

# ตัวโกนผสมด่าง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของผนังเย็นโดยการจำลอง  
A STUDY ON CONJUGATE HEAT TRANSFER OF COOLING WALL BY  
SIMULATION

โดย

นายขจรเกียรติ จุฑรัมย์

นายสุรศักดิ์ เชื้อฟุ้ง

อาจารย์ที่ปรึกษา

รศ.ดร.จารุวัตร เจริญสุข

ผศ.ดร.อุณหัต พิณโสภณ

รฟ.

ช / ๓๒ ๗

๒๕๕๐

เลขหมู่.....81771

เลขทะเบียน.....

วัน,เดือน,ปี..... 24 ส.ย. 2551

|             |
|-------------|
| b. 11937410 |
| i. ....     |

ปริญญาบัตรนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา

2550

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองปริญญาโท


หัวข้อปริญญาโท การศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของผนังเย็น โดยการจำลอง  
A STUDY CONJUGATE HEAT TRANSFER OF COOLING WALL  
BY SIMULATION

ชื่อนักศึกษา นาย ขจรเกียรติ จุฑรัมย์  
นาย สุรศักดิ์ เชื้อฟุ้ง

หลักสูตร วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมเครื่องกล

อาจารย์ผู้ควบคุมปริญญาโท



(รศ.ดร. จรุงวัชร เจริญสุทนต์)



(ผศ.ดร. อุณหัต พินโสภณ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

|                              |  |
|------------------------------|--|
| หัวข้อปริญญานิพนธ์           | การศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของผนังเย็น<br>โดยการจำลอง |
| นักศึกษา                     | นาย ขจรเกียรติ จุฑรัมย์<br>นาย สุรศักดิ์ เชื้อฟุ้ง             |
| อาจารย์ผู้ควบคุมปริญญานิพนธ์ | รศ.ดร. จารุวัตร เจริญสุข<br>ผศ.ดร. อุณัต พิณโสภณ               |
| หลักสูตร                     | วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต  |
| สาขา                         | วิศวกรรมเครื่องกล  |
| พ.ศ.                         | 2550   |

### บทคัดย่อ

การศึกษาและนำเสนอผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของผนังเย็น ซึ่งเป็นการไหลภายในท่อ โดยการจำลองได้ใช้โปรแกรมทางการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (STAR-CD) โครงการนี้เริ่มต้นด้วยการศึกษาปัญหาการถ่ายเทความร้อนผ่านผนังเย็น โดยรูปแบบของการวางท่อที่แตกต่างกัน 2 ลักษณะ คือลักษณะแรกเป็นการวางท่อแบบขนาน ส่วนลักษณะที่สองเป็นการวางท่อที่ได้ลักษณะการไหลเป็นแบบอนุกรม โดยทั้ง 2 กรณีกำหนดให้เป็นสภาวะการไหลคงตัวและสถานะคงตัว เป็นการไหลแบบราบเรียบ โดยจะใช้ท่อวัสดุทำจากทองแดงและผนังคอนกรีตทั้งสองกรณีโดยอุณหภูมิน้ำที่ทางเข้าประมาณ 300 องศาเซลวิน ส่วนค่าคุณสมบัติต่างๆ ของทองแดงและคอนกรีตใช้อุณหภูมิเฉลี่ย 308 องศาเซลวิน โดยผลการจำลองครั้งแรกเลือกการวางท่อแบบอนุกรมเพื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลองจากนั้นก็จำลองรูปร่างแบบขนาน โดยทั้งสองกรณีได้มีการทดลองเปลี่ยนค่าตัวแปรของอัตราการไหลเมื่อพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้เปรียบเทียบกับและอธิบายพฤติกรรมของการถ่ายเทความร้อนของของไหลในอัตราการไหลที่แตกต่างกัน หลังจากนั้นก็ออกแบบรูปร่างของท่อใหม่ โดยคำนึงถึงการสูญเสียเนื่องจากการไหลและความร้อนที่ไปกับน้ำเป็นหลักทั้งนี้ใช้ผลลัพธ์ของโปรแกรมมาช่วยในการออกแบบด้วย

|                |   |
|----------------|---|
| Thesis Title   | A Study on Conjugate Heat Transfer of Cooling Wall by Simulation    |
| Student        | Mr. Khajonkiat Judram<br>Mr. Surasuk Cheorphung                     |
| Thesis Advisor | Assoc.Prof. Dr. Jaruwat Charoensuk<br>Asst. Prof Dr. Unnat Pinsopon |
| Degree         | Bachelor of Engineering in Mechanical Engineering                   |
| Year           | 2007  |

#### ABSTRACT

This project deals with a study on heat transfer of cooling wall by using the simulation program for fluid dynamics (STAR-CD). The project starts with study heat transfer problem through pipe-cooled wall with different in piping shape. First case, the shape of pipe is parallel and second case is series. Steady state laminar flow is assumed. The pipe made from copper and the wall is concrete. The temperature of water inlet 300 K and properties of copper and concrete are chosen at mean temperature (308 K). Firstly, serial configuration was chosen for first simulation in order to calibrate program and comparison with experiment. After that, both serial and parallel configurations have been simulated at different mass flow rate. Finally, we have designed a flow configuration that yield better heat transfer as suggested by the simulation results

### กิตติกรรมประกาศ

ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาทุกชั้นตอนจาก รศ. ดร. จารุวัตร เจริญสุข และ ผศ.ดร. อุณหัต พิน โสภณ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมปริญญาานิพนธ์ ที่มงานวิจัยขอกราบขอบพระคุณในความอนุเคราะห์จากท่านเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณ คุณนิวัฒน์ ภูเจริญ (พี่โหน่ง) ที่ให้ความกรุณาช่วยเหลือให้การฝึกสอน คำแนะนำที่ดีแก่ทีมงานวิจัย ตลอดจนให้ความกรุณาเอื้อเฟื้อด้านสถานที่และอุปกรณ์ในการทำวิจัย ที่ทันสมัย

ขอขอบพระคุณรุ่นพี่ปริญญาโท ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลที่คอยช่วยเหลือแก้ไขปัญหา บางจุดแก่ทีมงานวิจัย ซึ่งมีส่วนให้เข้าใจปัญหานั้นๆ

ขอขอบพระคุณเพื่อนๆ นักศึกษาทุกคนที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำต่างๆ

ขอขอบพระคุณ สำนักวิจัยและบริการคอมพิวเตอร์ ที่อนุเคราะห์ให้ยืมคอมพิวเตอร์ในการทำวิจัยที่ทันสมัย

ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ พี่ๆ ทุกคนที่คอยช่วยเหลือด้านกำลังใจเป็นอย่างดี

สุดท้ายขอขอบพระคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล ที่ได้สนับสนุนการทำปริญญาานิพนธ์ใน  
ครั้งนี้

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมีจากปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้ ทีมงานวิจัยขอมอบแด่ผู้มีพระคุณ  
ทุกท่าน

นาย ขจรเกียรติ จุรัมย์

นาย สุรศักดิ์ เชื้อฟุ้ง

## สารบัญ

|  | หน้า |
|--|------|
| บทคัดย่อภาษาไทย  | I    |
| บทคัดย่อภาษาอังกฤษ   | II   |
| กิตติกรรมประกาศ  | III  |
| สารบัญ   | IV   |
| สารบัญตาราง  | VI   |
| สารบัญภาพ  | VII  |
| <br>   |      |
| <b>บทที่ 1 บทนำ</b>  |      |
| 1.1 ความสำคัญและความเป็นมา   | 1    |
| 1.2 วัตถุประสงค์   | 2    |
| 1.3 ขอบเขตของโครงการ   | 2    |
| 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงการ                            | 2    |
| <br>   |      |
| <b>บทที่ 2 กฎการอนุรักษ์ของการเคลื่อนที่ของของไหล</b>              |      |
| 2.1 สมการควบคุมของการไหลและการถ่ายเทความร้อน                       | 4    |
| 2.2 สมการสถานะ   | 19   |
| 2.3 สมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน                 | 20   |
| 2.4 รูปแบบอนุรักษ์สำหรับสมการควบคุมของการไหลของของไหล              | 24   |
| 2.5 รูปแบบเชิงอนุพันธ์และอินทิเกรตสำหรับสมการการเคลื่อนย้ายแบบปกติ | 25   |
| 2.6 การแบ่งจำพวกของพฤติกรรมทางฟิสิกส์                              | 28   |
| 2.7 ลักษณะเฉพาะในสมการไฮเปอร์โบลิก                                 | 32   |
| 2.8 วิธีการแบ่งจำพวก สำหรับสมการอนุพันธ์ย่อยแบบง่าย                | 36   |
| 2.9 การแบ่งชนิดของสมการการไหลของของไหล                             | 38   |
| 2.10 เงื่อนไขเสริมสำหรับสมการการไหลแบบไร้ความหนืด                  | 40   |
| 2.11 ปัญหาในการไหลอัดตัวได้ที่ความเร็วเหนือเสียง                   | 44   |

| สารบัญ  |  | หน้า |
|---|--|------|
| <b>บทที่ 3 การถ่ายเทความร้อน</b>  |  |      |
| 3.1 การนำความร้อน   |  | 46   |
| 3.2 การพาความร้อน   |  | 49   |
| 3.3 การแผ่รังสีความร้อน   |  | 51   |
| <b>บทที่ 4 การพาแบบบังคับสำหรับการไหลภายในท่อ</b>                             |  |      |
| 4.1 การไหลของของไหล   |  | 54   |
| 4.2 การถ่ายเทความร้อน   |  | 59   |
| 4.3 สหพันธ์การพาความร้อน : การไหลแบบลามินาร์ในท่อกลม                          |  | 62   |
| <b>บทที่ 5 แบบจำลองการวิเคราะห์</b>   |  |      |
| 5.1 บทนำ  |  | 64   |
| 5.2 การสร้างแบบจำลองการวางท่อแบบอนุกรม  |  | 65   |
| 5.3 การสร้างแบบจำลองการวางท่อแบบขนาน  |  | 83   |
| 5.4 การพัฒนาแบบจำลองการวางท่อแบบอนุกรม  |  | 85   |
| <b>บทที่ 6 ผลการจำลอง</b>   |  |      |
| 6.1 ผลการจำลองกรณีท่ออนุกรมและท่อขนานที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s             |  | 87   |
| 6.1.1 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิผลการจำลองของทั้ง 2 กรณี           |  | 87   |
| 6.1.2 ผลการจำลองการกระจายความเร็วของท่ออนุกรมและท่อขนาน                       |  | 89   |
| 6.1.3 ผลการจำลองการกระจายอุณหภูมิผิวของผนังห้องด้านใน                         |  | 91   |
| 6.1.4 ปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตสู่ทองแดง                                 |  | 93   |
| 6.1.5 ผลการจำลองการกระจายอุณหภูมิผิวของผนังห้องด้านนอก                        |  | 94   |
| 6.1.6 เวคเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบอนุกรม<br>และท่อขนาน |  | 95   |
| 6.2 ผลการจำลองของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมาใหม่                                   |  | 96   |
| <b>บทที่ 7 วิเคราะห์ผลการจำลองและสรุป</b>                                     |  |      |
| 7.1 วิเคราะห์ผลการจำลอง   |  | 101  |
| 7.2 สรุปผลการจำลอง  |  | 101  |
| <b>บรรณานุกรม</b>   |  | 102  |

## สารบัญตาราง

| ตารางที่ |   | หน้า |
|----------|---|------|
| 2.1      | สมการควบคุมการไหลของของไหลแบบนิวโทเนียนอัดตัวได้                    | 24   |
| 2.2      | การจำแนกชนิดของพฤติกรรมทางฟิสิกส์                                   | 35   |
| 2.3      | ชนิดของสมการอนุพันธ์อันดับสองแบบเชิงเส้น                            | 36   |
| 2.4      | การจำแนกชนิดของพฤติกรรมการไหล                                       | 38   |
| 2.5      | เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลแบบอัดตัวได้และมีความหนืด                 | 41   |
| 3.1      | ค่าตัวอย่างของสัมประสิทธิ์การพาความร้อน (h)                         | 51   |
| 6.1      | การเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตสู่อากาศ                | 88   |
| 6.2      | การเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากทองแดงสู่น้ำ                   | 90   |
| 6.3      | การเปรียบเทียบอุณหภูมิผิวของผนังคอนกรีตด้านใน (ตรงตำแหน่งของท่อน้ำ) | 92   |
| 6.4      | แสดงการเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตสู่ทองแดง           | 93   |

## สารบัญรูป

| รูปที่ | หน้า |
|--------|------|
| 2.1    | 5    |
| 2.2    | 7    |
| 2.3    | 11   |
| 2.4    | 11   |
| 2.5    | 15   |
| 2.6    | 29   |
| 2.7    | 30   |
| 2.8    | 31   |
| 2.9    | 34   |
| 2.10   | 35   |
| 2.11   | 40   |
| 2.12   | 43   |
| 2.13   | 44   |
| 3.1    | 47   |
| 3.2    | 51   |
| 4.1    | 54   |
| 4.2    | 57   |
| 4.3    | 59   |
| 5.1    | 65   |
| 5.2    | 66   |
| 5.3    | 67   |
| 5.4    | 68   |
| 5.5    | 69   |
| 5.6    | 70   |
| 5.7    | 71   |
| 5.8    | 72   |
| 5.9    | 73   |

## สารบัญรูป (ต่อ)

| รูปที่  | หน้า |
|---|------|
| 5.10 กำหนดคุณสมบัติของน้ำ   | 74   |
| 5.11 กำหนดคุณสมบัติของทองแดง  | 75   |
| 5.12 กำหนดคุณสมบัติของคอนกรีต   | 76   |
| 5.13 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของขอบเขตทางเข้าของน้ำ  | 77   |
| 5.14 แสดงการกำหนดขอบเขตของของไหลที่ทางออก   | 78   |
| 5.15 แสดงการกำหนดขอบเขตของผนัง  | 79   |
| 5.16 แสดงการกำหนดวิธีการคำนวณ   | 80   |
| 5.17 แสดงสมการที่เลือกใช้ในการคำนวณ   | 81   |
| 5.18 แสดงการสั่งให้โปรแกรมเริ่มคำนวณ  | 82   |
| 5.19 แสดงแบบจำลองการวางท่อแบบขนาน   | 83   |
| 5.20 แสดงการสร้าง Mesh ของแบบจำลองการวางท่อแบบขนาน  | 84   |
| 5.21 แสดงแบบจำลองของการวางท่อแบบอนุกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่                                  | 85   |
| 5.22 แสดง Mesh ของแบบจำลองของการวางท่อแบบอนุกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่                         | 86   |
| 6.1 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิของท่ออนุกรมที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s         | 87   |
| 6.2 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิของท่อขนานที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s           | 88   |
| 6.3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณการถ่ายเทความร้อนจากคอนกรีตสู่อากาศของท่อขนานกับท่ออนุกรม | 89   |
| 6.4 แสดงผลการจำลองการกระจายความเร็วที่บริเวณทางเข้าของท่ออนุกรม                           | 89   |
| 6.5 แสดงผลการจำลองการกระจายความเร็วที่บริเวณทางเข้าของท่อขนาน                             | 90   |
| 6.6 กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณการถ่ายเทความร้อนจากทองแดงสู่ผนังของท่อขนานกับท่ออนุกรม   | 91   |
| 6.7 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวผนังห้องด้านในของท่ออนุกรม                    | 91   |
| 6.8 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวผนังห้องด้านในของท่อขนาน                      | 92   |
| 6.9 กราฟแสดงการเปรียบเทียบอุณหภูมิผิวของผนังของท่ออนุกรมและขนานที่ความเร็วการไหลต่างๆ     | 93   |

## สารบัญรูป (ต่อ)

| รูปที่   | หน้า |
|--|------|
| 6.10 กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตตู้ทองแดงของ<br>ท่อขนานและท่ออนุกรม             | 94   |
| 6.11 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวผนังห้องด้านนอกของท่ออนุกรม                                 | 94   |
| 6.12 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวผนังห้องด้านนอกของท่อขนาน                                   | 95   |
| 6.13 แสดงเวกเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบอนุกรม                                       | 95   |
| 6.14 แสดงเวกเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบขนาน   | 96   |
| 6.15 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิของท่ออนุกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่<br>ที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s | 96   |
| 6.16 แสดงผลการจำลองเวกเตอร์ความเร็วของการไหลบริเวณช่องของแบบจำลองที่<br>พัฒนาขึ้นมาใหม่                  | 97   |
| 6.17 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิจากบริเวณช่องของแบบจำลองที่<br>พัฒนาขึ้นมาใหม่                 | 98   |
| 6.18 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวผนังด้านในของห้อง   | 99   |
| 6.19 แสดงเวกเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบอนุกรมที่<br>พัฒนาขึ้นมาใหม่                 | 99   |
| 6.20 กราฟแสดงความร้อนจากทองแดงสู่น้ำ ( $v=0.0163$ ) ระหว่างรูปร่างท่อเดิมกับ รูปร่างที่<br>ออกแบบใหม่    | 100  |

## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ความสำคัญและที่มา

การถ่ายเทความร้อนแบบ conjugate heat transfer เป็นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหล โดยพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน ไปซึ่งมีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อนและการพาความร้อน โดยใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้าและออกจากของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อทั้งคู่ต้องมีค่าเท่ากัน เพื่อให้ปัญหาที่มีความง่ายขึ้นจึงทำการตั้งสมมติฐานให้อุณหภูมิที่ผิวของแข็งมีค่าคงที่ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหลซึ่งในความเป็นจริงแล้วอุณหภูมิในบริเวณดังกล่าวอาจมีค่าไม่คงที่ที่ทำให้การคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจึงมีความสำคัญในการนำมาแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลเพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น ตัวอย่างของปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตได้แก่ การถ่ายเทความร้อนจากผนังตู้น้ำที่ไหลภายในท่อ เป็นต้น

ในปัจจุบันแนวคิดการประหยัดพลังงานเป็นสิ่งที่ได้รับการเอาใจใส่จากหลายหน่วยงานทั่วโลกโดยสิ่งที่จะต้องคำนึงถึงการประหยัดพลังงานหรือแนวคิดในการอนุรักษ์พลังงานคือการลดการใช้พลังงานและการหันมาใช้พลังงานทดแทนหรือพลังงานหมุนเวียนซึ่งจะไม่ส่งผลกระทบต่อสภาพแวดล้อมรอบๆตัวและของโลกมากขึ้นซึ่งการใช้พลังงานในปัจจุบันพบว่าปริมาณการใช้พลังงานภายในอาคารส่วนใหญ่จะหมดไปกับการสร้างสภาวะน่าสบายให้แก่ผู้ใช้ภายในอาคาร

ในปัจจุบันก็มีการลดความร้อนที่จะเข้าภายในอาคารโดยใช้วิธีการฝังท่อน้ำไว้ภายในอาคารเพื่อให้เกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างผนังอาคารที่ได้ความร้อนจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์กับน้ำที่อยู่ภายในท่อ ซึ่งลักษณะรูปร่างของท่อนั้นแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะตามรูปแบบการไหลของการนำคือ 1 ลักษณะการวางท่อแบบอนุกรมและ 2 รูปแบบการวางท่อแบบขนาน โครงงานนี้จึงได้เกิดขึ้นเมื่อนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (simulation) มาประยุกต์ใช้เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลดความร้อนของทั้งสองแบบที่สภาวะ steady state และการไหลเป็นแบบ laminar flow และเราได้พัฒนารูปแบบท่อใหม่ทั้งนี้ในการออกแบบใหม่นี้ก็เพราะว่ารูปร่างเดิมของท่ออนุกรมนั้นมีปัญหาในเรื่องการสูญเสียเนื่องจากการไหลต้องใช้กำลังในการปั๊มเพื่อสร้างแรงดันของน้ำในการออกแบบรูปร่างของท่อใหม่นั้นจะใช้ผลลัพธ์ของการจำลองของท่อแบบเดิมในการที่จะวิเคราะห์ถึงปัญหาที่เกิดขึ้น จากนั้นเราจึงทำการออกแบบใหม่เพื่อแก้ปัญหาของรูปร่างท่อแบบเดิม โดยรูปร่างของท่อจะโค้งมากขึ้นเพื่อให้การไหลมีการสูญเสียน้อยลง นอกจากนั้นอัตราการไหลซึ่งมีผลต่อการต่อการถ่ายเทความร้อนเช่นกันซึ่งอัตราการไหลเดิมนั้นช้ามากจึงได้ทำการเพิ่มอัตราการไหลให้มากขึ้นกว่าเดิมเพื่อดูประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนของระบบโดยการจำลอง

(simulation) ภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน ในการจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นเราจำเป็นต้องทราบค่าต่างๆ ดังนี้เช่น คุณสมบัติของผนังและน้ำรวมไปถึงปริมาณความร้อนที่ผนังได้รับ (Heat flux) เป็นต้น

ซึ่งในการจำลองทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องเทียบกับการทดลองจริงทั้งนี้ก็เพื่อที่จะเป็นการทดสอบความน่าเชื่อถือของตัวโปรแกรมและสรุปผลว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถที่จะวิเคราะห์ปัญหาของการทดสอบประสิทธิภาพของการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างผนังกับน้ำได้หรือไม่ ซึ่งเป็นสิ่งที่อธิบายถึงเหตุผลในการทำวิทยานิพนธ์นี้ขึ้นมา

## 1.2 วัตถุประสงค์

- 1 ศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตในท่อที่สภาวะ Steady state Steady flow
- 2 จำลองการถ่ายเทความร้อนของผนังเย็น โดยการวางแนวท่อที่แตกต่างกันคือ
  - 2.1 แบบอนุกรม
  - 2.2 แบบขนาน
3. เปรียบเทียบและวิเคราะห์การถ่ายความร้อนจากผลการทดลองที่ได้

## 1.3ขอบเขตของโครงการ

1. เปรียบเทียบผลการจำลองกับผลการทดลอง
2. ศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต Heat transfer
3. เปรียบเทียบรูปแบบการวางท่อแบบอนุกรม (Serial) ระหว่างผลการทดลองกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลข
4. วิเคราะห์ผลการจำลองรูปร่างท่อแบบขนานกับอนุกรมภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน
5. ออกแบบลักษณะรูปร่างการวางท่อให้มีประสิทธิภาพที่สูงขึ้นกว่าเดิม

## 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1 เป็นแนวทางในการเลือกใช้ระบบและเทคนิคที่สามารถลดการส่งผ่านความร้อนผนังเข้าสู่ภายในอีกแนวทางหนึ่ง
- 2 สามารถนำผลที่ได้จากการจำลองไปทดสอบจริงหรือประยุกต์ใช้กับอาคารจริงได้อย่างมีประสิทธิภาพ
- 3 สามารถเป็นแนวทางในการทำโครงการนี้เพื่อให้มีประสิทธิภาพสูงตามลักษณะรูปแบบของท่อที่แตกต่างกัน
- 4 นำทฤษฎีเชิงวิเคราะห์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนของผนังกับการไหลของของไหลภายในท่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- 5 ได้รับความรู้จากระเบียบเชิงตัวเลขในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบ conjugate heat transfer



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

### กฎการอนุรักษ์ของการเคลื่อนที่ของของไหล

ในบทนี้เราจะศึกษาสมการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์สำหรับการไหลและการถ่ายเทความร้อน ที่ประกอบด้วย กฎการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน สิ่งนี้ได้นำไปสู่สมการควบคุมของการไหลรวมทั้งเงื่อนไขที่จำเป็นบางอย่างคือ เงื่อนไขเริ่มต้นและที่ขอบ เนื้อหาหลักที่ครอบคลุมในบทนี้ประกอบด้วย

- ระบบสมการ PDEs (Partial Differential Equations) ซึ่งควบคุมการไหลในพิกัดคาร์ทีเซียน  $(x, y, z)$
- สมการสถานะ
- แนวคิดเกี่ยวกับความหนืดในรูปของ Newtonian ซึ่งนำไปสู่สมการ Navier – Stokes
- ความเหมือนกันในเชิงหลักการระหว่างสมการ PDEs ของ การไหลกับสมการการเคลื่อนย้าย (Transport Equations)
- รูปแบบของสมการที่ถูกอินทิเกรตแล้ว ในช่วงคาบเวลาและปริมาตรหนึ่งๆ ของสมการการเคลื่อนย้าย
- การแบ่งลำดับกลุ่มของพฤติกรรมทางฟิสิกส์ออกเป็น 3 ชั้น คือ elliptic, parabolic, hyperbolic และเงื่อนไขค่าขอบที่เหมาะสมในแต่ละรูปแบบการไหลนั้นๆ
- สภาวะเสริมสำหรับการไหลของของไหลที่มีความหนืด
- การกำหนดสภาวะที่ขอบในปัญหาการไหลแบบ Mach Number และ Reynolds number ที่มีค่าสูง

#### 2.1 สมการควบคุมของการไหลและการถ่ายเทความร้อน

สมการควบคุมของการไหลของของไหลแทนถึงสมการทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายกฎการอนุรักษ์ทางฟิสิกส์ ดังนี้

- มวลของไหลไม่สูญหายไปไหน
- อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเท่ากับผลรวมของแรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหล (กฎข้อที่สองของนิวตัน)
- อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานเท่ากับผลรวมของอัตราการเพิ่มขึ้นของความร้อนกับอัตราของงานที่กระทำในอนุภาคของไหล (กฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์)

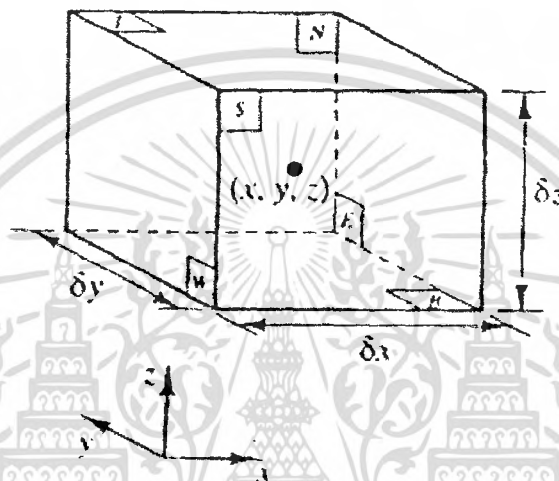
ของไหลจะถูกพิจารณาว่ามีความต่อเนื่องสำหรับการวิเคราะห์การไหลของของไหลที่

ระดับ

มหภาค คือพิจารณาที่สเกลระดับ  $1 \mu\text{m}$  ขึ้นไป โครงสร้างและการเคลื่อนที่ระดับโมเลกุล สามารถไม่นำมาพิจารณาได้ เราสนใจที่จะอธิบายพฤติกรรมของไหลในเทอมของคุณสมบัติในระดับมหภาค เช่น ความเร็ว ความดัน ความหนาแน่น อุณหภูมิ รวมทั้งอัตราการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติเหล่านี้ เป็นต้น สิ่งนี้อาจจะคิดเป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มโมเลกุลจำนวนมาก ดังนั้นจุดใดๆ ในของไหลนั้นจะมีคุณสมบัติของของไหลในระดับมหภาค ไม่ขึ้นกับอิทธิพลจากอนุภาคในระดับโมเลกุล

เราพิจารณาชิ้นส่วนของไหลขนาดเล็กที่มีความยาวด้านเท่ากับ  $\delta x, \delta y$  และ  $\delta z$  ดังรูปที่

## 2.1



รูป 2.1 ชิ้นส่วนของของไหลสำหรับกฎการอนุรักษ์

ผิวหน้าทั้งหกด้านจะถูกแทนด้วย  $N, S, E, W, T, B$  ซึ่งแทนถึงทิศทางในแนวเหนือ ใต้ ตะวันออก ตะวันตก บน และล่าง ตามลำดับ ศูนย์กลางของชิ้นส่วนอยู่ที่ตำแหน่ง  $(x, y, z)$  เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นระบบของ มวล โมเมนตัม และพลังงานของชิ้นส่วนของไหล จะสามารถสร้างสมการไหลของของไหลได้

คุณสมบัติของของไหลทั้งหมดจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา ดังนั้นเราจำเป็นต้องเขียน  $\rho(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$ ,  $T(x, y, z, t)$  และ  $u(x, y, z, t)$  สำหรับความหนาแน่น, ความดัน, อุณหภูมิและเวกเตอร์ความเร็ว ตามลำดับ เพื่อหลีกเลี่ยงความซับซ้อนในการเขียนค่าสัญลักษณ์ แสดงคุณสมบัติดังกล่าว เราจะไม่ระบุตำแหน่งและเวลา เช่น ความดันที่ศูนย์กลาง  $(x, y, z)$  ของชิ้นส่วนของไหลที่เวลา  $t$  จะถูกแทนโดย  $p$  หรือการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง  $x$  ของความดันที่ศูนย์กลาง  $(x, y, z)$  ที่เวลา  $t$  หนึ่งๆ จะถูกแทนโดย  $\frac{\partial p}{\partial x}$  หลักการนี้จะถูกนำไปใช้สำหรับคุณสมบัติของไหลทั้งหมด

ชิ้นส่วนของไหลที่พิจารณานั้นมีขนาดเล็กมาก จนกระทั่งคุณสมบัติของไหลที่ผิวหน้าสามารถอธิบายได้อย่างแม่นยำด้วยสองพจน์แรกของสมการ Taylor ดังนั้น สำหรับตัวอย่างความดัน เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่ผิวหน้า  $e$  และ  $w$  ซึ่งทั้งคู่มีระยะห่างจากศูนย์กลางของชิ้นส่วนของไหลเท่ากับ  $\frac{1}{2} \cdot \Delta x$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta x \quad \text{และ} \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta x$$

### 2.1.1 การอนุรักษ์มวลในปัญหา 3 มิติ

ขั้นตอนแรกของการหาสมการอนุรักษ์มวลคือการพิจารณาถึงสมดุลมวลของชิ้นส่วนของไหลดังนี้

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลใน  
ชิ้นส่วนของไหล = อัตราการไหลสุทธิของมวล  
ที่เข้าไปในชิ้นส่วนของไหล

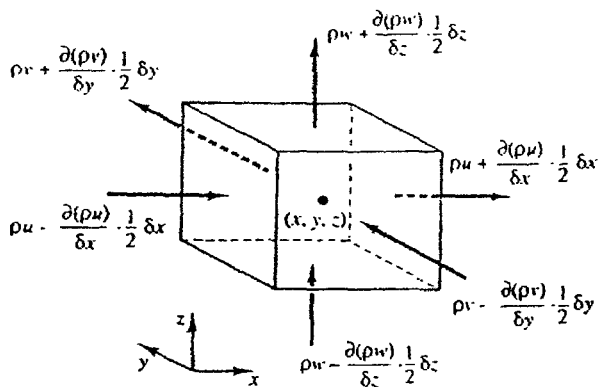
อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในชิ้นส่วนย่อยของของไหลคือ

$$(2.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y \Delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

ต่อไปเราจำเป็นต้องหาอัตราการไหลโดยมวลผ่านพื้นผิวและชิ้นส่วนย่อยซึ่งถูกให้โดยผลคูณของความหนาแน่น พื้นที่และความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวนั้น จากรูปที่ 2.2 จะพบว่าการไหลสุทธิของมวลเข้าสู่ชิ้นส่วนย่อยผ่านพื้นผิวสามารถเขียนได้ ดังนี้

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \Delta y \Delta z - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \\ & + \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right) \Delta x \Delta z - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \Delta y \right) \Delta x \Delta z \\ & + \left( \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right) \Delta x \Delta y - \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \Delta z \right) \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

โดยการไหลเข้าสู่ชิ้นส่วนที่ทำให้มวลของชิ้นส่วนย่อยเพิ่มขึ้นถูกกำหนดให้เป็นบวก และมีค่าเป็นลบเมื่อมีการไหลออกจากชิ้นส่วนย่อย



รูปที่ 2.2 การไหลของมวลเข้าและออกชิ้นส่วนของไหล

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในชิ้นส่วนย่อยนั้น เท่ากับอัตราของมวลสุทธิจากการไหลออกผ่านพื้นผิวของชิ้นส่วนย่อย ซึ่งเมื่อย้ายข้างให้อยู่ในฝั่งเดียวกันเมื่อรวมกันแล้วจะหักล้างกันหมด เทอมทั้งหมดได้ถูกเรียบเรียงทางซ้ายของสมการและถูกหารด้วยปริมาตรของชิ้นส่วนย่อย  $\delta x \delta y \delta z$  ซึ่งจะได้

$$(2.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

หรือในรูปแบบของเวกเตอร์

$$(2.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$$

สมการ 2.4 นี้ คือสมการอนุรักษ์มวล หรือสมการความต่อเนื่อง 3 มิติ แบบการไหลไม่คงตัวและอัดตัวได้ เทอมแรกทางซ้ายมือคืออัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น (มวลต่อปริมาตร) ต่อเวลา เทอมที่สองอธิบายถึงการไหลสุทธิของมวลข้ามผ่านขอบเขตของปริมาตรเล็ก ๆ นั้น มันจะถูกเรียกเป็นเทอมของการพา

สำหรับของไหลที่อัดตัวไม่ได้ (เช่น ของเหลว) ความหนาแน่นมีค่าคงที่และสมการที่ 2.4 จะกลายเป็น

$$(2.5) \quad \text{div}(\mathbf{u}) = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือในรูปแบบเต็ม

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(2.6)

### 2.1.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของอนุภาคของไหล ในเทอมของจีนส่วนย่อยของไหล

ในกฎของการอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงานนั้น จะมีการกล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของอนุภาคของไหล คุณสมบัติแต่ละอย่างของอนุภาคจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (x, y, z) ของอนุภาคและเวลา (t) ในการศึกษาี้เรากำหนดให้ค่าคุณสมบัติใดๆ ต่อหน่วยมวล ด้วยสัญลักษณ์  $\phi$  โดยการเปลี่ยนแปลงของ  $\phi$  เทียบกับเวลาของอนุภาคของไหล  $\frac{D\phi}{Dt}$  คือ

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

และโดยที่  $dx/dt = u$ ,  $dy/dt = v$  และ  $dz/dt = w$  หากแทนค่าดังกล่าวไปในสมการข้างบน จะได้ว่า

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi$$

(2.7)

$D\phi/Dt$  เป็นนิยามของอัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติ  $\phi$  ต่อหน่วยมวล ในกรณีของสมการอนุรักษ์มวล เราสนใจที่จะพัฒนาสมการสำหรับอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยปริมาตร อัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติ  $\phi$  สามารถถูกแปลงให้เป็นคุณสมบัติเชิงปริมาตรได้โดยการคูณความหนาแน่น  $\rho$  เข้าไปกับเทอม  $D\phi/Dt$  ดังนั้น

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi \right)$$

(2.8)

รูปแบบนี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการอธิบายความเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติของของไหล ในปริมาตรเล็กๆ ที่หยุดนิ่งหนึ่งๆ เป็นการนิยามความสัมพันธ์ระหว่าง: 1) อนุพันธ์ของคุณสมบัติ  $\phi$  ของอนุภาคของไหล กับ 2) อัตราเปลี่ยนแปลงของ  $\phi$  ในชิ้นส่วน หรือปริมาตรย่อยๆ ของของไหลนั้น

ต่อไปนี้หากเราหันมาพิจารณากฎการอนุรักษ์ของมวล ค่าของมวลต่อหน่วยปริมาตร (ในที่นี้คือ ความหนาแน่น  $\rho$ ) คือพารามิเตอร์ที่เรากำลังศึกษา เมื่อพิจารณาผลรวมของ: 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นในปริมาตรเล็กๆ และ 2) ผลของการเปลี่ยนแปลงอันเนื่องมาจากการพาในสมการอนุรักษ์มวล (2.4) ก็คือ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u})$$

ดังนั้นรูปทั่วไปของ เทอมทั้งสองเทอมนี้ สำหรับคุณสมบัติใดๆ ของของไหล  $\phi$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$(2.9) \quad \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u})$$

สมการที่ 2.9 เทอมแรก คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติ  $\phi$  ต่อหน่วยปริมาตรบวกกับเทอมที่สอง คือการไหลสุทธิของ  $\phi$  ต่อปริมาตรที่ออกจากชิ้นส่วนย่อยของไหล ซึ่งเราสามารถนำมาเขียนใหม่เพื่อให้ได้ภาพความสัมพันธ์ ระหว่างผลรวมของทั้งสองเทอมนี้กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $\phi$  ในอนุภาคของไหล ดังนี้

$$(2.10) \quad \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\mathbf{u}) = \rho \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi \right] + \phi \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) \right] = \rho \frac{D\phi}{Dt}$$

เทอม  $\phi \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{u}) \right]$  เท่ากับศูนย์เนื่องจากสมการอนุรักษ์มวล (2.4) จากความสัมพันธ์ดังแสดงใน (2.10) จะได้ว่า

|  |   |  |
|--|---|--|
| อัตราเพิ่มของ $\phi$<br>สำหรับชิ้นส่วนย่อยของไหล | + อัตราการไหลสุทธิของ $\phi$<br>ที่ออกจากชิ้นส่วนย่อยของไหล | = อัตราการเพิ่มของ $\phi$ สำหรับ<br>อนุภาคของไหล |
|--|---|--|

การเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมของอนุภาคของไหลทั้ง 3 ทิศทาง อ้างอิงแกนในพิกัดฉาก รวมถึงการเปลี่ยนแปลงของพลังงานซึ่งเป็นปริมาณสเกลลาร์นั้น สามารถแทนพารามิเตอร์  $\phi$  และ อัตราการเปลี่ยนแปลงของมันเป็นหน่วยปริมาตร ตามที่นิยามไว้ใน (2.8) และ (2.10) สามารถแสดง ได้ดังในตารางข้างล่างนี้

|            |   |                      |   |
|------------|---|----------------------|---|
| x-momentum | u | $\rho \frac{Du}{Dt}$ | $\partial \frac{(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u u)$ |
| y-momentum | v | $\rho \frac{Dv}{Dt}$ | $\partial \frac{(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v u)$ |
| z-momentum | w | $\rho \frac{Dw}{Dt}$ | $\partial \frac{(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w u)$ |
| Energy     | E | $\rho \frac{DE}{Dt}$ | $\partial \frac{(\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho E u)$ |

รูปแบบที่ให้ไว้ในตารางข้างบนนี้จะถูกนำไปใช้ในการสร้างสมการอนุรักษ์โมเมนตัมและ พลังงานดังที่จะแสดงรายละเอียดในหัวข้อถัดจากนี้

### 2.1.3 สมการโมเมนตัมแบบ 3 มิติ

กฎข้อที่สองของนิวตันกล่าวไว้ว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคของไหล เท่ากับผลรวมของแรง ที่กระทำต่ออนุภาค”

|  |   |                                     |
|--|---|-------------------------------------|
| อัตราการเพิ่มโมเมนตัม<br>ของอนุภาคของไหล | = | ผลรวมแรงที่กระทำ<br>ต่ออนุภาคของไหล |
|--|---|-------------------------------------|

อัตราการเพิ่มโมเมนตัมต่อหน่วยปริมาตรของอนุภาคของไหลในทิศ  $x$ ,  $y$  และ  $z$  กำหนดได้โดย

$$\rho \frac{Du}{Dt} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} \quad \rho \frac{Dw}{Dt}$$

(2.11)

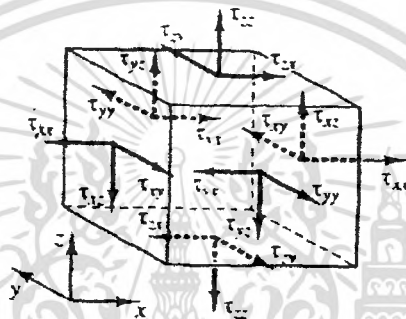
เราแบ่งประเภทของแรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหลเป็นสองแบบ คือ

- แรงกระทำที่ผิว (Surface forces) ได้แก่ แรงเนื่องจากความดัน แรงเนื่องจากความหนืด
- แรงกระทำในปริมาตร (Body forces) ของชิ้นส่วนย่อยของของไหล ได้แก่ แรงโน้มถ่วง แรงหมุนหนีศูนย์กลาง แรงแม่เหล็กไฟฟ้า Coriolis Force

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

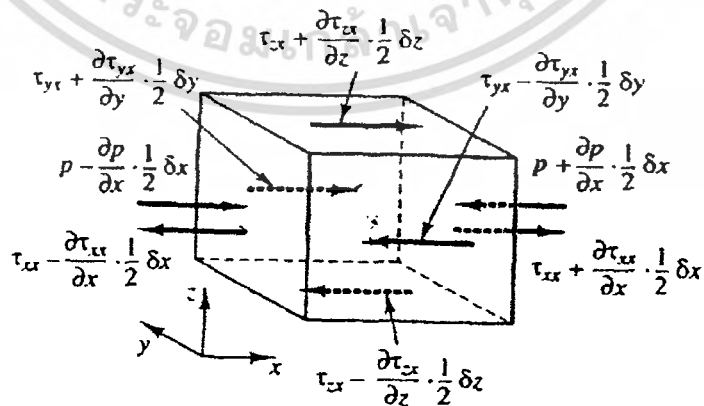
โดยทั่วไปเทอมของแรงกระทำที่ผิวจะถูกจัดกลุ่มแยกออกต่างหาก และเทอมของแรงกระทำภายใน ปริมาตรจะถูกพิจารณาเป็นเทอมของการเพิ่มและลดโมเมนต์แยกออกมาอีกเทอมหนึ่ง

ความเค้นที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของของไหล สามารถนิยามได้ด้วยเทอมของความดัน และเทอมความเค้นย่อยเนื่องจากความหนืด  $\mu$  ดังแสดงในรูปที่ 2.3 ความดันซึ่งมองว่าเป็นความเค้นตั้งฉาก ถูกแทนด้วย  $p$  ส่วนความเค้นเฉือนเนื่องจากความหนืดแทนโดย  $\tau$  สัญลักษณ์  $\tau_{ij}$  ถูกประยุกต์ใช้เพื่อชี้ให้เห็นถึงทิศทางของความเค้นเนื่องจากความหนืด ตัวห้อย  $i$  และ  $j$  ใน  $\tau_{ij}$  ชี้ให้เห็นถึงความเค้นย่อย ที่กระทำในทิศทาง  $j$  บนพื้นที่ที่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง  $i$  นั้นเอง



รูปที่ 2.3 องค์ประกอบของความเค้นบนผิวหน้าทั้งสามทิศทาง ของชิ้นส่วนของไหล

เริ่มแรกเราพิจารณาแรงกระทำในทิศทาง  $x$  เนื่องจากความดันและความเค้นย่อย  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  และ  $\tau_{zx}$  ดังในรูปที่ 2.4 ขนาดของแรงที่กระทำบนพื้นผิวเกิดจากผลคูณของความเค้นและพื้นที่ และที่มีทิศทางเดียวกับแกนอ้างอิงโดยมีเครื่องหมายบวก และมีค่าเป็นเครื่องหมายลบเมื่อทิศทางตรงข้าม แรงสุทธิในทิศทาง  $x$  คือผลรวมของแรงย่อยที่กระทำบนชิ้นส่วนย่อยของไหล ในทิศทางดังกล่าว



รูปที่ 2.4 องค์ประกอบของความเค้นในทิศทาง  $x$

เมื่อพิจารณาผิวหน้าที่  $E, W$  เราได้ว่า

$$\begin{aligned} & \left[ \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z + \left[ - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ & = \left( - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \end{aligned}$$

(2.12a)

แรงสุทธิในทิศทาง  $x$  บนผิวหน้า  $N, S$  ได้ว่า

$$- \left( \tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

(2.12b)

แรงสุทธิในทิศทาง  $x$  บนผิวหน้า  $T, B$  ได้ว่า

$$- \left( \tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

(2.12c)

ผลรวมแรงต่อหน่วยปริมาตรทั้งหมดเนื่องจากความเค้นที่ผิวหน้าจะเท่ากับผลรวมของ (2.1.2a), (2.1.2b) และ (2.1.2c) ที่หารด้วยปริมาตรสุทธิ

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

(2.13)

เทอมที่ปรากฏ ใน 2.13 นี้ ยังไม่รวมการพิจารณาแรงกระทำภายในชิ้นส่วนของของไหล ซึ่งสามารถถูกรวมได้โดยการพิจารณาเป็นแหล่งสร้างหรือทำลาย โมเมนตัม เป็นหน่วยของ โมเมนตัมต่อปริมาตรต่อเวลาในทิศทาง  $x$

ในขั้นตอนนี้สมการ โมเมนตัมในทิศทาง  $x$  หาได้โดยการกำหนดให้อัตราการเปลี่ยนแปลง โมเมนตัมในทิศทาง  $x$  และ อนุภาคการไหล (2.11) เท่ากับผลรวมของแรงในทิศทาง  $x$  ที่กระทำต่อ ชิ้นส่วนของไหล โดยความเค้นที่ผิว บวกกับอัตราการสร้างหรือสูญสลายของ โมเมนตัมในทิศทาง  $x$  เนื่องจากแรงภายในชิ้นส่วนของของไหลนั้นตามแนวแกน  $x$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2.14a)

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx}$$

ในทำนองเดียวกันโมเมนต์ในทิศทาง  $y$  จะเขียนได้ว่า

(2.14b)

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{My}$$

และ โมเมนต์ในทิศทาง  $z$  คือ

(2.14c)

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz}$$

ความดันมีลักษณะเป็นความเค้นอัดตั้งฉาก (Compressive normal stress) ซึ่งโดยทั่วไปมีเครื่องหมายเป็นลบ ในขณะที่ความเค้นตั้งฉากเนื่องจากความหนืดมีลักษณะเป็นความเค้นดึง (Tensile normal Stress) จะมีเครื่องหมายบวก

เทอมของการสร้างหรือสูญหายของโมเมนต์  $S_{Mx} = 0$ ,  $S_{My} = 0$  และ  $S_{Mz}$  (2.14 a-c) คือแรงกระทำภายในของแต่ละทิศทาง ตัวอย่างเช่นแรงกระทำภายในเนื่องจากแรงโน้มถ่วงจะถูกกำหนดให้มีค่า

$$S_{Mx} = 0, S_{My} = 0 \text{ และ } S_{Mz} = -\rho g$$

#### 2.1.4 สมการพลังงานในระบบ 3 มิติ

สมการพลังงานถูกหาได้จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ ที่กล่าวไว้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานของอนุภาคของไหล เท่ากับอัตราการเพิ่มความดันแก่อุณหภูมิของอนุภาคบวกกับอัตราการทำงานของอนุภาคการไหล

อัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงานของอนุภาคของไหลต่อหน่วยปริมาตร คือ

$$\rho \frac{DE}{Dt}$$

(2.15)

### งานที่กระทำโดยแรงบนพื้นผิว

อัตราการเกิดงานบนพื้นผิวของชิ้นส่วนของไหล จะเท่ากับผลคูณของแรงและความเร็วในทิศทางของแรง สำหรับแรงตามที่แสดงใน (2.12a – c) เฉพาะที่กระทำในทิศทาง  $x$  จะเกิดงานเท่ากับ

$$\begin{aligned} & \left[ \left( pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx}u + \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ & + \left[ - \left( \tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) + \left( \tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \right] \delta x \delta z \\ & + \left[ - \left( \tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) + \left( \tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \right] \delta x \delta y \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อลดรูปแล้ว อัตราการเกิดงานสุทธิบนพื้นผิวเหล่านี้ ในทิศทาง  $x$  คือ

$$\left[ \frac{\partial[u(-p + \tau_{xx})]}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

(2.16a)

ส่วนประกอบย่อยของแรงเนื่องจากความเค้นพื้นผิวในทิศทาง  $y$  และ  $z$  ก็จะทำงานบนอนุภาคดังกล่าวเช่นกัน ในกระบวนการคิดแบบข้างต้นอัตราการเกิดงานบนอนุภาคของไหลเนื่องจากการทำงานโดยแรงเหล่านี้สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\left[ \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial[v(-p + \tau_{yy})]}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

(2.16b)

และ

$$\left[ \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial[w(-p + \tau_{zz})]}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z$$

(2.16c)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราการเกิดงานทั้งหมดต่อหน่วยปริมาตรของของไหล โดยแรงบนพื้นผิวทั้งหมด คือ ผลรวมของ (2.16 a – c) ทารด้วยปริมาตร  $\delta x \delta y \delta z$  เทอมของ  $p$  สามารถถูกจัดรวบรวมและเขียนในรูปแบบของไดเวอร์เจนต์ ดังนี้

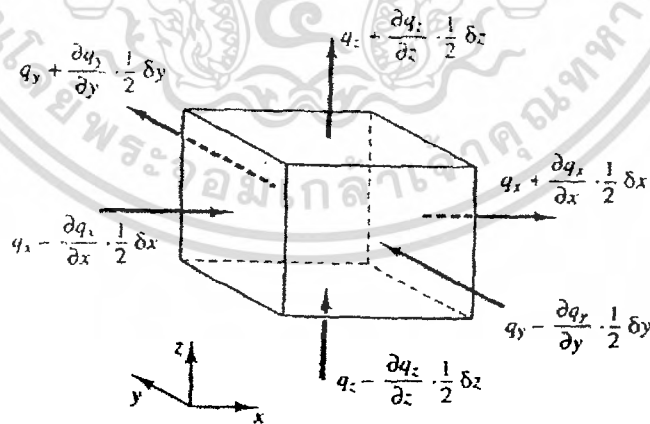
$$-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} = -\text{div}(pu)$$

ดังนั้นอัตราการเกิดงานรวมทั้งหมดบนชิ้นส่วนของของไหล โดยความเค้นบนพื้นผิว มีหน่วยเป็น ปริมาณของพลังงานต่อหน่วยเวลาต่อหน่วยปริมาตร

$$(2.17) \quad [-\text{div}(pu)] + \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right]$$

ฟลักซ์เนื่องจากการนำความร้อน

เวกเตอร์ฟลักซ์ความร้อนต่อหน่วยพื้นที่  $q$  ประกอบด้วยองค์ประกอบย่อย 3 ส่วนคือ  $q_x, q_y, q_z$  (รูปที่ 2.5)



รูปที่ 2.5 องค์ประกอบของเวกเตอร์ฟลักซ์ความร้อน

อัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิที่ขึ้นส่วนของไหล เนื่องจากฟลักซ์ของความร้อนทิศทาง  $x$  ถูกกำหนดโดยผลต่างระหว่างอัตราความร้อนที่เข้าผ่านผิวหน้า  $\mathcal{W}$  กับอัตราความร้อนที่ออกจากผิวหน้า  $E$

$$\left[ \left( q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

(2.18a)

ในทำนองเดียวกันอัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิของไหลเนื่องจากฟลักซ์ของความร้อนในทิศทาง  $y$  และ  $z$  คือ

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad \text{and} \quad -\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

(2.18b-c)

อัตราความร้อนสุทธิที่เพิ่มขึ้นของอนุภาคของไหลต่อหน่วยปริมาตรครอบคลุมขอบเขตของขึ้นส่วนของไหล จะเท่ากับผลรวมของ(2.18a-c) หารด้วยปริมาตร  $\delta x \delta y \delta z$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\text{div } \mathbf{q}$$

(2.19)

กฎของ Fourier ของการนำความร้อนอธิบายความสัมพันธ์ของอัตราการถ่ายเทปริมาณความร้อนต่อพื้นที่ (Heat flux) กับ ความแตกต่างอุณหภูมิ ต่อหน่วยความยาว

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

สิ่งนี้สามารถเขียนในรูปแบบของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\mathbf{q} = -k \text{ grad } T$$

(2.20)

รวมสมการ (2.19) และ (2.20) ซึ่งจะได้ว่า อัตราการเพิ่มของความร้อนที่อนุภาคของไหลเนื่องจากการนำความร้อนผ่านพื้นผิวของชิ้นส่วนของของไหล

$$-div q = div(k grad T) \tag{2.21}$$

สมการพลังงาน

ในหัวข้อนี้เราจะมากล่าวถึงพลังงานจำเพาะของของไหล ซึ่งแทนด้วย E พลังงานของของไหลถูกนิยามเป็นผลรวมของพลังงานความร้อนภายใน i, พลังงานจลน์  $\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$  และพลังงานศักย์โน้มถ่วง โดยมองว่าชิ้นส่วนของไหลมีการสะสมพลังงานศักย์โน้มถ่วง พลังงานภายในอาจไม่มีการรวมเอาพลังงานศักย์เข้าไว้ในนิยามก็ได้ หากมองว่าวัตถุกำลังทำงานในขณะที่เคลื่อนที่ในสนามความโน้มถ่วงของโลกโดยงานในส่วนนี้เรียกว่า งานเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุซึ่งเป็น source term ในสมการพลังงาน มีหน่วยเป็นพลังงานต่อหน่วยปริมาตรต่อหน่วยเวลา

การอนุรักษ์พลังงานของชิ้นส่วนของไหล ทำได้โดยการกำหนดค่าให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานของชิ้นส่วนของไหล (2.15) มีค่าเท่ากับ ผลรวมของการเกิดงานสุทธิบนชิ้นส่วนของไหล (2.17) และอัตราความร้อนสุทธิที่เพิ่มขึ้นของของไหลเนื่องจากฟลักซ์ความร้อน (2.21) และอัตราการเพิ่มของพลังงานเนื่องจากเทอมของ Source ดังนั้นสมการพลังงาน คือ

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -div(pu) + \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + div(k grad T) + S_E \tag{2.22}$$

ในสมการ 2.22 เรามี  $E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$

แม้ว่า (2.22) คือสมการพลังงานที่สมบูรณ์ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ พลังงานภายในที่สัมพันธ์กับอุณหภูมิจากของไหล และพลังงานจลน์ที่สัมพันธ์กับความเร็วของของไหล เรามักจะพิจารณาพลังงานในแต่ละส่วนแยกจากกัน พลังงานจลน์ที่สัมพันธ์กับความเร็วของของไหลนั้นสามารถ

เขียนได้โดยการแปลงรูปของสมการ โมเมนตัม กล่าวคือ ทำการคูณสมการ โมเมนตัมในทิศทาง x เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
แม้ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2.14 a) ด้วยความเร็ว  $u$  สมการโมเมนตัมในทิศทาง  $y$  ด้วยความเร็ว  $v$  และสมการโมเมนตัมในทิศทาง  $z$  (2.14c) ด้วยความเร็ว  $w$  และรวมผลลัพธ์เข้าด้วยกัน ก่อนทำการหารด้วย 2 สิ่งนี้ทำให้ได้สมการอนุรักษ์สำหรับพลังงานจลน์ดังข้างล่างนี้

$$\rho \frac{D\left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right]}{Dt} = -\mathbf{u} \cdot \text{grad } p + u \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M \quad (2.23)$$

ทำการลบ (2.23) จาก (2.22) และนิยาม source term ขึ้นใหม่เป็น  $S_i = S_E \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{S}_M$  จึงทำให้ได้สมการพลังงานภายในดังนี้

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \text{ div } \mathbf{u} + \text{div}(k \text{ grad } T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (2.24)$$

ในการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ เรามี  $i = cT$ , ซึ่ง  $c$  คือค่าความร้อนจำเพาะและ  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  ซึ่งทำให้เราจัดเรียงสมการ(2.24) ไปในรูปของอุณหภูมิได้คือ

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \text{div}(k \text{ grad } T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (2.25)$$

สำหรับสมการไหลที่อัดตัวได้ (2.22) ถูกจัดรูปเป็นสมการสำหรับค่า enthalpy และเนื่องจากค่า enthalpy จำเพาะ  $h$  และค่า enthalpy จำเพาะสัมบูรณ์  $h_0$  ของของไหลกำหนดได้โดย

$$h = i + p/\rho \quad \text{and} \quad h_0 = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

รวมสองนิยามนี้กับนิยามของพลังงานจำเพาะ  $E$  เข้าด้วยกัน เราจะได้

$$h_0 = i + p/\rho + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = E + p/\rho \quad (2.26)$$

แทนค่า (2.26) ไปในสมการ (2.22) และจัดเรียบเรียงบางอย่างทำให้ได้สมการพลังงานรวม

$$\frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \text{div}(\rho h_0 \mathbf{u}) = \text{div}(k \text{ grad } T) + \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zx})}{\partial z} \right] + S_h \quad (2.27)$$

สมการ (2.24), (2.25) และ (2.26) ไม่ใช่สมการการอนุรักษ์พลังงานที่เพิ่มเติมเข้ามาใหม่ หากแต่เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของสมการพลังงาน (2.22)

## 2.2 สมการสถานะ

การเคลื่อนที่ของของไหลใน 3 มิติถูกอธิบายโดยระบบของสมการอนุพันธ์ย่อย 5 สมการ คือ สมการอนุรักษ์มวล (2.4) สมการโมเมนตัมในทิศทาง  $x, y, z$  (2.14a – c) และสมการพลังงาน (2.24) ตัวไม่รู้ค่าประกอบด้วยตัวแปรทางเทอร์โมไดนามิกส์ 4 ตัวคือ  $\rho, p, i$  และ  $T$  โดยต่อไปนี้จะจับประเด็นไปที่การเชื่อมโยงทางเทอร์โมไดนามิกส์ระหว่างตัวแปร 4 ตัวนี้

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจในเรื่องต้น ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทางเทอร์โมไดนามิกส์ต่างๆ จะอยู่ภายใต้สมมุติฐานของสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งหมายความว่าในปัญหาเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หนึ่งๆ ที่ถึงแม้ความเร็วของของไหลจะมีค่าสูง และมีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติอย่างรวดเร็ว แต่ก็สมมุติให้ ของไหลสามารถปรับเปลี่ยนสภาวะทางเทอร์โมไดนามิกส์ไปสู่สภาวะใหม่อย่างรวดเร็ว จากตำแหน่งหนึ่งสู่ตำแหน่งหนึ่งเช่นกัน นั่นคือของไหลยังคงอยู่ในสภาวะสมดุลตลอดเวลา มีเพียงเงื่อนไขขกเว้นบางอย่างกับการไหลที่เป็นแบบ Strong shockwave แต่บางกรณีการไหลประเภทนี้ก็สามารถใช้สมมุติฐานว่าของไหลอยู่ในสภาวะสมดุลได้ โดยให้ผลการจำลองได้ดีพอสมควร

ด้วยสมมุติฐานดังกล่าว เราจึงสามารถอธิบายสภาวะของสสารในสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์ได้ โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ หากเรารู้ค่าตัวแปร 2 ตัว เราจะสามารถหาค่าตัวแปรตัวที่เหลือได้ ถ้าเราใช้  $p$  และ  $T$  เป็นตัวแปรที่รู้ค่า เรามีสมการสภาวะสำหรับความดัน  $p$  และพลังงานภายในจำเพาะ  $i$

$$p = p(\rho, T) \quad \text{and} \quad i = i(\rho, T) \quad (2.28)$$

สำหรับก๊าซสมบูรณ์สมการสถานะของมันซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีคือ

$$p = \rho RT \quad \text{and} \quad i = C_v T \quad (2.29)$$

สมมุติฐานของสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์นี้ เมื่อนำมาใช้พิจารณาการไหลของของไหลที่อัดตัวได้ ยังช่วยเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างสมการพลังงานกับสมการอนุรักษ์มวล และสมการโมเมนตัม ปฏิสัมพันธ์ระหว่างพลังงานกับการไหลนี้ เกิดขึ้นเนื่องจากความร้อนนั้นทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นตามสมการสถานะ

การไหลของของไหลและก๊าซที่ความเร็วต่ำประพฤติตัวเป็นของไหลที่อัดตัวไม่ได้ เมื่อไม่มีการแปรเปลี่ยนของความหนาแน่น ก็จะทำให้ไม่มีการเชื่อมโยงระหว่างสมการพลังงานกับสมการอนุรักษ์มวลและสมการโมเมนตัม ในกรณีเช่นนี้เราสามารถหาคำตอบของสมการโมเมนตัม คือสมการไหลได้โดยง่าย โดยการพิจารณาเพียงสมการอนุรักษ์มวลและสมการโมเมนตัมเท่านั้น และสามารถหาคำตอบของสมการพลังงาน คือการกระจายอุณหภูมิได้โดยเอกเทศหลังจากได้คำตอบของสมการไหลแล้ว

### 2.3 สมการนาเวียร์-สโตกส์ สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการควบคุมประกอบด้วยตัวที่ไม่รู้ค่าคือ ความเค้นเนื่องจากความหนืดในแนวแกนย่อย  $\tau_{ij}$  ในการไหลของของไหลนั้น ค่าความเค้นหนืดสามารถถูกอธิบายได้โดยอัตราการเฉิรรูปร่างที่ตำแหน่งใดๆ (หรืออัตราความเครียด) ในการไหล 3 มิติอัตราการเฉิรรูปร่างที่ตำแหน่งใดๆ ประกอบด้วยอัตราการเฉิรรูปร่างเชิงเส้นและอัตราเฉิรรูปร่างเชิงปริมาตร

ก๊าซทุกชนิดโดยส่วนมากมีคุณสมบัติเป็นแบบ Isotropic ในขณะที่ของเหลวบางชนิดที่ประกอบด้วยโมเลกุลของโพลีเมอร์ ในจำนวนที่มากพออย่างมีนัยสำคัญอาจจะประพฤติตัวเป็น Anisotropic หรือคุณสมบัติของความเค้นหนืดแบบขึ้นอยู่กับทิศทาง ซึ่งเป็นผลของการจัดเรียงตัวของโซ่โมเลกุลของโพลีเมอร์ ของไหลดังกล่าวอยู่นอกเหนือจากขอบเขตของหนังสือนี้และเราจะทำการศึกษาต่อไปโดยสมมุติว่าการไหลเป็น Isotropic

อัตราการเฉิรรูปร่างเชิงเส้นของชั้นส่วนของไหลมี 9 องค์ประกอบใน 3 มิติ ในจำนวนนั้น มี 6 องค์ประกอบที่เป็นอิสระในของไหลแบบ Isotropic (Schlichting, 1979) ซึ่งถูกเขียนโดยสัญลักษณ์  $e_{ij}$  ระบบการอ้างอิงในตัวห้อยต่อท้ายสัญลักษณ์ จะให้เห็นองค์ประกอบซึ่งเป็นระบบเดียวกับระบบอ้างอิงของความเค้น (ดูในหัวข้อ 2.4) มีองค์ประกอบของการเฉิรรูปร่างเชิงเส้นแบบตั้งฉากอยู่ 3 ตัว

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

(2.30a)

มีองค์ประกอบการเฉิรรูปร่างเชิงเส้นแบบเฉียงทั้ง 6 ด้านของชั้นส่วนของไหลคือ

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad e_{xz} = e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

(2.30b)

การเฉิรรูปร่างเชิงปริมาตรถูกให้โดย

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{u}$$

(2.30c)

ในของไหลแบบ Newtonian ความเค้นเนื่องจากความหนืดเป็นส่วนสำคัญ โดยตรงกับอัตราของการเสียรูปร่างของของไหล ตามกฎที่ว่าด้วยความหนืดของนิวตันในปริภูมิ 3 มิติสำหรับของไหลที่อัดตัวได้นั้น การไหลจะมีความหนืดเชื่อมโยงอย่างแปรผันตามค่าพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ 1) ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดที่หนึ่ง (Dynamic viscosity),  $\mu$  ซึ่งจะเชื่อมโยงกับการเสียรูปเชิงเส้นของของไหล และ 2) ความหนืดที่สอง,  $\lambda$  ที่จะเชื่อมโยงกับการเสียรูปเชิงปริมาตร ดังนั้นเราจะมีองค์ประกอบย่อยของความเค้นอยู่ทั้งหมด 9 ตัว โดยมี 6 ตัวในนั้นไม่ขึ้นแก่กันหรือเรียกว่ามีระดับอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ 6

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

(2.31)

ภาพของความเค้นในส่วนที่สองนั้น ไม่ชัดเจนนัก เนื่องจากผลของมันในทางปฏิบัติมีไม่มากนักสำหรับก๊าซ การประมาณค่าที่ดีคือ  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  (Schlichting, 1979) และเนื่องจากเราสมมุติว่าของเหลวเป็นแบบที่อัดตัวไม่ได้ ซึ่งจากสมการอนุรักษ์มวลคือ  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$  ดังนั้นความเค้นหนืดจะเป็น 2 เท่าของอัตราการเสียรูปเชิงเส้น

แทนค่าความเค้นเฉือนข้างบน (2.31) ไปใน (2.14a - c) ทำให้ได้สมการซึ่งเรียกตามชื่อ Navier-Stokes ซึ่งเป็นนักวิทยาศาสตร์ในศตวรรษที่ 19 ที่ได้นิยามดังนี้

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{Mx} \end{aligned} \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{My} \end{aligned} \quad (2.32b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + S_{Mz} \quad (2.32c)$$

เราสามารถจัดเรียงเทอมของความเค้นหนืดใหม่ ดังข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &+ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{Mx} \end{aligned}$$

ความเค้นหนืดในสมการที่เป็นองค์ประกอบในทิศทาง  $y$  และ  $z$  สามารถจัดใหม่ในลักษณะเดียวกัน เราจะสร้างสมการโมเมนตัมอย่างง่าย โดยการช้อนเทอมของความเค้นหนืดในเทอมของการเพิ่มขึ้นของโมเมนตัม (source term) ดังนั้นจึงนิยามเทอมของการเพิ่มขึ้นของโมเมนตัมใหม่โดย

$$S_M = S_{Mx} + S_{My} \quad (2.33)$$

สมการ Navier-Stokes สามารถถูกเขียนในรูปแบบที่ใช้สำหรับการพัฒนาวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม ดังนี้

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{Mx} \quad (2.34a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{My} \quad (2.34b)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(2.34c)

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } \mathbf{u}) + S_{Mz}$$

ถ้าเราใช้แบบจำลอง Newtonian สำหรับความเค้นหนืดในสมการพลังงานภายใน (2.24) เราจะได้

(2.35)

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \text{div } \mathbf{u} + \text{div}(k \text{grad } T) + \Phi + S_i$$

ผลกระทบทั้งหมดเนื่องจากความเค้นหนืดในสมการพลังงานภายในนี้ สามารถเขียนได้ในเทอมของ ฟังก์ชันการสลายตัว (Dissipation function)  $\Phi$  ซึ่งหลังจากการปรับรูปแบบสมการ สามารถแสดงได้ ดังนี้

(2.36)

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\text{div } \mathbf{u})^2$$

การสลายตัวนี้เป็นค่าบวกเสมอเนื่องจากประกอบด้วยเทอมยกกำลังสอง และแทนถึงการก่อกำเนิดของพลังงานภายในอันเป็นผลมาจากการเสียดสีรูปทรงของชิ้นส่วนของไหล อีกนัยหนึ่งคือเป็นตัวลดทอนพลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหล และเปลี่ยนไปเป็นพลังงานภายในหรือความร้อนนั่นเอง

#### 2.4 รูปแบบอนุพันธ์สำหรับสมการควบคุมของการไหลของของไหล

ตารางที่ 2.1 แสดงสมการอนุพันธ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน ในรูปแบบของไดเวอร์เจนต์ เป็นสมการแบบ 3 มิติที่ขึ้นกับเวลา ของของไหล Newtonian ที่อัดตัวได้

##### ตารางที่ 2.1 สมการควบคุมการไหลของของไหลแบบนิวโทเนียนอัดตัวได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

---

|            |   |
|------------|---|
| มวล        | $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0$   |
| (2.4)      |   |
| โมเมนตัม x | $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx}$     |
| (2.37a)    |   |
| โมเมนตัม y | $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My}$     |
| (2.37b)    |   |
| โมเมนตัม z | $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w \vec{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{Mz}$     |
| (2.37c)    |   |
| สเกลลาร์   | $\frac{\partial(\rho \sigma)}{\partial t} + \text{div}(\rho \sigma \vec{u}) = -p \text{div } \vec{u} + \text{div}(k \text{grad } T) + \Phi + S_i$ |
| (2.38)     |   |
| สมการสถานะ | $p = p(\rho, T) \text{ and } i = i(\rho, T)$ (2.28)   |
|            | $p = \rho RT \text{ and } i = C_p T$ (2.29)   |

---

เทอมการก่อกำเนิดของโมเมนตัม  $S_M$  และฟังก์ชันการสลายตัว  $\phi$  แสดงใน 2.32 และ 2.36 ตามลำดับ เป็นที่น่าสนใจที่ว่าสมมุติฐานสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์ในหัวข้อ 2.2 ทำให้ได้สมการการไหล (PDEs) 5 สมการและสมการพีชคณิต 2 สมการรวมเป็น 7 สมการ ต่อมาเราใช้แนวคิดของของไหล Newtonian ซึ่งอธิบายความเค้นหนืดในเทอมของความแตกต่างขององค์ประกอบความเร็วต่อหน่วยความยาว เป็นผลให้เกิดตัวไม่รู้ค่า 7 ตัว จำนวนที่เท่ากันของสมการและตัวที่ไม่รู้ค่าของระบบนี้ สามารถถูกแก้ปัญหาได้ ด้วยเงื่อนไขที่ขอบและค่าเริ่มต้น (Boundary and Initial condition)

## 2.5 รูปแบบเชิงอนุพันธ์และอินทิเกรตสำหรับสมการการเคลื่อนย้ายแบบปกติ

จากตารางที่ 2.1 จะพบว่า มีโครงสร้างสมการหลายสมการที่มีความคล้ายคลึงกัน ถ้าเราพิจารณา  $\phi$  เป็นตัวแปรแสดงคุณสมบัติใดๆ ของของไหลแล้ว รูปแบบของสมการอนุพันธ์ที่ถูกสร้างขึ้นนั้นก็จะมีโครงสร้างคล้ายกับสมการข้างต้นเช่นกัน ทั้งนี้รวมทั้งสมการสำหรับปริมาณสเกลลาร์ เช่น อุณหภูมิและความเข้มข้นของสสาร สามารถเขียนในรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi\bar{u}) = \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) + S_\phi$$

(2.39)

หรืออธิบายได้ คือ

|   |  |   |  |   |
|---|--|---|--|---|
| อัตราการ<br>เพิ่ม $\phi$ ของ<br>ชิ้น ส่วน<br>ของไหล | การไหลสุทธิของ $\phi$<br>ที่ออกจากชิ้นส่วน<br>ของไหล | = | อัตราการเพิ่มขึ้น<br>ของ $\phi$ เนื่องจากการ<br>แพร่ | อัตราการเพิ่มขึ้น<br>ของ $\phi$ เนื่องจากการ<br>ก่อกำเนิด |
|---|--|---|--|---|

สมการ 2.39 ถูกเรียกว่าสมการการเคลื่อนย้ายของคุณสมบัติ  $\phi$  ซึ่งพบว่ามันสามารถอธิบายการเคลื่อนย้ายของปริมาณทางฟิสิกส์ที่แตกต่างกันได้ คือเทอมที่แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงและเทอมของการพาอยู่ด้านซ้ายมือของสมการ ส่วนเทอมของการแพร่ ( $\Gamma$  คือสัมประสิทธิ์การแพร่) และเทอมของ Source อยู่ขวามือตามลำดับ โดยได้ซ่อนเทอมซึ่งไม่เหมือนกันไว้ในเทอมของ Source นั้นเอง

สมการ 2.39 ถูกใช้เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับขั้นตอนการคำนวณในวิธีปริมาตรสืบเนื่องโดยกำหนด  $\phi$  เท่ากับ 1,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  และ  $i$  (หรือ  $T$  หรือ  $h_0$ ) และเลือกค่าที่เหมาะสมสำหรับสัมประสิทธิ์การแพร่  $\Gamma$  และ Source terms เราได้รูปแบบพิเศษของตารางที่ 2.1 ในสมการ Partial Differential Equations ทั้ง 5 ชุด ซึ่งประกอบด้วยสมการอนุรักษ์มวล โมเมนตัมและพลังงาน ทั้งนี้ขั้นตอนหลักของวิธีปริมาตรสืบเนื่อง (ซึ่งจะอธิบายอย่างรายละเอียดในบทที่ 4 ต่อไป) คือการอินทิเกรตสมการ 2.39 เหนือปริมาตรควบคุม CV 3 มิติซึ่งทำให้ได้

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi\bar{u}) dV = \int_{CV} \text{div}(\Gamma \text{grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV$$

(2.40)

การอินทิเกรตเชิงปริมาตรในเทอมที่สองด้านซ้ายมือ คือ เทอมการพา และในเทอมแรกทางขวามือคือเทอมของการแพร่ ถูกเขียนใหม่เป็นการอินทิเกรตเชิงพื้นผิวของปริมาตรควบคุมโดยใช้ทฤษฎี Gauss' divergence สำหรับเวกเตอร์  $\mathbf{x}$  ใดๆ ทฤษฎีนี้กล่าวว่า

$$\int_{\mathcal{V}} \text{div } \mathbf{a} \, dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \, dA$$

(2.41)

ความหมายทางฟิสิกส์ของ  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$  คือ องค์ประกอบย่อยของเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  ในทิศทางของเวกเตอร์  $\mathbf{n}$  ตั้งฉากต่อพื้นผิวของชิ้นส่วน  $dA$  ฉะนั้นการอินทิเกรตของ divergence ของเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  เหนือปริมาตร จะเท่ากับ องค์ประกอบย่อยของเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  ในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวตลอดทั้งขอบเขตของปริมาตรรวม (Integrated) ซึ่งก็คืออาณาบริเวณของพื้นผิว  $A$  ทั้งหมด การประยุกต์ทฤษฎี Gauss' divergence (สมการที่ 2.40) จะทำให้สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\mathcal{V}} \rho \phi \, dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) \, dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi) \, dA + \int_{\mathcal{V}} S_{\phi} \, dV$$

(2.42)

ลำดับขั้นของการอินทิเกรตและการอนุพันธ์ ได้ถูกเปลี่ยนแปลงในเทอมแรกของการย้ายมือของสมการ (2.42) เพื่อแสดงให้เห็นความหมายทางฟิสิกส์ เทอมนี้มีนัยถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงทั้งหมดของคุณสมบัติ  $\phi$  ในปริมาตรควบคุม ผลคูณ  $\rho \phi \mathbf{u}$  หมายถึงฟลักซ์ขององค์ประกอบของคุณสมบัติ  $\phi$  เนื่องจากการไหลของของไหลในทิศทางของเวกเตอร์ตั้งฉาก  $\mathbf{n}$  ซึ่งก็คือออกจากพื้นผิวของชิ้นส่วนของไหล ดังนั้น เทอมที่สองด้านซ้ายมือของสมการ 2.42 หรือเทอมการพา เป็นอัตราการลดลงสุทธิของคุณสมบัติของไหล  $\phi$  ของชิ้นส่วนของไหลเนื่องจากการพา

ฟลักซ์การแพร่เป็นบวกในทิศทางของการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยความยาวของคุณสมบัติของไหล  $\phi$  ที่มีค่าลบ เช่น ตลอดแนวทิศทาง  $-\text{grad } \phi$  สำหรับตัวอย่างนี้ ความร้อนถูกนำหรือแพร่ไปในทิศทางของการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิต่อหน่วยความยาว (หรือเรียกว่า เกรเดียน) ที่เป็นลบ ดังนั้นผลคูณของ  $\mathbf{n} \cdot (-\Gamma \text{grad } \phi)$  คือองค์ประกอบของฟลักซ์การแพร่ในทิศทางของเวกเตอร์ตั้งฉากที่ทิศพุ่งออกไปจากพื้นผิวของชิ้นส่วนของไหล ในทำนองเดียวกันกับผลคูณ  $\mathbf{n} \cdot (\Gamma \text{grad } \phi)$  ซึ่งเท่ากับ  $-\mathbf{n} \cdot (-\Gamma \text{grad } \phi)$  ซึ่งก็คือ ฟลักซ์การแพร่ที่มีค่าบวก มีทิศตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ตั้งฉากหรือเข้าไปในชิ้นส่วนย่อยนั่นเอง เทอมแรกทางขวามือของ 2.4.2 คือเทอมการแพร่ ดังนั้นจะสอดคล้องกับฟลักซ์ที่ไหลเข้าไปในชิ้นส่วนและแทนอัตราการเพิ่มสุทธิของคุณสมบัติ  $\phi$  ของชิ้นส่วนของไหลเนื่องจากการแพร่ เทอมสุดท้ายทางขวามือของสมการนี้ได้ให้อัตราการเพิ่มของคุณสมบัติ  $\phi$  ที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากผลของ Sources ภายในชิ้นส่วนไหล

ในทำนองเดียวกัน ความสัมพันธ์ 2.4.2 ของของไหลในปริมาตรควบคุมสามารถอธิบายได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราการเพิ่ม  $\phi$  + อัตราลดลงสุทธิของ  $\phi$  เนื่องจากการพาที่คร่อมผ่านขอบเขต = อัตราการเพิ่มขึ้นของ  $\phi$  เนื่องจากการแพร่ + อัตราการสร้างสุทธิของ  $\phi$

การอธิบายนี้ยืนยันได้ว่าการอินทิเกรตของสมการ Partial Differential ยังคงสภาพของการอนุรักษ์ปริมาณทางฟิสิกส์ของของไหล แม้ในระดับปริมาตรควบคุมที่มีขนาดจำกัด (Macroscopic)

ในปัญหาสภาวะคงตัว (Steady State) อัตราของเทอมที่เปลี่ยนแปลงของ (2.42) เท่ากับศูนย์ สิ่งนี้นำไปสู่รูปแบบอินทิเกรตของสมการการเคลื่อนที่แบบสภาวะคงตัว

$$\int_A n_i (\rho \phi_i) dA = \int_A n_i (T_i \text{grad } \phi) dA + \int_{cv} S_\phi dV \quad (2.43)$$

ในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเวลา จำเป็นต้องอินทิเกรตเทียบกับเวลา  $t$  ในช่วงเวลาน้อยๆ  $\Delta t$  จาก  $t$  จนกระทั่งถึง  $t + \Delta t$  ทำให้ได้รูปแบบอินทิเกรตทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่คือ

$$\int_{cv} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dV = \int_{\Delta t A} n_i (\rho \phi_i) dA dt = \int_{\Delta t A} n_i (T_i \text{grad } \phi) dA dt + \int_{\Delta t cv} S_\phi dV dt \quad (2.44)$$

## 2.6 การแบ่งจำพวกของพฤติกรรมทางฟิสิกส์

หลังจากที่ได้เรียนรู้สมการอนุรักษ์ของของไหล ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงลักษณะของเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ครบถ้วนในการกำหนดการไหลของของไหล เริ่มแรกเราจำแนกพฤติกรรมฟิสิกส์ออกเป็น 2 กลุ่มคือ

1. Equilibrium problems
2. Marching problems

### Equilibrium problems

ปัญหาในกลุ่มแรกคือสถานการณ์ของสภาวะคงตัว (Steady state) เช่น การกระจายอุณหภูมิที่สภาวะคงตัวในวัสดุที่เป็นแท่งของแข็ง (Rod) การกระจายความเค้นที่สภาวะสมดุลภายใต้ภาระที่

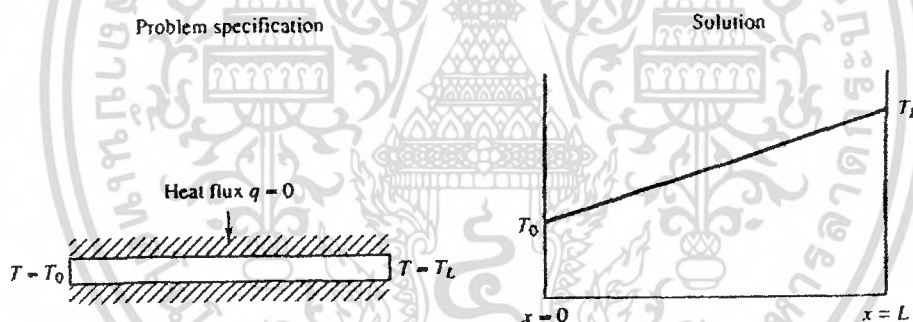
กำหนด หรือ การไหลของไหลในสภาวะคงตัว ในลักษณะต่างๆ เป็นต้น มีปัญหาสภาวะคงตัวจำนวนมากอธิบายได้ โดยสมการ elliptic equations สมการต้นแบบคือสมการลาปลาซ (Laplace's Equations) ซึ่งอธิบายการไหลแบบ irrotational และอัดตัวไม่ได้ และอธิบายการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อนที่สภาวะคงตัว ในสองมิติได้ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

(2.45)

ตัวอย่างง่ายที่สุดของปัญหาสมการคือ การถ่ายเทความร้อนแบบสภาวะคงตัว (ที่ซึ่ง  $\phi = T$  ในสมการ 2.45) ในก้านโลหะหุ้มฉนวนโดยรอบ ขณะที่ปลายของมันเป็นคือที่  $x = 0$  และ  $x = L$  มีการรักษาอุณหภูมิคงที่ไว้แต่มีค่าไม่เท่ากัน โดยมีอุณหภูมิ  $T_0$  และ  $T_L$  ตามลำดับ (รูปที่ 2.6)

ปัญหานี้เป็นแบบ 1 มิติ และถูกควบคุมโดยสมการ  $k \frac{d^2 T}{dx^2} = 0$  ภายใต้เงื่อนไขที่ขอบที่ทำให้การกระจายอุณหภูมิในทิศทาง  $x$



รูปที่ 2.6 การกระจายอุณหภูมิอย่างสภาวะคงที่บนก้านวัสดุแข็งที่หุ้มฉนวน

แน่นอนซึ่งเป็นลักษณะเชิงเส้น คำตอบของปัญหานี้และปัญหาแบบ Elliptic ทั้งหมดหาได้ โดยกำหนดเงื่อนไขตัวแปรตาม (ในที่นี้คือ อุณหภูมิ และการอนุพันธ์ของมัน, ฟลักซ์ความร้อน) บนขอบเขตทั้งหมดของบริเวณคำตอบ ปัญหานี้ต้องการข้อมูลบนขอบเขตทั้งหมดซึ่งถูกเรียกว่า ปัญหาค่าขอบ (boundary-value problem) คุณลักษณะเด่นที่สำคัญของปัญหาแบบ Elliptic คือ เมื่อเกิดการรบกวนภายในคำตอบสำหรับตัวอย่างเช่น การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเนื่องจากการเกิดแหล่งความร้อนที่ตำแหน่งใดๆ มันจะส่งผลให้มีการเปลี่ยนแปลงคำตอบทุกที่ในขอบเขต

กล่าวได้ว่าสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงจะเกิดการรบกวน โดยเดินทางในทุกทิศทางตลอดภายในคำตอบ เพราะฉะนั้นคำตอบของปัญหาทางฟิสิกส์ถูกอธิบายโดยสมการ Elliptic จะมีความ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ใช้เห็นเว็บไซต์นี้ กรุณาแจ้งให้เราทราบทันที หากพบการละเมิดลิขสิทธิ์ใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ราบเรียบ ถึงแม้ว่าเงื่อนไขที่ขอบจะไม่ต่อเนื่องก็ตาม ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นข้อที่ตีต่อกรอกแบบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อให้แน่ใจว่าข้อมูลได้แพร่ในทุกทิศทาง เทคนิคเชิงตัวเลขสำหรับปัญหา Elliptic จำเป็นต้องให้ผลเฉลยที่แต่ละจุดใดๆ ได้รับอิทธิพลจากผลเฉลยที่ตำแหน่งรอบๆ จุดใดๆ นั้นนั่นเอง

### Marching problems

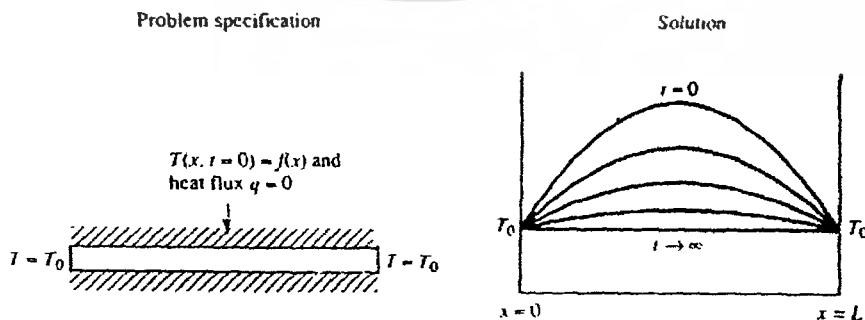
การถ่ายเทความร้อนในสภาวะไม่คงตัว การไหลที่สภาวะไม่คงตัว และปรากฏการณ์ของคลื่นเป็นตัวอย่างของปัญหาในกลุ่มนี้ ปัญหาแบบ Marching หรือ Propagation นี้ถูกอธิบายโดยสมการพาราโบลิก (Parabolic) หรือไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic) อย่างไรก็ตามไม่ใช่ปัญหา Marching ทั้งหมดจะเป็นแบบไม่คงตัว ซึ่งเราจะเห็นต่อไปว่าการไหลแบบคงตัวบางแบบ ถูกอธิบายโดยสมการพาราโบลิก หรือไฮเปอร์โบลิก ในกรณีเหล่านี้ทิศทางการไหลมีบทบาทในเชิงโครงสร้างคล้ายกับเวลา (time-like co-ordinate along) ซึ่งทำให้เกิดรูปแบบ marching

สมการพาราโบลิก อธิบายปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลาหรือปัญหาไม่คงตัวนั่นเอง โดยมีอิทธิพลของการแพร่กระจายเข้ามาเกี่ยวข้องกับพฤติกรรมการไหลอย่างมีนัยสำคัญ ตัวอย่างเช่น การไหลของของไหลที่มีความหนืดแบบไม่คงตัว และการนำความร้อนแบบไม่คงตัว สมการพาราโบลิกค้นพบคือสมการการแพร่

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

(2.46)

ตัวอย่างปัญหาที่อธิบายได้โดยสมการการแพร่ เช่น การกระจายอุณหภูมิ ( $\phi = T$ ) แบบไม่คงตัวในโลหะที่หุ้มฉนวนโดยรอบตรงปลายที่  $x = 0$  และ  $x = L$  ถูกรักษาอุณหภูมิให้คงที่ และเท่ากับอุณหภูมิ  $T_0$  ในทางปฏิบัติ ปัญหานี้จะเกิดขึ้นเมื่อก้อนโลหะดังกล่าว มีแหล่งกำเนิดความร้อนที่สม่ำเสมอ ซึ่งทำให้เกิดการกระจายอุณหภูมิแบบพาราโบลาร์ขึ้น มีค่าอุณหภูมิสูงสุดที่  $x = L/2$  ต่อมาที่เวลา  $t = 0$  แหล่งกำเนิดความร้อนถูกปิด (รูปที่ 2.7)



รูปที่ 2.7 การกระจายอุณหภูมิอย่างสภาวะไม่คงที่บนก้อนวัสดุแข็งที่หุ้มฉนวน

ที่สภาวะคงตัว  $t \rightarrow \infty$  การกระจายอุณหภูมิ  $T$  จะเท่ากับ  $T_0$  ตลอดทั้งแท่ง ลักษณะของคำตอบของสมการ (2.46) เป็นการถดถอยของอุณหภูมิแบบ exponential ปัญหาแบบนี้ต้องมีทั้งเงื่อนไขที่ขอบเขตและค่าของอุณหภูมิในทุกจุดที่เวลาเริ่มต้น แบบของปัญหานี้เรียกว่า Initial-Boundary-Value Problem

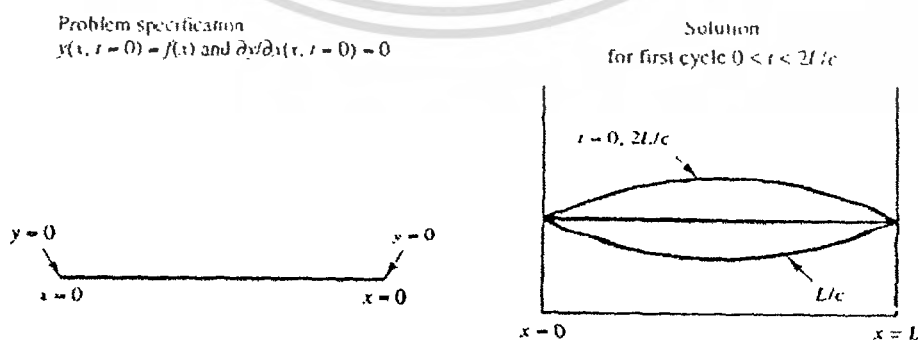
การเกิดการรบกวนค่าที่จุดใดๆ ในขอบเขตของคำตอบ (เช่น  $0 < x < L$  ที่เวลา  $t_1 > 0$ ) จะก่อให้เกิดผลเปลี่ยนแปลงต่อคำตอบที่เวลาต่อมา  $t > t_1$  เท่านั้น ไม่ส่งผลต่อคำตอบที่เวลาก่อน  $t_1$  อิทธิพลของการแพร่จะส่งผลให้มีการกระจายอุณหภูมิที่เวลา  $t > 0$  อย่างต่อเนื่อง ถึงแม้จะมีการกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นอย่างไม่ต่อเนื่องก็ตาม

ที่สภาวะคงตัว  $t \rightarrow \infty$  สมการจะถูกลดรูปโดยการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นศูนย์ คือ  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  สมการที่ (2.46) ก็คือสมการที่อธิบายการกระจายอุณหภูมิแบบคงตัวนั่นเอง

สมการไฮเปอร์โบลิก มีอิทธิพลต่อการวิเคราะห์ปัญหาการสั่น โดยทั่วไปมันจะปรากฏในกระบวนการที่ขึ้นอยู่กับการสั่น และอิทธิพลของการแพร่กระจายมีผลน้อย ต้นแบบของสมการไฮเปอร์โบลิกคือสมการคลื่น

$$(2.47) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

รูปแบบข้างต้นของสมการอธิบายระยะเคลื่อนตัวในแนวขวาง ( $\phi = y$ ) ของเส้นเชือกภายใต้การดึง และมีการสั่นเล็กน้อย รวมทั้งการสั่นทำให้เกิดเสียง ค่าคงที่  $c$  คือความเร็วคลื่น การหาคำตอบของสมการนี้ก็ได้ในลักษณะเดียวกัน โดยจะได้เป็นระยะเบี่ยงเบนของเส้นเชือกของตำแหน่งต่างๆ ที่เวลาต่างๆ ของเส้นลวดที่มีความยาว  $L$  โดยใช้ (2.47)



รูปที่ 2.8 การสั่นของสปริงภายใต้แรงดึง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำตอบของสมการคลื่น (2.47) และสมการไฮเปอร์โบลิกทั่วไป สามารถหาได้โดยกำหนดเงื่อนไข 2 แบบ คือค่าระยะเบี่ยงเบนของเส้นลวดที่ขอบเขตของปัญหาสองค่ากับระยะเบี่ยงเบนของเส้นลวดภายในทั้งหมดที่สถานะเริ่มต้น ดังนั้นปัญหาไฮเปอร์โบลิกคือ Initial-boundary-value problem ด้วยเช่นกัน

ถ้าแอมพลิจูดเริ่มต้นถูกให้โดย  $a$  คำตอบของปัญหานี้คือ

$$y(x, t) = a \cos\left(\frac{\pi x t}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

แสดงให้เห็นว่าแอมพลิจูดการสั่นยังคงที่เมื่อเวลาผ่านไป แสดงให้เห็นว่ายังไม่มี damping ในระบบภาวะดังกล่าวมีผลอย่างสำคัญ เพราะหากเราลองพิจารณาการสั่นที่มีสถานะเริ่มต้นที่เป็นฟังก์ชันที่เกือบจะเป็นสามเหลี่ยม โดยที่มุมของสามเหลี่ยมสามารถมองได้ว่าเป็นส่วนของวงกลมที่มีรัศมีเล็กมากๆ (เหมือนการทำ fillet ในการลบมุมโดยให้รัศมีมีค่าน้อยมากๆ) ที่มุมนี้เรียกได้ว่าเกิดความไม่ต่อเนื่องขึ้น ทั้งนี้ฟังก์ชันค่าเริ่มต้นนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูรีเยร์ได้ และเนื่องจากอนุกรมนี้เป็นการรวมกันของเทอมย่อยที่เป็นฟังก์ชัน sine ซึ่งเป็น periodic function มีรูปแบบแน่นอนไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้นภาวะไม่ต่อเนื่องของคำตอบที่เวลา  $t$  ใดๆ ยังคงอยู่ ซึ่งก็เป็นเพราะไม่มี damping ที่เป็นกลไกที่ทำให้เกิดการกระจายความไม่ต่อเนื่องนั้นนั่นเอง

การไหลของไหลแบบที่ความเร็วใกล้ความเร็วเสียงและสูงกว่านั้น จะเกิดคลื่นกระแทก (Shock wave) และรูปแบบของสมการการไหลก็มีลักษณะเป็น ไฮเปอร์โบลิก ที่ย่านความเร็วนี้การสร้างระเบียบวิธีในการคำนวณก็ถูกออกแบบเพื่อรองรับปรากฏการณ์ดังกล่าว กล่าวคือจะอนุญาตให้มี ความไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้นในโดเมนของการไหล

ในลักษณะการไหลดังกล่าวนี้หากมีการรบกวนเกิดขึ้นในระบบ ผลของมันจะแพร่กระจายไปในโดเมนที่บริเวณใดบริเวณหนึ่งเท่านั้น อัตราการแพร่กระจายของสิ่งรบกวนนั้นเท่ากับความเร็วของคลื่น  $c$  ในขณะที่ปัญหาแบบ Parabolic และแบบ Elliptic จะมีอัตราการแพร่กระจายเป็นอนันต์

## 2.7 ลักษณะเฉพาะในสมการไฮเปอร์โบลิก

สมการไฮเปอร์โบลิกมีพฤติกรรมที่ค่อนข้างพิเศษ กล่าวคือมันจะมีความเกี่ยวข้องกับความเร็วของการแพร่กระจาย หรือที่เรียกอีกนัยหนึ่งคือความเร็วของคลื่น ที่ทำให้สมการไฮเปอร์โบลิกมีความแตกต่างกับสมการที่กล่าวมาทั้งสองแบบข้างต้น เพื่อที่จะให้มองเห็นภาพที่ชัดเจนขึ้น เรา มาลองพิจารณาปัญหาอย่างง่ายคือปัญหาของคลื่น (2.47) จากการพิสูจน์ (Open University, 1984)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การเปลี่ยนแปลงตัวแปร ไปเป็น  $\zeta = x - ct$  และ  $\eta = x + ct$  จะทำให้สมการอนุพันธ์ 2.47 เปลี่ยนรูปไปเป็นแบบมาตรฐาน ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (2.48)$$

การแปลงรูปข้างบนนี้เกิดขึ้นได้ เมื่อประยุกต์กฎลูกโซ่โดยแสดงสมการ 2.47 ในรูปของตัวแปรคู่ใหม่นี้ สมการ 2.48 นี้สามารถหาคำตอบได้อย่างง่ายดาย ซึ่งคำตอบของสมการอนุพันธ์ 2.48 นี้คือ  $\phi(\zeta, \eta) = F_1(\zeta) + F_2(\eta)$  โดยที่  $F_1$  กับ  $F_2$  เป็นฟังก์ชันใดๆ ก็ได้

นั่นคือฟังก์ชันคำตอบของสมการอนุพันธ์สามารถแสดงในรูปของตัวแปรเริ่มต้น  $x, t$  ซึ่งทำให้ได้คำตอบรูปทั่วไปของสมการ (2.47) คือ

$$\phi(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \quad (2.49)$$

ส่วนประกอบแรกของฟังก์ชันคำตอบคือ ฟังก์ชัน  $F_1$  จะเป็นค่าคงที่ ถ้าผลของ  $x - ct$  คงที่ และ ดังนั้น  $F_1$  จึงคงที่ตลอดแนวเส้นตรงที่มีความชัน  $\frac{dt}{dx} = 1/c$  ในระนาบ  $x - t$  ส่วนประกอบที่สองคือ ฟังก์ชัน  $F_2$  จะเป็นค่าคงที่ ถ้า  $x + ct$  คงที่ ดังนั้น  $F_2$  จึงคงที่ตลอดแนวของความชัน  $\frac{dt}{dx} = -1/c$  เส้นตรง 2 เส้น ที่  $x - ct = \text{ค่าคงที่}$  และ  $x + ct = \text{ค่าคงที่}$  เหล่านี้เรียกว่าเส้นลักษณะเฉพาะตัว Characteristics ของสมการไฮเปอร์โบลิก ฟังก์ชัน  $F_1$  และ  $F_2$  เราเรียกว่าคำตอบของสมการคลื่นอย่างง่าย (Simple wave solution) เป็นการแสดงว่าคลื่นมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $c$  และ  $-c$  โดยไม่มีการเปลี่ยนรูปร่างหรือขนาดแอมพลิจูด

รูปจำเพาะของฟังก์ชัน  $F_1$  และ  $F_2$  สามารถหาได้โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและขอบเขตของข้อมูล เช่น หากเราพิจารณาเส้นเชือกที่ยาวมากเส้นหนึ่ง ( $-\infty < x < \infty$ ) และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\phi(x, 0) = f(x) \quad \text{and} \quad \partial \phi / \partial t(x, 0) = g(x) \quad (2.50)$$

รวมสมการ (2.49) และ (2.50) เราได้

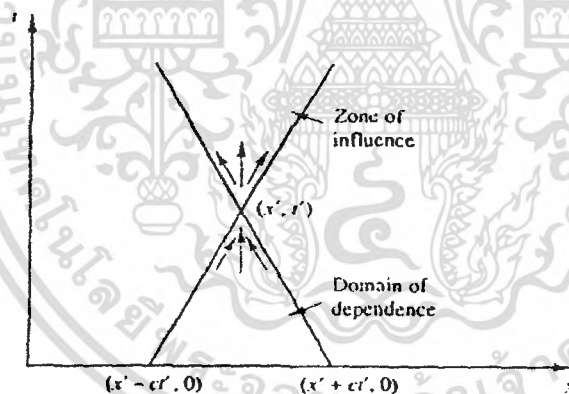
$$F_1(x) + F_2(x) = f(x) \quad \text{and} \quad -cF_1'(x) + cF_2'(x) = g(x) \quad (2.51)$$

คำตอบเฉพาะของสมการคลื่น (2.47) ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น (2.50) ถูกให้โดย Bland, 1988 ดังนี้

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2.52)$$

พิจารณาฟังก์ชัน 2.52 ให้คิดจะพบว่าค่า  $\phi$  ที่จุด  $(x, t)$  ใดๆ ในขอบเขตของปัญหาที่สนใจ จะขึ้นกับเพียงเงื่อนไขเริ่มต้นที่อยู่ในช่วงระหว่างเส้น  $x-ct = \text{constant}$  กับ  $x+ct = \text{constant}$  เท่านั้น และไม่ขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้นนอกช่วงนี้

รูป 2.9 นี้พยายามที่จะแสดงประเด็นที่กล่าวไว้ข้างบน สมมติว่าเส้นตรง 2 เส้นนี้ ตัดกันที่  $(x', t')$  และ ตัดกับแกน  $x$  ที่  $(x'-ct', 0)$  และ  $(x'+ct', 0)$  บริเวณที่อยู่ภายในโดม เรียกว่า Domain of dependence ซึ่งฟังก์ชันคำตอบขึ้นอยู่กับพิกัดในบริเวณนี้



รูปที่ 2.9 Domain of dependence และ Zone of Influence สำหรับปัญหาแบบไฮเปอร์โบลิก

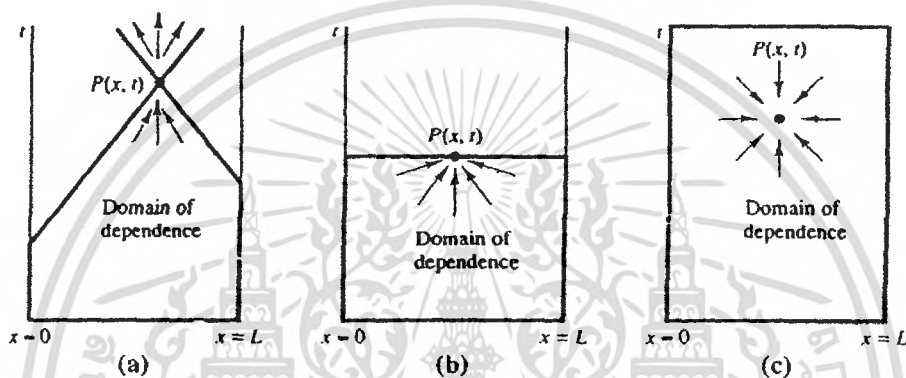
จากสูตร 2.52 คำตอบที่  $(x', t')$  ได้รับอิทธิพลจากสิ่งรบกวนที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่ง  $x$  ณ เวลา  $t$  ที่อยู่ใน Domain of dependence เท่านั้น ทั้งนี้เนื่องจากการที่คลื่นมีความเร็วที่จำกัดนั่นเอง (เท่ากับความเร็วคลื่น  $c$ ) ในทำนองเดียวกัน ความเปลี่ยนแปลงหรือการรบกวนที่เกิดขึ้นที่พิกัด  $(x', t')$  จะมีอิทธิพลต่อ คำตอบ ที่  $x$  ณ เวลา  $t$  ที่อยู่ใน Zone of Influence ดังแสดงในรูป 2.9 ซึ่งอยู่ในขอบเขตภายในเส้นตรง 2 เส้นนี้เช่นกัน

รูปที่ 2.10 a. แสดงถึงลักษณะสำหรับการตั้งของเชือกซึ่งยึดไว้ที่  $x=0$  และ  $x=L$  สำหรับจุดพิกัดใดๆ ที่ใกล้กับแกน  $x$  นั้น Domain of dependence อยู่ภายในขอบเขตที่ถูกรอไว้โดยเส้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ผู้ใดเห็นไปใช้ประโยชน์ในการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Characteristics ทั้งสองเส้นนั้น ที่จุด  $P(x, t)$  เป็นจุดที่เส้น Characteristics ทั้งสอง ตัดกันทำให้  $x-ct = \text{const.}$  และ  $x+ct = \text{const.}$  พร้อมกันนั่นเอง Domain of dependence ของจุด  $P$  จำกัดอยู่ในเส้น characteristic 2 เส้นนี้ และ เส้น  $t=0, x=0$  และ  $x=L$

ลักษณะของ Domain of dependence (ดูรูป 2.10b and c) ในปัญหาแบบ Parabolic และแบบ Elliptic จะแตกต่างไปจากนี้ เนื่องจากอัตราการแผ่ของข้อมูลหรือคลื่นเป็นอนันต์ เส้นขอบที่หนาแสดงให้เห็นขอบเขตระหว่าง Domain of dependence และเงื่อนไขค่าขอบที่จำเป็นที่จะทำให้สามารถหาคำตอบในรูปแบบของสมการแต่ละชนิด



รูปที่ 2.10 ขอบเขตของความอิสระสำหรับปัญหา (a) ไฮเปอร์โบลิก (b) พาราโบลิก และ(c) วงรี

ลักษณะที่การเปลี่ยนแปลงที่จุดหนึ่งจะมีผลกระทบต่อจุดอื่นอย่างไรนั้น ขึ้นอยู่กับว่าปัญหานั้น เป็นปัญหาแบบคงตัว หรือแบบขึ้นกับเวลา และยังขึ้นกับอัตราการแผ่ขยายของสัญญาณรบกวนว่าเป็นแบบอนันต์หรือไม่ ทำให้เราสามารถจัดกลุ่มของปัญหาและสมการอนุพันธ์ที่อธิบายปัญหาเหล่านั้นได้ ไปในแต่ละแบบ คือ วงรี (elliptic) พาราโบลิก (parabola) และไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic) สรุปลักษณะหลักซึ่งให้ไว้ในตาราง 2.2

ตาราง 2.2 การจำแนกชนิดของพฤติกรรมทางฟิสิกส์

| ชนิดของปัญหา                      | ชนิดของสมการ | สมการต้นแบบ  | เงื่อนไข              | โดเมนของคำตอบ | ความต่อเนื่องของคำตอบ |
|-----------------------------------|--------------|--|-----------------------|---------------|-----------------------|
| ปัญหาชนิดที่มีความสมดุล           | Elliptic     | $\text{div grad } \phi = 0$  | ค่าขอบ                | แบบปิด        | ต่อเนื่องเสมอ         |
| ปัญหาไม่คงตัวและมีอัตราการแผ่ขยาย | Parabolic    | $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \text{ div grad } \phi$ | ค่าขอบ<br>ค่าเริ่มต้น | แบบเปิด       | ต่อเนื่องเสมอ         |

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

|  |            |  |                       |         |           |
|--|------------|--|-----------------------|---------|-----------|
| เป็นอนันต์   |            |  |                       |         |           |
| ปัญหาไม่คง<br>ตัวและมีอัตรา<br>การแผ่ขยาย<br>ไม่เป็นอนันต์ | Hyperbolic | $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi$ | ค่าขอบ<br>ค่าเริ่มต้น | แบบเปิด | ไม่จำเป็น |

## 2.8 วิธีการแบ่งจำพวก สำหรับสมการอนุพันธ์ย่อยแบบง่าย

ในทางปฏิบัติการแบ่งจำพวก PDEs อันดับสอง สามารถทำได้โดยพิจารณารูปทั่วไปของสมการในระบบพิกัดสองมิติ  $x$  และ  $y$  ข้างล่างนี้

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0$$

(2.53)

ในขั้นแรกเราจะสมมุติว่าสมการเป็นเชิงเส้นและ  $a, b, c, d, e, f, g$  คือค่าคงที่ การจำแนกชนิดของสมการเหล่านี้กำหนดโดยพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด ซึ่งในกรณีนี้คืออนุพันธ์อันดับที่สอง ทำการแทนค่าคำตอบด้วยสมการคลื่นอย่างง่ายเข้าไปในสมการ 2.53 หากผลเฉลยเป็นจริงนั้นหมายถึงสมการนั้นคือสมการไฮเปอร์โบลิก มิฉะนั้นแล้วสมการดังกล่าวจะเป็นสมการพาราโบลิกหรืออิลลิปติกนั่นเอง

คำตอบของคลื่นแบบง่ายจะเกิดขึ้น ถ้าสมการของคุณลักษณะจำเพาะ 2.54 ดังข้างล่างมีรากคำตอบที่แท้จริง 2 ค่า

$$a \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - b \left( \frac{dy}{dx} \right) + c = 0$$

(2.54)

ตาราง 2.3 ชนิดของสมการอนุพันธ์อันดับสองแบบเชิงเส้น

| $b^2 - 4ac$ | ชนิดของสมการ | ลักษณะจำเพาะ          |
|-------------|--------------|-----------------------|
| $> 0$       | ไฮเปอร์โบลิก | คำตอบที่แท้จริง 2 ค่า |
| $= 0$       | พาราโบลิก    | คำตอบที่แท้จริง 1 ค่า |
| $< 0$       | อิลลิปติก    | ไม่มีคำตอบที่แท้จริง  |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากคำตอบของสมการคุณลักษณะที่เกิดขึ้น ขึ้นอยู่กับค่าของ  $(b^2 - 4ac)$  ตามตาราง 2.3 แสดงให้เห็นว่าจะเกิดขึ้น 3 กรณี

วิธีการจำแนกสมการดังที่แสดงไว้ในตาราง 2.3 สามารถนำไปใช้ได้ในกรณีที่  $a, b$  และ  $c$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $y$  หรือแม้แต่จะเป็นสมการไม่เชิงเส้นก็ตาม ซึ่งในกรณีที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้นค่า  $a, b, c$  อาจเป็นฟังก์ชันของตัวแปรตาม  $\phi$  หรือค่าอนุพันธ์ลำดับแรกของมัน นั่นหมายถึงว่าชนิดของสมการอนุพันธ์อาจแตกต่างกันตามบริเวณของโดเมน ดังแสดงในตัวอย่างสมการข้างล่างนี้

$$y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

(2.55)

หากเราพิจารณาพฤติกรรมในช่วง  $-1 < y < 1$  ดังนั้น  $a = a(x,y) = y, b=0, c=1$  ค่าของ  $(b^2 - 4ac)$  จะเท่ากับ  $-4y$  เราจำเป็นต้องให้ทั้ง 3 กรณีต่างกันไป

ถ้า  $y < 0 : (b^2 - 4ac) > 0$       ดังนั้นสมการคือ ไฮเปอร์โบลิก

ถ้า  $y < 0 : (b^2 - 4ac) = 0$       ดังนั้นสมการคือ พาราโบลิก

ถ้า  $y < 0 : (b^2 - 4ac) < 0$       ดังนั้นสมการคือ อิลิปติก

สมการ (2.55) คือแบบผสม กล่าวคือเป็นสมการไฮเปอร์โบลิก พาราโบลิก หรืออิลิปติก ขึ้นอยู่กับค่าของ  $y$  สำหรับกรณีของความไม่เป็นเชิงเส้น เราสามารถใช้แนวคิดคล้ายกับที่แสดงไว้ข้างต้นได้ ดังนั้น ชนิดของสมการอนุพันธ์ย่อยสามารถจำแนกได้ตามค่า  $a, b, c$  ที่จุดหนึ่งในโดเมน

สำหรับสมการ PDEs อันดับ 2 ที่มีตัวแปรอิสระ  $N$  ตัว  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$  สามารถถูกจำแนกโดยเขียนให้อยู่ในรูปแบบข้างล่างนี้ โดยให้  $A_{jk} = A_{kj}$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0$$

(2.56)

Fletcher (1991) อธิบายว่าสมการสามารถจำแนกได้โดยใช้ค่าไอเกนของเมทริกซ์ที่มีสมาชิก  $A_{jk}$  ดังนั้น เราจำเป็นต้องหาค่า  $\lambda$  ที่ทำให้

$$\det [A_{jk} - \lambda I] = 0$$

(2.57)

ในกรณีเช่นนี้ กฎการจำแนกจำพวกคือ

1. ถ้าค่าไอเกนของเมทริกซ์ เท่ากับ 0 สมการคือ พาราโบลิก
2. ถ้าค่าไอเกนของเมทริกซ์ ไม่เท่ากับ 0 และสมาชิกของค่าไอเกนมีเครื่องหมายเดียวกัน สมการจะเป็นอิลิปติก
3. ถ้าค่าไอเกนของเมทริกซ์ ไม่เท่ากับ 0 และสมาชิกของค่าไอเกนตัวใดตัวหนึ่งมี

เครื่องหมาย

แตกต่างจากพวกแล้ว สมการนั้นจะเป็นไฮเปอร์โบลิก

สำหรับสมการลาปลาซ สมการการแพร่และสมการคลื่น เมื่อพิสูจน์โดยกระบวนการวิธีดังกล่าวข้างต้นแล้วจะให้ผลเหมือนกับคำตอบของสมการ 2.54

## 2.9 การแบ่งชนิดของสมการการไหลของของไหล

ระบบ PDEs อันดับ 1 ที่มีตัวแปรอิสระมากกว่าสองตัว สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกได้ การจำแนกชนิดต้องใช้การหาค่าไอเกนดังที่กล่าวมาในหัวข้อที่แล้ว ระบบสมการอาจจะมาในรูปแบบผสมระหว่างสมการอันดับ 1 และอันดับ 2 ซึ่งสามารถหาค่าไอเกนได้เช่นกัน โดยมีตัวแปรช่วยที่แสดงความสัมพันธ์ของสมการอันดับ 2 ในรูปของสมการอันดับ 1 ข้อควรระวังมีเพียงว่าต้องเลือกตัวแปรช่วยที่ทำให้เมทริกเป็น non singular

สมการ Navier-Stokes และสมการลดรูปของมัน สามารถถูกจำแนกโดยใช้วิธีเมทริกข้างต้นได้เช่นกันดังแสดงในตาราง 2.4 (Fetcher, 1991)

ตาราง 2.4 การจำแนกชนิดของพฤติกรรมกรไหล

|                        | การไหลแบบคงตัว       | การไหลแบบไม่คงตัว |
|------------------------|----------------------|-------------------|
| การไหลแบบมีความหนืด    | อิลิปติก             | พาราโบลิก         |
| การไหลแบบไม่มีความหนืด | $M < 1$ อิลิปติก     | ไฮเปอร์โบลิก      |
|                        | $M > 1$ ไฮเปอร์โบลิก | ไฮเปอร์โบลิก      |
| การไหลชั้นผิวบาง       | พาราโบลิก            | พาราโบลิก         |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การจำแนกชนิดในตาราง 2.4 เป็นการจำแนกชนิดอย่างคร่าวๆ ของการไหล ในความเป็นจริงแล้วการไหลมีพฤติกรรมที่ซับซ้อน

สำหรับการไหลแบบไม่มีความหนืดนั้นจะแตกต่างจากการไหลที่อธิบายด้วยสมการ Navier-Stokes และสมการพลังงาน เนื่องจากไม่มีความหนืดซึ่งเป็นเทอมที่มีอันดับอนุพันธ์ที่สูง คือเป็นอนุพันธ์อันดับสองของความเร็ว การจำแนกชนิดของสมการขึ้นอยู่กับลักษณะการอัดตัวได้ และค่ามัคคัมเบอร์  $M$  พฤติกรรมของของไหลแบบไม่หนืดที่เป็นแบบอิลิปติก เมื่อการไหลมีค่ามัคคัมเบอร์ต่ำกว่าหนึ่งจะเกิดขึ้นเนื่องจากความดัน ถ้ามัคคัมเบอร์น้อยกว่าหนึ่งความดันจะส่งผลต่อการไหลที่อัตราเท่ากับความเร็วเสียง ซึ่งมากกว่าความเร็วของของไหลเอง แต่ถ้ามัคคัมเบอร์มากกว่าหนึ่งความเร็วของการไหลจะมากกว่าอัตราการกระจายอิทธิพลของความดัน ซึ่งจะทำให้ความดันไม่สามารถมีอิทธิพลต่อของไหลที่ตำแหน่งต้นน้ำ (upstream location) ข้อจำกัดนี้เป็นคุณลักษณะที่สำคัญของการไหลแบบไฮเปอร์โบลิก

ในของไหลชั้นผิวบางค่าอนุพันธ์ของความเร็วในทิศทางการไหลจะมีค่าน้อยกว่าอนุพันธ์ของความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับแนวการไหลอย่างมาก ซึ่งจะเห็นได้จากลักษณะการไหลของชั้นขีดผิวผนัง การไหลแบบหัวฉีดลำเจ็ท การผสมกันของของไหลสองชนิดและการไหลในท่อแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (fully develop flow) สมการอธิบายการไหลมีเทอมของการแพร่แค่หนึ่งเทอม ดังนั้นจึงถูกจำแนกจำพวกเป็นแบบพาราโบลิก ต่อจากนี้เราจะแสดงให้เห็นตัวอย่างง่ายที่จะทำให้เกิดเห็นพฤติกรรมที่ว่านี้ได้เด่นชัดขึ้น

จากที่ผ่านมาระหว่างการไหลอาจเกิดความซับซ้อนขึ้นได้ เราจึงหันมาพิจารณาสมการศักย์ (potential equation) ที่อธิบายการไหลแบบคงตัว ย้อนกลับได้ ไร้ความหนืด และอัดตัวได้ ไหลผ่านวัตถุรูปทรงเรขาคณิต (Shapiro, 1953) โดยมีความเร็วที่ free stream มีค่าเท่ากับมัคคัมเบอร์  $M_\infty$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

(2.58)

แทนค่า  $X_1 = X$  และ  $X_2 = Y$  ในสมการ (2.56) เราจะได้สมาชิกของเมทริก  $A_{11} = 1 - M_\infty^2$ ,  $A_{12} = A_{21} = 0$  และ  $A_{22} = 1$  เพื่อจำแนกชนิดสมการเราจะต้องหาค่า  $\lambda$  ที่ทำให้

$$\det \begin{vmatrix} (1 - M_\infty^2) - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ได้คำตอบ 2 คำ คือ  $\lambda_1 = 1$  และ  $\lambda_2 = 1 - M_\infty^2$  ถ้ามีค่านับเบอร์ที่ free stream น้อยกว่าหนึ่ง (การไหลต่ำกว่าเสียง) ค่าไอเกนจะมากกว่าศูนย์ ซึ่งการไหลจะเป็นแบบอิลิปติกถ้ามีค่านับเบอร์มากกว่าหนึ่งการไหลเหนือเสียง ค่าไอเกนที่สองจะเป็นลบและการไหลจะเป็นแบบไฮเปอร์โบลิก

เป็นที่น่าสังเกตว่าการไหลเป็นแบบไฮเปอร์โบลิก ถึงแม้ว่าจะเป็นการไหลแบบคงตัวในระนาบสองมิติซึ่งตัวแปรอิสระเป็นพิกัดที่อยู่บนระนาบนั้น ทิศทางของการไหลประพุดตัวเหมือนการเพิ่มขึ้นของเวลาในสมการการไหลแบบไฮเปอร์โบลิก จึงจะเป็นเช่นเดียวกันกับปัญหาการไหลในชั้นผิวบางด้วย ปัญหาลักษณะเหล่านี้สามารถใช้กระบวนการวิเคราะห์ในการหาคำตอบลักษณะเดียวกับที่ใช้กับการหาคำตอบของสมการที่มีความเวลาเป็นตัวกำหนด

ตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของความเร็วหรือมีค่านับเบอร์ที่มีต่อชนิดของการไหลแบบอัดตัวได้ รูปสมการทั่วไปของของไหลปราศจากความหนืดที่อัดตัวได้ (สมการออยเลอร์) ก็จะประพุดตัวในลักษณะเดียวกัน แต่พารามิเตอร์ที่กำหนดชนิดการไหลสมการดังกล่าวจะได้รับอิทธิพลจากค่ามีค่านับเบอร์ที่จุดใดๆที่กำลังพิจารณาอยู่ ลักษณะเช่นนี้จะมีความซับซ้อนมากเมื่อเราพิจารณาการไหลที่มีค่ามีค่านับเบอร์ใกล้เคียงหนึ่ง การไหลเช่นนี้จะมีบริเวณที่เกิดคลื่นกระแทก (shock wave) และบริเวณการไหลแบบต่ำกว่าความเร็วเสียง (sub sonic) รวมทั้งการไหลแบบเหนือเสียง (super sonic) รูป 2.11 แสดงให้เห็นถึงย่านความเร็วที่ของไหลไหลรอบๆ air foil ที่มีค่านับเบอร์มากกว่าหนึ่ง



รูปที่ 2.11 การไหลรอบ air foil ที่ความเร็วเหนือเสียง

## 2.10 เงื่อนไขเสริมสำหรับสมการการไหลแบบไร้ความหนืด

ความซับซ้อนอันเนื่องมาจากพฤติกรรมการไหลหลายรูปแบบ ทั้งแบบอิลิปติก พาราโบลิกและไฮเปอร์โบลิก ทำให้เราจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขค่าขอบที่ตำแหน่งภายในของไหลในทางทฤษฎีไม่มีผลวิเคราะห์ที่เพียงพอที่จะทำให้เรากำหนดเงื่อนไขค่าขอบได้อย่างถูกต้อง หรือมีก็ไม่มากนัก ตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นในหัวข้อนี้ได้มาจากประสบการณ์ที่กระบวนการวิเคราะห์ทางด้าน CFD นำมาใช้แล้วประสบความสำเร็จ เงื่อนไขค่าขอบสำหรับของไหลหนืดที่อัดตัวได้แสดงให้เห็นในตาราง 2.5

ในตารางสัญลักษณ์  $n$  และ  $t$  บอกถึงทิศทางที่ตั้งฉาก (พุ่งออก) และทิศทางตามแนวสัมผัสกับพื้นผิวของขอบเขตการไหลตามลำดับ

นอกจากนี้เราจำเป็นต้องกำหนดทางออกหรือขอบเขตของผนังสำหรับตัวแปรที่เป็นความหนาแน่น เนื่องจากจำเป็นจะต้องให้การไหลเป็นไปตามกฎทรงมวล ที่ทางเข้าจำเป็นต้องรู้ค่าความหนาแน่น ในขณะที่จุดใดๆในโดเมนการไหลความหนาแน่นจะเป็นส่วนหนึ่งของคำตอบ โดยไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าความหนาแน่นที่ขอบ สำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ที่มีความหนืดนั้น ไม่มีเงื่อนไขที่ต้องกำหนดสำหรับความหนาแน่น แต่เงื่อนไขอื่นๆที่ให้ในตาราง 2.5 จะเหมือนเดิม

### ตาราง 2.5 เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลแบบอัดตัวได้และมีความหนืด

เงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหลแบบไม่คงตัว

- ทุกๆจุดในคำตอบจะต้องมีค่าเริ่มต้นของ  $\rho$ ,  $u$  และ  $T$

เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลแบบไม่คงตัวและคงตัว

- บนผนัง  $u = u_w$  (no slip condition)  
 $T = T_w$  (fixed temperature) หรือ  $k\partial T/\partial n = -q_w$  (fixed heat flux)
- ที่ขอบเขตที่อยู่ในของไหล
  - ทางเข้า  $\rho$ ,  $u$  และ  $T$  กำหนดโดยเป็นฟังก์ชันของพิกัด
  - ทางออก  $-p + \mu \partial u_x / \partial n = F_n$  และ  $\mu \partial u_x / \partial n = F_t$

โดยทั่วไปแล้วขอบเขตที่จะให้ของไหลไหลออกจากโดเมนที่พิจารณานั้นจะต้องอยู่ในบริเวณที่การไหลมีการเรียงตัวสม่ำเสมอ และทราบค่าความเค้นที่ผิวของขอบเขตการไหลนั้น สำหรับการไหลที่มีค่าเรโนลด์ส์นัมเบอร์สูงและอยู่ห่างจากพื้นผิวของแข็ง เราจะสมมุติว่าไม่มีความเปลี่ยนแปลงของความเร็วที่บริเวณขอบเขตของการไหลนั้น นอกจากนี้  $F_n = -p$  และ  $F_t = 0$  ดังนั้นเราจึงพบอยู่เสมอว่ามีการกำหนดเงื่อนไขที่ทางออกของโดเมนการไหล ดังนี้

$$\text{specified pressure, } \partial u_n / \partial n = 0 \quad \text{and} \quad \partial T / \partial n = 0$$

Gresho (1991) ได้ให้ข้อสังเกตในเชิงทฤษฎีเกี่ยวกับการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบข้างต้นไว้กับปัญหาการไหลที่อัดตัวไม่ได้ อย่างไรก็ตามเมื่อนำเงื่อนไขค่าขอบนั้นมาใช้ในทางปฏิบัติแล้วก็ให้ผลการจำลองที่น่าพิงพอใจ ข้อสังเกตดังกล่าวจึงไม่ถูกนำมาใช้ในทางปฏิบัติ

รูปที่ 2.12 (a) แสดงการประยุกต์เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลในรูปแบบการไหลในช่องปิด และ รูปที่ 2.12 (b) แสดงการไหลของของไหลผ่านวัตถุ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

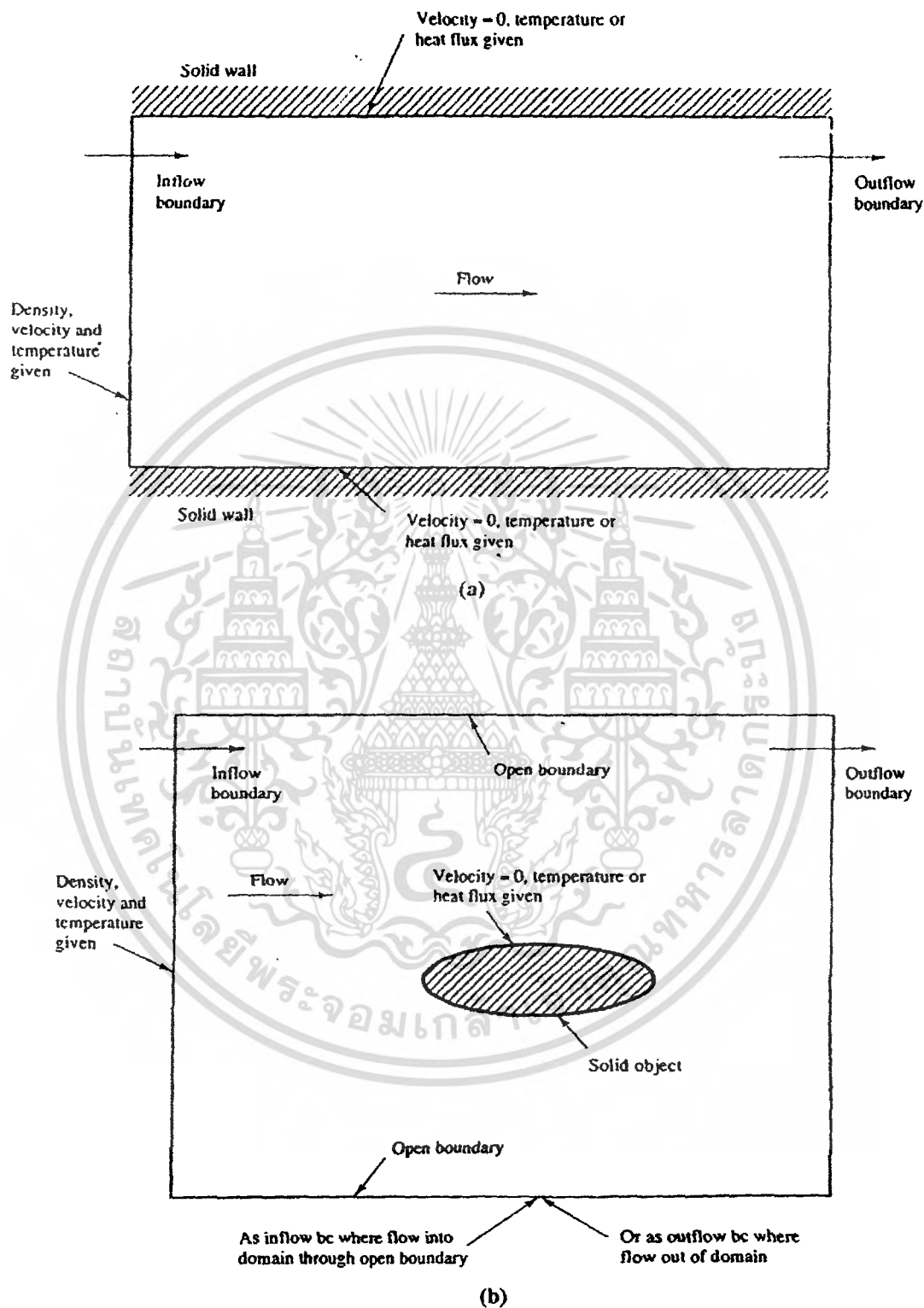
ในโปรแกรม CFD โดยทั่วไปมักจะรวมเงื่อนไขค่าขอบของความดันทั้งด้านขาเข้าและขาออก ความดันจะถูกกำหนดให้เป็นค่าคงที่ ในขณะที่มวลที่ทางเข้าจะถูกกำหนดที่ขอบเขตของโดเมนการไหล เพื่อที่จะให้แน่ใจได้ว่าการคำนวณเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์มวล นอกจากนี้เรายังสามารถกำหนดเงื่อนไขค่าขอบในลักษณะที่เป็นแกนสมมาตรหรือเป็นค่าขอบที่มีความซ้ำ (cyclic boundary) ดังนี้

เงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตร  $\partial\phi/\partial n = 0$

เงื่อนไขขอบเขตแบบซ้ำวนรอบ (Cyclic Boundary Condition)  $\phi_1 = \phi_2$

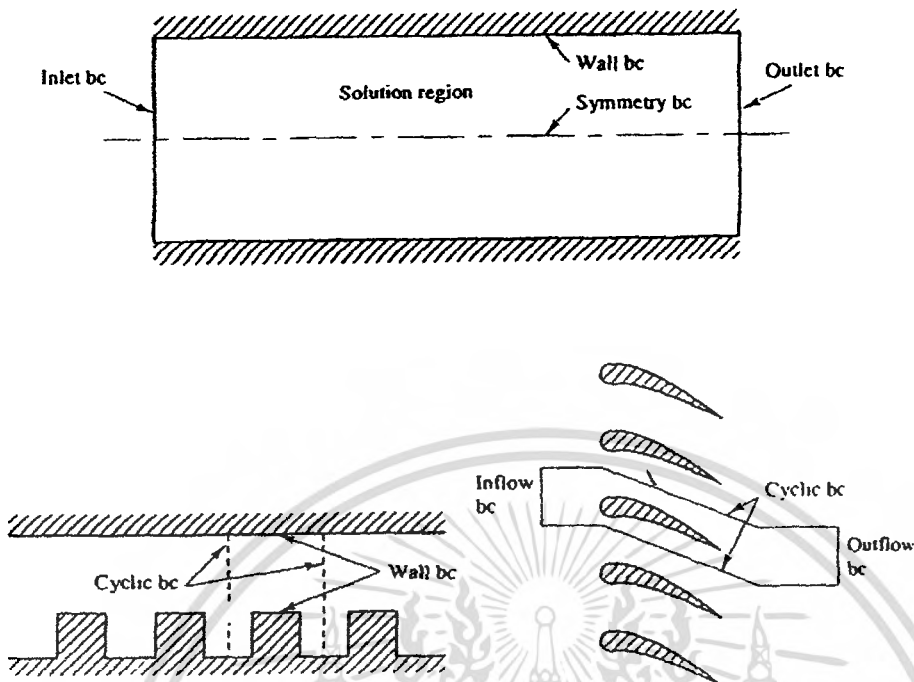


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.12 แสดงลักษณะของขอบเขตที่เราใช้เงื่อนไขสมมาตรกับเงื่อนไขชั่ววนรอบได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.13 ตัวอย่างของขอบเขตในเงื่อนไขสมมาตรกับเงื่อนไขจั่ววนรอบได้

### 2.11 ปัญหาในการไหลอัดตัวได้ที่ความเร็วเหนือเสียง

ปัญหาจะมีความยุ่งยากขึ้นเมื่อทำการคำนวณหาค่าตอบของการไหลที่มีความเร็วใกล้หรือสูงกว่าความเร็วเสียง ที่ความเร็วเหล่านี้ค่าเรโนลด์นัมเบอร์จะมีค่าสูงมากและชั้นของไหลที่มีความหนืดจะบางมาก การไหลส่วนใหญ่จะมีพฤติกรรมเสมือนไม่มีความหนืด ซึ่งจะเป็นปัญหากับการไหลผ่านวัตถุเนื่องจากชั้นส่วนของการไหลที่มีการประยุกต์เงื่อนไขค่าขอบเข้าไป จะประพฤติตัวเป็นแบบไม่มีความหนืดซึ่งแตกต่างจากพฤติกรรมการไหลแบบไฮเปอร์โบลิก

ด้วยเหตุนี้กระบวนการแก้ค่าความดันแบบ SIMPLE ในรูปแบบมาตรฐานจะต้องถูกปรับปรุง กล่าวคือจะต้องมีกระบวนการเพิ่มเติมเพื่อที่จะให้การแก้ค่าความดันสามารถกระทำได้ในรูปแบบการไหลแบบพาราโบลิกและแบบไฮเปอร์โบลิก และนอกจากนี้เพื่อที่จะรองรับปรากฏการณ์คลื่นกระแทกและการสะท้อนกลับของมันที่ขอบเขตผนังของการไหล จึงจำเป็นต้องมีการหน่วงเทียม (artificial damping) ขึ้นในกระบวนการคำนวณ และยังคงแน่ใจได้ว่าบริเวณที่มีค่านัมเบอร์สูงกว่าหนึ่งมีการจำลองสมการการไหลไว้อย่างถูกต้อง Issa และ Lockwood (1977) และ McQuirk และ Page (1990) ได้ให้บทความที่เข้าใจง่ายซึ่งแยกแยะหัวข้อพิจารณาหลักที่เกี่ยวข้องกับวิธีปริมาตรสี่เหลี่ยม

การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบแบบเปิดจำเป็นต้องใส่ข้อมูลให้ครบถ้วน ซึ่งเป็นปัญหาที่ต้องการข้อมูลที่ขอบมากที่สุดในการกำหนดให้เหมาะสม ในการไหลของของไหลไร้ความหนืด

แบบอัดตัวได้ที่มีความเร็วต่ำกว่าเสียงเราสามารถกำหนดเงื่อนไขค่าขอบที่ทางเข้า (กำหนดความหนาแน่นและความเร็ว) ที่ทางออกเราจะกำหนดเพียงหนึ่งเงื่อนไข (โดยทั่วไปแล้วคือค่าความดัน) โดยมีจำนวนเงื่อนไขค่าขอบน้อยกว่ากรณีที่มีการไหลเป็นแบบมีความหนืด ที่เป็นเช่นนี้เพราะของไหลที่ไม่มีความหนืดประพฤติตัวเป็นแบบไฮเปอร์โบลิกจึงไม่ต้องการเงื่อนไขการไหลที่ทางออก



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

#### การถ่ายเทความร้อน

##### 3.1 การนำความร้อน (Conduction)

การนำความร้อน เป็นรูปแบบหนึ่งของการถ่ายเทความร้อน ในลักษณะของการแลกเปลี่ยนพลังงานจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูง ไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำ โดยเคลื่อนแบบจลน์ (kinetic motion) หรือการชนกันโดยตรงของ โมเลกุลซึ่งเป็นลักษณะที่เกิดขึ้นของ โกลที่หตุคหนึ่ง ส่วนในกรณีของโลหะนั้นจะเป็นการไหลของกระแสอิเล็กตรอน สำหรับของแข็งที่เป็นตัวนำไฟฟ้าที่ดี จะมีจำนวนอิเล็กตรอนอิสระมากมายที่เคลื่อน ไหวอยู่ภายใน โครงสร้างของ โมเลกุล (Lattice) ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าวัตถุที่เป็นตัวนำไฟฟ้าที่ดี จะเป็นตัวนำความร้อนที่ดีตามไปด้วย ยกตัวอย่างเช่น ทองแดง เงิน เหล็ก ฯลฯ อันเป็นผลจากการนำหรือถ่ายทอดพลังงานความร้อน โดยอิเล็กตรอนอิสระเหล่านี้

กฎสหสัมพันธ์ของการนำความร้อน โดยถือเกณฑ์การสังเกตจากการทดลอง กำเนิดจากบิโตร์ (Biot) แต่ต่อมา นักฟิสิกส์-คณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ โจเซฟ ฟูรีเยร์ (Joseph Fourier ) นำหลักการนี้มาใช้วิเคราะห์เป็นทฤษฎีความร้อน กฎนี้กล่าวว่า อัตราการไหลของการนำความร้อนในทิศทางที่กำหนดเป็นสัดส่วนกับพื้นที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหลของความร้อนและเกรเดียนต์ของอุณหภูมิในทิศทางนั้น สำหรับการไหลของความร้อนในทิศทาง  $x$  กฎของฟูรีเยร์กำหนดเป็น

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad W \quad (3.1a)$$

หรือ  $q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad W/m^2 \quad (3.1b)$

โดยที่  $q_x$  คือ อัตราการนำความร้อนผ่านพื้นที่  $A$  ในทิศทางบวก  $x$

$q_x''$  คือ ฟลักซ์ความร้อนในทิศทางบวก  $x$

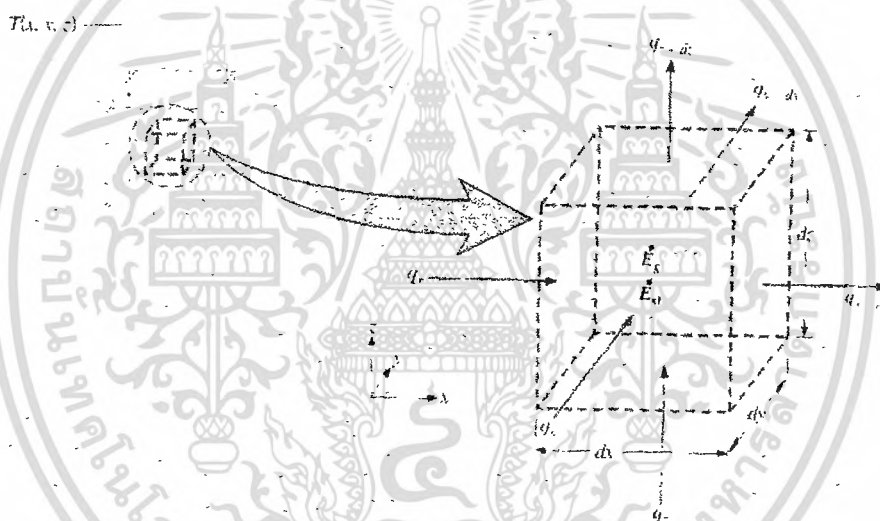
$k$  คือ ค่าสภาพการนำความร้อนของวัตถุ (thermal conductivity of material) และเป็นค่าบวก

จากสมการ (1-1) ถ้าอุณหภูมิลดลงในทิศทางบวกของ  $x$  แล้ว  $dT/dx$  เป็นลบ ดังนั้น  $q_x''$  (หรือ  $q_x$ ) มีค่าเป็นบวก เนื่องจากสมการมีเครื่องหมายลบติดอยู่ เพราะฉะนั้นเครื่องหมายลบจึงต้องใส่ในสมการและเพื่อให้แน่ใจว่า  $q_x''$  (หรือ  $q_x$ ) เป็นปริมาณบวก เมื่อการไหลของความร้อนอยู่ในทิศทางบวกของ  $x$  ในทางกลับกันเมื่อ

จุดประสงค์หลัก ในการวิเคราะห์การนำความร้อนก็เพื่อที่จะหา สนามอุณหภูมิ (temperature field) ในตัวกลางหนึ่งซึ่งเป็นผลจากเงื่อนไขซึ่งสอดคล้องกับขอบเขตของมัน นั่นคือ ต้องการทราบการกระจายของอุณหภูมิ (temperature distribution) เมื่อทราบค่านี้ก็จะสามารถหาฟลักซ์

ความร้อนที่จุดใดๆ ในตัวกลางนั้น จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's Law) การหาค่านี้ทำได้โดยใช้กฎของพลังงาน (Energy conservation) กับปริมาตรควบคุมดิฟเฟอเรนเชียลซึ่งคำตอบของมันจะทำให้การกระจายอุณหภูมิในตัวกลางหรือวัตถุนั้น

พิจารณาดังกล่าวเนื้อเดียวกันซึ่งมีเกรเดียนอุณหภูมิจริง และการกระจายของอุณหภูมิ  $T(x, y, z)$  กำหนดในพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) เรากำหนดปริมาตรควบคุมเล็กมาก  $dx \cdot dy \cdot dz$  ตามที่แสดงในรูป ถ้ามีเกรเดียนอุณหภูมิแล้วการนำความร้อนจะเกิดขึ้นข้ามแต่ละอันของผิวควบคุม อัตราการนำความร้อนนี้จะตั้งฉากกับผิวควบคุมแต่ละอันที่ตำแหน่งโคออร์ดิเนต  $x, y, z$  ซึ่งแสดงโดยทอม  $q_x, q_y, q_z$  ตามลำดับ อัตราการนำความร้อนที่ผิวตรงข้ามสามารถกระจายโดยอนุกรมเทลเลอร์ (Taylor series expansions) โดยไม่คิดทอมลำดับสูงๆ (higher order terms) จะได้



รูปที่ 3.1 แสดงปริมาตรควบคุมเล็กๆ  $dx \cdot dy \cdot dz$

: ที่มาของรูป Incropera DeWitt Bergmann Lavine. "Fundamentals of heat and mass transfer", Wiley Asia Student Edition

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (3.2a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (3.2b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (3.2c)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภายในตัวกลางมีแหล่งพลังงานซึ่งสามารถผลิตอัตราพลังงานความร้อนได้ เทอมนี้แทนด้วย

$$E_g = q \, dx \, dy \, dz \quad (3.3)$$

โดยที่  $q$  คืออัตราพลังงานที่ผลิตขึ้นในตัวกลางตัวกลางต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ( $W/m^3$ ) นอกจากนี้ก็ยังมีพลังงานซึ่งเก็บไว้โดยวัตถุหรือตัวกลางในปริมาตรควบคุม ซึ่งคือ

$$E_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dy \, dz \quad (3.4)$$

โดยที่  $\rho c_p \partial T / \partial t$  คืออัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในของตัวกลางต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรต่อเวลาที่เปลี่ยนไป

เมื่อใช้กฎทรงพลังงานกับปริมาตรควบคุมจะได้

$$E_{in} + E_g - E_{out} = E_{st} \quad (3.5)$$

ดังนั้นจะเห็นว่า อัตราการนำความร้อนประกอบด้วยการไหลเข้า ( $E_{in}$ ) ไหลออก ( $E_{out}$ ) ของพลังงาน และแทนสมการ (3.3) และ (3.4) ได้

$$\begin{aligned} & (q_x + q_y + q_z) + q \, dx \, dy \, dz - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) \\ & = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dy \, dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

แทนด้วยสมการ (3.2) ได้

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + q \, dx \, dy \, dz = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx \, dy \, dz \quad (3.7)$$

จากกฎของฟูริเยร์ อัตราการนำความร้อนเป็น

$$q_x = -k \, dy \, dz \frac{\partial T}{\partial x}, q_y = -k \, dx \, dz \frac{\partial T}{\partial y}, q_z = -k \, dx \, dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.8)$$

โดยการแทน (3.8) และ (3.7) และหารตลอดด้วยมิติของปริมาตรควบคุม ( $dx \, dy \, dz$ ) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารทรัพย์สินทางปัญญาที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้เพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อผู้ใช้เห็นประโยชน์ด้านการศึกษา  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q'' = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.9)$$

สมการ (3.9) เป็นรูปทั่วไป (general form) ของสมการฟุ้งกระจายของความร้อน (heat diffusion) ในพิกัดคาร์ทีเซียน โดยทั่วไปสมการนี้เรียกว่า สมการความร้อน เป็นเครื่องมือพื้นฐานสำหรับวิเคราะห์การนำความร้อน จากคำตอบของมัน เราจะได้การกระจายของอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของเวลา จากสมการความร้อนสามารถกล่าวได้ว่า “ที่จุดใดๆ ในตัวกลางอัตราการนำความร้อนสุทธิในปริมาตรหนึ่งหน่วย รวมกับอัตราการผลิตความร้อนเชิงปริมาณต้องมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานความร้อนที่สะสมไว้ภายในปริมาตรนั้น”

สำหรับกรณี ค่า  $k =$  คงที่ จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q''}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.10)$$

โดยที่  $\alpha = k / \rho c_p$  เรียกว่า ค่าการฟุ้งกระจายของความร้อน (thermal diffusivity) ของวัสดุ คุณสมบัติทางเทอร์โมฟิสิกส์ที่สำคัญนี้ก็คือเป็นอัตราส่วนของค่าการนำความร้อน ( $k$ ) ของวัสดุต่อค่าความจุความร้อน ( $\rho c_p$ ) ค่า  $\alpha$  มาก (ค่า  $k$  มาก และ/หรือ  $\rho c_p$  น้อย) หมายความว่า วัสดุมีการถ่ายเทความร้อนโดยการนำมากกว่าที่พลังงานที่เก็บเอาไว้มากหรือความร้อนแพร่กระจายตลอดวัตถุอย่างรวดเร็ว มีหน่วยเป็น  $\text{m}^2/\text{s}$

### 3.2 การพาความร้อน (Convection heat transfer)

เมื่อของไหลไหลผ่านวัตถุที่เป็นของแข็งหรือไหลผ่านภายในช่องทางการไหล โดยที่อุณหภูมิของของไหลและผิวของของแข็งมีค่าแตกต่างกัน การถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและผิวของของแข็งจะเกิดขึ้นเมื่อของไหลเคลื่อนที่สัมผัสกับผิวของของแข็ง กลไกของการถ่ายเทความร้อนแบบนี้เรียกว่า “การพาความร้อน” ถ้าการเคลื่อนที่ของของไหลเกิดขึ้นโดยการทำขึ้นเองโดยใช้ปั๊มหรือพัดลมเป็นตัวทำให้เกิดแรงกระทำของไหลไหลผ่านบนพื้นผิว การถ่ายเทความร้อนแบบนี้เรียกว่า “การพาความร้อนแบบบังคับ” (force convection) ถ้าการเคลื่อนที่ของของไหลเกิดจากแรงลอยตัว ซึ่งมีผลมาจากความแตกต่างของความหนาแน่นที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิภายในของไหล การถ่ายเทความร้อนแบบนี้เรียกว่า การพาความร้อนแบบอิสระ หรือการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (free or natural convection) เช่น ปล่อยแผ่นวัตถุร้อนที่วางอยู่ในแนวตั้งไว้ในอากาศเป็นผลทำให้เกรเดียนต์ของความหนาแน่นเพิ่มขึ้น ซึ่งจะทำให้อากาศเกิดการเคลื่อนที่ โดยการเคลื่อนที่ของของไหลมีผลกระทบต่อสนามอุณหภูมิภายในของไหล การ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิและการถ่ายเทความร้อนแบบการพาในทางปฏิบัติเป็นเรื่องที่สลับซับซ้อนมากในทางวิศวกรรม เพื่อให้การคำนวณหาการถ่ายเทความร้อนง่ายขึ้นระหว่างผิวที่ร้อน  $T_w$  และอุณหภูมิของของไหลเย็นที่ไหลผ่านบนผิวที่อุณหภูมิ  $T_f$  ตามที่แสดงในรูป ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน ( $h$ ) ถูกกำหนดเป็น

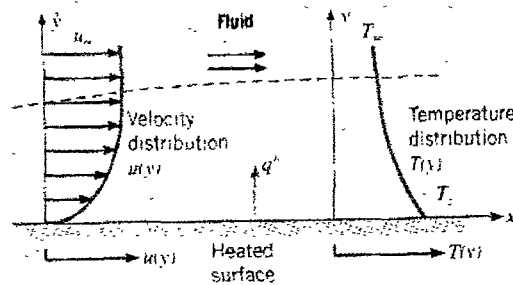
$$q' = h[T_w - T_f] \quad (3.22a)$$

โดยที่  $q'$  เป็นฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทจากผนังร้อนไปยังของไหลที่เย็น (มีหน่วยเป็น  $W/m^2$ ) ถ้าการถ่ายเทความร้อนเกิดจากของไหลที่ร้อน ไปยังผนังเย็น จะได้ว่า

$$q' = h(T_f - T_w) \quad (3.22b)$$

โดยที่  $q'$  เป็นฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทจากของไหลที่ร้อน ไปยังผนังเย็น สมการ เป็นสมการที่ได้มาจากกฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's Law of Cooling) โดยที่อุณหภูมิมีหน่วยเป็นเซลเซียส หรือเคลวิน และค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $h$  มีหน่วยเป็น  $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$

ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $h$  (Convective heat transfer coefficient or film convective coefficient) จะมีค่าแปรเปลี่ยนไปตามชนิดของการไหล (เช่น ลามินาร์ หรือ เทอร์บูลเลนต์) รูปทรงของวัตถุ พื้นที่ที่ของไหลไหลผ่าน คุณสมบัติทางฟิสิกส์ของของไหล อุณหภูมิเฉลี่ย และตำแหน่งต่างๆ ตามพื้นผิวของวัตถุ นอกจากนี้ยังขึ้นกับกลไกของการถ่ายเทความร้อนว่าเป็นการพาความร้อนแบบบังคับ (การเคลื่อนที่ของของไหลเกิดจากปั๊มหรือพัดลม) หรือเป็นการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (การเคลื่อนที่ของของไหลเนื่องจากแรงลอยตัว) ค่าของ  $h$  จะแปรเปลี่ยนไปตามตำแหน่งต่างๆ ตามพื้นผิววัตถุ ดังนั้นในทางวิศวกรรมแล้ว เพื่อความสะดวกจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉลี่ยตลอดพื้นผิว ( $h_m$ ) แทนค่า  $h$  ที่ตำแหน่งนั้นๆ ในการพิจารณาการพาความร้อนตลอดทั้งพื้นผิว สมการ และ ค่า  $h$  จึงถูกแทนด้วยค่า ( $h_m$ ) ดังนั้นค่า  $q'$  จึงเป็นค่าฟลักซ์ความร้อนเฉลี่ยตลอดบริเวณที่พิจารณา



### รูปที่ 3.2 การพัฒนาชั้นของขอบเขตในการพาความร้อน

: ที่มาของรูป Incropera DeWitt Bergmann Lavine. “Fundamentals of heat and mass transfer”, Wiley Asia Student Edition

ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนสามารถวิเคราะห์ได้จากการพิจารณาการไหลผ่านวัตถุซึ่งมีรูปทรงเรขาคณิตต่างๆ เช่น แผ่นเรียบ หรือ การไหลภายในท่อทรงกระบอก สำหรับการไหลผ่านวัตถุที่มีรูปทรงสลับซับซ้อน ค่า  $h$  สามารถหาได้จากวิธีการทดลอง ซึ่งค่าที่ได้จะมีช่วงของความแตกต่างกันกว้างมากตามแต่ละรูปแบบ สำหรับการประยุกต์ต่างๆ ตาราง แสดงให้เห็นถึงค่า  $h$  ที่ได้จากการไหลในบางรูปแบบ

#### 3.3 การแผ่รังสีความร้อน (Radiation heat transfer)

การแผ่รังสีความร้อน คือพลังงานที่ถูกส่งออกไปโดยสารซึ่งอยู่ที่อุณหภูมิจำกัดแน่นอน ถึงแม้ว่าเราจะเน้นการแผ่รังสีจากผิวของวัตถุแข็งก็ตาม การส่งออกของรังสีอาจเกิดขึ้นได้จากของเหลวและก๊าซ ดังนั้นโดยไม่คำนึงถึงรูปแบบของสาร การส่งออกของรังสีเชื่อว่าเป็นการเปลี่ยนการจัดเรียงตัวของอิเล็กตรอนขององค์ประกอบอะตอมหรือ โมเลกุล พลังงานของสนามการแผ่รังสีนั้นจะถูกนำออกไปโดยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (หรือเรียกอีกอย่างว่าโฟตอน) ในขณะที่การถ่ายเทพลังงานโดยการนำหรือการพาต้องการวัตถุตัวกลาง แต่การแผ่รังสีไม่ต้องการ ในความเป็นจริง การถ่ายเทโดยการแผ่รังสีเกิดขึ้นอย่างมีประสิทธิภาพมากที่สุดในสุญญากาศ

ตาราง ค่าตัวอย่างของสัมประสิทธิ์การพาความร้อน ( $h$ )

| ชนิดของการไหล                              | $h, \text{W/m}^2\text{C}$ |
|--|---------------------------|
| การพาแบบอิสระ ที่ $T = 25^{\circ}\text{C}$ |                           |
| แผ่นเรียบแนวตั้ง 0.25 เมตร ใน :            |                           |
| - อากาศบรรยากาศ                            | 5                         |
| - น้ำมันเครื่องยนต์ (น้ำ)                  | 37 (440)                  |

ทรงกระบอกแนวนอน O.D. 0.02 เมตร ใน :

- อากาศบรรยากาศ 8
- น้ำมันเครื่องชนิด (น้ำ) 62 (741)

ทรงกลมเส้นผ่าศูนย์กลาง 0.02 เมตร ใน :

- อากาศบรรยากาศ 9
- น้ำมันเครื่องชนิด (น้ำ) 60 (606)

การพาความร้อนแบบบังคับ

อากาศบรรยากาศ 25°C, U = 10 m/s ผ่านแผ่นเรียบ :

$$L = 0.1 \text{ m} \quad 39$$

$$L = 0.5 \text{ m} \quad 17$$

การไหลที่ 5 m/s ผ่านทรงกระบอกเส้นผ่าศูนย์กลาง 1 cm. :

$$\text{อากาศบรรยากาศ} \quad 85$$

$$\text{น้ำมันเครื่องชนิด} \quad 1,800$$

$$\text{น้ำที่ } 1 \text{ kg/s} \text{ ภายในท่อ } 2.5 \text{ cm.-I.D.} \quad 10,500$$

การเดือดของน้ำที่ 1 atm.

$$\text{- การเดือดในภาชนะ} \quad 3,000$$

$$\text{- การเดือดที่ฟลักซ์ความร้อนสูงสุด} \quad 35,000$$

$$\text{- การเดือดเป็นฟิล์ม} \quad 300$$

การกลั่นตัวของไอน้ำที่ 1 atm.

$$\text{- การกลั่นตัวเป็นแผ่นบางๆ บนท่อแนวนอน} \quad 9,000\text{-}25,000$$

$$\text{- การกลั่นตัวเป็นแผ่นบางๆ บนท่อแนวตั้ง} \quad 4,000\text{-}11,000$$

ที่มา : ผศ.ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์. “การถ่ายเทความร้อน”, ภาควิชาเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ค่าฟลักซ์ความร้อนสูงสุดซึ่งการแผ่รังสีถูกส่งออกไปได้จากพื้นผิวหนึ่งกำหนดโดยกฎของสตีเฟนโบลซ์แมน (Stefan – Boltzmann Law)

$$q' = \sigma T_s^4 \quad (3.23)$$

โดยที่  $T_s$  คือ ค่าอุณหภูมิสัมบูรณ์ (K) ของผิว

$\sigma$  คือ ค่าคงที่ของสตีเฟน-โบลซ์แมน  $5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{ K}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และผิวนั้นจะเรียกว่า ตัวแผ่รังสีอุดมคติหรือวัตถุดำ (blackbody) พลังค์ความร้อนซึ่งถูกส่งออกไปโดยผิวจริงจะน้อยกว่าที่ส่งออกจากตัวแผ่รังสีอุดมคติ (ideal radiator) กำหนดเป็น

$$q' = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (3.24)$$

โดยที่  $\varepsilon$  เป็นคุณสมบัติการแผ่รังสีของผิว เรียกว่า สัมประสิทธิ์การแผ่รังสี (Emissivity) คุณสมบัตินี้ชี้ให้เห็นถึงประสิทธิภาพของผิวเป็นอย่างไร เมื่อเปรียบเทียบกับวัตถุดำ

สมการ (3.24) ใช้หาอัตราการส่งพลังงานออกของผิว การคำนวณหาอัตราสุทธิซึ่งการแผ่รังสีถูกแลกเปลี่ยนระหว่างผิว โดยทั่วไปค่อนข้างยุ่งยากมาก อย่างไรก็ตามมีกรณีพิเศษซึ่งเกิดขึ้นบ่อยมากในทางปฏิบัติเกี่ยวข้องกับการแลกเปลี่ยนสุทธระหว่างพื้นผิวเล็กๆ และผิวที่ใหญ่กว่ามาก ซึ่งอยู่ล้อมรอบผิวที่เล็กกว่านั่นเอง พื้นผิวและสิ่งแวดล้อมที่ถูกแยกจากกันโดยก๊าซซึ่งไม่มีอิทธิพลเกี่ยวกับการแผ่รังสีนั้น อัตราสุทธิของการแลกเปลี่ยนรังสีความร้อนระหว่างผิวและสิ่งแวดล้อมของมันต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ของผิวกำหนดเป็น

$$q' = \frac{q}{A} = \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{sur}^4) \quad (3.25)$$

ในสมการนี้  $A$  เป็นพื้นที่ผิว และ  $\varepsilon$  เป็นสัมประสิทธิ์การส่งออก ในขณะที่  $T_{sur}$  เป็นอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

มีการประยุกต์สมการนี้ในรูปอื่นเพื่อให้สะดวก คือ

$$q_{rad} = h_r A (T_s - T_{sur}) \quad (3.26)$$

ซึ่งจากสมการ ค่าสัมประสิทธิ์การแผ่รังสี  $h_r$  คือ

$$h_r = \varepsilon \sigma (T_s - T_{sur}) (T_s^2 + T_{sur}^2) \quad (3.27)$$

จุดประสงค์ที่ทำเช่นนี้เพื่อให้มีรูปแบบเหมือนการพาความร้อน ดังเกตว่า ค่า  $h_r$  ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเป็นสำคัญ ในขณะที่  $h$  ของการพาขึ้นอยู่กับอุณหภูมิปกติ

## บทที่ 4

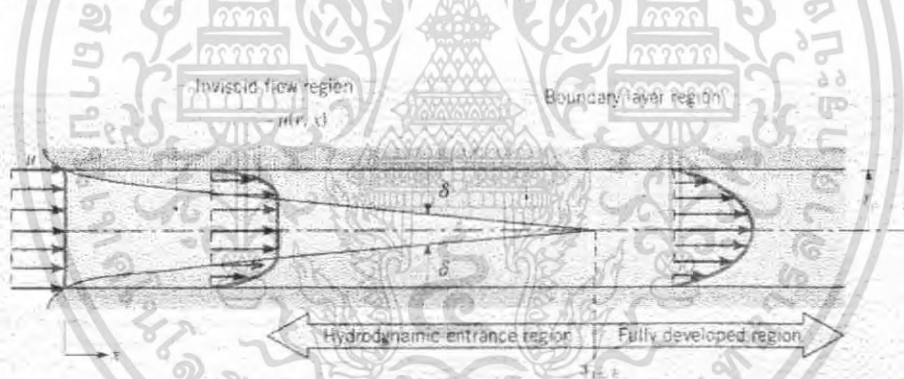
### การพาแบบบังคับสำหรับการไหลภายในท่อ (Forced Convection for Flow Inside Ducts)

การไหลภายในท่อนี้มีข้อแตกต่างการไหลผ่านภายนอก คือ การไหลภายในท่อมีขอบเขตจำกัด โดยที่ความหนาของบาวนด์รีเลเยอร์ ไม่สามารถเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ได้ เพราะว่าเมื่อไหลไปได้ระยะหนึ่งบาวนด์รีเลเยอร์ก็ก่อตัวเต็มพื้นที่หน้าตัดของท่อจึงไม่สามารถขยายออกไปได้อีก รูปร่างของความเร็วจะมีลักษณะชัดเจนแน่นอนไม่เปลี่ยนแปลงต่อไปอีก ซึ่งการไหลลักษณะเช่นนี้เรียกว่า การไหลที่ปรับตัวเต็มที่แล้ว (fully developed flow) ส่วนการไหลก่อนหน้านั้นเรียกว่า การไหลที่กำลังปรับตัว (developing flow) และเรียกช่วงระยะของการไหลแบบนี้ว่า Hydrodynamic entrance region

#### 4.1 การไหลของของไหล

##### 4.1.1 สถานะการไหล

พิจารณาการไหลแบบลามินาร์ ในท่อกลมที่มีรัศมี  $r_0$



รูปที่ 4.1 การก่อตัวของบาวนด์รีเลเยอร์ของการไหลแบบลามินาร์ในท่อกลม

: ที่มาของรูป Incropera DeWitt Bergmann Lavine. "Fundamentals of heat and mass transfer", Wiley Asia Student Edition

สำหรับการไหลภายในท่อนั้น ต้องคำนึงถึงการขยายตัวของช่วงบริเวณทางเข้า (entry region) ซึ่งจะขึ้นอยู่กับว่าการไหลนั้นเป็นอย่างไร แบบลามินาร์หรือเทอร์บูเลนต์ เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์สำหรับการไหลภายในท่อกลมกำหนดเป็น

$$Re_D \equiv \frac{\rho U_m D}{\mu} \quad (4.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่ง  $U_m$  เป็นความเร็วเฉลี่ยภายในท่อ

$D$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อ

เรย์โนลด์ส์นัมเบอร์วิกฤติ สำหรับช่วงการเปลี่ยนแปลงของการไหล จากลามินาร์เป็นเทอร์บูเลนต์ เริ่มต้นจาก

$$Re_{D,c} \approx 2300 \quad (4.1)$$

และการไหลเป็นแบบเทอร์บูเลนต์เต็มที่ ที่  $Re_D \geq 4000$

สำหรับการไหลแบบลามินาร์ (คือ  $Re_D \leq 2300$ ) ความยาวของช่วงบริเวณทางเข้าสำหรับการปรับตัวหาได้จากสมการ

$$\left( \frac{X_{fd,h}}{D} \right)_{lam} \approx 0.05 Re_D \quad (4.2)$$

ส่วนในการไหลแบบเทอร์บูเลนต์ ( $Re_D \geq 4000$ ) นั้น ไม่มีสมการที่แน่นอนสำหรับการหา ระยะทางสำหรับการปรับตัว แต่รู้เพียงว่าไม่เกี่ยวข้องกับเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ และมีค่าประมาณดังนี้

$$10 \leq \left( \frac{X_{fd,h}}{D} \right)_{turb} \leq 60 \quad (4.3)$$

สำหรับค่าที่ใช้ในที่นี้ เราจะสมมุติว่า  $X_{fd,h} > 10D$  สำหรับการไหลแบบเทอร์บูเลนต์

#### 4.1.2 ความเร็วเฉลี่ย (mean velocity)

ข้อแตกต่างของการไหลภายในและการไหลภายนอกก็คือ เราไม่สามารถจะใช้ความเร็วของ กระแสอิสระ  $U_\infty$  ของของไหลได้ เนื่องจากความเร็วภายในท่อจะแปรเปลี่ยนทั่วทั้งพื้นที่หน้าตัด ของท่อ ดังนั้นจึงใช้ความเร็วเฉลี่ย  $U_m$  (mean velocity) แทน โดยนิยามว่าความเร็วเฉลี่ยนี้คือ ความเร็วที่เมื่อคูณด้วยพื้นที่หน้าตัดของท่อและความหนาแน่นของของไหลแล้วจะเท่ากับอัตราการไหลของมวล ซึ่งได้

$$\dot{m} = \rho U_m A_C \quad (4.4)$$

ถ้าเป็นการไหลสภาวะคงที่ ที่อัดตัวไม่ได้แล้ว ภายในท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดคงที่ ค่า  $\dot{m}$  และ  $U_m$

ย่อมมีค่าคงที่ตลอดความยาวท่อ

สำหรับท่อกลม ( $A_c = \pi D^2 / 4$ ) ค่าของเรย์โนลด์ส์นัมเบอร์ลดลงเป็น

$$\text{Re} = \frac{4\dot{m}}{\pi D \mu} \quad (4.5)$$

เพราะว่าค่า  $\dot{m}$  อาจหาได้จากการอินทิเกรตของฟลักซ์มวล ( $\rho u$ ) ทั่วทั้งพื้นที่หน้าตัด

$$\dot{m} = \int_{A_c} \rho u(r, x) dA_c \quad (4.6)$$

ดังนั้นสำหรับท่อกลม กรณีของไหลอัดตัวไม่ได้ แล้วจะได้

$$U_m = \frac{\int_{A_c} \rho u(r, x) dA_c}{\rho A_c} = \frac{2\pi\rho}{\rho\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u(r, x) r dr = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} u(r, x) r dr \quad (4.7)$$

ซึ่งจะหาค่า  $U_m$  ได้ทันที เมื่อรู้ velocity profile,  $U(r)$  ที่ตำแหน่งนั้น

#### 4.1.3 รูปร่างของความเร็วของของไหลที่ปรับตัวเต็มที่แล้ว

รูปทรงของความเร็วสามารถหาได้ สำหรับการไหลแบบลามินาร์ของของไหลที่คุณสมบัติคงที่ อัดตัวไม่ได้ ในช่วงที่ปรับตัวเต็มที่แล้วของท่อกลม (สำหรับเทอร์บูเลนซ์ ส่วนใหญ่ต้องอาศัยผลจากการทดลองเป็นหลักและจะกล่าวในภายหลัง) โดยทั่วไปจะเป็นฟังก์ชันของรัศมี

สิ่งสำคัญสำหรับเงื่อนไขข้างต้นก็คือ ค่าความเร็วในแนวรัศมีและการเปลี่ยนแปลงของความเร็วตามแนวแกนทุก ๆ แห่งมีค่าเป็นศูนย์หมด

$$v = 0 \quad \text{และ} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$$

ดังนั้น ความเร็วตามแนวแกนจะมีค่าขึ้นอยู่กับ  $r$  เท่านั้น [ $u(x, r) = u(r)$ ]

ความเร็วตามแนวแกนหาได้ จากการแก้สมการที่เหมาะสมของสมการโมเมนตัมตามแนว  $x$  ที่เคยกล่าวมาแล้วก็ได้ หรืออาจจะหาโดยคิดสมดุลย์ของการอนุรักษ์โมเมนตัมก็ได้

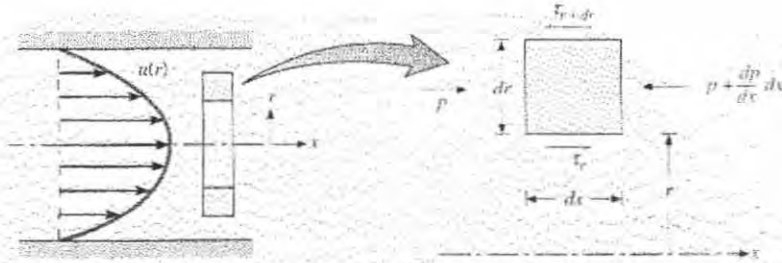


FIGURE 8.2 Force balance on a differential element for laminar, fully developed flow in a circular tube.

รูปที่ 4.2 สมดุลย์แรงบนอิลิเมนต์  $dx$  สำหรับกรไหลแบบลามินาร์ที่ก่อตัวเต็มที่แล้วในท่อกลม : ที่มาจากรูป Incropera DeWitt Bergmann Lavine, "Fundamentals of heat and mass transfer", Wiley Asia Student Edition

สำหรับอิลิเมนต์คิฟเฟอเรนเชียลรูปร่างวงแหวน สามารถเขียนสมดุลย์ของแรงได้ดังนี้

$$-\tau_r(2\pi r dx) + \left\{ \tau_r(2\pi r dx) + \frac{d}{dr} [\tau_r(2\pi r dx)] dr \right\} + p(2\pi r dr) - \left\{ p(2\pi r dr) + \frac{d}{dx} [p(2\pi r dr)] dx \right\} = 0$$

ซึ่งลดรูปเป็น  $\frac{d}{dr} (r\tau_r) = r \frac{dp}{dx}$  (4.8)

จากกฎความหนืดของนิวตัน เราทราบว่า  $\tau_r = \mu \frac{du}{dr}$

ดังนั้น (4.8) จะเป็น  $\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx}$  (4.9)

เพราะว่า  $\frac{dp}{dx}$  นั้นไม่ขึ้นกับ  $r$  ดังนั้น เราสามารถอินทิเกรต (4.9) ได้

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{2} + C_1 \quad \text{และ} \quad u(r) = \frac{1}{\mu} \left( \frac{dp}{dx} \right) \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

จากเงื่อนไขที่ขอบ ได้ว่า  $u(r_0) = 0$  และ  $\frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r_0} = 0$  จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(r) = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx}\right) r_0^2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \quad (4.10)$$

ดังนั้น รูปทรงของความเร็วสำหรับการไหลแบบลามินาร์ที่ปรับตัวเต็มที่แล้วจะเป็น “พาราโบลา” และจะสังเกตว่า การเปลี่ยนแปลงความดัน  $\frac{dp}{dx}$  ต้องเป็นลบเสมอ ผลลัพธ์ที่กล่าวมานี้อาจใช้หาค่าความเร็วเฉลี่ยได้  $u_m$  โดยแทนสมการ (4.10) ใน (4.7) แล้วอินทิเกรต จะได้

$$u_m = -\frac{r_0^2}{8\mu} \frac{dp}{dx} \quad (4.11)$$

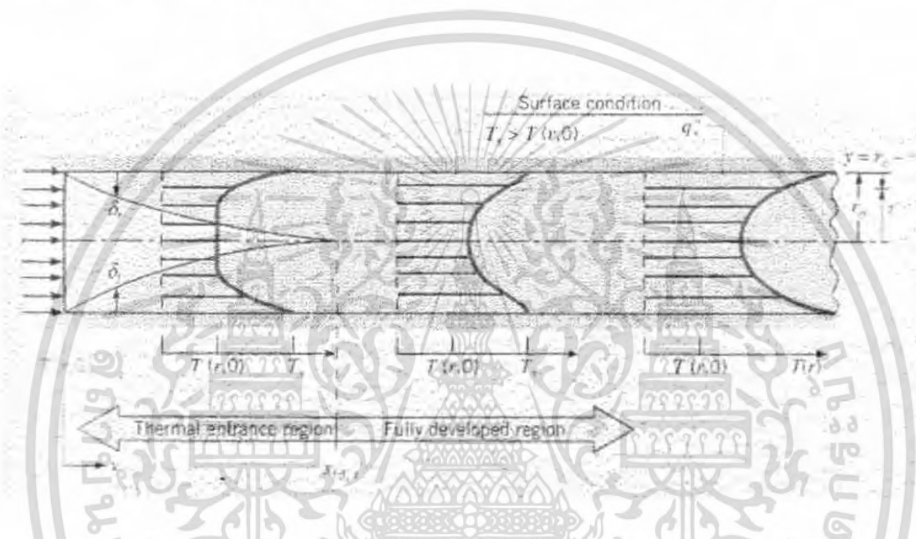
แทนสมการ (4.11) ใน (4.10) จะได้รูปร่างของความเร็วเป็น

$$\frac{u(r)}{u_m} = 2 \left[1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] \quad (4.12)$$

เพราะว่า  $u_m$  สามารถหาได้จากการรู้อัตราการไหลของมวล ดังนั้นสมการ (4.11) สามารถใช้หาการเคียนของความดันได้  $\frac{dp}{dx}$

4.2 การถ่ายเทความร้อน

หลังจากได้บททบทวนกลศาสตร์ของไหลของการไหลภายในท่อแล้ว เรามาพิจารณาอิทธิพลของความร้อนบ้าง ถ้าของไหลไหลเข้าไปในท่อตามรูปที่ 4.4 ที่อุณหภูมิสม่ำเสมอ  $T(r, 0)$  ซึ่งมีค่าแตกต่างจากอุณหภูมิที่ผิวแล้ว การพาความร้อนจะเกิดขึ้นและบาวน์คาร์เลเยอร์ของความร้อนจะเริ่มคั่นก่อตัวขึ้น อย่างไรก็ตามถ้าสภาวะที่ผิวของท่อคงที่โดยอาจเป็นอุณหภูมิผิวสม่ำเสมอคงที่ ( $T_s = \text{คงที่}$ ) หรือฟลักซ์ความร้อนที่ผิวสม่ำเสมอ ( $q_s' = \text{คงที่}$ ) สภาวะที่ปรับตัวคงที่แล้วของความร้อน (thermally fully developed condition) ก็จะเกิดขึ้น ในที่สุดรูปร่างของอุณหภูมิที่ปรับตัวเต็มที่แล้วจะแตกต่างกัน ตามเงื่อนไขไม่ว่าอุณหภูมิผิวคงที่หรือฟลักซ์ความร้อนคงที่



รูปที่ 4.3 การก่อตัวของบาวน์คาร์เลเยอร์ทางความร้อนในท่อกลม

: ที่มาของรูป Incropera DeWitt Bergmann Lavine, “Fundamentals of heat and mass transfer”, Wiley Asia Student Edition

สำหรับการไหลแบบลามินาร์ระยะความยาวของทางเข้าสำหรับปรับตัวจะเป็น

$$\left( \frac{x_{fd,t}}{D} \right)_{lam} \approx 0.05 Re_D Pr \tag{4.20}$$

โดยการเปรียบเทียบบริเวณทางเข้า (entrance region) ของอุณหภูมิตามสมการ (4.20) กับสมการของความเร็ว (4.2) จะพบว่าต่างกันว่า  $Pr$  เท่านั้น จึงพบสรุปได้ว่า ถ้า  $Pr > 1$  แล้ว ไฮโดรไดนามิคบาวน์คาร์เลเยอร์ขยายเร็วกว่า บาวน์คาร์เลเยอร์ของความร้อนมาก ( $x_{fd} > x_{fd,t}$ ) และจะกลับกันถ้า  $Pr < 1$  สำหรับค่า  $Pr$  สูงๆ เช่น น้ำมัน ( $Pr \geq 100$ )  $x_{fd}$  จะน้อยกว่า  $x_{fd,t}$  มากๆ และอาจสมมุติได้ว่ารูปทางของความเร็วที่ปรับตัวเต็มที่แล้วมีตลอดช่วงบริเวณทางเข้าของความร้อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทางกลับกันของไหลที่มีค่า Pr คำนวณ เช่น โลหะเหลว ( $Pr \leq 0.05$ ) รูปร่างอุณหภูมิอาจเป็นแบบปรับตัวเต็มที่แล้วได้เร็วมาก ในขณะที่รูปร่างของความเร็วยังอยู่ในช่วงกำลังก่อตัวอยู่ ส่วนในการไหลแบบเทอร์บูเลนต์เงื่อนไขทั้งสองเกือบจะเป็นอิสระไม่ขึ้นกับ Pr และโดยการประมาณคร่าวๆ ก่อน เราได้ว่า  $x_{fd} / D = 10$

#### 4.2.1 อุณหภูมิเฉลี่ย

ในเรื่องอุณหภูมิ จำเป็นต้องใช้อุณหภูมิเฉลี่ย ( $T_m$ ) ในลักษณะที่เหมือน  $u_m$  โดยให้ความหมายว่า

$$T_m = \frac{\int A_c \rho u c_v T dA_c}{m \cdot c_v} \quad (4.21)$$

สำหรับท่อกลม และเป็นกรณีการไหลที่อัดตัวไม่ได้ จะได้ว่า

$$T_m = \frac{2}{u_m r_0^2} \int_0^{r_0} u T r dr \quad (4.22)$$

ค่าของ  $T_m$  จะเปลี่ยนตามแนว  $x$  ถ้ามีความร้อนเข้าหรือออกจากของไหล ซึ่งต่างจาก  $u_m$  ที่มีค่าคงที่สำหรับท่อที่มีพื้นที่หน้าตัดคงที่

ฟลักซ์ความร้อน ( $q_s'$ ) ระหว่างของไหลกับผิวท่อที่จุดใดๆ หาได้จากกฎการเย็นตัวของนิวตัน

$$q_s' = h(T_s - T_m) \quad (4.23)$$

ซึ่ง  $h$  เป็นสัมประสิทธิ์การพาความร้อนที่ตำแหน่งใดๆ อย่างไรก็ตามมีความแตกต่างกันระหว่าง  $T_m$  และ  $T_\infty$  คงที่ในทิศทางของการไหล ส่วน  $T_m$  ต้องเปลี่ยนแปลงตามทิศทางนั่นคือ  $dT_m / dx$  จะไม่เป็นศูนย์ถ้ามีการถ่ายเทความร้อนเกิดขึ้น ค่าของ  $T_m$  เพิ่มตามระยะ  $x$  ถ้าการถ่ายเทความร้อนเป็นไปจากผิวสู่ของไหล ( $T_s > T_m$ ) และ  $T_m$  จะลดลงกับระยะ  $x$  ถ้า  $T_s < T_m$

#### 4.2.2 สภาวะการปรับตัวเต็มที่แล้ว (fully developed conditions)

เนื่องจากการพาความร้อนเกิดขึ้นจริงระหว่างผิวและของไหลนั้นคืออุณหภูมิของไหลต้องยังคงเปลี่ยนแปลงตามระยะ  $x$  สิ่งหนึ่งที่อยากรู้คือเกิดภาวะ Thermal fully developed หรือยัง สถานการณ์นี้จะแตกต่างไปจากกรณีการไหลของของไหลที่ซึ่ง  $(\partial u / \partial x) = 0$  ในช่วงบริเวณปรับตัวเต็มที่แล้ว ในทางกลับกันถ้ามีการพาความร้อนแล้ว ( $dT_m / dx$ ) เช่นเดียวกับ  $(\partial T / \partial x)$  ที่รัศมี  $r$  ใดๆ จะไม่เป็นศูนย์ ผลที่ตามมาคือรูปร่างของอุณหภูมิ  $T(r)$  จะเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องกับ  $x$  ซึ่งเปรียบเสมือนว่า สภาวะการปรับตัวเต็มที่แล้วของอุณหภูมิไม่เคยเกิดขึ้นเลยปรากฏการณ์นี้จะต้องจัดใหม่ให้อยู่ในรูปไว้รมิตของอุณหภูมิเพื่อให้ได้เงื่อนไขนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับการนำแบบทรานเซียนท์และสมการอนุรักษ์พลังงาน ให้ความแตกต่างอุณหภูมิไว้  
มิติในรูป  $(T_s - T)/(T_s - T_m)$  ซึ่งเป็นเงื่อนไขที่มีอยู่จริงซึ่งอัตราส่วนนี้จะเป็นอิสระกับ  $x$  นั่นคือ  
ถึงแม้ว่า  $T(r)$  ยังคงเปลี่ยนอย่างต่อเนื่องกับ  $x$  แต่รูปร่างสัมพัทธ์ของ profile นี้จะไม่เปลี่ยนแปลง  
เลข และการไหลแบบนี้เรียกว่า “การไหลปรับตัวเต็มที่แล้วทางความร้อน” (Thermally fully  
developed) และจะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T_s(x) - T(r, x)}{T_s(x) - T_m(x)} \right]_{f, t} = 0 \quad (4.24)$$

โดยที่  $T_s$  เป็นอุณหภูมิผิวท่อ  $T$  เป็นอุณหภูมิของไหลที่ตำแหน่งใดๆ

$T_m$  เป็นอุณหภูมิเฉลี่ยของของไหลทั่วพื้นที่หน้าตัดของท่อ

เงื่อนไขที่กำหนดให้สำหรับสมการ (4.24) ซึ่งจะเกิดขึ้นในท่ออาจจะเป็นกรณี  $q_s'$  คงที่  
หรือ  $T_2$  คงที่ก็ได้ เงื่อนไขที่ผิวแบบนี้เกิดขึ้นมากในทางวิศวกรรม เช่นในผนังท่อที่ซึ่งได้รับความ  
ร้อนจากไฟฟ้าหรือผิวภายนอกที่ได้รับความร้อนจากการแผ่รังสีอย่างสม่ำเสมอจะเป็นกรณีของ  $q_s'$   
คงที่ ส่วนกรณี  $T_2$  คงที่จะเกิดขึ้นถ้ามีการเปลี่ยนสถานะ (เนื่องจากการเดือดหรือการควบแน่น)  
เกิดขึ้นที่ผิวภายนอก

สังเกตว่าเป็นไปไม่ได้ที่จะเกิดเงื่อนไขทั้งสองอย่างนี้พร้อมกัน (เกิดกรณี  $T_s$  และ  $q_s'$  คงที่  
พร้อมกัน) ถ้า  $q_s'$  คงที่  $T_s$  ต้องแปรเปลี่ยนกับระยะ  $x$  ในทางกลับกันถ้า  $T_s$  คงที่  $q_s'$  ต้อง  
แปรเปลี่ยนกับ  $x$

รูปแบบที่สำคัญจำนวนมาของการไหลที่ปรับตัวแล้วทางความร้อน (Thermally developed  
flow) มักอ้างถึงสมการ (4.24) เพราะว่าอัตราส่วนอุณหภูมินี้เป็นอิสระกับ  $x$  ค่าอนุพันธ์ของ  
อัตราส่วนนี้เทียบกับ  $r$  ต้องไม่ขึ้นกับ  $x$  การหาค่าอนุพันธ์นี้ที่ผิวท่อ (สังเกตว่า  $T_s$  และ  $T_m$  คงที่)  
เราจะได้

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{T_s - T}{T_s - T_m} \right)_{r=r_0} = \frac{-\partial T / \partial r_{r=r_0}}{T_s - T_m} \neq f(x)$$

แทน  $\partial T / \partial r$  จากกฎของฟูเรียร์ ซึ่งจากรูป 4.25 อยู่ในรูป

$$q_s' = -k \frac{\partial T}{\partial y}_{y=0} = k \frac{\partial T}{\partial r}_{r=r_0}$$

และสำหรับ  $q_s'$  จากกฎการเอ็นตันของนิวตัน จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{h}{k} \neq f(x) \quad (4.25)$$

ดังนั้นการไหลแบบปรับตัวเต็มที่แล้วของอุณหภูมิของของไหล โดยมีคุณสมบัติต่างๆ คงที่ ค่า  $h$  ที่ตำแหน่งใดๆ จะคงที่ ไม่ขึ้นกับระยะ  $x$

#### 4.3 สหพันธ์การพาความร้อน : การไหลแบบลามินาร์ในท่อกลม

##### 4.3.1 ช่วงบริเวณที่ปรับตัวเต็มที่แล้ว (fully developed region)

ที่จุดใดๆ ในท่อ สมการพลังงานจะเป็น

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (4.31)$$

สมการนี้อยู่ในรูปที่เหมือนกับสมการบาวน์คาร์ลีเลอร์เว้นแต่ค่า viscous dissipation ไม่นำมาคิด

เทอมทางซ้ายมือของสมการ (4.31) นับเป็นการถ่ายเทพลังงานสุทธิโดยการเคลื่อนที่ของไหลทั้งก้อน (การพา) และเทอมทางขวามือนับเป็นการถ่ายเทพลังงานสุทธิโดยการนำในทิศทางตามแนวรัศมี

คำตอบของสมการ (4.31) ได้หาไว้แล้วสำหรับช่วงที่ปรับตัวเต็มที่แล้ว ในช่วงนี้การประมาณบาวน์คาร์ลีเลอร์ของความเร็วเป็นที่พอใจถูกต้อง นั่นคือ  $v=0$  และ  $(\partial u / \partial x) = 0$  สำหรับกรณีของรูปร่างความเร็วตามแนวแกนเป็นแบบพาราโบลา นอกจากนี้สำหรับกรณีฟลักซ์ความร้อนที่ผิวคงที่การประมาณบาวน์คาร์ลีเลอร์ของอุณหภูมิก็นำให้ผลที่พอใจเช่นกัน นั่นคือ  $\partial^2 T / \partial x^2 = 0$  แทนการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิตามแนวแกนจากสมการ  $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{dx}$

$q_s' = \text{constant}$  และสำหรับความเร็วตามแนวแกน จากสมการ  $\frac{u(r)}{u_m} = 2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right]$  สมการ

พลังงาน (4.31) ลดรูปเป็น

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r dT) = \frac{2u_m}{\alpha} \frac{dT_m}{dx} \left[ 1 - (r/r_0)^2 \right] (q_s' = \text{คงที่}) \quad (4.32)$$

ซึ่งเทอม  $(2u_m / \alpha)(dT_m / dx)$  คงที่ โดยการแยกตัวแปรและอินทิเกรต 2 ครั้ง จะได้

$$T(r) = \frac{2u_m}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \left[ \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{16r_0^2} \right] + C_1 \ln r + C_2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษายเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ค่าคงที่ของการอินทิเกรต  $C_1$  และ  $C_2$  หาจากเงื่อนไขที่ขอบที่เหมาะสม ดังนี้

$T$  มีค่าจำกัดที่  $r=0$  (หรือ  $\partial T/\partial r=0$  ที่  $r=0$ ) จะได้  $C_1=0$  และ  $T(r_0)=T_s$  ที่ซึ่ง  $T_s$  แปรตาม  $x$  จะได้  $C_2=T_s-(2u_m/\alpha)(dT_m/dx)(3r_0^2/16)$  ดังนั้นสำหรับช่วงที่ปรับตัวเต็มที่แล้วและพลักซ์ความร้อนที่ผิวคงที่จะได้การกระจายของอุณหภูมิในรูป

$$T(r) = T_s - \frac{2u_m r_0^2}{\alpha} \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \left[ \frac{3}{16} + \frac{1}{16} \left( \frac{r}{r_0} \right)^4 - \frac{1}{4} \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

จากการรู้การกระจายของอุณหภูมิ ค่าพารามิเตอร์อื่นๆ ก็สามารถหาได้ เช่น ถ้ารูปร่างของความเร็วและอุณหภูมิ ตามสมการ (4.21) และ (4.33) โดยแทนในสมการ (4.22) และอินทิเกรตทั่วทั้ง  $r$  จะได้

$$T_m = T_s - \frac{11}{48} \left( \frac{u_m r_0^2}{\alpha} \right) \left( \frac{dT_m}{dx} \right) \quad (4.34)$$

จากสมการ  $\frac{dT_m}{dx} = \frac{q_s' P}{m' c_p} = f(x)$  ซึ่ง  $P = \pi D$  และ  $m' = \rho u_m (\pi D^2 / 4)$  จะได้

$$T_m - T_s = - \frac{11}{48} \frac{q_s' D}{k} \quad (4.35)$$

โดยการรวมกฎการเขียนตัวของนิวตัน สมการ (4.23) และ (4.35) ได้ว่า

$$h = \frac{48}{11} \left( \frac{k}{D} \right)$$

หรือ  $Nu_D = (hD/k) = 4.36$  สำหรับ  $q_s'$  คงที่ (4.36)

ดังนั้นในท่อกลมที่มีคุณลักษณะพลักซ์ความร้อนที่ผิวคงที่ การไหลแบบลามินาร์ที่ปรับตัวเต็มที่แล้ว ค่าตัวเลขที่นัมเบอร์จะคงที่ไม่ขึ้นกับ  $Re_D, Pr$  และตำแหน่งตามแนวแกน  $x$

## บทที่ 5 แบบจำลองการวิเคราะห์

### 5.1 บทนำ

ในบทนี้แสดงแบบจำลองการวิเคราะห์ในโปรแกรม Star CD ซึ่งเราได้แบ่งการจำลองลักษณะการวางท่อเป็น 3 ลักษณะคือ

1. การวางท่อแบบอนุกรม
2. การวางท่อแบบขนาน
3. การออกแบบโดยพัฒนามาจากแบบจำลองของท่ออนุกรม

การจำลองการทดสอบทาง Simulation นี้สามารถช่วยลดค่าใช้จ่ายในการทดสอบหาประสิทธิภาพของการวางท่อในแต่ละกรณีเป็นอย่างมากและให้คำตอบที่ถูกต้องแม่นยำเป็นที่ยอมรับในการนำไปใช้งานจริง

การจำลองลักษณะการวางท่อในแต่ละแบบในการวิจัยนี้จะใช้โปรแกรม Unigraphics NX4. ในการขึ้นรูปเป็น Solid 4 ชิ้น มีน้ำ ทองแดง อากาศ และ คอนกรีต จากนั้น Export Solid 4 ชิ้น เข้าสู่โปรแกรม Ansys เพื่อทำการสร้าง Mesh หลักในการสร้าง Mesh ขึ้นอยู่กับลักษณะการถ่ายเทความร้อน ในกรณีนี้ เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบ Conjugate Heat Transfer ขนาดของ Mesh Size ระหว่างของแข็งกับของไหลจึงต้องมีชั้นความหนาพิเศษเพื่อให้รองรับลักษณะของปัญหา จากนั้น Export Mesh เข้าสู่โปรแกรม Star CD 3.24 เพื่อทำการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน ขั้นตอนในการกำหนดเงื่อนไขต่างๆจะ ได้แสดงต่อไปนี้

## 5.2 การสร้างแบบจำลองการวางท่อแบบอนุกรม [4]

1. การสร้างแบบจำลอง โดยใช้โปรแกรม Unigrahic NX4 โดยมีขนาดความยาวท่อ 5.4 เมตร เส้นผ่านศูนย์กลาง 29.4 มิลลิเมตร และเป็นท่อทองแดงหนา 2 มิลลิเมตร

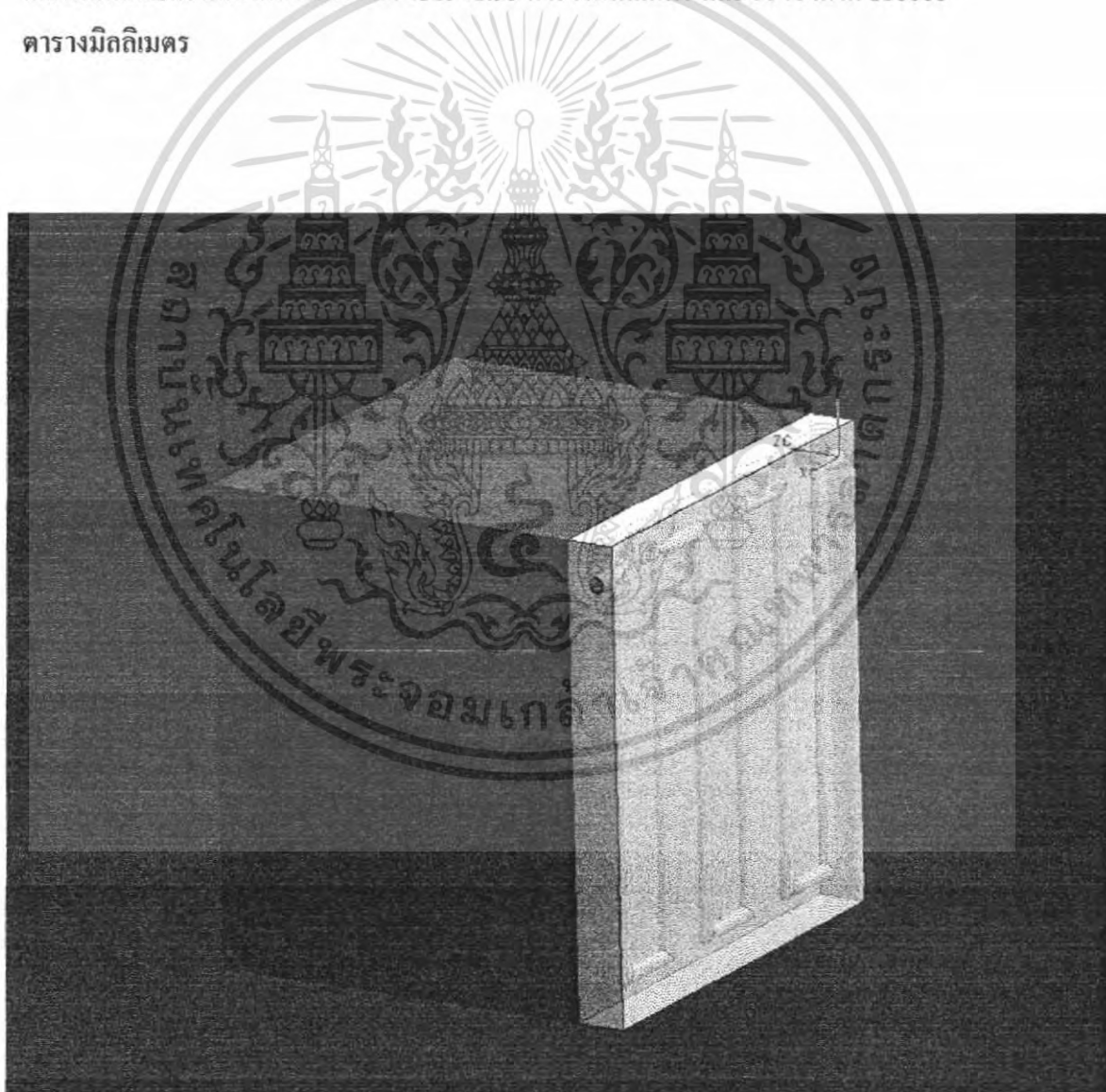
การขุดท่อให้มีระยะพิทช์ 150 มิลลิเมตร ขนาดของคอนกรีต กว้าง 0.9 เมตร ยาว 0.9 เมตร หนา 0.1 เมตร โดยการวางท่อให้ห่างจากผนังด้านใน 65 มิลลิเมตร และ

ห่างจากผนังด้านนอก 35 มิลลิเมตร ปริมาตรของอากาศภายในห้อง 0.648 ลูกบาศก์เมตร

การสร้างแบบจำลอง โดยกำหนดให้เป็น Solid 4 ชั้น 1. อากาศ 2. น้ำ 3. ทองแดง 4. คอนกรีต

มีพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของน้ำ 431941.95 ตารางมิลลิเมตร และของอากาศ 810000

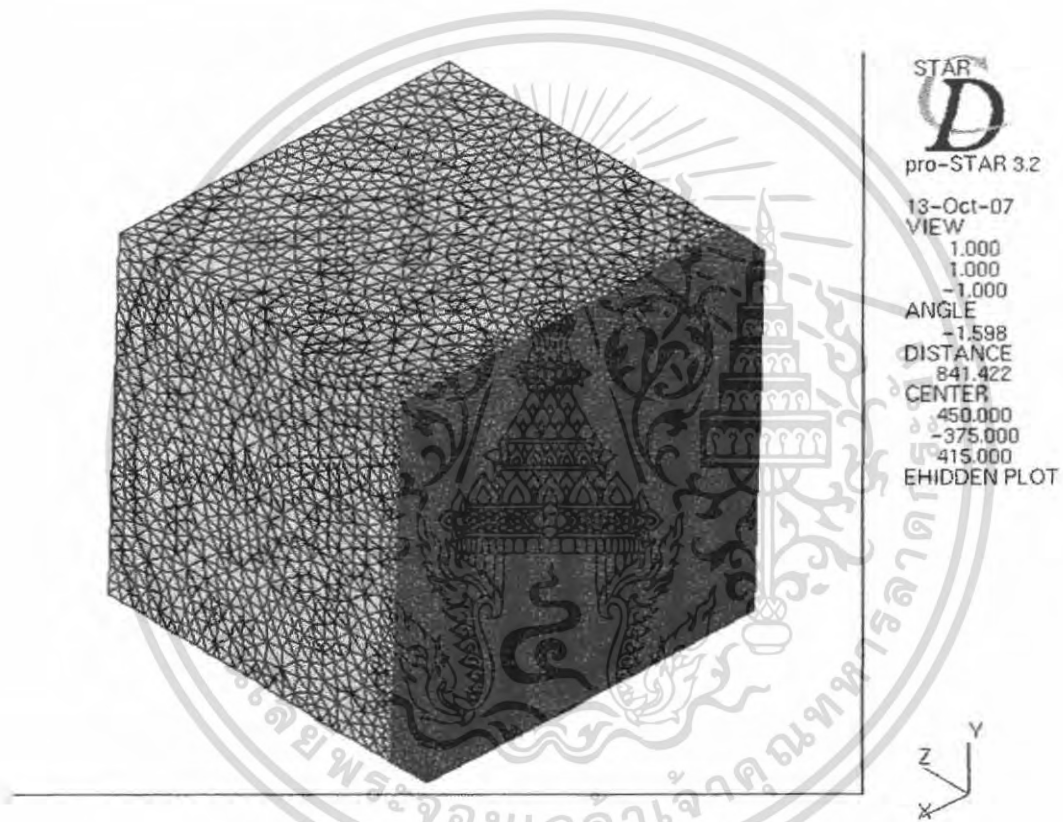
ตารางมิลลิเมตร



รูปที่ 5.1 แสดงลักษณะการวางท่อแบบอนุกรมขึ้นรูปโดยโปรแกรม Unigrahic NX4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

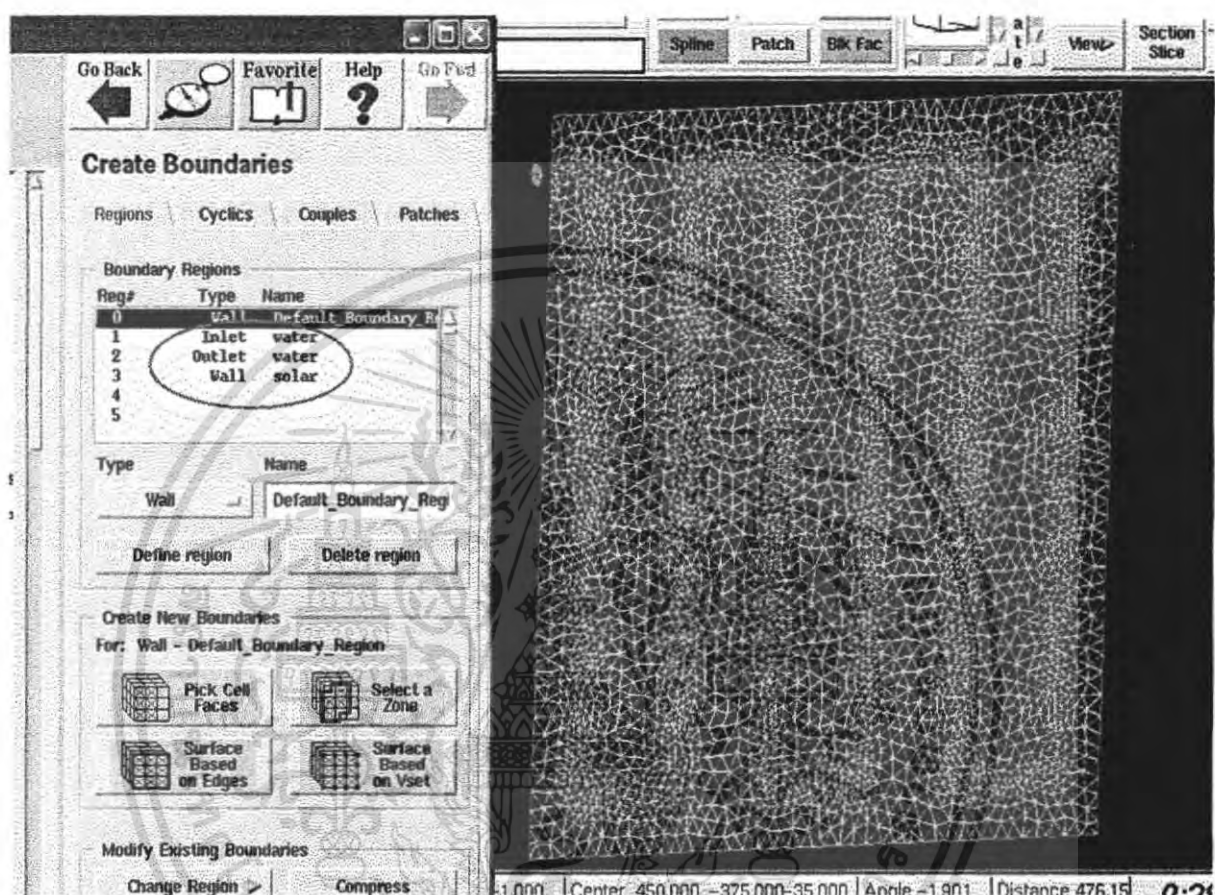
2. การสร้าง Mesh โดยใช้โปรแกรม Ansys การกำหนดขนาดของ Mesh size บริเวณผิวสัมผัสระหว่างของแข็งกับของไหลซึ่งเป็นการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกต์กำหนดให้ผิวสัมผัสระหว่างน้ำกับทองแดงมีขนาดของ Mesh size เท่ากับ 5 และผิวสัมผัสระหว่างอากาศกับคอนกรีตมีขนาดของ Mesh size เท่ากับ 37.5



รูปที่ 5.2 Mesh generation 1100000 cell สร้างโดยใช้โปรแกรม Ansys

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3. การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของการไหล

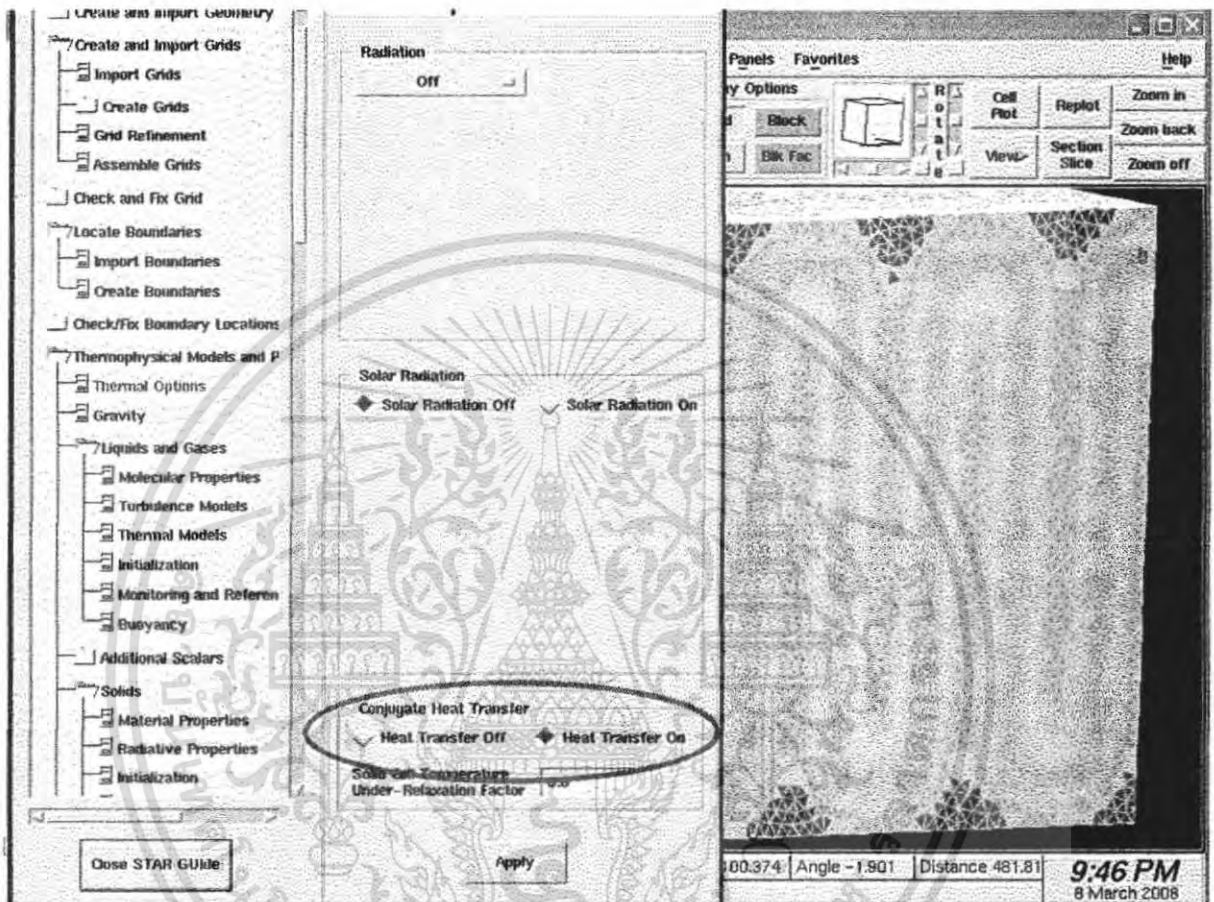


รูปที่ 5.3 แสดงการกำหนดขอบเขตของของไหล

กำหนดขอบเขตของของไหลให้หมายเลข 1 คือทางเข้าของของไหล หมายเลข 2 คือทางออกของของไหล หมายเลข 3 คือผนัง เป็นส่วนของผนังด้านนอกที่รับแสงอาทิตย์ส่วนด้านอื่นๆ ที่ไม่ได้กำหนดโปรแกรมจะกำหนดให้เป็นผนังเองโดยอัตโนมัติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4. การกำหนดลักษณะการถ่ายเทความร้อน

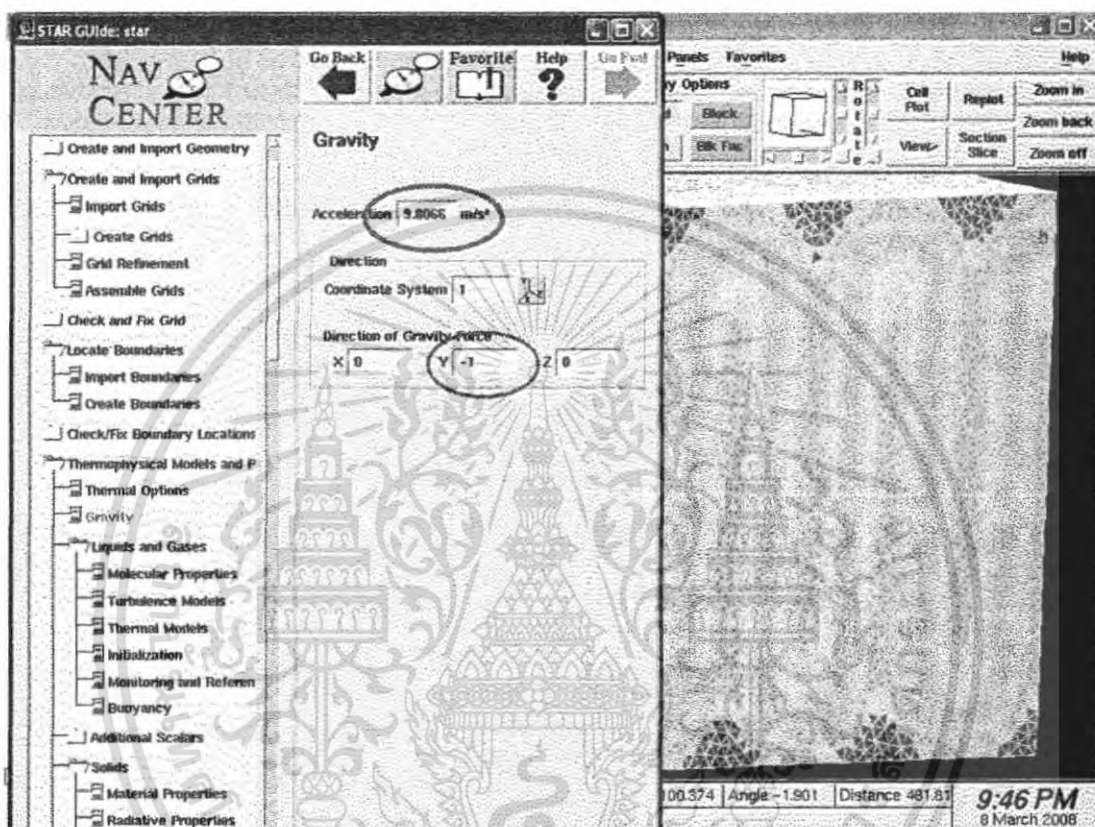


รูปที่ 5.4 การกำหนดให้การถ่ายเทความร้อนเป็นแบบ Conjugate Heat transfer

เป็นการกำหนดให้โปรแกรมทราบลักษณะปัญหาของการถ่ายเทความร้อน กำหนดให้เป็นการถ่ายเทความร้อนแบบ Conjugate Heat Transfer ก็จะเป็นการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งกับของไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5. กำหนดให้แรงโน้มถ่วงมีผลต่อพฤติกรรมของของไหล

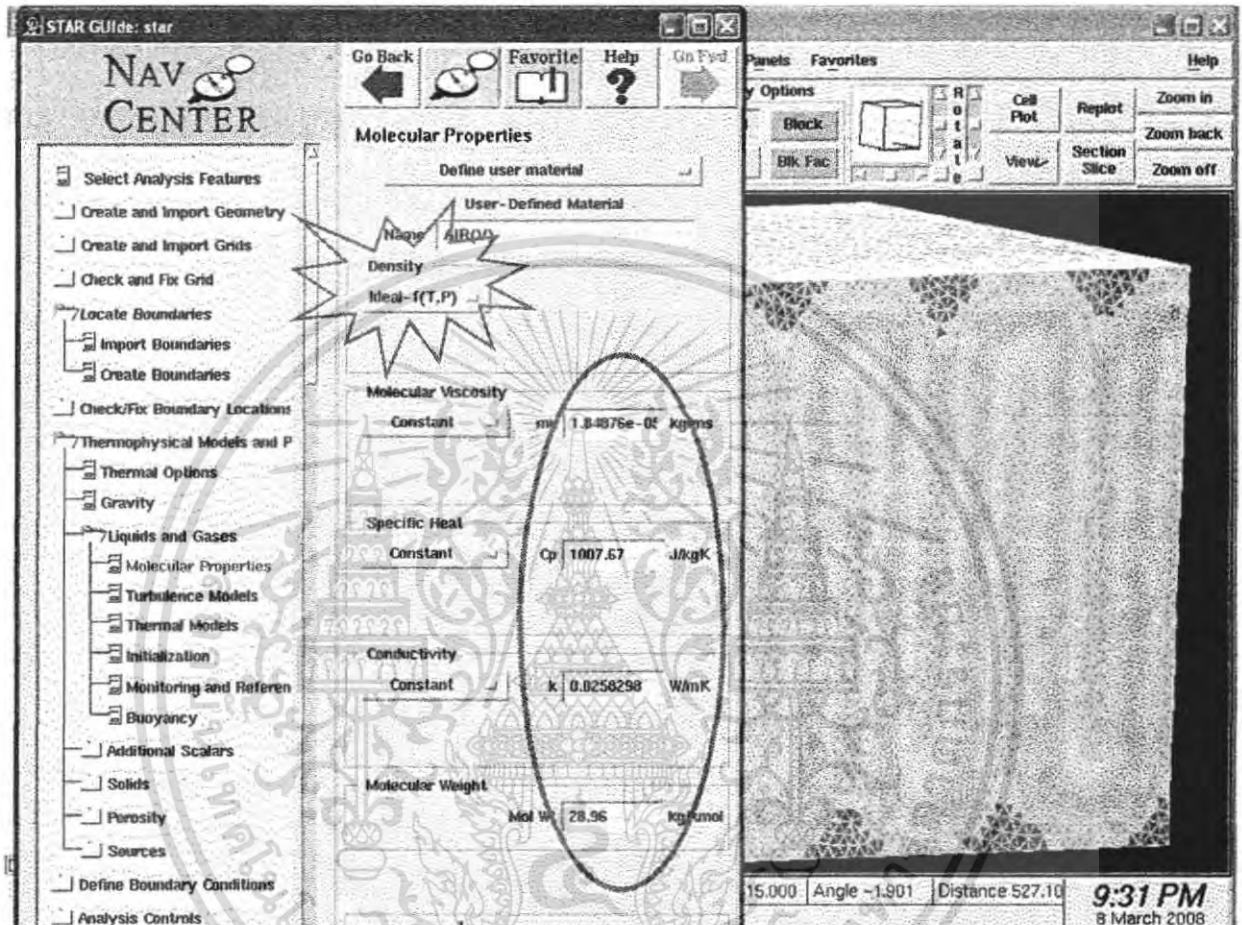


รูปที่ 5.5 การกำหนดให้แรงโน้มถ่วงมีผลต่อพฤติกรรมของของไหล

กรณีที่มีการเคลื่อนที่ของอากาศภายในห้องเนื่องจากแรงลอยตัวและการไหลของน้ำภายในท่อในแนวตั้งฉาก นั้นแรงเนื่องจากน้ำหนักมีผลต่อพฤติกรรมการเคลื่อนที่ของอากาศทำให้แรงโน้มถ่วงของโลกนี้มีผลต่อการเคลื่อนที่ของของไหล กำหนดให้แรงโน้มถ่วงของโลกเท่ากับ  $9.8066 \text{ m/s}^2$  และกำหนดให้มีทิศทางตามแนวแกน  $-Y$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 6. กำหนดคุณสมบัติของของอากาศ



รูปที่ 5.6 การกำหนดคุณสมบัติของอากาศ

การกำหนดคุณสมบัติของอากาศจะกำหนดจะกำหนดให้ความหนาแน่นของอากาศเปลี่ยนแปลงขึ้นอยู่กับอุณหภูมิและความดัน

ความหนืดของอากาศกำหนดให้เป็นค่าคงที่เท่ากับ  $1.84876 \times 10^{-5}$  kg/ms

ค่าความร้อนจำเพาะกำหนดให้เป็นค่าคงที่เท่ากับ 1007.67 J/kgK

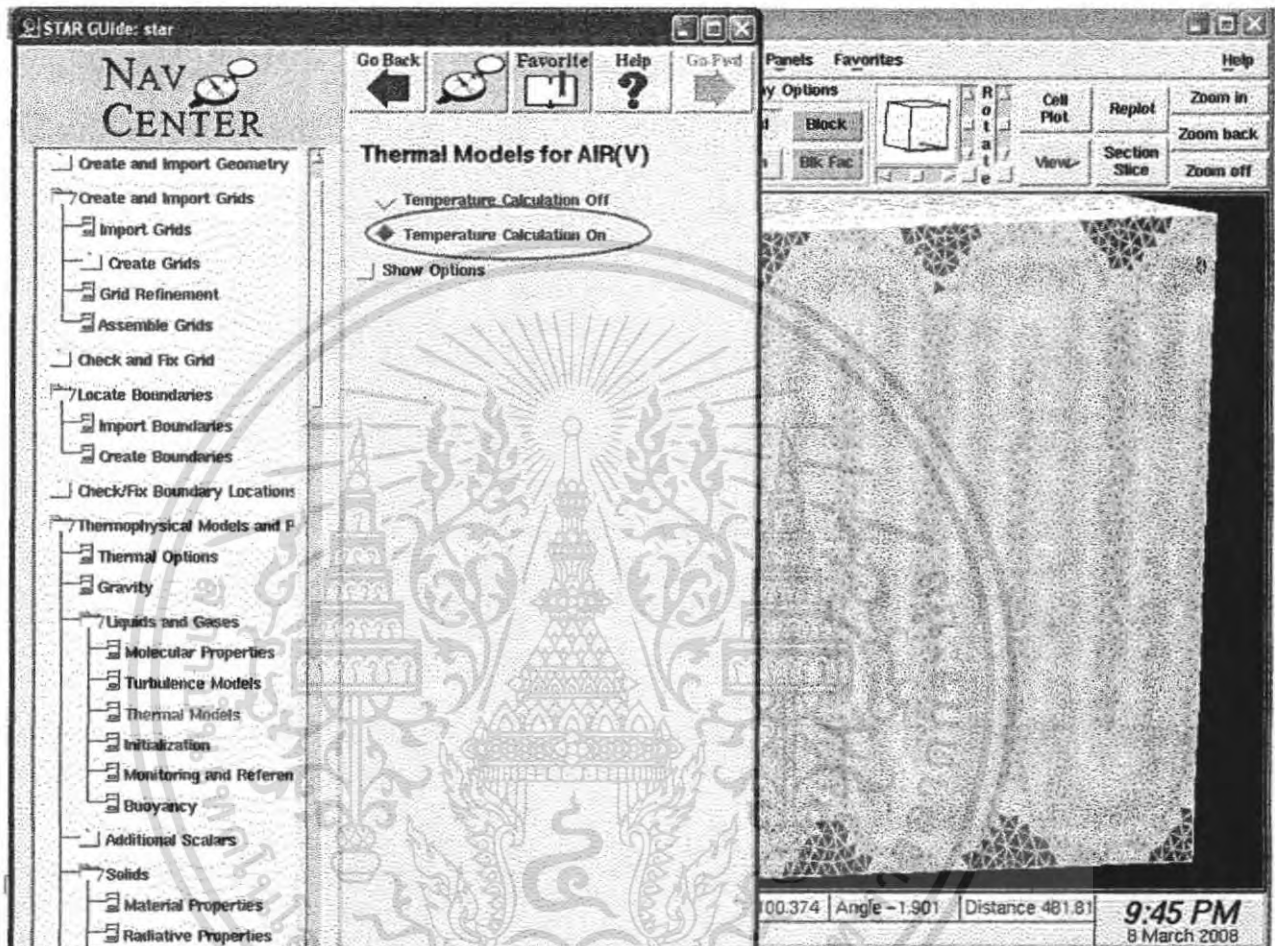
ค่าการนำความร้อนกำหนดให้เป็นค่าคงที่เท่ากับ 0.0258298 W/mK

และน้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ 28.96 kg/kmol

คุณสมบัติที่เป็นค่าคงที่ต่างๆเหล่านี้กำหนดที่อุณหภูมิ 30 องศาเซลเซียส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 7. กำหนดการคำนวณหาเอนทาลปีให้ใช้สมการอนุรักษ์เอนทาลปี



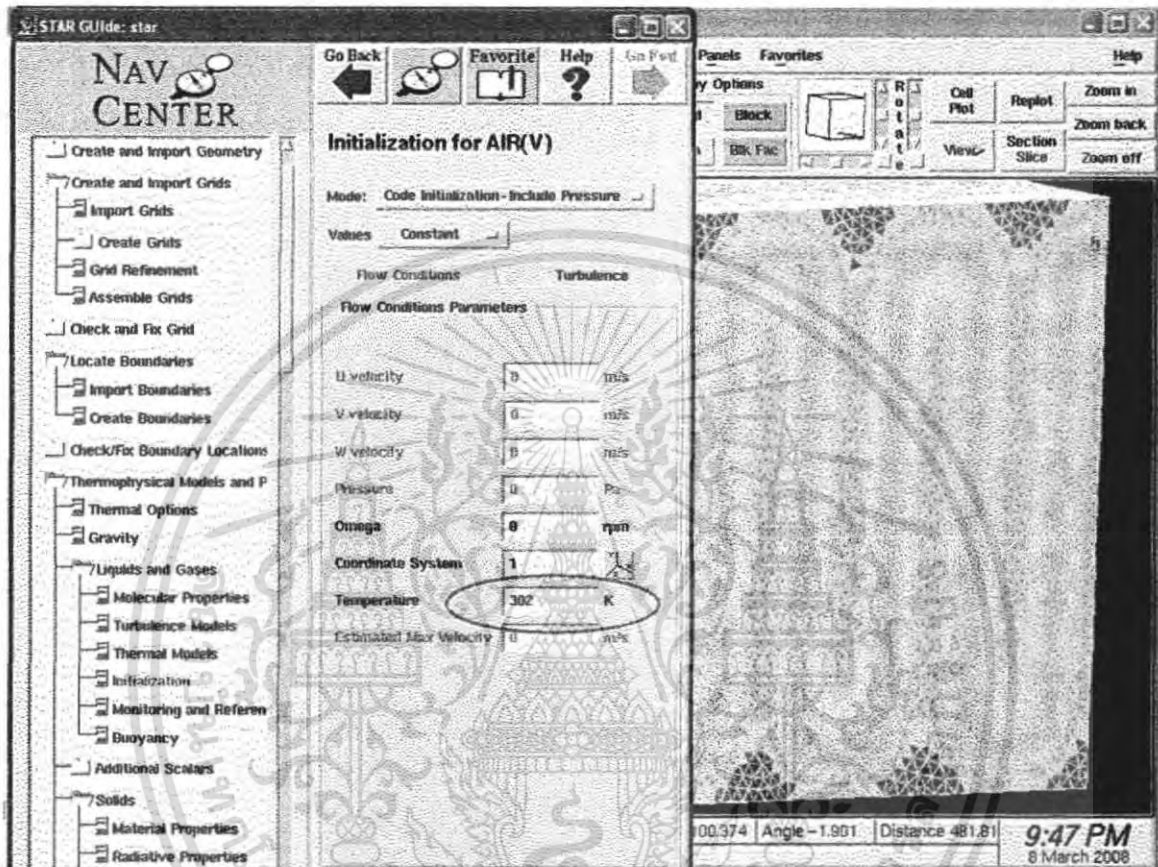
รูปที่ 5.7 แสดงการกำหนดสมการที่ใช้ในการคำนวณ

กำหนดสมการที่ใช้ในการคำนวณหาเอนทาลปีซึ่งก็คือสมการอนุรักษ์เอนทาลปี

$$\rho \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{h,j}}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

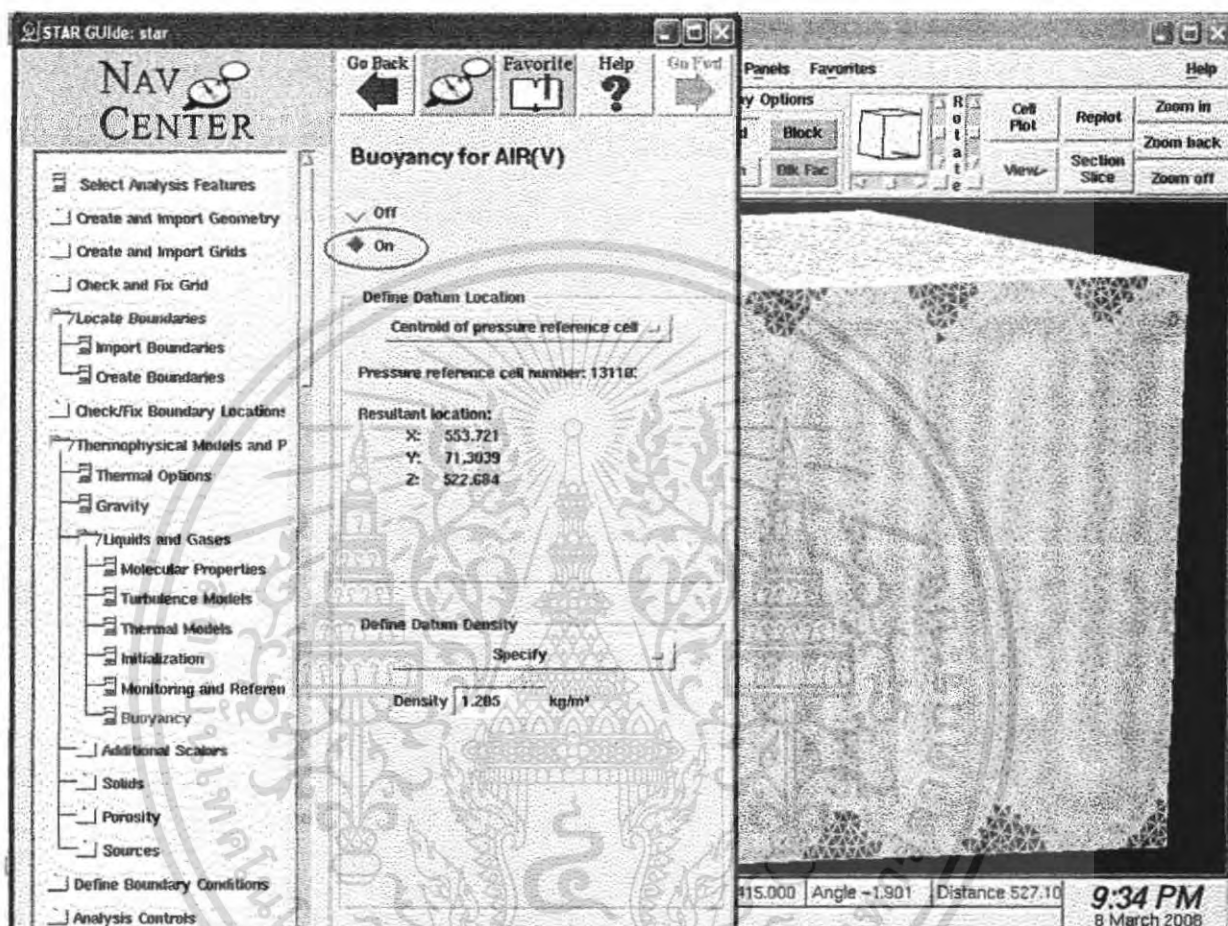
8. การกำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของอากาศที่ใช้ในการคำนวณ  
กำหนดให้อุณหภูมิของอากาศเริ่มต้นเท่ากับ 302 องศาเซลวิน



รูปที่ 5.8 การกำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของอากาศเท่ากับ 302 องศาเซลวิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 9. กำหนดให้อากาศได้รับผลกระทบเนื่องจากแรงลอยตัว

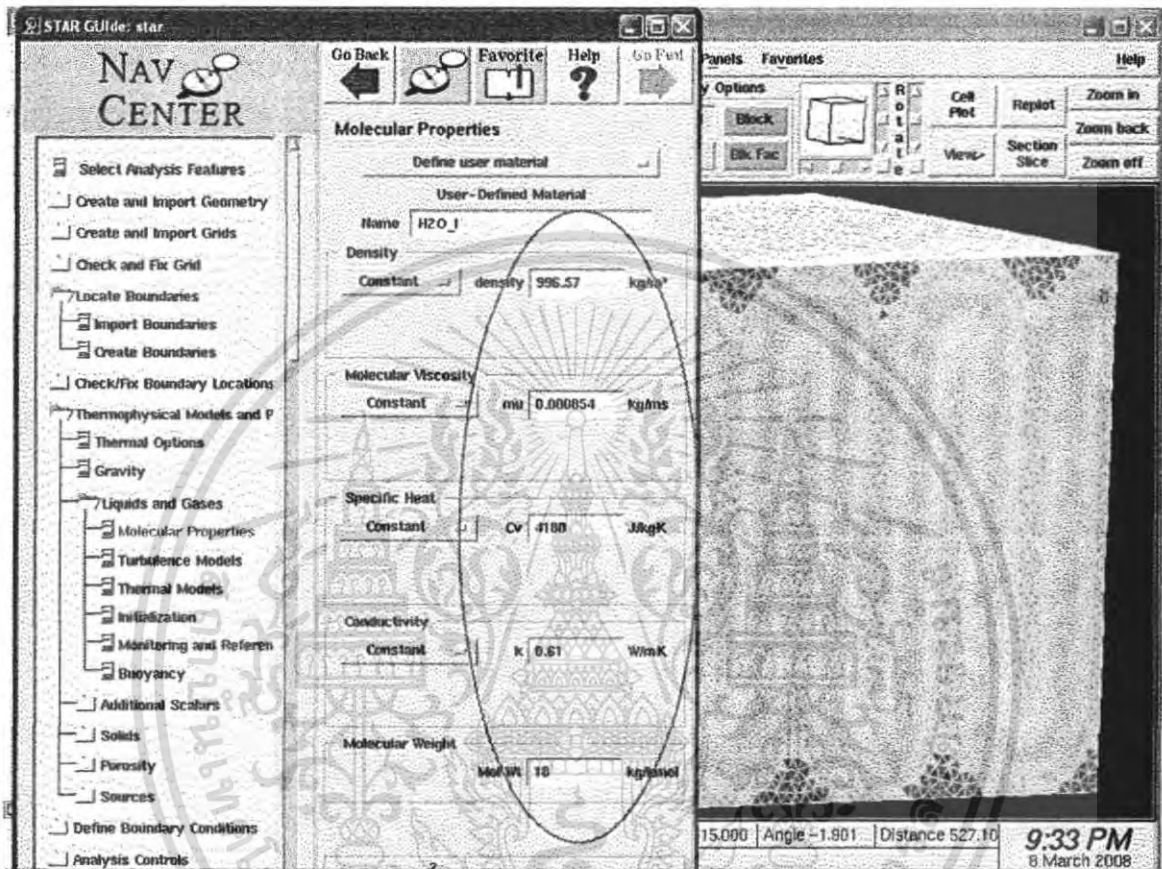


รูปที่ 5.9 การกำหนดแรงลอยตัวของอากาศ

เมื่ออากาศได้รับความร้อนจากผนังทำให้อุณหภูมิเพิ่มขึ้นความหนาแน่นของอากาศลดลงอากาศที่เบากว่าจะลอยตัวสูงขึ้นอากาศที่หนักกว่าจะเข้ามาแทนที่ทำให้แรงลอยตัวของอากาศมีผลต่อการพาความร้อนอย่างมาก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 10. กำหนดคุณสมบัติของน้ำ



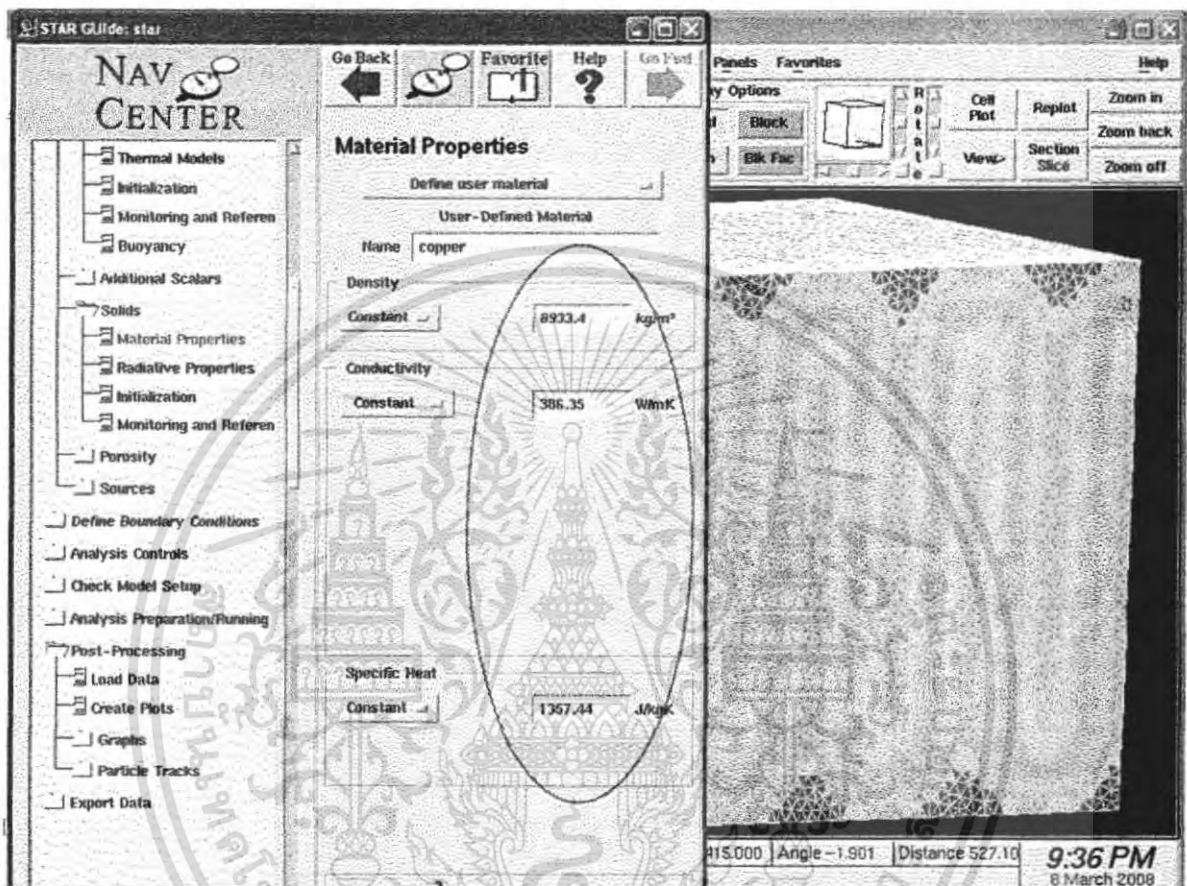
รูปที่ 5.10 การกำหนดคุณสมบัติของน้ำ

เนื่องจากการทดลองการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของน้ำทำให้คุณสมบัติของน้ำเปลี่ยนแปลงน้อยมากจึงกำหนดให้เป็นค่าคงที่ได้โดยมีคุณสมบัติต่างๆดังนี้

ความหนาแน่นเท่ากับ  $996.57 \text{ kg/m}^3$       ความหนืดเท่ากับ  $0.000854 \text{ kg/ms}$   
 ความร้อนจำเพาะเท่ากับ  $4180 \text{ J/kgK}$       การนำความร้อน  $0.61 \text{ W/mK}$   
 น้ำหนักโมเลกุลเท่ากับ  $18 \text{ kg/kmol}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 11. กำหนดคุณสมบัติของทองแดง



รูปที่ 5.11 การกำหนดคุณสมบัติของทองแดง

การกำหนดคุณสมบัติของทองแดงเรากำหนดให้เป็นค่าคงที่

ความหนาแน่นเท่ากับ  $8933.4 \text{ kg/m}^3$

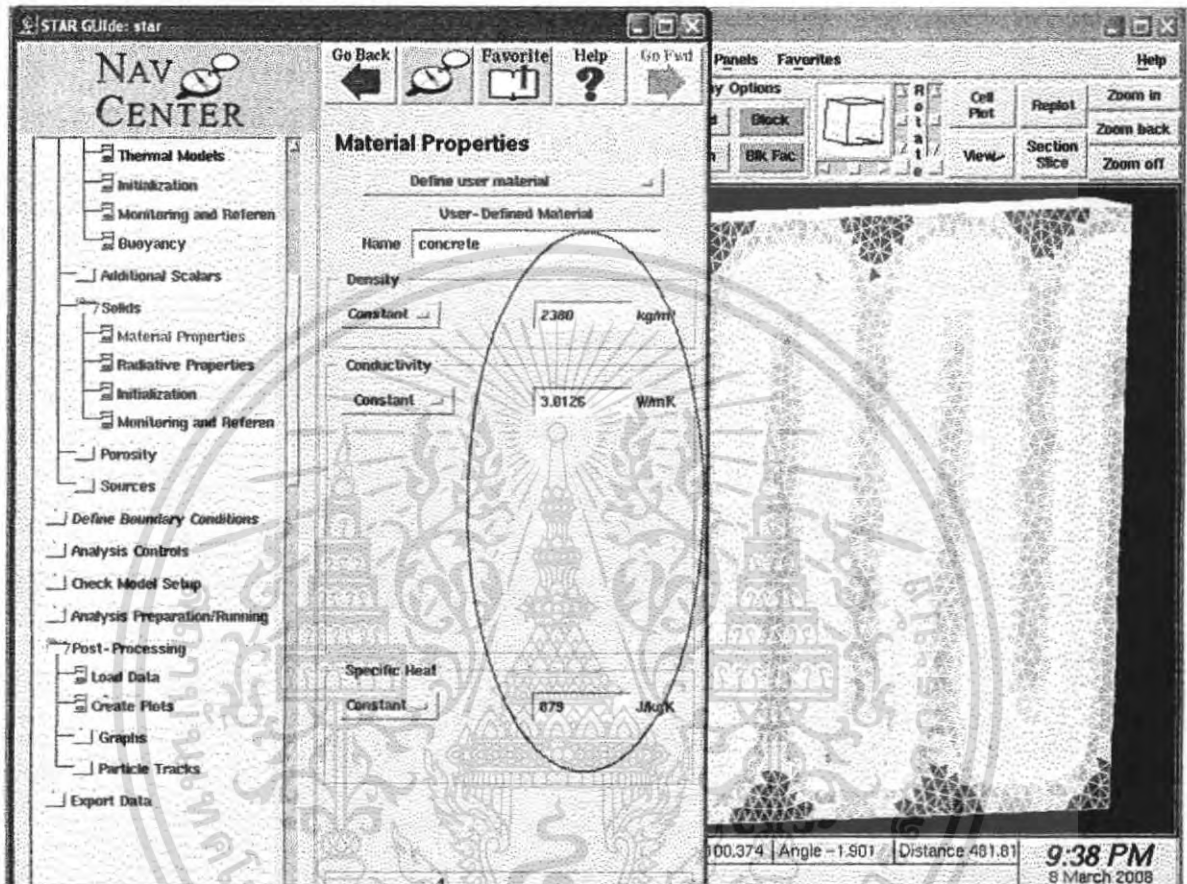
การนำความร้อน  $386.35 \text{ W/mK}$

ความร้อนจำเพาะ  $1357.44 \text{ J/kgK}$

กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของการคำนวณเท่ากับ 300 องศาเซลวิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 12. กำหนดคุณสมบัติของคอนกรีต

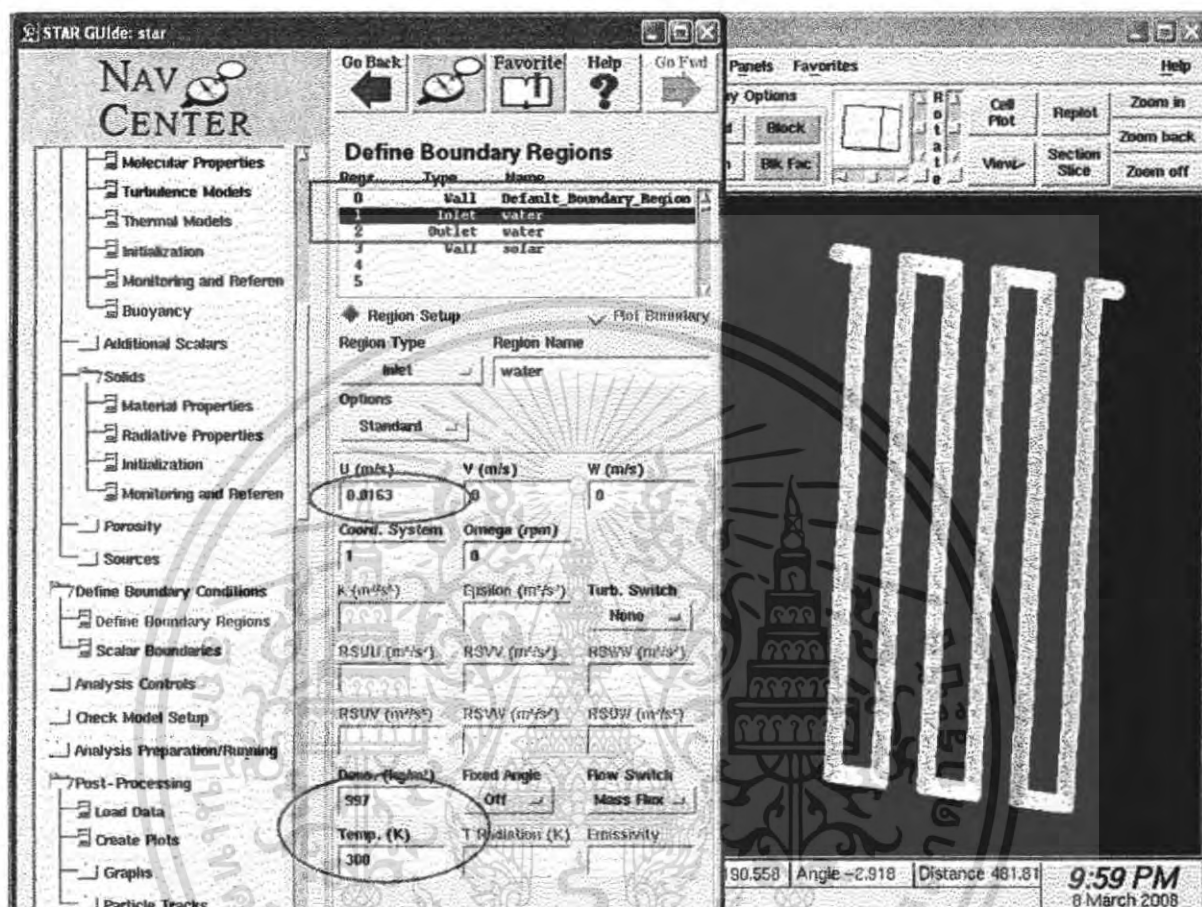


รูปที่ 5.12 การกำหนดคุณสมบัติของคอนกรีต

การกำหนดคุณสมบัติของคอนกรีตเรากำหนดให้เป็นค่าคงที่  
 ความหนาแน่นเท่ากับ  $2380 \text{ kg/m}^3$   
 การนำความร้อน  $3.0126 \text{ W/mK}$   
 ความร้อนจำเพาะ  $879 \text{ J/kgK}$   
 กำหนดอุณหภูมิเริ่มต้นของการคำนวณเท่ากับ 300 องศาเซลวิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

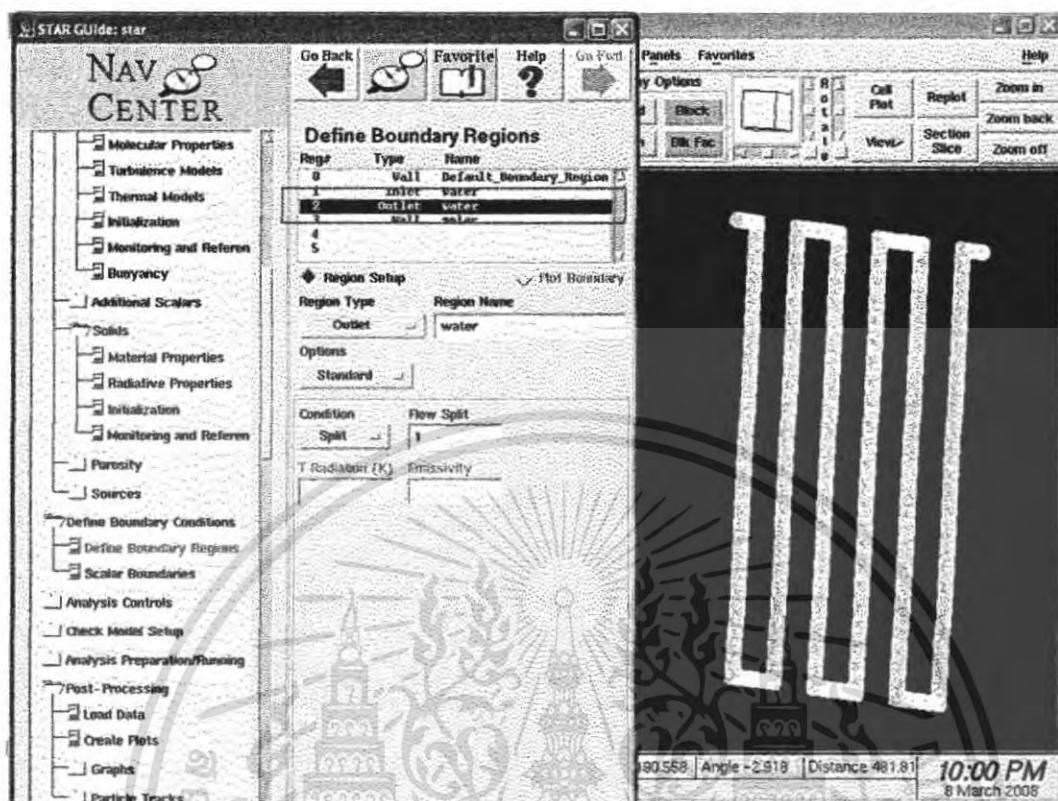
### 13. กำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆในของไหล



รูปที่ 5.13 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของขอบเขตทางเข้าของน้ำ

ในกรณีเริ่มต้นจะกำหนดให้ความเร็วของน้ำที่ทางเข้าเท่ากับ  $0.0163 \text{ m/s}$  ที่อุณหภูมิ  $300 \text{ K}$  ความหนาแน่นเท่ากับ  $997 \text{ kg/m}^3$  โดยในกรณีต่อไปจะมีการเพิ่มความเร็วการไหลที่ทางเข้าเพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนที่แต่ละความเร็วการไหลโดยจะเปลี่ยนแปลงความเร็ว  $0.00815, 0.0163, 0.0326, 0.0652, 0.1304 \text{ m/s}$

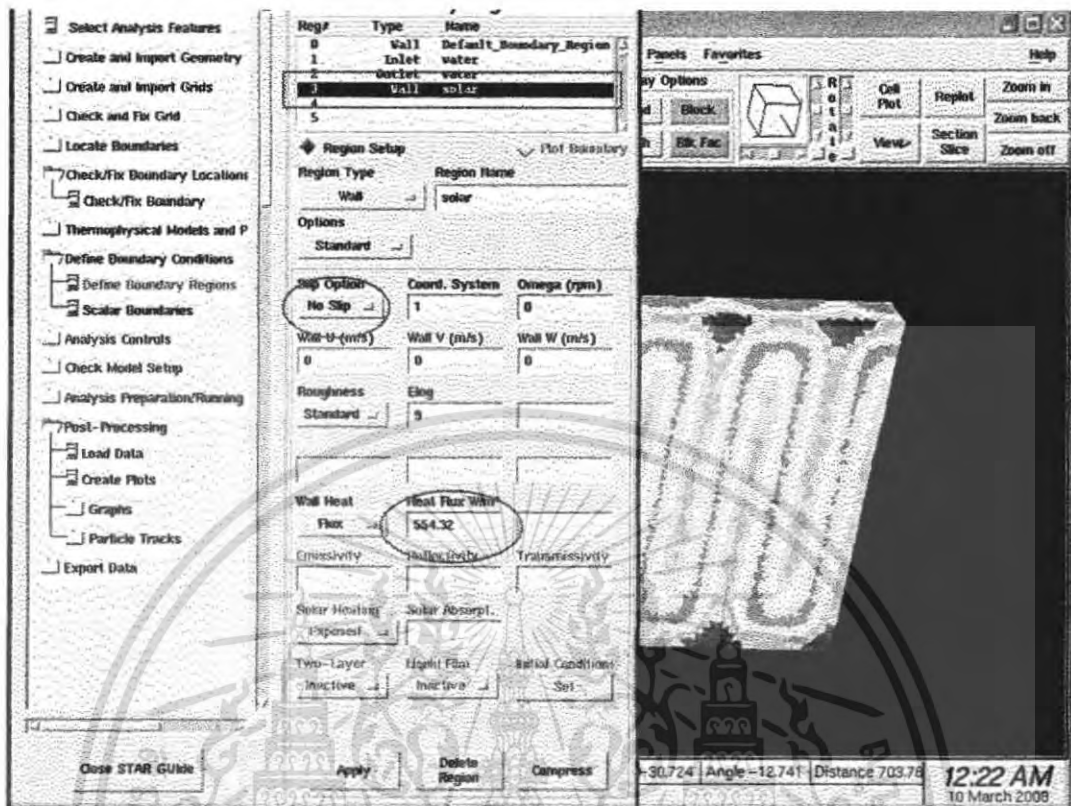
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.14 แสดงการกำหนดขอบเขตของของไหลที่ทางออก

ในกรณีของการกำหนดขอบเขตของของไหลที่ทางออกนั้นจะปล่อยให้ป็นธรรมชาติ  
คือ ไม่ได้ใส่ค่าคุณสมบัติใดๆเลยที่ทางออก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

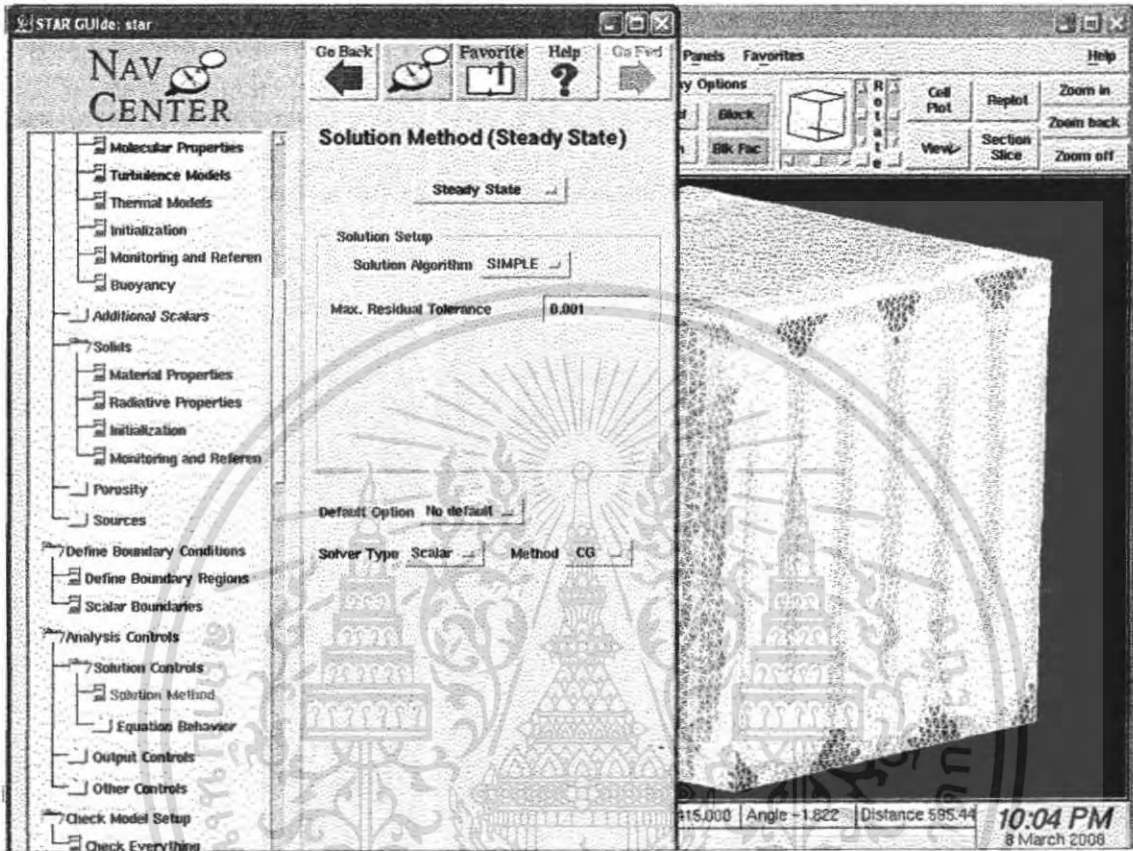


รูปที่ 5.15 แสดงการกำหนดขอบเขตของผนัง

การกำหนดขอบเขตของผนังด้านนอกที่มีการรับความร้อนจากแสงอาทิตย์โดยกำหนดความร้อนจากแสงอาทิตย์ต่อพื้นที่ผิวที่รับแสงมีค่าเท่ากับ  $554.32 \text{ W/m}^2$  และเป็นผนังที่ไม่มีกระแสไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 14. กำหนดวิธีการคำนวณ

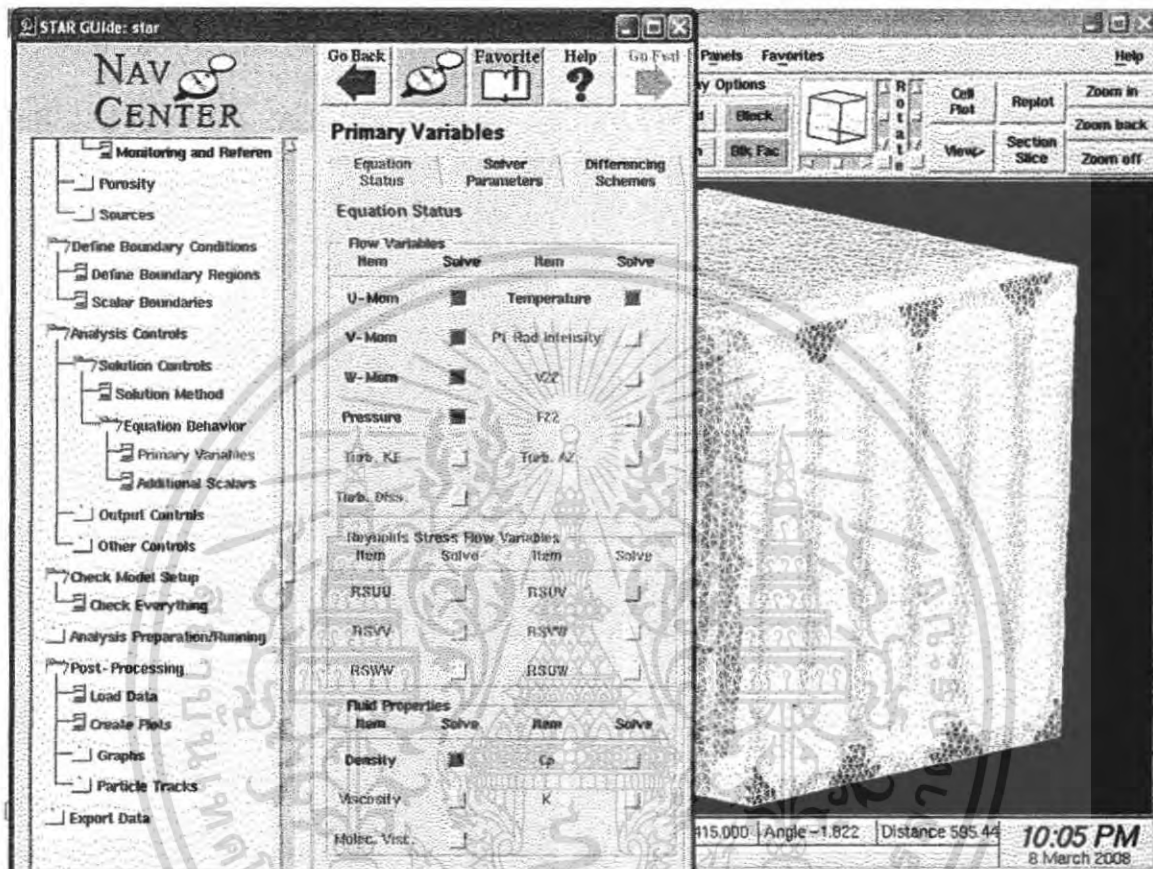


รูปที่ 5.16 แสดงการกำหนดวิธีการคำนวณ

การกำหนดวิธีการคำนวณกำหนดให้เป็นแบบไม่ขึ้นกับเวลา (Steady State) โดยใช้วิธี SIMPLE

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

15. เลือกสมการที่ใช้ในการคำนวณ

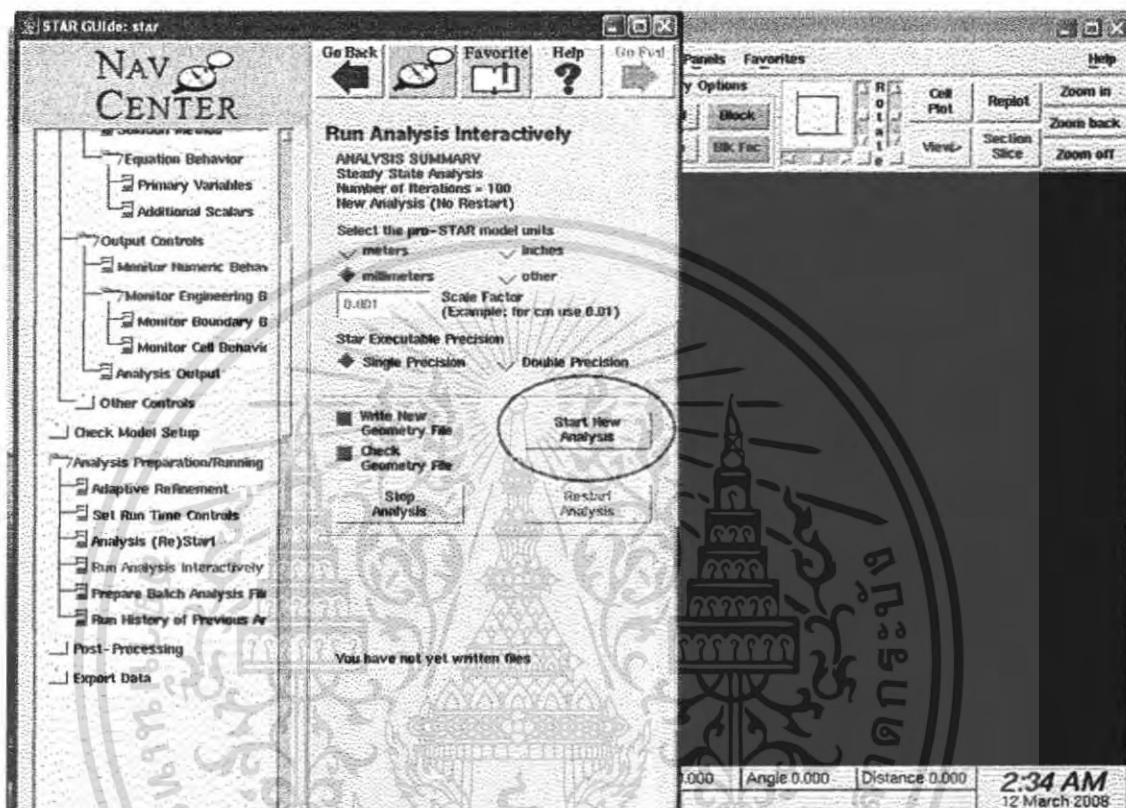


รูปที่ 5.17 แสดงสมการที่เลือกใช้ในการคำนวณ

เลือกสมการที่ใช้ในการคำนวณ ในที่นี้เลือกสมการโมเมนต์ในแนวแกน x,y,z สมการความร้อน และ สมการความดัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 16. สั่งให้โปรแกรมเริ่มคำนวณ

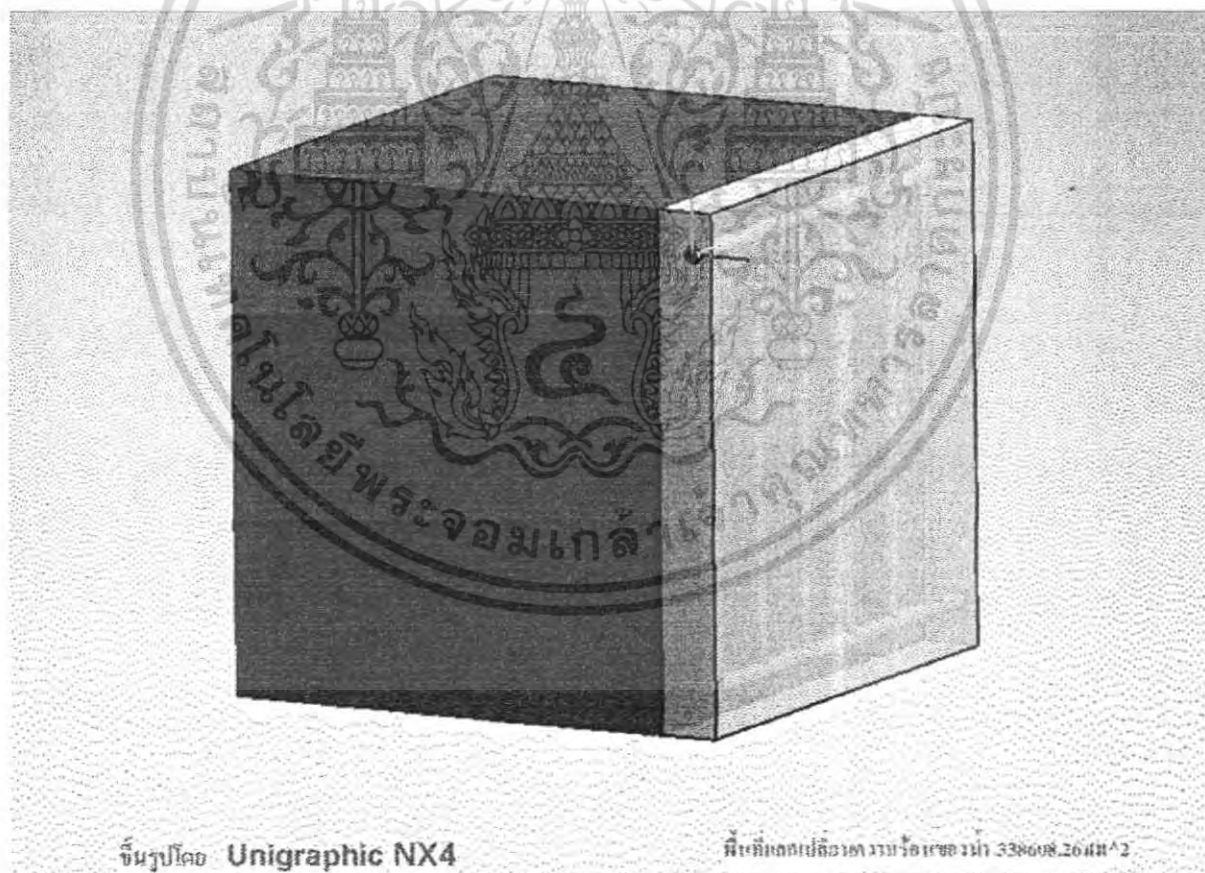


รูปที่ 5.18 แสดงการสั่งให้โปรแกรมเริ่มคำนวณ

เลือกหน่วยเป็น Millimeters และสั่งให้เริ่มคำนวณเลือก Start New Analysis

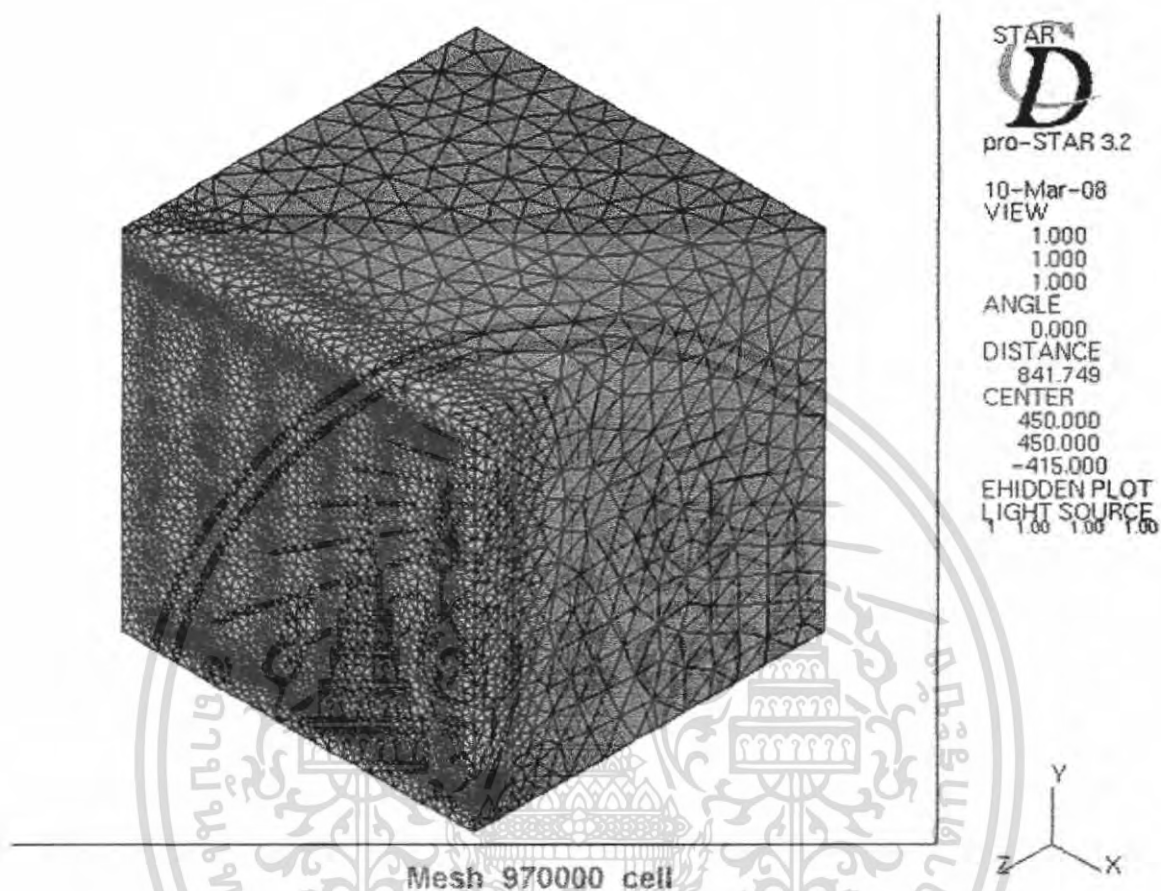
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.3 การสร้างแบบจำลองการวางท่อแบบขนาน [3] โดยใช้โปรแกรม Unigraphics NX4 โดยมีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 29.4 มิลลิเมตร ยาว 750 มิลลิเมตร จำนวน 2 ท่อ และมีท่อเล็กขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง 12 มิลลิเมตร จำนวน 6 ท่อ เชื่อมต่อระหว่าง 2 ท่อหลักซึ่งท่อทั้งหมดเป็นทองแดงหนา 2 มิลลิเมตร การวางท่อให้มีระยะพิทช์ 150 มิลลิเมตร ขนาดของคอนกรีต กว้าง 0.9 เมตร ยาว 0.9 เมตร หนา 0.1 เมตร โดยวางท่อให้ห่างจากผนังด้านใน 65 มิลลิเมตร และ ห่างจากผนังด้านนอก 35 มิลลิเมตร และ ปริมาตรของอากาศภายในห้อง 0.648 ลูกบาศก์เมตร การสร้างแบบจำลองโดยกำหนดให้เป็น Solid 4 ชั้น 1. อากาศ 2. น้ำ 3. ทองแดง 4. คอนกรีต มีพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของน้ำ 338608.26 ตารางมิลลิเมตร และของอากาศ 810000 ตารางมิลลิเมตร



รูปที่ 5.19 แสดงแบบจำลองการวางท่อแบบขนาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



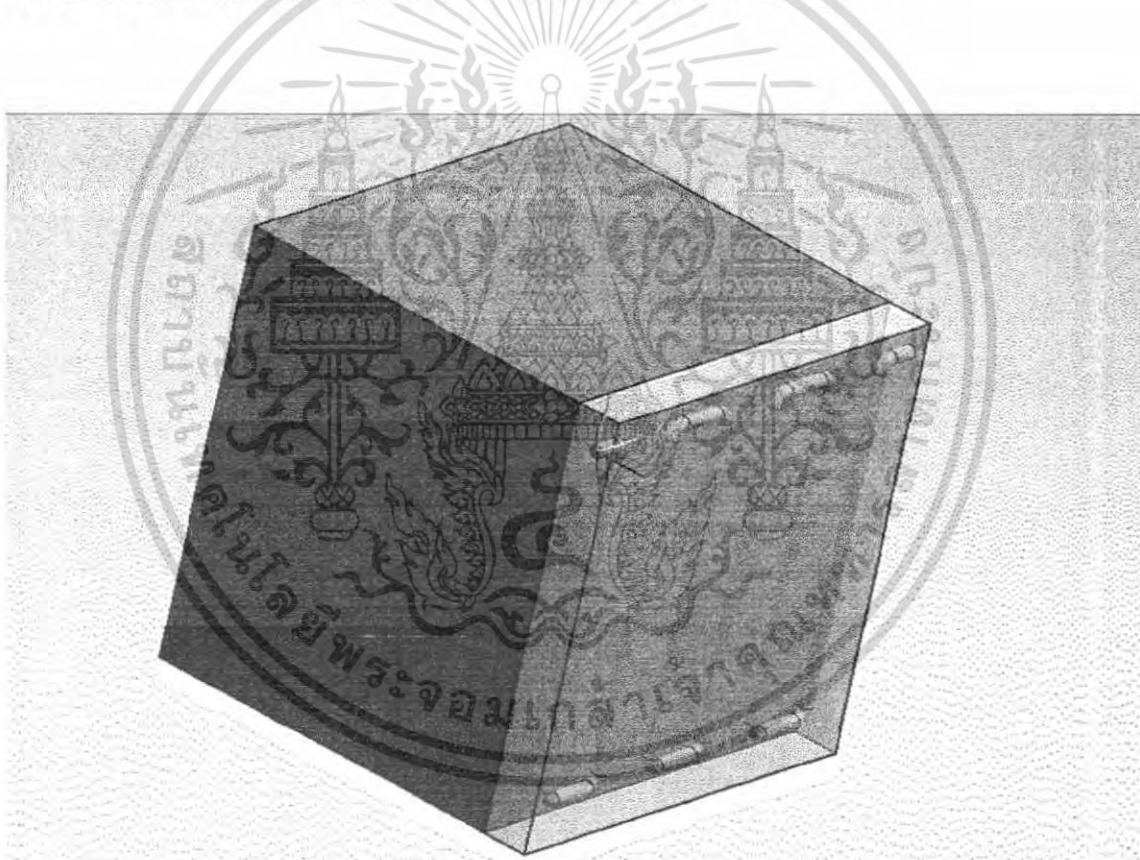
รูปที่ 5.20 แสดงการสร้าง Mesh ของแบบจำลองการวางท่อแบบขนาน

จากผลการวิเคราะห์แบบจำลองของการวางท่อแบบอนุกรมทำให้เราทราบว่าขนาดของ Mesh size ของอากาศที่เข้าไปภายในห้องซึ่งคุณสมบัติของอากาศไม่ได้เปลี่ยนแปลงมากนักจึงกำหนดขนาดของ Mesh size ให้มีขนาดใหญ่ขึ้น เพื่อลดเวลาในการคำนวณ กำหนดให้มีขนาดใหญ่ที่สุด Mesh size 150 ส่วนขนาดของตำแหน่งอื่นๆจะเหมือนกับท่ออนุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

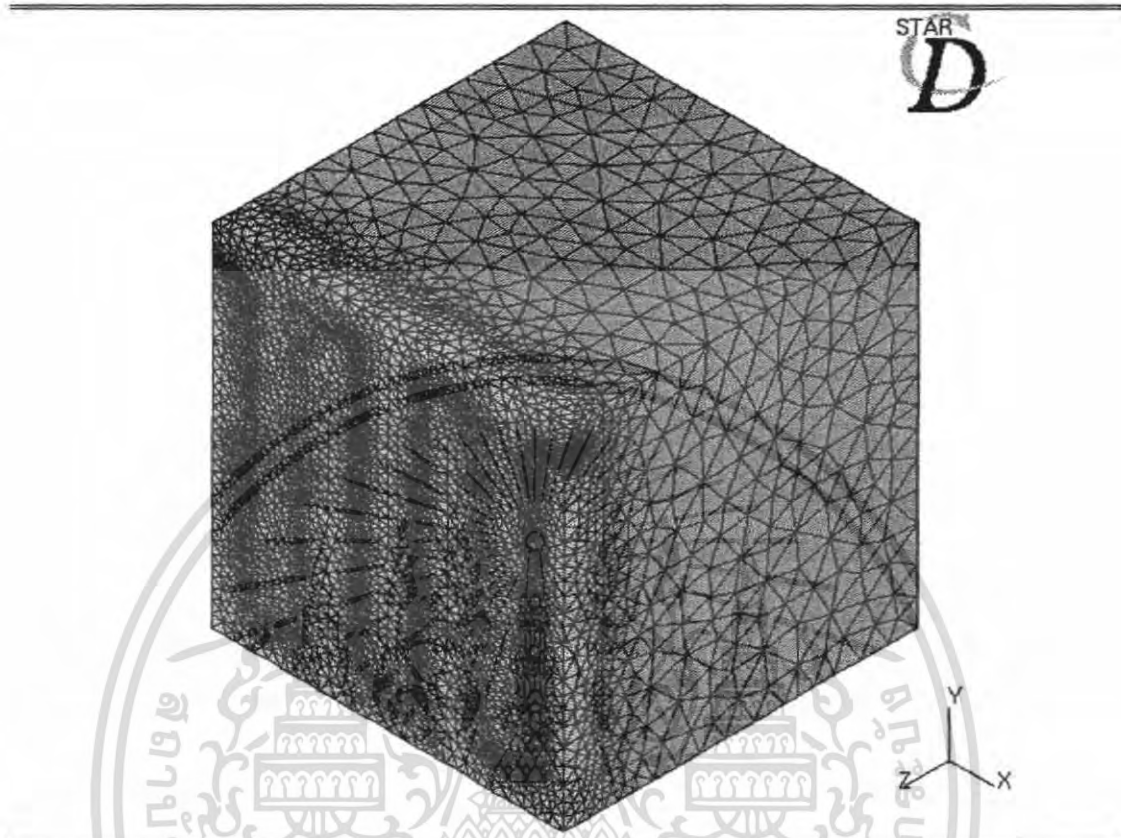
#### 5.4 การพัฒนาแบบจำลองการวางท่อแบบอนุกรม

โดยการออกแบบให้ข้อของท่อมีความโค้งเพื่อลดแหล่งสะสมความร้อที่กำหนดให้  $R/D=1$  [6] เมื่อ R คือ รัศมีมีความโค้งของท่อ D คือขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางท่อขนาดความยาวท่อ 5.4 เมตร เส้นผ่านศูนย์กลาง 29.4 มิลลิเมตร และเป็นท่อทองแดงหนา 2 มิลลิเมตร การขุดท่อให้มีระยะพิทช์ 150 มิลลิเมตร ขนาดของคอนกรีต กว้าง 0.9 เมตร ยาว 0.9 เมตร หนา 0.1 เมตร โดยการวางท่อให้ห่างจากผนังด้านใน 65 มิลลิเมตร และ ห่างจากผนังด้านนอก 35 มิลลิเมตร ปริมาตรของอากาศภายในห้อง 0.648 ลูกบาศก์เมตร การสร้างแบบจำลอง โดยกำหนดให้เป็น Solid 4 ชั้น 1. อากาศ 2. น้ำ 3. ทองแดง 4. คอนกรีต มีพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของน้ำ 431941.95 ตารางมิลลิเมตร และของอากาศ 810000 ตารางมิลลิเมตร



รูปที่ 5.21 แสดงแบบจำลองของการวางท่อแบบอนุกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Mesh 980000 cell

รูปที่ 5.22 แสดง Mesh ของแบบจำลองของการวางท่อแบบอนุกรมที่พัฒนาขึ้นใหม่

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขต คุณสมบัติของวัสดุ และวิธีการคำนวณจะเหมือนกับกรณี  
ของการวางท่อแบบอนุกรมซึ่งได้อธิบายไว้แล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 6

### ผลการจำลอง

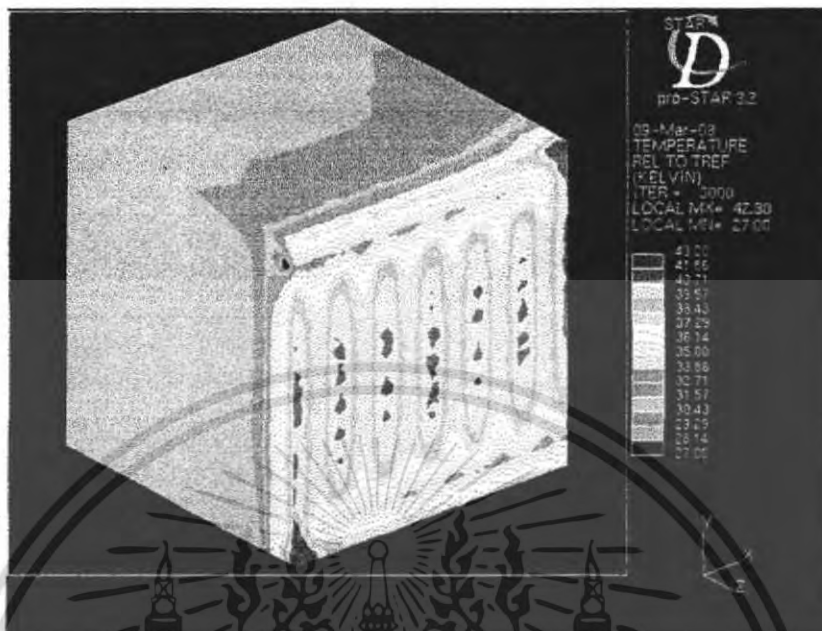
#### 6.1 ผลการจำลองกรณีท่ออนุกรมและท่อขนานที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s

##### 6.1.1 การเปรียบเทียบการกระจายตัวของอุณหภูมิผลการจำลองของทั้ง 2 กรณี



รูปที่ 6.1 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิของท่ออนุกรมที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.2 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิของท่อขนานที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s

เมื่อนำผลการคำนวณของทั้ง 2 กรณีมาเปรียบเทียบพบว่าประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนของท่ออนุกรมสามารถถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่าท่อแบบขนาน และสามารถลดปริมาณความร้อนที่จะผ่านเข้าไปในห้อง แต่เนื่องจากท่อแบบอนุกรมนี้มีพื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนมากกว่า จึงสามารถถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่า

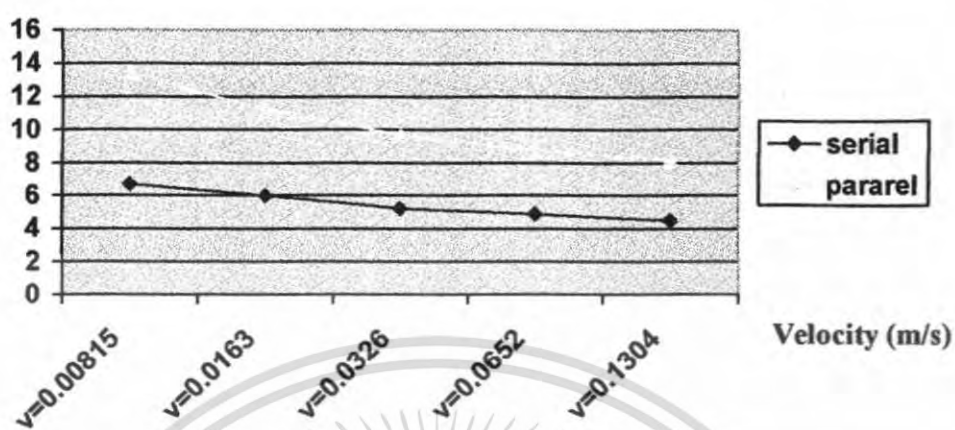
|                                       |           |                |
|---------------------------------------|-----------|----------------|
| พื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของท่ออนุกรม | 431941.95 | ตารางมิลลิเมตร |
| พื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนของท่อขนาน   | 338608.26 | ตารางมิลลิเมตร |

ตารางที่ 6.1 การเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตสู่อากาศ

| Model   | Heat transfer(W) |          |          |          |          |
|---------|------------------|----------|----------|----------|----------|
|         | V=0.00815        | V=0.0163 | V=0.0326 | V=0.0652 | V=0.1304 |
| Serial  | 6.7212           | 6.0018   | 5.21     | 4.8919   | 4.5025   |
| Pararel | 13.413           | 11.183   | 9.6777   | 8.7611   | 8.2178   |

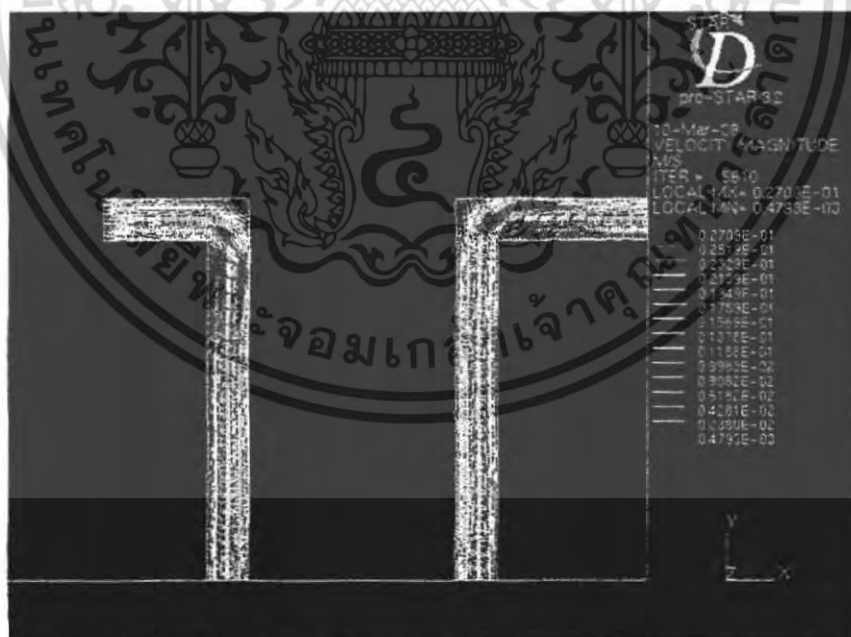
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Heat transfer (W)



รูปที่ 6.3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณการถ่ายเทความร้อนจากคอนกรีตสู่อากาศของท่อขนานกับท่ออนุกรม

#### 6.1.2 ผลการจำลองการกระจายความเร็วของท่ออนุกรมและท่อขนาน



รูปที่ 6.4 แสดงผลการจำลองการกระจายความเร็วที่บริเวณทางเข้าของท่ออนุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.5 แสดงผลการจำลองการกระจายความเร็วที่บริเวณทางเข้าของท่อขนาน

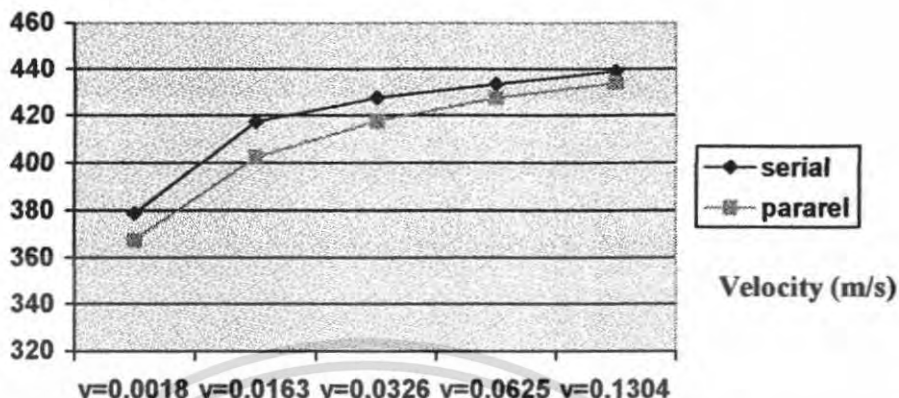
ท่ออนุกรมมีความเร็วการไหลที่สูงกว่าท่อขนานทำให้มีสัมประสิทธิ์ในการพาความร้อนสูงกว่า แต่ท่อขนานมีความดันสูญเสียน้อยกว่า และเนื่องจากเป็นการไหลความเร็วต่ำจึงมีระยะเวลานำเอาความร้อนออกไปได้มากกว่าการไหลที่ความเร็วสูง การเปรียบเทียบประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อน ที่พื้นที่แลกเปลี่ยนความร้อนต่างกันของท่ออนุกรมและท่อขนาน จากผลการจำลองนี้พบว่าท่ออนุกรมมีประสิทธิภาพในการถ่ายเทความร้อนมากกว่า

ตารางที่ 6.2 การเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากทองแดงสู่ น้ำ

| Model   | Heat transfer(W) |          |          |          |          |
|---------|------------------|----------|----------|----------|----------|
|         | V=0.0018         | V=0.0163 | V=0.0326 | V=0.0652 | V=0.1304 |
| Serial  | 378.73           | 417.32   | 427.64   | 433.53   | 436.27   |
| Pararel | 367.26           | 402.49   | 417.65   | 427.68   | 434.07   |

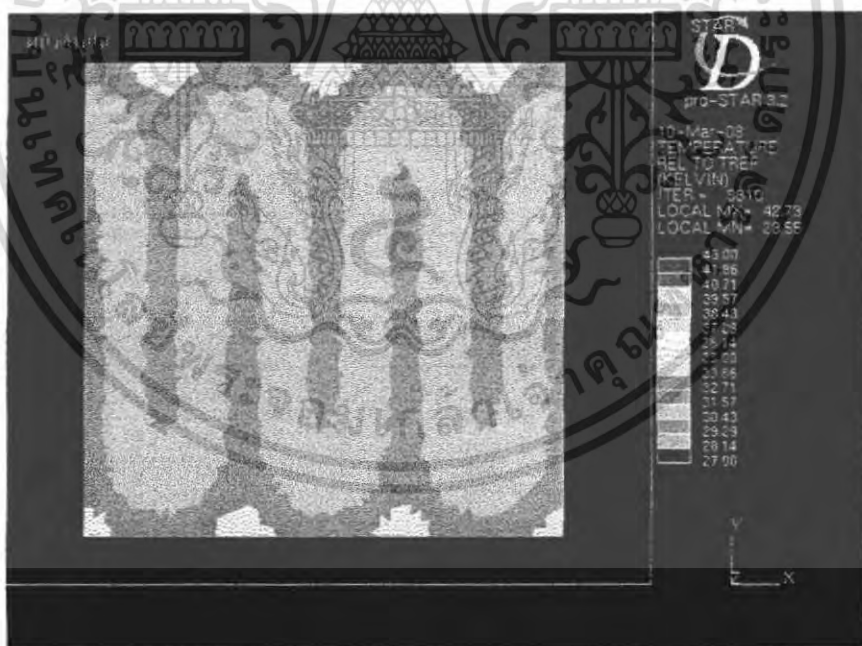
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Heat transfer (W)



รูปที่ 6.6 กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณการถ่ายเทความร้อนจากทองแดงสู่ น้ำของท่อขนานกับท่ออนุกรม

6.1.3 ผลการจำลองการกระจายอุณหภูมิของผนังห้องด้านใน



รูปที่ 6.7 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผนังห้องด้านในของท่ออนุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



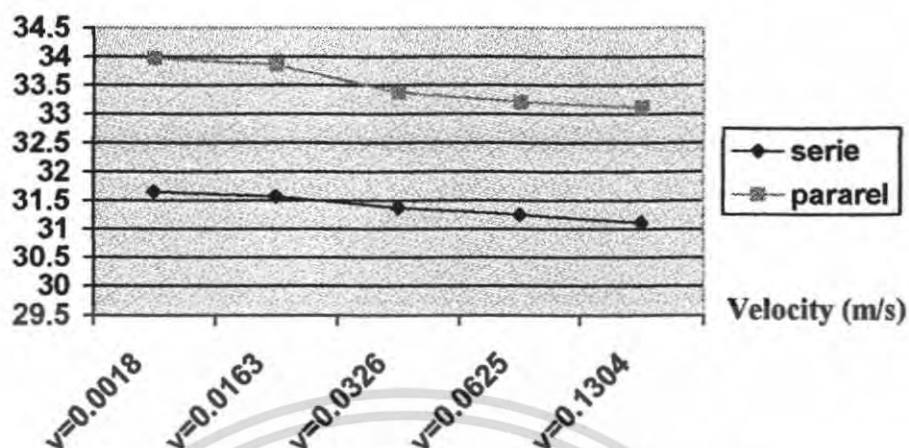
รูปที่ 6.8 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวผนังห้องค้ำในของท่อขนาน จากผลการจำลองที่กรณีความเร็วเริ่มต้นดังแสดงในรูปพบว่าอุณหภูมิผิวผนังของการวางท่อแบบอนุกรมที่ตำแหน่งกึ่งกลางของท่อน้ำอุณหภูมิเท่ากับ 31.57 องศาเซลเซียส ส่วนอุณหภูมิผิวผนังของท่อขนานที่ตำแหน่งเดียวกันเท่ากับ 33.86 องศาเซลเซียส อุณหภูมิต่างกัน 2.29 องศาเซลเซียส ตารางสรุปอุณหภูมิผิวผนังที่ความเร็วอื่นๆแสดงดังนี้

ตารางที่ 6.3 การเปรียบเทียบอุณหภูมิผิวของผนังคอนกรีตค้ำใน (ตรงตำแหน่งของท่อน้ำ)

| Model   | Wall surface temperature(C) |          |          |          |          |
|---------|-----------------------------|----------|----------|----------|----------|
|         | V=0.0018                    | V=0.0163 | V=0.0326 | V=0.0652 | V=0.1304 |
| Serial  | 31.65                       | 31.57    | 31.37    | 31.25    | 31.11    |
| Pararel | 33.98                       | 33.86    | 33.37    | 33.21    | 33.12    |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Temperature(C)



รูปที่ 6.9 กราฟแสดงการเปรียบเทียบอุณหภูมิผิวของผนังของท่ออนุกรมและขนานที่ความเร็วการไหลต่างๆ

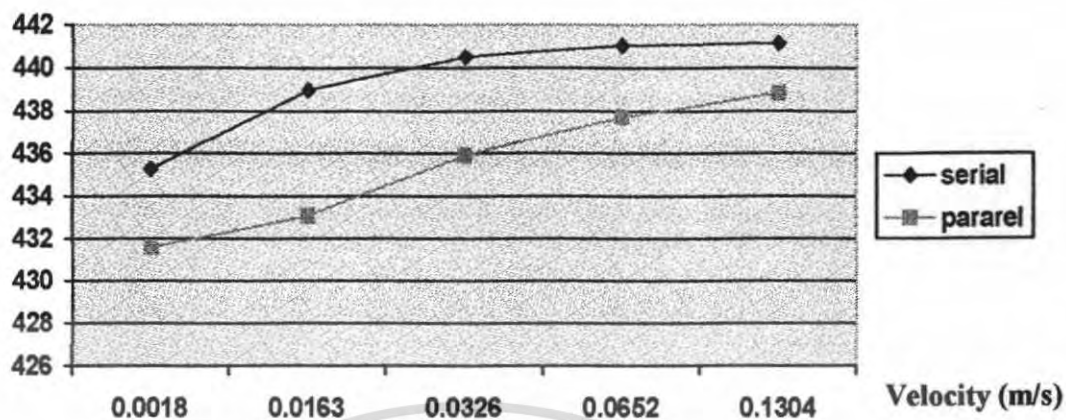
#### 6.1.4 ปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตสู่ทองแดง

ตารางที่ 6.4 แสดงการเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตสู่ทองแดง

| Model   | Heat transfer(W) |          |          |          |          |
|---------|------------------|----------|----------|----------|----------|
|         | V=0.0018         | V=0.0163 | V=0.0326 | V=0.0652 | V=0.1304 |
| Serial  | 435.25           | 438.98   | 440.51   | 441.03   | 441.15   |
| Pararel | 431.57           | 433.07   | 435.9    | 437.7    | 438.84   |

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Heat transfer (W)



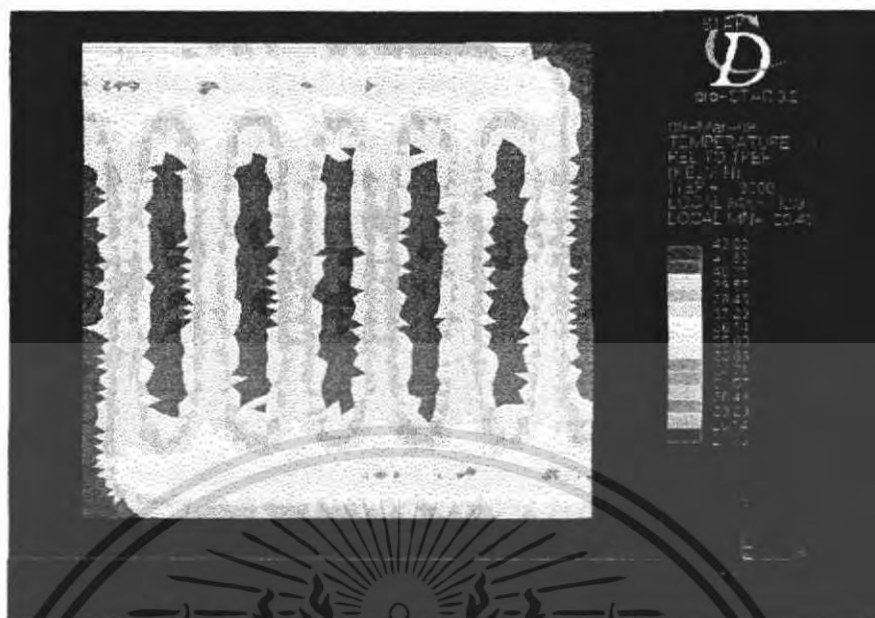
รูปที่ 6.10 กราฟแสดงการเปรียบเทียบปริมาณความร้อนถ่ายเทจากคอนกรีตสู่ทองแดงของท่อขนานและท่ออนุกรม

#### 6.1.5 ผลการจำลองการกระจายอุณหภูมิผิวของผนังห้องด้านนอก



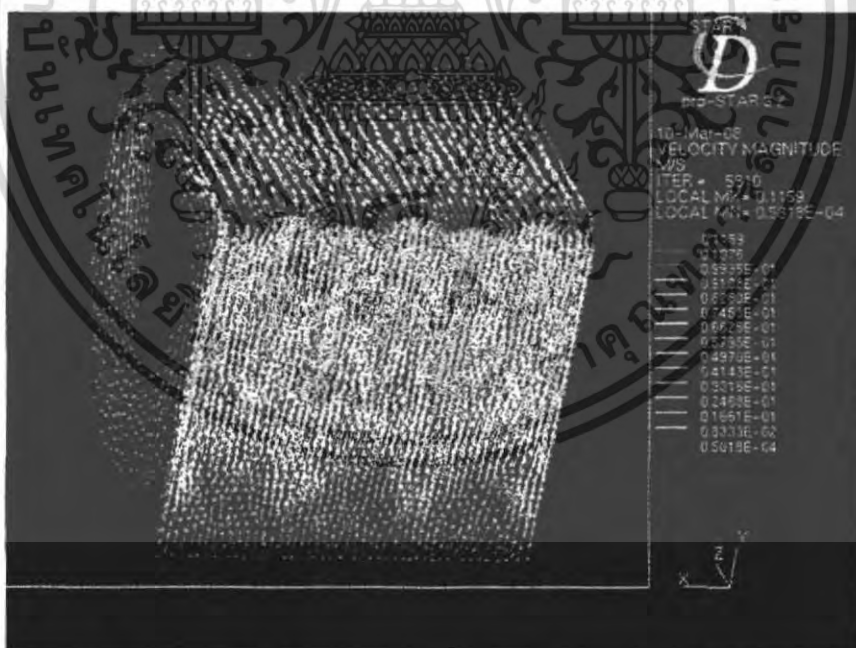
รูปที่ 6.11 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวผนังห้องด้านนอกของท่ออนุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



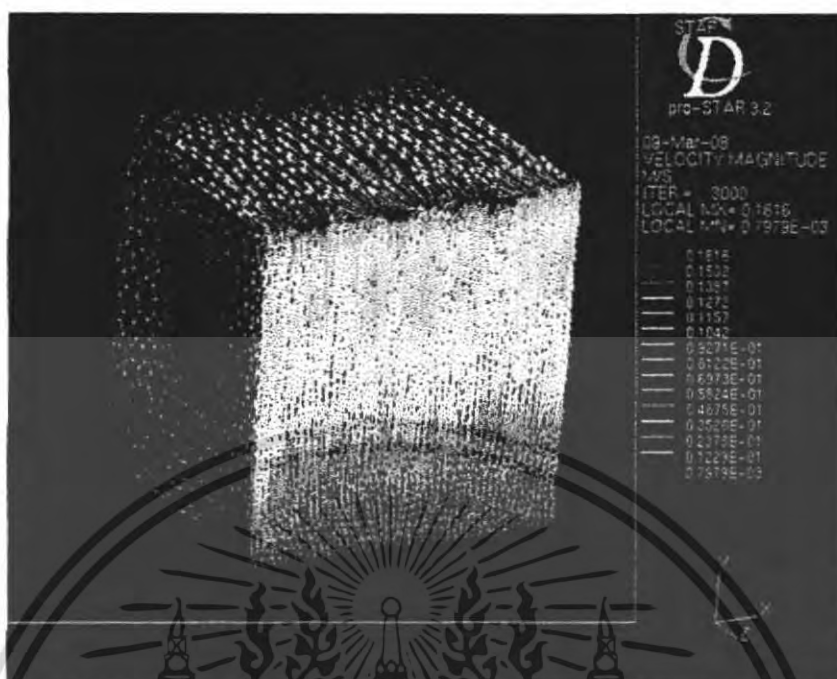
รูปที่ 6.12 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอนุภาคฝุ่นในห้องด้านนอกของห้องนอน

#### 6.1.6 เวกเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบอนุกรมและห้องนอน



รูปที่ 6.13 แสดงเวกเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบอนุกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.14 แสดงเวกเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบขนาน

## 6.2 ผลการจำลองของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมาใหม่



รูปที่ 6.15 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิของท่ออนุกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่  
ที่ความเร็วการไหล 0.0163 m/s

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.16 แสดงผลการจำลองเวกเตอร์ความเร็วของการไหลบริเวณช่องของแบบจำลอง  
ที่พัฒนาขึ้นมาใหม่

จากการเปรียบเทียบผลการจำลองที่พัฒนาขึ้นมาใหม่จะเห็นว่าสามารถช่วยลดการสะสมความร้อนที่บริเวณช่องอได้และทำให้การกระจายตัวของความเร็วดีขึ้นทำให้ความสามารถในการพาความร้อนบริเวณช่องเพิ่มขึ้นและจากการจำลองของท่ออนุกรมรูปแบบเดิมจะเห็นว่าเกิดการไหลหมุนวนทำให้ความเร็วบริเวณค้ำในของช่องลดลงทำให้เกิดระยะเวลาในการปรับตัวและเกิดความคั่งสุญเสีย แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมาใหม่นี้จะช่วยลดปัญหาดังกล่าว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.17 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิบริเวณข้อของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมาใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



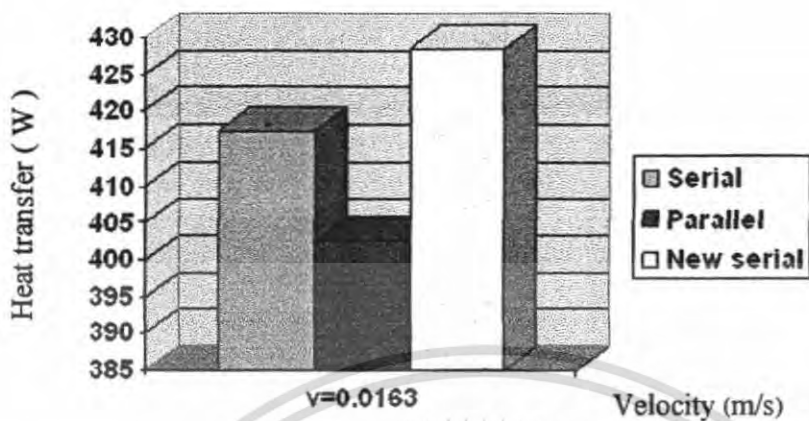
รูปที่ 6.18 แสดงผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวนึ่งค้ำน ในของห้อง

จากผลการจำลองการกระจายตัวของอุณหภูมิผิวนึ่งค้ำน ในของแบบจำลองที่พัฒนาขึ้นมาใหม่ อุณหภูมิผิวนึ่งบริเวณกึ่งกลางที่อยู่ที 30.74 องศาเซลเซียส เมื่อเทียบกับแบบเดิมอุณหภูมิอยู่ที 31.57 องศาเซลเซียส สามารถลดอุณหภูมิลงได้ประมาณ 1 องศาเซลเซียส



รูปที่ 6.19 แสดงเวกเตอร์การไหลเวียนของอากาศภายในห้องของการวางท่อแบบอนุกรมที่พัฒนาขึ้นมาใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.20 กราฟแสดงความร้อนจากทองแดงสู่น้ำ ( $v=0.0163$ ) ระหว่างรูปร่างท่อเดิมกับ รูปร่างที่ ออกแบบใหม่

จากกราฟ แสดงถึงการเปรียบเทียบปริมาณการถ่ายเทความร้อนจากทองแดงสู่น้ำที่ความเร็ว เท่ากับ  $0.0163$  m/s โดยปริมาณการถ่ายเทความร้อนแบบขนานน้อยที่สุด อนุกรมแบบเดิมนั้นปาน กลาง และอนุกรมแบบที่พัฒนาใหม่นั้นมีประสิทธิภาพดีสุดในการถ่ายเทความร้อนของระบบ

## บทที่ 7

### วิเคราะห์ผลการจำลองและสรุป

#### 7.1 วิเคราะห์ผลการจำลอง

1. การกระจายอุณหภูมิของคอนกรีต ท่อแดง และน้ำ เป็นค่าที่ยอมรับได้หรือว่าใกล้เคียงกับหลักฟิสิกส์

2. พฤติกรรมของอากาศคือ อุณหภูมิ เวกเตอร์ความเร็ว มีความสัมพันธ์และถูกต้องตามหลักฟิสิกส์

3. พฤติกรรมของน้ำคือ ลักษณะการไหลของเวกเตอร์ตรงตามหลักฟิสิกส์

4. การถ่ายเทความร้อนมีความสัมพันธ์กันที่ถูกต้องของแต่ละรูปแบบของท่อ

#### 7.2 สรุปผลการจำลอง

1. รูปร่างของท่อแบบอนุกรมมีการถ่ายเทความร้อนจากท่อแดงไปสู่ น้ำได้มากกว่ารูปร่างแบบขนานที่เงื่อนไขของขอบเหมือนกัน ทั้งนี้เหตุผลหนึ่งอาจเป็นเพราะว่าพื้นที่ผิวสัมผัสของท่อแบบอนุกรมนั้นมีมากกว่าท่อแบบขนาน

2. เมื่อน้ำมีอัตราการไหลที่สูงขึ้น การถ่ายเทความร้อนจากท่อแดงไปสู่ น้ำก็สูงขึ้นตามไปด้วยเช่นกัน

3. รูปร่างของท่อแบบอนุกรมใช้กำลังในการปั๊มที่สูงกว่ารูปร่างแบบขนานเนื่องจาก pressure drop สูงกว่า

4. รูปแบบของท่อที่ออกแบบใหม่มีการถ่ายเทความร้อนสู่ น้ำที่สูงขึ้นกว่าเดิม และลดการสะสมความร้อนที่มุมของท่อและการสูญเสียเนื่องจากการไหลน้อยลง

5. จำนวนของ elements ที่ใช้มีผลต่อการคำนวณ โดยการ ใช้จำนวน elements ที่มากและเล็ก การคำนวณจะนาน แต่ผลการคำนวณจะมีค่าความแม่นยำมากขึ้น

### เอกสารอ้างอิง

- [1.] รศ.ดร.จารุวัตร เจริญสุข, “พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ
- [2.] รศ.ดร.พงษ์เจต พรหมวงศ์, “การถ่ายเทความร้อน”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ
- [3.] นาย มาฆพ วิเศษ, “การใช้ผนังเย็นเพื่อลดภาระความเย็นในการปรับอากาศ” คณะวิศวกรรมศาสตร์มหาบัณฑิต, มหาลัยเชียงใหม่
- [4.] นาย พรอรรด สิงห์เสนี “การลดอุณหภูมิของอาคารด้วยวิธีการฝังท่อน้ำในผนัง” คณะสถาปัตยกรรมศาสตร์ มหาบัณฑิต, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ
- [5.] นาย นิวัฒน์ นาคะ ไชยอินสกุล, นาย นิวัฒน์ ภู่เจริญ “การจำลองการถ่ายเทความร้อนของหม้อน้ำรถยนต์ด้วยเทคนิคของวัสดุพรุน” คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ
- [6.] N.R. Rosaguti , D.F. Fletcher , B.S. Haynes “Laminar Flow in a Periodic Serpentine Channel” Department of Chemical Engineering, The University of Sydney, NSW , 2006 Australia



# การศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตของผนังเย็นโดยการจำลอง (Study Conjugate Heat Transfer of Cooling Wall by Simulation)

สุรศักดิ์ เชื้อฟุ้ง<sup>1</sup>, ขจรเกียรติ จุฑามย์<sup>1</sup>,

.....  
ผศ.ดร.จารุวัตร เจริญสุข<sup>2</sup>, รศ. ดร. อุณนิตี พิณโสภณ<sup>2</sup>

## บทคัดย่อ

การศึกษาและนำเสนอผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของผนังเย็น ซึ่งเป็นการไหลภายในท่อ โดยการจำลองได้ใช้โปรแกรมทางด้านการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (STAR-CD) โครงการนี้เริ่มต้นด้วยการศึกษาปัญหาการถ่ายเทความร้อนผ่านผนังเย็น โดยรูปแบบการวางท่อที่แตกต่างกัน 2 ลักษณะ คือลักษณะแรกเป็นการวางท่อแบบขนาน ส่วนลักษณะที่สองเป็นการวางท่อที่ได้ลักษณะการไหลเป็นแบบอนุกรม โดยทั้ง 2 กรณีกำหนดให้เป็นสภาวะ steady state steady flow และเป็นการไหลแบบราบเรียบ โดยจะให้ท่อวัสดุทำมาจากทองแดงและผนังเป็นคอนกรีตทั้งสองกรณี โดยอุณหภูมิน้ำเข้าใช้ประมาณ 300 องศาเซลเซียส ส่วนค่าคุณสมบัติต่างๆ ของทองแดงและคอนกรีตใช้คุณสมบัติที่ 308 องศาเซลเซียส โดยผลการจำลองครั้งแรกเลือกการวางท่อแบบที่ได้การไหลแบบอนุกรม เพื่อเปรียบเทียบกับกรทดลองจากนั้นจึงจำลองรูปร่างแบบขนาน โดยทั้งสองกรณีได้มีการทดลองเปลี่ยนค่าตัวแปรของอัตราการไหลเมื่อพิจารณาผลลัพธ์ที่ได้เปรียบเทียบกับและอธิบายพฤติกรรมการถ่ายเทความร้อนของของไหลในอัตราการไหลที่แตกต่างกัน หลังจากนั้นก็ออกแบบรูปร่างของท่อใหม่ โดยคำนึงถึงการสูญเสียเนื่องจากการไหลและความร้อนที่ไปกับน้ำเป็นหลักทั้งนี้ใช้ผลลัพธ์ของโปรแกรมมาช่วยในการออกแบบด้วย

## Abstract

This project deals with a study on heat transfer of cooling wall by using the simulation program for fluid dynamics (STAR-CD). The project starts with study heat transfer problem through pipe-cooled wall with different in piping shape. First case, the shape of pipe is parallel and second case is series. Steady state laminar flow is assumed. The pipe made from copper and the wall is concrete. The temperature of water inlet 300 K and properties of copper and concrete are chosen at mean temperature (308 K). Firstly, serial configuration was chosen for first simulation in order to calibrate program and comparison with experiment. After that, both serial and parallel configurations have been simulated at different mass flow rate. Finally, we have designed a flow configuration that yield better heat transfer as suggested by the simulation results

**Keywords:** Serial Configuration: Parallel Configuration: Simulation.

## 1. บทนำ

การถ่ายเทความร้อนแบบ conjugate heat transfer เป็นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหล โดยพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กันไปซึ่งมีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อนและการพาความร้อนโดยใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้าและออกจากของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อทั้งสองต้องมีค่าเท่ากัน เพื่อให้ปัญหามีความง่ายขึ้นจึงทำการตั้งสมมติฐานให้อุณหภูมิที่ผิวของแข็งมีค่าคงที่ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหลซึ่งในความเป็นจริงแล้วอุณหภูมิในบริเวณดังกล่าวอาจมีค่าไม่คงที่ ทำให้การคำนวณการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตจึงมีความสำคัญในการนำมาแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งและของไหลเพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น ตัวอย่างของปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตได้แก่ การถ่ายเทความร้อนจากผนังสู่น้ำที่ไหลภายในท่อ เป็นต้น

ในปัจจุบันแนวคิดการประหยัดพลังงานเป็นสิ่งที่ได้รับการเอาใจใส่จากหลายหน่วยงานทั่วโลกโดยสิ่งที่จะต้องคำนึงถึงการประหยัดพลังงานหรือแนวคิดในการอนุรักษ์พลังงานคือการลดการใช้พลังงานและการหันมาใช้พลังงานทดแทนหรือพลังงานหมุนเวียนซึ่งจะไม่ส่งผลกระทบต่อเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สภาพแวดล้อมรอบๆตัวและของโลกมากขึ้นซึ่งการใช้พลังงานในปัจจุบันพบว่าปริมาณการใช้พลังงานภายในอาคารส่วนใหญ่จะหมดไปกับการสร้างสภาพแวดล้อมให้แก่มนุษย์ภายในอาคาร

ในปัจจุบันก็มีวิธีการลดความร้อนที่จะเข้ามาภายในอาคารโดยใช้วิธีการพองน้ำภายในอาคารเพื่อให้เกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างผนังอาคารที่ได้รับความร้อนจากการแผ่รังสีของดวงอาทิตย์กับน้ำที่อยู่ภายในท่อ ซึ่งลักษณะรูปร่างของท่อนั้นแบ่งได้เป็น 2 ลักษณะตามรูปแบบการไหลของการนำคือ 1 ลักษณะการวางท่อแบบอนุกรมและ 2 รูปแบบการวางท่อแบบขนานโครงการนี้จึงได้เกิดขึ้นเมื่อนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (simulation) มาประยุกต์ใช้เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพในการลดความร้อนของทั้งสองแบบที่สภาวะ steady state และการไหลเป็นแบบ laminar flow และเราได้พัฒนารูปแบบท่อใหม่ทั้งนี้ในการออกแบบใหม่นี้ก็เพราะว่ารูปร่างเดิมของท่ออนุกรมนั้นมีปัญหาในเรื่องการสูญเสียเนื่องจากการไหลต้องใช้กำลังในการปั๊มเพื่อสร้างแรงดันของน้ำในการออกแบบรูปร่างของท่อใหม่นั้นจะใช้ผลลัพธ์ของการจำลองของท่อแบบเดิมในการที่จะวิเคราะห์ถึงปัญหาที่เกิดขึ้น จากนั้นเราจึงทำการออกแบบใหม่เพื่อแก้ปัญหาของรูปร่างท่อแบบเดิมโดยรูปร่างของท่อจะโค้งงอมากขึ้นเพื่อให้การไหลมีการสูญเสียลดลง นอกจากนั้นอัตราการไหลซึ่งมีผลต่อการถ่ายเทความร้อนเช่นกันซึ่งอัตราการไหลเดิมมันช้ามากจึงได้ทำการเพิ่มอัตราการไหลให้มากขึ้นกว่าเดิมเพื่อดูประสิทธิภาพการถ่ายเทความร้อนของระบบโดยการจำลอง (simulation) ภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน ในการจำลองทางคณิตศาสตร์นั้นเราจำเป็นต้องทราบค่าต่างๆดังนี้เช่น คุณสมบัติของผนังและน้ำรวมไปถึงปริมาณความร้อนที่ผนังได้รับ (Heat flux) เป็นต้น

ซึ่งในการจำลองทางคณิตศาสตร์จำเป็นต้องเทียบกับการทดลองจริงทั้งนี้ก็เพื่อที่จะเป็นการทดสอบความน่าเชื่อถือของตัวโปรแกรมและสรุปผลว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์สามารถที่จะวิเคราะห์ปัญหาของการทดสอบประสิทธิภาพของการแลกเปลี่ยนความร้อนระหว่างผนังกับน้ำได้หรือไม่ ซึ่งเป็นสิ่งที่อธิบายถึงเหตุผลในการทำวิทยานิพนธ์นี้ขึ้นมา

<sup>1</sup> นักศึกษานิติศาสตร์วิศวกรรมเครื่องกล สจล., ห้อง 3Q/1 รหัส 48015406, 48015413 ตามลำดับ

<sup>2</sup> รองศาสตราจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สจล., โทร. 0 2326 4197, อีเมล kpchamlo@kmitl.ac.th

| สัญลักษณ์      |   |                 |                                |
|----------------|---|-----------------|--------------------------------|
| $q_x$          | อัตราการนำความร้อนผ่านพื้นที่ A ในทิศทางบวก x | $T_w$           | อุณหภูมิของผนัง                |
| $q_x''$        | ฟลักซ์ความร้อนในทิศทางบวก x                   | $m$             | อัตราการไหลเชิงมวลของน้ำ       |
| $k$            | ค่าสภาพการนำความร้อนของวัสดุ                  | $T_s$           | ค่าอุณหภูมิสัมบูรณ์ (K) ของผิว |
| $h$            | ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน                  | $\sigma$        | ค่าคงที่ของสตีเฟน-โบลซ์แมน     |
| $T_f$          | อุณหภูมิของของไหลเย็นที่ไหลผ่านบนผิว          | $\epsilon$      | สัมประสิทธิ์การแผ่รังสี        |
| $A$            | พื้นที่ผิว                                    | $cp$            | ค่าความจุความร้อนจำเพาะของน้ำ  |
| $T_{in,water}$ | อุณหภูมิของน้ำที่ไหลเข้า                      | $T_{out,water}$ | อุณหภูมิของน้ำที่ไหลออก        |

## 2. วัตถุประสงค์

1. ศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกชันการไหลในท่อที่

สภาวะ steady state stead flow

2. จำลองการถ่ายเทความร้อนของผนังเย็น โดยการวางแนวท่อที่แตกต่างกัน คือ

- แบบขนาน
- แบบอนุกรม

## 3. เปรียบเทียบและวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนจากผลการจำลองที่ได้

### 3. ทฤษฎีการถ่ายเทความร้อนของผนังเย็นและการคำนวณ

#### 3.1 การถ่ายเทความร้อนของน้ำ

ปริมาณความร้อนที่น้ำได้รับเมื่อไหลเข้ามาในผนัง คือ

$$q = m cp (T_{out,water} - T_{in,water}) \quad (W)$$

#### 3.2 การนำความร้อน (Conduction)

การนำความร้อนเป็นลักษณะการถ่ายเทความร้อนจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูง ไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำภายในตัวกลางเดียวกัน หรือเป็นการเคลื่อนที่ของความร้อนระหว่างตัวกลางติดกัน แต่มีอุณหภูมิต่างกัน

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad (W) \quad (w)$$

หรือ  $q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad (W/m^2)$

### 3.3 การพาความร้อน (Convection)

การพาความร้อน คือ การเคลื่อนที่ ของความร้อนระหว่างผิวของแข็งและของไหล โดยที่ของไหลจะเป็นกลไกหรือพาหะในการพาความร้อนเข้าหรือออกจากผิวของแข็ง ซึ่งกลไกหรือพาหะที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ของความร้อน โดยการพา นั้น เกิดจากการอนุรักษ์พลังงานความร้อนที่บริเวณผิวความร้อนระหว่างของแข็งและของไหล โดยที่พิจารณาจากการนำความร้อน การเก็บสะสมพลังงานความร้อนและการเคลื่อนที่ของของไหล

$$q' = h [T_w - T_f] \quad (W/m^2)$$

### 3.4 การแผ่รังสีความร้อน (Radiation)

การแผ่รังสีความร้อน คือพลังงานที่ถูกส่งออกไปโดยสารซึ่งอยู่ที่อุณหภูมิจำกัดแน่นอน ถึงแม้ว่าเราจะเน้นการแผ่รังสีจากผิวของวัตถุแข็งก็ตาม การส่งออกของรังสีอาจเกิดขึ้น ได้จากของเหลวและก๊าซ ดังนั้น โดยไม่คำนึงถึงรูปแบบของสาร การส่งออกของรังสีเชื่อว่าเป็นการเปลี่ยนการจัดเรียงตัวของอิเล็กตรอนขององค์ประกอบอะตอมหรือ โมเลกุล พลังงานของสนามการแผ่รังสีนั้นจะถูกนำออกไปโดยคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (หรือเรียกอีกอย่างว่าโฟตอน)

ค่าฟลักซ์ความร้อนสูงสุดที่ซึ่งการแผ่รังสีถูกส่งออกไปได้จากพื้นผิวหนึ่งกำหนด โดยกฎของสตีเฟน โบลซ์แมน (Stefan - Boltzmann Law)

$$q' = \sigma T_s^4 \quad (W/m^2)$$

และผิวนั้นจะเรียกว่า ตัวแผ่รังสีอุดมคติหรือวัตถุดำ (blackbody) ฟลักซ์ความร้อนซึ่งถูกส่งออกโดยผิวจริงจะน้อยกว่าที่ส่งออกจากตัวแผ่รังสีอุดมคติ (ideal radiator) กำหนดเป็น

$$q' = \epsilon \sigma T_s^4 \quad (W/m^2)$$

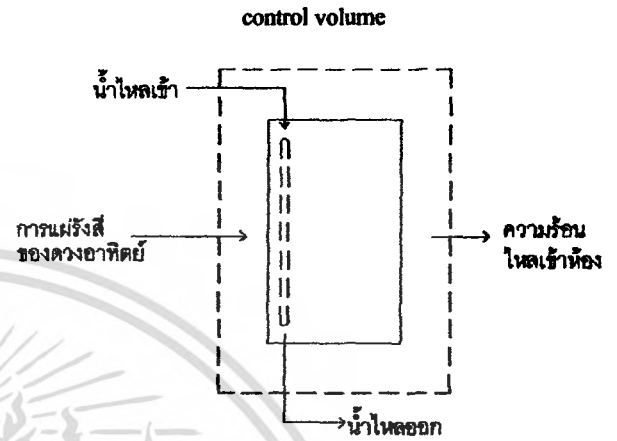
พิจารณาแบบจำลองของผนังเย็น การหาค่าอุณหภูมิผิวผนังอาคาร โดยตั้งสมมติฐานดังนี้

1. คุณสมบัติต่างๆของผนังคงที่
2. ไม่มีแหล่งผลิตความร้อนภายในผนัง
3. การนำความร้อนของผนังคงที่ไม่ขึ้นกับเวลาและเป็นการนำความร้อนแบบหนึ่งมิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. สัมประสิทธิ์การพาความร้อนของอากาศคงที่ ไม่ขึ้นอยู่กักรูปทรงของผิว และสภาวะการไหล

5. การพาความร้อนของน้ำในท่อเป็นแบบ steady state steady flow



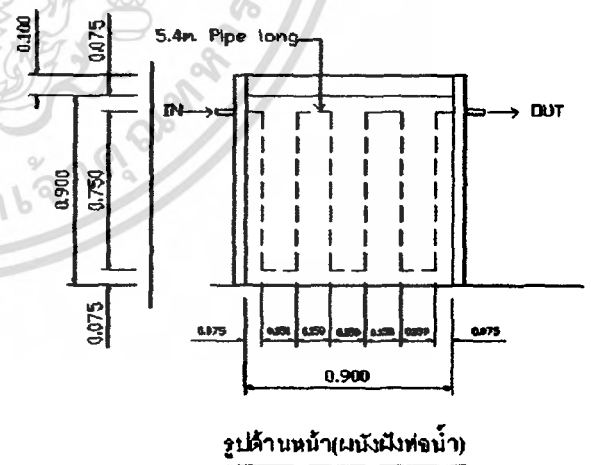
รูปที่ 1. แสดงแบบจำลองด้านข้างของผนังเย็น

### 4. โครงสร้างแบบจำลองและเงื่อนไขของปัญหา

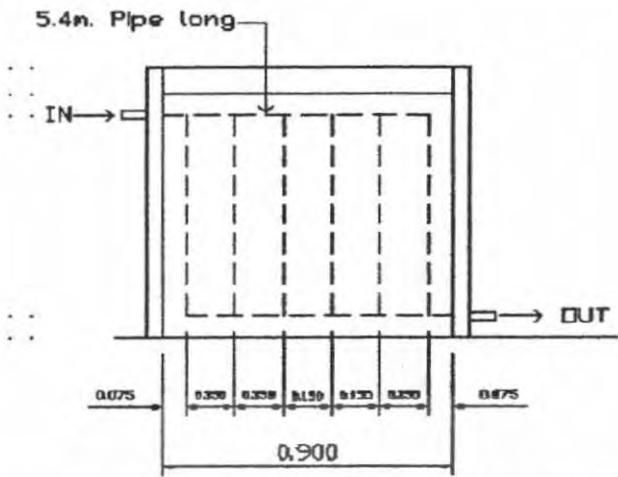
แบบจำลองของผนังเย็นที่ทำการศึกษาได้แบ่งลักษณะรูปแบบการวางท่อที่แตกต่างกัน มี 2 แบบดังนี้ คือ

1. ผนังห้องแบบอนุกรม
2. ผนังห้องแบบขนาน

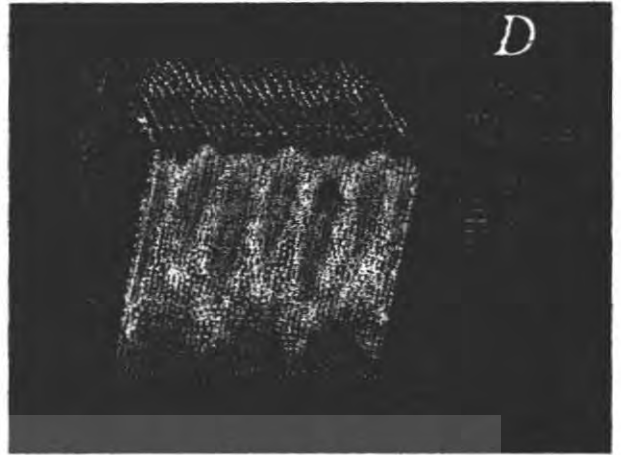
และรวมทั้งรูปร่างของท่อที่ได้ ออกแบบใหม่เพิ่มเติมด้วย



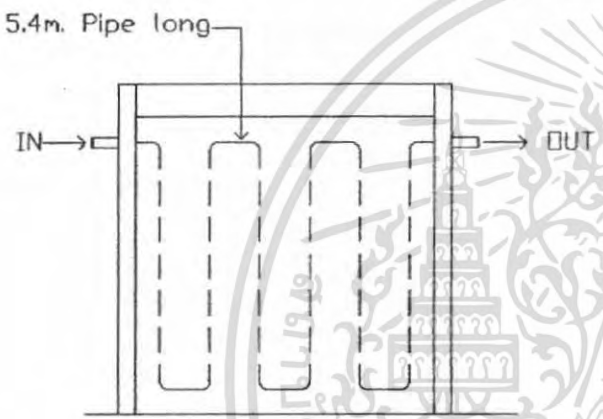
รูปที่ 1. แสดงท่อน้ำแบบอนุกรมที่ใช้จำลองเพื่อ Calibrate program



รูปที่ 2 แสดงท่อห้าแบบขนาน



รูปที่ 5 แสดงเวกเตอร์ของอากาศในห้อง (serial configuration)



รูปที่ 3 แสดงท่อห้าที่ออกแบบใหม่

5.1.2 รูปร่างท่อแบบขนาน

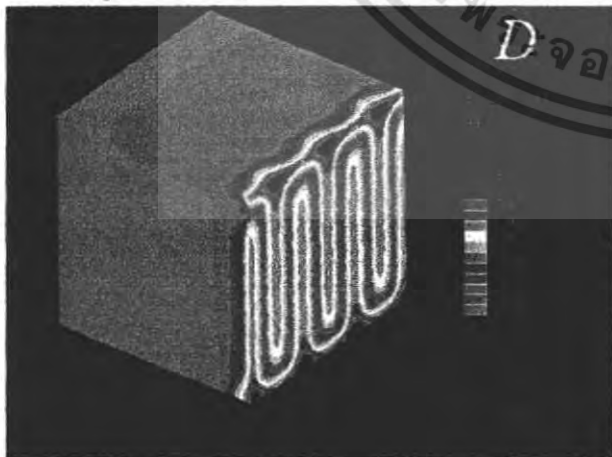


รูปที่ 5 แสดงการกระจายอุณหภูมิของผนังเย็น ( $v=0.0163$ )

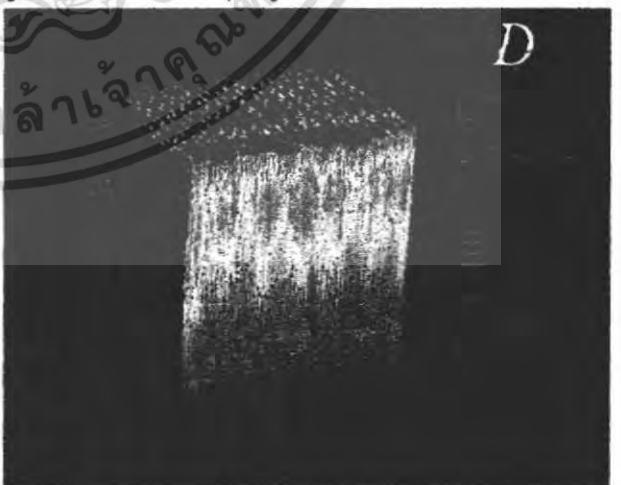
5.ผลการจำลองและการวิเคราะห์

5.1 แสดงการกระจายอุณหภูมิของท่อแต่ละรูปแบบ

5.1.1 รูปร่างท่อแบบอนุกรม



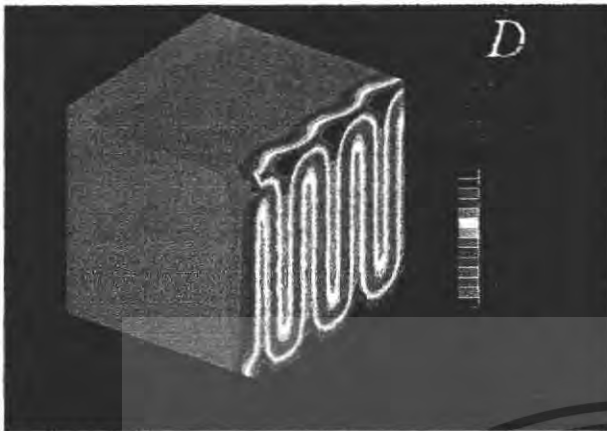
รูปที่ 4 แสดงการกระจายอุณหภูมิของผนังเย็น ( $v=0.0163$ )



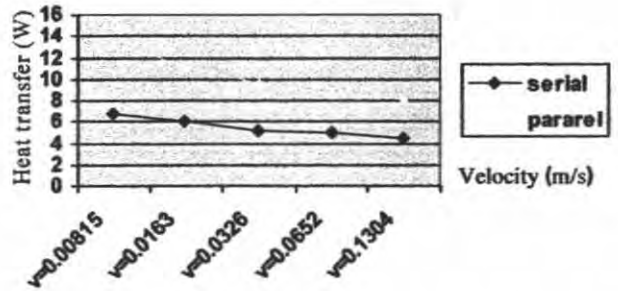
รูปที่ 5 แสดงเวกเตอร์ของอากาศในห้อง (parallel configuration)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 รูปร่างท่อแบบอนุกรมที่ออกแบบใหม่

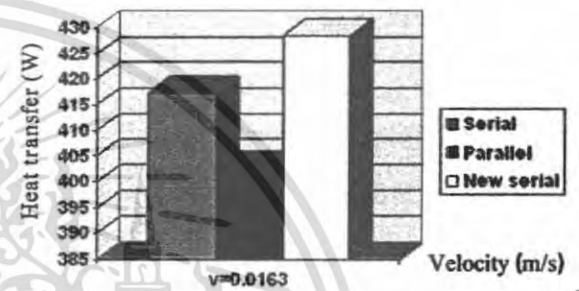


รูปที่ 6 แสดงการกระจายอุณหภูมิของผนังชั้น (v=0.0163) ของท่อที่ออกแบบใหม่

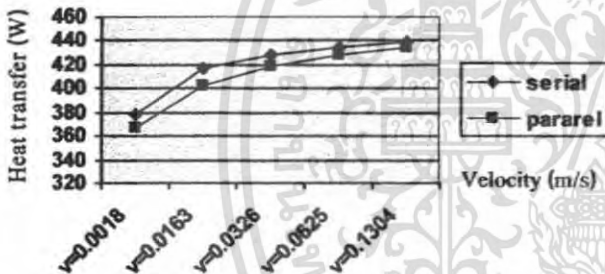


รูปที่ 9 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการถ่ายเทความร้อนจากคอนกรีตสู่อากาศในห้อง

5.2 แสดงกราฟการเปรียบเทียบผลการจำลอง



รูปที่ 10 กราฟแสดงความร้อนจากทองแดงสู่ น้ำ (v=0.0163) ระหว่างรูปร่างท่อเดิมกับ รูปร่างที่ออกแบบใหม่



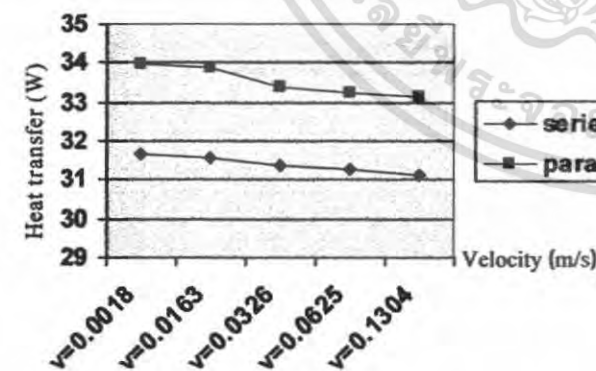
รูปที่ 7 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการถ่ายเทความร้อนจากทองแดงสู่ น้ำ

5.3 วิเคราะห์ผลการทดลอง

1. การกระจายอุณหภูมิของคอนกรีต ทองแดง และน้ำ เป็นค่าที่ยอมรับได้หรือว่าใกล้เคียงกับหลักฟิสิกส์
2. พฤติกรรมของอากาศคือ อุณหภูมิ เวกเตอร์ความเร็ว มีความสัมพันธ์และถูกต้องตามหลักฟิสิกส์
3. พฤติกรรมของน้ำคือ ลักษณะการไหลของเวกเตอร์ตรงตามหลักฟิสิกส์
4. การถ่ายเทความร้อนมีความสัมพันธ์กันที่ถูกต้องของแต่ละรูปแบบของท่อ

6.สรุปผลการจำลอง

1. รูปร่างของท่อแบบอนุกรมมีการถ่ายเทความร้อนจากทองแดงไปสู่ น้ำ ได้มากกว่ารูปร่างแบบขนานที่เงื่อนไขของขอบเหมือนกัน ทั้งนี้เหตุผลหนึ่งอาจเป็นเพราะว่าพื้นที่ผิวสัมผัสของท่อแบบอนุกรมนั้นมีมากกว่าท่อแบบขนาน
2. เมื่อน้ำมีอัตราการไหลที่สูงขึ้น การถ่ายเทความร้อนจากทองแดงไปสู่ น้ำก็สูงขึ้นตามไปด้วยเช่นกัน
3. รูปร่างของท่อแบบอนุกรมใช้กำลังในการขับปั๊มที่สูงกว่ารูปร่างแบบ



รูปที่ 8 กราฟแสดงการเปรียบเทียบอุณหภูมิผนังภายใน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนักเรียนไปใช้ประโยชน์ด้านการศึกษาไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขนานเนื่องจาก pressure drop สูงกว่า

4. รูปแบบของท่อที่ออกแบบใหม่มีการถ่ายเทความร้อนสูงที่สูงขึ้นกว่าเดิม และลดการสะสมความร้อนที่มุมของท่อและการสูญเสียเนื่องจากการไหลน้อยลง

5. จำนวนของ elements ที่ใช้มีผลต่อการคำนวณ โดยการใช้จำนวน elements ที่มากและเล็ก การคำนวณจะนาน แต่ผลการคำนวณจะมีค่าความแม่นยำมากขึ้น

#### 7. อ้างอิง

1. รศ.ดร.จากรวัตร เจริญสุข, “พลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ

2. รศ.ดร.พงษ์เจต พรหมวงศ์, “การถ่ายเทความร้อน”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ

3. นาย มาณพ วิเศษ, “การใช้ผนังเย็นเพื่อลดภาระความเย็นในการปรับอากาศ” คณะวิศวกรรมศาสตร์มหบัณฑิต, มทลย เชียงใหม่

4. นาย พรอรรถ สิงห์เสนี “การลดอุณหภูมิของอาคารด้วยวิธีการฝังท่อน้ำในผนัง” คณะสถาปัตยกรรมศาสตร์ มทบดเหนือ, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ

5. นาย นิวัฒน์ นาคะโยธินสกุล, นาย นิวัฒน์ ภูเจริญ “การจำลองการถ่ายเทความร้อนของหม้อน้ำรถยนต์ด้วยเทคนิคของวัสดุพรุน” คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง, กรุงเทพฯ

6. N.R. Rosaguti , D.F. Fletcher , B.S. Haynes “Laminar Flow in a Periodic Serpentine Channel” Department of Chemical Engineering, The University of Sydney, NSW , 2006 Australia