

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองค์สำหรับวิธีปริพันธ์
เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL
POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE
NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM
OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION



ฐิติพร รุ่งสุริยะศิลป์
วารางคณา ชัดนาค
ศศิกร สงขาว

ฉบับ.
๗๗๑ ก
๑๕๕๐

เลขที่.....
เลขทะเบียน..... 82785
วัน,เดือน,ปี..... 23 ก.ค. 2551

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2550

b. ๗๗๑ ก *๕๕๐
i.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL
POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE
NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM OF
ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION**

THITIPORN RUNGSURIYASIN

WARANGKANA KADNAK

SASIKORN SONGKOW

**A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2007**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ

การประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์สำหรับวิธีปริพันธ์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

ชื่อนักศึกษา

นางสาวฐิติพร รุ่งสุริยะศิลป์ 47050009

นางสาววรางคณา ชัดนาค 47050028

นางสาวศศิกร สงขาว 47050034

ภาควิชา

คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา

คณิตศาสตร์ประยุกต์

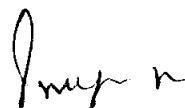
อาจารย์ที่ปรึกษา

รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

อาจารย์จินดา ไชยช่วย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตร์บัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2550

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อาจารย์พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
อาจารย์พุทธพร วานิชกร กรรมการ	
รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อาจารย์จินดา ไชยช่วย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	



(รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณบดีของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่ สถาบันที่ให้ความรู้

ฐิติพร



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากของจอร์แดนสำหรับวิธีปริพันธ์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
ชื่อนักศึกษา	นางสาวจิตติพร รุ่งสุริยะศิลป์ 47050009 นางสาววราภรณ์ ชัดนาค 47050028 นางสาวศศิกร สงขาว 47050034
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2550
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร.ไมตรี โพธิ์สุข รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวัฒน์ อาจารย์จินดา ไชยช่วย

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ เป็นแนวทางหนึ่งที่จะแนะนำให้ใช้วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ในวิธีใหม่นี้จะใช้หลักความจริงที่ว่าปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นสมมูลกับสมการปริพันธ์ ดังนั้นจะใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญห โดยวิธีเกาส์-เลอจองด์และจะนำผลเฉลยที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีของรุงเงคุตดา

Special Project Title	AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
Students	Ms.Thitiporn Rungsuriyasin 47050009 Ms.Warangkana Kadnak 47050028 Ms.Sasikom Songkow 47050034
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2007
Special Project Advisor	Associate Professor Dr.Maitree Podisuk Associate Professor Pongpan Rattanathanawan Mr.Chinda Chaichuay

ABSTRACT

In this special problem, the new way of finding the numerical solution of the initial value problem of the ordinary differential equation will be introduced. This new method uses the fact that the initial value problem of the ordinary differential equation is equivalent to the integral equation. Thus we use the integral equation to compute the solution by Gauss-Legendre Quadrature formulas and compare the results with the result of Runge-Kutta Method.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องรูปแบบปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหасวมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ดร.ไมตรี โปธิ์สุข รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวัฒน์ และอาจารย์จินดา ไชยช่วย

อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำ และเป็นທີ່ปรึกษาในการแก้ปัญหาดังกล่าว รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้ประสาทวิชา ความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ และขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ รวมทั้งเพื่อนๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ii
กิตติกรรมประกาศ	iii
สารบัญ	iv
สารบัญตาราง	vi
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา	1
1.4 ขั้นตอนของการวิจัย	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ	
แบบปัญหาค่าเริ่มต้น	3
2.1 วิธีของออยเลอร์ (Euler’s Method)	3
2.2 วิธีของเทย์เลอร์ (Taylor’s Method)	3
2.3 ระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา (Runge-Kutta Method)	5
2.4 Goeken-Johnson formula	7
2.5 Wu’s formula	7
2.6 Runge-Kutta-Fehlberg method	8
2.7 รูปแบบของนิวตัน-โค้ต (Newton-Cotes formula)	9
2.8 รูปแบบเกาส์-ควอดเรเจอร์ (Gauss-Quadrature formula type)	9
2.8.1 เกาส์-เลอจองด์	10
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	12
งานวิจัยขั้นที่ 1	12
งานวิจัยขั้นที่ 2	26
งานวิจัยขั้นที่ 3	33
งานวิจัยขั้นที่ 4	50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ผลงานศึกษาวิจัย	63
การสร้างสูตร	63
ตัวอย่าง	66
บทที่ 5 สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ	75
5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย	75
5.2 ข้อเสนอแนะ	75
รายการอ้างอิง	76



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่	หน้า
ตารางที่ 3.57 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	55
ตารางที่ 3.58 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	55
ตารางที่ 3.59 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	56
ตารางที่ 3.60 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	56
ตารางที่ 3.61 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	57
ตารางที่ 3.62 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	58
ตารางที่ 3.63 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	58
ตารางที่ 3.64 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	59
ตารางที่ 3.65 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	59
ตารางที่ 3.66 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	60
ตารางที่ 3.67 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	61
ตารางที่ 3.68 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	61
ตารางที่ 3.69 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	62
ตารางที่ 3.70 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6 (งานวิจัยชิ้นที่ 4)	62
ตารางที่ 4.1 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 1	66
ตารางที่ 4.2 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 1	67
ตารางที่ 4.3 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 1	67
ตารางที่ 4.4 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 1	68
ตารางที่ 4.5 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 2	69
ตารางที่ 4.6 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 2	70
ตารางที่ 4.7 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 2	70
ตารางที่ 4.8 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 2	71
ตารางที่ 4.9 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 3	72
ตารางที่ 4.10 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 3	73
ตารางที่ 4.11 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 3	73
ตารางที่ 4.12 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 3	74

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ ปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขของตัวแปรอิสระและค่าตัวแปรตาม การกำหนดค่าตัวแปรอิสระและค่าตัวแปรตามหนึ่งคู่เป็นเงื่อนไข เรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขจุดเริ่มต้น

รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ $y'(x) = f(x, y)$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(a) = c$ โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์จะสามารถหาคำตอบได้สองแบบ คือ แบบแรกได้แก่ การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ซึ่งวิธีนี้จะใช้ได้เฉพาะกรณีง่ายๆ แบบที่สองเป็นการหาคำตอบเชิงตัวเลข ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการคำนวณเชิงตัวเลขนั้นเป็นสิ่งสำคัญ และจากที่ทราบว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นที่กล่าวมาข้างต้นนั้น สมมูลกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t, y) dt$ ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหแทนได้

โดยในที่นี้จะใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญห แล้วหาผลเฉลยที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีของรุงเงคุดตา

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

- 1) เพื่อศึกษาวิธีการใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหสมการเงื่อนไขเริ่มต้น
- 2) หารูปแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหของสมการเพื่อความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาผลเฉลย

1.3 ขอบเขตของปัญหา

- 1) ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น
- 2) หารูปแบบเชิงตัวเลขไม่เกิน 6 จุด
- 3) นำผลที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้ไปใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

- ขั้นตอนที่ 1 ศึกษาข้อมูลและทฤษฎีที่ใช้ในการดำเนินงาน
- ขั้นตอนที่ 2 หาสมการเพื่อคำตอบของสมการไม่เกิน 6 จุด
- ขั้นตอนที่ 3 เขียนโปรแกรมเพื่อทดสอบสมการ เพื่อหาค่าที่ต้องการออกมา
- ขั้นตอนที่ 4 วิเคราะห์และรวบรวมข้อมูลที่ได้
- ขั้นตอนที่ 5 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) เพื่อนำไปใช้ได้ดีในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น
- 2) เพื่อเป็นแนวทางให้มีการศึกษาวิจัยต่อเนื่องไปอีก



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(ordinary differential equations)

อยู่ในรูปสมการ $y'(x) = f(x, y)$ (2.1)

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(a) = c$

2.1 วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งมีรูปสมการเป็น

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \quad (2.2)$$

นั่นคือวิธีออยเลอร์จะหา y_{m+1} โดยใช้เส้นตรงที่มีความชัน $y'(x_m)$ และผ่านจุด (x_m, y_m) เป็นตัวกำหนด ซึ่งในงานวิจัยจะเรียกสมการ (2.2) นี้ว่า RK-1 ซึ่งใช้แทนสมการรุงเง-คุตดา อันดับหนึ่ง

2.2 วิธีของเทย์เลอร์ (Taylor's Method)

วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งเป็นวิธีที่ให้ผลดีเป็นที่น่าพอใจและมีผู้ที่นิยมใช้กันมาก เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่าย สาเหตุที่เรียกว่าวิธีของเทย์เลอร์เพราะใช้ออนุกรมเทย์เลอร์เป็นหลัก

จากสมการ $y'(x) = f(x, y)$, $y(a) = c$

โดยที่ $a \leq x \leq b$, $h = \frac{b-a}{n}$, $y(c) = 0$ และ $x_k = a + kh$

กระจายเทอม $y(x_m + h)$ ตามอนุกรมกำลังเทย์เลอร์ได้

$$y(x_m + h) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{6} y'''(x_m) + \dots \quad (2.3)$$

ดังนั้น $y(x_m + h) \cong y_m + hf(x_m, y_m)$

จึงให้ $y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m)$ (2.4)

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (2.4) วิธีของเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง หรือที่นิยมเรียกกันว่าวิธีของออยเลอร์ในทำนองเดียวกัน จากรูปแบบที่ (2.3)

$$y(x_m + h) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) \quad \text{แต่ } y'(x) = f(x, y)$$

$$\therefore y'' = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = f_x + f_y y' = f_x + ff_y$$

$$\therefore y(x_m + h) \cong y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)]$$

ดังนั้นจึงทำให้

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)] \quad (2.5)$$

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (2.5) วิธีของเทย์เลอร์อันดับสอง

สำหรับวิธีของเทย์เลอร์อันดับสาม ก็เป็นเช่นเดียวกันกับสองแบบแรกซึ่งใช้รูปแบบที่ (2.3) ได้ว่า

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{6} y'''(x_m) + \dots$$

$$y'(x) = f(x, y), \quad y'' = f_x + ff_y$$

$$\therefore y''' = \frac{\partial}{\partial x} (f_x + ff_y)$$

$$= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial (ff_y)}{\partial x}$$

$$= \left[f_{xx} \frac{dx}{dx} + f_{xy} \frac{dy}{dx} \right] + f \left[\frac{\partial f_y}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right] + f_y \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right]$$

$$= f_{xx} + ff_{xy} + ff_{yx} + f^2 f_{yy} + f_y f_x + ff_y^2$$

ถ้า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องแล้ว $f_{xy} = f_{yx}$ จะได้ว่า

$$y''' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2$$

ดังนั้นรูปแบบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสาม

$$y_{m+1} = y_m + h[f]_{(x_m, y_m)} + \frac{h^2}{2} [f_x + ff_y]_{(x_m, y_m)} + \frac{h^3}{6} [f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2]_{(x_m, y_m)} \quad (2.6)$$

สำหรับรูปแบบวิธีของเทย์เลอร์อันดับที่สูงขึ้นไปจะหาได้ในทำนองเดียวกันกับทั้งสามแบบที่แล้วมา โดยใช้รูปแบบที่ (2.3)

2.3 ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta Method)

ปี ค.ศ. 1895 นักคณิตศาสตร์ชื่อรุงเง (C. Runge) ได้สร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้น ต่อมาในปี ค.ศ.1901 นักคณิตศาสตร์ชื่อคุดตา (W.Kutta) ได้ปรับปรุงวิธีการของรุงเง และให้ชื่อระเบียบวิธีใหม่นี้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta Method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันมากในการประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x, y) \quad (2.1)$$

$$y(a) = c$$

ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตาเป็นระเบียบวิธีแบบขั้นเดียวโดยรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุดตาอันดับที่ s คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \quad , \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (increment function) $\phi(x_m, y_m; h)$ คือความชันเฉลี่ยตลอดขนาดขั้น h ซึ่งกำหนดให้มีรูปแบบโดยทั่วไป ดังนี้

$$\phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^s a_i k_i \quad (2.8)$$

เมื่อ

$$k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; \quad i = 1 \\ f(x_m + hc_i, y_m + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j) & ; \quad i = 2, \dots, s \end{cases} \quad (2.9)$$

และ

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (2.10)$$

โดยที่ a_i , c_i และ b_{ij} เป็น สัมประสิทธิ์ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา และ h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้นมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ และ s เป็นอันดับของระเบียบวิธี

วิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta Method) เป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่นิยมใช้กันมาก ซึ่งเป็นวิธีที่ปรับปรุงมาจากวิธีออยเลอร์ แต่สำหรับวิธีของรุงเง-คุดตาจะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่หลายจุด เช่นในกรณีที่ใช้ความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่สองจุด จะได้รูปแบบ

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \quad (2.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

นั่นคือวิธีนี้ใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และจะมีค่าความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของ $y'(x_m)$ และ $f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$

รูปแบบของสมการที่ (2.11) เรียกว่าวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง (Runge-Kutta method of second order) ซึ่งจะต้องหาค่า a_1, a_2, α และ β ซึ่งวิธีการหาค่าเหล่านี้จะกระทำโดยใช้ความรู้ของการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ส่วนวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สาม (Runge-Kutta method of third order) จะมีรูปแบบเป็น

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3) \quad (2.12)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta_1 h k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2)$$

ซึ่ง

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ และ } \alpha_2 = 1$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = -1, \beta_3 = 2, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{1}{6}$$

ในทำนองเดียวกันกับวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง และ อันดับที่สาม อาจจะหาวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสูงขึ้นไปเรื่อยๆ ได้ แต่ทั้งในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สูงเกินกว่าสี่จะไม่ทำให้การหาผลเฉลยได้ผลดีขึ้น ดังนั้นโดยทั่วไปจึงใช้วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ที่นิยมใช้จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.13)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} k_2\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ $k_4 = f\left(x_m + h, y_m + h k_3\right)$ เท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยทั่วไปจะเขียน RK-2 , RK-3 และ RK-4 แทนวิธีของรุงเง-คุตดาอันดับที่สอง อันดับที่สาม และอันดับที่สี่ ตามลำดับ

2.4 Goeken-Johnson formula

ในปี 1999 Goeken และ Johnson ได้พัฒนาระเบียบวิธีรุงเง-คุตดาอันดับที่สี่ เพื่อหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นแบบอิสระ (autonomous) ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{5}{48} K_1 + \frac{27}{56} K_2 + \frac{125}{336} K_3 + \frac{1}{24} K_4 \quad (2.14)$$

เมื่อ

$$K_1 = hf(y_m)$$

$$K_2 = hf\left(y_m + \frac{1}{3} K_1 + \frac{1}{18} hf_y K_1\right)$$

$$K_3 = hf\left(y_m - \frac{152}{125} K_1 + \frac{252}{125} K_2 - \frac{44}{125} hf_y K_1\right)$$

$$K_4 = hf\left(y_m + \frac{19}{2} K_1 + \frac{22}{7} K_2 + \frac{22}{14} K_3 + \frac{5}{2} hf_y K_1\right)$$

เราเรียกสมการ (2.14) นี้ว่า GJ

2.5 Wu's formula

ในปี 2003 Wu ก็ได้พัฒนาระเบียบวิธีรุงเง-คุตดาขึ้นมา เพื่อหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นแบบอิสระ ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = \frac{3}{2} y_m - \frac{1}{2} y_{m-1} + h \left[\frac{1}{2} f_m + \frac{121}{192} f(y_m, \frac{8}{11} hf_m) + \frac{23}{192} f(y_m - \frac{44}{23} hf_m + \frac{44}{23} hf(y_m + \frac{8}{11} hf_m)) - \frac{121}{192} f(y_{m-1} + \frac{20}{29} hf_{m-1}) - \frac{23}{192} hf(y_{m-1} - \frac{44}{23} hf_{m-1} + \frac{44}{23} f(y_{m-1} + \frac{8}{11} hf_{m-1})) \right] \quad (2.15)$$

เราเรียกสมการ (2.15) นี้ว่า WU

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.6 Runge-Kutta-Fehlberg method

การที่จะรับประกันการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ การแก้ปัญหาสองครั้งโดยการใช้ขนาด h และ $\frac{h}{2}$ และการคำนวณสำหรับขั้นตอนขนาดที่เล็กกว่าซึ่งจะทำซ้ำหลายครั้ง ถ้าหากมันได้กำหนด

ว่าข้อตกลงยังไม่ดีเพียงพอ Runge-Kutta-Fehlberg method เป็นอีกหนึ่งหนทางที่จะแก้ปัญหานี้

มีการพิจารณาถึงข้อกำหนดที่เกี่ยวกับขั้นตอนขนาดของ h ที่ถูกใช้ในแต่ละขั้นตอนจะเกิดค่าประมาณที่แตกต่างกันสองค่าและทั้งสองค่าจะถูกนำมาเปรียบเทียบกัน ถ้าหากคำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงข้อตกลง ก็จะสามารถยอมรับค่าประมาณที่คำนวณมาได้ แต่ถ้าหากทั้งสองคำตอบไม่สอดคล้องกับค่าความถูกต้องที่ระบุไว้ ขั้นตอนในการทำก็จะเพิ่มมากขึ้นโดยการลดขนาดของ h เป็น $\frac{h}{2}$ แต่แต่ละขั้นตอน Runge-Kutta-Fehlberg method สามารถใช้ค่า 6 ค่านี้ :

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_j, y_j) \\ k_2 &= hf\left(t_j + \frac{1}{4}h, y_j + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_j + \frac{3}{8}h, y_j + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right) \\ k_4 &= hf\left(t_j + \frac{12}{13}h, y_j + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right) \\ k_5 &= hf\left(t_j + h, y_j + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right) \\ k_6 &= hf\left(t_j + \frac{1}{2}h, y_j - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \end{aligned}$$

จากนั้น การประมาณค่าผลเฉลยของ I.V.P. ถูกสร้างโดยใช้เครื่องมือ Runge-Kutta ที่ order 4 :

$$y_{j+1} = y_j + h\left(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right) \quad (2.16)$$

และค่าที่ดีกว่าสำหรับผลเฉลยที่กำหนดขึ้น โดยใช้ Runge-Kutta ที่ order 5:

$$z_{j+1} = y_j + h\left(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6\right) \quad (2.17)$$

ขั้นตอนที่ดีที่สุดที่ s และ h สามารถกำหนดโดยการคูณค่าสเกลาร์ไป s ครั้ง ขึ้นกับขนาดของ h

$$\text{ค่าสเกลาร์ } s \text{ คือ } s = \left(\frac{\epsilon h}{2|z_{j+1} - y_{j+1}|}\right)^{1/4} = 0.840496 \left(\frac{\epsilon h}{|z_{j+1} - y_{j+1}|}\right)^{1/4}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.7 รูปแบบของนิวตัน-โคต (Newton-Cotes formula)

กำหนด x_1, x_2, \dots, x_n เป็นจุดอยู่ในช่วงปิด $[a, b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ ต้องการหาจำนวนจริง A_1, A_2, \dots, A_n เพื่อใช้หาค่าประมาณของ

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + E(f) \quad (2.18)$$

เรียกรูปแบบที่ (2.18) ว่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยรูปแบบของนิวตัน-โคต $w(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อน

นิยาม 2.1 ถ้า $x_1 = a$ และ $x_n = b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน-โคตจาก (2.18) ว่ารูปแบบนิวตัน-โคต ชนิดปิด (Newton-Cotes closed formula) และถ้า $x_1 > a$ และ $x_n < b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน-โคตนี้ว่า รูปแบบ นิวตัน-โคตชนิดเปิด (Newton-Cotes open formula)

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้ากำหนดจุด x_1, x_2, \dots, x_n เป็นจุดต่างๆ กันในช่วงปิด $[a, b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ และฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ แล้ว จะมีจำนวนจริง A_1, A_2, \dots, A_n ที่ทำให้

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

สำหรับ $f(x)$ เป็นพหุนามที่ก้ำกัสน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n-1$ [1]

2.8 รูปแบบเกาส์-ควอดเรเจอร์ (Gauss-Quadrature formula type)

เป็นรูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + E(f)$$

เมื่อ เรียกว่า $w(x)$ ฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) ซึ่งเป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ x_1, x_2, \dots, x_n เป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a, b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ สมมติว่าสามารถหาค่า A_1, A_2, \dots, A_n ได้และการหาค่าปริพันธ์

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + E(f) \quad (2.19)$$

ไม่มีความคลาดเคลื่อน สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่มีก้ำกัสน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n-1$ แล้วรูปแบบ (2.16) จะไม่

เอกสารมีค่าความคลาดเคลื่อนเลย ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามที่มีก้ำกัสน้อยกว่าหรือเท่ากับ $2n-1$ [1] ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้ารูปแบบ (2.16) ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนเลยสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $2n-1$ แล้ว x_1, x_2, \dots, x_n จะเป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a, b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ [1]

ทฤษฎีบท 2.4 ค่า A_1, A_2, \dots, A_n ในรูปแบบที่ (2.16) เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมด [1]
จากทฤษฎีบท 2.4 จะเห็นได้ว่า

$$(Q_{n-1,j}(x))^2 = \frac{P_n^2(x)}{(x-x_j)^2}$$

เมื่อทำให้สัมประสิทธิ์ของเทอม x^n เป็น 1

และ
$$(Q_{n-1,j}(x))^2 = (P'_n(x_j))^2$$

ดังนั้น

$$A_j = \frac{1}{(P'_n(x_j))^2} \int_a^b \frac{w(x)P_n^2(x)}{(x-x_j)^2} dx \quad (2.20)$$

2.8.1 เกาส์-เลอจองด์

เนื่องจากการหาปริพันธ์ตามรูปแบบของเกาส์ต้องใช้พหุนามตั้งฉากในช่วงปิด $[a, b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ดังนั้นการหาปริพันธ์แบบนี้จึงแยกออกเป็นหลายๆแบบตามพหุนามตั้งฉากที่ใช้ พหุนามตั้งฉากเลอจองด์เป็นพหุนามตั้งฉากในช่วงปิด $[-1, 1]$ โดยมีฟังก์ชันถ่วง $w(x) = 1$ ดังนั้นรูปแบบของการหาปริพันธ์แบบนี้คือ

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + E(f) \quad (2.21)$$

โดยทั่วไป ช่วงของการอินทิเกรตจะไม่ใช่ -1 ถึง 1 แต่อาจจะเป็นช่วงใดๆ ก็ได้ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนรูปแบบของรูปแบบที่ (2.20) ให้เป็นไปตามที่ต้องการ

สมมติว่าต้องการหาปริพันธ์ในช่วงปิด $[a, b]$ ใดๆ นั่นคือต้องการหาค่าของ $\int_a^b f(z) dz$

ให้
$$z = \frac{(b-a)x + b + a}{2} \quad (2.22)$$

$$\therefore \int_a^b f(z) dz = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)x + b + a}{2}\right) dx \cong \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{(b-a)x_k + b + a}{2}\right) dx$$

ดังนั้นรูปแบบที่ (2.20) จะเปลี่ยนเป็น

$$\int_a^b f(z) dz = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{(b-a)x_k + b + a}{2}\right) + E[f] \quad (2.23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์การใช้งานของผู้บริหารศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการศึกษา
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 เป็นตารางค่าของ x_k และ A_k จากรูปแบบเกาส์เลอจองด์ เพื่อสะดวกในการใช้รูปแบบการหาปริพันธ์

ตารางที่ 2.1 ตารางค่าของ x_k และ A_k จากรูปแบบเกาส์เลอจองด์

$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{n=1}^n A_k f(x_k)$		
n	x_k	A_k
2	-0.577350269189626	1.0
	0.577350269189626	1.0
3	-0.774596669241483	0.555555555555556
	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454
5	-0.906179845938664	0.236926885056189
	-0.538469310105683	0.478628670499366
	0.0	0.568888888888889
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.906179845938664	0.478628670499366
6	-0.932409514203152	0.171324492379170
	-0.661209386466265	0.360761573048139
	-0.238619186083197	0.467913934572691
	0.238619186083197	0.467913934572691
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.932409514203152	0.171324492379170

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

วิธีดำเนินงานวิจัย

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = f(x, y), x \in [a, b] \quad (I)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$y(a) = c \quad (II)$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y) dt \quad (III)$$

จากเดิมจะหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (I) – (II) แต่ในที่นี้จะทำการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขจากสมการ (III) แทน

จากงานวิจัยของ รศ.ดร.ไมตรี โปธิ์สุข และ อาจารย์วรรณพร สรรประเสริฐ (จาก[5] - [8]) ได้เสนอผลงานการวิจัยเกี่ยวกับใช้สูตรปริพันธ์รูปแบบเชิงตัวเลข มาพิสูจน์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นไว้หลายผลงาน จะขอยกตัวอย่างเช่น

งานวิจัยชิ้นที่ 1 (จาก [2])

Numerical Integration Formulas for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations

โดยในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้สมการเชิงปริพันธ์แทนสมการปัญหาค่าเริ่มต้น แล้วใช้สูตรอนุพันธ์ 4 สูตร หาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลข แล้วนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลการหาผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีรุงเก-คูดตา, วิธีออยเลอร์, Goeken-Johnson formula, Wu's formula

การสร้างสูตรเพื่อการแก้ปัญหา

เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า สมการที่ (I) – (II) สมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y) dt \quad (III)$$

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการ

เชิงอนุพันธ์ (I) โดยที่

$$y_{m+1}(x) = y_m + \int_a^x f(t, y_m(t)) dt \quad (IV)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น จะทำการประมาณค่าหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ โดยใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลขของ

$$y_{m+1} = y_m + \int_a^{a+h} f(t, y_m(t)) dt \quad (3.1)$$

สูตรอนุพันธ์ทั้ง 4 สูตรที่จะใช้ในงานวิจัยชิ้นนี้คือ

Midpoint formula

$$\int_a^b y(x) dx = (b-a) y\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (3.2)$$

Trapezoidal formula

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)\{y(a) + y(b)\} \quad (3.3)$$

Modified Trapezoidal formula

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)\{y(a) - y(b)\} + \frac{1}{12}(b-a)^2 \{y'(a) - y'(b)\} \quad (3.4)$$

และ Simpson's formula

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{6} \left[y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b) \right] \quad (3.5)$$

จากสมการ (3.2), (3.3), (3.4) และ (3.5) เราจะได้สมการใหม่ 4 สมการคือ

1.) สมการ PS1

$$y_{m+1} = y_m + hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + bb\right) \quad (3.6)$$

เมื่อ

$$bb = \frac{h}{2} f(x_m, y_m)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.) สมการ PS2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \{K_1 + K_2\} \quad (3.7)$$

เมื่อ

$$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

3.) สมการ PS3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \{K_1 + K_2\} + \frac{h^2}{12} \{AA - BB\} \quad (3.8)$$

เมื่อ

$$K_1 = f(x_m, y_m)$$

$$K_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

$$AA = f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)$$

$$BB = f_x(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m)) + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m)) f_y(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

และ

4.) สมการ PS4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6} \left[f(x_m, y_m) + 4f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m)\right) + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m)) \right] \quad (3.9)$$

และต่อไปนี้จะกำหนดให้

- RK 1 แทน สมการรุงเก-คูตตาอันดับ 1

- RK 2 แทน สมการรุงเก-คูตตาอันดับ 2

- RK 3 แทน สมการรุงเก-คูตตาอันดับ 3

- WU formula และ GJ formula จะใช้กับสมการที่มีตัวแปร

y เพียงอย่างเดียว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \frac{4}{x(x-4)}, x \in [5, 100]$ เมื่อ $y(5) = 5$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.1, 3.2 และ 3.3

ตารางที่ 3.1 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 5.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 5.0755075525$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	5.0800000000	4.492447×10^{-3}
RK2 (2.11)	5.0756506239	1.430714×10^{-4}
RK3 (2.12)	5.0756507618	6.547634×10^{-8}
PS1 (3.6)	5.0754361150	7.142748×10^{-5}
PS2 (3.7)	5.0756506230	1.430714×10^{-4}
PS3 (3.8)	5.0756444162	1.368637×10^{-4}
PS4 (3.9)	5.0755076180	6.547634×10^{-8}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.2 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 5.1, h = 0.001, \text{ True value } y = 5.0755075525$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	5.0755119022	4.349691×10^{-8}
RK2 (2.11)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
RK3 (2.12)	5.0755076180	6.547634×10^{-8}
PS1 (3.6)	5.0755075525	5.820766×10^{-11}
PS2 (3.7)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
PS3 (3.8)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
PS4 (3.9)	5.0755075525	7.275958×10^{-12}

ตารางที่ 3.3 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 100, h = 0.001, \text{ True value } y = 6.5686159179$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	6.5686559406	4.002266×10^{-5}
RK2 (2.11)	6.5686159595	4.156027×10^{-8}
RK3 (2.12)	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
PS1 (3.6)	6.5686159165	1.462467×10^{-9}
PS2 (3.7)	6.5686159595	4.156027×10^{-8}
PS3 (3.8)	6.5686159595	4.156027×10^{-8}
PS4 (3.9)	6.5686159586	4.071626×10^{-8}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0, 1.1]$ เมื่อ $y(0) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.4, 3.5 และ 3.6

ตารางที่ 3.4 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 0.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 1.0050251887$

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0000000000	5.025189×10^{-3}
RK2 (2.11)	1.0049751860	5.000273×10^{-5}
RK3 (2.12)	1.0050377578	1.256881×10^{-5}
PS1 (3.6)	1.0049937617	3.142699×10^{-5}
PS2 (3.7)	1.0049751860	5.000273×10^{-5}
PS3 (3.8)	1.0049627790	6.240965×10^{-5}
PS4 (3.9)	1.0049875698	3.761890×10^{-5}

82785

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.5 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 0.1, h = 0.0001, \text{ True value } y = 1.0050251887$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0050200075	5.101223×10^{-6}
RK2 (2.11)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
RK3 (2.12)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS1 (3.6)	1.0050251887	1.818989×10^{-11}
PS2 (3.7)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS3 (3.8)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS4 (3.9)	1.0050251887	1.818989×10^{-12}

ตารางที่ 3.6 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.1, h = 0.0001, \text{ True value } y = 6.1100397659$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	6.0616904647	4.834930×10^{-2}
RK2 (2.11)	6.1100181633	2.160255×10^{-5}
RK3 (2.12)	6.1100398300	6.413757×10^{-5}
PS1 (3.6)	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
PS2 (3.7)	6.1100181633	2.160255×10^{-5}
PS3 (3.8)	6.1099903436	4.942231×10^{-5}
PS4 (3.9)	6.1100066900	3.307559×10^{-5}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{2y}{x}, x \in [2, 10]$ เมื่อ $y(2) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{4 + \cos 2 - \cos x}{x^2}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.7, 3.8 และ 3.9

ตารางที่ 3.7 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 0.9271426912$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9227324357	4.410255×10^{-3}
RK2 (2.11)	0.9272135323	7.084114×10^{-5}
RK3 (2.12)	0.9271409569	1.256881×10^{-6}
PS1 (3.6)	0.9273232808	1.805896×10^{-4}
PS2 (3.7)	0.9272135323	7.084114×10^{-5}
PS3 (3.8)	0.9273578742	2.151830×10^{-4}
PS4 (3.9)	0.9272866980	1.440068×10^{-4}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.8 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.1, h = 0.0001, \text{True value } y = 0.9271426912$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9271386264	4.064775×10^{-6}
RK2 (2.11)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
RK3 (2.12)	0.9271426912	2.728484×10^{-12}
PS1 (3.6)	0.9271426913	1.673470×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
PS3 (3.8)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
PS4 (3.9)	0.9271426913	1.300577×10^{-10}

ตารางที่ 3.9 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 10.0, h = 0.0001, \text{True value } y = 0.0442292469$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.0442252473	3.999578×10^{-6}
RK2 (2.11)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
RK3 (2.12)	0.0442294669	2.329243×10^{-10}
PS1 (3.6)	0.0442292468	1.350600×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
PS3 (3.8)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
PS4 (3.9)	0.0442292467	1.527951×10^{-10}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \frac{xy}{y^2 - x^2}, x \in [0, 100]$ เมื่อ $y(0) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.10, 3.11 และ 3.12

ตารางที่ 3.10 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 0.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 1.0050124371$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.1000000000	9.498756×10^{-2}
RK2 (2.11)	1.0050505051	3.806794×10^{-5}
RK3 (2.12)	1.0050081470	4.290066×10^{-6}
PS1 (3.6)	1.0050125313	9.421456×10^{-8}
PS2 (3.7)	1.0050505051	7.084114×10^{-5}
PS3 (3.8)	1.0049572340	5.520314×10^{-5}
PS4 (3.9)	1.0050251872	1.275212×10^{-5}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.11 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 0.1, h = 0.0001, \text{True value } y = 1.0050124371$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0050074292	5.007957×10^{-6}
RK2 (2.11)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
RK3 (2.12)	1.0050124371	9.094947×10^{-12}
PS1 (3.6)	1.0050124371	9.094947×10^{-12}
PS2 (3.7)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
PS3 (3.8)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
PS4 (3.9)	1.0050124371	1.818989×10^{-11}

ตารางที่ 3.12 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 10.0, h = 0.0001, \text{True value } y = 0.0442292469$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1413.2151819	1.619565×10^{-3}
RK2 (2.11)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
RK3 (2.12)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS1 (3.6)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS2 (3.7)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS3 (3.8)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS4 (3.9)	1413.2148829	1.318799×10^{-4}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = y^3, x \in [0, 49.5]$ เมื่อ $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{100-2x}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.13, 3.14 และ 3.15

ตารางที่ 3.13 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

$x = 0.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 0.1001001502$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.1001000000	1.502503×10^{-7}
RK2 (2.11)	0.10010015015	1.002718×10^{-10}
RK3 (2.12)	0.10010015025	1.1366868×10^{-6}
GJ (2.14)	0.10010030624	1.559881×10^{-7}
WU (2.15)	0.10010584213	5.691884×10^{-6}
PS1 (3.6)	0.10010015008	1.753051×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.10010015015	1.002718×10^{-10}
PS3 (3.8)	0.10010015002	2.255547×10^{-10}
PS4 (3.9)	0.10010015010	1.502940×10^{-10}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.14 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

$x = 0.1, h = 0.0001, \text{True value } y = 0.1001001502$

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.10010015010	1.504077×10^{-10}
RK2 (2.11)	0.10010025026	4.547474×10^{-13}
RK3 (2.12)	0.10010025026	4.547474×10^{-13}
GJ (2.14)	0.10010025025	1.004693×10^{-7}
WU* (2.15)	0.10000010599	1.000443×10^{-4}
PS1 (3.6)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}
PS2 (3.7)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}
PS3 (3.8)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}
PS4 (3.9)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.15 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

$x = 49.5, h = 0.0001, \text{ True value } y = 1.0$		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9996548547	3.451453×10^{-4}
RK2 (2.11)	1.0000000038	3.845344×10^{-9}
RK3 (2.12)	1.0000000088	8.847564×10^{-9}
GJ (2.14)	1.0003861906	3.861906×10^{-4}
WU (2.15)	17.085971673	16.085971673
PS1 (3.6)	0.9999999987	1.309672×10^{-10}
PS2 (3.7)	1.0000000038	3.845344×10^{-9}
PS3 (3.8)	1.0000000019	1.939043×10^{-9}
PS4 (3.9)	1.0000000013	1.329681×10^{-9}

* ใช้ WU formula ที่ $y(0)$ และ $y(\frac{h}{2})$

สรุป

สูตรใหม่ทั้ง 4 สูตร (PS1, PS2, PS3, PS4) เป็นสูตรรูปแบบเชิงตัวเลขที่ดีที่สุดที่จะใช้ในการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งจะช่วยให้ผู้ใช้มีแนวทางในการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นเพิ่มมากขึ้น

อย่างไรก็ตามจากผลการทดลองในการใช้สูตรใหม่ทั้ง 4 สูตร (PS1, PS2, PS3, PS4) ให้ผลดีกับสมการในตัวอย่างเฉพาะ 5 สมการเท่านั้น และสมการจาก WU เป็นสูตรขั้น 2 เราจึงขอแนะนำให้ใช้สูตร PS1 และ PS4

งานวิจัยชิ้นที่ 2 (จาก [3])

Integration Method for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations

วิธีการอินทิเกรตเพื่อแก้ปัญหา

โดยในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้สมการเชิงปริพันธ์และวิธีลดตัวแปรของเกาส์เพื่อหาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้สมการเชิงปริพันธ์แทนสมการปัญหาค่าเริ่มต้น

บทนำ

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.10)$$

กับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1 \\ y'(x_0) &= c_2 \\ y''(x_0) &= c_3 \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x_0) &= c_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

โดยส่วนใหญ่แล้วเราจะใช้ระเบียบวิธีรุงเก-คูตดาในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง n สมการของระบบสมการข้างต้น "ได้เป็น

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2, & y_1(x_0) &= c_1 \\ y'_2 &= y_3, & y_2(x_0) &= c_2 \\ y'_3 &= y_4, & y_3(x_0) &= c_3 \\ &\vdots & & \\ &\vdots & & \\ &\vdots & & \\ y'_{n-1} &= y_n, & y_{n-1}(x_0) &= c_{n-1} \\ y'_n &= F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n), & y_n(x_0) &= c_n \end{aligned} \quad (3.12)$$

หลังจากแก้สมการอันดับหนึ่ง n สมการสำหรับ $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ และค่าของ y_1 อยู่ใน y ในระบบสมการเริ่มต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การสร้างสูตรเพื่อแก้ปัญหา

ปัจจุบัน คอมพิวเตอร์จะช่วยให้เราคำนวณสมการบางสมการที่มีขนาดใหญ่ได้ในเวลาเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และเราสามารถนำไปประยุกต์ในการหาคำตอบของการคำนวณเชิงตัวเลขของอันดับสูง

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการที่อ้างถึงในด้านบน จะเริ่มจากสมการทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาหาค่าเริ่มต้น จาก

$$y'(x) = f(x, y), \quad x \in [a, b] \quad (I)$$

$$\text{กับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น} \quad y(a) = c \quad (II)$$

เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า สมการที่ (I) – (II) สมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y) dt \quad (III)$$

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะเข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จากสมการที่ 4 และ 5 จะได้

$$y(x)_{m+1} = c + \int_a^x f(t, y_m(t)) dt \quad (IV)$$

จากนั้นจากสมมติฐานที่ว่า ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะเข้าสู่ผลเฉลยของสมการ 4 และ 5 มาทำการประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ ซึ่งจะใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลข คือ Trapezoidal formula

$$\int_a^{a+h} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] \quad (3.13)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} [y'_m + y'_{m+1}]$$

$$\text{หรือ} \quad y_{m+1} = \frac{(1+0.5h)}{(1-0.5h)} y'_m \quad (3.14)$$

เราจะนำความคิดข้างต้นมาประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4

$$y^{(4)} = p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x) \quad x \in [a, b] \quad (3.15)$$

ในสมการที่ 9 ทำให้เราทราบระบบของ สมการเชิงเส้น

$$y(a) = c_1, y'(a) = c_2, y''(a) = c_3 \text{ และ } y'''(a) = c_4 \quad (3.16)$$

ใช้สมการที่ (3.14) เราจะหาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned}
 y_1' &= y_2 & y_1(a) &= c_1 \\
 y_2' &= y_3 & y_2(a) &= c_2 \\
 y_3' &= y_4 & y_3(a) &= c_3 \\
 y_4' &= p(x)y_4 + q(x)y_3 + r(x)y_2 + s(x)y_1 + t(x) & y_4(a) &= c_4
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

จากสมการที่ 9 เราจะได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$Ax + b \tag{3.18}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2}s(x_{m+1}) & -\frac{h}{2}r(x_{m+1}) & -\frac{h}{2}q(x_{m+1}) & 1 - \frac{h}{2}p(x_{m+1}) \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} y_{1m+1} \\ y_{2m+1} \\ y_{3m+1} \\ y_{4m+1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} y_{1m} + \frac{h}{2}y_{2m} \\ y_{2m} + \frac{h}{2}y_{3m} \\ y_{3m} + \frac{h}{2}y_{4m} \\ y_{4m} + \frac{h}{2}p(x_m)y_{4m} + \frac{h}{2}q(x_m)y_{3m} + \frac{h}{2}r(x_m)y_{2m} + \frac{h}{2}s(x_m)y_{1m} + \frac{h}{2}t(x_m) \end{bmatrix}$$

เราจะใช้ Gauss elimination method ในการหาค่า $y_{1m+1}, y_{2m+1}, y_{4m+1}$ ซึ่ง y_{1m+1} คือค่าของ $y_{m-1} \approx y(x_{m+1})$ เราจะเรียก method นี้ว่า Integration Method

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 1

$$y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 2x^2 - 16x + 32, x \in [0,1]$$

และมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$y(0) = 3, y'(0) = -2, y''(0) = 1, y'''(0) = -2$$

เราสามารถแก้ปัญหาการวิเคราะห์จากสมการข้างบน

$$y(x) = e^x \cos x - e^x \sin x + xe^x - e^x + x^2 - 2x + 3$$

และคำตอบจะเป็นไปตามตารางที่ 3.16, 3.17 และ 3.18

ตารางที่ 3.16 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

$x = 1.0 \quad h = 0.01$			
x	Calculated y	y	error
0.1	2.8238029187	2.8238044729	$1.5541590983 \times 10^{-6}$
0.2	2.6357151797	2.6357185093	$3.3296309994 \times 10^{-6}$
0.3	2.4537005297	2.4537055251	$4.9953814596 \times 10^{-6}$
0.4	2.2756773164	2.2756836460	$6.3296683948 \times 10^{-6}$
0.5	2.0996476491	2.0996546935	$7.0444402809 \times 10^{-6}$
0.6	1.9237964939	1.9238032685	$6.7746805144 \times 10^{-6}$
0.7	1.7466142097	1.7466192770	$5.0673443184 \times 10^{-6}$
0.8	1.5670457722	1.5670471418	$1.3696117094 \times 10^{-6}$
0.9	1.3846701566	1.3846651735	$4.9830741773 \times 10^{-6}$
1.0	1.199135684	1.1998987893	$1.4779127014 \times 10^{-5}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.17 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

$x = 1.0 \quad h = 0.001$			
x	Calculated y	y	error
0.1	2.8065733818	2.8065733989	$1.7142156139 \times 10^{-8}$
0.2	2.6191198348	2.6191198697	$3.4870626866 \times 10^{-8}$
0.3	2.4375506564	2.4375507077	$5.1295501180 \times 10^{-8}$
0.4	2.2597880028	2.2597880670	$6.4192136051 \times 10^{-8}$
0.5	2.0838457643	2.0838458350	$7.0631358540 \times 10^{-8}$
0.6	1.0979306325	1.9079306993	$6.6811480792 \times 10^{-8}$
0.7	1.7305668906	1.7305669388	$4.8166839406 \times 10^{-8}$
0.8	1.5507481951	1.5507482042	$9.0476532932 \times 10^{-9}$
0.9	1.3681198385	1.3681197812	$5.7269062381 \times 10^{-8}$
1.0	1.1831952019	1.1831950431	$1.5879959392 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 3.18 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

$x = 1.0 \quad h = 0.0001$			
x	Calculated y	y	error
0.1	2.8046628519	2.8046628519	$1.3096723706 \times 10^{10}$
0.2	2.6172785463	2.6172785463	$3.8198777474 \times 10^{10}$
0.3	2.4359369431	2.4359369431	$3.7471181713 \times 10^{10}$
0.4	2.2581993358	2.2581993358	$9.8225427791 \times 10^{11}$
0.5	2.0822649690	2.0822649690	$2.9103830457 \times 10^{10}$
0.6	1.9063427942	1.9063427942	$6.2027538661 \times 10^{10}$
0.7	1.7289605960	1.7289605940	$1.1514202924 \times 10^{-9}$
0.8	1.5491170249	1.5491170249	$1.9772414817 \times 10^{-9}$
0.9	1.3664641637	1.3664641637	$3.1632225728 \times 10^{-9}$
1.0	1.1815242925	1.1815242925	$4.8366928240 \times 10^{-9}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 8e^x + 4\sin x + 4\cos x, x \in [0, 1]$$

และจะมีเงื่อนไขดังนี้

$$y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = 1, y'''(0) = 5$$

เราสามารถแก้ปัญหาการวิเคราะห์จากสมการข้างบน

$$y(x) = x^2e^x + \cos x + \sin x$$

และคำตอบจะเป็นไปตามตารางที่ 3.19, 3.20 และ 3.21

ตารางที่ 3.19 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

$x = 1.0 \quad h = 0.01$			
x	Calculated y	y	error
0.1	1.0946987881	1.0946940939	$4.6941986511 \times 10^{-6}$
0.2	1.2145295232	1.2145170406	$1.2315585589 \times 10^{-5}$
0.3	1.3566132871	1.3565896524	$2.3634742320 \times 10^{-5}$
0.4	1.5297852099	1.5297462537	$3.8956188291 \times 10^{-5}$
0.5	1.7449372774	1.7448778712	$5.9406176661 \times 10^{-5}$
0.6	2.0153561946	2.0152700694	$8.6125164671 \times 10^{-5}$
0.7	2.3571116294	2.3569911626	$1.2046674601 \times 10^{-4}$
0.8	2.7895023325	2.7893382977	$1.6403707270 \times 10^{-4}$
0.9	3.3355686900	3.3353499710	$2.1874595244 \times 10^{-4}$
1.0	4.0226815259	4.0226815259	$2.8678020317 \times 10^{-4}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.20 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

$x = 1.0 \quad h = 0.001$			
x	Calculated y	y	error
0.1	1.1058893445	1.1058892911	$5.3416442825 \times 10^{-8}$
0.2	1.2262744816	1.2262743482	$1.3337376004 \times 10^{-7}$
0.3	1.3707546113	1.3707543630	$2.4827568268 \times 10^{-7}$
0.4	1.5472100466	1.5472096410	$4.0567101678 \times 10^{-7}$
0.5	1.7667327975	1.7667321822	$6.1524769990 \times 10^{-7}$
0.6	2.0428421855	2.0428412969	$8.8863816927 \times 10^{-7}$
0.7	2.3918779423	2.3918767027	$1.2395830709 \times 10^{-6}$
0.8	2.8334519043	2.8334502200	$1.6843332560 \times 10^{-6}$
0.9	3.3909669692	3.3909647271	$2.2421336325 \times 10^{-6}$
1.0	4.0922131964	4.0922102606	$2.9357761377 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 3.21 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

$x = 1.0 \quad h = 0.0001$			
x	Calculated y	y	error
0.1	1.1058892916	1.1058892911	$5.4205884226 \times 10^{10}$
0.2	1.2275920203	1.2275920189	1.3678800315×10^9
0.3	1.3721848851	1.3721848826	2.4811015464×10^9
0.4	1.5489749342	1.5489749305	3.7289282773×10^9
0.5	1.7689425471	1.7689425417	5.4042175179×10^9
0.6	2.0456305826	2.0456305750	7.5779098552×10^9
0.7	2.3954060994	2.3954060890	1.0368239600×10^8
0.8	2.9379126154	2.8379126014	1.3980752556×10^8
0.9	3.3965897114	2.3965896929	1.8542777980×10^8
1.0	4.0992698753	4.0992698512	2.4141627364×10^8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

งานวิจัยชิ้นที่ 3 (จาก [4])

Solving the initial value problem of ordinary differential equation of higher order by integration method

บทนำ

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (I)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1 \\ y'(x_0) &= c_2 \\ y''(x_0) &= c_3 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= c_n \end{aligned} \quad (II)$$

ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้วิธีรุงเงกุตตาในการแปลงสมการด้านบนเป็นระบบสมการอันดับ n ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

การสร้างสูตร

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการที่อ้างถึงในด้านบน จะเริ่มจากสมการทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'(x) = f(x, y), \quad x \in [a, b] \quad (III)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $y(a) = c$ (IV)

ซึ่งสมมูลกันกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t, y) dt$ (V)

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะเข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (III) – (IV) โดยที่

$$y_{m+1}(x) = y_m + \int_a^x f(t, y_m(t)) dt \quad (VI)$$

จากนั้นจากสมมติฐานที่ว่า ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะเข้าสู่ผลเฉลยของสมการ (III) – (IV) มาทำการประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ ซึ่งจะใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลข คือ

Trapezoidal formula

$$\int_a^{a+h} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{2} [f(a) + f(a+h)] \quad (3.19)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ Simpson's formula

$$\int_a^{a+h} f(t, y(t)) dt = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4f\left(\frac{2a+h}{2}\right) + f(a+h) \right] \quad (3.20)$$

โดยจากจากสมการ Trapezoidal formula และ Simpson's formula ข้างต้นจะได้ 8 สูตรดังนี้

สำหรับ $y' = f(x, y), y(a) = A$ จะได้ว่ามี

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} (f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1})) \quad (3.21)$$

สำหรับ $y'' = f(x, y, y'), y(a) = A$ และ $y'(a) = A'$ ซึ่งสมมูลกับ

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = f(x, y_1, y_2)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2} (y_{2_m} + y_{2_{m+1}}) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2} (f(x_m, y_m, y_{2_m}) + f(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}})) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

สำหรับ $y''' = f(x, y, y', y''), y(a) = A, y'(a) = A', y''(a) = A''$ ซึ่งสมมูลกับ

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_3$$

$$y'_3 = f(x, y_1, y_2, y_3)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2} (y_{2_m} + y_{2_{m+1}}) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2} (y_{3_m} + y_{3_{m+1}}) \\ y_{3_{m+1}} &= y_{3_m} + \frac{h}{2} (f(x_m, y_m, y_{2_m}, y_{3_m}) + f(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}})) \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับ $y^{iv} = f(x, y, y', y'', y'''), y(a) = A, y'(a) = A', y''(a) = A'', y'''(a) = A'''$

ซึ่งสมมูลกับ

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_3$$

$$y'_3 = y_4$$

$$y'_4 = f(x, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left. \begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}(y_{3_m} + y_{3_{m+1}}) \\ y_{3_{m+1}} &= y_{3_m} + \frac{h}{2}(y_{4_m} + y_{4_{m+1}}) \\ y_{4_{m+1}} &= y_{4_m} + \frac{h}{2}(f(x_m, y_m, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}) + f(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}})) \end{aligned} \right\} (3.24)$$

ในลำดับที่ 1 y_m ที่ให้มาและ y_{m+1} จาก trapezoidal จะหาค่า y_{m+2} ได้ คือ

$$y_{m+2} = y_m + \frac{h}{3}(y_m + 4y_{m+1} + y_{m+2}) \quad (3.25)$$

ในลำดับที่ 2 y_{1_m}, y_{2_m} ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะหาค่า $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}$ ได้ คือ

$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}) \quad (3.26)$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}(f(x_m, y_{1_m}, y_{2_m}) + 4f(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}) + f(x_{m+2}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}))$$

ในลำดับที่ 3 $y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}$ ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะหาค่า $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}$ ได้ คือ

$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}) \quad (3.27)$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}(y_{3_m} + 4y_{3_{m+1}} + y_{3_{m+2}})$$

$$y_{3_{m+2}} = y_{3_m} + \frac{h}{3}\left(f(x_m, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}) + 4f(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}) + f(x_{m+2}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}})\right)$$

ในลำดับที่ 4 $y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}$ ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะหาค่า $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}, y_{4_{m+2}}$ ได้

คือ
$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}) \quad (3.28)$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}(y_{3_m} + 4y_{3_{m+1}} + y_{3_{m+2}})$$

$$y_{3_{m+2}} = y_{3_m} + \frac{h}{3}(y_{4_m} + 4y_{4_{m+1}} + y_{4_{m+2}})$$

$$y_{4_{m+2}} = y_{4_m} + \frac{h}{3}\left(f(x_m, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}) + 4f(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}) + f(x_{m+2}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}, y_{4_{m+2}})\right)$$

ตัวอย่างที่ 1 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{2y}{x}$, $x \in [2, 3]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{4 + \cos(2) - \cos(x)}{x^2}$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{m+1} = \frac{y_m \left(1 - \frac{h}{x_m}\right) + \frac{h}{2} \left(\frac{\sin x_m}{x_m^2} + \frac{\sin x_{m+1}}{x_{m+1}^2}\right)}{1 + \frac{h}{x_{m+1}}}$$

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{m+2} = M / \left(1 + \frac{2h}{3x_{m+2}}\right)$$

ที่ $M = y_m \left(1 - \frac{2h}{3x_m}\right) - \frac{8hy_{m+1}}{3x_{m+1}} + \frac{h}{3} \left(\frac{\sin x_m}{x_m^2} + 4\frac{\sin x_{m+1}}{x_{m+1}^2} + \frac{\sin x_{m+2}}{x_{m+2}^2}\right)$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3.22 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$$x = 2.1, h = 0.1, y = 0.92714269117$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00013284506713	0.00000000062664	0.00007084114259	0.00000173431545

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.23 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$$x = 2.1, h = 0.01, y = 0.92714269117$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000132545483	0.00000000007640	0.00000066328266	0.00000000163800

ตารางที่ 3.24 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$$x = 2.1, h = 0.001, y = 0.92714269117$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001324588	0.00000000001364	0.00000000660930	0.00000000001273

ตารางที่ 3.25 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$$x = 2.1, h = 0.0001, y = 0.92714269117$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000061664	0.00000000076852	0.00000000082400	0.00000000076670

ตารางที่ 3.26 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$$x = 3.0, h = 0.1, y = 0.50820507334$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00037354729557	0.00000171579177	0.00023297424923	0.00000442352120

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.27 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 3.0, h = 0.01, y = 0.50820728672$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000373132752	0.00000000019281	0.00000221333175	0.00000000424370

ตารางที่ 3.28 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 3.0, h = 0.001, y = 0.50820728672$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000003727109	0.00000000008640	0.00000002209526	0.00000000007094

ตารางที่ 3.29 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 3.0, h = 0.0001, y = 0.50820728672$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000328600	0.00000000373075	0.00000000383534	0.00000000361979

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2 การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y'' = \frac{1}{x^2 e^{2x}} - 4y - 4y', x \in [1, 2]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0$ และ $y'(1) = \frac{-1}{e^2}$

ซึ่งคำตอบของสมการ คือ $y(x) = \frac{-\ln x}{e^{2x}}$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+1} = y_{1,m} + \frac{h}{2}(y_{2,m} + y_{2,m+1})$$

$$y_{2,m+1} = \frac{M}{1 + 2h + h^2}$$

โดยที่ $M = (1 - 2h - h^2)y_{2,m} - 4hy_{1,m} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{x_m^2 e^{2x_m}} + \frac{1}{x_{m+1}^2 e^{2x_{m+1}}}\right)$

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2})$$

$$y_{2,m+2} = \frac{M}{1 + \frac{4}{3}h + \frac{4}{9}h^2}$$

โดยที่

$$M = \left(1 - \frac{4}{3}h - \frac{4}{9}h^2\right)y_{2,m} - \left(\frac{16}{3}h + \frac{16}{9}h^2\right)y_{2,m+1} - \frac{8}{3}hy_{1,m} - \frac{16}{3}hy_{1,m+1} + \frac{h}{3}\left(\frac{2^{-2x_m}}{x_m^2} + \frac{e^{-2x_{m+1}}}{x_{m+1}^2} + \frac{e^{-2x_{m+2}}}{x_{m+2}^2}\right)$$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3.30 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.1, h = 0.1, y = -0.010150146243$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00015524673117	0.00000000020027	0.00041052270392	0.00003125036133

ตารางที่ 3.31 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.1, h = 0.01, y = -0.010150146243$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000152200482	0.00000000015881	0.00000334368453	0.00000002504973

ตารางที่ 3.32 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.1, h = 0.001, y = -0.010150146243$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001521452	0.00000000000251	0.00000003276871	0.00000000002274

ตารางที่ 3.33 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 2.0, h = 0.1, y = -0.012695419162$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00003106919285	0.00000279127178	0.00019009434600	0.00001609703141

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.34 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$$x = 2.0, h = 0.01, y = -0.012695419162$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000031214103	0.000000000000355	0.00000146320170	0.00000001249283

ตารางที่ 3.35 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$$x = 2.0, h = 0.001, y = -0.012695419162$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000312001	0.000000000000091	0.00000001429055	0.00000000001643

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3 การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y''' + y'' - 3y' - \frac{6e^x}{x^4}$, $x \in [1,2]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = e, y'(1) = 0, y''(1) = e$

ซึ่งคำตอบของสมการ คือ $y(x) = \frac{e^x}{x}$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+1} = y_{1,m} + \frac{h}{2}(y_{2,m} + y_{2,m+1})$$

$$y_{2,m+1} = y_{2,m} + \frac{h}{2}(y_{3,m} + y_{3,m+1})$$

$$y_{3,m+1} = \frac{M}{1 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}h^2 - \frac{h^3}{8}}$$

โดยที่

$$M = \left(1 - \frac{3}{2}h - \frac{3}{4}h^2 + \frac{h^3}{8}\right)y_{3,m} + \left(-3h + \frac{h^2}{2}\right)y_{2,m} + hy_{1,m} - 3h\left(\frac{e^{x_m}}{x_m^4} + \frac{e^{x_{m+1}}}{x_{m+1}^4}\right)$$

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2})$$

$$y_{2,m+2} = y_{2,m} + \frac{h}{3}(y_{3,m} + 4y_{3,m+1} + y_{3,m+2})$$

$$y_{3,m+2} = \frac{M}{1 - h + \frac{h^2}{3} - \frac{h^3}{27}}$$

โดยที่

$$M = \left(1 + h - \frac{h^2}{3} + \frac{h^3}{27}\right)y_{3,m} + \left(4h - \frac{4}{3}h^2 + \frac{4}{27}h^3\right)y_{3,m+1} + \left(-2h + \frac{2}{9}h^2\right)y_{2,m} + \left(-4h + \frac{4}{9}h^2\right)y_{2,m+1} + \frac{2}{3}hy_{1,m} + \frac{4}{3}hy_{1,m+1} - 2h\left(\frac{e^{x_m}}{x_m^4} + \frac{4e^{x_{m+1}}}{x_{m+1}^4} + \frac{e^{x_{m+2}}}{x_{m+2}^4}\right)$$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.36 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1, h = 0.1, y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00030599165595	0.00000002952947	0.00081321582911	0.00009287811190

ตารางที่ 3.37 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1, h = 0.01, y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000293977791	0.00000000063665	0.00000533787170	0.00000009884752

ตารางที่ 3.38 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1, h = 0.001, y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000002942397	0.00000000002183	0.00000005065158	0.00000000012005

ตารางที่ 3.39 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1, h = 0.0001, y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000001091	0.00000000025466	0.00000000065484	0.00000079450183

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.40 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0, h = 0.1, y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.01494241224600	0.00021100712911	0.05015573438500	0.00216866279520

ตารางที่ 3.41 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0, h = 0.01, y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00049050454640	0.00000010041913	0.00057297762396	0.00000207840276

ตารางที่ 3.42 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0, h = 0.001, y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000149049447	0.00000000010114	0.00000578748222	0.00000000219370

ตารางที่ 3.43 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0, h = 0.0001, y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001015724	0.00000000105865	0.00000005369657	0.00000000468935

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4 การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ

$$y^{iv} = x + y - xy' + y'' + xy''' + \frac{2}{x^3}, \quad x \in [1,2]$$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 1, y'''(1) = -1$

คำตอบของสมการ คือ $y(x) = x \ln x$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2})$$

$$y_{2,m+2} = y_{2,m} + \frac{h}{3}(y_{3,m} + 4y_{3,m+1} + y_{3,m+2})$$

$$y_{3,m+1} = y_{3,m} + \frac{h}{2}(y_{4,m} + y_{4,m+1})$$

$$y_{4,m+1} = \frac{M}{1 - \frac{h}{2}x_{m+1} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8}x_{m+1} - \frac{h^4}{16}}$$

โดยที่

$$M = \left(1 + \frac{h}{2}x_m + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8}x_{m+1} + \frac{h^4}{16}\right)y_{3,m} + \left(h - \frac{h^2}{2}x_{m+1} + \frac{h^3}{4}\right)y_{3,m} + \frac{h}{2}(h - x_m - x_{m+1})y_{2,m} + hy_{1,m} + h\left(\frac{x_m}{2} + \frac{x_{m+1}}{2} + \frac{1}{x_m^3} + \frac{1}{x_{m+1}^3}\right).$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2})$$

$$y_{2,m+2} = y_{2,m} + \frac{h}{3}(y_{3,m} + 4y_{3,m+1} + y_{3,m+2})$$

$$y_{3,m+2} = y_{3,m} + \frac{h}{3}(y_{4,m} + 4y_{4,m+1} + y_{4,m+2})$$

$$y_{4,m+2} = \left\{ \frac{h}{3} \left(x_m + 4x_{m+1} + x_{m+2} + \frac{2}{x_m^3} + \frac{8}{x_{m+1}^3} + \frac{2}{x_{m+2}^3} \right) + \frac{2h}{3} y_{1,m} + \frac{4h}{3} y_{1,m+1} \right. \\ + \frac{h}{3} y_{2,m} \left(\frac{2h}{3} - x_m - x_{m+2} \right) + \frac{4h}{3} y_{2,m+1} \left(\frac{h}{3} - x_{m+1} \right) \\ + \frac{2h}{3} y_{3,m} \left(1 - \frac{hx_{m+2}}{3} + \frac{h^2}{9} \right) + \frac{4h}{3} y_{3,m+1} \left(1 - \frac{hx_{m+2}}{3} + \frac{h^2}{9} \right) \\ + y_{3,m} \left(1 + \frac{hx_m}{3} + \frac{h^2}{9} - \frac{h^3 x_{m+2}}{27} + \frac{h^4}{81} \right) \\ \left. + \frac{4h}{3} y_{4,m+1} \left(x_{m+1} + \frac{h}{3} - \frac{h^2 x_{m+2}}{9} + \frac{h^3}{27} \right) \right\} / M$$

โดยที่

$$M = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} x_{m+1}} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8} x_{m+1} - \frac{h^4}{16}$$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3.44 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 1.1, h = 0.1, y = 1.05$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00006929845259	0.00000000070384	0.00015880221258	0.00000786445423

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.45 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 1.1, h = 0.01, y = 1.05$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000068867234	0.00000064145761	0.00000139831525	0.00000000627642

ตารางที่ 3.46 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 1.1, h = 0.001, y = 1.05$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000690989	0.00000645738442	0.00000001379260	0.00000000002979

ตารางที่ 3.47 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 1.1, h = 0.0001, y = 1.05$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000070372	0.00000000084503	0.00000000091177	0.00000000076966

ตารางที่ 3.48 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 2.0, h = 0.1, y = 1.3877975821$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00013412624503	0.00077794139906	0.00150322096490	0.00003451793236

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.49 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 2.0, h = 0.01, y = 1.3877975821$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000126594568	0.00001004191290	0.00001637324749	0.00000003304830

ตารางที่ 3.50 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 2.0, h = 0.001, y = 1.3877975821$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001227090	0.00005593667083	0.00000016431841	0.00000000032742

ตารางที่ 3.51 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$$x = 2.0, h = 0.0001, y = 1.3877975821$$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001243461	0.00000113504575	0.00000001390799	0.00000001216722

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

งานวิจัยชิ้นที่ 4 (จาก [5])

Open Formula of Integration Method

การสร้างสูตร

ในบทความนี้จะแนะนำ 5 สูตร ของประเภทสูตรแบบเปิด สูตรทั้ง 5 สูตรนี้คือ สูตร 1 จุด, สูตร 2 จุด, สูตร 3 จุด, สูตร 4 จุด และ สูตร 5 จุด

ทำการแบ่งช่วงปิด $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อยเท่าๆ กัน n ช่วงซึ่งมีความยาวช่วงเท่ากับ h

$$\text{โดยที่ } h = \frac{b-a}{n}$$

สูตร 1 จุด : จากสูตรการหาค่าจุดกึ่งกลาง จะได้สูตร 1 จุด คือ

$$y_{m+2} = y_m + 2hf(x_{m+1}, y_{m+1}) \quad (3.29)$$

ถ้าให้ $s = 2h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O(s^3)$

สูตร 2 จุด : ใช้จุด x_{m+1} และ x_{m+2} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $[x_m, x_{m+3}]$ จะได้สูตร 2 จุด คือ

$$y_{m+3} = y_m + 1.5h(f(x_{m+1}, y_{m+1}) + f(x_{m+2}, y_{m+2})) \quad (3.30)$$

ถ้าให้ $s = 3h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O(s^3)$

สูตร 3 จุด : ใช้จุด x_{m+1}, x_{m+2} และ x_{m+3} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $[x_m, x_{m+4}]$ จะได้สูตร 3 จุด คือ

$$y_{m+4} = y_m + \frac{4}{3}h(2f(x_{m+1}, y_{m+1}) - f(x_{m+2}, y_{m+2}) + 2f(x_{m+3}, y_{m+3})) \quad (3.31)$$

ถ้าให้ $s = 4h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O(s^5)$

สูตร 4 จุด : ใช้จุด $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}$ และ x_{m+4} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $[x_m, x_{m+5}]$ จะได้สูตร 4 จุด คือ

$$y_{m+5} = y_m + \frac{5}{24}h(11f(x_{m+1}, y_{m+1}) + f(x_{m+2}, y_{m+2}) + f(x_{m+3}, y_{m+3}) + 11f(x_{m+4}, y_{m+4})) \quad (3.32)$$

ถ้าให้ $s = 5h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O(s^5)$

สูตร 5 จุด : ใช้จุด $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, x_{m+4}$ และ x_{m+5} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $[x_m, x_{m+6}]$ จะได้สูตร 5 จุด คือ

$$y_{m+6} = y_m + \frac{3}{10}h(11f(x_{m+1}, y_{m+1}) - 14f(x_{m+2}, y_{m+2}) + 26f(x_{m+3}, y_{m+3}) - 14f(x_{m+4}, y_{m+4}) + 11f(x_{m+5}, y_{m+5})) \quad (3.33)$$

ถ้าให้ $s = 6h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O(s^7)$

จะทำการแทนชื่อสูตรข้างต้นด้วย

OP1 สำหรับ สูตร 1 จุด

OP2 สำหรับ สูตร 2 จุด

OP3 สำหรับ สูตร 3 จุด

OP4 สำหรับ สูตร 4 จุด

OP5 สำหรับ สูตร 5 จุด

ตัวอย่างที่ 1 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{4}{x(x-4)}, x \in [5, 6]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(5) = 5$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ผลเฉลยที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$y(5.1) = 5.0755075525$$

$$y(5.2) = 5.1431008437$$

$$y(5.3) = 5.2040953564$$

$$y(5.4) = 5.2595111955$$

$$y(5.5) = 5.3101549284$$

$$y(5.6) = 5.3566749440$$

$$y(5.7) = 5.3995999887$$

$$y(5.8) = 5.4393666599$$

$$y(5.9) = 5.4763275867$$

$$y(6.0) = 5.5108133286$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.52 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 1 (3.1)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755046862	2.8663271×10^{-6}
5.2	5.1430958019	5.041729×10^{-6}
5.3	5.2040886257	6.730697×10^{-6}
5.4	5.2595031282	8.067364×10^{-6}
5.5	5.3101457857	9.142699×10^{-6}
5.6	5.3566649238	1.002015×10^{-5}
5.7	5.3995892437	1.074504×10^{-5}
5.8	5.4393553094	1.135046×10^{-5}
5.9	5.4763275867	1.186103×10^{-5}
6.0	5.5108133285	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.53 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 2 (3.2)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755037420	3.810506×10^{-6}
5.2	5.1430942445	6.500206×10^{-6}
5.3	5.2040852614	1.009503×10^{-5}
5.4	5.2594995841	1.161142×10^{-5}
5.5	5.3101421781	1.275022×10^{-5}
5.6	5.3566599151	1.502891×10^{-5}
5.7	5.3995843610	1.562768×10^{-5}
5.8	5.4393505982	1.606170×10^{-5}
5.9	5.4763216577	1.779009×10^{-5}
6.0	5.5108076708	1.795303×10^{-5}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.54 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 3 (3.3) $h = 0.01$		
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075514	1.350494×10^{-9}
5.2	5.1431008412	2.437446×10^{-9}
5.3	5.2040953537	2.713922×10^{-9}
5.4	5.2595111920	3.507012×10^{-9}
5.5	5.3101549249	3.441528×10^{-9}
5.6	5.3566749400	3.023605×10^{-9}
5.7	5.3995999849	3.812602×10^{-9}
5.8	5.4393666555	3.307370×10^{-9}
5.9	5.4763394437	3.045432×10^{-9}
6.0	5.5108256194	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.55 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 4 (3.4) $h = 0.01$		
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075500	2.517481×10^{-9}
5.2	5.1431008396	3.118192×10^{-9}
5.3	5.2040953512	5.187758×10^{-9}
5.4	5.2595111896	5.908078×10^{-9}
5.5	5.3101549219	6.417395×10^{-9}
5.6	5.3566749372	6.781192×10^{-9}
5.7	5.3995999817	7.043127×10^{-9}
5.8	5.4393666526	7.246854×10^{-9}
5.9	5.4763394404	7.399649×10^{-9}
6.0	5.5108256163	1.229533×10^{-5}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.56 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 5 (3.5)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075525	2.546585×10^{-10}
5.2	5.1431008437	3.874892×10^{-10}
5.3	5.2040953564	6.912160×10^{-10}
5.4	5.2595111957	8.876668×10^{-10}
5.5	5.3101549285	1.069566×10^{-9}
5.6	5.3566749442	1.193257×10^{-9}
5.7	5.3995999890	1.367880×10^{-9}
5.8	5.4393666603	1.520675×10^{-9}
5.9	5.4763394482	1.593435×10^{-9}
6.0	5.5108256244	1.229533×10^{-5}

ตัวอย่างที่ 2 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{xy}{y^2 - x^2}, x \in [0, 1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1 + x^2}}}$

ได้ค่าที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$y(0.1) = 1.0050124371$$

$$y(0.2) = 1.0201959029$$

$$y(0.3) = 1.0459645461$$

$$y(0.4) = 1.0829215632$$

$$y(0.5) = 1.1317139243$$

$$y(0.6) = 1.1928228789$$

$$y(0.7) = 1.2663324102$$

$$y(0.8) = 1.3517639463$$

$$y(0.9) = 1.4480661205$$

$$y(1.0) = 1.5537739740$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดังตารางต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.57 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 1 (3.1)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050121908	2.462839×10^{-7}
0.2	1.0201949649	9.379783×10^{-7}
0.3	1.0459626233	1.922830×10^{-6}
0.4	1.0829186387	2.924542×10^{-6}
0.5	1.1317103672	3.557063×10^{-6}
0.6	1.1928194532	3.425730×10^{-6}
0.7	1.2663300924	2.317742×10^{-5}
0.8	1.3517635818	3.644145×10^{-7}
0.9	1.4480681110	1.990549×10^{-6}
1.0	1.5537781956	3.221509×10^{-5}

ตารางที่ 3.58 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 2 (3.2)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050120714	3.657533×10^{-7}
0.2	1.0201945107	1.392214×10^{-6}
0.3	1.0459616609	2.885201×10^{-6}
0.4	1.0829171787	3.384572×10^{-6}
0.5	1.1317086023	5.321956×10^{-6}
0.6	1.1928177371	5.141781×10^{-6}
0.7	1.2663289348	3.475356×10^{-5}
0.8	1.3517634157	5.305956×10^{-7}
0.9	1.4480691036	2.983132×10^{-6}
1.0	1.5537803094	6.335387×10^{-5}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.59 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 3 (3.3)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124373	1.709850×10^{-10}
0.2	1.0201959036	7.657945×10^{-10}
0.3	1.0459645480	1.846274×10^{-9}
0.4	1.0829215666	3.421519×10^{-9}
0.5	1.1317139294	5.078618×10^{-9}
0.6	1.1928228850	6.037226×10^{-9}
0.7	1.2663324157	5.509719×10^{-9}
0.8	1.3517639498	3.552486×10^{-9}
0.9	1.4480661216	1.109584×10^{-9}
1.0	1.5537739733	1.109584×10^{-9}

ตารางที่ 3.60 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 4 (3.4)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124374	3.019522×10^{-10}
0.2	1.0201959042	1.296939×10^{-9}
0.3	1.0459645493	3.143214×10^{-9}
0.4	1.0829215690	5.8043952×10^{-9}
0.5	1.1317139329	8.631105×10^{-9}
0.6	1.1928228892	1.025546×10^{-9}
0.7	1.2663324195	9.369614×10^{-9}
0.8	1.3517639523	6.040864×10^{-9}
0.9	1.4480661223	1.897206×10^{-9}
1.0	1.5537739728	1.897206×10^{-9}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.61 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 5 (3.5)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124371	1.818989×10^{-12}
0.2	1.0201959029	1.818989×10^{-12}
0.3	1.0459645461	0.0
0.4	1.0829215632	5.456968×10^{-12}
0.5	1.1317139243	9.094947×10^{-12}
0.6	1.1928228789	1.637090×10^{-11}
0.7	1.2663324101	2.182787×10^{-11}
0.8	1.3517639462	1.637090×10^{-11}
0.9	1.4480661204	1.637090×10^{-11}
1.0	1.5537739740	1.637090×10^{-11}

ตัวอย่างที่ 3 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = y^3, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{100-2x}}$

ได้ค่าที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$y(0.1) = 0.1001001503$$

$$y(0.2) = 0.002006020$$

$$y(0.3) = 0.003013568$$

$$y(0.4) = 0.004024161$$

$$y(0.5) = 0.100537815$$

$$y(0.6) = 0.1006054546$$

$$y(0.7) = 0.1007074368$$

$$y(0.8) = 0.1008097298$$

$$y(0.9) = 0.1009123352$$

$$y(1.0) = 0.1010152545$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดัง
ตารางที่ 3.62 3.63 3.64 3.65 และ 3.66

ตารางที่ 3.62 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 1 (3.1)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	2.501110×10^{-12}
0.2	0.1002006020	5.229595×10^{-12}
0.3	0.1003013568	7.730705×10^{-12}
0.4	0.1004024161	1.023182×10^{-11}
0.5	0.1005037815	1.273293×10^{-11}
0.6	0.1006054546	1.546141×10^{-11}
0.7	0.1007074368	1.818989×10^{-11}
0.8	0.1008097298	2.103206×10^{-11}
0.9	0.1009123351	2.387424×10^{-11}
1.0	0.1010152544	2.637535×10^{-11}

ตารางที่ 3.63 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 2 (3.2)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	3.410605×10^{-12}
0.2	0.1002006020	6.707523×10^{-12}
0.3	0.1003013568	1.136868×10^{-11}
0.4	0.1004024161	1.500666×10^{-11}
0.5	0.1005037815	1.841727×10^{-11}
0.6	0.1006054546	2.330580×10^{-11}
0.7	0.1007074368	2.683009×10^{-11}
0.8	0.1008097298	3.046807×10^{-11}
0.9	0.1009123351	3.558398×10^{-11}
1.0	0.1010152544	3.910827×10^{-11}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.64 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 3 (3.3)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	0.0
0.2	0.1002006020	1.136868×10^{-13}
0.3	0.1003013568	0.0
0.4	0.1004024161	0.0
0.5	0.1005037815	0.0
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	0.0
0.8	0.1008097298	0.0
0.9	0.1009123352	2.273737×10^{-13}
1.0	0.1010152545	0.0

ตารางที่ 3.65 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 4 (3.4)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	1.136868×10^{-13}
0.2	0.1002006020	0.0
0.3	0.1003013568	1.136868×10^{-13}
0.4	0.1004024161	1.136868×10^{-13}
0.5	0.1005037815	1.136868×10^{-13}
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	1.136868×10^{-13}
0.8	0.1008097298	0.0
0.9	0.1009123352	$1.1236868 \times 10^{-13}$
1.0	0.1010152545	1.136868×10^{-13}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.66 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 5 (3.5)		$h = 0.01$
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	0.0
0.2	0.1002006020	0.0
0.3	5.2040953564	2.273737×10^{-13}
0.4	0.1004024161	1.136868×10^{-13}
0.5	0.1005037815	1.136868×10^{-13}
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	1.136868×10^{-13}
0.8	0.1008097298	1.136868×10^{-13}
0.9	0.1009123352	1.136868×10^{-13}
1.0	0.1010152545	1.136868×10^{-13}

ตัวอย่างที่ 4 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{2y}{x}, x \in [2, 3]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$ ที่จุด $x = 3$ โดยที่ $h = 0.01$

คำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{4 + \cos 2 - \cos x}{x^2}$

และ $y(3) = 0.5082050733$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่ 3.67

ตารางที่ 3.67 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	0.5067707775	1.434296×10^{-3}
RK2 ()	0.5082072867	2.213332×10^{-6}
RK3 ()	0.5082050692	3.243702×10^{-9}
RK4 ()	0.5082050734	3.547474×10^{-11}
OP1(3.1)	0.5082128146	7.741231×10^{-6}
OP2 (3.2)	0.5082160491	1.097568×10^{-5}
OP3 (3.3)	0.5082050756	2.187335×10^{-9}
OP4 (3.4)	0.5082050771	3.698915×10^{-9}
OP5 (3.5)	0.5082050733	7.003109×10^{-11}

ตัวอย่างที่ 5

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ ที่จุด $x = 1$ โดยที่ $h = 0.01$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

และ $y(1) = 2.4142135625$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่ 3.68

ตารางที่ 3.68 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	2.2781717556	1.360418×10^{-1}
RK2 ()	2.3160806852	9.813288×10^{-2}
RK3 ()	2.4142056843	7.878192×10^{-6}
RK4 ()	2.4142135222	3.035246×10^{-8}
OP1(3.1)	2.4099523426	3.261220×10^{-3}
OP2 (3.2)	2.4078786870	6.334876×10^{-3}
OP3 (3.3)	2.4141286225	8.493999×10^{-5}
OP4 (3.4)	2.4140741639	1.393987×10^{-4}
OP5 (3.5)	2.4142071062	6.456310×10^{-6}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 6 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}, x \in [1,100]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=1$ ที่จุด $x=10$ และ $x=100$ โดยที่ $h=0.01$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

และ $y(10) = 3.4785054262$

$y(100) = 10.1$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่ 3.69 และ 3.70

ตารางที่ 3.69 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	3.4777897010	7.157252×10^{-4}
RK2 ()	3.4785012135	3.212602×10^{-6}
RK3 ()	3.4785054261	3.001777×10^{-11}
RK4 ()	3.4785054261	3.001777×10^{-11}
OP1(3.1)	3.4785138507	8.424493×10^{-6}
OP2 (3.2)	3.4785180615	1.263532×10^{-5}
OP3 (3.3)	3.4785054305	3.361937×10^{-9}
OP4 (3.4)	3.4785054336	7.399649×10^{-9}
OP5 (3.5)	3.4785054262	0.0

ตารางที่ 3.70 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	10.099748331	2.516690×10^{-4}
RK2 ()	10.099995831	3.168949×10^{-6}
RK3 ()	10.100000000	7.275958×10^{-11}
RK4 ()	10.100000000	7.275958×10^{-11}
OP1(3.1)	10.100008336	8.336094×10^{-6}
OP2 (3.2)	10.100012503	1.250285×10^{-5}
OP3 (3.3)	10.100000004	3.220554×10^{-9}
OP4 (3.4)	10.100000007	7.392373×10^{-9}
OP5 (3.5)	10.100000000	7.275958×10^{-11}

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

ผลการศึกษาวิจัย

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = f(x, y), x \in [a, b] \quad (4.1)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$y(a) = c \quad (4.2)$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y) dt \quad (4.3)$$

แทนค่าสมการ (4.1) – (4.2) เพื่อแก้สมการ (4.3) ดังนั้นจะได้สูตร

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t, y) dt \quad (4.4)$$

ในการประมาณค่าของ $f(x, y)$ ในสมการที่ (4.4) ในการเข้าใกล้ผลเฉลยจะใช้ Taylor Series และจะใช้ Gauss Legendre Quadrature ในการประมาณค่าสมการปริพันธ์ในสมการที่ (4.4)

การสร้างสูตรเพื่อแก้ปัญหา

จะกำหนดให้ $t = x_m + sh$ เมื่อ x_m และ h เป็นค่าคงที่ เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบกับแปรอิสระ s จะได้

$$dt = hds$$

ดังนั้นจากสมการ (4.4) จะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + h \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m + sh, y(x_m + sh)) ds \quad (4.5)$$

ในการหาปริพันธ์จะใช้การหาปริพันธ์ด้วยรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์ แต่เนื่องจากพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ เป็นพหุนามตั้งฉากในช่วงปิด $[-1, 1]$ โดยมีฟังก์ชันถ่วง $w(x) = 1$ ดังนั้นรูปแบบการหาปริพันธ์แบบนี้ คือ

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (4.6)$$

เมื่อต้องการหาปริพันธ์ในช่วงปิด $[0, 1]$ จะสามารถหาได้โดยใช้รูปแบบ คือ

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right) \quad (4.7)$$

ให้ $s = \frac{1+x_k}{2}$ ดังนั้นจากสมการ (4.5) จะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right) \quad (4.8)$$

เมื่อทำการกระจายผลรวมตั้งแต่ $k = 1$ ถึง n จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} & \left[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \right. \\ & + A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right) \\ & \left. + \dots + A_n f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_n}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_n}{2}\right)\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

สำหรับที่ $n = 1$ จะได้รูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} \left[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \right] \quad (4.10)$$

สำหรับที่ $n = 2$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} & \left[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \right. \\ & \left. + A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

สำหรับที่ $n = 3$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} & \left[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \right. \\ & + A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right) \\ & \left. + A_3 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right)\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.12)$$

สำหรับที่ $n = 4$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} & \left[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \right. \\ & + A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right) \\ & + A_3 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right)\right)\right) \\ & \left. + A_4 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right)\right)\right) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับที่ $n = 5$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned}
 y_{m+1} = & y_m + \frac{h}{2} \left[A_1 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_1}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_1}{2} \right) \right) \right) \right. \\
 & + A_2 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_2}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_2}{2} \right) \right) \right) \\
 & + A_3 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_3}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_3}{2} \right) \right) \right) \\
 & + A_4 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_4}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_4}{2} \right) \right) \right) \\
 & \left. + A_5 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_5}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_5}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

สำหรับที่ $n = 6$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned}
 y_{m+1} = & y_m + \frac{h}{2} \left[A_1 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_1}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_1}{2} \right) \right) \right) \right. \\
 & + A_2 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_2}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_2}{2} \right) \right) \right) \\
 & + A_3 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_3}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_3}{2} \right) \right) \right) \\
 & + A_4 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_4}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_4}{2} \right) \right) \right) \\
 & + A_5 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_5}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_5}{2} \right) \right) \right) \\
 & \left. + A_6 f \left(x_m + h \left(\frac{1+x_6}{2} \right), y \left(x_m + h \left(\frac{1+x_6}{2} \right) \right) \right) \right] \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

ส่วนในการประมาณค่า $y(x_m + sh)$ จะใช้การกระจายเทอม $y(x_m + sh)$ ตามอนุกรมกำลังเทย์เลอร์ ซึ่งจะมีรูปแบบดังนี้ คือ

$$y(x_m + sh) = y_m + shf(x_m, y_m) + \frac{s^2 h^2}{2} (f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m)f_y(x_m, y_m)) \quad (4.16)$$

ดังนั้น เมื่อให้ $s = \frac{1+x_k}{2}$ ก็จะทำได้ว่า

$$\begin{aligned}
 y(x_m + sh) = & y \left(x_m + \left(\frac{1+x_k}{2} \right) h \right) = y_m + \left(\frac{1+x_k}{2} \right) hf(x_m, y_m) \\
 & + \frac{\left(\frac{1+x_k}{2} \right)^2 h^2}{2} (f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m)f_y(x_m, y_m)) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 1

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{4}{x(x-4)}$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 5.0$

ซึ่งมีคำตอบของสมการ คือ $y = 5 + \ln 5 - \ln x + \ln(x-4)$

(4.18)

หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon \leq 0.0000001$

ตารางที่ 4.1 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	$x = 5.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 5.075507552508145$	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.075436115040075	$7.143746806992368 \times 10^{-5}$
(4.11)	5.075507508878028	$4.363011729680011 \times 10^{-8}$
(4.12)	5.075507552520396	$1.2250644942923827 \times 10^{-11}$
(4.13)	5.075507552508204	$5.861977570020827 \times 10^{-14}$
(4.14)	5.0755075524703805	$3.7764458227229625 \times 10^{-11}$
(4.15)	5.075507552508075	$7.016609515630989 \times 10^{-14}$
RK-2(2.11)	5.0756506238859185	$1.430713777347378 \times 10^{-4}$
RK-3(2.12)	5.075507550676936	$1.8312089622440908 \times 10^{-9}$
RK-4(2.13)	5.0755076179886895	$6.548054454214025 \times 10^{-8}$
RK-4(2,14)	5.075507581636823	$2.9128676136203234 \times 10^{-8}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507550676936	$1.8312089622440908 \times 10^{-9}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507554348487	$1.8403421009338672 \times 10^{-9}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	$x = 5.1, h = 0.01, \text{ True value } y = 5.075507552508144$	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.075506835862621	$7.166455233686975 \times 10^{-7}$
(4.11)	5.075507552503743	$4.4009240696141205 \times 10^{-12}$
(4.12)	5.0755075525459	$3.7755576443032624 \times 10^{-11}$
(4.13)	5.075507552508145	$8.881784197001252 \times 10^{-16}$
(4.14)	5.075507552470392	$3.775202372935382 \times 10^{-11}$
(4.15)	5.075507552508144	0.0
RK-2(2.10)	5.075507552508144	$1.4333108495634406 \times 10^{-6}$
RK-3(2.11)	5.075507552508144	$3.597122599785507 \times 10^{-13}$
RK-4(2.13)	5.075507552514745	$6.600942015211331 \times 10^{-12}$
RK-4(2.14)	5.75507552511079	$2.9345414986892138 \times 10^{-12}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507552507784	$3.597122599785507 \times 10^{-13}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507552508166	$2.220446049250313 \times 10^{-14}$

ตารางที่ 4.3 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	$x = 5.1, h = 0.001, \text{ True value } y = 5.075507552508169$	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.07550754534146	$7.166709004025051 \times 10^{-9}$
(4.11)	5.075507552508141	$2.8421709430404007 \times 10^{-14}$
(4.12)	5.075507552545899	$3.772981926886132 \times 10^{-11}$
(4.13)	5.075507552508141	$2.8421709430404007 \times 10^{-14}$
(4.14)	5.07550755247039	$3.7778669081944827 \times 10^{-11}$
(4.15)	5.075507552508141	$2.8421709430404007 \times 10^{-14}$
RK-2(2.10)	5.075507552508169	$1.4333343401062848 \times 10^{-8}$
RK-3(2.11)	5.075507552508169	$2.220446049250313 \times 10^{-14}$
RK-4(2.13)	5.075507552508142	$2.6645352591003757 \times 10^{-14}$
RK-4(2.14)	5.0755075525081415	$2.7533531010703882 \times 10^{-14}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507552508147	$2.220446049250313 \times 10^{-14}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507552508143	$2.5757174171303632 \times 10^{-14}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	$x = 5.1, h = 0.0001, \text{ True value } y = 5.07550755250798$	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.075507552436473	$7.150724457005708 \times 10^{-11}$
(4.11)	5.07550755250815	$1.7053025658242404 \times 10^{-13}$
(4.12)	5.075507552545915	$3.793498848381205 \times 10^{-11}$
(4.13)	5.07550755250815	$1.7053025658242404 \times 10^{-13}$
(4.14)	5.075507552470402	$3.75779407590926 \times 10^{-11}$
(4.15)	5.07550755250815	$1.7053025658242404 \times 10^{-13}$
RK-2(2.10)	5.07550755250798	$1.4352075083934324 \times 10^{-10}$
RK-3(2.11)	5.07550755250798	$1.9451107391432743 \times 10^{-13}$
RK-4(2.13)	5.07550755250815	$1.7053025658242404 \times 10^{-13}$
RK-4(2.14)	5.07550755250815	$1.705302565824240 \times 10^{-13}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507552508174	$1.9451107391432743 \times 10^{-13}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507552508152	$1.723066134218243 \times 10^{-13}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = y^3$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการ คือ $y = \frac{1}{\sqrt{100 - 2x}}$

(4.19)

หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon \leq 0.0000001$

ตารางที่ 4.5 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	$x = 0.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 0.10010015025043828$	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015018762508	$6.281319908651994 \times 10^{-11}$
(4.11)	0.10010015025025022	$1.880579025836937 \times 10^{-13}$
(4.12)	0.10005007512515016	$5.0075125288123745 \times 10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025025024	$1.880440247958859 \times 10^{-13}$
(4.14)	0.10010015025020015	$2.3812896099428826 \times 10^{-13}$
(4.15)	0.10010015025025024	$1.880440247958859 \times 10^{-13}$
RK-2(2.10)	0.10010015015005	$1.0038828102132413 \times 10^{-10}$
RK-3(2.11)	0.10009995035038287	$1.999000554114838 \times 10^{-7}$
RK-4(2.13)	0.1001001502504383	$1.3877787807214457 \times 10^{-17}$
RK-4(2,14)	0.10010015025042573	$1.2545520178264269 \times 10^{-14}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010008835678888	$6.189364940012432 \times 10^{-8}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.10010013287881973	$1.737161854642455 \times 10^{-8}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.6 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	$x = 0.1, h = 0.01, \text{ True value } y = 0.10010015025043828$	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015024981017	$6.281086761816823 \times 10^{-13}$
(4.11)	0.10010015025043811	$1.6653345369377348 \times 10^{-16}$
(4.12)	0.10005004128900175	$5.010896143653465 \times 10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025043811	$1.6653345369377348 \times 10^{-16}$
(4.14)	0.10010015025038795	$5.0334736378943035 \times 10^{-14}$
(4.15)	0.10010015025043811	$1.6653345369377348 \times 10^{-16}$
RK-2(2.10)	0.10010015025043828	$1.0049183707394604 \times 10^{-12}$
RK-3(2.11)	0.10010013017925301	$2.00711852693658 \times 10^{-8}$
RK-4(2.13)	0.10010015025043831	$2.7755575615628914 \times 10^{-17}$
RK-4(2,14)	0.10010015025043827	$1.3877787807814457 \times 10^{-17}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010015025043828	$6.1991267397143446 \times 10^{-10}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.10010014850681405	$1.7436242311097416 \times 10^{-9}$

ตารางที่ 4.7 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	$x = 0.1, h = 0.001, \text{ True value } y = 0.10010015025043828$	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015025043208	$6.203371150093062 \times 10^{-15}$
(4.11)	0.10010015025043824	$4.163336342344337 \times 10^{-17}$
(4.12)	0.10005003790705544	$5.0112343382840985 \times 10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025043824	$4.163336342344337 \times 10^{-17}$
(4.14)	0.10010015025038811	$5.016820292524926 \times 10^{-14}$
(4.15)	0.10010015025043824	$4.163336342344337 \times 10^{-17}$
RK-2(2.10)	0.10010015025042826	$1.0019762797242038 \times 10^{-14}$
RK-3(2.11)	0.10010014824250514	$2.0079331392031108 \times 10^{-9}$
RK-4(2.13)	0.10010015025043824	$4.163336342344337 \times 10^{-17}$
RK-4(2,14)	0.10010015025043824	$4.163336342344337 \times 10^{-17}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010014963042779	$6.200104873954615 \times 10^{-10}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.1001001500760111	$1.7442718103222177 \times 10^{-10}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.8 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	$x = 0.1, h = 0.0001, \text{ True value } y = 0.10010015025043828$	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015025043857	$2.914335439641036 \times 10^{-16}$
(4.11)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696 \times 10^{-16}$
(4.12)	0.1000500375688776	$5.0112681560673944 \times 10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696 \times 10^{-16}$
(4.14)	0.10010015025038807	$5.0209836288672705 \times 10^{-14}$
(4.15)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696 \times 10^{-16}$
RK-2(2.10)	0.10010015025043854	$2.636779683484747 \times 10^{-16}$
RK-3(2.11)	0.10010015004963664	$2.00801639205821699 \times 10^{-10}$
RK-4(2.13)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696 \times 10^{-16}$
RK-4(2.14)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696 \times 10^{-16}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010015018843614	$6.200213953366784 \times 10^{-11}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.10010015023299479	$1.7443491096003072 \times 10^{-11}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1.0$

ซึ่งมีคำตอบของสมการ คือ $y = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

(4.20)

หยุดหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon \leq 0.0000001$

ตารางที่ 4.9 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	$x = 0.1, h = 0.1, \text{ True value } y = 1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050125117187545	$1.267696255746742 \times 10^{-5}$
(4.11)	1.0050250572917958	$1.3138951615587757 \times 10^{-7}$
(4.12)	1.0050250625027306	$1.2617858136110272 \times 10^{-7}$
(4.13)	1.005025062500245	$1.2618106692841025 \times 10^{-7}$
(4.14)	1.005025062497718	$1.261835940180589 \times 10^{-7}$
(4.15)	1.0050250625002202	$1.26181091797406 \times 10^{-7}$
RK-2(2.10)	1.0049751859510498	$5.0002730262121986 \times 10^{-5}$
RK-3(2.11)	1.0050377574960885	$1.2568814776514614 \times 10^{-5}$
RK-4(2.13)	1.0050252273803153	$3.869900333519638 \times 10^{-8}$
RK-4(2,14)	1.0050293772521075	$4.188570795538027 \times 10^{-6}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.005026656299475	$1.4676181629980078 \times 10^{-6}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050265801713743	$1.3914900622857829 \times 10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.10 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	$x = 0.1, h = 0.01, \text{ True value } y = 1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050250603685909	$1.2831272111490932 \times 10^{-7}$
(4.11)	1.0050251884247268	$2.565851975333544 \times 10^{-10}$
(4.12)	1.0050251884277908	$2.535212040299939 \times 10^{-10}$
(4.13)	1.0050251884252617	$2.5605029208009 \times 10^{-10}$
(4.14)	1.0050251884227324	$2.5857960217479103 \times 10^{-10}$
(4.15)	1.0050251884252615	$2.5605051412469493 \times 10^{-10}$
RK-2(2.10)	1.0050250228100317	$1.6587128026657183 \times 10^{-7}$
RK-3(2.11)	1.0050252013530787	$1.2671766747078864 \times 10^{-8}$
RK-4(2.13)	1.0050251886852704	$3.958389171998533 \times 10^{-12}$
RK-4(2,14)	1.0050251929065321	$4.225220173736943 \times 10^{-9}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.005025207945326	$1.926401393959054 \times 10^{-8}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050252068964727	$1.821516071309759 \times 10^{-8}$

ตารางที่ 4.11 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	$x = 0.1, h = 0.001, \text{ True value } y = 1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050251873980258	$1.2832861440159604 \times 10^{-9}$
(4.11)	1.0050251886810533	$2.5868196473766147 \times 10^{-13}$
(4.12)	1.0050251886835846	$2.2726265314076954 \times 10^{-12}$
(4.13)	1.0050251886810535	$2.5845992013273644 \times 10^{-13}$
(4.14)	1.0050251886785222	$2.7897684162780934 \times 10^{-12}$
(4.15)	1.0050251886810535	$2.5845992013273644 \times 10^{-13}$
RK-2(2.10)	1.005025187364524	$1.3167880119624442 \times 10^{-9}$
RK-3(2.11)	1.0050251886939998	$1.2687850770021214 \times 10^{-11}$
RK-4(2.13)	1.0050251886813117	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
RK-4(2,14)	1.0050251886855408	$4.228839500797221 \times 10^{-12}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.0050251888786752	$1.9736323686458945 \times 10^{-10}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050251888679091	$1.8659718215019439 \times 10^{-10}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.12 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	$x = 0.1, h = 0.0001, \text{ True value } y = 1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050251886684816	$1.2830625450988009 \times 10^{-11}$
(4.11)	1.0050251886813106	$1.5543122344752192 \times 10^{-15}$
(4.12)	1.005025188683844	$2.531752585355207 \times 10^{-12}$
(4.13)	1.0050251886813106	$1.5543122344752192 \times 10^{-15}$
(4.14)	1.0050251886787815	$2.530642362330582 \times 10^{-12}$
(4.15)	1.0050251886813106	$1.5543122344752192 \times 10^{-15}$
RK-2(2.10)	1.0050251886684902	$1.2821965711395933 \times 10^{-11}$
RK-3(2.11)	1.0050251886813242	$1.199040866595169 \times 10^{-14}$
RK-4(2.13)	1.0050251886813115	$6.661338147750939 \times 10^{-16}$
RK-4(2.14)	1.0050251886813166	$4.440892098500626 \times 10^{-15}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.0050251886832866	$1.9744206269933784 \times 10^{-12}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050251886831876	$1.8753887331968144 \times 10^{-12}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย

จากการใช้หลักความจริงที่ว่าปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นสมมูลกับสมการปริพันธ์แล้วจึงใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีเกาส์-เลอจองด์นั้น เมื่อคูณผลจากการทดลองจากตัวอย่างต่างๆ สรุปได้ว่าวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น โดยการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการปริพันธ์ที่สมมูลกัน ได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้สนใจในงานด้านนี้สามารถหารูปแบบต่างๆ ในการหาผลเฉลยเพิ่มได้อีกเพื่อที่จะเลือกเอารูปแบบที่ได้พัฒนาขึ้นไปใช้งานได้ตามความเหมาะสมกับปัญหา อีกทั้งใช้รูปแบบต่างๆ ที่ได้ นำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นที่ผู้สนใจต้องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ โดยใช้พหุนามตั้งฉากอื่นๆ ที่แตกต่างไปจาก Legendre Orthogonal Polynomials

รายการอ้างอิง

- [1] รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข. “การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน”. ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2549
- [2] Maitree Podisuk and Wannaporn Sanprasert, “**Numerical Integration Formulas for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equation**”. WSEAS Transactions on Mathematics, Issue 1, Volume 4 . January 2005, Page 34-39
- [3] Maitree Podisuk and Wannaporn Sanprasert, “**Integration Method for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equation**” KMITL SCIENCE JOURNAL, Volume 5, No.1 February 2005, Page 450-459
- [4] Maitree Podisuk, Wannaporn Sanprasert and Chinda Chaichuay . “**Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equation of Higher Order by Integration Method** ” Proceedings of the 9th International Conference on Applied Mathematics, Istanbul, Turkey, May 27-29, 2006, Page 530-535
- [5] Maitree Podisuk, Wannaporn Sanprasert and Netchanok Kongchouy, “**Open Formula of Integration Method** ”, KMITL International Conference on Science and Applied Science, Bangkok, Thailand, March 8-10, 2006(will also be published in KMITL Science Journal)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้