hat{\mu} + 5\sum_{i=1,i\neq r}^{5}\hat{\omega}_i + 2\hat{\omega}_r + 5\sum_{j=1,j\neq m,m'}^{5}\hat{\tau}_j + 4(\hat{\tau}_m + \hat{\tau}_{m'}) + 5\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{5}\hat{\lambda}_k + 4(\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{...}$ $\omega_r: 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_r + \sum_{j=1,j\neq m,m'}^{5}\hat{\tau}_j + \sum_{k=1,k\neq c,c'}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{r..}$ $\tau_m: 4\hat{\mu} + \sum_{i=1,i\neq r}^{5}\hat{\omega}_i + 4\hat{\tau}_m + \sum_{k=1,k\neq c}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{.m.}$ $\tau_{m'}: 4\hat{\mu} + \sum_{i=1,i\neq r}^{5}\hat{\omega}_i + 4\hat{\tau}_{m'} + \sum_{k=1,k\neq c'}^{5}\hat{\lambda}_k = y_{.m'.}$ $\lambda_c: 4\hat{\mu} + \sum_{i=1,i\neq r}^{5}\hat{\omega}_i + \sum_{j=1,j\neq m}^{5}\hat{\tau}_j + 4\hat{\lambda}_c = y_{..c}$ $\lambda_{c'}: 4\hat{\mu} + \sum_{i=1,i\neq r}^{5}\hat{\omega}_i + \sum_{j=1,j\neq m'}^{5}\hat{\tau}_j + 4\hat{\lambda}_{c'} = y_{..c'}$

เมื่อทำการแทนค่าอิทธิพลตรึง $\sum_{i=1}^{5}\hat{\omega}_i = 0$, $\sum_{j=1}^{5}\hat{\tau}_j = 0$, $\sum_{k=1}^{5}\hat{\lambda}_k = 0$ ในสมการที่ (3.22) ถึง (3.24) ในบทที่ 3 จะสามารถลดรูปของสมการได้ดังตารางที่ 4.5 และตารางที่ 4.6

ตารางที่ 4.5 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 4.3 ใหม่ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 3	$\omega_i : 5\hat{\mu} + 5\hat{\omega}_i = y_{i..}$ $i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\tau_j : 5\hat{\mu} + 5\hat{\tau}_j = y_{.j.}$ $j \neq m$ ของขอบเขตที่ 1 และ $j \neq m, m'$ ของขอบเขตที่ 3
	$\lambda_k : 5\hat{\mu} + 5\hat{\lambda}_k = y_{..k}$ $k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1 และขอบเขตที่ 3

ตารางที่ 4.6 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 4.4 ใหม่ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu : 23\hat{\mu} - (\hat{\omega}_r + \hat{\omega}_{r'}) - 2\hat{\tau}_m - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{...}$
	$\omega_r : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_c = y_{r..}$
	$\omega_{r'} : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_{r'} - \hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_{c'} = y_{r'..}$
	$\tau_m : 3\hat{\mu} - (\hat{\omega}_r + \hat{\omega}_{r'}) + 3\hat{\tau}_m - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{.m.}$
	$\lambda_c : 4\hat{\mu} - \hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m + 4\hat{\lambda}_c = y_{..c}$
	$\lambda_{c'} : 4\hat{\mu} - \hat{\omega}_{r'} - \hat{\tau}_m + 4\hat{\lambda}_{c'} = y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu : 23\hat{\mu} - 2\hat{\omega}_r - (\hat{\tau}_m + \hat{\tau}_{m'}) - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{...}$
	$\omega_r : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_r - (\hat{\tau}_m + \hat{\tau}_{m'}) - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{r..}$
	$\tau_m : 4\hat{\mu} - \hat{\omega}_r + 4\hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_c = y_{.m.}$
	$\tau_{m'} : 4\hat{\mu} - \hat{\omega}_r + 4\hat{\tau}_{m'} - \hat{\lambda}_{c'} = y_{.m'.}$
	$\lambda_c : 4\hat{\mu} - \hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m + 4\hat{\lambda}_c = y_{..c}$
	$\lambda_{c'} : 4\hat{\mu} - \hat{\omega}_r - \hat{\tau}_{m'} + 4\hat{\lambda}_{c'} = y_{..c'}$

4.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบเต็มรูป

<u>บริบทที่ 4.1</u> *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ของขอบเขตที่ 1, 3) ของตัวแบบเต็มรูป สามารถคำนวณการหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังตารางที่ 4.7*

ตารางที่ 4.7 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 เมื่อค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 3	$\hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{5} - \hat{\mu}\ ; i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\hat{\tau}_j = \frac{y_{.j.}}{5} - \hat{\mu}\ ; j \neq m$ ของขอบเขตที่ 1 และ $j \neq m, m'$ ของขอบเขตที่ 3
	$\hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{5} - \hat{\mu}\ ; k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1 และขอบเขตที่ 3

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 4.5 ของขอบเขตที่ 1, 3 จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ฅ. โดยแทนค่า K=5

<u>บริบทที่ 4.2</u> *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 3) ของตัวแบบเต็มรูปสามารถคำนวณหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังตารางที่ 4.8*

ตารางที่ 4.8 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 เมื่อค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\hat{\mu} = \frac{y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + 2y_{.m.} + y_{..c} + y_{..c'}}{45}$
	$\hat{\omega}_r = -\frac{y_{...} - 4y_{r..} - y_{.m.} - y_{..c}}{15}$
	$\hat{\omega}_{r'} = -\frac{y_{...} - 4y_{r'..} - y_{.m.} - y_{..c'}}{15}$
	$\hat{\tau}_m = -\frac{y_{...}}{9} + \frac{4y_{r..} + 4y_{r'..} + 17y_{.m.} + 4y_{..c} + 4y_{..c'}}{45}$
	$\hat{\lambda}_c = -\frac{y_{...} - y_{r..} - y_{.m.} - 4y_{..c}}{15}$
	$\hat{\lambda}_{c'} = -\frac{y_{...} - y_{r'..} - y_{.m.} - 4y_{..c'}}{15}$

ตารางที่ 4.8 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 เมื่อค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ (ต่อ)

ขอบเขตที่ 3	$\hat{\mu} = \dfrac{y_{...} + 2y_{r..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'}}{45}$
	$\hat{\omega}_r = -\dfrac{y_{...}}{9} + \dfrac{17y_{r..} + 4y_{.m.} + 4y_{.m'.} + 4y_{..c} + 4y_{..c'}}{45}$
	$\hat{\tau}_m = -\dfrac{y_{...} - y_{r..} - 4y_{.m.} - y_{..c}}{15}$
	$\hat{\tau}_{m'} = -\dfrac{y_{...} - y_{r..} - 4y_{.m'.} - y_{..c'}}{15}$
	$\hat{\lambda}_c = -\dfrac{y_{...} - y_{r..} - y_{.m.} - 4y_{..c}}{15}$
	$\hat{\lambda}_{c'} = -\dfrac{y_{...} - y_{r..} - y_{.m'.} - 4y_{..c'}}{15}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 4.6 ของขอบเขตที่ 1, 3 จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ฅ. โดยแทนค่า K=5

4.3 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบลดรูป

ตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์ ได้แก่

$$y_{ik} = \mu^R + \omega_i^R + \lambda_k^R + \varepsilon_{ik} \begin{cases} i = 1,2,3,...,5 \\ k = 1,2,3,...,5 \end{cases} \tag{4.8}$$

รูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{4} \hat{\omega}_i = 0 \tag{4.9}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \hat{\lambda}_k = 0 \tag{4.10}$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) ในสมการที่ (4.9) และ (4.10) จะสามารถเขียนสมการปกติ (Normal Equations) แบบลดรูปได้ดังตารางที่ 4.11 และตารางที่ 4.12

ตารางที่ 4.9 สมการปกติของตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินแสควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 3	$\omega_i^R : 5\hat{\mu}^R + 5\hat{\omega}_i^R + \sum_{k=1}^{5} \hat{\lambda}_k^R = y_{i..}$ เมื่อ $i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\lambda_k^R : 5\hat{\mu}^R + \sum_{i=1}^{5} \hat{\omega}_i^R + 5\hat{\lambda}_k^R = y_{..k}$ เมื่อ $k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1, 3

ตารางที่ 4.10 สมการปกติของตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินแสควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu^R : 23\hat{\mu}^R + 5\sum_{i=1, i\neq r, r'}^{5} \hat{\omega}_i^R + 4(\hat{\omega}_r^R + \hat{\omega}_{r'}^R) + 5\sum_{k=1, k\neq c, c'}^{5} \hat{\lambda}_k^R + 4(\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{...}$
	$\omega_r^R : 4\hat{\mu}^R + 4\hat{\omega}_r^R + \sum_{k=1, k\neq c}^{5} \hat{\lambda}_k^R = y_{r..}$
	$\omega_{r'}^R : 4\hat{\mu}^R + 4\hat{\omega}_{r'}^R + \sum_{k=1, k\neq c'}^{5} \hat{\lambda}_k^R = y_{r'..}$
	$\lambda_c^R : 4\hat{\mu}^R + \sum_{i=1, i\neq r}^{5} \hat{\omega}_i^R + 4\hat{\lambda}_c^R = y_{..c}$
	$\lambda_{c'}^R : 4\hat{\mu}^R + \sum_{i=1, i\neq r'}^{5} \hat{\omega}_i^R + 4\hat{\lambda}_{c'}^R = y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu^R : 23\hat{\mu}^R + 5\sum_{i=1, i\neq r}^{5} \hat{\omega}_i^R + 2\hat{\omega}_r^R + 5\sum_{k=1, k\neq c, c'}^{5} \hat{\lambda}_k^R + 4(\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{...}$
	$\omega_r^R : 3\hat{\mu}^R + 3\hat{\omega}_r^R + \sum_{k=1, k\neq c, c'}^{5} \hat{\lambda}_k^R = y_{r..}$
	$\lambda_c^R : 4\hat{\mu}^R + \sum_{i=1, i\neq r}^{5} \hat{\omega}_i^R + 4\hat{\lambda}_c^R = y_{..c}$
	$\lambda_{c'}^R : 4\hat{\mu}^R + \sum_{i=1, i\neq r}^{5} \hat{\omega}_i^R + 4\hat{\lambda}_{c'}^R = y_{..c'}$

ตารางที่ 4.11 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 4.9 ใหม่ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 3	$\omega_i^R : 5\hat{\mu}^R + 5\hat{\omega}_i^R = y_{i...}$ $i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\lambda_k^R : 5\hat{\mu}^R + 5\hat{\lambda}_k^R = y_{..k}$ $k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1 และขอบเขตที่ 3

ตารางที่ 4.12 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 4.10 ใหม่ของแผนแบบละตินแสควร์อันดับ 5 x 5 ของขอบเขตที่ 1, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu^R : 23\hat{\mu}^R - (\hat{\omega}_r^R + \hat{\omega}_{r'}^R) - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{...}$
	$\omega_r^R : 4\hat{\mu}^R + 4\hat{\omega}_r^R - \hat{\lambda}_c^R = y_{r..}$
	$\omega_{r'}^R : 4\hat{\mu}^R + 4\hat{\omega}_{r'}^R - \hat{\lambda}_{c'}^R = y_{r'..}$
	$\lambda_c^R : 4\hat{\mu}^R - \hat{\omega}_r^R + 4\hat{\lambda}_c^R = y_{..c}$
	$\lambda_{c'}^R : 4\hat{\mu}^R - \hat{\omega}_{r'}^R + 4\hat{\lambda}_{c'}^R = y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu^R : 23\hat{\mu}^R - 2\hat{\omega}_r^R - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{...}$
	$\omega_r^R : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_r^R - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{r..}$
	$\lambda_c^R : 4\hat{\mu}^R - \hat{\omega}_r^R + 4\hat{\lambda}_c^R = y_{..c}$
	$\lambda_{c'}^R : 4\hat{\mu}^R - \hat{\omega}_r^R + 4\hat{\lambda}_{c'}^R = y_{..c'}$

4.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบลดรูป

<u>บริบทที่ 4.3</u> *สำหรับแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 3) ของตัวแบบลดรูปสามารถคำนวณหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังตารางที่ 4.13*

ตารางที่ 4.13 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลดรูป ในกรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 3	$\hat{\omega}_i = \dfrac{y_{i..}}{5} - \hat{\mu}\,; i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\hat{\lambda}_k = \dfrac{y_{..k}}{5} - \hat{\mu}\,; k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1 และขอบเขตที่ 3

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 4.11 ของขอบเขตที่ 1, 3 จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ฆ. โดยแทนค่า K=5

ตารางที่ 4.14 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลดรูป ในกรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\hat{\mu}^R = \frac{3y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}}{85}$
	$\hat{\omega}_r^R = \frac{-12y_{...} + 64y_{r..} - 4y_{r'..} + 13y_{..c} - 4y_{..c'}}{255}$
	$\hat{\omega}_{r'}^R = \frac{-12y_{...} - 4y_{r..} + 64y_{r'..} - 4y_{..c} + 13y_{..c'}}{255}$
	$\hat{\lambda}_c^R = \frac{-12y_{...} + 13y_{r..} - 4y_{r'..} + 64y_{..c} - 4y_{..c'}}{255}$
	$\hat{\lambda}_{c'}^R = \frac{-12y_{...} - 4y_{r..} + 13y_{r'..} - 4y_{..c} + 64y_{..c'}}{255}$
ขอบเขตที่ 3	$\hat{\mu}^R = \frac{2y_{...} + 2y_{r..} + y_{..c} + y_{..c'}}{60}$
	$\hat{\omega}_r^R = -\frac{y_{...} - 5y_{r..} - y_{..c} - y_{..c'}}{15}$
	$\hat{\lambda}_c^R = -\frac{y_{...} - y_{r..} - 5y_{..c}}{20}$
	$\hat{\lambda}_{c'}^R = -\frac{y_{...} - y_{r..} - 5y_{..c'}}{20}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 4.12 ของรูปแบบที่ 1, 3 จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ฆ. โดยแทนค่า K=5

4.5 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบเต็มรูป

บริบทที่ 4.4 *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 กรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 3) ของตัวแบบเต็มรูปสามารถคำนวณหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์แสดงได้ดังตารางที่ 4.15*

ตารางที่ 4.15 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบเต็มรูปของขอบเขตที่ 1, 3

ขอบเขตที่ 1	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_{i..}^2+\sum_{j=1}^{5}y_{.j.}^2+\sum_{k=1}^{5}y_{..k}^2}{5}+\frac{y_{.m.}^2}{3}+\frac{(A_1)^2+(A_2)^2}{15}-\frac{(A_1+A_2+2y_{...}-5y_{.m.})^2+2y_{...}(6y_{.m.}-y_{...})}{45}$
ขอบเขตที่ 3	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_{i..}^2+\sum_{j=1}^{5}y_{.j.}^2+\sum_{k=1}^{5}y_{..k}^2}{5}+\frac{y_{r..}^2}{3}+\frac{(C_1)^2+(C_2)^2}{15}-\frac{(C_1+C_2+2y_{...}-5y_{r..})^2+2y_{...}(6y_{r..}-y_{...})}{45}$

ขอบเขตที่ 1 $A_1 = y_{r..} + 2y_{.m.} + y_{..c}$

$A_2 = y_{r'..} + 2y_{.m.} + y_{..c'}$

ขอบเขตที่ 3 $C_1 = 2y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c}$

$C_2 = 2y_{r..} + y_{.m'.} + y_{..c'}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 4.7 และตารางที่ 4.8 ของขอบเขตที่ 1, 3 จะสามารถแก้สมการหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองออกมาได้ การพิสูจน์ดูอ้างอิงได้จากภาคผนวก จ. โดยแทนค่า K=5

4.6 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบลดรูป

<u>บริบทที่ 4.5</u> *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 กรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 3) ของตัวแบบลดรูปสามารถคำนวณหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์แสดงได้ดังตารางที่ 4.16*

ตารางที่ 4.16 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 5 x 5 ของตัวแบบลดรูปของขอบเขตที่ 1, 3

ขอบเขตที่ 1	$R(\mu,\omega,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_{i..}^2+\sum_{k=1}^{5}y_{..k}^2}{5}+\frac{(y_{r..}+y_{..c})^2+(y_{r'..}+y_{..c'})^2}{15}-\frac{\left[3y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}\right]^2}{255}$
ขอบเขตที่ 3	$R(\mu,\omega,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{5}y_{i..}^2+\sum_{k=1}^{5}y_{..k}^2}{5}+\frac{(y_{r..}+y_{..c})^2+(y_{r..}+y_{..c'})^2}{15}-\frac{(y_{..c}-y_{..c'})^2+2y_{...}(2y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'})+2y_{...}^2}{60}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 4.13 และตารางที่ 4.14 ของขอบเขตที่ 1, 3 จะสามารถแก้สมการหาสมการถดถอยกำลังสองออกมาได้ การพิสูจน์ดูอ้างอิงได้จากภาคผนวก ค., ฉ. ตามลำดับ โดยแทนค่า K=5

บทที่ 5
แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K

ในส่วนนี้จะมีการพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ และสมการถดถอยผลบวกกำลังสองทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป โดยทำการศึกษาแผนแบบละตินสแควร์อันดับ $K \times K$ โดยมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ในขอบเขตที่ 1, 2, 3 ด้วยวิธีตรง

แผนแบบละตินสแควร์ในบทนี้จะมี 3 ขอบเขต ซึ่งแสดงกรณีของข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ได้แก่

<u>ขอบเขตที่ 1</u> ข้อมูลที่หายคือ y_{rmc} และ $y_{r'mc'}$ โดยที่

– y_{rmc} หายในแถวที่ r คอลัมน์ที่ c โดยมีทรีตเมนต์ที่ m หาย จึงมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องโดยตรงคือ ω_r , τ_m และ λ_c

– $y_{r'mc'}$ หายในแถวที่ r' คอลัมน์ที่ c' โดยมีทรีตเมนต์ที่ m หาย จึงมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องโดยตรงคือ $\omega_{r'}$, τ_m และ $\lambda_{c'}$

กล่าวได้ว่ากรณีที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์เหมือนกันหายไป จัดอยู่ในขอบเขตที่ 1 ตามบทที่ 1 ตารางที่ 1.6

<u>ขอบเขตที่ 2</u> ข้อมูลที่หายคือ y_{rmc} และ $y_{r'm'c'}$ โดยที่

– y_{rmc} หายในแถวที่ r คอลัมน์ที่ c โดยมีทรีตเมนต์ที่ m หาย จึงมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องโดยตรงคือ ω_r , τ_m และ λ_c

– $y_{r'm'c'}$ หายในแถวที่ r' คอลัมน์ที่ c' โดยมีทรีตเมนต์ที่ m' หาย จึงมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องโดยตรงคือ $\omega_{r'}$, $\tau_{m'}$ และ $\lambda_{c'}$

กล่าวได้ว่ากรณีที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป จัดอยู่ในขอบเขตที่ 2 ตามบทที่ 1 ตารางที่ 1.7

<u>ขอบเขตที่ 3</u> ข้อมูลที่หายคือ y_{rmc} และ $y_{rm'c'}$ โดยที่

– y_{rmc} หายในแถวที่ r คอลัมน์ที่ c โดยมีทรีตเมนต์ที่ m หาย จึงมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องโดยตรงคือ ω_r , τ_m และ λ_c

– $y_{rm'c'}$ หายในแถวที่ r คอลัมน์ที่ c' โดยมีทรีตเมนต์ที่ m' หาย จึงมีพารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องโดยตรงคือ ω_r , $\tau_{m'}$ และ $\lambda_{c'}$

กล่าวได้ว่ากรณีที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบแถวเดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป จัดอยู่ในขอบเขตที่ 3 ตามบทที่ 1 ตารางที่ 1.8

ตัวอย่างแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8 และ 9 x 9 ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 เมื่อมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แสดงดังรูปที่ 5.1, 5.2, 5.3 และ 5.4

C	B	A	D	F	E
B	C	D	A	E	F
A	E	F	B	C	D
E	F	B	C	D	A
F	D	C	E	A	B
D	A	E	F	B	C

ขอบเขตที่ 1

B	C	D	A	E	F
A	E	F	B	C	D
E	F	B	C	D	A
F	B	C	D	A	E
C	D	A	E	F	B
D	A	E	F	B	C

ขอบเขตที่ 2

E	F	A	D	C	B
F	E	D	A	B	C
B	C	E	F	A	D
C	B	F	E	D	A
A	D	C	B	F	E
D	A	B	C	E	F

ขอบเขตที่ 3

รูปที่ 5.1 ตัวอย่างของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 6 x 6 แบบข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

C	B	A	D	F	E	G
B	D	E	F	A	G	C
F	G	C	E	B	A	D
E	F	B	C	G	D	A
A	C	F	G	D	B	E
D	A	G	B	E	C	F
G	E	D	A	C	F	B

ขอบเขตที่ 1

G	C	D	A	E	F	B
A	E	F	B	C	D	G
E	G	B	C	D	A	F
C	B	G	F	A	E	D
B	D	A	E	F	G	C
D	F	E	G	B	C	A
F	A	C	D	G	B	E

ขอบเขตที่ 2

E	F	C	G	A	D	B
F	E	D	A	B	G	C
B	C	E	F	G	A	D
C	G	F	B	D	E	A
A	D	B	E	F	C	G
G	B	A	D	C	F	E
D	A	G	C	E	B	F

ขอบเขตที่ 3

รูปที่ 5.2 ตัวอย่างของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 7 x 7 แบบข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

A	H	B	F	E	C	D	G
D	A	E	C	F	B	G	H
H	G	F	E	D	A	B	C
B	C	G	A	H	D	E	F
E	D	H	B	C	G	F	A
C	E	A	D	G	F	H	B
G	F	C	H	B	E	A	D
F	B	D	G	A	H	C	E

ขอบเขตที่ 1

H	G	F	E	D	C	B	A
G	F	E	D	C	B	A	H
F	E	D	C	B	A	H	G
E	D	C	B	A	H	G	F
D	C	B	A	H	G	F	E
C	B	A	H	G	F	E	D
B	A	H	G	F	E	D	C
A	H	G	F	E	D	C	B

ขอบเขตที่ 2

F	H	E	A	D	B	C	G
A	E	D	B	C	G	F	H
B	G	A	C	H	F	D	E
C	B	F	D	G	H	E	A
H	D	B	E	F	A	G	C
G	A	C	F	B	E	H	D
D	F	G	H	E	C	A	B
E	C	H	G	A	D	B	F

ขอบเขตที่ 3

รูปที่ 5.3 ตัวอย่างของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 8 x 8 แบบข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

A	B	C	D	E	F	G	H	I
B	C	E	G	D	I	F	A	H
C	D	F	A	H	G	I	E	B
D	H	A	B	F	E	C	I	G
E	G	B	I	C	H	D	F	A
F	~~I~~	H	E	B	D	A	G	C
G	F	I	C	A	B	H	D	E
H	E	G	F	~~I~~	A	B	C	D
I	A	D	H	G	C	E	B	F

ขอบเขตที่ 1

B	C	D	F	E	A	G	H	I
A	E	F	G	B	C	D	I	H
E	F	I	H	D	~~G~~	A	B	C
F	B	C	I	A	D	H	E	G
C	D	H	B	F	I	E	G	A
D	A	G	~~E~~	C	H	I	F	B
H	I	B	D	G	E	C	A	F
G	H	E	A	I	F	B	C	D
I	G	A	C	H	B	F	D	E

ขอบเขตที่ 2

E	D	A	H	G	B	I	C	F
I	H	B	A	E	G	C	F	D
A	I	E	F	B	H	D	G	C
F	A	C	E	D	I	H	B	G
C	G	F	B	A	D	E	H	I
B	E	G	C	I	F	A	D	H
G	~~C~~	I	D	H	E	~~F~~	A	B
H	F	D	G	C	A	B	I	E
D	B	H	I	F	C	G	E	A

ขอบเขตที่ 3

รูปที่ 5.4 ตัวอย่างของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 9 x 9 แบบข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

อ้างอิงจากสมการที่ (3.2) ถึง (3.5) และ (3.7) ถึง (3.8) ของบทที่ 3 จะได้

$$SS_{Tr} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\lambda) \tag{5.1}$$

$$SS_{Row} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\tau,\lambda) \tag{5.2}$$

$$SS_{Column} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\tau) \tag{5.3}$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - R(\mu,\omega,\tau,\lambda) \tag{5.4}$$

ที่ซึ่ง

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j y_{.j.} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \tag{5.5}$$

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \tag{5.6}$$

5.1 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูป
5.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูป
5.3 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูป
5.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูป
5.5 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูป
5.6 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูป

5.1 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูป

ตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์ ได้แก่

$$y_{ijk} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ijk} \begin{cases} i = 1,2,3,\ldots,5 \\ j = 1,2,3,\ldots,5 \\ k = 1,2,3,\ldots,5 \end{cases} \tag{5.7}$$

เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จะสามารถเขียนสมการปกติของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 ซึ่งค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์และค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังตารางที่ 5.1 และตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.1 สมการปกติของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 2, 3	$\omega_i : K\hat{\mu} + K\hat{\omega}_i + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k = y_{i..}$ เมื่อ $i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1, 2 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\tau_j : K\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i + K\hat{\tau}_j + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k = y_{.j.}$ เมื่อ $j \neq m$ ของขอบเขตที่ 1 และ $j \neq m, m'$ ของขอบเขตที่ 2, 3
	$\lambda_k : K\hat{\mu} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j + K\hat{\lambda}_k = y_{..k}$ เมื่อ $k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1, 2, 3

ตารางที่ 5.2 สมการปกติของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu:(K^2-2)\hat{\mu}+K\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}\hat{\omega}_i+(\mathrm{K}-1)(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+K\sum_{j=1,\mathrm{j}\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+(K-3)\hat{\tau}_m+K\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,c'}^{K}\hat{\lambda}_k+(\mathrm{K}-1)(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=y_{...}$ $\omega_r:(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r+\sum_{j=1,j\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{r..}$ $\omega_{r'}:(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_{r'}+\sum_{j=1,j\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c'}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{r'..}$ $\tau_m:(K-2)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}\hat{\omega}_i+(K-2)\hat{\tau}_m+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,c'}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{.m.}$ $\lambda_c:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+\sum_{j=1,j\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)\hat{\lambda}_c=y_{..c}$ $\lambda_{c'}:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r'}^{K}\hat{\omega}_i+\sum_{j=1,j\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 2	$\mu:(K^2-2)\hat{\mu}+K\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}\hat{\omega}_i+(\mathrm{K}-1)(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+K\sum_{j=1,j\neq m,m'}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)(\hat{\tau}_m+\hat{\tau}_{m'})+K\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,\mathrm{c}'}^{K}\hat{\lambda}_k+(\mathrm{K}-1)(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=y_{...}$ $\omega_r:(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r+\sum_{j=1,j\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{r..}$ $\omega_{r'}:(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_{r'}+\sum_{j=1,j\neq m'}^{K}\hat{\tau}_j+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c'}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{r'..}$ $\tau_m:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+(K-1)\hat{\tau}_m+\sum_{k=1,i\neq c}^{K}\hat{\lambda}_c=y_{.m.}$ $\tau_{m'}:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r'}^{K}\hat{\omega}_i+(K-1)\hat{\tau}_{m'}+\sum_{k=1,i\neq c'}^{K}\hat{\lambda}_{c'}=y_{.m'.}$ $\lambda_c:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+\sum_{j=1,j\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)\hat{\lambda}_c=y_{..c}$ $\lambda_{c'}:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r'}^{K}\hat{\omega}_i+\sum_{j=1,j\neq m'}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu:(K^2-2)\hat{\mu}+K\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+(\mathrm{K}-3)\hat{\omega}_r+K\sum_{j=1,j\neq m,m'}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)(\hat{\tau}_m+\hat{\tau}_{m'})+K\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,c'}^{K}\hat{\lambda}_k+(\mathrm{K}-1)(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=y_{...}$ $\omega_r:(K-2)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\omega}_r+\sum_{j=1,\mathrm{j}\neq m,m'}^{K}\hat{\tau}_j+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,c'}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{\mathrm{r}..}$ $\tau_m:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,\mathrm{i}\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+(K-1)\hat{\tau}_m+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{.m.}$ $\tau_{m'}:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,\mathrm{i}\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+(K-1)\hat{\tau}_{m'}+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c'}^{K}\hat{\lambda}_k=y_{.m'.}$ $\lambda_c:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+\sum_{j=1,i\neq m}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)\hat{\lambda}_c=y_{..c}$ $\lambda_{c'}:(K-1)\hat{\mu}+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i+\sum_{j=1,i\neq m'}^{K}\hat{\tau}_j+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=y_{..c'}$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) $\sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i=0$, $\sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j=0$, $\sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k=0$ ในสมการที่ (3.22) ถึง (3.24) ในบทที่ 3 นั่นคือ เมื่อนำมาแทนค่าในตารางที่ 5.1 และตารางที่ 5.2 จะสามารถลดรูปของสมการได้ดังตารางที่ 5.3 และตารางที่ 5.4

ตารางที่ 5.3 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 5.1 ใหม่ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 2, 3	$\omega_i : K\hat{\mu} + K\hat{\omega}_i = y_{i...}$ เมื่อ $i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1, 2 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\tau_j : K\hat{\mu} + K\hat{\tau}_j = y_{.j.}$ เมื่อ $j \neq m$ ของขอบเขตที่ 1 และ $j \neq m, m'$ ของขอบเขตที่ 2, 3
	$\lambda_k : K\hat{\mu} + K\hat{\lambda}_k = y_{..k}$ เมื่อ $k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1, 2, 3

ตารางที่ 5.4 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 5.2 ใหม่ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu : (K^2-2)\hat{\mu} - (\hat{\omega}_r + \hat{\omega}_{r'}) - 2\hat{\tau}_m - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{...}$ $\omega_r : (K-1)\hat{\mu} + (K-1)\hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_c = y_{r..}$ $\omega_{r'} : (K-1)\hat{\mu} + (K-1)\hat{\omega}_{r'} - \hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_{c'} = y_{r'..}$ $\tau_m : (K-2)\hat{\mu} - (\hat{\omega}_r + \hat{\omega}_{r'}) + (K-2)\hat{\tau}_m - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{.m.}$ $\lambda_c : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m + (K-1)\hat{\lambda}_c = y_{..c}$ $\lambda_{c'} : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_{r'} - \hat{\tau}_m + (K-1)\hat{\lambda}_{c'} = y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 2	$\mu : (K^2-2)\hat{\mu} - (\hat{\omega}_r + \hat{\omega}_{r'}) - (\hat{\tau}_m + \hat{\tau}_{m'}) - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{...}$ $\omega_r : (K-1)\hat{\mu} + (K-1)\hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_c = y_{r..}$ $\omega_{r'} : (K-1)\hat{\mu} + (K-1)\hat{\omega}_{r'} - \hat{\tau}_{m'} - \hat{\lambda}_{c'} = y_{r'..}$ $\tau_m : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_r + (K-1)\hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_c = y_{.m.}$ $\tau_{m'} : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_{r'} + (K-1)\hat{\tau}_{m'} - \hat{\lambda}_{c'} = y_{.m'.}$ $\lambda_c : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m + (K-1)\hat{\lambda}_c = y_{..c}$ $\lambda_{c'} : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_{r'} - \hat{\tau}_{m'} + (K-1)\hat{\lambda}_{c'} = y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu : (K^2-2)\hat{\mu} - 2\hat{\omega}_r - (\hat{\tau}_m + \hat{\tau}_{m'}) - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{...}$ $\omega_r : (K-2)\hat{\mu} + (K-2)\hat{\omega}_r - (\hat{\tau}_m + \hat{\tau}_{m'}) - (\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = y_{r..}$ $\tau_m : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_r + (K-1)\hat{\tau}_m - \hat{\lambda}_c = y_{.m.}$ $\tau_{m'} : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_r + (K-1)\hat{\tau}_{m'} - \hat{\lambda}_{c'} = y_{.m'.}$ $\lambda_c : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_r - \hat{\tau}_m + (K-1)\hat{\lambda}_c = y_{..c}$ $\lambda_{c'} : (K-1)\hat{\mu} - \hat{\omega}_r - \hat{\tau}_{m'} + (K-1)\hat{\lambda}_{c'} = y_{..c'}$

5.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูป

บริบทที่ 5.1 *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ของขอบเขตที่ 1, 2, 3) ของตัวแบบเต็มรูป สามารถคำนวณหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังนี้*

$$\hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{K} - \hat{\mu} \begin{cases} i \neq r, r' & \text{ของขอบเขตที่ 1, 2} \\ i \neq r & \text{ของขอบเขตที่ 3} \end{cases} \tag{5.8}$$

$$\hat{\tau}_j = \frac{y_{.j.}}{K} - \hat{\mu} \begin{cases} j \neq m & \text{ของขอบเขตที่ 1} \\ j \neq m, m' & \text{ของขอบเขตที่ 2, 3} \end{cases} \tag{5.9}$$

$$\hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{K} - \hat{\mu},\ k \neq c, c' \quad \text{ของขอบเขตที่ 1, 2, 3} \tag{5.10}$$

พิสูจน์ ***บริบทที่ 5.1*** จากตารางที่ 5.1 จะได้

$$\omega_i : K\hat{\mu} + K\hat{\omega}_i = y_{i..}$$
$$\tau_j : K\hat{\mu} + K\hat{\tau}_j = y_{.j.}$$
$$\lambda_k : K\hat{\mu} + K\hat{\lambda}_k = y_{..k}$$

ค่า $\hat{\omega}_i$ หาได้จาก

$$K\hat{\mu} + K\hat{\omega}_i = y_{i..}$$
$$\hat{\mu} + \hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{K}$$
$$\hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{K} - \hat{\mu}$$

ค่า $\hat{\tau}_j$ หาได้จาก

$$K\hat{\mu} + K\hat{\tau}_j = y_{.j.}$$
$$\hat{\mu} + \hat{\tau}_j = \frac{y_{.j.}}{K}$$
$$\hat{\tau}_j = \frac{y_{.j.}}{K} - \hat{\mu}$$

ค่า $\hat{\lambda}_k$ หาได้จาก

$$K\hat{\mu} + K\hat{\lambda}_k = y_{..k}$$
$$\hat{\mu} + \hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{K}$$
$$\hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{K} - \hat{\mu}$$

การพิสูจน์บริบทที่ 5.1 ได้พิสูจน์เรียบร้อยแล้ว

บริบทที่ 5.2 *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 2, 3) ของตัวแบบเต็มรูปสามารถคำนวณหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังตารางที่ 5.5*

ตารางที่ 5.5 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K เมื่อค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\hat{\mu} = ((K-4)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + 2y_{.m.} + y_{..c} + y_{..c'})/K(K-2)^2$ $\hat{\omega}_r = (-y_{...} + (K-1)y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c})/K(K-2)$ $\hat{\omega}_{r'} = (-y_{...} + (K-1)y_{r'..} + y_{.m.} + y_{..c'})/K(K-2)$ $\hat{\tau}_m = \frac{y_{r..} + y_{r'..} + (K-2)y_{.m.} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K-4)} - K\hat{\mu}$ $= -\frac{Ky_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'} + K(-y_{r..} - y_{r'..} + 2y_{.m.} - y_{..c} - y_{..c'}) - y_{.m.}(K^2-2)}{K(K-2)^2}$ $\hat{\lambda}_c = (-y_{...} + y_{r..} + y_{.m.} + (K-1)y_{..c})/K(K-2)$ $\hat{\lambda}_{c'} = (-y_{...} + y_{r'..} + y_{.m.} + (K-1)y_{..c'})/K(K-2)$
ขอบเขตที่ 2	$\hat{\mu} = \frac{(K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K^2-3K+4)}$ $\hat{\omega}_r = \frac{(K-2)y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c} - K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}$ $= \frac{(-K^2+4K-3)y_{...} + (K^3-5K^2+9K-7)y_{r..} + (K^2-4K+5)(y_{.m.} + y_{..c}) - (K-1)(y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'})}{K(K^3-6K^2+13K-12)}$ $\hat{\omega}_{r'} = \frac{(K-2)y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'} - K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}$ $= \frac{(-K^2+4K-3)y_{...} + (K^3-5K^2+9K-7)y_{r'..} + (K^2-4K+5)(y_{.m'.} + y_{..c'}) - (K-1)(y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c})}{K(K^3-6K^2+13K-12)}$ $\hat{\tau}_m = \frac{y_{r..} + (K-2)y_{.m.} + y_{..c} - K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}$ $= \frac{(-K^2+4K-3)y_{...} + (K^3-5K^2+9K-7)y_{.m.} + (K^2-4K+5)(y_{r..} + y_{..c}) - (K-1)(y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'})}{K(K^3-6K^2+13K-12)}$ $\hat{\tau}_{m'} = \frac{y_{r'..} + (K-2)y_{.m'.} + y_{..c'} - K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}$ $= \frac{(-K^2+4K-3)y_{...} + (K^3-5K^2+9K-7)y_{.m'.} + (K^2-4K+5)(y_{r'..} + y_{..c'}) - (K-1)(y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c})}{K(K^3-6K^2+13K-12)}$ $\hat{\lambda}_c = \frac{y_{r..} + y_{.m.} + (K-2)y_{..c} - K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}$ $= \frac{(-K^2+4K-3)y_{...} + (K^3-5K^2+9K-7)y_{..c} + (K^2-4K+5)(y_{r..} + y_{.m.}) - (K-1)(y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'})}{K(K^3-6K^2+13K-12)}$ $\hat{\lambda}_{c'} = \frac{y_{r'..} + y_{.m'.} + (K-2)y_{..c'} - K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}$ $= \frac{(-K^2+4K-3)y_{...} + (K^3-5K^2+9K-7)y_{..c'} + (K^2-4K+5)(y_{r'..} + y_{.m'.}) - (K-1)(y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c})}{K(K^3-6K^2+13K-12)}$
ขอบเขตที่ 3	$\hat{\mu} = ((K-4)y_{...} + 2y_{r..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})/K(K-2)^2$ $\hat{\omega}_r = \frac{(K-2)y_{r..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K-4)} - K\hat{\mu}$ $= -\frac{Ky_{...} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'} + K(-y_{.m.} - y_{.m'.} + 2y_{r..} - y_{..c} - y_{..c'}) - y_{r..}(K^2-2)}{K(K-2)^2}$ $\hat{\tau}_m = (-y_{...} + y_{r..} + (K-1)y_{.m.} + y_{..c})/K(K-2)$ $\hat{\tau}_{m'} = (-y_{...} + y_{r..} + (K-1)y_{.m'.} + y_{..c'})/K(K-2)$ $\hat{\lambda}_c = (-y_{...} + y_{r..} + y_{.m.} + (K-1)y_{..c})/K(K-2)$ $\hat{\lambda}_{c'} = (-y_{...} + y_{r..} + y_{.m'.} + (K-1)y_{...c'})/K(K-2)$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 5.4 ของรูปแบบที่ 1, 2, 3 จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ค.

5.3 สมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูป

จากตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์

$$y_{ik} = \mu^R + \omega_i^R + \lambda_k^R + \varepsilon_{ik} \begin{cases} i = 1,2,3,...,K \\ k = 1,2,3,...,K \end{cases} \tag{5.11}$$

และรูปแบบของอิทธิพลตรึง $\sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i^R = 0$ $\sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k^R = 0$ เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จะสามารถเขียนสมการปกติของตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 ซึ่งค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ และค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังตารางที่ 5.6 และตารางที่ 5.7

ตารางที่ 5.6 สมการปกติของตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 2, 3	$\omega_i^R : K\hat{\mu}^R + K\hat{\omega}_i^R + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k^R = y_{i..}$ เมื่อ $i \neq r, r'$ ของขอบเขตที่ 1, 2 และ $i \neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\lambda_k^R : K\hat{\mu}^R + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i^R + K\hat{\lambda}_k^R = y_{..k}$ เมื่อ $k \neq c, c'$ ของขอบเขตที่ 1, 2, 3

ตารางที่ 5.7 สมการปกติของตัวแบบลดรูปของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu^R:(K^2-2)\hat{\mu}^R+K\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}\hat{\omega}_i^R+(\mathrm{K}-1)(\hat{\omega}_r^R+\hat{\omega}_{r'}^R)+K\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,c'}^{K}\hat{\lambda}_k^R+(\mathrm{K}-1)(\hat{\lambda}_c^R+\hat{\lambda}_{c'}^R)=y_{...}$ $\omega_r^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_r^R+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c}^{K}\hat{\lambda}_k^R=y_{r..}$ $\omega_{r'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_{r'}^R+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c'}^{K}\hat{\lambda}_k^R=y_{r'..}$ $\lambda_c^R:(K-1)\hat{\mu}^R+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i^R+(K-1)\hat{\lambda}_c^R=y_{..c}$ $\lambda_{c'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R+\sum_{i=1,i\neq r'}^{K}\hat{\omega}_i^R+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 2	$\mu^R:(K^2-2)\hat{\mu}^R+K\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}\hat{\omega}_i^R+(\mathrm{K}-1)(\hat{\omega}_r^R+\hat{\omega}_{r'}^R)+K\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,\mathrm{c}'}^{K}\hat{\lambda}_k^R+(\mathrm{K}-1)(\hat{\lambda}_c^R+\hat{\lambda}_{c'}^R)=y_{...}$ $\omega_r^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_r^R+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c}^{K}\hat{\lambda}_k^R=y_{r..}$ $\omega_{r'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_{r'}^R+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c'}^{K}\hat{\lambda}_k^R=y_{r'..}$ $\lambda_c^R:(K-1)\hat{\mu}^R+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i^R+(K-1)\hat{\lambda}_c^R=y_{..c}$ $\lambda_{c'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R+\sum_{i=1,i\neq r'}^{K}\hat{\omega}_i^R+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu^R:(K^2-2)\hat{\mu}^R+K\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i^R+(\mathrm{K}-3)\hat{\omega}_r^R+K\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,c'}^{K}\hat{\lambda}_k^R+(\mathrm{K}-1)(\hat{\lambda}_c^R+\hat{\lambda}_{c'}^R)=y_{...}$ $\omega_r^R:(K-2)\hat{\mu}^R+(K-2)\hat{\omega}_r^R+\sum_{k=1,\mathrm{k}\neq c,c'}^{K}\hat{\lambda}_k^R=y_{\mathrm{r}..}$ $\lambda_c^R:(K-1)\hat{\mu}^R+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i^R+(K-1)\hat{\lambda}_c^R=y_{..c}$ $\lambda_{c'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}\hat{\omega}_i^R+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{..c'}$

ตารางที่ 5.8 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 5.6 ใหม่ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 2, 3	$\omega_i^R:K\hat{\mu}^R+K\hat{\omega}_i^R=y_{i..}$ เมื่อ $i\neq r,r'$ ของขอบเขตที่ 1, 2 และ $i\neq r$ ของขอบเขตที่ 3
	$\lambda_k^R:K\hat{\mu}^R+K\hat{\lambda}_k^R=y_{..k}$ เมื่อ $k\neq c,c'$ ของขอบเขตที่ 1, 2, 3

ตารางที่ 5.9 การจัดรูปสมการปกติของตารางที่ 5.7 ใหม่ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1	$\mu^R:(K^2-2)\hat{\mu}^R-(\hat{\omega}_r^R+\hat{\omega}_{r'}^R)-(\hat{\lambda}_c^R+\hat{\lambda}_{c'}^R)=y_{...}$ $\omega_r^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_r^R-\hat{\lambda}_c^R=y_{r..}$ $\omega_{r'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_{r'}^R-\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{r'..}$ $\lambda_c^R:(K-1)\hat{\mu}^R-\hat{\omega}_r^R+(K-1)\hat{\lambda}_c^R=y_{..c}$ $\lambda_{c'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R-\hat{\omega}_{r'}^R+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 2	$\mu^R:(K^2-2)\hat{\mu}^R-(\hat{\omega}_r^R+\hat{\omega}_{r'}^R)-(\hat{\lambda}_c^R+\hat{\lambda}_{c'}^R)=y_{...}$ $\omega_r^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_r^R-\hat{\lambda}_c^R=y_{r..}$ $\omega_{r'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R+(K-1)\hat{\omega}_{r'}^R-\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{r'..}$ $\lambda_c^R:(K-1)\hat{\mu}^R-\hat{\omega}_r^R+(K-1)\hat{\lambda}_c^R=y_{..c}$ $\lambda_{c'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R-\hat{\omega}_{r'}^R+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{..c'}$
ขอบเขตที่ 3	$\mu^R:(K^2-2)\hat{\mu}^R-2\hat{\omega}_r^R-(\hat{\lambda}_c^R+\hat{\lambda}_{c'}^R)=y_{...}$ $\omega_r^R:(K-2)\hat{\mu}^R+(K-2)\hat{\omega}_r^R-(\hat{\lambda}_c^R+\hat{\lambda}_{c'}^R)=y_{r..}$ $\lambda_c^R:(K-1)\hat{\mu}^R-\hat{\omega}_r^R+(K-1)\hat{\lambda}_c^R=y_{..c}$ $\lambda_{c'}^R:(K-1)\hat{\mu}^R-\hat{\omega}_r^R+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R=y_{..c'}$

5.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูป

<u>บริบทที่ 5.3</u> *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 2, 3) ของตัวแบบลดรูปสามารถคำนวณหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายไม่ส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังนี้*

$$\hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{K} - \hat{\mu} \begin{cases} i \neq r, r' & \text{ของขอบเขตที่ 1, 2} \\ i \neq r & \text{ของขอบเขตที่ 3} \end{cases} \tag{5.12}$$

$$\hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{K} - \hat{\mu},\ k \neq c, c' \quad \text{ของขอบเขตที่ 1, 2, 3} \tag{5.13}$$

พิสูจน์ ***<u>บริบทที่ 5.3</u>*** จากตารางที่ 5.1 จะได้

$$\omega_i : K\hat{\mu} + K\hat{\omega}_i = y_{i..}$$

$$\lambda_k : K\hat{\mu} + K\hat{\lambda}_k = y_{..k}$$

ค่า $\hat{\omega}_i$ หาได้จาก

$$K\hat{\mu} + K\hat{\omega}_i = y_{i..}$$

$$\hat{\mu} + \quad \hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{K}$$

$$\hat{\omega}_i = \frac{y_{i..}}{K} - \hat{\mu}$$

ค่า $\hat{\lambda}_k$ หาได้จาก

$$K\hat{\mu} + K\hat{\lambda}_k = y_{..k}$$

$$\hat{\mu} + \quad \hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{K}$$

$$\hat{\lambda}_k = \frac{y_{..k}}{K} - \hat{\mu}$$

การพิสูจน์บริบทที่ 5.3 ได้พิสูจน์เรียบร้อยแล้ว

<u>บริบทที่ 5.4</u> *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 2, 3) ของตัวแบบลดรูปสามารถคำนวณหาการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหายส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์ได้ดังตารางที่ 5.10*

ตารางที่ 5.10 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบลดรูป กรณีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่าส่งผลกระทบต่อพารามิเตอร์

ขอบเขตที่ 1, 2	$\hat{\mu}^R = \frac{(K-2)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K^2-2K+2)}$ $\hat{\omega}_r^R = \frac{(K-1)y_{r..} + y_{..c}}{K(K-2)} - \frac{(K-1)\hat{\mu}^R}{(K-2)}$ $\hat{\omega}_{r'}^R = \frac{(K-1)y_{r'..} + y_{..c'}}{K(K-2)} - \frac{(K-1)\hat{\mu}^R}{(K-2)}$ $\hat{\lambda}_c^R = \frac{y_{r..} + (K-1)y_{..c}}{K(K-2)} - \frac{(K-1)\hat{\mu}^R}{(K-2)}$ $\hat{\lambda}_{c'}^R = \frac{y_{r'..} + (K-1)y_{..c'}}{K(K-2)} - \frac{(K-1)\hat{\mu}^R}{(K-2)}$
ขอบเขตที่ 3	$\hat{\mu}^R = \frac{(K-3)y_{...} + 2y_{r..} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K^2-3K+2)}$ $\hat{\omega}_r^R = -\frac{y_{...} - Ky_{r..} - y_{..c} - y_{..c'}}{K(K-2)}$ $\hat{\lambda}_c^R = -\frac{y_{...} - y_{r..} - Ky_{..c}}{K(K-1)}$ $\hat{\lambda}_{c'}^R = -\frac{y_{...} - y_{r..} - Ky_{..c'}}{K(K-1)}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการของตารางที่ 5.9 ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ฆ.

5.5 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูป

<u>บริบทที่ 5.5</u> *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 2, 3) ของตัวแบบเต็มรูปสามารถคำนวณหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์ แสดงได้ดังตารางที่ 5.11*

ตารางที่ 5.11 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูปของขอบเขตที่ 1, 2, 3

ขอบเขตที่ 1	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\dfrac{\sum_{i=1}^{K}y_{i..}^2+\sum_{j=1}^{K}y_{.j.}^2+\sum_{k=1}^{K}y_{..k}^2}{K}+\dfrac{y_{.m.}^2}{(K-2)}+\dfrac{(A_1)^2+(A_2)^2}{K(K-2)}-\dfrac{(A_1+A_2+2y_{...}-5y_{.m.})^2+2y_{...}(6y_{.m.}-y_{...})}{K(K-2)^2}$
ขอบเขตที่ 2	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\dfrac{\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}^2+\sum_{All\,j}^{K}y_{.j.}^2+\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}^2}{K}+\dfrac{(B_1)^2+(B_2)^2}{K(K-3)}-\dfrac{2\left[(K-3)y_{...}+B_1+B_2\right]^2}{K(K-3)(K^2-3K+4)}$
ขอบเขตที่ 3	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\dfrac{\sum_{i=1}^{K}y_{i..}^2+\sum_{j=1}^{K}y_{.j.}^2+\sum_{k=1}^{K}y_{..k}^2}{K}+\dfrac{y_{r..}^2}{(K-2)}+\dfrac{(C_1)^2+(C_2)^2}{K(K-2)}-\dfrac{(C_1+C_2+2y_{...}-5y_{r..})^2+2y_{...}(6y_{r..}-y_{...})}{K(K-2)^2}$

เมื่อ

ขอบเขตที่ 1 $A_1 = y_{r..}+2y_{.m.}+y_{..c}$

$A_2 = y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c'}$

ขอบเขตที่ 2 $B_1 = y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}$

$B_2 = y_{r'..}+y_{.m'.}+y_{..c'}$

ขอบเขตที่ 3 $C_1 = 2y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}$

$C_2 = 2y_{r..}+y_{.m'.}+y_{..c'}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการบริบทที่ 5.1 และตารางที่ 5.5 ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 นำค่าพารามิเตอร์ไปแทนค่าลงในสมการที่ (5.5) จะสามารถแก้สมการหาสมการถดถอยกำลังสองออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ข. สำหรับขอบเขตที่ 2 และภาคผนวก จ. สำหรับขอบเขตที่ 1, 3

5.6 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูป

บริบทที่ 5.6 *แผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K กรณีมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า (ขอบเขตที่ 1, 2, 3) ของตัวแบบลดรูปสามารถคำนวณหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์ แสดงได้ดังตารางที่ 5.12*

ตารางที่ 5.12 สมการถดถอยกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูปของขอบเขตที่ 1, 2, 3

ขอบเขตที่ 1, 2	$R(\mu,\omega,\lambda)=\dfrac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}+\dfrac{(y_{r..}+y_{..c})^2+(y_{r'..}+y_{..c'})^2}{K(K-2)}-\dfrac{[(K-2)y_{...}+y_{r..}+y_{..c}+y_{r'..}+y_{..c'}]^2}{K(K-2)(K^2-2K+2)}$
ขอบเขตที่ 3	$R(\mu,\omega,\lambda)=\dfrac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}+\dfrac{(y_{r..}+y_{..c})^2+(y_{r..}+y_{..c'})^2}{(K-2)(K-1)}-\dfrac{(y_{..c}-y_{..c'})^2+2y_{...}(2y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'})+y_{...}^2(K-3)}{K(K-2)(K-1)}$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดสมการบริบทที่ 5.3 และตารางที่ 5.10 ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 จะสามารถแก้สมการหาสมการถดถอยกำลังสองออกมาได้ การพิสูจน์ดูได้จากภาคผนวก ค., ฉ. ตามลำดับ

บทที่ 6
บทสรุป

เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหายจะทำให้เกิดแผนการทดลองที่ไม่สมดุล ซึ่งในกรณีของแผนแบบละตินสแควร์ที่มีข้อมูลครบ มีตัวแบบสำเร็จในการคำนวณอยู่แล้ว และการประมาณค่าข้อมูลสูญหายด้วยวิธีประมาณค่าข้อมูลสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุดจะทำให้เกิดความเอนเอียง แต่วิธีตรงไม่ทำให้เกิดความเอนเอียง

ในงานวิจัยนี้จะสนใจแผนแบบละตินสแควร์อันดับ $K \times K$ เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ด้วยวิธีตรง (Exact Approach) โดยจะทำการเขียนสมการปกติของตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป, ประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป ซึ่งค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบแต่ละตัว จะนำไปสู่การหาค่าสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป สุดท้ายจะนำไปสู่การหาค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ได้

แผนแบบละตินสแควร์อันดับ $K \times K$ ที่มีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จะมีทั้งหมด 4 ขอบเขต (ดูภาพรวมได้จากรูปที่ 6.1) ดังนี้

ขอบเขตที่ 1 คนละแถว และคนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์เดียวกันหายไป ดังตารางที่ 1.6 (บทที่ 1)

ขอบเขตที่ 2 คนละแถว และคนละคอลัมน์ โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ดังตารางที่ 1.7 (บทที่ 1)

ขอบเขตที่ 3 แบบแถวเดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ดังตารางที่ 1.8 (บทที่ 1)

ขอบเขตที่ 4 แบบคอลัมน์เดียวกัน โดยที่ทรีตเมนต์ต่างกันหายไป ดังตารางที่ 1.9 (บทที่ 1)

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	...
1	A = ✓	B = ×	C = ✓	D = ✓	... ✓
2	B = ×	C = ✓	D = ✓	E = ✓	... ✓
3	C = ✓	D = ✓	E = ✓	F = ✓	... ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	... ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	... ✓

ก) ขอบเขตที่ 1

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	...
1	A = ✓	B = ✓	C = ✓	D = ✓	... ✓
2	B = ×	C = ✓	D = ✓	E = ✓	... ✓
3	C = ✓	D = ×	E = ✓	F = ✓	... ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	... ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	... ✓

ข) ขอบเขตที่ 2

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	...
1	A = ✓	B = ✓	C = ✓	D = ✓	... ✓
2	B = ×	C = ×	D = ✓	E = ✓	... ✓
3	C = ✓	D = ✓	A = ✓	F = ✓	... ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	... ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	... ✓

ค) ขอบเขตที่ 3

Blocking Variable 1	Blocking Variable 2				
	1	2	3	4	...
1	A = ✓	B = ✓	C = ✓	D = ✓	... ✓
2	B = ×	C = ✓	D = ✓	E = ✓	... ✓
3	C = ×	D = ✓	A = ✓	F = ✓	... ✓
4	D = ✓	E = ✓	F = ✓	G = ✓	... ✓
⋮	✓	✓	✓	✓	... ✓

ง) ขอบเขตที่ 4

รูปที่ 6.1 ขอบเขตของแผนแบบละตินสแควร์

หมายเหตุ ขอบเขตที่ 4 ในงานวิจัยนี้ไม่ได้พิสูจน์ เนื่องจากมีโครงสร้างคล้ายคลึงกับขอบเขตที่ 3

6.1 สรุปผลงานวิจัย

อ้างอิงจากสมการที่ (3.7) และ (3.8) ของบทที่ 3 จะได้

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j y_{.j.} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \quad (6.1)$$

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \hat{\mu}^R y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i^R y_{i..} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k^R y_{..k} \quad (6.2)$$

จะสามารถแสดงขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์, สมการถดถอยผลบวกกำลังสอง และผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ทั้งตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 แสดงได้ดังตารางที่ 6.1

ตารางที่ 6.1 ขั้นตอนการทำงานของแต่ละบท

บทที่	อันดับ	**การประมาณค่าพารามิเตอร์ (Estimated Parameters)**						**สมการถดถอยผลบวกกำลังสอง (Regression Sum of Squares)**						**ผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ (SS_{Tr})**
		ขอบเขตของตัวแบบเต็มรูป (Full Model)			ขอบเขตของตัวแบบลดรูป (Reduced Model)			ขอบเขตของตัวแบบเต็มรูป (Full Model)			ขอบเขตของตัวแบบลดรูป (Reduced Model)			
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	
บทที่ 3	4 x 4	-	✓	-	-	✓	-	-	✓	-	-	✓	-	✓
บทที่ 4	5 x 5	✓	-	✓	✓	-	✓	✓	-	✓	✓	-	✓	-
บทที่ 5	K x K	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	-

จากตารางที่ 6.1 จะสรุปสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์ อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3 เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ของตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป แสดงได้ดังตารางที่ 6.2 และ 6.3 ตามลำดับ

ตารางที่ 6.2 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3, 4 ของตัวแบบเต็มรูป เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

ขอบเขตที่ 1	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{K}y_{i..}^2+\sum_{j=1}^{K}y_{.j.}^2+\sum_{k=1}^{K}y_{..k}^2}{K}+\frac{y_{.m.}^2}{(K-2)}+\frac{(A_1)^2+(A_2)^2}{K(K-2)}-\frac{(A_1+A_2+2y_{...}-5y_{.m.})^2+2y_{...}(6y_{.m.}-y_{...})}{K(K-2)^2}$
ขอบเขตที่ 2	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}^2+\sum_{All\,j}^{K}y_{.j.}^2+\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}^2}{K}+\frac{(B_1)^2+(B_2)^2}{K(K-3)}-\frac{2\left[(K-3)y_{...}+B_1+B_2\right]^2}{K(K-3)(K^2-3K+4)}$
ขอบเขตที่ 3	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{K}y_{i..}^2+\sum_{j=1}^{K}y_{.j.}^2+\sum_{k=1}^{K}y_{..k}^2}{K}+\frac{y_{r..}^2}{(K-2)}+\frac{(C_1)^2+(C_2)^2}{K(K-2)}-\frac{(C_1+C_2+2y_{...}-5y_{r..})^2+2y_{...}(6y_{r..}-y_{...})}{K(K-2)^2}$
ขอบเขตที่ 4	$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{K}y_{i..}^2+\sum_{j=1}^{K}y_{.j.}^2+\sum_{k=1}^{K}y_{..k}^2}{K}+\frac{y_{..c}^2}{(K-2)}+\frac{(D_1)^2+(D_2)^2}{K(K-2)}-\frac{(D_1+D_2+2y_{...}-5y_{..c})^2+2y_{...}(6y_{..c}-y_{...})}{K(K-2)^2}$

เมื่อ

ขอบเขตที่ 1 $A_1 = y_{r..} + 2y_{.m.} + y_{..c}$

$A_2 = y_{r'..} + 2y_{.m.} + y_{..c'}$

ขอบเขตที่ 2 $B_1 = y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c}$

$B_2 = y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'}$

ขอบเขตที่ 3 $C_1 = 2y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c}$

$C_2 = 2y_{r..} + y_{.m'.} + y_{..c'}$

ขอบเขตที่ 4 $D_1 = y_{r..} + y_{.m.} + 2y_{..c}$

$D_2 = y_{r'..} + y_{.m'.} + 2y_{..c}$

จากตารางที่ 6.2 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K สำหรับตัวแบบเต็มรูปของขอบเขตที่ 4 ได้มาจากการปรับตำแหน่งของตัวแปรตามค่าข้อมูลสูญหายของขอบเขตนั้น ซึ่งตัวแบบจะมีความคล้ายคลึงกับขอบเขตที่ 1, 3

ตารางที่ 6.3 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของขอบเขตที่ 1, 2, 3, 4 ของตัวแบบลดรูป เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

ขอบเขตที่ 1, 2	$R(\mu,\omega,\lambda)=\frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}+\frac{\left(y_{r..}+y_{..c}\right)^2+\left(y_{r'..}+y_{..c'}\right)^2}{K(K-2)}-\frac{\left[(K-2)y_{...}+y_{r..}+y_{..c}+y_{r'..}+y_{..c'}\right]^2}{K(K-2)(K^2-2K+2)}$
ขอบเขตที่ 3	$R(\mu,\omega,\lambda)=\frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}+\frac{(y_{r..}+y_{..c})^2+(y_{r..}+y_{..c'})^2}{(K-2)(K-1)}-\frac{(y_{..c}-y_{..c'})^2+2y_{...}(2y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'})+y_{...}^2(K-3)}{K(K-2)(K-1)}$
ขอบเขตที่ 4	$R(\mu,\omega,\lambda)=\frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}+\frac{(y_{r..}+y_{..c})^2+(y_{r'..}+y_{..c})^2}{(K-2)(K-1)}-\frac{(y_{r..}-y_{r'..})^2+2y_{...}(2y_{..c}+y_{r..}+y_{r'..})+y_{...}^2(K-3)}{K(K-2)(K-1)}$

จากตารางที่ 6.3 สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K สำหรับตัวแบบลดรูปของขอบเขตที่ 4 ได้มาจากการปรับตำแหน่งของตัวแปรตามค่าข้อมูลสูญหายของขอบเขตนั้น ซึ่งสูตรจะมีความคล้ายคลึงกับขอบเขตที่ 3

6.2 อุปสรรค และปัญหา

จากการทำงานวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยมีอุปสรรค และปัญหาได้แก่

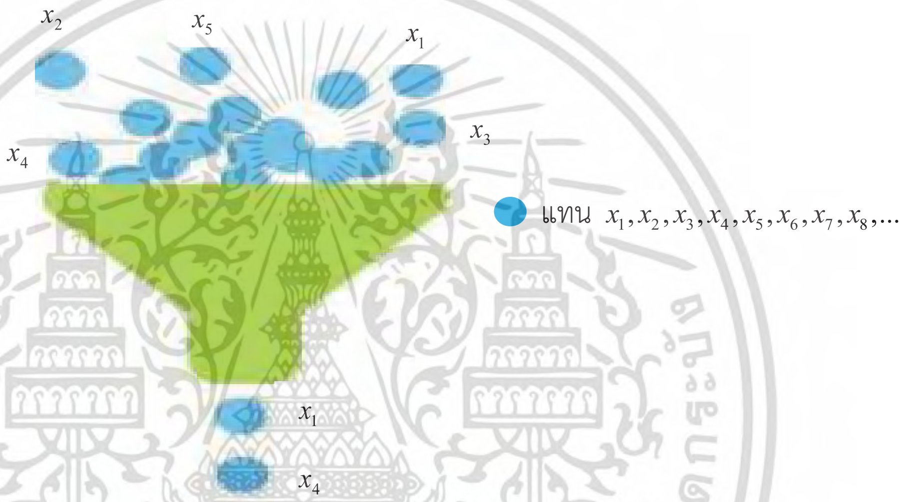
(1) การประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 3 ขอบเขต ของอันดับ 4 x 4, 5 x 5 และ K x K จะต้องมีการประมาณค่าพารามิเตอร์ใหม่ทุกครั้ง

(2) การลดรูปสมการของสมการถดถอยกำลังสองของทั้ง 3 ขอบเขต ใช้เวลานานในการจัดรูปให้กะทัดรัด (แบบพร้อมใช้งาน) และดูง่ายต่อการนำไปใช้งาน

(3) การจัดตัวแบบผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ให้กะทัดรัด (แบบพร้อมใช้งาน) นั้นใช้เวลานานในการจัดรูปแบบตัวแบบ

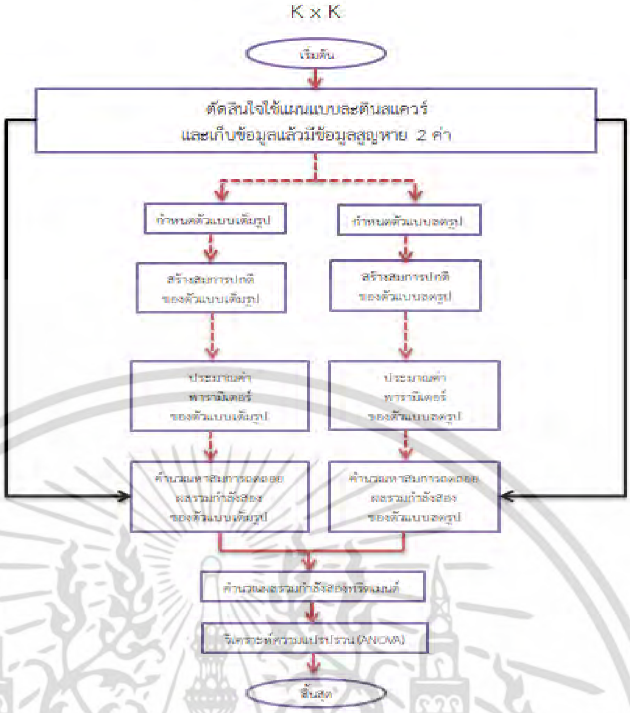
6.3 ประโยชน์ที่ได้รับ และการนำไปใช้ในโรงงาน

(1) สามารถนำงานวิจัยนี้ไปใช้ได้กับทุกอุตสาหกรรมที่มีการออกแบบการทดลองแบบแผนแบบละตินสแควร์ซึ่งมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จากตารางที่ 1.5 ในบทที่ 1 ตารางวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบทั่วไป (Classical ANOVA) ไม่สามารถใช้กับกรณีที่มีค่าข้อมูลสูญหายได้ ซึ่งงานวิจัยนี้ได้นำเสนอวิธีตรงขึ้นมา การออกแบบการทดลองมักถูกนำไปใช้ในการออกแบบกระบวนการ, ปรับปรุงของเสีย เทคนิคการออกแบบการทดลองถูกนำไปใช้ใน ซิกส์ซิกมา (Six Sigma), ลีน (Lean) เพื่อใช้ในการคัดเลือกปัจจัยที่ส่งผลต่อเอ้าต์พุต (Output) ว่าปัจจัยใดส่งผลต่อเอ้าต์พุตมากที่สุด แสดงได้ดังรูปที่ 6.2



รูปที่ 6.2 การคัดเลือกปัจจัยที่ส่งผลต่อเอ้าต์พุต (Output)

ดังนั้นถ้าโรงงานอุตสาหกรรมขนาดใหญ่มีการออกแบบการทดลองโดยสนใจ 3 ปัจจัยซึ่งประกอบด้วย 2 ปัจจัยรบกวนและ 1 ปัจจัยที่สนใจศึกษาผลกระทบ เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า จะสามารถนำงานวิจัยนี้ไปใช้ได้ทันที



รูปที่ 6.3 การลดขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีตรงที่ได้จากงานวิจัยนี้

(2) งานวิจัยนี้จะช่วยลดขั้นตอนการเขียนสมการปกติ, การประมาณค่าพารามิเตอร์ของทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป ซึ่งจะสามารถนำสูตรจากงานวิจัยไปหาสมการถดถอยผลบวกกำลังสองและนำไปสู่การหาผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ได้ทันทีตามรูปที่ 6.3 ถ้าใช้แผนแบบละตินสแควร์กรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า

(3) เมื่อโรงงานต่างๆ ได้ทำการออกแบบการทดลองและทำการทดลอง เมื่อเกิดข้อมูลสูญหายจะสามารถประยุกต์ใช้กระบวนการของวิธีตรงในงานวิจัยฉบับนี้ไปแก้ปัญหาได้

Ajantha และ Bhatra (2015) ตัวอย่างการนำไปใช้ในโรงงานผลิตแผ่นดิสไดร์ฟแห่งหนึ่ง ดังตารางที่ 6.4 ตารางนี้สนใจศึกษาผลกระทบของสารตั้งต้น 4 ชนิด และมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ซึ่ง $y_{cmr} = y_{212}$ จะสมมติให้เป็นคอลัมน์ที่ 2 ทรีตเมนต์ที่ 1 และแถวที่ 2 ค่าข้อมูลที่สองที่สูญหายคือ $y_{c'm'r'} = y_{334}$ จะสมมติให้เป็นคอลัมน์ที่ 3 ทรีตเมนต์ที่ 3 และแถวที่ 4

ตารางที่ 6.4 การศึกษาผลกระทบของสารตั้งต้น 4 ชนิด กับ 4 เครื่องจักรและ 4 กระบวนการ (Ajantha และ Bhatra, 2015)

Machines	Operators				$y_{i..}$
	1	2	3	4	
1	A = 8	C = 11	D = 2	B = 8	$y_{1..} = 29$
2	C = 7	~~A = -~~	B = 2	D = 4	$y_{2..} = 13$
3	D = 3	B = 9	A = 7	~~C = -~~	$y_{3..} = 19$
4	B = 4	D = 5	C = 9	A = 3	$y_{4..} = 21$
$y_{..k}$	$y_{..1} = 22$	$y_{..2} = 25$	$y_{..3} = 20$	$y_{..4} = 15$	$y_{...} = 82$
$y_{.j.}$	$y_{.1.} = 18$	$y_{.2.} = 23$	$y_{.3.} = 27$	$y_{.4.} = 14$	

จากตารางที่ 6.4 จะแสดงตัวอย่างของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ในโรงงานอุตสาหกรรม และจะทำการนำสูตรจากงานวิจัยมาหาค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ และค่าต่างๆ ได้ดังตารางที่ 6.5

อ้างอิงจากสมการที่ (3.2) ถึง (3.8) ของบทที่ 3 จะได้

$$SS_{Tr} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\lambda) \quad (6.3)$$

$$SS_{Row} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\tau,\lambda) \quad (6.4)$$

$$SS_{Column} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\tau) \quad (6.5)$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - R(\mu,\omega,\tau,\lambda) \quad (6.6)$$

$$SS_T = SS_{Tr} + SS_{Row} + SS_{Column} + SS_E = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N^2} \quad (6.7)$$

จากแผนแบบละตินสแควร์ ผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์ (SS_{Tr}) ดังสมการที่ (6.3) สามารถหาได้จากสมการที่ (6.8) และ (6.9) คือ

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu} y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j y_{.j.} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \quad (6.8)$$

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \hat{\mu} y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \quad (6.9)$$

จากสมการที่ 3.82 ถึงสมการที่ 3.87 เมื่อแทนค่าจะสามารถหาค่าพารามิเตอร์ของตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป ซึ่งจะนำไปสู่การหาค่าสมการถดถอยผลบวกกำลังสองของตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูป ซึ่งเมื่อแทนค่าในสมการที่ 6.8 จะได้ค่าสมการถดถอยผลบวกกำลังสองดังนี้

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=5302.19$$

จากสมการที่ 6.6 จะสามารถหาค่า SS_E ได้จากสูตรของ

$$SS_E=\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}y_{ijk}^2-R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$$

จะสามารถแสดงการหาค่า SS_E ได้ดังนี้

$$21.81=\begin{bmatrix}(29)^2+(13)^2+(19)^2+(21)^2+(18)^2+(23)^2+(27)^2+(14)^2\\+(22)^2+(25)^2+(20)^2+(15)^2\end{bmatrix}-R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$$

$$21.81=5324-R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$$

และ $R(\mu,\omega,\lambda)$ ได้ดังนี้

$$54.89=5302.19-R(\mu,\omega,\lambda)$$

และ
$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\lambda)&=5302.19-54.89\\&=5247.3\end{aligned}$$

อ้างอิงตารางที่ 1.3 ในการหาค่าผลบวกกำลังสองของทรีตเมนต์, ค่าผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน และค่าทดสอบแบบเอฟ โดยค่าที่คำนวณได้แสดงได้ดังตารางที่ 6.5

ตารางที่ 6.5 ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนของวิธีตรง

	วิธีตรง
SS_{Tr}	54.89 *(df = 3)*
SS_E	21.81 *(df = 4)*
MS_{Tr}	18.296
MS_E	5.453
F_{test}	3.36

6.4 ข้อแนะนำ

งานวิจัยนี้จะสนใจแค่รูปแบบการวิจัยละตินสแควร์เมื่อมีค่าข้อมูลสูญหาย 2 ค่า ดังนั้นผู้วิจัยสามารถนำแนวทางนี้ไปประยุกต์ใช้กับแผนแบบการทดลองแผนแบบอื่นๆ โดยมีค่าข้อมูลสูญหายจำนวนต่างๆ ได้ เช่น แผนแบบการทดลองแกรโคร-ละติน, แผนแบบบล็อกสมบูรณ์เชิงสุ่ม เป็นต้น ซึ่งสามารถพัฒนาตัวแบบของตัวแบบได้ทั้งตัวแบบเต็มรูป และตัวแบบลดรูปต่อไป

เอกสารอ้างอิง

จริยา แสงสุวรรณ. 2551. 'การศึกษาเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าสูญหายในการวิเคราะห์การถดถอยพหุคูณ.' วิทยานิพนธ์มหาบัณฑิต มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

จิราวัลย์ จิตรถเวช. 2552. 'การวางแผนและการวิเคราะห์การทดลอง.' กรุงเทพฯ : โครงการส่งเสริมและพัฒนาเอกสารวิชาการ สถาบันบัณฑิตพัฒนบริหารศาสตร์.

สำนักงานราชบัณฑิตยสภา. 2558. 'พจนานุกรมศัพท์สถิติศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสภา.' กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์คณะรัฐมนตรีและราชกิจจานุเบกษา.

อัจฉริยา ปราบอริพ่าย. 2561. 'บทที่ 5 การออกแบการทดลองแบบละตินสแคว.' [Online]. Available : http://pirun.ku.ac.th/~faasatp/734462/data/chapter5.pdf.

Ahmed, A. (2016) 'Missing values estimation comparison in split-plot Design', *International Journal of Computer and Information Technology*. Vol. 5, No. 3, pp.337-344.

Ai, M., Li, K., Liu, S., Lin, D.K. (2013) 'Balanced incomplete latin square designs', *Journal of Statistical Planning and Inference*, Vol. 143.9, pp.1575-1582.

Ajantha, R., Bhatra, N. (2015) 'Baysian estimation for missing values in latin square design', *International Journal of Mathematics and Statistics Invention*, pp.06-08.

Allan, F.E., Wishart, J. (1930) 'A method of estimating the yield of a missing plot in field experimental work', *The Journal of Agricultural Science,* Vol. 20, No. 3, pp.399-406.

Anderson, R.L. (1946) 'Missing–plot techniques', *International Biometric Society*, Vol. 3, pp.41-47.

Appa, G., Euler, R., Kouvela, A., Magos, D., Mourtos, I. (2016) 'On the completability of incomplete orthogonal latin rectangles', *Discrete Mathematics,* Vol. 339, pp.1771-1794.

Baird, H.R., Kramer, C.Y. (1960) 'Analysis of variance of a balanced incomplete block design with missing observations', *Applied Statistics*, pp.189-198.

Charles, M., Judd, H., Mcclelland, S., Ryan, C. (2008) 'Data Analysis a Model Comparison Approach', 2 New York, John Wiley and Sons.

Charyulu, N., Dharamyadav, T. (2013) 'Estimation of missing observation in randamized block design', *International Journal of Technology and Engineering Science,* Vol. 1.6, pp.618-621.

Cochran, G., Cox, M. (1992) 'Experimental Designs', 2nd ed. New York, Wiley.

เอกสารอ้างอิง (ต่อ)

Dempster, A.P., Laird, N.M., Rubin, D.B. (1977) 'Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm', *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Methodological),* Vol. 39, No. 1, pp.1-38.

De Lury, D.B. (1946) 'The analysis of latin squares when some observations are missing', *Journal of the American Statistical Association,* Vol. 41, No. 235, pp.378 -389.

Fisher, R. A., Yates, F. (1963) 'Statistical Tables for Biological', *Agricultural and Medical Research*, 6th ed. Oliver & Boyd, Edinburgh

Healy, M., Westmacott, M. (1956) 'Missing values in experiments analysed on automatic computers', *Applied Statistics,* pp.203-206.

Jarrett, G. (1978) 'The analysis of designed experiments with missing observations', *Applied Statistics,* Vol. 27, No. 1, pp.38-46.

Kempthorn., O. (1952) 'The Design and Analysis of Experiments', 1st ed. *Wiley & Oxford.*

Kramer, C.Y., Glass, S. (1960) 'Analysis of variance of a latin square design with missing observations', *Applied Statistics,* pp.43-50.

Mansson, R., Prescott, P. (2002) 'Missing observations in youden square designs', *Computational Statistics & Data Analysis,* Vol. 40, pp.329-338.

Montgomery, D.C. (2013) 'Design and Analysis of Experiments', *John Wiley & Sons.*

Ott, R. Longnecker, M. *'An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis',* 6th ed. Cengage Learning.

Rangaswamy, R. (1995) 'A Text Book of Agricultural Statistics', *New Age International.*

Rubin, D.B. (1972) 'A non - iterative algorithm for least squares estimation of missing values in any analysis of variance design', *Applied Statistics,* Vol. 21, No. 2, pp.136-141.

Sirikasemsuk, K. (2016) 'One missing value problem in latin square design of any order regression sum of squares' *Proceedings of the Joint 8th International Conference on Soft Computing and Intelligent Systems and 17th International Symposium on Advanced Intelligent Systems (SCIS & ISIS2016)* pp.142-147.

เอกสารอ้างอิง (ต่อ)

Sirikasemsuk, K. Leerojanaprapa, K. (2017) 'One missing value problem in latin square design of any order: exact analysis of variance', *Cogent Engineering*, Vol. 4, 1411222.

Subraman, J. (1993) 'Non – iterative least squares estimation of missing values in hyper –graeco - latin square designs', *Biom*, pp.465-470.

Wilkinson, G.N. (1957) 'The analysis of covariance with incomplete data', *International Biometric Society (Special Issue on the analysis of Covariance),* pp.363-372.

Yates, F. (1933) 'The analysis of replicated experiments when the field results are incomplete', *Empire Journal of Experimental Agriculture,* pp.129-142.

Yates, F. (1936) 'Incomplete randomized blocks', *Annals of Eugenics,* Vol. 7, No. 2, pp.121-140.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก. การประมาณค่าพารามิเตอร์อันดับ 4x 4 ของตัวแบบเต็มรูป ของแผนแบบละตินสแควร์สำหรับขอบเขตที่ 2 (การพิสูจน์บริบทที่ 3.1)

จากตารางที่ 3.1 สามารถเขียนสมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบเต็มรูป ดังนี้

$$\hat{\mu}: 14\hat{\mu} - (\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3) - (\hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_4) - (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) = y_{...} \quad (ก1)$$

$$\hat{\omega}_1 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 = y_{1..} \quad (ก2)$$

$$\hat{\omega}_2 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 - \hat{\tau}_2 - \hat{\lambda}_1 = y_{2..} \quad (ก3)$$

$$\hat{\omega}_3 : 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 - \hat{\tau}_4 - \hat{\lambda}_2 = y_{3..} \quad (ก4)$$

$$\hat{\omega}_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 = y_{4..} \quad (ก5)$$

$$\hat{\tau}_1 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\tau}_1 = y_{.1.} \quad (ก6)$$

$$\hat{\tau}_2 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 + 3\hat{\tau}_2 - \hat{\lambda}_1 = y_{.2.} \quad (ก7)$$

$$\hat{\tau}_3 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\tau}_3 = y_{.3.} \quad (ก8)$$

$$\hat{\tau}_4 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 + 3\hat{\tau}_4 - \hat{\lambda}_2 = y_{.4.} \quad (ก9)$$

$$\hat{\lambda}_1 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 - \hat{\tau}_2 + 3\hat{\lambda}_1 = y_{..1} \quad (ก10)$$

$$\hat{\lambda}_2 : 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 - \hat{\tau}_4 + 3\hat{\lambda}_2 = y_{..2} \quad (ก11)$$

$$\hat{\lambda}_3 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_3 = y_{..3} \quad (ก12)$$

$$\hat{\lambda}_4 : 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_4 = y_{..4} \quad (ก13)$$

-หาค่า $\hat{\mu}$

ผลรวมสมการที่ (ก3), (ก7) และ (ก10) ได้ดังสมการที่ (ก14)

$$3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 - \hat{\tau}_2 - \hat{\lambda}_1 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 + 3\hat{\tau}_2 - \hat{\lambda}_1 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 - \hat{\tau}_2 + 3\hat{\lambda}_1 = y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1}$$

$$9\hat{\mu} + \hat{\omega}_2 + \hat{\tau}_2 + \hat{\lambda}_1 = y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1} \quad (ก14)$$

ผลรวมสมการที่ (ก2), (ก5), (ก6), (ก8), (ก12) และ (ก13) ได้ดังสมการที่ (ก15)

$$4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\tau}_1 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\tau}_3 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_3 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_4 = y_{1..} + y_{4..} + y_{.1.} + y_{.3.} + y_{..3} + y_{..4}$$

$$8\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 + 4\hat{\omega}_4 + 8\hat{\mu} + 4\hat{\tau}_1 + 4\hat{\tau}_3 + 8\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_3 + 4\hat{\lambda}_4 = y_{1..} + y_{4..} + y_{.1.} + y_{.3.} + y_{..3} + y_{..4} \quad (ก15)$$

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ก15) ได้ดังสมการที่ (ก16)

$$2\hat{\mu} + \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_4 + 2\hat{\mu} + \hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_3 + 2\hat{\mu} + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 = \frac{y_{1..} + y_{4..} + y_{.1.} + y_{.3.} + y_{..3} + y_{..4}}{4} \quad (ก16)$$

ผลรวมสมการที่ (ก4), (ก9) และ (ก11) ได้ดังสมการที่ (ก17)

$$3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 - \hat{\tau}_4 - \hat{\lambda}_2 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 + 3\hat{\tau}_4 - \hat{\lambda}_2 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 - \hat{\tau}_4 + 3\hat{\lambda}_2 = y_{3..} + y_{.4.} + y_{..2}$$

$$9\hat{\mu} + \hat{\omega}_3 + \hat{\tau}_4 + \hat{\lambda}_2 = y_{3..} + y_{.4.} + y_{..2} \quad (ก17)$$

ผลรวมสมการที่ (ก14), (ก17) ได้ดังสมการที่ (ก18)

$$9\hat{\mu}+\hat{\omega}_2+\hat{\tau}_2+\hat{\lambda}_1+9\hat{\mu}+\hat{\omega}_3+\hat{\tau}_4+\hat{\lambda}_2=y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}+y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2}$$

$$18\hat{\mu}+\hat{\omega}_2+\hat{\omega}_3+\hat{\tau}_2++\hat{\tau}_4+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2=y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}+y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2} \quad (ก18)$$

ผลรวมสมการที่ (ก16), (ก18) ได้ดังสมการที่ (ก19)

$$2\hat{\mu}+\hat{\omega}_1+\hat{\omega}_4+2\hat{\mu}+\hat{\tau}_1+\hat{\tau}_3+2\hat{\mu}+\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4+18\hat{\mu}+\hat{\omega}_2+\hat{\omega}_3+\hat{\tau}_2++\hat{\tau}_4+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2$$
$$=\frac{y_{1..}+y_{4..}+y_{.1.}+y_{.3.}+y_{..3}+y_{..4}}{4}+y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}+y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2}$$

$$24\hat{\mu}+(\hat{\omega}_1+\hat{\omega}_2+\hat{\omega}_3+\hat{\omega}_4)+(\hat{\tau}_1+\hat{\tau}_2+\hat{\tau}_3+\hat{\tau}_4)+(\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4)$$
$$=\frac{y_{1..}+y_{4..}+y_{.1.}+y_{.3.}+y_{..3}+y_{..4}}{4}+y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}+y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2} \quad (ก19)$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Models) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{4}\hat{\omega}_i=0 \quad (ก20)$$

$$\sum_{j=1}^{4}\hat{\tau}_j=0 \quad (ก21)$$

$$\sum_{k=1}^{4}\hat{\lambda}_k=0 \quad (ก22)$$

เมื่อ $y_{...}=y_{1..}+y_{2..}+y_{3..}+y_{4..}$

จะได้ $y_{...}=y_{.1.}+y_{.2.}+y_{.3.}+y_{.4.}$ (ก23)

จะได้ $y_{...}=y_{..1}+y_{..2}+y_{..3}+y_{..4}$ (ก24)

จะได้ $y_{..3}+y_{..4}=y_{...}-y_{..1}-y_{..2}$ (ก25)

เมื่อนำมาสมการที่ (ก23) ถึง (ก25) มาแทนค่าในสมการที่ (ก19) ได้ดังสมการที่ (ก26)

$$24\hat{\mu}=\frac{y_{...}-y_{2..}+y_{3..}+y_{...}-y_{.2.}-y_{.4.}+y_{...}-y_{..1}-y_{..2}}{4}+y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}+y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2} \quad (ก26)$$

$$24\hat{\mu}=\frac{3y_{...}-y_{2..}-y_{3..}-y_{.2.}-y_{.4.}-y_{..1}-y_{..2}}{4}+y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}+y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2}$$

$$24\hat{\mu}=\frac{(3y_{...}-y_{2..}-y_{3..}-y_{.2.}-y_{.4.}-y_{..1}-y_{..2})+4(y_{2..}+y_{.2.}+y_{..1}+y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2})}{4}$$

$$24\hat{\mu}=\frac{(3y_{...}+3y_{2..}+3y_{3..}+3y_{.2.}+3y_{.4.}+3y_{..1}+3y_{..2})}{4}$$

ดังนั้น $96\hat{\mu}=3y_{...}+3y_{2..}+3y_{3..}+3y_{.2.}+3y_{.4.}+3y_{..1}+3y_{..2}$ (ก27)

นำ 3 หารตลอดสมการที่ (ก27) ได้ดังสมการที่ (ก28)

$$\hat{\mu} = \frac{y_{...} + y_{2..} + y_{3..} + y_{.2.} + y_{.4.} + y_{..1} + y_{..2}}{32} \quad (ก28)$$

-หาค่า $\hat{\omega}_1$ อ้างอิงจากสมการที่ (ก2)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ก2) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu} + \hat{\omega}_1 = \frac{y_{1..}}{4}$$

ดังนั้น $\hat{\omega}_1 = \frac{y_{1..}}{4} - \hat{\mu}$ (ก29)

-หาค่า $\hat{\omega}_2$

ผลบวกของสมการที่ (ก7) และ(ก10) ได้ดังสมการที่ (ก30)

$$3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 + 3\hat{\tau}_2 - \hat{\lambda}_1 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 - \hat{\tau}_2 + 3\hat{\lambda}_1 = y_{.2.} + y_{..1}$$

$$6\hat{\mu} - 2\hat{\omega}_2 + 2\hat{\tau}_2 + 2\hat{\lambda}_1 = y_{.2.} + y_{..1} \quad (ก30)$$

นำ 2 มาคูณสมการที่ (ก3) ได้สมการที่ (ก31)

$$6\hat{\mu} + 6\hat{\omega}_2 - 2\hat{\tau}_2 - 2\hat{\lambda}_1 = 2y_{2..} \quad (ก31)$$

ผลบวกของสมการที่ (ก30) และ(ก31) จะได้ดังนี้

$$12\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_2 = 2y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1}$$

$$4\hat{\omega}_2 = 2y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1} - 12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $\hat{\omega}_2 = \frac{2y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1}}{4} - 3\hat{\mu}$ (ก32)

-หาค่า $\hat{\omega}_3$

ผลบวกของสมการที่ (ก9) และ(ก11) จะได้ดังนี้

$$3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 + 3\hat{\tau}_4 - \hat{\lambda}_2 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 - \hat{\tau}_4 + 3\hat{\lambda}_2 = y_{.4.} + y_{..2}$$

$$6\hat{\mu} - 2\hat{\omega}_3 + 2\hat{\tau}_4 + 2\hat{\lambda}_2 = y_{.4.} + y_{..2} \quad (ก33)$$

นำ 2 มาคูณสมการที่ (ก4) ได้ดังสมการที่ (ก34)

$$6\hat{\mu} + 6\hat{\omega}_3 - 2\hat{\tau}_4 - 2\hat{\lambda}_2 = 2y_{3..} \quad (ก34)$$

ผลบวกของสมการที่ (ก33) และ(ก34) จะได้ดังนี้

$$12\hat{\mu}+4\hat{\omega}_3 = y_{.4.}+y_{..2}+2y_{3..}$$

$$4\hat{\omega}_3 = y_{.4.}+y_{..2}+2y_{3..}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $$\hat{\omega}_3 = \frac{2y_{3..}+y_{.4.}+y_{..2}}{4}-3\hat{\mu} \quad (ก35)$$

-หาค่า $\hat{\omega}_4$ อ้างอิงจากสมการที่ (ก5)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ก5) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\omega}_4 = \frac{y_{4..}}{4}$$

ดังนั้น $$\hat{\omega}_4 = \frac{y_{4..}}{4}-\hat{\mu} \quad (ก36)$$

-หาค่า $\hat{\tau}_1$ อ้างอิงจากสมการที่ (ก6)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ก6) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\tau}_1 = \frac{y_{.1.}}{4}$$

ดังนั้น $$\hat{\tau}_1 = \frac{y_{.1.}}{4}-\hat{\mu} \quad (ก37)$$

-หาค่า $\hat{\tau}_2$

ผลบวกของสมการที่ (ก3) และ(ก10) ได้ดังสมการที่ (ก38)

$$3\hat{\mu}+3\hat{\omega}_2-\hat{\tau}_2-\hat{\lambda}_1+3\hat{\mu}-\hat{\omega}_2-\hat{\tau}_2+3\hat{\lambda}_1 = y_{2..}+y_{..1}$$

$$6\hat{\mu}+2\hat{\omega}_2-2\hat{\tau}_2+2\hat{\lambda}_1 = y_{2..}+y_{..1} \quad (ก38)$$

นำ 2 มาคูณสมการที่ (ก7) ได้ดังสมการที่ (ก39)

$$6\hat{\mu}-2\hat{\omega}_2+6\hat{\tau}_2-2\hat{\lambda}_1 = 2y_{.2.} \quad (ก39)$$

ผลบวกของสมการที่ (ก38) และ(ก39) จะได้ดังนี้

$$12\hat{\mu}+4\hat{\tau}_2 = y_{2..}+y_{..1}+2y_{.2.}$$

$$4\hat{\tau}_2 = y_{2..}+y_{..1}+2y_{.2.}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $$\hat{\tau}_2 = \frac{y_{2..}+2y_{.2.}+y_{..1}}{4}-3\hat{\mu} \quad (ก40)$$

-หาค่า $\hat{\tau}_3$ อ้างอิงจากสมการที่ (ก8)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ก8) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\tau}_3=\frac{y_{.3.}}{4}$$

ดังนั้น $\hat{\tau}_3=\frac{y_{.3.}}{4}-\hat{\mu}$ (ก41)

-หาค่า $\hat{\tau}_4$

ผลบวกของสมการที่ (ก4) และ(ก11) ได้ดังสมการที่ (ก42)

$$3\hat{\mu}+3\hat{\omega}_3-\hat{\tau}_4-\hat{\lambda}_2+3\hat{\mu}-\hat{\omega}_3-\hat{\tau}_4+3\hat{\lambda}_2=y_{3..}+y_{..2}$$

$$6\hat{\mu}+2\hat{\omega}_3-2\hat{\tau}_4+2\hat{\lambda}_2=y_{3..}+y_{..2} \quad \text{(ก42)}$$

นำ 2 มาคูณสมการที่ (ก9) ได้ดังสมการที่ (ก43)

$$6\hat{\mu}-2\hat{\omega}_3+6\hat{\tau}_4-2\hat{\lambda}_2=2y_{.4.} \quad \text{(ก43)}$$

ผลบวกของสมการที่ (ก42) และ(ก43) จะได้ดังนี้

$$12\hat{\mu}+4\hat{\tau}_4=y_{3..}+y_{..2}+2y_{.4.}$$

$$4\hat{\tau}_4=y_{3..}+y_{..2}+2y_{.4.}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $\hat{\tau}_4=\frac{y_{3..}+2y_{.4.}+y_{..2}}{4}-3\hat{\mu}$ (ก44)

-หาค่า $\hat{\lambda}_1$

ผลบวกของสมการที่ (ก3) และ (ก7) ได้ดังสมการที่ (ก45)

$$3\hat{\mu}+3\hat{\omega}_2-\hat{\tau}_2-\hat{\lambda}_1+3\hat{\mu}-\hat{\omega}_2+3\hat{\tau}_2-\hat{\lambda}_1=y_{2..}+y_{.2.}$$

$$6\hat{\mu}+2\hat{\omega}_2-2\hat{\tau}_2-2\hat{\lambda}_1=y_{2..}+y_{.2.} \quad \text{(ก45)}$$

นำ 2 มาคูณสมการที่ (ก10) ได้ดังสมการที่ (ก46)

$$6\hat{\mu}-2\hat{\omega}_2-2\hat{\tau}_2+6\hat{\lambda}_1=2y_{..1} \quad \text{(ก46)}$$

ผลบวกของสมการที่ (ก45) และ(ก46) จะได้ดังนี้

$$12\hat{\mu}+4\hat{\lambda}_1=y_{2..}+y_{.2.}+2y_{..1}$$

$$4\hat{\lambda}_1=y_{2..}+y_{.2.}+2y_{..1}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $\hat{\lambda}_1=\frac{y_{2..}+y_{.2.}+2y_{..1}}{4}-3\hat{\mu}$ (ก47)

-หาค่า $\hat{\lambda}_2$

ผลบวกของสมการที่ (ก4) และ (ก9) ได้ดังสมการที่ (ก48)

$$3\hat{\mu}+3\hat{\omega}_3-\hat{\tau}_4-\hat{\lambda}_2+3\hat{\mu}-\hat{\omega}_3+3\hat{\tau}_4-\hat{\lambda}_2=y_{3..}+y_{.4.}$$

$$6\hat{\mu}+2\hat{\omega}_3+2\hat{\tau}_4-2\hat{\lambda}_2=y_{3..}+y_{.4.} \tag{ก48}$$

นำ 2 มาคูณสมการที่ (ก11) ได้ดังสมการที่ (ก49)

$$6\hat{\mu}-2\hat{\omega}_3-2\hat{\tau}_4+6\hat{\lambda}_2=2y_{..2} \tag{ก49}$$

ผลบวกของสมการที่ (ก48) และ(ก49) จะได้ดังนี้

$$12\hat{\mu}+4\hat{\lambda}_2=y_{3..}+y_{.4.}+2y_{..2}$$

$$4\hat{\lambda}_2=y_{3..}+y_{.4.}+2y_{..2}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_2=\frac{y_{3..}+y_{.4.}+2y_{..2}}{4}-3\hat{\mu} \tag{ก50}$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_3$ อ้างอิงจากสมการที่ (ก12)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ก12) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\lambda}_3=\frac{y_{..3}}{4}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_3=\frac{y_{..3}}{4}-\hat{\mu} \tag{ก51}$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_4$ อ้างอิงจากสมการที่ (ก13)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ก13) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\lambda}_4=\frac{y_{..4}}{4}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_4=\frac{y_{..4}}{4}-\hat{\mu} \tag{ก52}$$

การพิสูจน์บริบทที่ 3.1 เสร็จสิ้น

ภาคผนวก ข. การประมาณค่าพารามิเตอร์ของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบลดรูปของขอบเขตที่ 2 (การพิสูจน์บริบทที่ 3.2)

จากตารางที่ 3.1 สามารถเขียนสมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของตัวแบบลดรูปได้ดังนี้

$$\hat{\mu}: 14\hat{\mu} - (\hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3) - (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2) = y_{...} \quad \text{(ข1)}$$

$$\hat{\omega}_1: 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 = y_{1..} \quad \text{(ข2)}$$

$$\hat{\omega}_2: 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 - \hat{\lambda}_1 = y_{2..} \quad \text{(ข3)}$$

$$\hat{\omega}_3: 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 - \hat{\lambda}_2 = y_{3..} \quad \text{(ข4)}$$

$$\hat{\omega}_4: 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 = y_{4..} \quad \text{(ข5)}$$

$$\hat{\lambda}_1: 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 + 3\hat{\lambda}_1 = y_{..1} \quad \text{(ข6)}$$

$$\hat{\lambda}_2: 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 + 3\hat{\lambda}_2 = y_{..2} \quad \text{(ข7)}$$

$$\hat{\lambda}_3: 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_3 = y_{..3} \quad \text{(ข8)}$$

$$\hat{\lambda}_4: 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_4 = y_{..4} \quad \text{(ข9)}$$

-หาค่า $\hat{\mu}$

ผลบวกของสมการที่ (ข2), (ข5), (ข8) และ (ข9) ได้ดังสมการที่ (ข10)

$$4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_3 + 4\hat{\mu} + 4\hat{\lambda}_4 = y_{1..} + y_{4..} + y_{..3} + y_{..4} \quad \text{(ข10)}$$

ผลบวกของสมการที่ (ข3) และ (ข6) ได้ดังสมการที่ (ข11)

$$3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 - \hat{\lambda}_1 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_2 + 3\hat{\lambda}_1 = y_{2..} + y_{..1}$$

$$6\hat{\mu} + 2\hat{\omega}_2 + 2\hat{\lambda}_1 = y_{2..} + y_{..1} \quad \text{(ข11)}$$

ผลบวกของสมการที่ (ข4) และ (ข7) ได้ดังสมการที่ (ข12)

$$3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 - \hat{\lambda}_2 + 3\hat{\mu} - \hat{\omega}_3 + 3\hat{\lambda}_2 = y_{3..} + y_{..2}$$

$$6\hat{\mu} + 2\hat{\omega}_3 + 2\hat{\lambda}_2 = y_{3..} + y_{..1} \quad \text{(ข12)}$$

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ข10) ได้ดังสมการที่ (ข13)

$$\hat{\mu} + \hat{\omega}_1 + \hat{\mu} + \hat{\omega}_4 + \hat{\mu} + \hat{\lambda}_3 + \hat{\mu} + \hat{\lambda}_4 = \frac{y_{1..} + y_{4..} + y_{..3} + y_{..4}}{4}$$

$$4\hat{\mu} + \hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_4 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4 = \frac{y_{1..} + y_{4..} + y_{..3} + y_{..4}}{4} \quad \text{(ข13)}$$

นำ 2 มาหารตลอดสมการที่ (ข11) ได้ดังสมการที่ (ข14)

$$3\hat{\mu} + \hat{\omega}_2 + \hat{\lambda}_1 = \frac{y_{2..} + y_{..1}}{2} \quad \text{(ข14)}$$

นำ 2 มาหารตลอดสมการที่ (ข12) ได้ดังสมการที่ (ข15)

$$3\hat{\mu} + \hat{\omega}_3 + \hat{\lambda}_2 = \frac{y_{3..} + y_{..1}}{2} \quad \text{(ข15)}$$

ผลรวมของสมการที่ (ข13), (ข14) และ (ข15) ได้ดังสมการที่ (ข16)

$$4\hat{\mu}+\hat{\omega}_1+\hat{\omega}_4+\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4+3\hat{\mu}+\hat{\omega}_2+\hat{\lambda}_1+3\hat{\mu}+\hat{\omega}_3+\hat{\lambda}_2=\frac{y_{1..}+y_{4..}+y_{..3}+y_{..4}}{4}+\frac{y_{2..}+y_{..1}}{2}+\frac{y_{3..}+y_{..1}}{2}$$

$$10\hat{\mu}+\hat{\omega}_1+\hat{\omega}_2+\hat{\omega}_3+\hat{\omega}_4+\hat{\lambda}_1+\hat{\lambda}_2+\hat{\lambda}_3+\hat{\lambda}_4=\frac{y_{1..}+y_{4..}+y_{..3}+y_{..4}}{4}+\frac{y_{2..}+y_{..1}}{2}+\frac{y_{3..}+y_{..1}}{2} \quad (ข16)$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{4}\hat{\omega}_i=0 \quad (ข17)$$

$$\sum_{k=1}^{4}\hat{\lambda}_k=0 \quad (ข18)$$

และ $y_{...}=y_{1..}+y_{2..}+y_{3..}+y_{4..}$

จะได้ $y_{...}=y_{.1.}+y_{.2.}+y_{.3.}+y_{.4.}$ (ข19)

จะได้ $y_{..3}+y_{..4}=y_{...}-y_{..1}-y_{..2}$ (ข20)

เมื่อนำมาสมการที่ (ข19) และ (ข20) มาแทนค่าในสมการที่ (ข16) ได้ดังสมการที่ (ข21)

$$10\hat{\mu}=\frac{y_{...}-y_{2..}-y_{3..}+y_{...}-y_{..1}-y_{..2}}{4}+\frac{y_{2..}+y_{..1}+y_{3..}+y_{..2}}{2} \quad (ข21)$$

$$10\hat{\mu}=\frac{2y_{...}-y_{2..}-y_{3..}-y_{..1}-y_{..2}+2(y_{2..}+y_{..1}+y_{3..}+y_{..2})}{4}$$

$$10\hat{\mu}=\frac{2y_{...}+y_{2..}+y_{3..}+y_{..1}+y_{..2}}{4}$$

$$\hat{\mu}=\frac{2y_{...}+y_{2..}+y_{3..}+y_{..1}+y_{..2}}{40} \quad (ข23)$$

-หาค่า $\hat{\omega}_1$ อ้างอิงสมการที่ (ข2)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ข2) ได้ดังสมการที่ (ข24)

$$\hat{\mu}+\hat{\omega}_1=\frac{y_{1..}}{4}$$

ดังนั้น $\hat{\omega}_1=\frac{y_{1..}}{4}-\hat{\mu}$ (ข24)

-หาค่า $\hat{\omega}_2$

นำ 3 มาคูณสมการที่ (ข3) ได้ดังสมการที่ (ข25)

$$9\hat{\mu}+9\hat{\omega}_2-3\hat{\lambda}_1=3y_{2..} \tag{ข25}$$

ผลลบของสมการที่ (ข25) และ (ข6) จะได้ดังนี้

$$9\hat{\mu}+9\hat{\omega}_2-3\hat{\lambda}_1+(3\hat{\mu}-\hat{\omega}_2+3\hat{\lambda}_1)=3y_{2..}+y_{..1}$$

$$12\hat{\mu}+8\hat{\omega}_2=3y_{2..}+y_{..1}$$

$$8\hat{\omega}_2=3y_{2..}+y_{..1}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $$\hat{\omega}_2=\frac{3y_{2..}+y_{..1}}{8}-\frac{3\hat{\mu}}{2} \tag{ข26}$$

-หาค่า $\hat{\omega}_3$

นำ 3 มาคูณสมการที่ (ข4) ได้ดังสมการที่ (ข27)

$$9\hat{\mu}+9\hat{\omega}_3-3\hat{\lambda}_2=3y_{3..} \tag{ข27}$$

ผลบวกของสมการที่ (ข27) และ (ข7) จะได้ดังนี้

$$9\hat{\mu}+9\hat{\omega}_3-3\hat{\lambda}_2+(3\hat{\mu}-\hat{\omega}_3+3\hat{\lambda}_2)=3y_{3..}+y_{..2}$$

$$12\hat{\mu}+8\hat{\omega}_3=3y_{3..}+y_{..2}$$

$$8\hat{\omega}_3=3y_{3..}+y_{..2}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $$\hat{\omega}_3=\frac{3y_{3..}+y_{..2}}{8}-\frac{3\hat{\mu}}{2} \tag{ข28}$$

-หาค่า $\hat{\omega}_4$ อ้างอิงสมการที่ (ข5)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ข5) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\omega}_4=\frac{y_{4..}}{4}$$

ดังนั้น $$\hat{\omega}_4=\frac{y_{4..}}{4}-\hat{\mu} \tag{ข29}$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_1$

นำ 3 มาคูณสมการที่ (ข6) ได้ดังสมการที่ (ข30)

$$9\hat{\mu}-3\hat{\omega}_2+9\hat{\lambda}_1=3y_{..1} \qquad (ข30)$$

ผลลบของสมการที่ (ข30) และ (ข3) จะได้ดังนี้

$$9\hat{\mu}-3\hat{\omega}_2+9\hat{\lambda}_1+(3\hat{\mu}+3\hat{\omega}_2-\hat{\lambda}_1)=3y_{..1}+y_{2..}$$

$$12\hat{\mu}+8\hat{\lambda}_1=3y_{..1}+y_{2..}$$

$$8\hat{\lambda}_1=3y_{..1}+y_{2..}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_1=\frac{y_{2..}+3y_{..1}}{8}-\frac{3\hat{\mu}}{2} \qquad (ข31)$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_2$

นำ 3 มาคูณสมการที่ (ข7) ได้ดังสมการที่ (ข32)

$$9\hat{\mu}-3\hat{\omega}_3+9\hat{\lambda}_2=3y_{..2} \qquad (ข32)$$

ผลลบของสมการที่ (ข32) และ (ข4) จะได้ดังนี้

$$9\hat{\mu}-3\hat{\omega}_3+9\hat{\lambda}_2+(3\hat{\mu}+3\hat{\omega}_3-\hat{\lambda}_2)=3y_{..2}+y_{3..}$$

$$12\hat{\mu}+8\hat{\lambda}_2=3y_{..2}+y_{3..}$$

$$8\hat{\lambda}_2=3y_{..2}+y_{3..}-12\hat{\mu}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_2=\frac{y_{3..}+3y_{..2}}{8}-\frac{3\hat{\mu}}{2} \qquad (ข33)$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_3$ อ้างอิงจากสมาการที่ (ข8)

นำ 4 มาหารตลอดสมการที่ (ข8) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\lambda}_3=\frac{y_{..3}}{4}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_3=\frac{y_{..3}}{4}-\hat{\mu} \qquad (ข34)$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_4$ อ้างอิงจากสมการที่ (ข9)

นำ 4 มาหารสมการที่ (ข9) จะได้ดังนี้

$$\hat{\mu}+\hat{\lambda}_4=\frac{y_{..4}}{4}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_4=\frac{y_{..4}}{4}-\hat{\mu} \qquad (ข35)$$

การพิสูจน์บริบทที่ 3.2 เสร็จสิ้น

ภาคผนวก ข. สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูปสำหรับขอบเขตที่ 2 (การพิสูจน์บริบทที่ 5.5)

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{All\,i}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,j}^{K}(\hat{\tau}_j y_{.j.})+\sum_{All\,k}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k}) \qquad (ข1)$$

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\hat{\mu}y_{...}&+\sum_{All\,i,i\neq r,r'}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,j,j\neq m,m'}^{K}(\hat{\tau}_j y_{.j.})+\sum_{All\,k,k\neq c,c'}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k})\\&+\hat{\omega}_r y_{r..}+\hat{\omega}_{r'}y_{r'..}+\hat{\tau}_m y_{.m.}+\hat{\tau}_{m'}y_{.m'.}+\hat{\lambda}_c y_{..c}+\hat{\lambda}_{c'}y_{..c'}\end{aligned} \qquad (ข2)$$

จากสมการที่ (ข2) เมื่อทำการแทนค่าพารามิเตอร์จะได้ดังสมการที่ (ข3)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}(\frac{y_{i..}}{K}-\hat{\mu})y_{i..}+\left(\frac{(K-2)y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}\right)y_{r..}+\left(\frac{(K-2)y_{r'..}+y_{.m'.}+y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}\right)y_{r'..}\\&+\sum_{j=1,j\neq m,m'}^{K}(\frac{y_{.j.}}{K}-\hat{\mu})y_{.j.}+\left(\frac{y_{r..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}\right)y_{.m.}+\left(\frac{y_{r'..}+(K-2)y_{.m'.}+y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}\right)y_{.m'.}\\&+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}(\frac{y_{..k}}{K}-\hat{\mu})y_{..k}+\left(\frac{y_{r..}+y_{.m.}+(K-2)y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}\right)y_{..c}+\left(\frac{y_{r'..}+y_{.m'.}+(K-2)y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)}\right)y_{..c'}\\&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}(\frac{y_{i..}^2}{K}-\hat{\mu}y_{i..})+\left(\frac{(K-2)y_{r..}^2+y_{r..}y_{.m.}+y_{r..}y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}y_{r..}}{K(K-3)}\right)+\left(\frac{(K-2)y_{r'..}^2+y_{r'..}y_{.m'.}+y_{r'..}y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}y_{r'..}}{K(K-3)}\right)\\&+\sum_{j=1,j\neq m,m'}^{K}(\frac{y_{.j.}^2}{K}-\hat{\mu}y_{.j.})+\left(\frac{y_{r..}y_{.m.}+(K-2)y_{.m.}^2+y_{.m.}y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}y_{.m.}}{K(K-3)}\right)+\left(\frac{y_{r'..}y_{.m'.}+(K-2)y_{.m'.}^2+y_{.m'.}y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}y_{.m'.}}{K(K-3)}\right)\\&+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}(\frac{y_{..k}^2}{K}-\hat{\mu}y_{..k})+\left(\frac{y_{r..}y_{..c}+y_{.m.}y_{..c}+(K-2)y_{..c}^2-K(K-1)\hat{\mu}y_{..c}}{K(K-3)}\right)+\left(\frac{y_{r'..}y_{..c'}+y_{.m'.}y_{..c'}+(K-2)y_{..c'}^2-K(K-1)\hat{\mu}y_{..c'}}{K(K-3)}\right)\end{aligned} \qquad (ข3)$$

จากสมการที่ (ข3) จะทำการปรับค่าของพจน์ที่มีสัญลักษณ์ของผลบวกด้วยการเพิ่มพจน์

$$\begin{aligned}&(\hat{\mu}y_{r..}-\hat{\mu}y_{r..})+(\hat{\mu}y_{r'..}-\hat{\mu}y_{r'..})+(\hat{\mu}y_{.m.}-\hat{\mu}y_{.m.})+(\hat{\mu}y_{.m'.}-\hat{\mu}y_{.m'.})+(\hat{\mu}y_{..c}-\hat{\mu}y_{..c})+(\hat{\mu}y_{..c'}-\hat{\mu}y_{..c'})\\&+\left(\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r..}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{.m.}^2}{K}-\frac{y_{.m.}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{.m'.}^2}{K}-\frac{y_{.m'.}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c'}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}\right)\end{aligned} \qquad (ข4)$$

จะได้ดังสมการที่ (ข5)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\frac{\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}^2}{K}-\mu\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}+\frac{\sum_{All\,j}^{K}y_{.j.}^2}{K}-\mu\sum_{All\,j}^{K}y_{.j.}+\frac{\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}^2}{K}-\mu\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}-\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{.m.}^2}{K}-\frac{y_{.m'.}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}\\&+\left(\frac{(K-2)y_{r..}^2+y_{r..}y_{.m.}+y_{r..}y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}y_{r..}}{K(K-3)}\right)+\left(\frac{(K-2)y_{r'..}^2+y_{r'..}y_{.m'.}+y_{r'..}y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}y_{r'..}}{K(K-3)}\right)\\&+\left(\frac{y_{r..}y_{.m.}+(K-2)y_{.m.}^2+y_{.m.}y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}y_{.m.}}{K(K-3)}\right)+\left(\frac{y_{r'..}y_{.m'.}+(K-2)y_{.m'.}^2+y_{.m'.}y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}y_{.m'.}}{K(K-3)}\right)\\&+\left(\frac{y_{r..}y_{..c}+y_{.m.}y_{..c}+(K-2)y_{..c}^2-K(K-1)\hat{\mu}y_{..c}}{K(K-3)}\right)+\left(\frac{y_{r'..}y_{..c'}+y_{.m'.}y_{..c'}+(K-2)y_{..c'}^2-K(K-1)\hat{\mu}y_{..c'}}{K(K-3)}\right)\\&+\hat{\mu}(y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{.m'.}+y_{..c}+y_{..c'})\end{aligned} \qquad (ข5)$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{K} y_{i..} = y_{...} \tag{ข6}$$

$$\sum_{j=1}^{K} y_{.j.} = y_{...} \tag{ข7}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{..k} = y_{...} \tag{ข8}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (ข6) ถึง (ข8) จะแสดงได้ดังสมการที่ (ข9)

$$\begin{aligned}
R(\mu,\omega,\tau,\lambda) &= \frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum_{All\,j}^{K} y_{.j.}^2 + \sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} - \frac{y_{r..}^2}{K} - \frac{y_{r'..}^2}{K} - \frac{y_{.m.}^2}{K} - \frac{y_{.m'.}^2}{K} - \frac{y_{..c}^2}{K} - \frac{y_{..c'}^2}{K} \\
&+ \left(\frac{(K-2)y_{r..}^2 + y_{r..}y_{.m.} + y_{r..}y_{..c} - K(K-1)\hat{\mu} y_{r..}}{K(K-3)} \right) + \left(\frac{(K-2)y_{r'..}^2 + y_{r'..}y_{.m'.} + y_{r'..}y_{..c'} - K(K-1)\hat{\mu} y_{r'..}}{K(K-3)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{.m.} + (K-2)y_{.m.}^2 + y_{.m.}y_{..c} - K(K-1)\hat{\mu} y_{.m.}}{K(K-3)} \right) + \left(\frac{y_{r'..}y_{.m'.} + (K-2)y_{.m'.}^2 + y_{.m'.}y_{..c'} - K(K-1)\hat{\mu} y_{.m'.}}{K(K-3)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{..c} + y_{.m.}y_{..c} + (K-2)y_{..c}^2 - K(K-1)\hat{\mu} y_{..c}}{K(K-3)} \right) + \left(\frac{y_{r'..}y_{..c'} + y_{.m'.}y_{..c'} + (K-2)y_{..c'}^2 - K(K-1)\hat{\mu} y_{..c'}}{K(K-3)} \right) \\
&+ \hat{\mu}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'} - 2y_{...})
\end{aligned} \tag{ข9}$$

แทนค่า $\hat{\mu} = \frac{(K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K^2-3K+4)}$ แล้วแก้สมการใหม่ จะแสดงได้ดังสมการที่ (ข10)

$$\begin{aligned}
R(\mu,\omega,\tau,\lambda) &= \frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum_{All\,j}^{K} y_{.j.}^2 + \sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} - \frac{y_{r..}^2}{K} - \frac{y_{r'..}^2}{K} - \frac{y_{.m.}^2}{K} - \frac{y_{.m'.}^2}{K} - \frac{y_{..c}^2}{K} - \frac{y_{..c'}^2}{K} \\
&+ \left(\frac{(K-2)y_{r..}^2 + y_{r..}y_{.m.} + y_{r..}y_{..c} - K(K-1)\hat{\mu} y_{r..}}{K(K-3)} \right) + \left(\frac{(K-2)y_{r'..}^2 + y_{r'..}y_{.m'.} + y_{r'..}y_{..c'} - K(K-1)\hat{\mu} y_{r'..}}{K(K-3)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{.m.} + (K-2)y_{.m.}^2 + y_{.m.}y_{..c} - K(K-1)\hat{\mu} y_{.m.}}{K(K-3)} \right) + \left(\frac{y_{r'..}y_{.m'.} + (K-2)y_{.m'.}^2 + y_{.m'.}y_{..c'} - K(K-1)\hat{\mu} y_{.m'.}}{K(K-3)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{..c} + y_{.m.}y_{..c} + (K-2)y_{..c}^2 - K(K-1)\hat{\mu} y_{..c}}{K(K-3)} \right) + \left(\frac{y_{r'..}y_{..c'} + y_{.m'.}y_{..c'} + (K-2)y_{..c'}^2 - K(K-1)\hat{\mu} y_{..c'}}{K(K-3)} \right) \\
&+ \hat{\mu}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'} - 2y_{...})
\end{aligned} \tag{ข10}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^{2} + \sum_{All\,j}^{K} y_{.j.}^{2} + \sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^{2}}{K} - \frac{y_{r..}^{2}}{K} - \frac{y_{r'..}^{2}}{K} - \frac{y_{.m.}^{2}}{K} - \frac{y_{.m'.}^{2}}{K} - \frac{y_{..c}^{2}}{K} - \frac{y_{..c'}^{2}}{K} \\
&+ \left(\frac{(K-2)y_{r..}^{2} + y_{r..}y_{.m.} + y_{r..}y_{..c} - K(K-1)((K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})y_{r..}}{K(K-3)K(K^{2}-3K+4)} \right) \\
&+ \left(\frac{(K-2)y_{r'..}^{2} + y_{r'..}y_{.m'.} + y_{r'..}y_{..c'} - K(K-1)((K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})y_{r'..}}{K(K-3)K(K^{2}-3K+4)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{.m.} + (K-2)y_{.m.}^{2} + y_{.m.}y_{..c} - K(K-1)((K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})y_{.m.}}{K(K-3)K(K^{2}-3K+4)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r'..}y_{.m'.} + (K-2)y_{.m'.}^{2} + y_{.m'.}y_{..c'} - K(K-1)((K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})y_{.m'.}}{K(K-3)K(K^{2}-3K+4)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{..c} + y_{.m.}y_{..c} + (K-2)y_{..c}^{2} - K(K-1)((K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})y_{..c}}{K(K-3)K(K^{2}-3K+4)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r'..}y_{..c'} + y_{.m'.}y_{..c'} + (K-2)y_{..c'}^{2} - K(K-1)((K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})y_{..c'}}{K(K-3)K(K^{2}-3K+4)} \right) \\
&+ \frac{((K-3)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'})}{K(K^{2}-3K+4)}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{.m'.} + y_{..c} + y_{..c'} - 2y_{...})
\end{aligned}
$$

$$
R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^{2} + \sum_{All\,j}^{K} y_{.j.}^{2} + \sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^{2}}{K} + \frac{(B_{1})^{2} + (B_{2})^{2}}{K(K-3)} - \frac{2\left[(K-3)y_{...} + B_{1} + B_{2}\right]^{2}}{K(K-3)(K^{2}-3K+4)} \qquad (ข11)
$$

ขอบเขตที่ 2 $\quad B_{1} = y_{r..} + y_{.m.} + y_{..c}$

$\quad B_{2} = y_{r'..} + y_{.m'.} + y_{..c'}$

การพิสูจน์บริบทที่ 5.5 เสร็จสิ้น

ภาคผนวก ค. สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูปสำหรับขอบเขตที่ 1, 2 (การพิสูจน์บริบทที่ 5.6)

$$R(\mu,\omega,\lambda)=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{All\,i}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,k}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k}) \tag{ค1}$$

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\lambda)&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{All\,i,i\neq r,r'}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,k,k\neq c,c'}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k})\\&\quad+\hat{\omega}_r y_{r..}+\hat{\omega}_{r'}y_{r'..}+\hat{\lambda}_c y_{..c}+\hat{\lambda}_{c'}y_{..c'}\end{aligned} \tag{ค2}$$

จากสมการที่ (ค2) เมื่อทำการแทนค่าพารามิเตอร์จะได้ดังสมการที่ (ค3)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}(\frac{y_{i..}}{K}-\hat{\mu})y_{i..}+\left(\frac{(K-1)y_{r..}+y_{..c}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}}{(K-2)}\right)y_{r..}+\left(\frac{(K-1)y_{r'..}+y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}}{(K-2)}\right)y_{r'..}\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}(\frac{y_{..k}}{K}-\hat{\mu})y_{..k}+\left(\frac{y_{r..}+(K-1)y_{..c}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}}{(K-2)}\right)y_{..c}+\left(\frac{y_{r'..}+(K-1)y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}}{(K-2)}\right)y_{..c'}\\&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}(\frac{y_{i..}^2}{K}-\hat{\mu}y_{i..})+\left(\frac{(K-1)y_{r..}^2+y_{r..}y_{..c}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}y_{r..}}{(K-2)}\right)+\left(\frac{(K-1)y_{r'..}^2+y_{r'..}y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}y_{r'..}}{(K-2)}\right)\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}(\frac{y_{..k}^2}{K}-\hat{\mu}y_{..k})+\left(\frac{y_{r..}y_{..c}+(K-1)y_{..c}^2}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}y_{..c}}{(K-2)}\right)+\left(\frac{y_{r'..}y_{..c'}+(K-1)y_{..c'}^2}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}y_{..c'}}{(K-2)}\right)\end{aligned} \tag{ค3}$$

จากสมการที่ (ค4) จะทำการปรับค่าของพจน์ที่มีสัญลักษณ์ของผลบวกด้วยการเพิ่มพจน์

$$\begin{aligned}&(\hat{\mu}y_{r..}-\hat{\mu}y_{r..})+(\hat{\mu}y_{r'..}-\hat{\mu}y_{r'..})+(\hat{\mu}y_{..c}-\hat{\mu}y_{..c})+(\hat{\mu}y_{..c'}-\hat{\mu}y_{..c'})\\&+\left(\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r..}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c'}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}\right)\end{aligned} \tag{ค4}$$

จะได้ดังสมการที่ (ค5)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\frac{\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}^2}{K}-\hat{\mu}\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}-\hat{\mu}\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}-\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}+\frac{(K-1)(y_{r..}^2+y_{r'..}^2+y_{..c}^2+y_{..c'}^2)}{K(K-2)}\\&\quad+\left(\frac{2y_{r..}y_{..c}+2y_{r'..}y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}(y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'})}{K-2}\right)+\hat{\mu}(y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}+y_{...})\end{aligned} \tag{ค5}$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{K}y_{i..}=y_{...} \tag{ค6}$$

$$\sum_{j=1}^{K}y_{.j.}=y_{...} \tag{ค7}$$

$$\sum_{k=1}^{K}y_{..k}=y_{...} \tag{ค8}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (ค6) ถึง (ค8) จะแสดงได้ดังสมการที่ (ค9)

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}-\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}+\frac{(K-1)(y_{r..}^2+y_{r'..}^2+y_{..c}^2+y_{..c'}^2)}{K(K-2)}$$
$$+\left(\frac{2y_{r..}y_{..c}+2y_{r'..}y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}(y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'})}{K-2}\right)+\hat{\mu}(y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}-y_{...}) \quad \text{(ค9)}$$

แทนค่า $\hat{\mu}=\frac{(K-2)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K^2-2K+2)}$ แล้วแก้สมการใหม่ จะแสดงได้ดังสมการที่ (ค10)

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}-\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}+\frac{(K-1)(y_{r..}^2+y_{r'..}^2+y_{..c}^2+y_{..c'}^2)}{K(K-2)}$$
$$+\left(\frac{2y_{r..}y_{..c}+2y_{r'..}y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)((K-2)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'})(y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'})}{(K-2)K(K^2-2K+2)}\right)$$
$$+\left(\frac{(K-2)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K^2-2K+2)}\right)(y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}-y_{...})$$

$$R(\mu,\omega,\lambda)=\frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K}+\frac{(y_{r..}+y_{..c})^2+(y_{r'..}+y_{..c'})^2}{K(K-2)}-\frac{[(K-2)y_{...}+y_{r..}+y_{..c}+y_{r'..}+y_{..c'}]^2}{K(K-2)(K^2-2K+2)} \quad \text{(ค10)}$$

การพิสูจน์บริบทที่ 5.6 เสร็จสิ้น

ภาคผนวก ฅ. การประมาณค่าพารามิเตอร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูป สำหรับขอบเขตที่ 1, 2, 3 (การพิสูจน์บริบทที่ 5.2)

จากตารางที่ 1.6 ถึง 1.9 สามารถเขียนสมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบเต็มรูปของขอบเขตที่ 1 ได้ดังนี้

$$\mu:(K^2-2)\hat{\mu}-(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})-2\hat{\tau}_m-(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=y_{...} \quad (ค1)$$

$$\omega_r:(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r-\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_c=y_{r..} \quad (ค2)$$

$$\omega_{r'}:(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_{r'}-\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_{c'}=y_{r'..} \quad (ค3)$$

$$\tau_m:(K-2)\hat{\mu}-(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+(K-2)\hat{\tau}_m-(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=y_{.m.} \quad (ค4)$$

$$\lambda_c:(K-1)\hat{\mu}-\hat{\omega}_r-\hat{\tau}_m+(K-1)\hat{\lambda}_c=y_{..c} \quad (ค5)$$

$$\lambda_{c'}:(K-1)\hat{\mu}-\hat{\omega}_{r'}-\hat{\tau}_m+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=y_{..c'} \quad (ค6)$$

ค่า $\hat{\mu}$ หาได้จาก

$$4(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r-\hat{\omega}_r+(K-1)\hat{\omega}_{r'}-\hat{\omega}_{r'}-4\hat{\tau}_m+(K-1)\hat{\lambda}_c-\hat{\lambda}_c+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}-\hat{\lambda}_{c'}=y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$4(K-1)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\omega}_r+(K-2)\hat{\omega}_{r'}-4\hat{\tau}_m+(K-2)\hat{\lambda}_c+(K-2)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$2(K-2)\hat{\mu}-2(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+2(K-2)\hat{\tau}_m-2(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=2y_{.m.}$$

$$6K\hat{\mu}-8\hat{\mu}+(K-4)\hat{\omega}_r+(K-4)\hat{\omega}_{r'}+2K\hat{\tau}_m-8\hat{\tau}_m+(K-4)\hat{\lambda}_c+(K-4)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r..}+y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$(K-4)(K^2-2)\hat{\mu}-(K-4)(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})-(K-4)2\hat{\tau}_m-(K-4)(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=(K-4)y_{...}$$

$$6K\hat{\mu}-8\hat{\mu}+(K-4)(K^2-2)\hat{\mu}=(K-4)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$6K\hat{\mu}-8\hat{\mu}+(K^3-4K^2-2K+8)\hat{\mu}=(K-4)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$(K^3-4K^2-4K)\hat{\mu}=(K-4)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$\hat{\mu}=\frac{(K-4)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K-2)^2} \quad (ค7)$$

ค่า $\hat{\omega}_r$ หาได้จาก

$$-(K^2-2)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\mu}+(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})-(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+2\hat{\tau}_m+(K-2)\hat{\tau}_m+(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})-(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=-y_{...}+y_{.m.}$$

$$(K-1)\hat{\mu}-\hat{\omega}_r-\hat{\tau}_m+(K-1)\hat{\lambda}_c=y_{..c}$$

$$-(K^2-2K+1)\hat{\mu}-\hat{\omega}_r+(K-1)\hat{\tau}_m+(K-1)\hat{\lambda}_c=-y_{...}+y_{.m.}+y_{..c}$$
$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}+(K-1)(K-1)\hat{\omega}_r-(K-1)\hat{\tau}_m-(K-1)\hat{\lambda}_c=(K-1)y_{r..}$$
$$(K^2-2K)\hat{\omega}_r=-y_{...}+(K-1)y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}$$

$$\hat{\omega}_r=\frac{-y_{...}+(K-1)y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}}{K(K-2)} \qquad (ค8)$$

ค่า $\hat{\omega}_{r'}$ หาได้จาก

$$-(K^2-2)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\mu}+(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})-(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+2\hat{\tau}_m+(K-2)\hat{\tau}_m+(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})-(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=-y_{...}+y_{.m.}$$
$$(K-1)\hat{\mu}-\hat{\omega}_{r'}-\hat{\tau}_m+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=y_{..c'}$$

$$-K^2\hat{\mu}+K\hat{\mu}+K\hat{\mu}-\hat{\mu}-\hat{\omega}_{r'}+K\hat{\tau}_m-\hat{\tau}_m+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=-y_{...}+y_{.m.}+y_{..c'}$$
$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}+(K-1)(K-1)\hat{\omega}_{r'}-(K-1)\hat{\tau}_m-(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=(K-1)y_{r'..}$$
$$(K^2-2K)\hat{\omega}_{r'}=-y_{...}+(K-1)y_{r'..}+y_{.m.}+y_{..c'}$$
$$\hat{\omega}_{r'}=\frac{-y_{...}+(K-1)y_{r'..}+y_{.m.}+y_{..c'}}{K(K-2)} \qquad (ค9)$$

ค่า $\hat{\tau}_m$ หาได้จาก

$$4(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r+(K-1)\hat{\omega}_{r'}-\hat{\omega}_r-\hat{\omega}_{r'}-4\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_c-\hat{\lambda}_{c'}+(K-1)\hat{\lambda}_c+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$(K^2-4K+4)\hat{\mu}-(K-2)(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+(K^2-4K+4)\hat{\tau}_m-(K-2)(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=(K-2)y_{.m.}$$

$$4(K-1)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r+(K-1)\hat{\omega}_{r'}-\hat{\omega}_r-\hat{\omega}_{r'}-4\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_c-\hat{\lambda}_{c'}+(K-1)\hat{\lambda}_c+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$K^2\hat{\mu}-4\hat{\tau}_m+(K^2-4K+4)\hat{\tau}_m=y_{r..}+y_{r'..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$K^2\hat{\mu}+(K^2-4K)\hat{\tau}_m=y_{r..}+y_{r'..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$\hat{\tau}_m=\frac{y_{r..}+y_{r'..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K-4)}-K\hat{\mu} \qquad (ค10)$$

ค่า $\hat{\lambda}_c$ หาได้จาก

$$-(K^2-2)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\mu}+(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+(K-1)\hat{\omega}_r-(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+2\hat{\tau}_m-\hat{\tau}_m+(K-2)\hat{\tau}_m+(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})-\hat{\lambda}_c-(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=-y_{...}+y_{r..}+y_{.m.}$$

$$-(K^2-2)\hat{\mu}+2K\hat{\mu}-3\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r+(K-1)\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_c=-y_{...}+y_{r..}+y_{.m.}$$

$$-K^2\hat{\mu}+2K\hat{\mu}-\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_r+(K-1)\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_c=-y_{...}+y_{r..}+y_{.m.}$$

$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}-(K-1)\hat{\omega}_r-(K-1)\hat{\tau}_m+(K-1)(K-1)\hat{\lambda}_c=(K-1)y_{..c}$$

$$(K^2-2K+1)\hat{\mu}-(K-1)\hat{\omega}_r-(K-1)\hat{\tau}_m+(K^2-2K+1)\hat{\lambda}_c=(K-1)y_{..c}$$

$$-K^2\hat{\mu}+2K\hat{\mu}-\hat{\mu}+(K^2-2K+1)\hat{\mu}-\hat{\lambda}_c+(K^2-2K+1)\hat{\lambda}_c=-y_{...}+y_{r..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c}$$

$$(K^2-2K)\hat{\lambda}_c=-y_{...}+y_{r..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c}$$

$$\hat{\lambda}_c=\frac{-y_{...}+y_{r..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c}}{K(K-2)} \qquad (ค11)$$

ค่า $\hat{\lambda}_{c'}$ หาได้จาก

$$-(K^2-2)\hat{\mu}+(K-1)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\mu}+(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+(K-1)\hat{\omega}_{r'}-(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})+2\hat{\tau}_m-\hat{\tau}_m+(K-2)\hat{\tau}_m+(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})-\hat{\lambda}_{c'}-(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=-y_{...}+y_{r'..}+y_{.m.}$$

$$-(K^2-2)\hat{\mu}+2K\hat{\mu}-3\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_{r'}+(K-1)\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_{c'}=-y_{...}+y_{r'..}+y_{.m.}$$

$$-K^2\hat{\mu}+2K\hat{\mu}-\hat{\mu}+(K-1)\hat{\omega}_{r'}+(K-1)\hat{\tau}_m-\hat{\lambda}_{c'}=-y_{...}+y_{r'..}+y_{.m.}$$

$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}-(K-1)\hat{\omega}_{r'}-(K-1)\hat{\tau}_m+(K-1)(K-1)\hat{\lambda}_{c'}=(K-1)y_{..c'}$$

$$(K^2-2K+1)\hat{\mu}-(K-1)\hat{\omega}_{r'}-(K-1)\hat{\tau}_m+(K^2-2K+1)\hat{\lambda}_{c'}=(K-1)y_{..c'}$$

$$-K^2\hat{\mu}+2K\hat{\mu}-\hat{\mu}+(K^2-2K+1)\hat{\mu}-\hat{\lambda}_{c'}+(K^2-2K+1)\hat{\lambda}_{c'}=-y_{...}+y_{r'..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c'}$$

$$(K^2-2K)\hat{\lambda}_{c'}=-y_{...}+y_{r'..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c'}$$

$$\hat{\lambda}_{c'}=\frac{-y_{...}+y_{r'..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c'}}{K(K-2)} \qquad (ค12)$$

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 1 เสร็จสิ้น และการพิสูจน์ของขอบเขตที่ 3 จะพิสูจน์เช่นเดียวกับของขอบเขตที่ 1

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 2

ค่า $\hat{\mu}$ หาได้จาก

$$(K-3)(K^2-2)\hat{\mu}-(K-3)(\hat{\omega}_r+\hat{\omega}_{r'})-(K-3)(\hat{\tau}_m+\hat{\tau}_{m'})-(K-3)(\hat{\lambda}_c+\hat{\lambda}_{c'})=(K-3)y_{...}$$

$$6(K-1)\hat{\mu}-(K-3)\hat{\omega}_r+(K-3)\hat{\omega}_{r'}+(K-3)\hat{\tau}_m+(K-3)\hat{\tau}_{m'}+(K-3)\hat{\lambda}_c+(K-3)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{.m'.}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$(K-3)(K^2-2)\hat{\mu}+6(K-1)\hat{\mu}=(K-3)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{.m'.}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$(K^3-3K^2-2K+6)\hat{\mu}+6K\hat{\mu}-6\hat{\mu}=(K-3)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{.m'.}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$(K^3-3K^2+4K)\hat{\mu}=(K-3)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{.m'.}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$\hat{\mu}=\frac{(K-3)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{.m'.}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K^2-3K+4)} \qquad (ศ13)$$

ค่า $\hat{\omega}_r$ หาได้จาก

$$2(K-1)\hat{\mu}-2\hat{\omega}_r+(K-2)\hat{\tau}_m+(K-2)\hat{\lambda}_c=y_{.m.}+y_{..c}$$

$$(K-2)(K-1)\hat{\mu}+(K-2)(K-1)\hat{\omega}_r-(K-2)\hat{\tau}_m-(K-2)\hat{\lambda}_c=(K-2)y_{r..}$$

$$(2K-2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\omega}_r-2\hat{\omega}_r=(K-2)y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}$$

$$(K^2-K)\hat{\mu}+(K^2-3K)\hat{\omega}_r=(K-2)y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}$$

$$\hat{\omega}_r=\frac{(K-2)y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)} \qquad (ศ14)$$

ค่า $\hat{\omega}_{r'}$ หาได้จาก

$$2(K-1)\hat{\mu}-2\hat{\omega}_{r'}+(K-2)\hat{\tau}_{m'}+(K-2)\hat{\lambda}_{c'}=y_{.m'.}+y_{..c'}$$

$$(K-2)(K-1)\hat{\mu}+(K-2)(K-1)\hat{\omega}_{r'}-(K-2)\hat{\tau}_{m'}-(K-2)\hat{\lambda}_{c'}=(K-2)y_{r'..}$$

$$(2K-2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\omega}_{r'}-2\hat{\omega}_{r'}=(K-2)y_{r'..}+y_{.m'.}+y_{..c'}$$

$$(K^2-K)\hat{\mu}+(K^2-3K)\hat{\omega}_{r'}=(K-2)y_{r'..}+y_{.m'.}+y_{..c'}$$

$$\hat{\omega}_{r'}=\frac{(K-2)y_{r'..}+y_{.m'.}+y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)} \qquad (ศ15)$$

ค่า $\hat{\tau}_m$ หาได้จาก

$$2(K-1)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\omega}_r+2\hat{\tau}_m+(K-2)\hat{\lambda}_c=y_{r..}+y_{..c}$$

$$(K-2)(K-1)\hat{\mu}-(K-2)\hat{\omega}_r+(K-1)(K-2)\hat{\tau}_m-(K-2)\hat{\lambda}_c=(K-2)y_{.m.}$$

$$(2K-2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\tau}_m=y_{r..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}$$

$$(K^2-K)\hat{\mu}+(K^2-3K)\hat{\tau}_m=y_{r..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}$$

$$\hat{\tau}_m=\frac{y_{r..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)} \qquad (ค16)$$

ค่า $\hat{\tau}_{m'}$ หาได้จาก

$$2(K-1)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\omega}_{r'}+2\hat{\tau}_{m'}+(K-2)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r'..}+y_{..c'}$$

$$(K-2)(K-1)\hat{\mu}-(K-2)\hat{\omega}_{r'}+(K-1)(K-2)\hat{\tau}_{m'}-(K-2)\hat{\lambda}_{c'}=(K-2)y_{.m'.}$$

$$(2K-2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\tau}_{m'}=y_{r'..}+(K-2)y_{.m'.}+y_{..c'}$$

$$(K^2-K)\hat{\mu}+(K^2-3K)\hat{\tau}_{m'}=y_{r'..}+(K-2)y_{.m'.}+y_{..c'}$$

$$\hat{\tau}_{m'}=\frac{y_{r'..}+(K-2)y_{.m'.}+y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)} \qquad (ค17)$$

ค่า $\hat{\lambda}_c$ หาได้จาก

$$2(K-1)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\omega}_r+(K-2)\hat{\tau}_m-2\hat{\lambda}_c=y_{r..}+y_{.m.}$$

$$(K-2)(K-1)\hat{\mu}-(K-2)\hat{\omega}_r+(K-2)\hat{\tau}_m+(K-1)(K-2)\hat{\lambda}_c=(K-2)y_{..c}$$

$$(2K-2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\lambda}_c=y_{r..}+y_{.m.}+(K-2)y_{..c}$$

$$(K^2-K)\hat{\mu}+(K^2-3K)\hat{\lambda}_c=y_{r..}+y_{.m.}+(K-2)y_{..c}$$

$$\hat{\lambda}_c=\frac{y_{r..}+y_{.m.}+(K-2)y_{..c}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)} \qquad (ค18)$$

ค่า $\hat{\lambda}_{c'}$ หาได้จาก

$$2(K-1)\hat{\mu}+(K-2)\hat{\omega}_{r'}+(K-2)\hat{\tau}_{m'}-2\hat{\lambda}_{c'}=y_{r'..}+y_{.m'.}$$

$$(K-2)(K-1)\hat{\mu}-(K-2)\hat{\omega}_{r'}+(K-2)\hat{\tau}_{m'}+(K-1)(K-2)\hat{\lambda}_{c'}=(K-2)y_{..c'}$$

$$(2K-2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\mu}+(K^2-3K+2)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r'..}+y_{.m'.}+(K-2)y_{..c'}$$

$$(K^2-K)\hat{\mu}+(K^2-3K)\hat{\lambda}_{c'}=y_{r'..}+y_{.m'.}+(K-2)y_{..c'}$$

$$\hat{\lambda}_{c'}=\frac{y_{r'..}+y_{.m'.}+(K-2)y_{..c'}-K(K-1)\hat{\mu}}{K(K-3)} \qquad (ค19)$$

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 2 เสร็จสิ้น และการพิสูจน์บริบทที่ 5.2 ทั้ง 3 ขอบเขตได้พิสูจน์เรียบร้อยแล้ว

ภาคผนวก ฆ. การประมาณค่าพารามิเตอร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูป สำหรับขอบเขตที่ 1, 2, 3 (การพิสูจน์บริบทที่ 5.4)

จากตารางที่ 1.6 ถึงตารางที่ 1.9 สามารถเขียนสมการปกติของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูปได้ดังนี้

$$\mu^R : (K^2-2)\hat{\mu}^R - (\hat{\omega}_r^R + \hat{\omega}_{r'}^R) - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{...} \qquad (ฆ1)$$

$$\omega_r^R : (K-1)\hat{\mu}^R + (K-1)\hat{\omega}_r^R - \hat{\lambda}_c^R = y_{r..} \qquad (ฆ2)$$

$$\omega_{r'}^R : (K-1)\hat{\mu}^R + (K-1)\hat{\omega}_{r'}^R - \hat{\lambda}_{c'}^R = y_{r'..} \qquad (ฆ3)$$

$$\lambda_c^R : (K-1)\hat{\mu}^R - \hat{\omega}_r^R + (K-1)\hat{\lambda}_c^R = y_{..c} \qquad (ฆ4)$$

$$\lambda_{c'}^R : (K-1)\hat{\mu}^R - \hat{\omega}_{r'}^R + (K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R = y_{..c'} \qquad (ฆ5)$$

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 1

ค่า $\hat{\mu}^R$ หาได้จาก

$$4(K-1)\hat{\mu}^R + (K-1)\hat{\omega}_r^R - \hat{\omega}_r^R + (K-1)\hat{\omega}_{r'}^R - \hat{\omega}_{r'}^R + (K-1)\hat{\lambda}_c^R - \hat{\lambda}_c^R + (K-1)\hat{\lambda}_{c'}^R - \hat{\lambda}_{c'}^R = y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}$$

$$4(K-1)\hat{\mu}^R + (K-2)\hat{\omega}_r^R + (K-2)\hat{\omega}_{r'}^R + (K-2)\hat{\lambda}_c^R + (K-2)\hat{\lambda}_{c'}^R = y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}$$

$$(K-2)(K^2-2)\hat{\mu} - (K-2)(\hat{\omega}_r + \hat{\omega}_{r'}) - (K-2)(\hat{\lambda}_c + \hat{\lambda}_{c'}) = (K-2)y_{...}$$

$$4K\hat{\mu} - 4\hat{\mu} + (K-4)(K^2-2)\hat{\mu} = (K-2)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}$$

$$6K\hat{\mu} - 8\hat{\mu} + (K^3 - 2K^2 - 2K + 4)\hat{\mu} = (K-2)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}$$

$$K(K^2 - 2K + 2)\hat{\mu} = (K-2)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}$$

$$\hat{\mu} = \frac{(K-2)y_{...} + y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K^2-2K+2)} \qquad (ฆ6)$$

ค่า $\hat{\omega}_r^R$ หาได้จาก

$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^R + (K-1)(K-1)\hat{\omega}_r^R - (K-1)\hat{\lambda}_c^R = (K-1)y_{r..}$$

$$(K-1)\hat{\mu}^R - \hat{\omega}_r^R + (K-1)\hat{\lambda}_c^R = y_{..c}$$

$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^R + (K-1)\hat{\mu}^R + (K-1)(K-1)\hat{\omega}_r^R - \hat{\omega}_r^R - (K-1)\hat{\lambda}_c^R + (K-1)\hat{\lambda}_c^R = (K-1)y_{r..} + y_{..c}$$

$$(K^2-2K+1)\hat{\mu}^R + (K-1)\hat{\mu}^R + (K^2-2K+1)\hat{\omega}_r^R - \hat{\omega}_r^R = (K-1)y_{r..} + y_{..c}$$

$$(K^2-K)\hat{\mu}^R + (K^2-2K)\hat{\omega}_r^R = (K-1)y_{r..} + y_{..c}$$

$$\hat{\omega}_r^R = \frac{(K-1)y_{r..} + y_{..c}}{K(K-2)} - \frac{(K-1)\hat{\mu}^R}{(K-2)}$$

ดังนั้น $\hat{\omega}_r^R = \dfrac{(K-1)y_{r..} + y_{..c}}{K(K-2)} - \dfrac{(K-1)\hat{\mu}^R}{(K-2)}$ (ฆ7)

ค่า $\hat{\omega}_{r'}^{R}$ หาได้จาก

$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)(K-1)\hat{\omega}_{r'}^{R}-(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=(K-1)y_{r'..}$$
$$(K-1)\hat{\mu}^{R}-\hat{\omega}_{r'}^{R}+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=y_{..c'}$$
$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)(K-1)\hat{\omega}_{r'}^{R}-\hat{\omega}_{r'}^{R}-(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=(K-1)y_{r'..}+y_{..c'}$$

$$(K^{2}-2K+1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K^{2}-2K+1)\hat{\omega}_{r'}^{R}-\hat{\omega}_{r'}^{R}=(K-1)y_{r'..}+y_{..c'}$$
$$(K^{2}-K)\hat{\mu}^{R}+(K^{2}-2K)\hat{\omega}_{r'}^{R}=(K-1)y_{r'..}+y_{..c'}$$
$$\hat{\omega}_{r'}^{R}=\frac{(K-1)y_{r'..}+y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}^{R}}{(K-2)}$$

ดังนั้น $$\hat{\omega}_{r'}^{R}=\frac{(K-1)y_{r'..}+y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}^{R}}{(K-2)} \qquad (ฆ8)$$

ค่า $\hat{\lambda}_{c}^{R}$ หาได้จาก

$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^{R}-(K-1)\hat{\omega}_{r}^{R}-(K-1)(K-1)\hat{\lambda}_{c}^{R}=(K-1)y_{..c}$$
$$(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\omega}_{r}^{R}-\hat{\lambda}_{c}^{R}=y_{r..}$$
$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\omega}_{r}^{R}-(K-1)\hat{\omega}_{r}^{R}-(K-1)(K-1)\hat{\lambda}_{c}^{R}=y_{r..}+(K-1)y_{..c}$$

$$(K^{2}-2K+1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K^{2}-2K+1)\hat{\lambda}_{c}^{R}-\hat{\lambda}_{c}^{R}=y_{r..}+(K-1)y_{..c}$$
$$(K^{2}-K)\hat{\mu}^{R}+(K^{2}-2K)\hat{\lambda}_{c}^{R}=y_{r..}+(K-1)y_{..c}$$
$$\hat{\lambda}_{c}^{R}=\frac{y_{r..}+(K-1)y_{..c}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}^{R}}{(K-2)}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_{c}^{R}=\frac{y_{r..}+(K-1)y_{..c}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}^{R}}{(K-2)} \qquad (ฆ9)$$

ค่า $\hat{\lambda}_{c'}^{R}$ หาได้จาก

$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^{R}-(K-1)\hat{\omega}_{r'}^{R}-(K-1)(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=(K-1)y_{..c'}$$
$$(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\omega}_{r'}^{R}-\hat{\lambda}_{c'}^{R}=y_{r'..}$$
$$(K-1)(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\omega}_{r'}^{R}-(K-1)\hat{\omega}_{r'}^{R}-(K-1)(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=y_{r'..}+(K-1)y_{..c'}$$

$$(K^{2}-2K+1)\hat{\mu}^{R}+(K-1)\hat{\mu}^{R}+(K^{2}-2K+1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}-\hat{\lambda}_{c'}^{R}=y_{r'..}+(K-1)y_{..c'}$$
$$(K^{2}-K)\hat{\mu}^{R}+(K^{2}-2K)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=y_{r'..}+(K-1)y_{..c'}$$
$$\hat{\lambda}_{c'}^{R}=\frac{y_{r'..}+(K-1)y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}^{R}}{(K-2)}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_{c'}^{R}=\frac{y_{r'..}+(K-1)y_{..c'}}{K(K-2)}-\frac{(K-1)\hat{\mu}^{R}}{(K-2)} \tag{ฆ10}$$

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 2 เสร็จสิ้น และการพิสูจน์ของขอบเขตที่ 2 จะพิสูจน์เช่นเดียวกับของขอบเขตที่ 1

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 3

ค่า $\hat{\mu}^{R}$ หาได้จาก

$$(K-2)\hat{\mu}^{R}-2\hat{\omega}_{r}^{R}+(K-1)\hat{\lambda}_{c}^{R}+(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=y_{..c}+y_{..c'}$$
$$2(K-2)\hat{\mu}^{R}+2(K-2)\hat{\omega}_{r}^{R}-2(\hat{\lambda}_{c}^{R}+\hat{\lambda}_{c'}^{R})=2y_{r..}$$

$$3(K-2)\hat{\mu}^{R}+2K\hat{\omega}_{r}^{R}-6\hat{\omega}_{r}^{R}+(K-3)\hat{\lambda}_{c}^{R}+(K-3)\hat{\lambda}_{c'}^{R}=2y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'}$$
$$(K-3)(K^{2}-2)\hat{\mu}^{R}-(K-3)2\hat{\omega}_{r}^{R}-(K-3)(\hat{\lambda}_{c}^{R}+\hat{\lambda}_{c'}^{R})=(K-3)y_{...}$$

$$(K^{3}-3K^{2}-2K+6)\hat{\mu}^{R}+3(K-2)\hat{\mu}^{R}=(K-3)y_{...}+2y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$(K^{3}-3K^{2}+2K)\hat{\mu}^{R}=(K-3)y_{...}+2y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'}$$

$$\hat{\mu}^{R}=\frac{(K-3)y_{...}+2y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K^{2}-3K+2)} \tag{ฆ11}$$

-หาค่า $\hat{\omega}_r^R$

$$2(K-1)\hat{\mu}^R - 2\hat{\omega}_r^R + (K-1)(\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{..c} + y_{..c'}$$

$$K(K-2)\hat{\mu}^R + K(K-2)\hat{\omega}_r^R - K(\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = Ky_{r..}$$

$$(K^2-K-2)\hat{\mu}^R + (K^2-2K-2)\hat{\omega}_r^R - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = Ky_{r..} + y_{..c} + y_{..c'}$$

$$(K^2-2)\hat{\mu}^R - 2\hat{\omega}_r^R - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{...}$$

$$(K^2-2)\hat{\omega}_r^R = Ky_{r..} + y_{..c} + y_{..c'} - y_{...}$$

$$\hat{\omega}_r^R = -\frac{y_{...} - Ky_{r..} - y_{..c} - y_{..c'}}{(K^2-2K)}$$

ดังนั้น $$\hat{\omega}_r^R = -\frac{y_{...} - Ky_{r..} - y_{..c} - y_{..c'}}{K(K-2)} \qquad (ฆ12)$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_c^R$

$$K(K-1)\hat{\mu}^R - K\hat{\omega}_r^R + K(K-1)\hat{\lambda}_c^R = Ky_{..c}$$

$$(K-2)\hat{\mu}^R + (K-2)\hat{\omega}_r^R - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{r..}$$

$$K(K-1)\hat{\mu}^R + (K-2)\hat{\mu}^R - K\hat{\omega}_r^R + (K-2)\hat{\omega}_r^R + K(K-1)\hat{\lambda}_c^R - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{r..} + Ky_{..c}$$

$$(K^2-2)\hat{\mu}^R - 2\hat{\omega}_r^R - (\hat{\lambda}_c^R + \hat{\lambda}_{c'}^R) = y_{...}$$

$$K(K-1)\hat{\mu}^R + (K-2)\hat{\mu}^R - (K^2-2)\hat{\mu}^R - K\hat{\omega}_r^R + (K-2)\hat{\omega}_r^R - 2\hat{\omega}_r^R + K(K-1)\hat{\lambda}_c^R = y_{r..} + Ky_{..c} - y_{...}$$

$$\hat{\lambda}_c^R = \frac{y_{r..} + Ky_{..c} - y_{...}}{K(K-1)}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_c^R = -\frac{y_{...} - y_{r..} - Ky_{..c}}{K(K-1)} \qquad (ฆ13)$$

-หาค่า $\hat{\lambda}_{c'}^{R}$

$$K(K-1)\hat{\mu}^{R} - K\hat{\omega}_{r}^{R} + K(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R} = Ky_{..c'}$$
$$(K-2)\hat{\mu}^{R} + (K-2)\hat{\omega}_{r}^{R} - (\hat{\lambda}_{c}^{R} + \hat{\lambda}_{c'}^{R}) = y_{r..}$$
$$K(K-1)\hat{\mu}^{R} + (K-2)\hat{\mu}^{R} - K\hat{\omega}_{r}^{R} + (K-2)\hat{\omega}_{r}^{R} + K(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R} - (\hat{\lambda}_{c}^{R} + \hat{\lambda}_{c'}^{R}) = y_{r..} + Ky_{..c'}$$

$$(K^{2}-2)\hat{\mu}^{R} - 2\hat{\omega}_{r}^{R} - (\hat{\lambda}_{c}^{R} + \hat{\lambda}_{c'}^{R}) = y_{...}$$

$$K(K-1)\hat{\mu}^{R} + (K-2)\hat{\mu}^{R} - (K^{2}-2)\hat{\mu}^{R} - K\hat{\omega}_{r}^{R} + (K-2)\hat{\omega}_{r}^{R} - 2\hat{\omega}_{r}^{R} + K(K-1)\hat{\lambda}_{c'}^{R} = y_{r..} + Ky_{..c'} - y_{...}$$

$$\hat{\lambda}_{c'}^{R} = \frac{y_{r..} + Ky_{..c'} - y_{...}}{K(K-1)}$$

ดังนั้น $$\hat{\lambda}_{c'}^{R} = -\frac{y_{...} - y_{r..} - Ky_{..c'}}{K(K-1)} \qquad (ฆ14)$$

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 3 เสร็จสิ้น และการพิสูจน์บริบทที่ 5.4 ทั้ง 3 ขอบเขตได้พิสูจน์เรียบร้อยแล้ว

ภาคผนวก ง. การคำนวณหาค่า $\hat{y}_{ijk}$ (การพิสูจน์ตารางที่ 3.8)

การคำนวณหาค่าประมาณของพารามิเตอร์แต่ละตัวสามารถหาได้จากสูตร (ง1)

$$\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_i + \hat{\tau}_j + \hat{\lambda}_k \tag{ง1}$$

โดยที่ค่าประมาณของพารามิเตอร์แต่ละตัวสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (ง2) ถึง (ง15)

$$\begin{aligned}\hat{y}_{111} &= 31.7188 + (-3.7188) + (-0.9688) + (-2.4063) \\ &= 24.6249\end{aligned} \tag{ง2}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{122} &= 31.7188 + (-3.7188) + 1.0938 + (-0.1563) \\ &= 28.9375\end{aligned} \tag{ง3}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{133} &= 31.7188 + (-3.7188) + (-0.7188) + (-0.2188) \\ &= 27.0624\end{aligned} \tag{ง4}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{144} &= 31.7188 + (-3.7188) + 0.5938 + 2.7813 \\ &= 31.3751\end{aligned} \tag{ง5}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{232} &= 31.7188 + 0.8438 + (-0.7188) + (-0.1563) \\ &= 31.6875\end{aligned} \tag{ง6}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{243} &= 31.7188 + 0.8438 + 0.5938 + (-0.2188) \\ &= 32.9376\end{aligned} \tag{ง7}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{214} &= 31.7188 + 0.8438 + (-0.9688) + 2.7813 \\ &= 34.3751\end{aligned} \tag{ง8}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{331} &= 31.7188 + 2.0938 + (-0.7188) + (-2.4063) \\ &= 30.6875\end{aligned} \tag{ง9}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{313} &= 31.7188 + 2.0938 + (-0.9688) + (-0.2188) \\ &= 32.6250\end{aligned} \tag{ง10}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_{324} &= 31.7188 + 2.0938 + 1.0938 + 2.7813 \\ &= 37.6877\end{aligned} \tag{ง11}$$

$$\hat{y}_{441} = 31.7188 + 0.7813 + 0.5938 + (-2.4063)$$
$$= 30.6876 \quad \text{(ง12)}$$

$$\hat{y}_{412} = 31.7188 + 0.7813 + (-0.9688) + (-0.1563)$$
$$= 31.3750 \quad \text{(ง13)}$$

$$\hat{y}_{423} = 31.7188 + 0.7813 + 1.0938 + (-0.2188)$$
$$= 33.3751 \quad \text{(ง14)}$$

$$\hat{y}_{434} = 31.7188 + 0.7813 + (-0.7188) + 2.7813$$
$$= 34.5626 \quad \text{(ง15)}$$

การพิสูจน์ของตารางที่ 3.8 เสร็จสิ้น

ภาคผนวก จ. สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K สำหรับตัวแบบเต็มรูปขอบเขตที่ 1, 3 (การพิสูจน์บริบทที่ 5.5)

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{All\,i}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,j}^{K}(\hat{\tau}_j y_{.j.})+\sum_{All\,k}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k}) \qquad \text{(จ1)}$$

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{All\,i,i\neq r,r'}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,j,\,j\neq m}^{K}(\hat{\tau}_j y_{.j.})+\sum_{All\,k,k\neq c,c'}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k})\\&\quad+\hat{\omega}_r y_{r..}+\hat{\omega}_{r'}y_{r'..}+\hat{\tau}_m y_{.m.}+\hat{\lambda}_c y_{..c}+\hat{\lambda}_{c'}y_{..c'}\end{aligned} \qquad \text{(จ2)}$$

จากสมการที่ (จ2) เมื่อทำการแทนค่าพารามิเตอร์จะได้ดังสมการที่ (จ3) และ (จ4)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}\left(\frac{y_{i..}}{K}-\hat{\mu}\right)y_{i..}+\left(\frac{-y_{...}+(K-1)y_{r..}+y_{.m.}+y_{..c}}{K(K-2)}\right)y_{r..}+\left(\frac{-y_{...}+(K-1)y_{r'..}+y_{.m.}+y_{..c'}}{K(K-2)}\right)y_{r'..}\\&\quad+\sum_{j=1,\,j\neq m}^{K}\left(\frac{y_{.j.}}{K}-\hat{\mu}\right)y_{.j.}+\left(\frac{y_{r..}+y_{r'..}+(K-2)y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K-4)}-K\hat{\mu}\right)y_{.m.}\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}\left(\frac{y_{..k}}{K}-\hat{\mu}\right)y_{..k}+\left(\frac{-y_{...}+y_{r..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c}}{K(K-2)}\right)y_{..c}+\left(\frac{-y_{...}+y_{r'..}+y_{.m.}+(K-1)y_{..c'}}{K(K-2)}\right)y_{..c'}\\&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r,r'}^{K}\left(\frac{y_{i..}^2}{K}-\hat{\mu}y_{i..}\right)+\left(\frac{-y_{...}y_{r..}+(K-1)y_{r..}^2+y_{r..}y_{.m.}+y_{r..}y_{..c}}{K(K-2)}\right)+\left(\frac{-y_{...}y_{r'..}+(K-1)y_{r'..}^2+y_{r'..}y_{.m.}+y_{r'..}y_{..c'}}{K(K-2)}\right)\\&\quad+\sum_{j=1,\,j\neq m}^{K}\left(\frac{y_{.j.}^2}{K}-\hat{\mu}y_{.j.}\right)+\left(\frac{y_{r..}y_{.m.}+y_{r'..}y_{.m.}+(K-2)y_{.m.}^2+y_{..c}y_{.m.}+y_{..c'}y_{.m.}}{K(K-4)}-K\hat{\mu}y_{.m.}\right)\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}\left(\frac{y_{..k}^2}{K}-\hat{\mu}y_{..k}\right)+\left(\frac{-y_{...}y_{..c}+y_{r..}y_{..c}+y_{.m.}y_{..c}+(K-1)y_{..c}^2}{K(K-2)}\right)+\left(\frac{-y_{...}y_{..c'}+y_{r'..}y_{..c'}+y_{.m.}y_{..c'}+(K-1)y_{..c'}^2}{K(K-2)}\right)\end{aligned} \qquad \text{(จ3)}$$

จากสมการที่ (จ4) จะทำการปรับค่าของพจน์ที่มีสัญลักษณ์ของผลบวกด้วยการเพิ่มพจน์

$$\begin{aligned}&(\hat{\mu}y_{r..}-\hat{\mu}y_{r..})+(\hat{\mu}y_{r'..}-\hat{\mu}y_{r'..})+(\hat{\mu}y_{.m.}-\hat{\mu}y_{.m.})+(\hat{\mu}y_{..c}-\hat{\mu}y_{..c})+(\hat{\mu}y_{..c'}-\hat{\mu}y_{..c'})\\&+\left(\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r..}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{.m.}^2}{K}-\frac{y_{.m.}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c'}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}\right)\end{aligned} \qquad \text{(จ4)}$$

จะได้ดังสมการที่ (จ5)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\frac{\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}^2}{K}-\mu\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}+\frac{\sum_{All\,j}^{K}y_{.j.}^2}{K}-\mu\sum_{All\,j}^{K}y_{.j.}+\frac{\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}^2}{K}-\mu\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}-\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r'..}^2}{K}-\frac{y_{.m.}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}\\&\quad+\left(\frac{-y_{...}y_{r..}+(K-1)y_{r..}^2+y_{r..}y_{.m.}+y_{r..}y_{..c}}{K(K-2)}\right)+\left(\frac{-y_{...}y_{r'..}+(K-1)y_{r'..}^2+y_{r'..}y_{.m.}+y_{r'..}y_{..c'}}{K(K-2)}\right)\\&\quad+\left(\frac{y_{r..}y_{.m.}+y_{r'..}y_{.m.}+(K-2)y_{.m.}^2+y_{..c}y_{.m.}+y_{..c'}y_{.m.}}{K(K-4)}-K\hat{\mu}y_{.m.}\right)\\&\quad+\left(\frac{-y_{...}y_{..c}+y_{r..}y_{..c}+y_{.m.}y_{..c}+(K-1)y_{..c}^2}{K(K-2)}\right)+\left(\frac{-y_{...}y_{..c'}+y_{r'..}y_{..c'}+y_{.m.}y_{..c'}+(K-1)y_{..c'}^2}{K(K-2)}\right)\\&\quad+\hat{\mu}(y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}+y_{...})\end{aligned} \qquad \text{(จ5)}$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{K} y_{i..} = y_{...} \tag{จ6}$$

$$\sum_{j=1}^{K} y_{.j.} = y_{...} \tag{จ7}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{..k} = y_{...} \tag{จ8}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (จ6) ถึง (จ8) จะแสดงได้ดังสมการที่ (จ9)

$$
\begin{aligned}
R(\mu,\omega,\tau,\lambda) &= \frac{\sum\limits_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum\limits_{All\,j}^{K} y_{.j.}^2 + \sum\limits_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} - \frac{y_{r..}^2}{K} - \frac{y_{r'..}^2}{K} - \frac{y_{.m.}^2}{K} - \frac{y_{..c}^2}{K} - \frac{y_{..c'}^2}{K} \\
&+ \left(\frac{-y_{...}y_{r..} + (K-1)y_{r..}^2 + y_{r..}y_{.m.} + y_{r..}y_{..c}}{K(K-2)} \right) + \left(\frac{-y_{...}y_{r'..} + (K-1)y_{r'..}^2 + y_{r'..}y_{.m.} + y_{r'..}y_{..c'}}{K(K-2)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{.m.} + y_{r'..}y_{.m.} + (K-2)y_{.m.}^2 + y_{..c}y_{.m.} + y_{..c'}y_{.m.}}{K(K-4)} - K\hat{\mu}y_{.m.} \right) \\
&+ \left(\frac{-y_{...}y_{..c} + y_{r..}y_{..c} + y_{.m.}y_{..c} + (K-1)y_{..c}^2}{K(K-2)} \right) + \left(\frac{-y_{...}y_{..c'} + y_{r'..}y_{..c'} + y_{.m.}y_{..c'} + (K-1)y_{..c'}^2}{K(K-2)} \right) \\
&+ \hat{\mu}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{..c} + y_{..c'} - 2y_{...}) \\
&= \frac{\sum\limits_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum\limits_{All\,j}^{K} y_{.j.}^2 + \sum\limits_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} - \frac{y_{r..}^2}{K} - \frac{y_{r'..}^2}{K} - \frac{y_{.m.}^2}{K} - \frac{y_{..c}^2}{K} - \frac{y_{..c'}^2}{K} \\
&+ \left(\frac{(K-1)(y_{r..}^2 + y_{r'..}^2 + y_{..c}^2 + y_{..c'}^2) +}{K(K-2)} \right) + \left(\frac{y_{r..}y_{.m.} + y_{r..}y_{..c} + y_{r'..}y_{.m.} + y_{r'..}y_{..c'} + y_{r..}y_{..c} + y_{.m.}y_{..c} + y_{r'..}y_{..c'} + y_{.m.}y_{..c'}}{K(K-2)} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}y_{.m.} + y_{r'..}y_{.m.} + (K-2)y_{.m.}^2 + y_{..c}y_{.m.} + y_{..c'}y_{.m.}}{K(K-4)} - K\hat{\mu}y_{.m.} \right) \\
&- \frac{y_{...}}{K(K-2)}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}) + \hat{\mu}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{..c} + y_{..c'} - 2y_{...}) \\
&= \frac{\sum\limits_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum\limits_{All\,j}^{K} y_{.j.}^2 + \sum\limits_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} + \left(\frac{y_{r..}y_{.m.} + y_{r'..}y_{.m.} + (K-2) + y_{..c}y_{.m.} + y_{..c'}y_{.m.}}{K(K-4)} - K\hat{\mu}y_{.m.} \right) \\
&+ \left(\frac{y_{r..}^2 + y_{r'..}^2 - Ky_{.m.}^2 + 2y_{.m.}^2 + y_{..c}^2 + y_{..c'}^2 + y_{r..}y_{.m.} + 2y_{r..}y_{..c} + y_{r'..}y_{.m.} + 2y_{r'..}y_{..c'} + y_{.m.}y_{..c} + y_{.m.}y_{..c'}}{K(K-2)} \right) \\
&- \frac{y_{...}}{K(K-2)}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{..c} + y_{..c'}) + \hat{\mu}(y_{r..} + y_{r'..} + y_{.m.} + y_{..c} + y_{..c'} - 2y_{...})
\end{aligned}
$$

$$R\left(\mu,\omega,\tau,\lambda\right)=\frac{\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}^{2}+\sum_{All\,j}^{K}y_{.j.}^{2}+\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}^{2}}{K}+\frac{(y_{r..}+y_{..c})^{2}+(y_{r'..}+y_{..c'})^{2}}{K(K-2)}-K\hat{\mu}y_{.m.}+\hat{\mu}(y_{r..}+y_{r'..}+y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}-2y_{...})$$
$$+\frac{2K(y_{r..}y_{.m.}+y_{r'..}y_{.m.}+y_{.m.}y_{..c}+y_{.m.}y_{..c'}+y_{.m.}^{2})}{K(K^{2}-6K+8)}-\frac{y_{.m.}}{K(K^{2}-6K+8)}(4y_{.m.}+6y_{r..}+6y_{r'..}+6y_{..c}+6y_{..c'})$$
$$-\frac{y_{...}}{K(K-2)}(y_{r..}+y_{r'..}+y_{..c}+y_{..c'}) \qquad \text{(จ9)}$$

แทนค่า $\hat{\mu}=\frac{(K-4)y_{...}+y_{r..}+y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c}+y_{..c'}}{K(K-2)^{2}}$ แล้วแก้สมการใหม่ จะแสดงได้ดังสมการที่ (จ10)

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{K}y_{i..}^{2}+\sum_{j=1}^{K}y_{.j.}^{2}+\sum_{k=1}^{K}y_{..k}^{2}}{K}+\frac{y_{.m.}^{2}}{(K-2)}+\frac{(A_{1})^{2}+(A_{2})^{2}}{K(K-2)}-\frac{(A_{1}+A_{2}+2y_{...}-5y_{.m.})^{2}+2y_{...}(6y_{.m.}-y_{...})}{K(K-2)^{2}} \qquad \text{(จ11)}$$

ขอบเขตที่ 1 $A_1 = y_{r..}+2y_{.m.}+y_{..c}$

$A_2 = y_{r'..}+2y_{.m.}+y_{..c'}$

การพิสูจน์ของขอบเขตที่ 1 เสร็จสิ้น และการพิสูจน์ของขอบเขตที่ 3 จะพิสูจน์เช่นเดียวกับของขอบเขตที่ 1 การพิสูจน์บริบทของบริบทที่ 5.5 เสร็จสิ้น

ภาคผนวก ฉ. สมการถดถอยผลบวกกำลังสองของแผนแบบละตินสแควร์อันดับ K x K ของตัวแบบลดรูปของขอบเขตที่ 3 (การพิสูจน์บริบทที่ 5.6)

$$R(\mu,\omega,\lambda)=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{All\,i}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,k}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k}) \tag{ฉ1}$$

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\lambda)&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{All\,i,i\neq r}^{K}(\hat{\omega}_i y_{i..})+\sum_{All\,k,k\neq c,c'}^{K}(\hat{\lambda}_k y_{..k})\\&\quad+\hat{\omega}_r y_{r..}+\hat{\omega}_c y_{..c}+\hat{\lambda}_{c'} y_{..c'}\end{aligned} \tag{ฉ2}$$

จากสมการที่ (ฉ2) เมื่อทำการแทนค่าพารามิเตอร์จะได้ดังสมการที่ (ฉ3)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}(\frac{y_{i..}}{K}-\hat{\mu})y_{i..}+\left(-\frac{y_{...}-Ky_{r..}-y_{..c}-y_{..c'}}{K(K-2)}\right)y_{r..}\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}(\frac{y_{..k}}{K}-\hat{\mu})y_{..k}+\left(-\frac{y_{...}-y_{r..}-Ky_{..c}}{K(K-1)}\right)y_{..c}+\left(-\frac{y_{...}-y_{r..}-Ky_{..c'}}{K(K-1)}\right)y_{..c'}\\&=\hat{\mu}y_{...}+\sum_{i=1,i\neq r}^{K}(\frac{y_{i..}^2}{K}-\hat{\mu}y_{i..})+\left(-\frac{y_{...}y_{r..}-Ky_{r..}^2-y_{r..}y_{..c}-y_{r..}y_{..c'}}{K(K-2)}\right)\\&\quad+\sum_{k=1,k\neq c,c'}^{K}(\frac{y_{..k}^2}{K}-\hat{\mu}y_{..k})+\left(-\frac{y_{...}y_{..c}-y_{r..}y_{..c}-Ky_{..c}^2}{K(K-1)}\right)+\left(-\frac{y_{...}y_{..c'}-y_{r..}y_{..c'}-Ky_{..c'}^2}{K(K-1)}\right)\end{aligned} \tag{ฉ3}$$

จากสมการที่ (ฉ4) จะทำการปรับค่าของพจน์ที่มีสัญลักษณ์ของผลบวกด้วยการเพิ่มพจน์

$$(\hat{\mu}y_{r..}-\hat{\mu}y_{r..})+(\hat{\mu}y_{..c}-\hat{\mu}y_{..c})+(\hat{\mu}y_{..c'}-\hat{\mu}y_{..c'})$$

$$+\left(\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{r..}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}\right)+\left(\frac{y_{..c'}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}\right)$$

จะได้ดังสมการที่ (ฉ5)

$$\begin{aligned}R(\mu,\omega,\tau,\lambda)&=\frac{\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}^2+\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}^2}{K}-\hat{\mu}\sum_{All\,i}^{K}y_{i..}-\hat{\mu}\sum_{All\,k}^{K}y_{..k}-\frac{y_{r..}^2}{K}-\frac{y_{..c}^2}{K}-\frac{y_{..c'}^2}{K}+\left(-\frac{y_{...}y_{r..}-Ky_{r..}^2-y_{r..}y_{..c}-y_{r..}y_{..c'}}{K(K-2)}\right)\\&\quad+\left(-\frac{y_{...}y_{..c}-y_{r..}y_{..c}-Ky_{..c}^2}{K(K-1)}\right)+\left(-\frac{y_{...}y_{..c'}-y_{r..}y_{..c'}-Ky_{..c'}^2}{K(K-1)}\right)+\hat{\mu}(y_{r..}+y_{..c}+y_{..c'}+y_{...})\end{aligned} \tag{ฉ5}$$

จากรูปแบบของอิทธิพลตรึง (Fixed Effects Model) จะกำหนดให้

$$\sum_{i=1}^{K} y_{i..} = y_{...} \qquad \text{(ฉ6)}$$

$$\sum_{j=1}^{K} y_{.j.} = y_{...} \qquad \text{(ฉ7)}$$

$$\sum_{k=1}^{K} y_{..k} = y_{...} \qquad \text{(ฉ8)}$$

เมื่อแทนค่าสมการที่ (ฉ6) ถึง (ฉ8) จะแสดงได้ดังสมการที่ (ฉ9)

$$\begin{aligned} R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = {} & \frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} - \frac{y_{r..}^2}{K} - \frac{y_{..c}^2}{K} - \frac{y_{..c'}^2}{K} + \left(-\frac{y_{...}y_{r..} - Ky_{r..}^2 - y_{r..}y_{..c} - y_{r..}y_{..c'}}{K(K-2)} \right) \\ & + \left(-\frac{y_{...}y_{..c} - y_{r..}y_{..c} - Ky_{..c}^2}{K(K-1)} \right) + \left(-\frac{y_{...}y_{..c'} - y_{r..}y_{..c'} - Ky_{..c'}^2}{K(K-1)} \right) + \hat{\mu}(y_{r..} + y_{..c} + y_{..c'} - y_{...}) \end{aligned} \qquad \text{(ฉ9)}$$

แทนค่า $\hat{\mu} = \frac{(K-3)y_{...} + 2y_{r..} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K^2-3K+2)}$ แล้วแก้สมการใหม่ จะแสดงได้ดังสมการที่ (ฉ10)

$$\begin{aligned} R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = {} & \frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} - \frac{y_{r..}^2}{K} - \frac{y_{..c}^2}{K} - \frac{y_{..c'}^2}{K} + \left(-\frac{y_{...}y_{r..} - Ky_{r..}^2 - y_{r..}y_{..c} - y_{r..}y_{..c'}}{K(K-2)} \right) \\ & + \left(-\frac{y_{...}y_{..c} - y_{r..}y_{..c} - Ky_{..c}^2}{K(K-1)} \right) + \left(-\frac{y_{...}y_{..c'} - y_{r..}y_{..c'} - Ky_{..c'}^2}{K(K-1)} \right) + \left(\frac{(K-3)y_{...} + 2y_{r..} + y_{..c} + y_{..c'}}{K(K^2-3K+2)} \right)(y_{r..} + y_{..c} + y_{..c'} - y_{...}) \end{aligned}$$

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \frac{\sum_{All\,i}^{K} y_{i..}^2 + \sum_{All\,k}^{K} y_{..k}^2}{K} + \frac{(y_{r..} + y_{..c})^2 + (y_{r..} + y_{..c'})^2}{(K-2)(K-1)} - \frac{(y_{..c} - y_{..c'})^2 + 2y_{...}(2y_{r..} + y_{..c} + y_{..c'}) + y_{...}^2(K-3)}{K(K-2)(K-1)} \qquad \text{(ฉ10)}$$

การพิสูจน์บริบทที่ 5.6 เสร็จสิ้น

ภาคผนวก ช. บทความที่ได้รับการตีพิมพ์ในงานประชุมวิชาการ

การประชุมวิชาการข่ายงานวิศวกรรมอุตสาหการ ประจำปี พ.ศ.2560
ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
12-15 กรกฎาคม 2560 เชียงใหม่

การเปรียบเทียบผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์และค่าความผิดพลาด ระหว่างวิธีตรงและวิธีการประมาณค่าสูญหาย: กรณีศึกษาแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ที่มีข้อมูลสูญหายสองค่า

Comparisons of Treatment Sum of Squares and Errors between Exact and Missing Plot Approaches: The Case of 4 x 4 Latin Square Design with Two Missing Observations

กนกวรรณ ท่าช่วงทำเล[1*] และ กิตติวัฒน์ สิริเกษมสุข[1]
[1]ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, กรุงเทพฯ
E-mail: kanokwan.thachongthumla@gmail.com, kittiwat.sirikasemsuk@gmail.com

Kanokwan Thachongthumla[*] and Kittiwat Sirikasemsuk[1]
[1]Department of Industrial Engineering, Faculty of Engineering,
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Bangkok

บทคัดย่อ

แผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ถือว่าเป็นแผนการทดลองที่มีประสิทธิภาพ เพราะใช้จำนวนตัวอย่างชิ้นงานน้อย การทดลองแบบลาตินสแควร์ประกอบด้วย 3 ปัจจัย ได้แก่ 2 ปัจจัยรบกวน และ 1 ปัจจัยที่สนใจ โดยที่จำนวนระดับปัจจัยทางแถว ปัจจัยทางคอลัมน์ และปัจจัยทางทรีทเมนต์เท่ากัน ในหลายๆการทดลองข้อมูลบางค่าอาจจะสูญหายทำให้ไม่สามารถใช้สูตรสำเร็จในการวิเคราะห์ความแปรปรวนได้ ในงานวิจัยนี้วัตถุประสงค์หลักคือเพื่อทำการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาระหว่างวิธีตรง (Exact Approach) และวิธีการประมาณค่าสูญหาย (Missing Plot Approach) ในแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ซึ่งมีข้อมูลจากการทดลองสูญหาย 2 ค่า ค่าที่ใช้ในการวัดเปรียบเทียบ ได้แก่ (1) ผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ และ (2) ค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Deviation) และค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error) เมื่อค่าความผิดพลาดคำนวณจากข้อมูลจริงลบด้วยข้อมูลจากการพยากรณ์ อนึ่งจากวิธีแบบตรง (Exact Approach) จะนำไปสู่วัตถุประสงค์อีกเรื่องในงานวิจัยนี้ คือ การพัฒนาสูตรทางคณิตศาสตร์ทั้งสมการถดถอยผลรวมกำลังสองของโมเดลแบบเต็ม และแบบลดรูปสำหรับแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ที่ไม่สมบูรณ์ ผลลัพธ์ที่น่าสนใจที่ได้จากงานวิจัยนี้ คือ วิธีการประมาณค่าสูญหาย (Missing Plot Approach) จะให้ค่าผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์มากกว่าวิธีแบบตรง (Exact Approach) แต่ค่าความผิดพลาดทั้งสองวิธีจะเท่ากัน

คำสำคัญ: การออกแบบการทดลอง, แผนการทดลองแบบลาตินสแควร์, การวิเคราะห์ความแปรปรวน, วิธีการทดสอบนัยสำคัญด้วยวิธีการถดถอยทั่วไป, ข้อมูลสูญหาย

Abstract

Latin square design is an efficient experimental design because this design uses a small number of experimental units. The Latin square is comprised of three factors, i.e. two nuisance factors and one potential factor. The numbers of row, column and treatment is equal. In many real experiments some data may be missing in which instant formulas are not provided for an analysis of variance. The main objective of this research was to make comparisons between exact approach and the missing plot approach. In the Latin square design of order 4 x 4 with two missing values. There were two performance measures used for comparison: (1) the treatment sum of squares and (2) the mean absolute deviation

(MAD) and the mean square error (MSE). when the erros were derived by subtracting the actual values by the predicted values. In this research the second objective resulted from the exact approach was to develop the mathematical formulas of the regression sums of squares for full and reduced models for the incomplete Latin square design. The Interesting results in this research showed that, the missing plot approach led to higher the treatment sum of square than the exact approach, however the error terms usings both the two approaches were equal.

Keyword: Design of Experiment, Latin Square Design, Analysis of Variance, General Regression Significance Test, Missing Observations

1. บทนำ

การออกแบบการทดลองเป็นกระบวนการศึกษาประสิทธิภาพของกระบวนการ และระบบผลของการทดลองจะทำให้ทราบถึงข้อเท็จจริงจากการทดลองเพื่อจะยืนยันผลลัพธ์เดิม หรือยอมรับในผลลัพธ์ใหม่ที่เกิดขึ้น การออกแบบการทดลองที่ดีจะทำให้การนำข้อมูลไปวิเคราะห์ผลได้คำตอบที่ถูกต้อง และการเลือกใช้กลยุทธ์ที่เหมาะสมจะช่วยลดความคลาดเคลื่อนของการทดลองให้น้อยลง ในงานวิจัยนี้สนใจแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ถือว่าเป็นแผนการทดลองที่มีประสิทธิภาพเพราะใช้จำนวนตัวอย่างชิ้นงานน้อย ประกอบด้วย 3 ปัจจัย ได้แก่ 2 ปัจจัยรบกวน และ 1 ปัจจัยที่สนใจ โดยที่จำนวนระดับปัจจัยทาง แถว คอลัมน์ และทรีทเมนต์เท่ากัน [1]

2. งานวิจัยเกี่ยวข้อง

Allan และ Wishart [2] เป็นคนแรกที่ได้ศึกษาวิธีการประมาณค่าสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด เมื่อมีข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ในแผนการทดลองแบบกลุ่มโดยสุ่มแบบบล็อกอย่างสมบูรณ์ และแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ การประมาณค่าคำนวณจากผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนน้อยสุด, Yates [3] ได้ประยุกต์วิธีการของ Allan และ Wishart [2] โดยวิธีการของ Yates ได้มีการประมาณค่าสูญหายแบบทำซ้ำเมื่อมีข้อมูลสูญหายมากกว่า 1 ค่า ในแผนการทดลองแบบกลุ่มโดยสุ่มแบบบล็อกอย่างสมบูรณ์

Anderson [4] ทำการรวบรวมการประมาณค่าข้อมูลสูญหายหนึ่งหน่วยการทดลองหรือมากกว่า สำหรับการออกแบบการทดลองแบบต่างๆ โดยได้นำเสนอสูตรในการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย

วิธีการแบบไม่ทำซ้ำสำหรับการแก้ปัญหาข้อมูลสูญหายที่ใช้การวิเคราะห์ความแปรปรวนร่วม ได้แก่ Rubin [5] ได้ทำการศึกษาวิธีการแบบไม่ทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าผลรวมกำลังสองน้อยสุดเมื่อข้อมูลสูญหาย 2 ค่า, Wilkinson [7] นำเสนอการแก้สมการเมื่อมีข้อมูลสูญหายได้นำโมเดลเชิงเส้นมาใช้กับการออกแบบบนพื้นฐานของข้อมูล

วิธีการทำซ้ำสำหรับการประมาณค่าข้อมูลสูญหาย Healy และ Westmacott [8] มีการประมาณค่าโดยใช้โมเดลเชิงเส้นวิเคราะห์การถดถอยเพื่อทำนายค่าข้อมูลสูญหายในแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ จะคำนวณไปเรื่อยจนกระทั่งผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนไม่เปลี่ยนแปลง

ในกรณีแผนการทดลองชนิดสมดุลย์ De Lury [6] นำเสนอวิธีการประมาณค่าเมื่อมีข้อมูลสูญหายในแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ในการสุ่มหลายครั้ง, Baird และ Kramer [9] ศึกษาแผนการทดลองแบบบล็อกไม่สมบูรณ์ชนิดสมดุลย์ ในการวิเคราะห์การหาค่าโดยไม่ต้องแก้ไขความเอนเอียงในผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์, Kramer และ Glass [10] ได้ทำการศึกษาการประมาณค่าสูญหายในแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ โดยลดความคลาดเคลื่อนผลรวมกำลังสองซึ่งมีการแสดงสูตรการคำนวณข้อมูลสูญหายสำหรับหลายๆ กรณี

Sirikasemsuk [11] ใช้วิธีการแบบตรง (Exact Approach) ในแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ลำดับ K x K โดยใช้วิธีการทดสอบนัยสำคัญด้วยวิธีของการถดถอยทั่วไป หรือวิธีแบบตรง ดังนั้นจากวรรณกรรมที่กล่าวมาจะเห็นว่าการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ลำดับ K x K โดยมีข้อมูลสูญหาย 1 ค่า ได้มีผู้จัดทำไปแล้ว

3. วิธีการวิจัย

งานวิจัยนี้ผู้วิจัยได้ลองพัฒนาโมเดลทางคณิตศาสตร์ และสมการถดถอยผลรวมกำลังสองทั้งโมเดลแบบเต็ม และลดรูป โดยจะทำการศึกษาแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ซึ่งมีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์ โดยที่ทรีทเมนต์ต่างกันหายไป ด้วยวิธีการทดสอบนัยสำคัญด้วยวิธีของการถดถอยทั่วไป (General Regression Significance Test) หรือวิธีแบบตรง (Exact Approach) โดยงานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ ดังนี้

1. เพื่อพัฒนาสูตรทางคณิตศาสตร์ทั้งสมการถดถอยผลรวมกำลังสองของโมเดลแบบเต็มและแบบลดรูป สำหรับการวิเคราะห์ความแปรปรวนของแผนการทดลองแบบลาติน

การประชุมวิชาการข่ายงานวิศวกรรมอุตสาหการ ประจำปี พ .ศ.2560
ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
12-15 กรกฎาคม 2560 เชียงใหม่

สแควร์ที่ไม่สมบูรณ์ลำดับ 4 x 4 ซึ่งมีข้อมูลจากการทดลองสูญหาย 2 ค่า โดยวิธีแบบตรง (Exact Approach)

2. เพื่อทำการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาระหว่างวิธีแบบตรง และวิธีการประมาณค่าสูญหาย

3.1 ขอบเขตของงานวิจัย

(1) ตัวแบบเป็นเชิงบวก (Additive Model) นั่นคือไม่มีปฏิสัมพันธ์ (Interaction) ระหว่างแถว คอลัมน์ และทรีทเมนต์ ถ้าแถว คอลัมน์ ทรีทเมนต์มีอิทธิพลคงที่ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{4}\hat{\omega}_i = 0\,,\ \sum_{j=1}^{4}\hat{\tau}_j = 0\,,\ \sum_{k=1}^{4}\hat{\lambda}_k = 0 \qquad (1)$$

(2) ε_{ij} เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน และมีการแจกแจงแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 หรือ $\varepsilon_{ij} \sim NID(0,\sigma^2)$

(3) คำว่า "ข้อมูลสูญหาย" ในงานวิจัยนี้จะหมายถึงข้อมูลหรือค่าการทดลองที่ไม่สามารถเก็บได้ และข้อมูลหรือค่าการทดลองที่สามารถเก็บได้แต่ผิดปกติ จึงต้องตัดค่าการทดลองหน่วยนั้นทิ้งไป

สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ได้ประกาศดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

สัญลักษณ์	ความหมาย
y_{ijk}	ค่าสังเกตในแถวที่ i และคอลัมน์ ที่ k ของทรีทเมนต์ที่ j
i	ดัชนีของแถวที่ i
j	ดัชนีของทรีทเมนต์ที่ j
k	ดัชนีของคอลัมน์ที่ k
K	ลำดับของแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์
μ	ค่าเฉลี่ยทั้งหมด
ω_i	อิทธิพลของแถวที่ i
τ_j	อิทธิพลของทรีทเมนต์ที่ j
λ_k	อิทธิพลของคอลัมน์ที่ k
ε_{ijk}	ความคลาดเคลื่อน
$\hat{\mu}$	ค่าประมาณของค่าเฉลี่ยทั้งหมด
$\hat{\omega}_i$	ค่าประมาณอิทธิพลของแถวที่ i
$\hat{\tau}_j$	ค่าประมาณอิทธิพลของทรีทเมนต์ ที่ j
$\hat{\lambda}_k$	ค่าประมาณอิทธิพลของคอลัมน์ที่ k
$y_{...}$	ผลรวมทั้งหมด
$y_{i..}$	ผลรวมแถวที่ i
$y_{.j.}$	ผลรวมทรีทเมนต์ที่ j
$y_{..k}$	ผลรวมคอลัมน์ที่ k

ตารางที่ 1 สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (ต่อ)

สัญลักษณ์	ความหมาย
SS_{Tr}	ผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์
SS_E	ผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน
SS_T	ผลรวมกำลังสองทั้งหมด
MS_{Tr}	ค่ากำลังสองเฉลี่ยของทรีทเมนต์
MS_E	ค่ากำลังสองเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อน
F_{test}	การทดสอบแบบเอฟ
$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$	สมการถดถอยผลรวมกำลังสองสำหรับโมเดลแบบเต็ม
$\hat{\omega}_i^R$	ค่าประมาณอิทธิพลของแถวที่ i สำหรับโมเดลแบบลดรูป
$\hat{\lambda}_k^R$	ค่าประมาณอิทธิพลของคอลัมน์ที่ j สำหรับโมเดลแบบลดรูป
$R(\mu,\omega,\lambda)$	สมการถดถอยผลรวมกำลังสองสำหรับโมเดลแบบลดรูป

ในงานวิจัยนี้จะใช้ตัวอย่างของแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ในกรณีที่มีข้อมูลสูญหาย 2 ค่า รูปแบบของลาตินสแควร์ในงานวิจัยนี้จะแสดงกรณีของข้อมูลสูญหาย 2 ค่า โดยข้อมูลที่สูญหาย คือ y_{221} หายในแถวที่ 2 คอลัมน์ที่ 1 โดยมีทรีทเมนต์ที่ B หาย (ω_2, τ_2 และ λ_1) และ y_{342} หาย ในแถวที่ 3 คอลัมน์ที่ 2 โดยมีทรีทเมนต์ที่ D หาย (ω_3, τ_4 และ λ_2) ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แผนการทดลองแบบลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 โดยที่ข้อมูลสูญหาย 2 ค่า แบบคนละแถว คนละคอลัมน์โดยที่ทรีทเมนต์ต่างกันหายไป

รุ่นของรถยนต์	แบบของเครื่องรถยนต์				$y_{i..}$
	1	2	3	4	
1	A = 25	B = 31	C = 30	D = 26	$y_{1..} = 112$
2	~~B = –~~	C = 33	D = 32	A = 34	$y_{2..} = 99$
3	C = 24	~~D = –~~	A = 36	B = 41	$y_{3..} = 101$
4	D = 37	A = 28	B = 28	C = 37	$y_{4..} = 130$
$y_{..k}$	$y_{..1} = 86$	$y_{..2} = 92$	$y_{..3} = 126$	$y_{..4} = 138$	$y_{...} = 112$
$y_{.j.}$	$y_{.1.} = 123$	$y_{.2.} = 100$	$y_{.3.} = 124$	$y_{.4.} = 95$	

แหล่งที่มา: โดยดัดแปลงมาจากอัจฉริยา ปราบอริพ่าย[12]

ตัวแบบของแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ ได้แก่

$$y_{ijk} = \mu + \omega_i + \tau_j + \lambda_k + \varepsilon_{ijk} \qquad \begin{cases} i = 1,2,3,\ldots,K \\ j = 1,2,3,\ldots,K \\ k = 1,2,3,\ldots,K \end{cases} \qquad (2)$$

จาก Montgomery [1] วิธีของการถดถอยทั่วไปสามารถกำหนดสมการผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ แถว คอลัมน์ และผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อนรวมถึงผลรวมกำลังสองทั้งหมด ได้ดังสมการที่ 3 ถึง 5

$$SS_{Tr} = R(\mu,\omega,\tau,\lambda) - R(\mu,\omega,\lambda) \quad (3)$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - R(\mu,\omega,\tau,\lambda) \quad (4)$$

$$SS_T = SS_{Tr} + SS_{Row} + SS_{Column} + SS_E = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{N^2} \quad (5)$$

สำหรับแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ (SS_{Tr}) ดังสมการที่ 3 สามารถหาได้จากสมการที่ 6 และ 7 คือ

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \hat{\mu}y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i y_{i..} + \sum_{j=1}^{K}\hat{\tau}_j y_{.j.} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k y_{..k} \quad (6)$$

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \hat{\mu}^R y_{...} + \sum_{i=1}^{K}\hat{\omega}_i^R y_{i..} + \sum_{k=1}^{K}\hat{\lambda}_k^R y_{..k} \quad (7)$$

โดยที่ $R(\mu,\omega,\lambda)$ เป็นสมการถดถอยผลรวมกำลังสองสำหรับโมเดลแบบลดรูป ซึ่งจะไม่พิจารณาถึงผลกระทบของทรีทเมนต์ที่ j

3.2 สมการปกติกำลังสองน้อยที่สุดของลาตินสแควร์อันดับ 4x4 สำหรับโมเดลแบบเต็ม

ด้วยคุณสมบัติของตัวแบบคงที่ (Fixed Effects Model) จากตารางที่ 2 จะได้ตัวอย่างการเขียนสมการปกติ (Normal Equations) แบบเต็มรูปได้ดังสมการที่ 8 ถึง 20

$$\mu: 14\hat{\mu} + (4\hat{\omega}_1 + 3\hat{\omega}_2 + 3\hat{\omega}_3 + 4\hat{\omega}_4) + (4\hat{\tau}_1 + 3\hat{\tau}_2 + 4\hat{\tau}_3 + 3\hat{\tau}_4) + (3\hat{\lambda}_1 + 3\hat{\lambda}_2 + 4\hat{\lambda}_3 + 4\hat{\lambda}_4) = y_{...} \quad (8)$$

$$\omega_1: 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{1..} \quad (9)$$

$$\omega_2: 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_2 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + (\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{2..} \quad (10)$$

$$\omega_3: 3\hat{\mu} + 3\hat{\omega}_3 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3) + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{3..} \quad (11)$$

$$\omega_4: 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_4 + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{4..} \quad (12)$$

$$\tau_1: 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 4\hat{\tau}_1 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.1.} \quad (13)$$

$$\tau_2: 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 3\hat{\tau}_2 + (\hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.2.} \quad (14)$$

$$\tau_3: 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + 4\hat{\tau}_3 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.3.} \quad (15)$$

$$\tau_4: 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_4) + 3\hat{\tau}_4 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{.4.} \quad (16)$$

$$\lambda_1: 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + 3\hat{\lambda}_1 = y_{..1} \quad (17)$$

$$\lambda_2: 3\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3) + 3\hat{\lambda}_2 = y_{..2} \quad (18)$$

$$\lambda_3: 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + 4\hat{\lambda}_3 = y_{..3} \quad (19)$$

$$\lambda_4: 4\hat{\mu} + (\hat{\omega}_1 + \hat{\omega}_2 + \hat{\omega}_3 + \hat{\omega}_4) + (\hat{\tau}_1 + \hat{\tau}_2 + \hat{\tau}_3 + \hat{\tau}_4) + 4\hat{\lambda}_4 = y_{..4} \quad (20)$$

3.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของลาตินสแควร์อันดับ 4x4 สำหรับโมเดลแบบเต็ม

บริบทที่ 1 *แผนแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่าตามตัวอย่างตารางที่ 2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของ* $\hat{\mu}$, $\hat{\omega}_i$, $\hat{\tau}_j$ *และ* $\hat{\lambda}_k$ *ในโมเดลแบบเต็มของ* y_{ijk} *สามารถกำหนด ได้ดังสมการที่ 21 ถึง 30*

$$\hat{\mu} = \frac{y_{...} + y_{2..} + y_{3..} + y_{..2} + y_{4..} + y_{.1.} + y_{.2.}}{32} \quad (21)$$

$$\hat{\omega}_{i'} = \frac{y_{i'..}}{4} - \hat{\mu} \; for\, i' = 1,4 \quad (22)$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{2y_{2..} + y_{.2.} + y_{..1}}{4} - 3\hat{\mu} \quad (23)$$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{2y_{3..} + y_{.4.} + y_{..2}}{4} - 3\hat{\mu} \quad (24)$$

$$\hat{\tau}_{j'} = \frac{y_{.j'.}}{4} - \hat{\mu} \; for\, j' = 1,3 \quad (25)$$

$$\hat{\tau}_2 = \frac{2y_{.2.} + y_{2..} + y_{..1}}{4} - 3\hat{\mu} \quad (26)$$

$$\hat{\tau}_4 = \frac{2y_{.4.} + y_{3..} + y_{..2}}{4} - 3\hat{\mu} \quad (27)$$

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{2y_{..1} + y_{2..} + y_{.2.}}{4} - 3\hat{\mu} \quad (28)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{2y_{..2} + y_{3..} + y_{.4.}}{4} - 3\hat{\mu} \quad (29)$$

$$\hat{\lambda}_{k'} = \frac{y_{..k'}}{4} - \hat{\mu} \; for\, k' = 3,4 \quad (30)$$

พิสูจน์ จากการแก้ชุดของสมการที่ 8 ถึง 20 และสมการที่ 1 จะสามารถแก้สมการหาค่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ออกมาได้

3.4 สมการปกติกำลังสองน้อยที่สุดของลาตินสแควร์อันดับ 4x4 สำหรับโมเดลแบบลดรูป

ตัวแบบของแผนการทดลองแบบลาตินแสควร์ของโมเดลแบบลดรูป ได้แก่

$$y_{ik} = \mu^R + \omega_i^R + \lambda_k^R + \varepsilon_{ik} \quad \begin{cases} i = 1,2,3,\dots,K \\ k = 1,2,3,\dots,K \end{cases} \quad (31)$$

และทำนองเดียวกันด้วยคุณสมบัติของตัวแบบคงที่ (Fixed Effects Model) จะได้ตัวอย่างการเขียนสมการปกติ (Normal Equations) แบบลดรูปได้ดังสมการที่ 32 และ33 เป็นต้น

$$\mu: 14\hat{\mu} + (4\hat{\omega}_1 + 3\hat{\omega}_2 + 3\hat{\omega}_3 + 4\hat{\omega}_4) + (3\hat{\lambda}_1 + 3\hat{\lambda}_2 + 4\hat{\lambda}_3 + 4\hat{\lambda}_4) = y_{...} \quad (32)$$

$$\omega_1: 4\hat{\mu} + 4\hat{\omega}_1 + (\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_4) = y_{1..} \quad (33)$$

3.5 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของลาตินสแควร์อันดับ 4x4 สำหรับโมเดลแบบลดรูป

บริบทที่ 2 *แผนแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่าตามตัวอย่างตารางที่ 2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ของ* $\hat{\mu}^R$, $\hat{\omega}_i^R$ *และ* $\hat{\lambda}_k^R$ *ในโมเดลแบบลดรูปของ* y_{ik} *สามารถกำหนดได้ ดังสมการที่ 34 ถึง 40*

$$\hat{\mu}^R = \frac{2y_{...} + y_{2..} + y_{3..} + y_{..1} + y_{..2}}{40} \quad (34)$$

$$\hat{\omega}_{i}^{R} = \frac{y_{i.}}{4} - \hat{\mu}\ for\ i' = 1,4 \quad (35)$$

$$\hat{\omega}_{2}^{R} = \frac{3y_{2.} + y_{.1}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \quad (36)$$

$$\hat{\omega}_{3}^{R} = \frac{3y_{3.} + y_{.2}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \quad (37)$$

$$\hat{\lambda}_{1}^{R} = \frac{3y_{.1} + y_{2.}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \quad (38)$$

$$\hat{\lambda}_{2}^{R} = \frac{3y_{.2} + y_{3.}}{8} - \frac{3\hat{\mu}}{2} \quad (39)$$

$$\hat{\lambda}_{k}^{R} = \frac{y_{.k}}{4} - \hat{\mu}\ for\ k' = 3,4 \quad (40)$$

พิสูจน์ ทำการเขียนสมการปกติแบบลดรูปได้ทั้งหมด 9 สมการ (ตามตัวอย่างสมการที่ 32 และ 33) หลังจากนั้นทำการแก้สมการก็จะสามารถทำการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบลดรูปได้

3.6 สมการถดถอยกำลังสองของลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของโมเดลแบบเต็ม

<u>บริบทที่ 3</u> *แผนแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่าตามตารางที่ 2 สมการถดถอยกำลังสองสำหรับแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ของโมเดลแบบเต็ม ได้ดังสมการที่ 41*

$$R(\mu,\omega,\tau,\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_{i}^{2} + \sum_{j=1}^{4} y_{j}^{2} + \sum_{k=1}^{4} y_{k}^{2}}{4} \quad (41)$$

$$+ \frac{(y_{sum\_1})^2 + (y_{sum\_2})^2}{4} - \frac{\left[y_{...} + (y_{sum\_1} + y_{sum\_2})\right]^2}{16}$$

เมื่อ $y_{sum\_1} = y_{2.} + y_{.2} + y_{.1}$

$y_{sum\_2} = y_{3.} + y_{.4} + y_{.2}$

พิสูจน์ แทนค่าสมการที่ 21 ถึง 30 ลงในสมการที่ 6 แก้สมการและจัดเรียงใหม่จะได้สมการที่ 41

3.7 สมการถดถอยกำลังสองของลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ของโมเดลแบบลดรูป

<u>บริบทที่ 4</u> *แผนแบบการทดลองแบบลาตินสแควร์ในกรณีข้อมูลสูญหาย 2 ค่าตามตารางที่ 2 สมการถดถอยกำลังสองสำหรับแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์ของโมเดลแบบลดรูป ได้ดังสมการที่ 42*

$$R(\mu,\omega,\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^{4} y_{i..}^{2} + \sum_{k=1}^{4} y_{..k}^{2}}{4} + \frac{(y_{2..} + y_{..1})^2 + (y_{3..} + y_{..2})^2}{8} \quad (42)$$

$$- \frac{\left[(2y_{...} + (y_{2..} + y_{3..} + y_{..1} + y_{..2})\right]^2}{80}$$

พิสูจน์ แทนค่าสมการที่ 34 ถึง 40 ลงในสมการที่ 7 แก้สมการและจัดเรียงใหม่จะได้สมการที่ 42

จากสมการที่ 3,4 และ 41,42 จะสามารถคำนวณหาค่าผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์, ค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน และสมการถดถอยกำลังสองของลาตินสแควร์สำหรับโมเดลแบบเต็ม และแบบลดรูปตามลำดับ ได้ดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 การวิเคราะห์ความแปรปรวนสำหรับแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์จากตัวอย่างตารางที่ 2 โดยมีข้อมูลสูญหายจากการทดลอง 2 ค่า

$R(\mu,\omega,\tau,\lambda)$	14092.1875
$R(\mu,\omega,\lambda)$	14082.70
SS_{Tr}	9.4875 (df = 3)
SS_{E}	197.8125 (df = 4)
MS_{Tr}	3.1625
MS_{E}	49.4531
F_{test}	0.0639

3.8 การเปรียบเทียบผลระหว่างวิธีแบบตรงกับวิธีการประมาณค่าสูญหายโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด

ในหัวข้อนี้จะทำการเปรียบเทียบวิธีการแก้ปัญหาการวิเคราะห์การทดลองแบบลาตินสแควร์ ระหว่างวิธีแบบตรง (Exact Approach) และวิธีการประมาณค่าสูญหาย (Missing Plot Approach) โดยค่าที่จะทำการวัดเพื่อไปสู่การเปรียบเทียบได้แก่

1. ค่าความคลาดเคลื่อนในรูปของค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย (Mean Absolute Deviation (MAD)) และค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย (Mean Square Error (MSE))

2. ค่าผลรวมกำลังสองทรีทเมนต์ (Sum Square of Treatment (SS_{Tr})) และค่าเฉลี่ยผลรวมกำลังสองทรีทเมนต์ (Mean Square of Treatment (MS_{Tr}))

วิธีการประมาณค่าสูญหายของ Yates ได้ค่าที่ประมาณ y_{221} = 31.25 และ y_{342} = 34.25 โดยค่าที่ประมาณได้จะถูกแทนค่าลงไปในค่าที่สูญหาย

3.8.1 การเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อน

ในการคำนวณหาค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย และค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย สามารถคำนวณได้ดังสมการที่ 43 และ 44

$$MAD = (1/14)\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}|e_{ijk}| \quad (43)$$

$$MSE = (1/14)\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\sum_{k=1}^{4}e_{ijk}^{2} \quad (44)$$

โดยที่ $e_{ijk} = y_{ijk} - \hat{y}_{ijk}$

และ $\hat{y}_{ijk} = \hat{\mu} + \hat{\omega}_{i} + \hat{\tau}_{j} + \hat{\lambda}_{k}$

สูตรการคำนวณดังสมการที่ 43 และ44 ซึ่งแสดงค่าที่ได้ จากการคำนวณได้ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย และค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย โดยใช้ตัวหารเท่ากับ 14

วิธีการ	วิธีแบบตรง	วิธีการประมาณค่าสูญหาย
MAD	3.1607	3.1607
MSE	14.1295	14.1295

ในการคำนวณหาค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย และค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ย สุดท้ายค่าความผิดพลาดสัมบูรณ์เฉลี่ย และค่าความผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยระหว่างวิธีแบบตรงกับวิธีการประมาณค่าสูญหายมีค่าเท่ากันดังตารางที่ 4

3.8.2 การเปรียบเทียบค่าผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ และค่าเฉลี่ยกำลังสองของทรีทเมนต์

ในหัวข้อนี้จะทำการวิเคราะห์ความแปรปรวนระหว่างวิธีแบบตรงกับวิธีการประมาณค่าสูญหาย จะทำการเปรียบเทียบค่าผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์ และค่าเฉลี่ยกำลังสองของทรีทเมนต์ได้ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 การวิเคราะห์ความแปรปรวนระหว่างวิธีแบบตรงกับวิธีการประมาณค่าสูญหาย

	วิธีแบบตรง (มาจากตารางที่ 3)	วิธีการประมาณค่าสูญหาย
SS_{Tr}	*9.4875 (df = 3)*	*12.0156 (df = 3)*
SS_E	*197.8125 (df = 4)*	*197.8125 (df = 6)*
MS_{Tr}	*3.1625*	*4.0052*
MS_E	49.4531	32.9688
F_{test}	0.0639	0.1215

4.สรุปผล

จากงานวิจัยจะสามารถสรุปผลการวิจัยได้ดังนี้

1. การพัฒนาสูตรการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยวิธีแบบตรงแบบไม่เอนเอียงจะนำไปสู่การคำนวณหาค่าผลรวมกำลังสองทรีทเมนต์ได้ง่าย

2. วิธีแบบตรงจะให้ค่าผลรวมกำลังสองของความคลาดเคลื่อน และค่าเฉลี่ยกำลังสองของทรีทเมนต์แบบไม่เอนเอียง ในขณะที่วิธีการประมาณค่าสูญหายให้ค่าแบบเอนเอียง

3. ค่า F_{test} ที่ได้จากวิธีแบบตรงจะถูกต้องที่สุดแต่ค่า F_{test} ที่ คำนวณจากวิธีการประมาณค่าอาจนำไปสู่การสรุปผลการทดลองที่ผิด

4. สูตรที่งานวิจัยนี้พัฒนาขึ้นทางโรงงานอุตสาหกรรมสามารถนำไปใช้ได้เลย โดยไม่ต้องมีการประมาณค่าที่สูญหาย

เอกสารอ้างอิง

[1] Montgomery, D.C. "Design and analysis of experiments." John Wiley & Sons (2013)

[2] Allan, F.E., Wishart J. "A method of estimating the yield of a missing plot in field experimental work." The Journal of Agricultural Science 20.03 (1930): pp. 399-406.

[3] Yates, F. "Incomplete randomized blocks." Annals of Eugenics 7.2 (1936): pp. 121-140.

[4] Anderson, R.L. "Missing–plot techniques." International Biometric Society (1946): pp. 41-47.

[5] Rubin, D.B. "A non-iterative algorithm for least squares estimation of missing values in any analysis of variance design." Applied Statistics (1972): pp.136-141

[6] De Lury, D.B. "The analysis of latin squares when some observations are missing." Journal of the American Statistical Association 41.235 (1946), pp. 370-389

[7] Wilkinson, G.N. "The analysis of covariance with incomplete data." Submitted for publication to Biometrics (1957).

[8] Healy, M., Westmacott, M. "Missing values in experiments analysed on automatic computers." Applied statistics (1956): pp. 203-206.

[9] Baird, H.R., Kramer, C.Y. "Analysis of variance of a balanced incomplete block design with missing observations." Applied Statistics (1960): pp. 189-198.

[10] Kramer, C.Y., Glass, S. "Analysis of Variance of a Latin Square Design with Missing Observations." Journal of the Royal Statistical Society. (Applied Statistics) 9.1, (1960): pp. 43-50.

[11] Sirikasemsuk, K. "One missing value problem in latin square design of any order regression Sum of Squares." SCIS & ISIS (2016): pp. 142-147

[12] อัจฉริยา ปราบอริพ่าย, เอกสารประกอบการสอนการออกแบบการทดลองแบบลาตินสแคว, ข้อมูลจาก http://pirun.ku.ac.th/~faasatp/734462/data/chapter 5.pdf (วันที่สืบค้นข้อมูล 2 กุมภาพันธ์ 2560)

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นางสาวกนกวรรณ ท่าช่วงทำเล
วัน เดือน ปีเกิด	28 ธันวาคม 2535 ที่อุดรธานี
ที่อยู่	160/3 ซ.บ้านศรีพินิจ ถ.ทหาร ต.หมากแข้ง อ.เมือง จ.อุดรธานี 41000
ประวัติการศึกษา	2558 วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาสถิติ มหาวิทยาลัยขอนแก่น
ผลงานวิจัย	การเปรียบเทียบผลรวมกำลังสองของทรีทเมนต์และค่าความผิดพลาดระหว่างวิธีตรงและวิธีการประมาณค่าสูญหาย: กรณีศึกษาแผนการทดลองแบบลาตินสแควร์อันดับ 4 x 4 ที่มีข้อมูลสูญหายสองค่า (Proceedings IE Network Conference 2017)
ประวัติการทำงาน	
พ.ศ. 2558-2560	ตำแหน่งนักวิเคราะห์ข้อมูลบริษัทเอ็มโอแค็ป (Abbott) จำกัด
พ.ศ. 2560-2561	ตำแหน่ง Admin Central Replenishment Fresh Food บริษัทสยามแม็คโคร จำกัด (มหาชน)