

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ทฤษฎีโรบัสต์คอนโทรล

ROBUST CONTROL THEORY



โดย

นางสาว ชีรรัตน์ ปรีชานุกูล
นางสาว นวลจันทร์ เอี่ยมสุภนิมิตร
นางสาวนันทินี เจริญรักสกุล

ร/น.
ธ ๒๕๖๓
๑๕/๕๑

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 72038
วัน,เดือน,ปี..... - 7 ส.ย. 2550

b. 117 6224x
i.....

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิศวกรรมระบบควบคุม
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญาานิพนธ์ปีการศึกษา 2549

ภาควิชาวิศวกรรมระบบควบคุม

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง ทฤษฎีโรบัสต์คอนโทรล
ROBUST CONTROL THEORY

ผู้จัดทำ นางสาวธีรารัตน์ ปรีชานุกูล 46010325
นางสาวนวลจันทร์ เอี่ยมศุภนิมิตร 46010347
นางสาวนันท์ณี เรมรักสกุล 46010355

P. Pranayanuntana อาจารย์ที่ปรึกษา
(ศศ. ดร. ประเมษฐ์ ประนยานันท์)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีโรบัสต์คอนโทรล

โดย

นางสาวธีรารัตน์ ปรีชานุกูล

นางสาวนวลจันทร์ เอี่ยมสุภณมิตร

นางสาวนนท์ณี เริ่มรักสกุล

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผศ. ดร. ประเมษฐ์ ประณยานันท์

ปีการศึกษา 2549

บทคัดย่อ

โปรเจกต์นี้ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีทางด้านโรบัสต์คอนโทรล ในบทที่ 1 พวกเราได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการควบคุมระบบเชิงเส้นสำหรับระบบเชิงเส้นที่ไม่แน่นอน, ในบทที่ 2 ศึกษาเกี่ยวกับความเสถียรภาพสมบูรณ์และเกณฑ์วงจรร ในบทที่ 3 และบทที่ 4 เราได้ทำการศึกษาเรื่อง LQR หรือ Linear Quadratic regulator และ ทฤษฎีโรบัสต์เนส LQR ซึ่งเป็นทฤษฎีด้านการควบคุมที่ดีที่สุดและเป็นวิธีนิยมนำไปประยุกต์ใช้ในเชิงอุตสาหกรรม LQR เป็นคุณสมบัติหนึ่งของโรบัสต์เนส ในโครงการนี้ เราได้ศึกษาคุณสมบัติด้านโรบัสต์เนสและยังแสดงให้เห็นถึงประสิทธิผลและผลกระทบของการแปรผันค่าเมตริก Q และ R จากสมการ

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Ru(s)]ds$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ROBUST CONTROL THEORY

By

Miss Teerarat Preechanukul

Miss Nualjun Jaumsupanimit

Miss Nunthinee Roemruksakul

Advisor

Asst. Prof. Dr. Poramate Pranayanuntana

Academic Year 2006

ABSTRACT

In this project we study a variety of robust control theory. Particularly we study how to construct robust linear controllers for uncertain linear system satisfying some type of norm bounds in Chapter 1, we study absolute stability and circle criterion in Chapter 2. In Chapters 3 and 4 we study the LQR or linear quadratic regulator and its robustness properties. LQR is the most widely used algorithm of an optimal control theory applied to industrial control. LQR possesses robustness properties. In this project we study this robustness properties and also show the effect of the two weight matrices Q and R in the performance function

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Ru(s)]ds$$

on these robustness properties.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ROBUST CONTROL

P R O J E C T R E P O R T

Project Advisor

Assistant Professor Dr.Poramate Pranayanuntana

Teerarat Preechanukul ID. 46010325

Nualjun Iaumsupanimit ID. 46010347

Nunthinee Roemruksakul ID. 46010355

March 2007

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ROBUST CONTROL

PROJECT REPORT

Submitted in Partial Fulfillment
of the REQUIREMENTS for the

Degree of
**Bachelor of Engineering
(Control Engineering)**

at the
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang

by
Teerarat Preechanukul ID. 46010325
Nualjun Iaumsupanimit ID. 46010347
Nunthinee Roemruksakul ID. 46010355

March 2007

Copy No. 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Approved by the Project Advisor:

P. Pranayanuntana

Assistant Professor Dr.Poramate Pranayanuntana

MAR 2, 2007

Date



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

VITAE

Teerarat, **Nualjun** and **Nunthinee** are studying in the 4th year of Control Engineering, Department of Control Engineering, Faculty of Engineering, King Monkut's Institute of Technology Ladkrabang. They're interested in Robust Control theories and designs.

Major : Control Engineering

Teerarat Re

Teerarat Preechanukul

MAY 02, 2007

Date

Nualjun Jaung

Nualjun Jaumsupanimit

MAR 2, 2007

Date

Nunthinee Roemruksakul

Nunthinee Roemruksakul

MAR 2, 2007

Date



To our beloved

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ACKNOWLEDGEMENT

We wish to thank Dr.Poramate Pranayanuntana for his guidance, both in the selection of this (fantastic) project topic and in its writing. Without him this project seems to be untouchable. We spend lots of time with him at his place (Condo) and sometimes he even asked us to go to his home to finish up the work for the weekend. Therefore, we have learned many things from him. He taught us basically every thing, from how to use LaTeX an editor program that makes our project report very very beautiful, how to read difficult books, how to prove difficult theorems, LQR, Robustness, criterion, Observable and Detectable, how to do conference paper etc. If it weren't because he were our senior project advisor we couldn't learn the thing he taught us from anyone else.

Unforgettable, we would like to thank his family, P'A, Brooklyn and Brave for very warm welcome to their place and for sharing everything with us. We wish to thank (Dr.Pormate's graduate student) P'Pear, for his suggestions on practically everything.

Of course, We must also thank all teachers who enhance our knowledge and sharpen our skills.

Spacial thanks go to HBO, Star Movie, Cinemax, History Channel, National Geographic Channel, Discovery Channel and many other channels in UBC for the knowledge and entertainment each evening and night that we stayed up to do our project.

Last but not least we would like to thank to each other for the term work that lead this project to success.

ABSTRACT

In this project we study a variety of robust control theory. Particularly we study how to construct robust linear controllers for uncertain linear system satisfying some type of norm bounds in Chapter 1. we study absolute stability and circle criterion in Chapter 2. In Chapters 3 and 4 we study the LQR or linear quadratic regulator and its robustness properties. LQR is the most widely used algorithm of an optimal control theory applied to industrial control. LQR possesses robustness properties. In this project we study this robustness properties and also show the effect of the two weight matrices Q and R in the performance function

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Ru(s)]ds$$

on these robustness properties.

Contents

1	Constructing Robust Linear Controllers	1
2	Absolute Stability and Circle Criterion	7
2.1	Circle Criterion	12
3	Linear Quadratic Control:	19
3.1	Deterministic formulation of the Linear Quadratic Regulator (LQR)	19
4	Robustness LQR	25
4.1	Robustness Properties of Linear Quadratic Regulator :	25
4.2	Return Difference Equality:	27
4.3	Robustness of LQR with sector Bounded Nonlinearities:	35
5	Design of the state feedback by using the LQR	39
5.1	MATLAB implementation	39
5.2	Laboratory Exercises	41
A	Stability	65

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

A.1 Main Stability Theorems	65
B Observability and Detectability	69
C L_2 Norm :	72
C.1 Deterministic Formulation:	72



List of Figures

2.1	Feedback connection of a linear system and a nonlinear element.	7
2.2	(a) Global sector nonlinearities: (b) Local sector nonlinearities.	9
2.3	Loop transformation.	14
2.4	Graphical representation of the circle criterion.	17
3.1	Feedback representation of LQR problem.	24
4.1	Feedback interconnection.	26
4.2	Feedback interconnection.	27
4.3	Feedback interconnection.	27
4.4	Feedback interconnection.	28
4.5	Feedback interconnection.	30
4.6	Nyquist plot.	31
4.7	Nyquist plot.	32
4.8	Forbidden disk.	33
4.9	Forbidden disk.	34
4.10	Feedback control design problem.	36

4.11 Feedback representation of Fig. 4.10	36
4.12 Robustness of LQR with sector Bounded Nonlinearities	37
5.1 Feedback system.	40
5.2 Help of LQR in MATLAB	41
5.3 Step response (when varying Q).	45
5.4 Open loop Bode magnitude and phase (when varying Q).	46
5.5 Closed loop Bode magnitude and phase (when varying Q).	47
5.6 Open loop Bode magnitude and phase (when $Q = 1$).	48
5.7 Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$).	49
5.8 Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$).	51
5.9 Step response (when varying R).	54
5.10 Open loop Bode magnitude and phase (when varying R).	55
5.11 Closed loop Bode magnitude and phase (when varying R).	56

Chapter 1

Constructing Robust Linear Controllers

A controller is viewed as robust if it maintains stability for all uncertainties in an expected range (both in frequency and time domain).

We consider a class of dynamical systems modeled by

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t, x(t)) + Bh(t, x(t), u(t)) \quad (1.0.1)$$

where $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, and the functions h and f model uncertainties, or nonlinearities, in the system.

We refer to h as the **matched uncertainty** because it affects the system dynamics via the input matrix B in the same fashion as the input u does. In other words, the uncertainty h matches the system input u . The vector f models the **unmatched uncertainty**.

We assume that the uncertain elements h and f satisfy the following norm bounds:

เอกสาร(1)มี $\|h(t, x, u)\| \leq \gamma \|u\| + \alpha \|x\|$ เพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(2) \|f(t, x)\| \leq \alpha_f \|x\|,$$

where γ_h, α_h are α_f and known nonnegative constants.

We further assume that the matrix A is asymptotically stable. If this is not the case, we apply a preliminary state-feedback controller $u = -Kx + v$ such that $A - BK$ is asymptotically stable. Such a feedback exists provided that the pair (A, B) is stabilizable.

Our goal is to construct a linear state-feedback controller that would make the closed-loop system asymptotically stable for arbitrary f and h that satisfy the above norm bounds.

Theorem 1.0.1 *Suppose that A is asymptotically stable and that $P = P^T > 0$ is the solution to the Lyapunov matrix equation $A^T P + PA = -2Q$ for some $Q = Q^T > 0$.*

Suppose also that

$$\alpha_f < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \text{ and } \gamma_h < 1.$$

Then, the state-feedback controller $u = -\gamma B^T P x$, where

$$\gamma > \frac{\alpha_h^2}{4(\lambda_{\min}(Q) - \alpha_f \lambda_{\max}(P))(1 - \gamma_h)}$$

stabilizes the uncertain system model (1.0.1) for arbitrary f and h that satisfy the norm bounds.

Proof The time derivative of the positive definite function $V = x^T P x$ evaluated on any trajectory of the closed-loop system is

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2x^T P \dot{x} \\ &= -2x^T Q x - 2\gamma x^T P B B^T P x + 2x^T P f + 2x^T P B h. \end{aligned}$$

Since

$$\begin{aligned}
 V &= x^T P x \\
 \dot{V} &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\
 &= (\dot{x}^T P x)^T + x^T P \dot{x}, \text{ since transpose of a scalar is itself.} \\
 &= x^T P \dot{x} + x^T P \dot{x} \\
 &= 2x^T P \dot{x} \\
 \dot{x} &= Ax + Bu + f + Bh \\
 \dot{V} &= 2x^T P (Ax + Bu + f + Bh) \\
 &= 2x^T P Ax + 2x^T P Bu + 2x^T P f + 2x^T P Bh \\
 &= -2x^T Q X - 2\gamma x^T P B B^T P x + 2x^T P f + 2x^T P Bh.
 \end{aligned}$$

Our goal is to determine $\tilde{\gamma} > 0$ such that if $\gamma > \tilde{\gamma}$, then $\dot{V} < 0$, which in turn implies the asymptotic stability of the closed-loop system. To proceed further, recall that if Q is a symmetric matrix, then

$$\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 \leq x^T Q x \leq \lambda_{\max}(Q)\|x\|^2,$$

and therefore

$$-x^T Q x \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2.$$

Furthermore,

$$x^T P B B^T P x = x^T P B (x^T P B)^T = \|x^T P B\|^2.$$

For a symmetric positive definite matrix P , its induced 2-norm is

$$\|P\| = \lambda_{\max}(P).$$

Taking the above relations into account, using the norm bounds on the uncertain elements, and performing some manipulation yields

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &\leq -2\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 - 2\gamma\|x^T P B\|^2 \\
 &\quad + 2\alpha_f \alpha_{\max}(P)\|x\|^2
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับก+ให้ $2\|x^T P B\|(\alpha_h\|x\| + \gamma_h\gamma\|x^T P B\|)$ มาไปใช้ประโยขน์ด(1.0.2) ำ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Let

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \begin{bmatrix} \lambda_{\min}(Q) - \alpha_f \lambda_{\max}(P) & -\frac{\alpha}{2}h \\ -\frac{\alpha}{2}h & \gamma(1 - \gamma_h) \end{bmatrix} \\ &\in \mathbb{R}^{2 \times 2} \end{aligned} \quad (1.0.3)$$

Then, we can represent (1.0.2) as

$$\dot{V} \leq -2 \begin{bmatrix} \|x\| & \|x^T P B\| \end{bmatrix} \tilde{Q} \begin{bmatrix} \|x\| \\ \|x^T P B\| \end{bmatrix}.$$

For \dot{V} to be negative it is enough that the leading principal minor is positive by assumption.

For the second-order leading principal minor to be positive it is sufficient that $\gamma_h < 1$ and

$$\gamma > \frac{\alpha_h^2}{4(\lambda_{\min}(Q) - \alpha_f \lambda_{\max}(P))(1 - \gamma_h)}.$$

The proof is now complete. □

Note that if $\gamma_h = 0$, then the closed-loop system is asymptotically stable if

$$\alpha_f < \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \quad \text{and} \quad \gamma > \frac{\alpha_h^2}{4(\lambda_{\min}(Q) - \alpha_f \lambda_{\max}(P))}$$

Example 1.0.2 Consider a dynamical system model

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b(u + h(x, u)) \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} (u + h(x, u)). \end{aligned}$$

Let P be the solution of the matrix Lyapunov equation $A^T P + PA = -2I_2$. We will design a linear state-feedback controller $u = -\gamma b^T P x$ so that the origin of the closed-loop system is uniformly asymptotically stable for any $h(x, u)$ such that

$$h(x, u) \leq 4\|x\| + \frac{1}{2}|u|. \quad (1.0.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In particular, we will find a bound $\tilde{\gamma} > 0$ so that for any $\gamma > \tilde{\gamma}$ the closed-loop system is uniformly asymptotically stable in the face of uncertainties satisfying the norm bound (1.0.4).

Solving the Lyapunov equation $A^T P + PA = -2I_2$ yields

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hence,

$$\begin{aligned} u &= -\gamma b^T P x = -\gamma \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= -\gamma \left(\frac{1}{2} x_1 + x_2 \right). \end{aligned}$$

We obtain a bound on γ by evaluating $\frac{d}{dt}(x^T P x)$ on the trajectories of the closed-loop system. First, we evaluate

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^T P x) &= 2x^T P \dot{x} \\ &= 2x^T P (Ax + b(u + h(x, u))) \\ &= -2x^T x - 2\gamma x^T P b b^T P x + 2x^T P b h. \end{aligned}$$

Taking the norms and performing some manipulations yields

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^T P x) &\leq -2x^T x - 2\gamma \|x^T P b\|^2 \\ &\quad + 2|x^T P b|(4\|x\| + \frac{1}{2}\gamma |x^T P b|) \\ &= -2\|x\|^2 - \gamma |x^T P b|^2 + 8|x^T P b|\|x\| \\ &= -2 \begin{bmatrix} \|x\| & |x^T P b| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|x\| \\ |x^T P b| \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

For $\frac{d}{dt}(x^T P x)$ to be negative definite, it is enough that the matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

be positive definite, i.e.

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{2} &> 0 \\ \frac{\gamma}{2} - 4 &> 0 \\ \gamma &> \tilde{\gamma} = 8\end{aligned}$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 2

Absolute Stability and Circle Criterion

Many nonlinear physical systems can be represented as a feedback connection of a linear dynamical system and a nonlinear element, as show in Figure 2.1

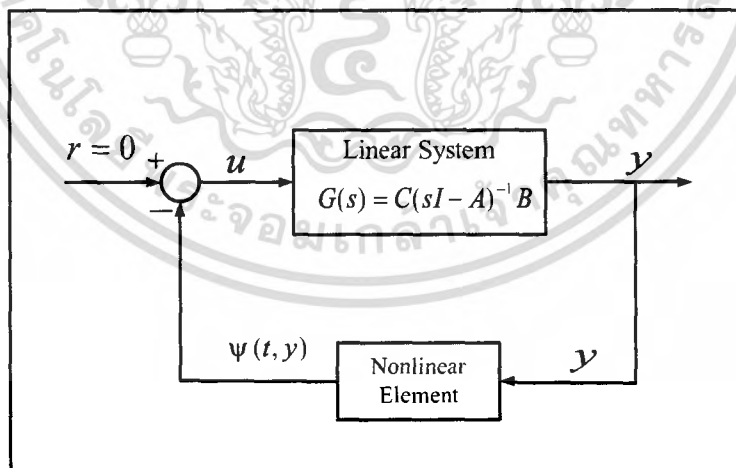


Figure 2.1: Feedback connection of a linear system and a nonlinear element.

We assume that the external input $r = 0$ and study the behavior of the unforced system, represented by

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.0.1)$$

$$y = Cx \quad (2.0.2)$$

$$u = -v(t, y) \quad (2.0.3)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^p(A, B)$ is controllable.

(A, C) is observable.

The transfer function matrix of the linear system (2.0.1)-(2.0.2) is given by

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.0.4)$$

which is a square strictly proper transfer. The controllability-observability assumptions ensure that $\{A, B, C\}$ is a minimal realization of $G(s)$. From linear system theory, we know that for any rational strictly proper $G(s)$, a minimal realization always exists. To describe the sector condition, let us start with the case when $G(s)$ is a single-input-single-output (SISO) transfer function: that is, $p = 1$. In this case, $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfies a sector condition (or is a sector nonlinearity) if there are constants α, β, a and b (with $\beta > \alpha$ and $a < 0 < b$) such that

$$\alpha y^2 \leq y\psi(t, y) \leq \beta y^2, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in [a, b] \quad (2.0.5)$$

If (2.0.5) holds for all $y \in (-\infty, \infty)$, we say that the sector condition holds globally.

Definition 2.0.3 A memoryless nonlinearity $\psi : [0, \infty) \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ is said to satisfy a sector condition if

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ [math>\psi(t, y) - K_{\min}y]^T [\psi(t, y) - K_{\max}y] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^p (2.0.6) ที่
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

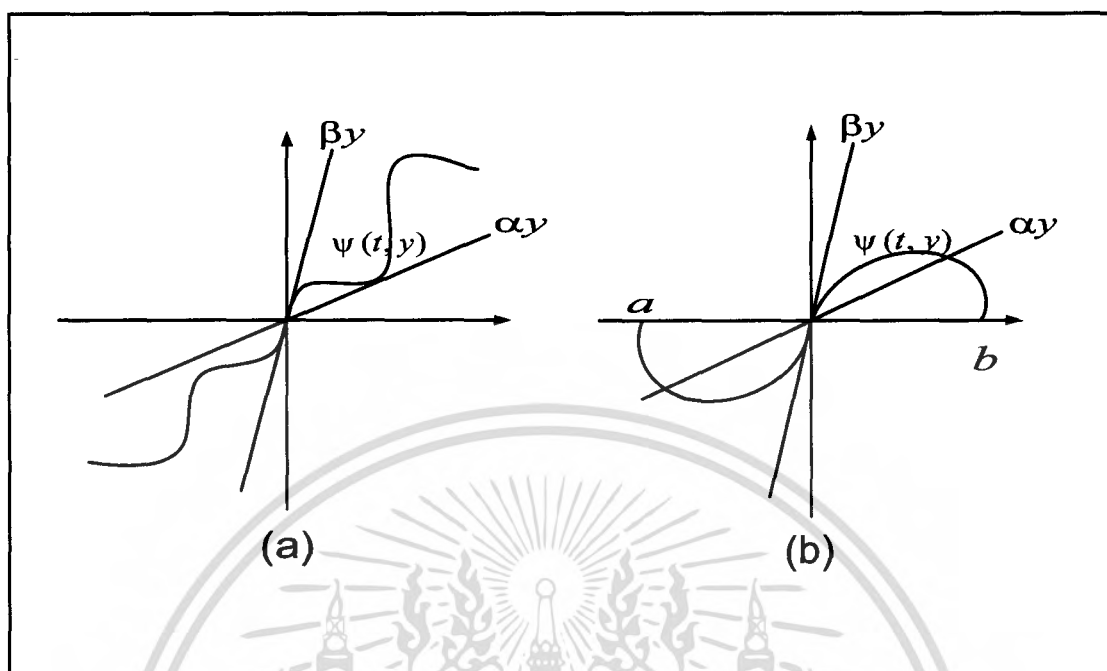


Figure 2.2: (a) Global sector nonlinearities; (b) Local sector nonlinearities.

for some real matrices K_{min} and K_{max} where $K = K_{max} - K_{min}$ is a positive definite symmetric matrix and the interior of Γ is connected and contains the origin. If $\Gamma = \mathbb{R}^p$, then $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the sector condition globally, in which case it is said that $\psi(\cdot, \cdot)$ belongs to a sector $[K_{min}, K_{max}]$. If (2.0.6) holds with strict inequality, then $\psi(\cdot, \cdot)$ is said to belong to a sector (K_{min}, K_{max}) .

Definition 2.0.4 Consider the system (2.0.1)-(2.0.3), where $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies a sector condition per Definition 2.0.3. The system is absolutely stable if the origin is globally uniformly asymptotically stable for any nonlinearity in the given sector. It is absolutely stable with a finite domain if the origin is uniformly asymptotically stable.

We shall investigate asymptotic stability of the origin using two Lyapunov function candidates. The first one is a simple quadratic function

$$V(x) = x^T P x; \quad P = P^T > 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and the second one is a function of the form

$$V(x) = x^T P x + \eta \int_0^y \psi^T(\sigma) K d\sigma; \quad P = P^T > 0, \quad \eta \geq 0$$

In the latter case, we assume that the nonlinearity ψ is time invariant and satisfies some conditions to ensure that the integral is well defined and nonnegative. In the both cases, we start the derivation with P undetermined. Then, we determine condition under which there exists P such that the derivative of $V(x)$ along the trajectories of the system is negative definite for all nonlinearities that satisfy a given sector condition. In Circle Criterion, these conditions take the form of a frequency-domain condition on a certain transfer function. The frequency-domain conditions of Circle Criterion use the concept of a positive real transfer function and a key lemma that relates that concept to the existence of Lyapunov functions.

Definition 2.0.5 *A $p \times p$ proper rational transfer function matrix $Z(s)$ is called positive real if*

- *all elements of $Z(s)$ are analytic for $\text{Re}(s) > 0$*
- *any pure imaginary pole of any element of $Z(s)$ is a simple pole and associated residue matrix of $Z(s)$ is positive semidefinite Hermitian, and*
- *for all real ω for which $j\omega$ is not a pole of any element of $Z(s)$, the matrix $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)$ is positive semidefinite.*

The transfer function $Z(s)$ is called strictly positive real if and only if $Z(s - \epsilon)$ is positive real for some $\epsilon > 0$.

When $p = 1$, the frequency-domain condition of definition of Definition 2.0.5 reduces to $\text{Re } Z(j\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$, which is equivalent to the condition that the Nyquist plot of $Z(j\omega)$ lies in the closed right-half complex plane.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The following lemma gives an equivalent characterization of strictly positive real transfer functions.

Lemma 2.0.6 *Let $Z(s)$ be a $p \times p$ proper rational transfer function matrix. and suppose $\det[Z(s) + Z^T(-s)]$ is not identically zero. Then, $Z(s)$ is strictly positive real if and only if*

- $Z(s)$ is Hurwitz: that is. poles of all elements of $Z(s)$ have negative real parts.
- $Z(j\omega) + Z^T(-j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$. and
- one of the following three conditions is satisfied:
 1. $Z(\infty) + Z^T(\infty) > 0$;
 2. $Z(\infty) + Z^T(\infty) = 0$ and $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)] > 0$;
 3. $Z(\infty) + Z^T(\infty) \geq 0$ (but not zero nor nonsingular) and there exist positive constants σ_0 and ω_0 such that

$$\omega^2 \sigma_{mn} [Z(j\omega) + Z^T(-j\omega)] \geq \sigma_0, \quad \forall |\omega| \geq \omega_0$$

Lemma 2.0.7 (Kalman-Yakubovich-Popov) *Let $Z(s) = \mathcal{C}(sI - A)^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{D}$ be a $p \times p$ transfer function matrix. where A is Hurwitz. (A, \mathcal{B}) is controllable, and (A, \mathcal{C}) is observable. Then, $Z(s)$ is **strictly positive real (SPR)** if and only if there exist a positive definite symmetric matrix P , matrices W and L , and a positive constant ϵ such that*

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P \quad (2.0.7)$$

$$P\mathcal{B} = \mathcal{C}^T - L^T W \quad (2.0.8)$$

$$W^T W = \mathcal{D} + \mathcal{D}^T \quad (2.0.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1 Circle Criterion

Consider the system (2.0.1), (2.0.2) and (2.0.3) and suppose that A is Hurwitz and the nonlinearity $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the sector condition (2.0.6) with $K_{\min} = 0$; this is,

$$\psi^T(t, y)[\psi(t, y) - Ky] \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall y \in \Gamma \subset \mathbb{R}^P \quad (2.1.1)$$

where K is a positive definite definite symmetric matrix.

$$V(x) = x^T P x \geq 0 \quad (\text{Lyapunov function})$$

where P is a positive definite symmetric matrix to be chosen. The derivative of $V(x)$ along the trajectories of the system (2.0.1), (2.0.2) and (2.0.3) is given by

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= (Ax + Bu)^T P x + x^T P (Ax + Bu) \\ &= x^T A^T P x + x^T P A x + u^T B^T P x + x^T P B u \\ &= x^T (A^T P + P A) x + 2x^T P B u. \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= x^T (A^T P + P A) x + 2x^T P B u, \quad u = -\psi(t, y) \\ &= x^T (P A + A^T P) x - 2x^T P B \psi(t, y) \end{aligned}$$

Since $-2\psi^T(\psi - Ky) \geq 0$, its addition to the right-hand side of the last equality gives an upper bound on $V(t, x)$. Therefore,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &\leq x^T (P A + A^T P) x - 2x^T P B \psi(t, y) - 2\psi^T(t, y)[\psi(t, y) - Ky] \\ &= x^T (P A + A^T P) x + 2x^T (C^T K - P B) \psi(t, y) - 2\psi^T(t, y) \psi(t, y) \end{aligned}$$

We will show that the right-hand side is negative definite by completing a square term. From *Kalman-Yakubovich-Popov (Lemma 2.0.7)*, suppose there are matrices $P = P^T > 0$ and L and a constant $\epsilon > 0$ such that

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ $PA + A^T P = -L^T L + \epsilon P$, ไม่ $A = A$ ให้นำไปใช้ประโยชน์ (2.1.2) ใ
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and

$$\begin{aligned}
 PB &= \mathcal{C}^T - L^T W, \quad \mathcal{B} = B \\
 L^T W &= C^T - PB, \quad C^T K = \mathcal{C}^T, \mathcal{C} = KC \\
 W^T W &= \mathcal{D} + \mathcal{D}^T, \quad \text{let } \mathcal{D} = I \\
 &= I + I^T = 2I \\
 &= W^T W = W W^T = 2I \\
 &= W^2 = 2I = (\sqrt{2}I)(\sqrt{2}I) \\
 W &= \sqrt{2}I.
 \end{aligned}$$

Then,

$$PB = C^T K - \sqrt{2}L^T \quad (2.1.3)$$

By (2.1.2) and (2.1.3) such that

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t, x) &\leq -\epsilon x^T P x - x^T L^T L x + 2\sqrt{2}x^T L^T \psi(t, y) - 2\psi^T(t, y)\psi(t, y) \\
 &= -\epsilon x^T P x - [Lx - \sqrt{2}\psi(t, y)]^T [Lx - \sqrt{2}\psi(t, y)] \\
 &\leq -\epsilon x^T P x
 \end{aligned}$$

Thus, transfer function matrix of Kalman-Yakubovich-Popov lemma is

$$Z(s) = I + KC(sI - A)^{-1}B$$

Lemma 2.1.1 Consider the system (2.0.1)-(2.0.3), where A is Hurwitz, (A, B) is controllable, (A, C) is observable, and $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the sector condition (2.1.1) globally. Then, the system is absolutely stable if $Z(s) = I + KG(s)$ is strictly positive real. If (2.1.1) is satisfied only on a set $\Gamma \subset \mathbb{R}^p$, then the same condition on $Z(s)$ ensures that the system is absolutely stable with a finite domain.

The restriction on A to be Hurwitz can be removed by an idea known as *loop transformation* or *pole shifting*. Suppose we start with a system where A is not Hurwitz and the

nonlinearity $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the more general sector condition (2.0.6). Figure 2.3 shows an example of a system where the nonlinearity is not sector bounded. However, the system is absolutely stable. The restriction on A to be Hurwitz can be removed by an idea known as *loop transformation* or *pole shifting*. Suppose we start with a system where A is not Hurwitz and the nonlinearity $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the more general sector condition (2.0.6). Figure 2.3 shows an example of a system where the nonlinearity is not sector bounded. However, the system is absolutely stable. ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

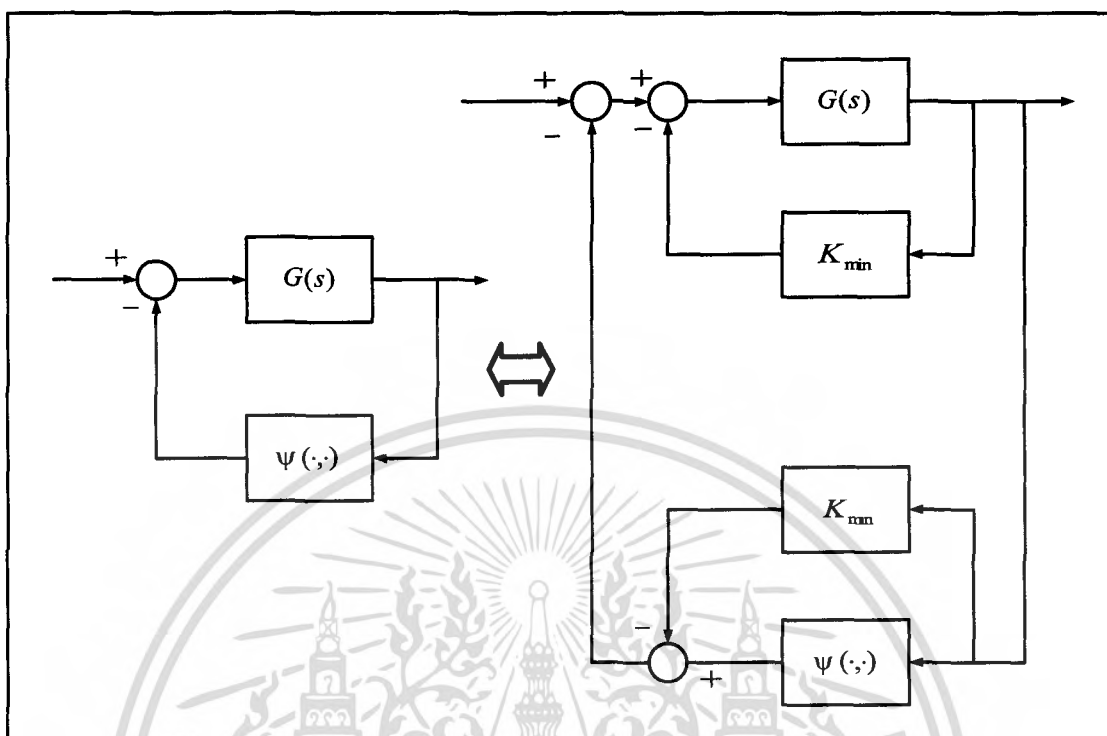


Figure 2.3: Loop transformation.

equivalent representation of the system where a constant-gain negative feedback $K_{min}y$ is applied around the linear component of the system. The effect of this feedback is offset by subtracting $K_{min}y$ from the output of the nonlinearity. This process defines a new linear system and a new nonlinearity. The new linear system is represented by the transfer function

$$G_T(s) = G(s)[I + K_{min}G(s)]^{-1}$$

or equivalently by the state-space model

$$\dot{x} = (A - BK_{min}C)x + Bu$$

$$y = Cx$$

The new nonlinearity is given by

$$\psi_T(t, y) = \psi(t, y) - K_{min}y$$

It can be easily seen that if $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the sector condition (2.0.6), then $\psi_T(\cdot, \cdot)$

satisfies the sector condition (2.1.1) with $K^* = K_{max} - K_{min}$. Therefore if $(A - BK_{min}C)$ is Hurwitz, the system is absolutely stable. ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

is a Hurwitz matrix, we can apply Lemma 2.1.1 to conclude that the system will be absolutely stable if $Z_T(s) = I + KG_T(s)$ is strictly positive real. Noting that

$$\begin{aligned} Z_T(s) &= I + (K_{max} - K_{min})G(s)[I + K_{min}G(s)]^{-1} \\ &= [I + K_{max}G(s)][I + K_{min}G(s)]^{-1} \end{aligned}$$

we arrive at the following theorem, which includes Lemma 2.1.1 as a special case.

Theorem 2.1.2 Consider the system (2.0.1)-(2.0.3), where (A, B) is controllable, (A, C) is observable, and $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the sector condition (2.0.6) globally. Then, the system is absolutely stable if

$$G_T(s) = G(s)[I + K_{min}G(s)]^{-1}$$

is Hurwitz and

$$Z_T(s) = [I + K_{max}G(s)][K_{min}G(s)]^{-1}$$

is strictly positive real. If (2.0.6) is satisfied only on a set $\Gamma \subset R^p$, then the conditions given on $G_T(s)$ and $Z_T(s)$ ensure that the system is absolutely stable with a finite domain.

We shall refer to this theorem as the *multivariable circle criterion*, although the reason for using this name will not be clear until we specialize to the scalar case $p = 1$. Theorem 2.1.2 reduces to Lemma 2.1.1 when $K_{min} = 0$ and $G(s)$ is Hurwitz. Notice that Lemma 2.0.6 can be used to characterize the strict positive realness of $Z_T(s)$. In fact, since $Z_T(\infty) = I$, the lemma shows that $Z_T(s)$ is strictly positive real if and only if $Z_T(s)$ is Hurwitz and

$$Z_T(j\omega) + Z_T^T(-j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in R$$

In the scalar case $p = 1$, the conditions of Theorem 2.1.2 can be verified graphically by ex-

amining the Nyquist plot of $G(j\omega)$. The sector condition for a single-input-single-output
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

nonlinearity takes the form $\alpha y^2 \leq y\psi(t, y) \leq \beta y^2, \forall t \geq 0, \forall y \in [a, b]$. The conditions of Theorem 2.1.2 are

- (1) $G_T(s) = \frac{G(s)}{1 + \alpha G(s)}$ is Hurwitz
- (2) $Z_T(s) = \left[\frac{1 + \beta G(s)}{1 + \alpha G(s)} \right]$ is strictly positive real

where all transfer function are scalar. To verify that $Z_T(s)$ is strictly positive real, we can use Lemma 2.0.6 which state that $Z_T(s)$ is strictly positive real if and only if $Z_T(s)$ is Hurwitz and

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1 + \beta G(j\omega)}{1 + \alpha G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.1.4)$$

To relate condition (2.1.4) to the Nyquist plot of $G(j\omega)$, we have to distinguish between three different case, depending on the sign of α .

Theorem 2.1.3 Consider a scalar system of the form (2.0.1)-(2.0.3), where $\{A, B, C\}$ ia a minimal realization of $G(s)$ and $\psi(\cdot, \cdot)$ satisfies the sector condition (2.0.5) globally. Then the system is absolutely stable if one of the following conditions is satisfied, as appropriate:

- (Case I) $\beta > \alpha > 0$.

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} \right] > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (2.1.5)$$

For a point q on the Nyquist plot of $G(j\omega)$, the two complex numbers

$$\left[\frac{1}{\beta} + G(j\omega) \right] \quad \text{and} \quad \left[\frac{1}{\alpha} + G(j\omega) \right] \quad (2.1.6)$$

can be represented by the lines connecting q to $-\frac{1}{\beta} + j0$ and $-\frac{1}{\alpha} + j0$, respectively,

เอกสารนี้เป็น as shown in Figure 2.4. การใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

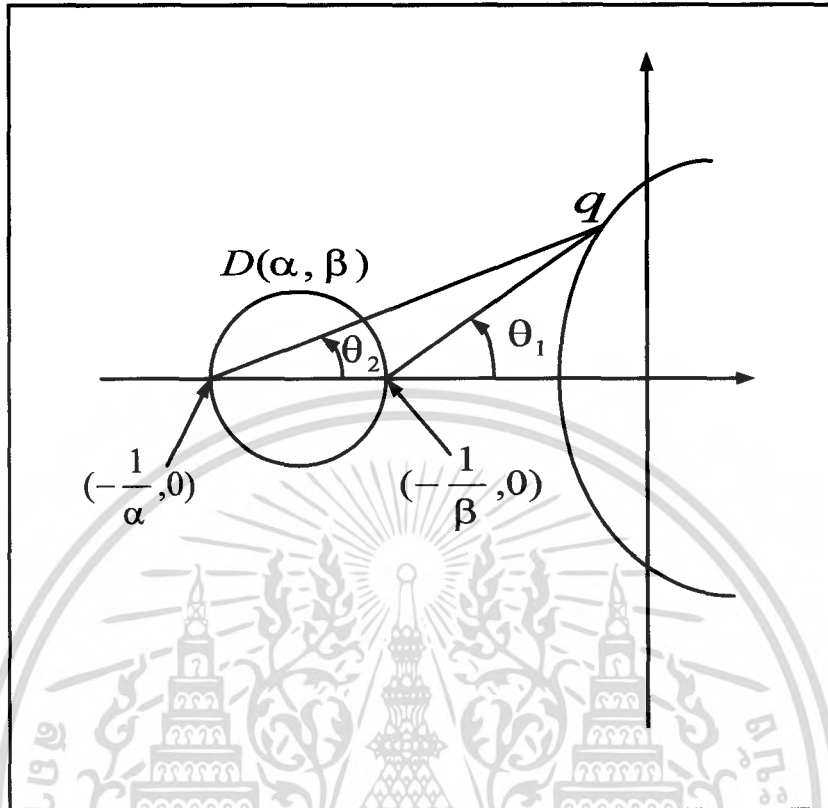


Figure 2.4: Graphical representation of the circle criterion.

The real part of the ration of two complex numbers is positive when the angle difference between them is less than $\frac{\pi}{2}$, i.e.

$$\theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

$\theta_1 - \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ when q is outside the disk $D(\alpha, \beta)$.

Since (2.1.5) is required to hold $\forall \omega \in \mathbb{R}$, all points on the Nyquist plot of $G(j\omega)$ must be strictly outside the disk $D(\alpha, \beta)$

- (Case II) $\beta > 0$ and $\alpha = 0$. For this case. The condition for Theorem 10.1 are:

(1) $G(s)$ is Hurwitz and

(2) $\text{Re}[1 + \beta G(j\omega)] > 0, \forall \omega \in \mathbb{R}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่เผยแพร่โดยสำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง. ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which is equivalent to the graphical condition that the Nyquist plot of $G(j\omega)$ lies to the right of the vertical line defined by $\operatorname{Re}[s] = -\frac{1}{\beta}$

- (Case III) $\alpha < 0 < \beta$ In this case, condition (10.17) is equivalent to

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} \right] < 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Repeating previous arguments, it can easily be seen that for (10.19) to hold, the Nyquist plot of $G(j\omega)$ must lie inside the disk $D(\alpha, \beta)$.

Consequently, the Nyquist plot cannot encircle that point $-\frac{1}{\alpha} + j0$.

Therefore, from the Nyquist criterion we see that $G(s)$ must be Hurwitz ($m = p = 0$) for $G_T(s)$ to be so.

If the sector condition (2.0.5) is satisfied only on an interval $[a, b]$, then the foregoing conditions ensure that the system is absolutely stable with a finite domain.

The circle criterion allows us to investigate absolute stability using only the Nyquist plot of $G(j\omega)$. This is important because the Nyquist plot can be determined directly from experimental data. Given the Nyquist plot of $G(j\omega)$, we can determine permissible sectors for which the system is absolutely stable.

Chapter 3

Linear Quadratic Control:

3.1 Deterministic formulation of the Linear Quadratic Regulator (LQR)

Given the n^{th} order stabilizable system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geq 0, x(0) = x_0 \quad (3.1.1)$$

Determine $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that the static full-state feedback control law

$$u(t) = Kx(t) \quad (3.1.2)$$

satisfies the following criteria :

- i) The closed-loop system (3.1.1),(3.1.2) is asymptotically stable
- ii) The performance functional

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3.1.3)$$

is minimized

- (A, B) stabilizable and $(A, Q^{\frac{1}{2}})$ detectable

Note that the performance function (3.1.3) indicates the desire to regulate the state trajectories $x(t)$ close to origin without excessive control effort.

- $x^T(t)Qx(t)$ term penalizes the deviation of state at instant t from origin.
- The $n \times n$ matrix Q determines the relative weight placed on each component of state.
- The $u^T(t)Ru(t)$ term penalizes the control expenditure. Here we assume $R > 0$.

Note that using (3.1.1) and (3.1.2) the closed-loop dynamics can be written as

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) \quad (3.1.4)$$

where $\tilde{A} \triangleq A + BK$. Using the standard solution for state equation is follows that

$$x(t) = e^{\tilde{A}t}x(0) \quad (3.1.5)$$

Thus the performance index (3.1.3) becomes

$$\begin{aligned} J(K) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T(t) [Q + K^T RK] x(t)dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T(0)e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A}t} x(0)dt \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[x^T(0) \left(\int_0^{\infty} e^{\tilde{A}^T t} + \tilde{R} e^{\tilde{A}t} dt \right) x(0) \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[\int_0^{\infty} e^{\tilde{A}t} \tilde{R} e^{\tilde{A}t} dt \{x(0)x^T(0)\} \right] \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Where $\tilde{R} \triangleq Q + K^T RK$.

It is clear from (3.1.6) that the performance index is dependent on the initial state of the system. In order to eliminate the dependence of the performance index on the initial state

of system we average the performance obtained over a linearly independent set of initial

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

states. Hence assume $x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ are r linearly independent initial conditions for the system (3.1.1). Taking the average performance over $x_0^{(i)}, i = 1, \dots, r$ yields

$$J_{avg}(K) = \text{tr} \left[\int_0^\infty e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A} t} dt \sum_{i=1}^r \frac{x_0^{(i)} x_0^{(i)T}}{r} \right] \quad (3.1.7)$$

$$V = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_0^{(i)} x_0^{(i)T}$$

$$J_{avg}(K) = \text{tr} \left[\int_0^\infty e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A} t} dt V \right] \quad (3.1.8)$$

Note that we could equivalently assume that the initial state $x(0)$ is a random variable with 0 mean and intensity V , i.e.:

$$\mathbb{E}[x(0)] = 0$$

$$\mathbb{E}[x(0)x^T(0)] = V$$

Then let

$$\begin{aligned} J(K) &= \mathbb{E} \text{tr} \left[\int_0^\infty e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A} t} dt [x(0)x^T(0)] \right] \\ &= \text{tr} \left[\int_0^\infty e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A} t} dt V \right] \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

Next, in order to satisfy the design specification i) we restrict K to a set of stabilizing control laws. So define

$$S \triangleq \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : \tilde{A} = A + BK \text{ is asymptotically stable}\}$$

Next, note that existence of a $K \in S$ implies existence of an $n \times n$ nonnegative-definite controllability Gramian M such that

$$0 = \tilde{A}M + M\tilde{A}^T + V \quad (3.1.10)$$

In order to obtain closed-form gain expression for K we further restrict K to the open set

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้: $S^+ \triangleq \{K \in S : M \text{ is positive definite}\}$ ให้นำไปใช้ประโยชน์(3.1.11) ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Notation: $\Sigma \triangleq BR^{-1}B^T$.

Theorem 3.1.1 : Suppose $K \in S^+$ solves the LQR problem. Then \exists an $n \times n$ nonnegative definite matrix $P \in K$ is given by

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (3.1.12)$$

and such that P satisfies

$$0 = A^T P + PAPQ - P\Sigma P \quad (3.1.13)$$

Furthermore, the minimal cost is given by

$$J_{avg}(K) = \text{tr} PV \quad (3.1.14)$$

Proof : It follows (3.1.9) from that

$$J_{avg}(K) = \text{tr} M\tilde{R} \quad (3.1.15)$$

where

$$M = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{\hat{A}t} V e^{\hat{A}^T t} dt \quad (3.1.16)$$

which further implies existence of a nonnegative definite matrix M (Since $K \in S$) such that

$$0 = \hat{A}M + M\hat{A}^T + V.$$

In order to optimize (3.1.15) subject to the constraint equation (3.1.10) over the open set S^+ form the Lagrangian

$$L[K, M, P, \lambda] = \text{tr} [\lambda M\tilde{R} + (\tilde{A}M + M\tilde{A}^T + V)P] \quad (3.1.17)$$

where the Lagrange multipliers λ and P are not both zero.

Note that $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a matrix that accounts for the constraint equation (3.1.10). Next

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการ $\frac{\partial L}{\partial M} = \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + \lambda\tilde{R}$ เมื่อนำไปใช้ประโยชน์ (3.1.18) ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Setting $\frac{\partial L}{\partial M} = 0$ for each $\lambda \geq 0$ we have a unique nonnegative-definite solution for P . However setting $\lambda = 0$ results in $P = 0$ (since \tilde{A} is asymptotically stable). Hence, without loss of generality we take $\lambda = 1$

$$0 = \tilde{A}^T P + P \tilde{A} + \tilde{R} \quad (3.1.19)$$

Next.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial K} &= 2RKM + 2B^T P M = 0 \\ &\Rightarrow K = -R^{-1} B^T P \end{aligned}$$

Next. manipulate (3.1.19) to obtain (3.1.13) as follows :

$$\begin{aligned} 0 &= (A + BK)^T P + P(A + BK) + Q + K^T R K \\ 0 &= A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + K^T R K + Q \\ 0 &= A^T + PA - PBR^{-1} B^T P - PBR^{-1} B^T P + (PBR^{-1})R(R^{-1} B^T P) + Q \\ 0 &= A^T P + PA + Q - P \Sigma P \end{aligned}$$

Next. note that (3.1.19) implies

$$P = \int_0^\infty e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A} t} dt$$

Now (3.1.19) is equivalent to (3.1.14).

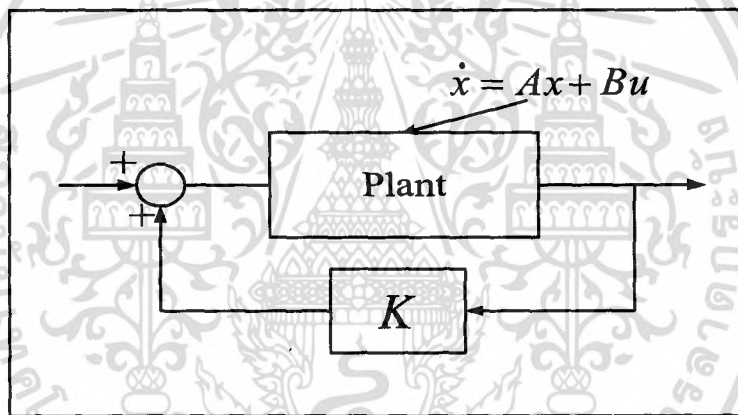


Figure 3.1: Feedback representation of LQR problem.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 4

Robustness LQR

4.1 Robustness Properties of Linear Quadratic Regulator :

We developed the LQR design framework which provides an optimal feedback control law when the full state of plant is available for feedback. Also, recall that the LQR design framework minimize a quadratic cost functional from the external Gaussian disturbance to the specified performance variables in H_2 sense. In the following discussion we examine the frequency domain properties of the LQR controllers and connect these to the classical notions of robustness (e.g., gain and phase margins). In fact we will demonstrate that the LQR controllers provide some very desirable robust stability margins. Before proceeding, recall that in the classical relative stability analysis problems the following feedback interconnection is considered:

Also, it is obvious that the LQR problem can be depicted as a feedback interconnection given by:

Note that the closed-loop system formed by the plant and LQ regulator involves the en-
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

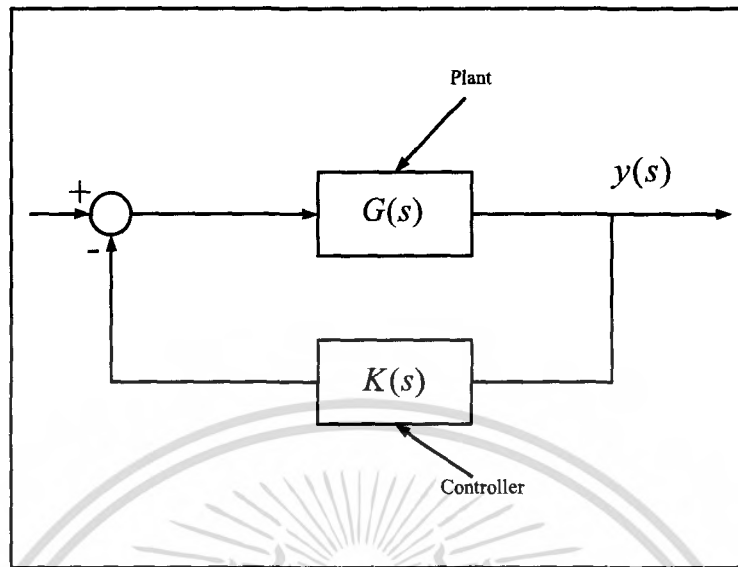


Figure 4.1: Feedback interconnection.

tire state of the plant rather than just the plant outputs. The feedback interconnection of Figure 4.2 can be reinterpreted as the following block diagram interconnection:

Now, note that the feedback interconnection of Fig.4.3 can be transformed to the classical feedback control system with unity negative feedback as shown below:

So, Figure 4.4 can be interpreted as the fact that LQR problem involves a negative feedback loop wrapped around a SISO system with transfer function $-K(sI - A)^{-1}B$. Now if we wishes to study the relative stability margin properties of the LQR then these issues can be addressed by addressing $G(s) = -K(sI - A)^{-1}B$ in the usual manner.

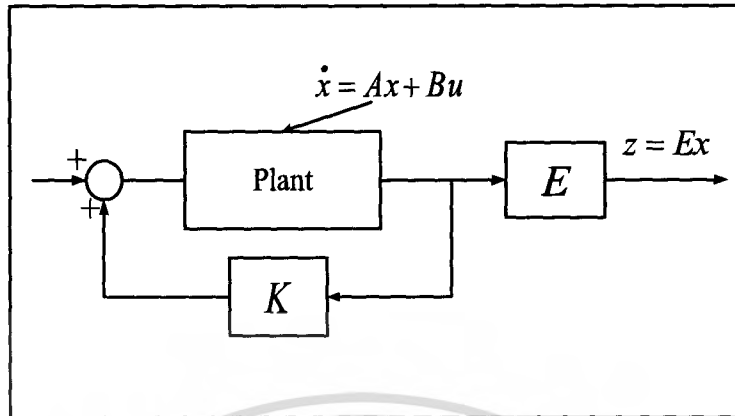


Figure 4.2: Feedback interconnection.

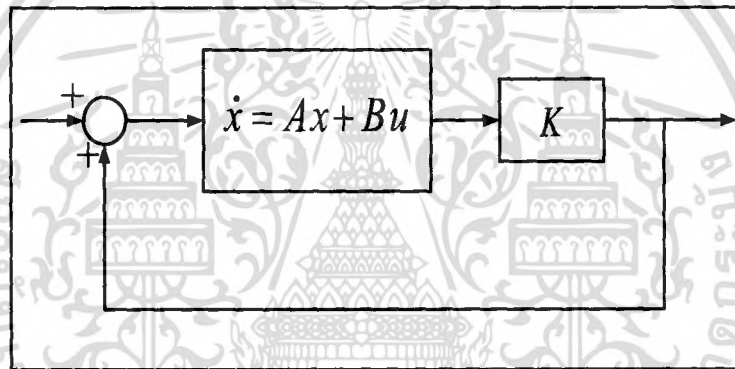


Figure 4.3: Feedback interconnection.

4.2 Return Difference Equality:

Theorem 4.2.1 Consider the n^{th} -order dynamic system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$u(t) = Kx(t)$$

such that the quadratic performance measure

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Ru(s)]ds$$

is minimized. Assume that (A, B) is stabilizable and (A, E_1) is detectable where $Q =$

$E_1^T E_1$. Furthermore, let $R > 0$. Then if K is the optimal control gain then the following

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

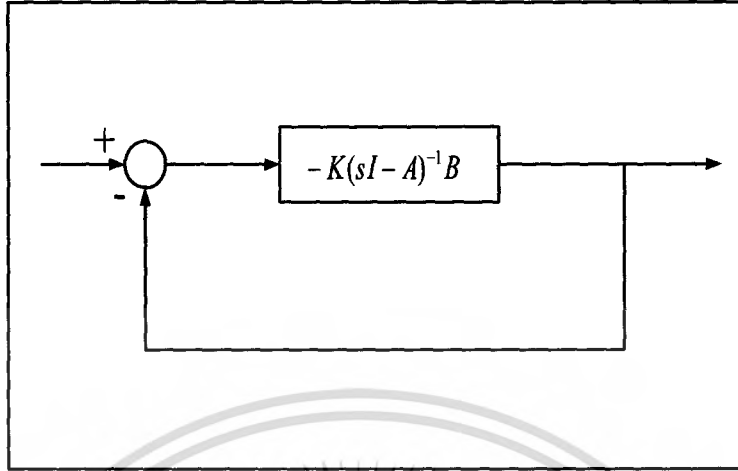


Figure 4.4: Feedback interconnection.

identity holds:

$$B^T[-j\omega I - A]^{-T}Q[j\omega I - A]^{-1}B + R = [I - K(-j\omega I - A)^{-1}B]^T R [I - K(j\omega I - A)^{-1}B] \quad (4.2.1)$$

and as a consequence:

$$[I - K(-j\omega I - A)^{-1}B]^T R [I - K(j\omega I - A)^{-1}B] \geq R \quad (4.2.2)$$

Proof In order to Show (4.2.1), recall that the optimal full-state feedback control gain K under the stated assumptions is given by

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (4.2.3)$$

where P satisfies the algebraic regulator Riccati Equation:

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

or, equivalently

$$0 = A^T P + PA + Q - K^T R K \quad (4.2.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Now, adding and subtracting $j\omega P$ to and from (4.2.4) and rearranging terms, we obtain:

$$Q = (-j\omega I - A)^T P + P(j\omega I - A) + K^T R K \quad (4.2.5)$$

Next, forming

$$B^T(-j\omega I - A)^{-T} (4.2.5) (j\omega I - A)^{-1} B$$

yields:

$$\begin{aligned} B^T[-j\omega I - A]^{-T} Q [j\omega I - A]^{-1} B &= B^T P [j\omega I - A]^{-1} B + B^T [-j\omega I - A]^{-T} P B \\ &\quad + B^T (-j\omega I - A)^{-T} K^T R K (j\omega I - A)^{-1} B \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Next, Since $K = -R^{-1} B^T P \Rightarrow -RK = B^T P$ so (4.2.6) yields:

$$\begin{aligned} B^T[-j\omega I - A]^{-T} Q [j\omega I - A]^{-1} B &= -RK(j\omega I - A)^{-1} B - B^T(-j\omega I - A)^{-T} K^T R \\ &\quad + B^T(-j\omega I - A)^{-T} K^T R K (j\omega I - A)^{-1} B \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Finally, adding R on both sides of (4.2.7) and completing the square and the R-H-S of (4.2.7), (4.2.1) is immediate. Finally, (4.2.2) follows from (4.2.1) trivially.

Note that in the single input case, $K(j\omega I - A)^{-1} B$ is a scalar transfer function. In this case, equation (4.2.1) (known as the return difference equality) becomes:

$$R + B^T(-j\omega I - A)^{-T} Q (j\omega I - A)^{-1} B = Q |1 - K(j\omega I - A)^{-1} B|^2 \quad (4.2.8)$$

and with $Q = E_1^T E_1$ (4.2.8) becomes:

$$R + |E_1(j\omega I - A)^{-1} B|^2 = R |1 - K(j\omega I - A)^{-1} B|^2 \quad (4.2.9)$$

Hence, in the single input case (4.2.9) yields a specialization of (4.2.2) given by:

$$|1 - K(j\omega I - A)^{-1} B|^2 \geq 1 \quad (4.2.10)$$

i.e, for all ω the return difference is bounded by 1. For the multiinput case if $R = I_m$, then (4.2.2) yields:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ $\sigma_i [I + K(j\omega I - A)^{-1} B] \geq 1$ อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ (4.2.11) ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Note that by substituting $-K(j\omega I - A)^{-1}B = x(\omega) + jy(\omega)$ in (4.2.10) we obtain

$$|1 + x(\omega) + jy(\omega)|^2 \geq 1$$

$$[1 + x(\omega)]^2 + [y(\omega)]^2 \geq 1 \quad (4.2.12)$$

It is now clear from equation (4.2.12) that the Nyquist plot of the loop transfer function $-K(j\omega I - A)^{-1}B$ remains outside the unit disk centered at $-1 + j0$ point. This fact can be utilized to obtain relative stability margins of LQ regulator. However, before proceeding, we review the notion of gain and phase margins.

Consider the negative feedback interconnection

Suppose that the unity negative feedback interconnection shown in Fig 4.5 is stable with

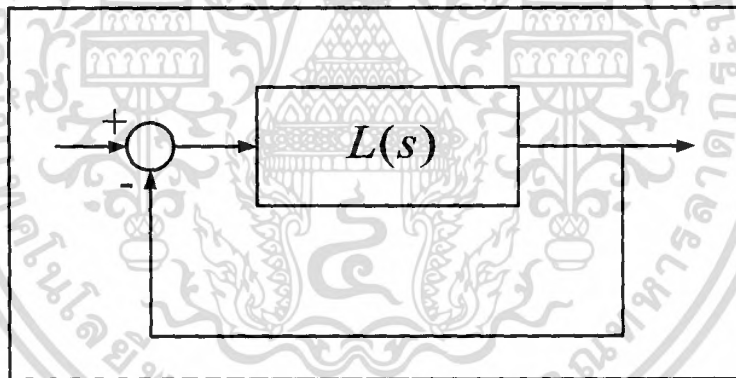


Figure 4.5: Feedback interconnection.

$L(s) = L_0(s)$. Then the system is said to possess:

Gain Margin: k_{min} and k_{max} if the close-loop system is stable for all $L(s) = kL_0(s)$ where $k_{min} < k < k_{max}$ but unstable for $L(s) = k_{max}L_0(s)$ and $L(s) = k_{min}L_0(s)$ and where $0 \leq k_{min} \leq 1$ and $k_{max} \geq 1$.

Phase Margin: ϕ_m if the close-loop system is stable for all $L(s) = e^{-j\phi}L_0(s)$ with $0 \leq \phi \leq \phi_m$ and unstable for $\phi = \phi_m$ and $\phi = 0$.

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\phi < \phi_{max}$ but unstable for $L(s) = e^{(-j\phi_{max})} L_0(s)$

Note that these margins can be easily read off the Nyquist diagram of the loop transfer function $L_0(s)$.

Note that in the following diagram Fig 4.6 K_{max} and K_{min} indicate how much the loop gain can be increased and decreased, respectively, without causing close-loop instability. Similarly in Fig 4.7 ϕ_{max} indicates the limit of phase angle before instability is encountered.

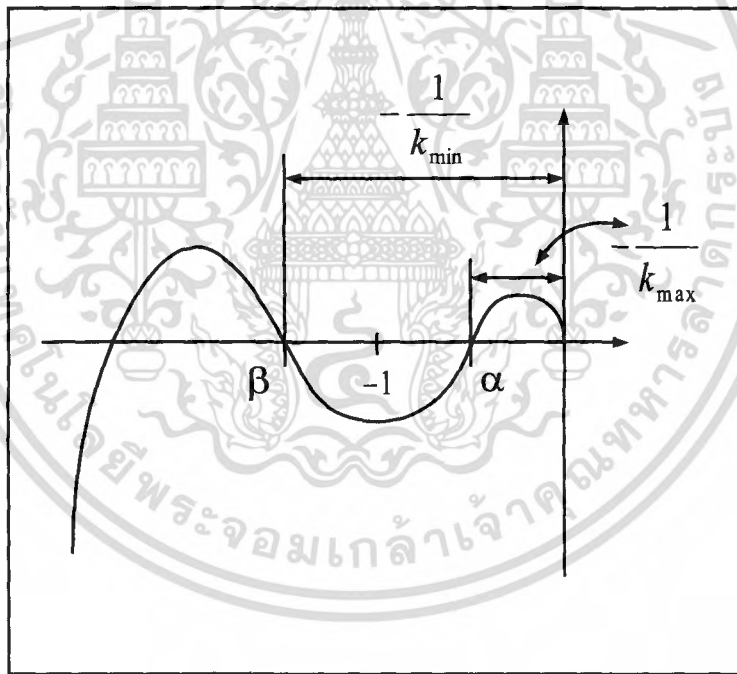


Figure 4.6: Nyquist plot.

Next, we revert our attention to equation (4.2.12) which implies that the Nyquist plot of $-K(j\omega I - A)^{-1}B$ remains outside the unit disk centered at $-1 + j0$. Hence, we obtain the forbidden disk in the Nyquist plane as shown below:

Hence, Figure 4.8 indicates that the Nyquist plot of $-K(sI - A)^{-1}B$ can lie anywhere
 เอกสารชิ้นนี้เขียนขึ้นเพื่อแจกจ่ายให้ฟรีแก่ทุกคนที่สนใจในเทคโนโลยีการควบคุมแบบอัตโนมัติ
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

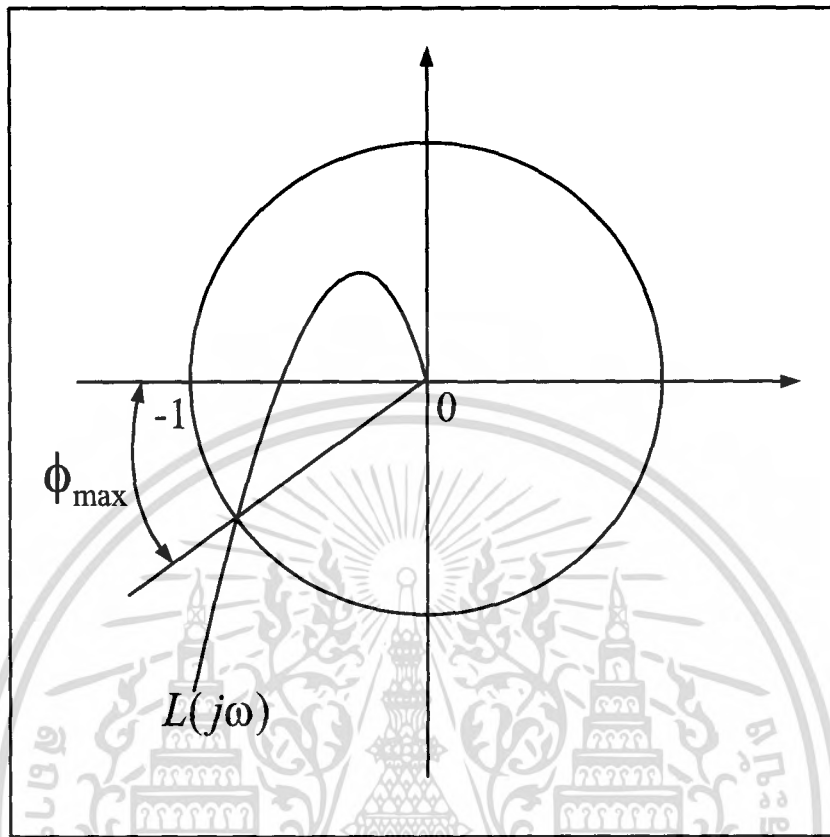


Figure 4.7: Nyquist plot.

in the Nyquist plane except in the forbidden disk. Hence, we obtain:

$$\frac{-1}{k_{min}} = -2 \Rightarrow k_{min} = \frac{1}{2} \Rightarrow 20 \log_{10}(t) = -6dB$$

$$\frac{-1}{k_{max}} = 0 \Rightarrow k_{max} = \infty \Rightarrow \infty dB$$

So, the LQR design guarantees stability of the close-loop system for a gain reduction of upto $6dB$ and an arbitrarily large gain increase. Similarly, in order to obtain the phase margin of LQR regulator note that $\angle AOC$ represents the maximum allowable phase change. Since $AO = OC = AC = 1$, it follows that $\phi_{max} = 60^\circ$.

Hence, we have shown that the LQR control design possesses at least $6dB$ gain reduction margin, ∞dB gain increase margin and 60° of phase margin.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

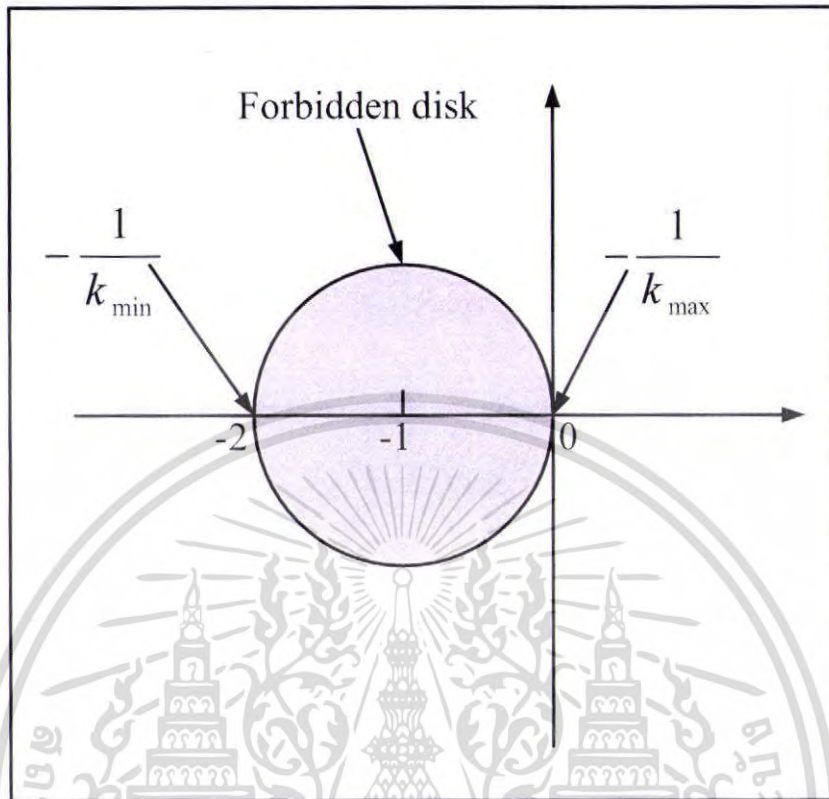


Figure 4.8: Forbidden disk.

Next, we present an algebraic technique to obtain the guaranteed gain and phase margins of the LQR design. Recall that the optimal regulator gain is given by $K = -R^{-1}B^T P$ where P is characterized via.

$$0 = A^T P + PA + Q - P \Sigma P$$

where $\Sigma = BR^{-1}B^T$. Next, adding and subtracting $2\sigma K^T B^T P$ to and from above and noting that $K^T B^T P$ is symmetric ($K^T B^T P = -PBR^{-1}B^T P = PBK$), we obtain

$$0 = (A + \sigma BK)^T P + P(A + \sigma BK) + Q + (2\sigma - 1)P \Sigma P. \tag{4.2.13}$$

Next, it follows that if (A, B) is stabilizable then $(A + \sigma BK, b)$ is also stabilizable for $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$: (This is shown below.)

$$(A, B) \text{ Stabilizable} \Rightarrow (A + \sigma BK, B) \text{ stabilizable for } \sigma > \frac{1}{2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

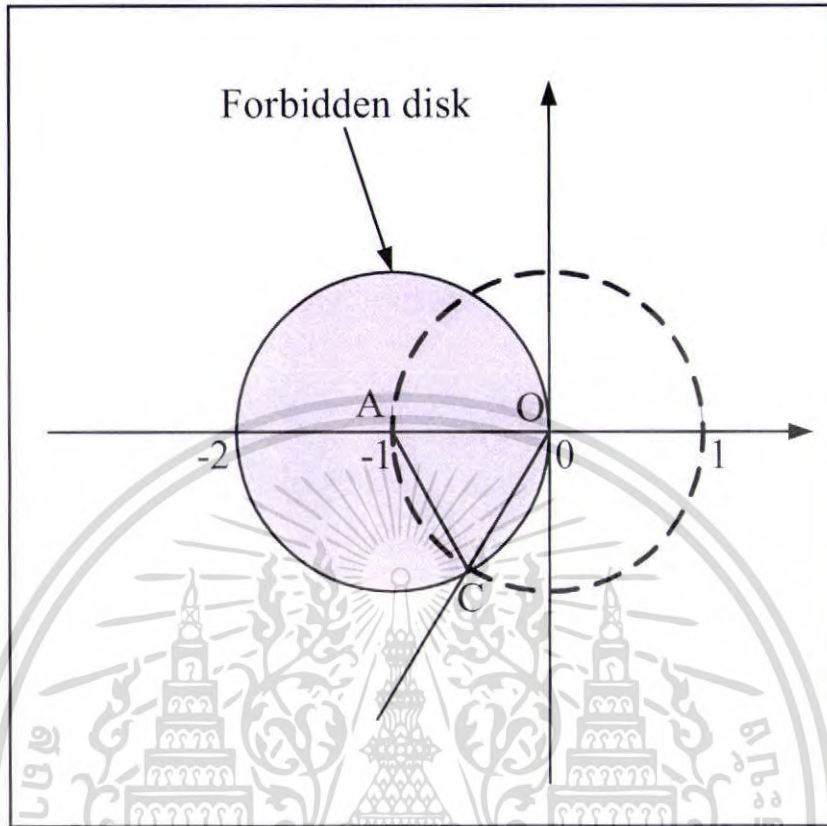


Figure 4.9: Forbidden disk.

since there exists $P \geq 0$ satisfying (4.2.13) for $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$, it follows that $A + \sigma BK$ is asymptotically stable for $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$.

Note that $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$ clearly implies that the LQR design possesses ∞dB upward gain margin and $6dB$ downward gain margin. Next, we show that the phase margin of an LQR design is at least 60° . Note that for $A + \sigma BK$ to be A.S. it is required that

$$2\sigma - 1 \geq 0$$

$$2\sigma \geq 1.$$

Now, let 2σ be the sum of a complex number $\sigma + jy$ and its complex conjugate $\sigma - jy$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Then

$$\begin{aligned}
 (\sigma + jy) + (\sigma - jy) &\geq 1 \\
 e^{j\theta} + e^{-j\theta} &\geq 1 \\
 \cos \theta + j \sin \theta + \cos \theta - j \sin \theta &\geq 1 \\
 2 \cos \theta &\geq 1 \\
 \cos \theta &\geq \frac{1}{2} \\
 \theta &\leq 60^\circ
 \end{aligned}$$

4.3 Robustness of LQR with sector Bounded Non-linearities:

In the just concluded discussion we established that the LQR design possesses nice robustness properties in the presence of gain and phase variations at the plant input. In the following discussion we generalize this result to demonstrate that the LQR design in fact provides robustness in the face of arbitrary sector bounded nonlinearities.

Hence, consider the control design problem for linear system with input nonlinearity

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\phi(u(t)) \quad (4.3.1)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (4.3.2)$$

where $\phi(\cdot)$ denotes a vector of component de coupled nonlinearities $\phi(u) = [\phi_1(u_1) \dots \phi_m(u_m(t))]^T$ such that

$$\frac{1}{2} + \varepsilon_1 \leq \frac{\phi_i(u_i)}{u_i} \leq \varepsilon_2^{-1} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (4.3.3)$$

and where ε_1 and ε_2 are small positive scalars. Note that the feedback control design problem of (4.3.1), (4.3.2) can be depicted in a schematic form as:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ใดเห็นนำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

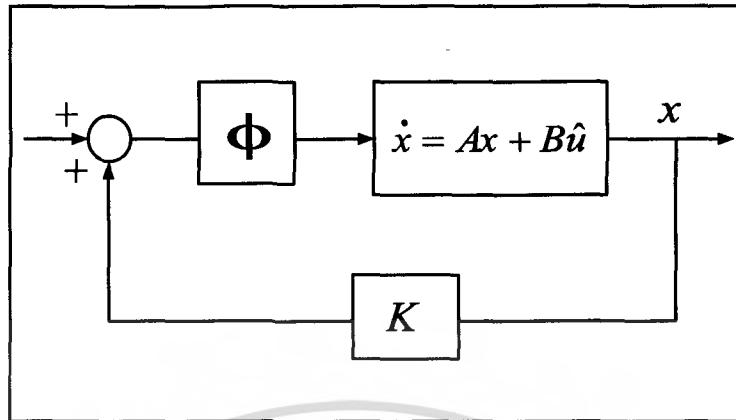


Figure 4.10: Feedback control design problem.

Note that the feedback representation of Fig. 4.10 is equivalent to :

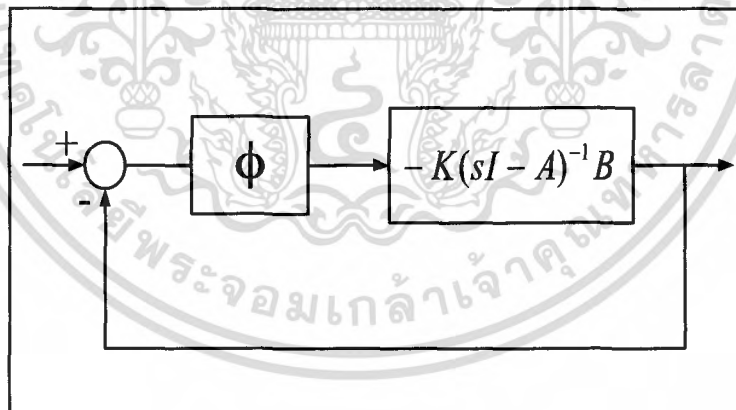


Figure 4.11: Feedback representation of Fig. 4.10

Note that the nonlinearities in (4.3.3) can be shown to be sector-bounded. Furthermore, it follows that the each element of $\phi(u)$ is memoryless and is confined within a sector that is supposed to lie 1st and 3rd quadrant as shown in the figure 4.12.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

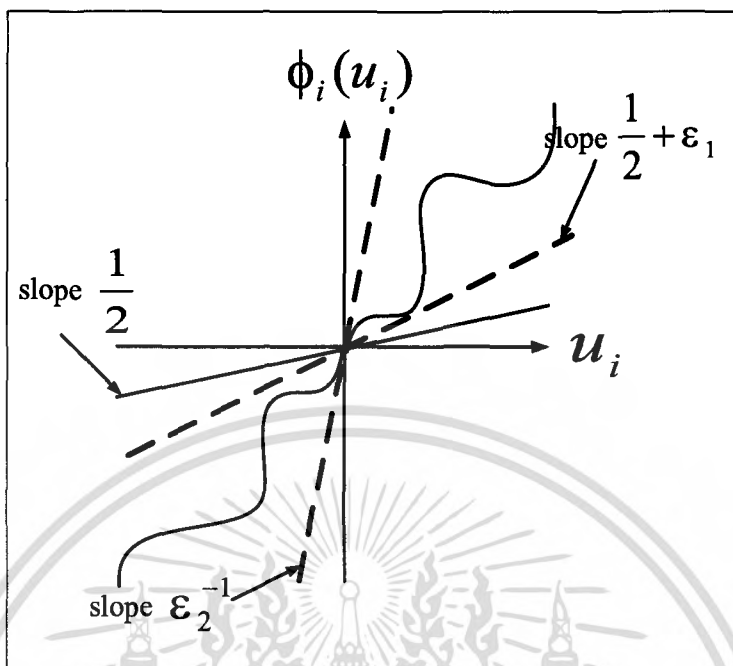


Figure 4.12: Robustness of LQR with sector Bounded Nonlinearities

Theorem 4.3.1 *Given the optimal LQ regulator gain $K = -R^{-1}B^T P$ where P is the solution of algebraic regulator Riccati equation, the optimal close-loop system is A.S. for all arbitrary nonlinearities satisfying (4.3.3) when such nonlinearities are inserted at the plant input.*

Proof : Recall, P satisfies:

$$0 = A^T P + PA + Q - P \Sigma P \tag{4.3.4}$$

where $\Sigma \triangleq BR^{-1}B^T$. Next, let

$$V(x) = x^T P x \tag{4.3.5}$$

be a Lyapunov function candidate. In this discussion, we constrain the algebraic regulator Riccati equation solution P to be positive definite. Note that the Lyapunov derivative of (4.3.5) along system trajectories is given by

$$\dot{V} = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t)$$

$$= x^T(t) [A^T P + PA] x(t) + \phi^T(u) B^T P x(t) + x^T(t) P B \phi(u) \tag{4.3.6}$$

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Next, using (4.3.4) and $-RK = B^T P$, it follows that (4.3.6) is equivalent to

$$\begin{aligned}\dot{V} &= x^T [P\Sigma P - Q]x - \phi^T(u)RKx - x^T K^T R\phi(u) \\ &= -x^T Qx + x^T K^T RKx - \phi^T(u)RKx - x^T K^T R\phi(u).\end{aligned}\quad (4.3.7)$$

Next, with $R = \text{diag}_{i=1, \dots, m}(r_i)$ we obtain

$$\begin{aligned}2x^T K^T R\phi(u) &= \sum_{i=1}^m 2r_i(Kx)_i \phi_i(u) \\ &\geq \sum_{i=1}^m 2r_i\left(\frac{1}{2} + \varepsilon_1\right)(Kx)_i^2 \\ &= (1 + 2\varepsilon_1) \sum_{i=1}^m r_i(Kx)_i^2 \\ &= (1 + 2\varepsilon_1)x^T K^T RKx\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

Hence, using (4.3.7), (4.3.8) yields:

$$\dot{V} \leq -x^T Qx - 2\varepsilon_1 x^T K^T RKx.\quad (4.3.9)$$

Since $\dot{V}(x) \leq 0$ we have stability. In order to show A.S. note that $\dot{V}(x) = 0$ implies $x^T Qx = 0$ and $Kx = 0$.

$$x^T Qx = 0 \Rightarrow x^T E_1^T E_1 x = 0\quad (4.3.10)$$

$$\text{and } Kx = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ so } \phi(u) = 0.$$

$$\text{Now } \dot{x} = Ax + B\phi(u) = Ax\quad (4.3.11)$$

Using $\dot{x} = Ax$ and $\varepsilon_1 x = 0$ it follows that since (A, ε_1) is detectable, $\dot{V}(0) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Hence A.S. is established.

Chapter 5

Design of the state feedback by using the LQR

5.1 MATLAB implementation

The commands

```
>> K=lqr(A,B,Q,R);
```

solve the continuous-time linear quadratic regulator problem and the associated Riccati equation. This command calculates the optimal feedback gain matrix K such that the feedback control law

$$u(t) = -Kx(t)$$

minimizes the performance index

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับก...
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

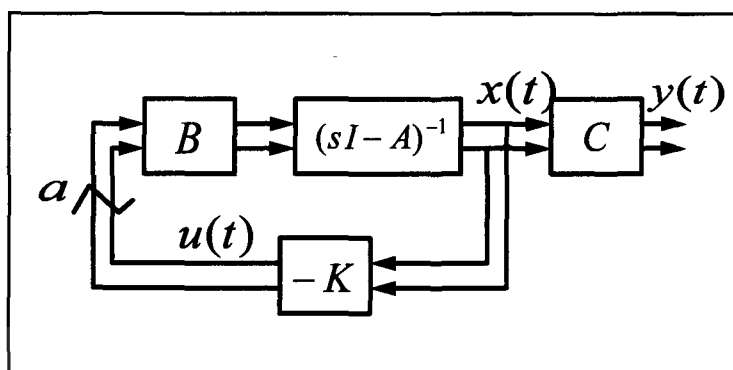


Figure 5.1: Feedback system.

subject to constraint equation

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Another command

```
>> [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R,N);
```

also returns matrix P , the unique positive-definite solution to the associated matrix Riccati equation:

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

If matrix $A - BK$ is a stable matrix, such a positive-definite solution P always exists.

The close-loop poles or eigenvalues of $A - BK$ are also obtained by this command.

It is important to note that for certain systems matrix $A - BK$ cannot be made a stable matrix, whatever K is chosen. In such a case there does not exist a positive-definite matrix P for the matrix Riccati equation. For such a case the commands

do not give the solution.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
>> K=lqr(A,B,Q,R);
>> [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R);
```

```
>> help lqr

LQR Linear-quadratic regulator design for continuous-time systems.

[K,S,E] = LQR(A,B,Q,R,N) calculates the optimal gain matrix K
such that the state-feedback law u = -Kx minimizes the cost
function

    J = Integral {x'Qx + u'Ru + 2*x'Nu} dt

subject to the state dynamics x = Ax + Bu.

The matrix N is set to zero when omitted. Also returned are the
Riccati equation solution S and the closed-loop eigenvalues E:

    -1
    SA + A'S - (SB+N)R (B'S+N') + Q = 0, E = EIG(A-B*K).
```

Figure 5.2: Help of LQR in MATLAB

5.2 Laboratory Exercises

Exercise. 1) (LQR command.) Consider the system described by

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The performance index J is given by

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

where

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานที่ปรึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Assume that the following control u is used.

$$u(t) = Kx(t)$$

Form Riccati equation

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$K = -R^{-1}B^T P$$

$$= -[1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Thus the optimal control signal is given by

$$u = Kx(t) = -x_1(t) - x_2(t)$$

MATLAB yields the solution to this problem.

```
>> %****Enter state matrix A and control matrix B****%
>> A=[0 1;0 -1];
>> B=[0; 1];
>> Q=[1 0;0 1];
>> R=[1];
>> A
```

A =

```
0 1
0 -1
```

```
>> B
```

B =

```
0
1
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
>> %Matrix K can be obtained by entering  
the following command%  
>> K=lqr(A,B,Q,R)
```

K =

```
1.0000 1.0000
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Exercise. 2) (Effects of Q and R) The state space equations and the transfer function are repeated below for convenience.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1.4 & 9.8 & -0.02 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6.3 \\ 0 \\ 9.8 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

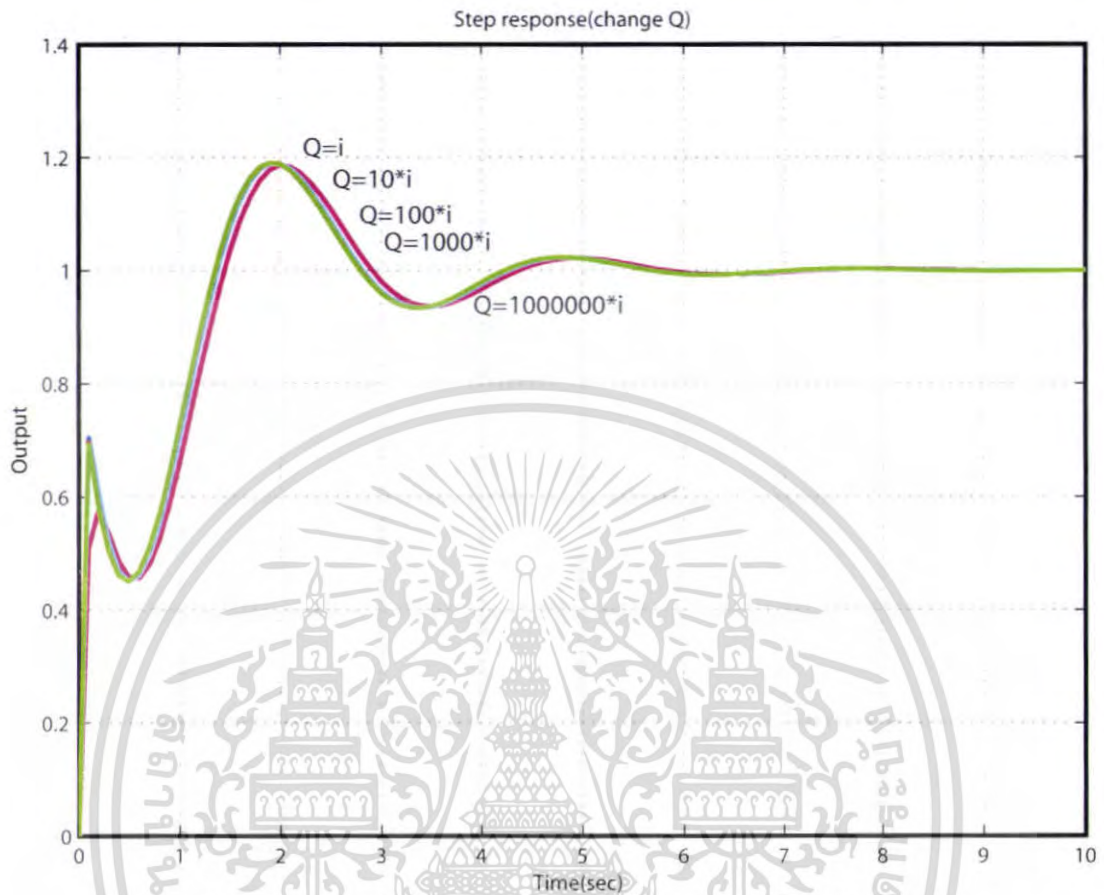
We would like to determine the effects of weighting matrices Q and R . **Case I: Change** Q by $Q = I, 10I, 100I, 1000I, 1000000I$

Use MATLAB solve this case

```

a=[-0.4 0 -0.01; 1 0 0; -1.4 9.8 -0.02];
b=[6.3; 0; 9.8];
c=[0 0 1];
d=0;
t=0:0.1:10;
bsize=size(b); noinp=bsize(2); csize=size(c); noout=csize(1);
r=1; qq=[1 10 100 1000 1000000];
for i=1:5
    q=qq(i);
    [gain,p]=lqr(a,b,q*eye(3),r);
    cgh=gain; dgh=0;
    at=a-b*gain; bt=b; ct=c; dt=0;
    out=step(at,bt,ct,dt,1,t); out=out/out(length(out));
    hold on
    figure(1)
    bode(a,b,cgh,dgh);
    title('Open loop Bode magnitude and phase(change Q)')
    hold on
    figure(2)
    bode(at,bt,ct,dt);
    title('Closed loop Bode magnitude and phase(change Q)')
    hold on
    figure(3)
    plot(t,out)
    grid
    title('Step response(change Q)')
    xlabel('Time(sec)')
    ylabel('Output')
end

```

Figure 5.3: Step response (when varying Q).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

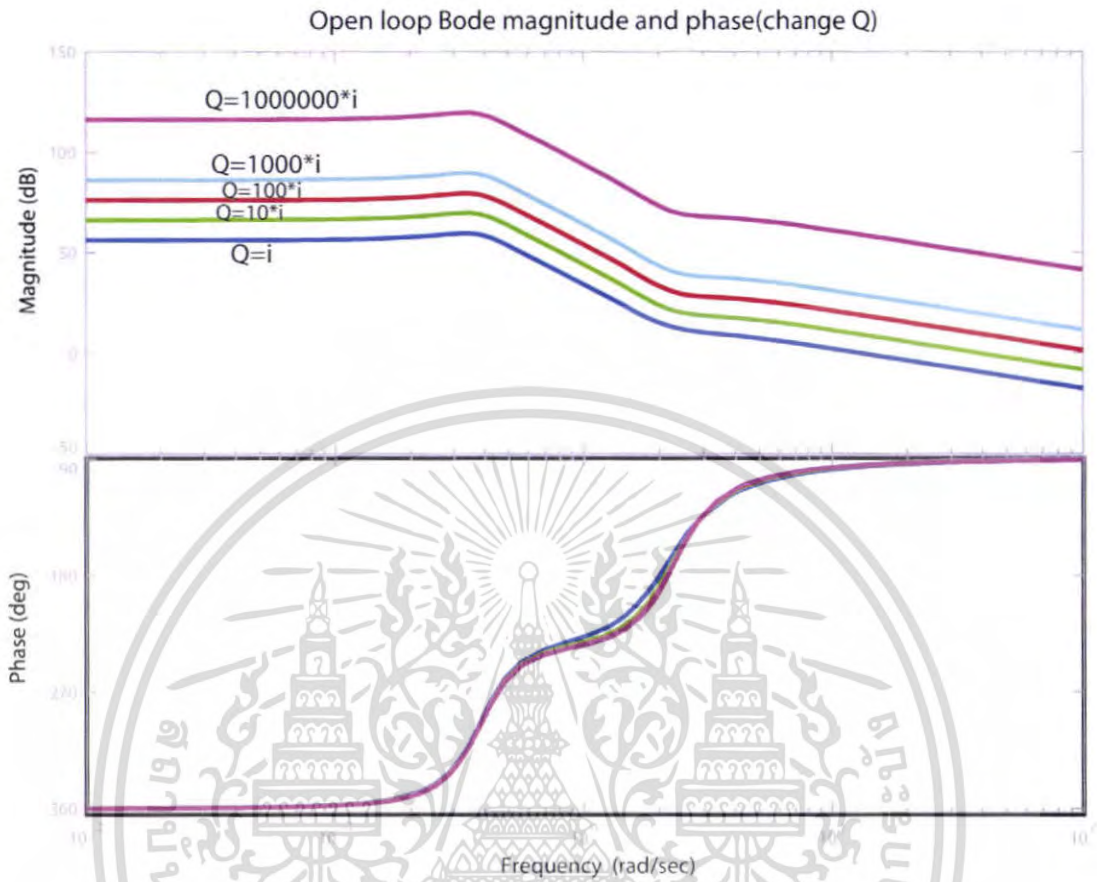


Figure 5.4: Open loop Bode magnitude and phase (when varying Q).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

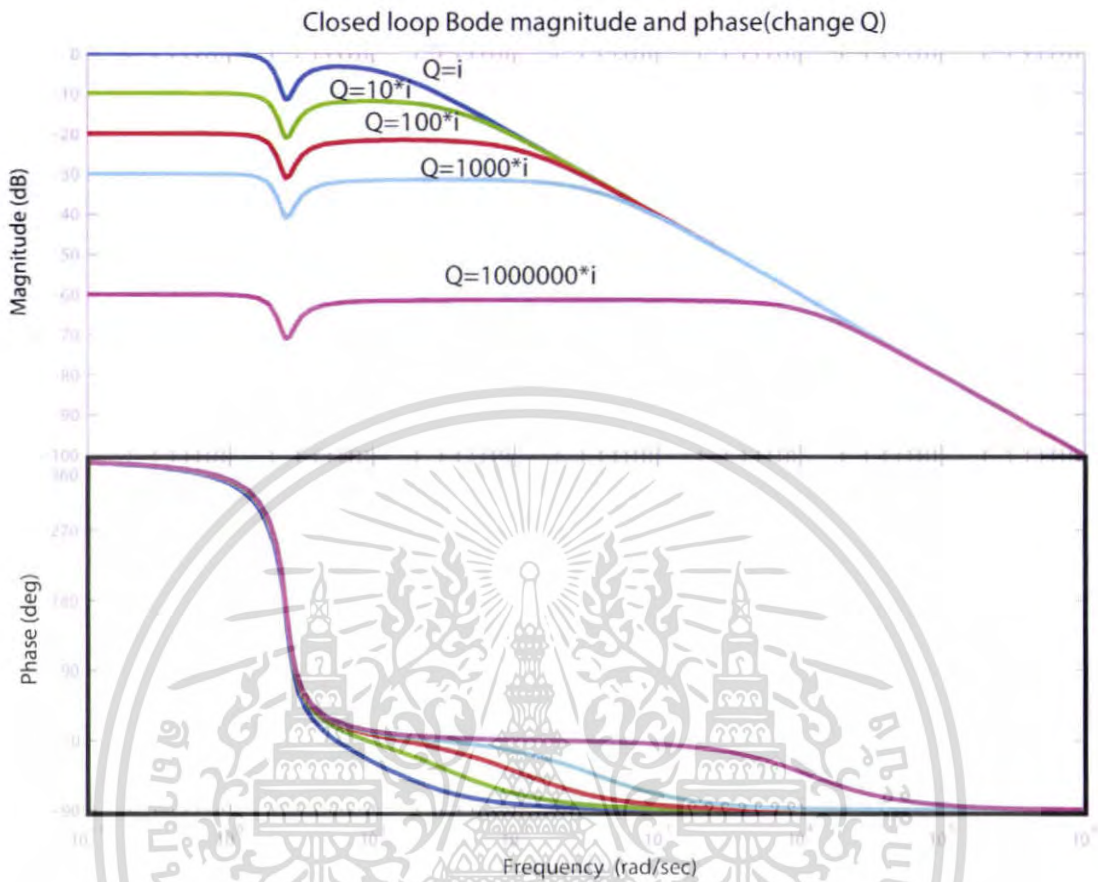


Figure 5.5: Closed loop Bode magnitude and phase (when varying Q).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

consider the case where $Q = I$,

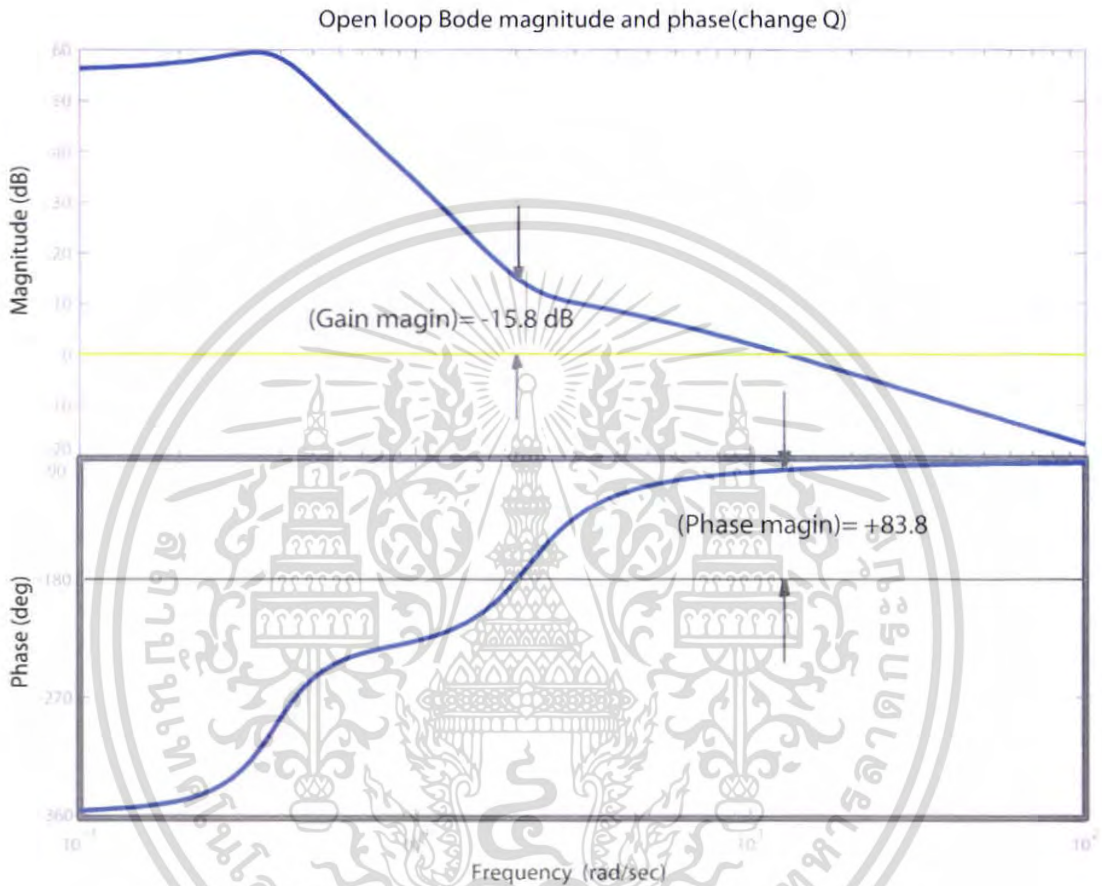


Figure 5.6: Open loop Bode magnitude and phase (when $Q = 1$).

The phase and gain margin for $K = \begin{bmatrix} 0.52 & 4.38 & 0.99 \end{bmatrix}$ are

$$\text{Gain Margin} = -15.8 \text{ dB}$$

$$\text{Phase Margin} = 83.8^\circ$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

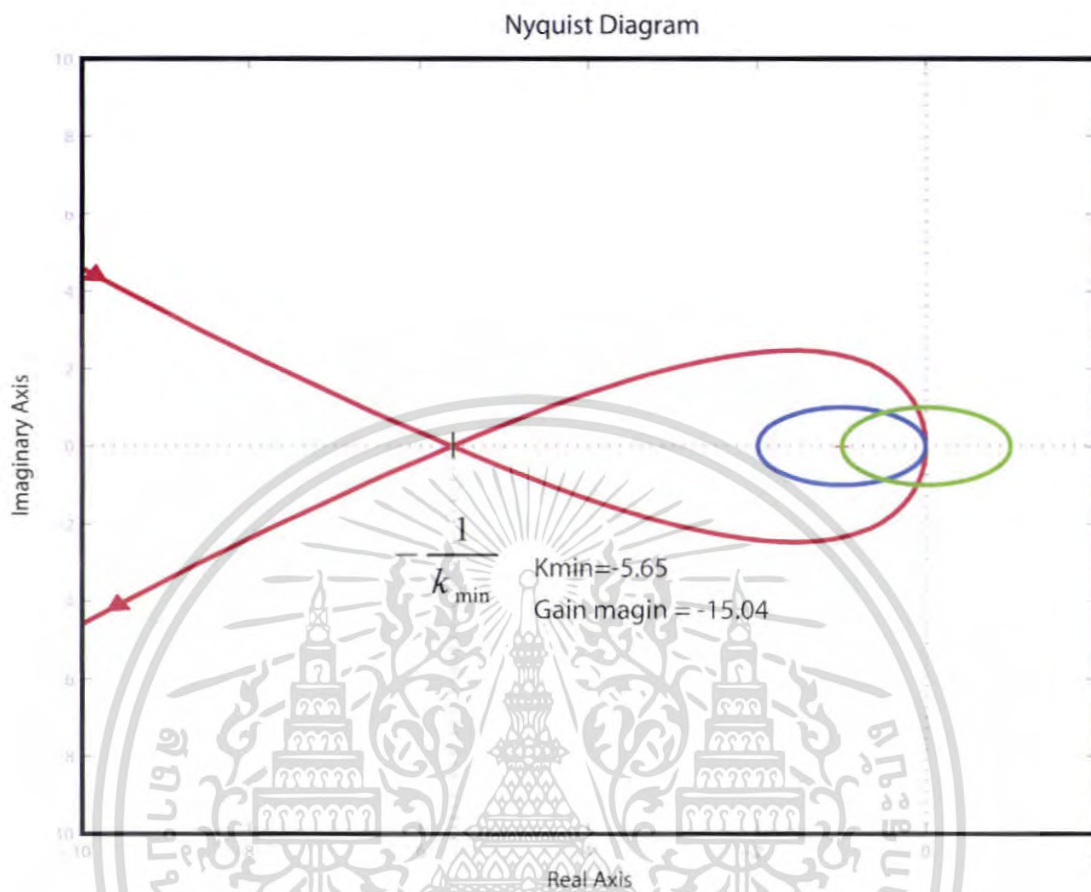


Figure 5.7: Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$).

$$Z = N + P$$

$$N = Z - P$$

where Z = number of zeros of $1 + G(s)H(s)$ in the right-half s plane

N = number of clockwise encirclements of the $-1 + j0$ point

P = number of poles of $G(s)H(s)$ in the right-half s plane

Form this nyquist and MATLAB

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$N = -2$$

$$P = 2$$

$$Z = -2 + 2$$

$$Z = 0$$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

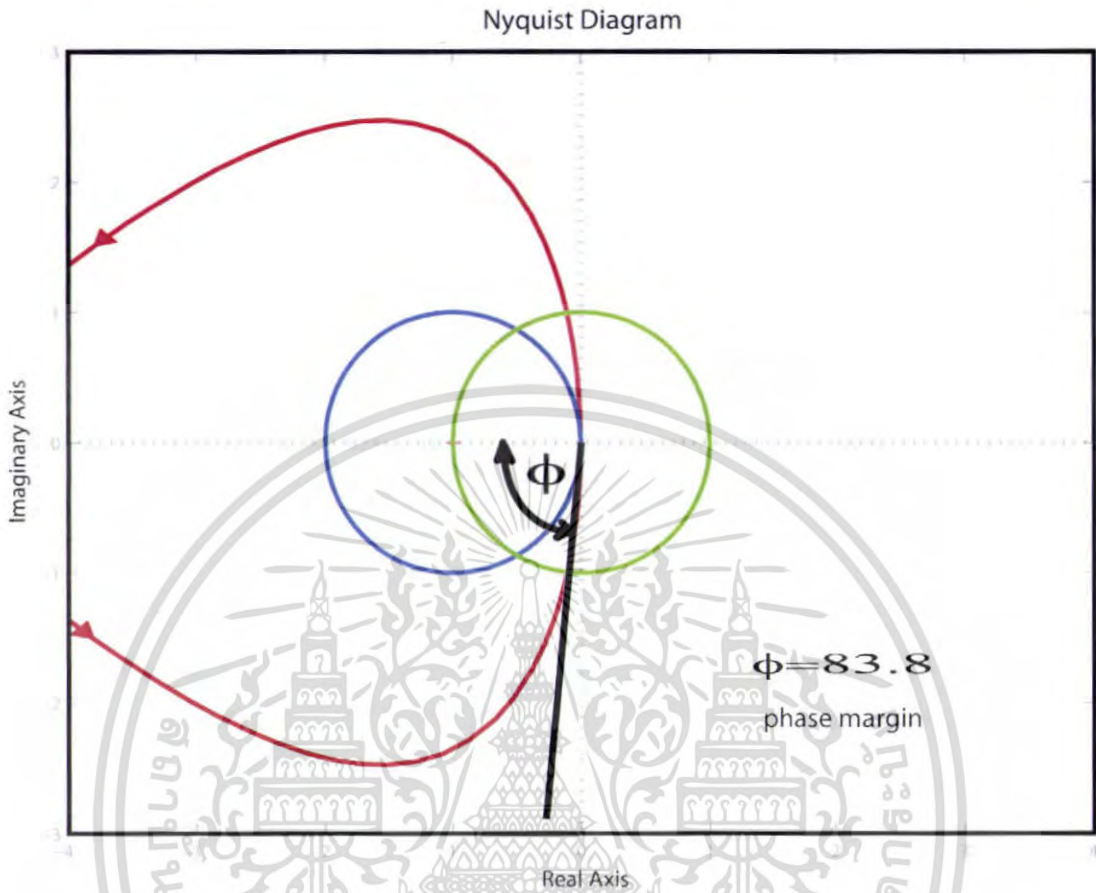


Figure 5.8: Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$).

This problem is stable for $K = \begin{bmatrix} 0.52 & 4.38 & 0.99 \end{bmatrix}$, $Q = I$ and $R = 1$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The cheap control case,

$$J(k) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

$$\frac{r}{q} \rightarrow 0.$$

$\|u\|$ tends to increase because its cost is relatively decreasing, so larger gains are used.

This may cause saturation problems in practice.

Table 1. Data for Varying Q

Q	Control gain vector			Gain margin	Phase margin	wcg	wcp
1	0.52	4.38	1	-15.8	83.8	12.7	2
10	1.12	11.89	3.15	-22.9	88.2	37.9	2.12
100	3.13	35.73	9.98	-30.8	89.4	1117.4	2.15
1000	9.53	111.15	31.57	-40.7	89.8	369.4	2.16
1,000,000	296.36	3489.2	998.39	-70.6	-	-	2.17

The phase margin is larger than 80 degrees in all cases (for $Q = 10^6$, there was no gain crossover frequency over the selected range for the Bode plot). The negative gain margin indicate by how much the gain can be reduced before instability occurs. It is at least -15 dB and increases with Q . Using the gain crossover frequency as an approximate measure of the bandwidth, we observe that as the stability margins increase, bandwidth increases.

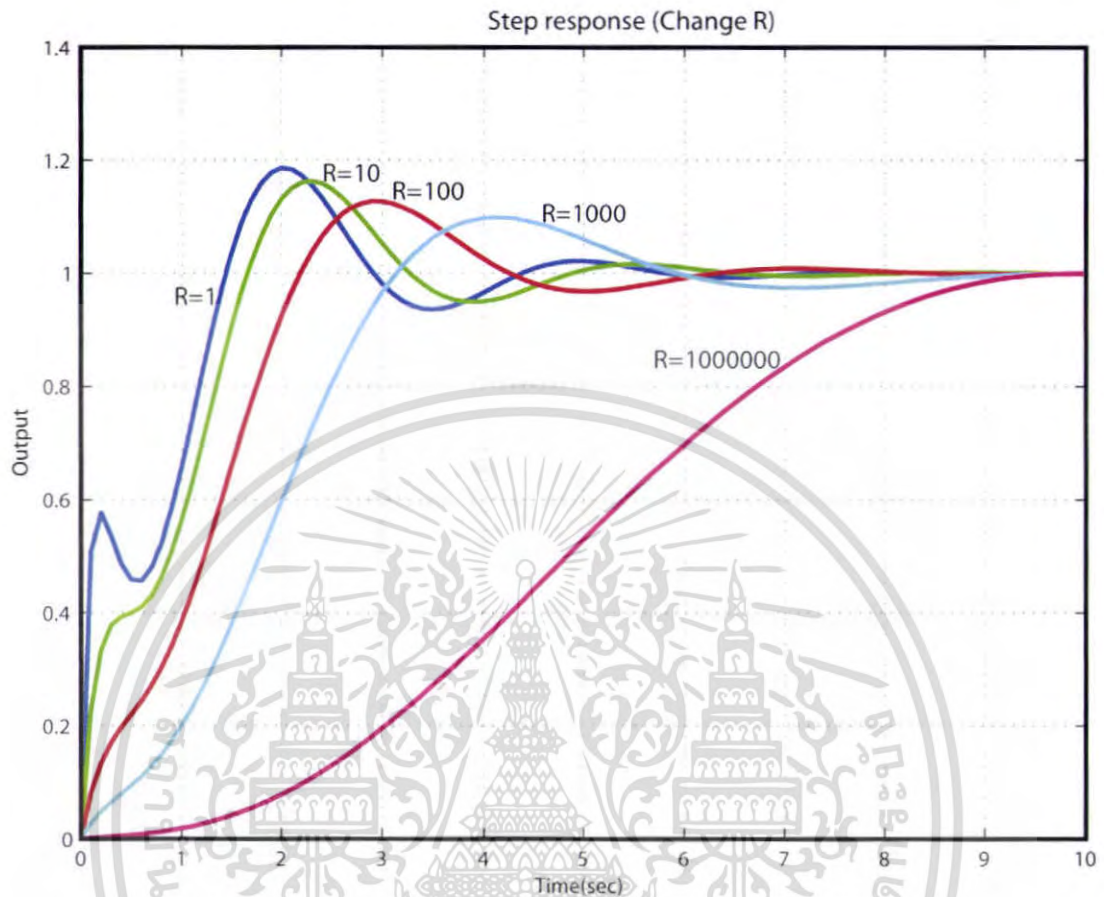
Case II: Change R by $R = 1, 10, 100, 1000, 1000000$

Use MATLAB solve this case

```

a=[-0.4 0 -0.01; 1 0 0; -1.4 9.8 -0.02];
b=[6.3; 0; 9.8];
c=[0 0 1];
d=0;
t=0:0.1:10;
bsize=size(b); noinp=bsize(2); csize=size(c); noout=csize(1);
rr=[1 10 100 1000 1000000]; q=eye(3);
for i=1:5
    r=rr(i);
    [gain,p]=lqr(a,b,q,r);
    cgh=gain; dgh=0;
    at=a-b*gain; bt=b; ct=c; dt=0;
    out=step(at,bt,ct,dt,1,t); out=out/out(length(out));
    hold on
    figure(1)
    bode(a,b,cgh,dgh);
    title('Open loop Bode magnitude and phase(change R)')
    hold on
    figure(2)
    bode(at,bt,ct,dt);
    title('Closed loop Bode magnitude and phase(change R)')
    hold on
    figure(3)
    plot(t,out)
    grid
    title('Step response')
    xlabel('Time(sec)')
    ylabel('Output')
end

```

Figure 5.9: Step response (when varying R).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

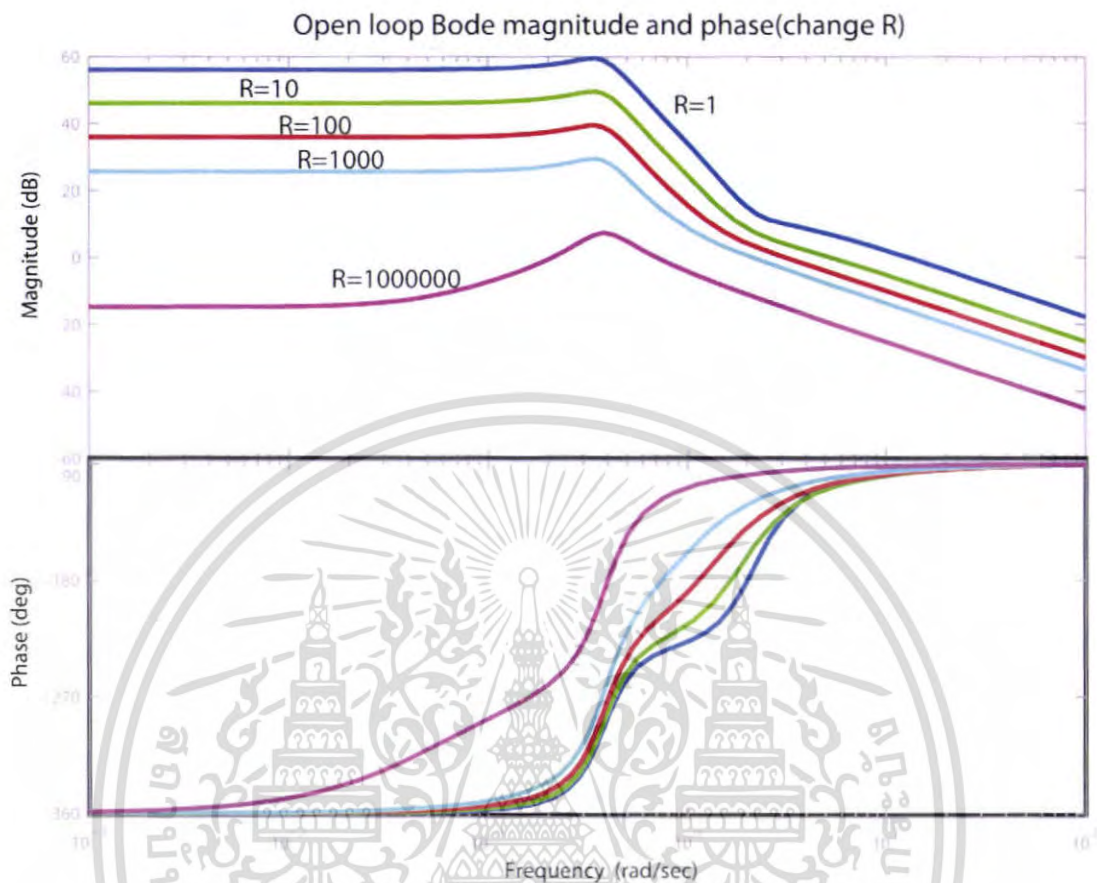


Figure 5.10: Open Loop Bode magnitude and phase (when varying R).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

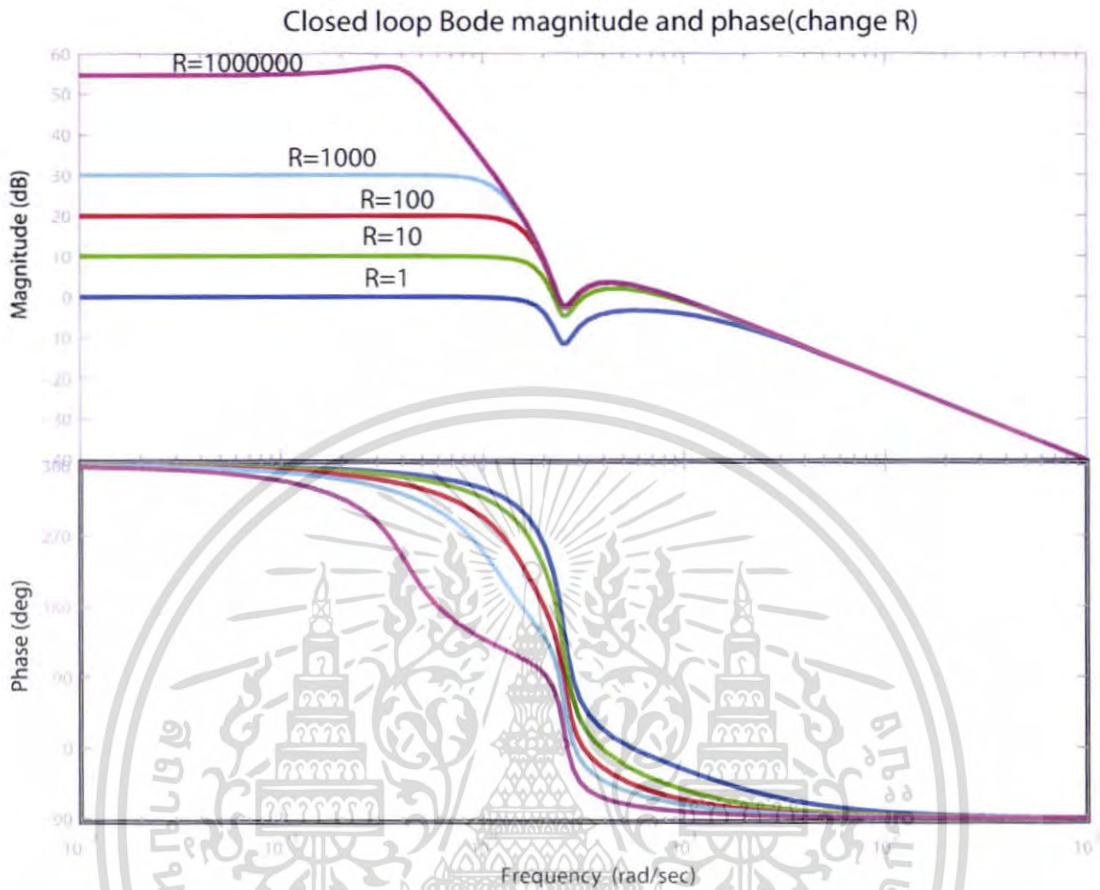


Figure 5.11: Closed loop Bode magnitude and phase (when varying R).

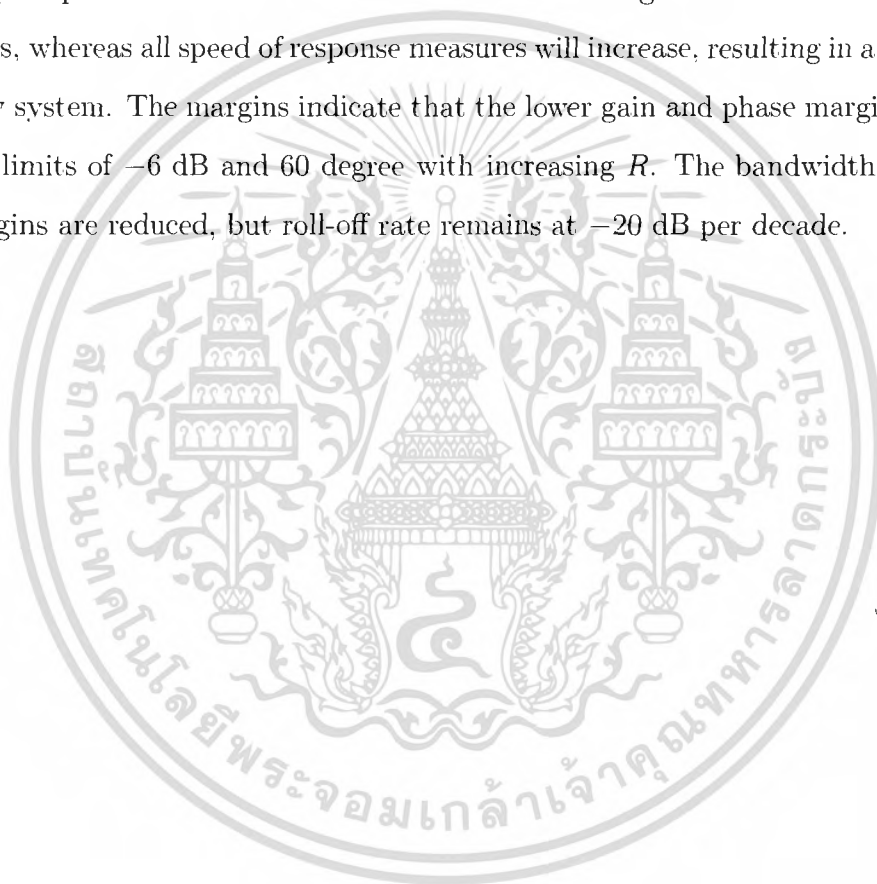
We study the minimum energy control case. The ratio of Q/R is allowed to approach zero. The values of control gain vector, step response characteristics, and stability margin measures are shown in Table 2. Note that, as expected, the gain decreases with higher values of R .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 2. Data for Varying R

R	Control gain vector			Gain margin	Phase margin	wcg	wcp
1	0.52	4.38	1	-15.8	83.8	12.7	2
10	0.39	1.96	0.31	-11.8	71.2	5.2	1.6
100	0.35	0.98	0.09	-12.6	61.9	3.1	1.1
1000	0.28	0.48	0.02	-14	60.5	2.1	0.7
1,000,000	0.08	0.06	0.0002	-7.2	60.7	0.7	0.4

The step response characteristics indicate that with large values of R , the overshoot decreases, whereas all speed of response measures will increase, resulting in a well damped and slow system. The margins indicate that the lower gain and phase margin are pushed to their limits of -6 dB and 60 degree with increasing R . The bandwidth decreases as the margins are reduced, but roll-off rate remains at -20 dB per decade.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Exercise. 3) (Applied to other problem.) For a plant described by:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & -0.05 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ -1.5 & -8.9 & -0.05 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t).$$

design a linear quadratic controller that minimizes the cost function:

$$J(k) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

Perform the design for different values of Q and R .

Solution.

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & -0.05 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ -1.5 & -8.9 & -0.05 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

and the cost function is

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

then

$$Q = I$$

$$R = 1$$

Solve MATLAB find K, P

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
>> A=[-0.3 0.1 -0.05; 1 0.1 0; -1.5 -8.9 -0.05];
>> B=[2;0;4];
>> C=[0 0 1];
>> D=0;
>> Q=eye(3);
>> R=1;
>> [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)
```

K =

```
5.9789 10.2705 -1.0786
```

P =

```
8.4490 15.8136 -2.7298
15.8136 31.4205 -5.3392
-2.7298 -5.3392 1.0952
```

E =

```
-3.0224 + 0.7856i
-3.0224 - 0.7856i
-1.8484
```

such that

$$K = \begin{bmatrix} 5.9789 & 10.2705 & -1.00786 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 8.4490 & 15.8136 & -2.7298 \\ 15.8136 & 31.4205 & -5.3392 \\ -2.7298 & -5.3392 & 1.0952 \end{bmatrix}$$

Obtain the open-loop transfer function to calculate the gain and phase margins. Compare the results for different values of Q and R .

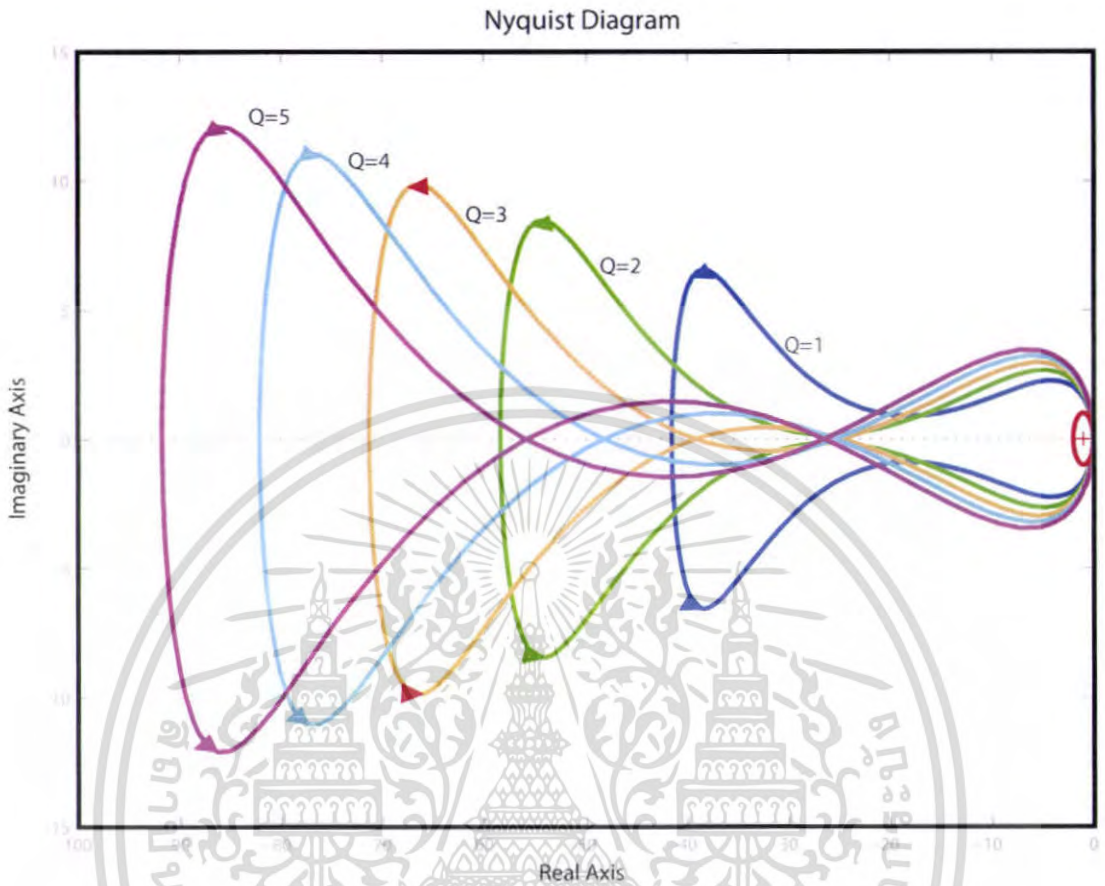
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Solving by MATLAB (see Nyquist and bode plot).

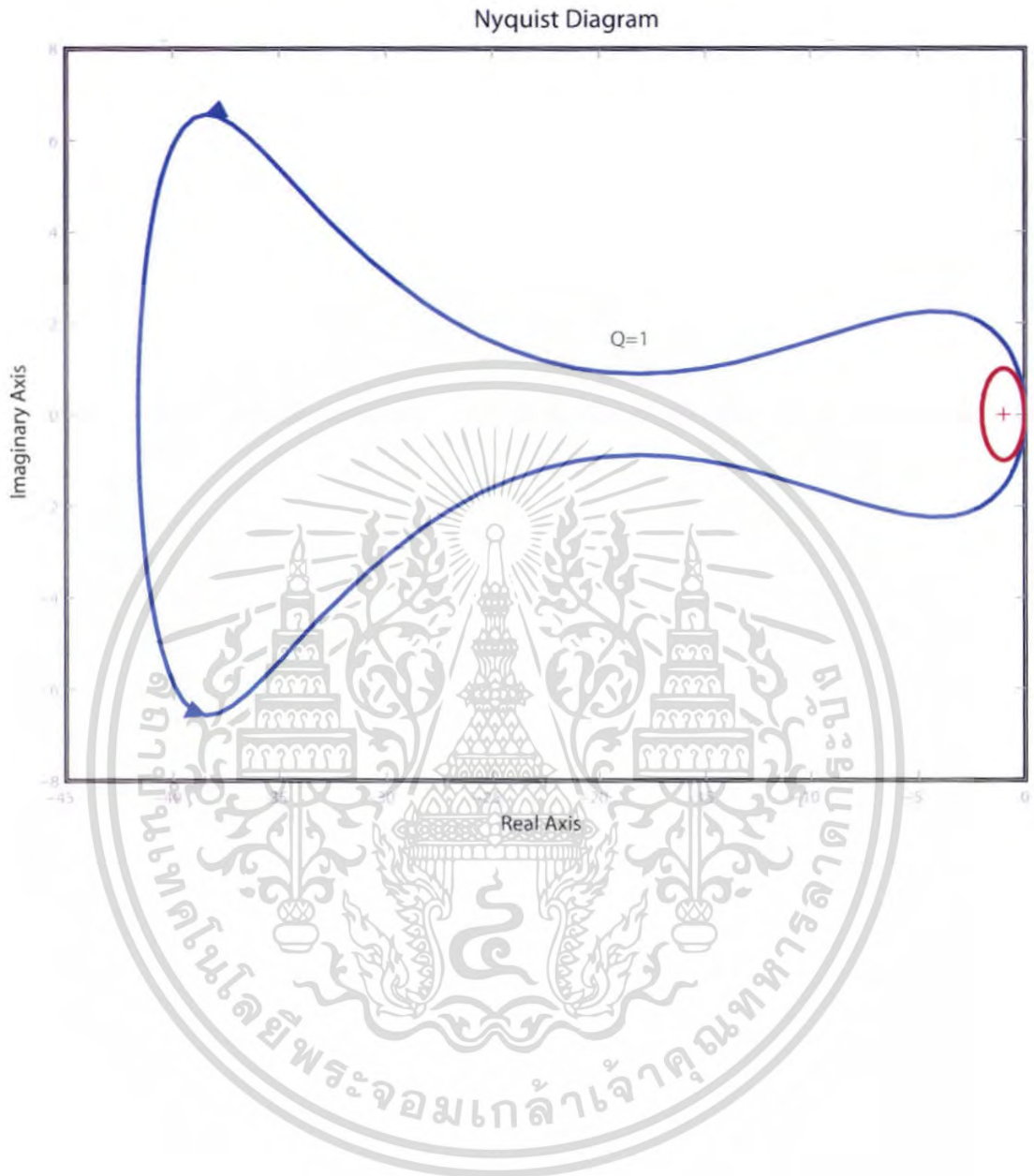
```
A=[-0.3 0.1 -0.05; 1 0.1 0; -1.5 -8.9 -0.05];
B=[2;0;4];
C=[0 0 1];
D=0;
qq=[1 2 3 4 5];
for i=1:5
Q1=qq(i)*eye(3);
R1=1;
[k1,p1,e]=lqr(A,B,Q1,R1)
Ac=A-B*k1;
figure(1)
[num1,den1]=ss2tf(A,B,k1,D)
nyquist(num1,den1)
hold on
end
x=[-2:0.01:0];
y=sqrt(1-(x+1).^2)
plot(x,y,'r')
plot(x,-y,'r')
hold off
```



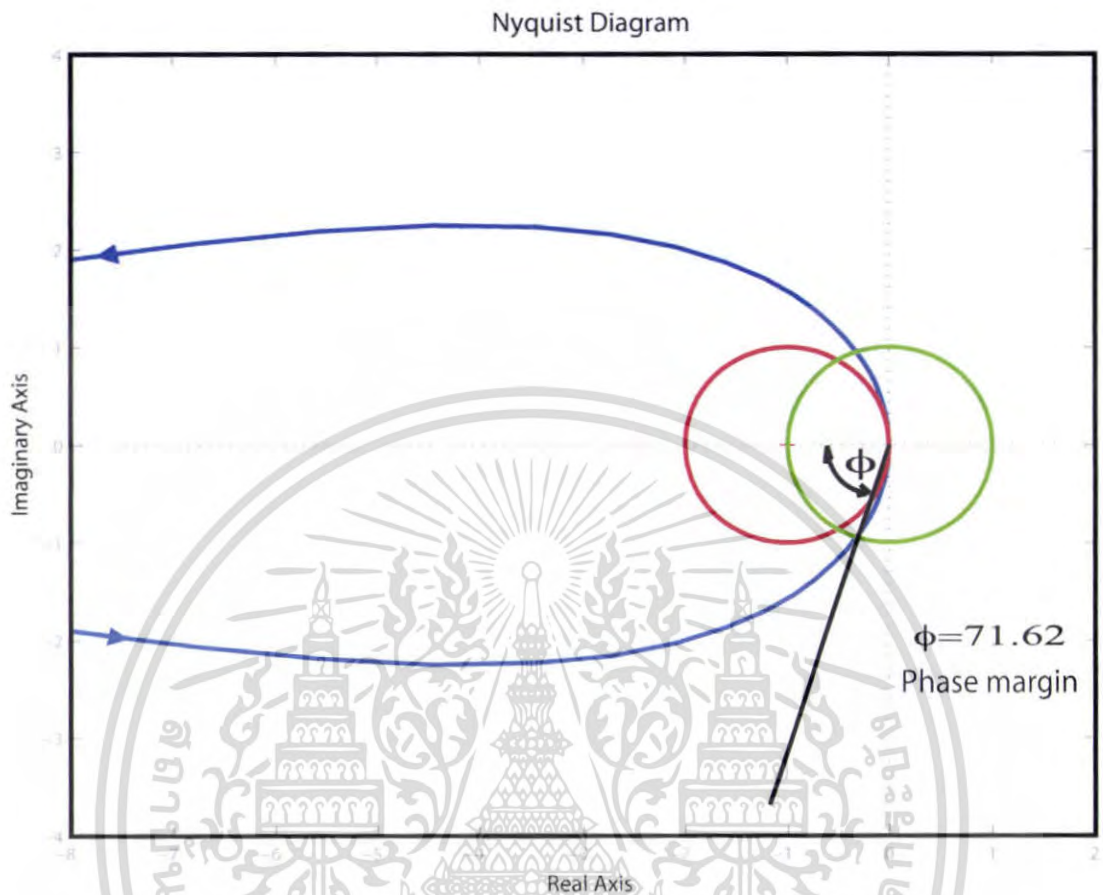
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



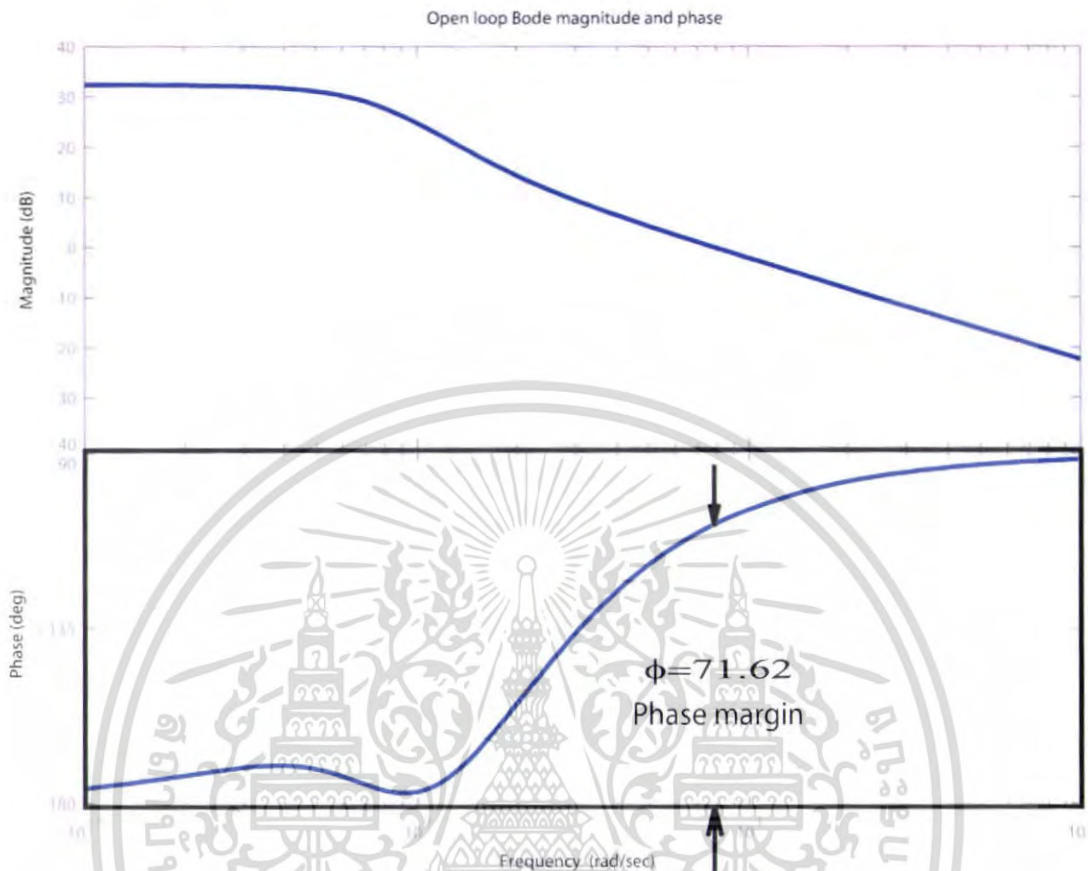
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



By graph we know phase and gain margins.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Bibliography

- [1] D. J. Higham and N. J. Higham. *MATLAB guide*. SIAM, 2000.
- [2] K. Ogata. *MODERN CONTROL ENGINEERING*, 4th ed., PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 2002.
- [3] K. Ogata. *Designing linear control systems with MATLAB*. PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1994.
- [4] K. Ogata, *Solving control engineering problem with MATLAB*, PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1994.
- [5] J. Moscinski and Z. Ogonowski, *Advanced Control with MATLAB and SIMULINK*, ELLIS HORWOOD, Maylands Avenue, 1995.
- [6] G. H. Golub and C. F. Loan. *Matrix Computations*. 3rd ed., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1996.
- [7] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York, 1985.
- [8] Erwin Lutwak. *The Brunn-Minkowski-Firey Theory I: Mixed Volumes and the Minkowski Problem*. Journal of Differential Geometry 38:131-150, 1993.
- [9] B. Shahian and M. Hassul. *CONTROL SYSTEM DESIGN Using MATLAB*, PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1993.
- [10] Erwin Lutwak. *The Brunn-Minkowski-Firey Theory II: Affine and Geominimal Surface Areas*. Advances in Mathematics 118, 244-294, Article no. 10022, 1996.

เอกสารนี้เผยแพร่ใน *face Areas*, Advances in Mathematics 118, 244-294, Article no. 10022, 1996. ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [11] K. Zhon, *Essentials of robust control*, PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07458, 1998.
- [12] K. Zhon, *Robust and Optimal Control*, PRENTICE HALL, Englewood Cliffs, New Jersey 07458. 1995.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Appendix A

Stability

A.1 Main Stability Theorems

Lyapunov Stability. To begin with, we remind reader that Lyapunov stability, asymptotic stability, uniform stability, uniform asymptotic stability, etc., are properties not of a dynamic system as a whole, but rather of its individual solutions. Consider the time-varying system

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (\text{A.1.1})$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, and $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ is piecewise continuous in t and locally Lipschitz in x . The solution of (A.1.1) which starts from the point x_0 at time $t_0 \geq 0$ is denoted as $x(t; x_0, t_0)$ with $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. Lyapunov stability concepts describe continuity properties of $x(t; x_0, t_0)$ with respect to x_0 . If the initial condition x_0 is perturbed to \tilde{x}_0 , then, for stability, the resulting perturbed solution $x(t; \tilde{x}_0, t_0)$ is required to stay close to $x(t; x_0, t_0)$ for all $t \geq t_0$. In addition, for asymptotic stability, the error $x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)$ is required to vanish as $t \rightarrow \infty$. So, the solution $x(t; x_0, t_0)$ of (A.1.1) is

- **bounded**, if there exist a constant $B(x_0, t_0) > 0$ such that

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ $|x(t; x_0, t_0)| < B(x_0, t_0)$, นั้น $\forall t \geq t_0$ ให้นำไปใช้ประโยชน์ (ถ้าหาก) ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- **stable**, if for each $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ such that

$$|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0; \quad (\text{A.1.3})$$

- **attractive**, if there exists an $r(t_0) > 0$ and, for each $\varepsilon > 0$, a $T(\varepsilon, t_0) > 0$ such that

$$|\tilde{x}_0 - x_0| < r \Rightarrow |x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T; \quad (\text{A.1.4})$$

- **asymptotically stable**, if it is stable and attractive; and
- **unstable**, if it is not stable.

The stability properties of $x(t; x_0, t_0)$ in general depend on the initial time t_0 . For different t_0 , different values of $B(x_0, t_0)$, $\delta(\varepsilon, t_0)$, $r(t_0)$, and $T(\varepsilon, t_0)$ may be needed to satisfy (A.1.2), (A.1.3) and (A.1.4). When these constants are independent of t_0 , the corresponding properties are *uniform* (Clearly, all properties are uniform if the system is time-invariant: $\dot{x} = f(x)$). For adaptive systems, *uniform stability* is more desirable than just stability. Even more desirable is **uniform asymptotic stability**, often shortened to UAS. The solution $x(t; x_0, t_0)$ is UAS if it is *uniformly stable and uniformly attractive*, that is, if $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$, $r(t_0) = r$, and $T(\varepsilon, t_0) = T(\varepsilon)$ do not depend on t_0 .

Some solutions of a given system may be stable and others unstable. In particular, (A.1.1) may have stable and unstable **equilibria**, that is constant solutions $x(t; x_0, t_0) \equiv x_c$ satisfying $f(x_c, t) \equiv 0$. If an equilibrium x_c is asymptotically stable, then it has a **region of attraction** — a set Ω of initial states x_0 such that $x(t; x_0, t_0) \rightarrow x_c$ as $t \rightarrow \infty$ for all $x_0 \in \Omega$ (When x_c is only stable, then the solutions starting in Ω remain close to x_c in the sense of (A.1.3)). In this report, the stability properties for which an estimate of the region of attraction is given are referred to as **regional**. Otherwise they are called *local*. When the region of attraction is the whole space \mathbb{R}^n , then the stability properties are **global**.

Any equilibrium under investigation can be translated to the origin by redefining the state x as $z = x - x_c$. Such a translation $z = x - x_c$ can be defined for any

solution $x(t; x_0, t_0)$ so that the solution under investigation can always be considered to be an equilibrium at the origin with a corresponding redefinition of $f(x, t)$ into $\bar{f}(z, t)$ such that $\bar{f}(0, t) \equiv 0$, namely:

$$\dot{z} = f(z + x(t; x_0, t_0), t) - f(x(t; x_0, t_0), t) \triangleq \bar{f}(z, t). \quad (\text{A.1.5})$$

Therefore, there is no loss of generality in standardizing the stability results for the zero solution $z(t; 0, t_0) \equiv 0$. In adaptive tracking problems, this zero solution is particularly meaningful when the state z represents the tracking error and its derivatives.

To be of practical interest, stability conditions must not required that explicitly solve (A.1.1). The direct method of Lyapunov aims at determining the stability properties of $x(t; x_0, t_0)$ from the properties of $f(x, t)$ and its relationship with a positive definite function $V(x, t)$. For global result, this function must be radially unbounded, that is $V(x, t) \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$ uniformly in t . For simplicity, we will assume that the translation to the origin has been performed, that is, $f(0, t) \equiv 0$, and thus the solution under investigation is $x \equiv 0$.

Uniform asymptotic stability is a desirable property, because systems that possess it can deal better with perturbation and disturbances. We shall see that, in general, adaptive designs achieve less than uniform asymptotic stability. However, they achieve more than uniform stability because they force the tracking error to converge to zero. This key property is referred to as **regulation** when the reference signal is constant, and **tracking** when it is a time-varying signal. For convergence analysis, a powerful tool is the following theorem due to LaSalle and Yoshizawa:

Theorem A.1.1 (LaSalle-Yoshizawa) *Let $x = 0$ be an equilibrium point of (A.1.1) and suppose f is locally Lipschitz in x uniformly in t . Let $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a continuously differentiable, positive definite and radially unbounded function $V(x)$ such that*

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, t) \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.1.6})$$

เอกส where W is a continuous function. Then, all solutions of (A.1.1) are **globally uni-**
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

formly bounded and satisfy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0. \quad (\text{A.1.7})$$

*In addition, if $W(x)$ is positive definite, then the equilibrium $x = 0$ is **globally uniformly asymptotically stable** (GUAS).*



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Appendix B

Observability and Detectability

Consider the dynamical system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.0.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{B.0.2})$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $y \in \mathbb{R}^l$, and $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$. We say that the system (B.0.1), (B.0.2) or the pair (A, C) is observable if $\forall t_1 > 0$ the initial state x_0 can be determined from the time history of the input $u(t)$ and $y(t)$ in the interval $[0, t_1]$. Otherwise we say that (B.0.1), (B.0.2) or the pair (A, C) is unobservable.

Theorem B.0.2 : Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Then the following statements are equivalent.

i) (A, C) is observable.

ii) The matrix

$$W_0 \triangleq \int_0^t e^{A^T s} C^T C e^{As} ds > 0 \quad \forall t > 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\text{iii) rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

$$\text{iv) rank} = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

v) Let λ and x be any corresponding eigenvalue and eigenvector of A , i.e.

$$Ax = \lambda x, \quad \text{then } Cx \neq 0$$

vi) The eigenvalue of $A + LC$ can be freely assigned (with the restriction that complex eigenvalues occur in conjugate pairs.) by a suitable choice of L .

Proposition B.0.3 : If (A, C) is observable and $u(t)$ and $y(t)$ are known for $t \in [0, t_1]$, then x_0 is given by

$$x_0 = \left[\int_0^{t_1} e^{A^T s} C^T C e^{As} ds \right]^{-1} \left[\int_0^{t_1} e^{A^T s} C^T [y(s) - C \int_0^s e^{A\sigma} B u(\sigma) d\sigma] ds \right].$$

Definition B.0.4 : The pair (A, C) is said to be detectable if

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \Sigma(A) \cap \mathbb{C}.$$

Note that it follows from the above proposition that (A, C) is detectable if and only if (A^T, C^T) is stabilizable.

Lemma B.0.5 If (A, C) is observable (response, detectable), then $(A + KC, C)$ is observable (response, detectable). $K \in \mathbb{R}^{n \times l}$.

Lemma B.0.6 Assume (A, C) is observable and let $D \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times l}$ and $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$ where R is p.d. Then $([A + ED], [C^T C + D^T R D]^{1/2})$ is also observable.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ดูเห็นแจ้งให้ทราบขอสงวนสิทธิ์ในการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Proposition B.0.7 Let (A, C) be detectable and assume $\exists P \in \mathbb{N}^n$ satisfying

$$0 = A^T P + PA + C^T C$$

Then A is continuous time stable.

Lemma B.0.8 Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ be continuous time stable. Then \exists a unique $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfying

$$0 = A^T P + PA + R$$

for all $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In particular P is given by

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} R e^{A t} dt$$

Finally, if $R = C^T C$ where $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ then $P > 0$ if and only if (A, C) is observable.



Appendix C

L_2 Norm :

C.1 Deterministic Formulation:

Consider the stable linear time-invariant system :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{C.1.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{C.1.2})$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{l \times n}.$$

Then

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \geq 0$$

and so

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (\text{C.1.3})$$

Next, if we let $x_0 = 0$ and $u(t) = 2\delta(t)\bar{u}$ where $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ is a constant and $\delta(t)$ is a unit impulse centered at $t = 0$ such that

$$\int_0^t \Phi(t)\delta(t)dt = \frac{1}{2}\Phi(0)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Then equation (C.1.3) yields :

$$y(t) = Ce^{At}B\bar{u} \quad (\text{C.1.4})$$

Next, define

$$H(t) \triangleq Ce^{At}B$$

Where $H(t) \in \mathbb{R}^{l \times n}$. $\forall t \geq 0$ $H(t)$ is called the impulse response matrix and $y(t)$ is called the impulse response of system (C.1.1), (C.1.2)

Alternatively, if in (C.1.3) we let $u(t) = 0, \forall t \geq 0$ and $x_0 = B\bar{u}$ then the free response of the system is

$$y(t) = Ce^{At}x_0 = Ce^{At}B\bar{u}$$

Which is identical to the response obtained in (C.1.4) for $x_0 = 0$ and $u(t) = \delta(t)\bar{u}$.

Every impulse response of (C.1.1), (C.1.2) can be equivalently obtained via the free response of system (C.1.1), (C.1.2) with suitable initial condition.

In order to develop deterministic formulation of L_2 norm, consider the quadratic performance functional

$$\tau(x_0, u) \triangleq \int_0^\infty y^T(t)y(t)dt$$

Note that it follows from the above discussion that

$$\tau(0, \delta(t)\bar{u}) = \tau(B\bar{u}, 0)$$

Next, let $\hat{\tau}(\bar{u}) \triangleq \tau(0, 2\delta(t)\bar{u}) = \tau(B\bar{u}, 0)$. Then

$$\begin{aligned}\hat{\tau}(\bar{u}) &= \int_0^\infty (Ce^{At}B\bar{u})^T (Ce^{At}B\bar{u}) dt \\ &= \bar{u}^T \left[\int_0^\infty [(Ce^{At}B)]^T [(Ce^{At}B)] dt \right] \bar{u} \\ &= \text{tr} \left[\bar{u}\bar{u}^T \int_0^\infty [(Ce^{At}B)]^T [(Ce^{At}B)] dt \right] \\ &= \text{tr} \left[\bar{u}\bar{u}^T \int_0^\infty H^T(t)H(t) dt \right]\end{aligned}$$

Next, let $\bar{u} = e_i \triangleq \text{Col}_i(I_m)$. furthermore, compute $\sum_{i=1}^m \hat{\tau}(e_i)$ as below :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \hat{\tau}(e_i) &= \text{tr} \left[\left[\sum_{i=1}^m (e_i e_i^T) \right] \int_0^\infty H^T(t)H(t) dt \right] \\ &= \text{tr} \left[I_m \int_0^\infty H^T(t)H(t) dt \right] \\ &= \int_0^\infty \text{tr} [H^T(t)H(t)] dt\end{aligned}$$

Recall the notation

$$\|x\|_F = [\text{tr} [xx^T]]^{\frac{1}{2}} = [\text{tr} [x^T x]]^{\frac{1}{2}}$$

Hence,

$$\sum_{i=1}^m \hat{\tau}(e_i) = \int_0^\infty \|H(t)\|_F^2 dt$$

We next define the L_2 norm of $H(\cdot)$ as follows :

$$\|H(\cdot)\|_2 \triangleq \left[\int_0^\infty \|H(t)\|_F^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.1.5})$$

Theorem C.1.1 Consider the stable triple (A, B, C) with impulse response $H(t) = Ce^{At}B$, $t \geq 0$. Then the L_2 norm of $H(\cdot)$ is given by

$$\|H(\cdot)\|_2^2 = \text{tr}(CQC^T) = \text{tr}(B^T P B)$$

Where $Q, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfy :

$$0 = AQ + QA^T + BB^T$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานที่ $A^T P + PA + C^T C$ นุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Proof : Note that (C.1.5) implies :

$$\begin{aligned}
 \| H(\cdot) \|_2^2 &= \int_0^\infty \text{tr} [H^T(t)H(t)] dt \\
 &= \text{tr} \int_0^\infty [B^T e^{A^T t} C^T C e^{At} B] dt \\
 &= \text{tr} \{ C \left[\int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \right] C^T \} \\
 &= \text{tr} \{ B^T \left[\int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \right] B \}
 \end{aligned} \tag{C.1.6}$$

Now since A is stable a unique solution satisfying (C.1.6) can be obtained and is given by

$$Q = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

So (C.1.6) reduces to

$$\| H(\cdot) \|_2^2 = \text{tr}(CQC^T)$$

□

We proof for second part is similar