การออกแบบและพัฒนาโปรแกรม
เพื่อการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ด

PROGRAM DESIGN AND DEVELOPMENT
FOR KRONECKER PRODUCT AND HADAMARD PRODUCT

สุปัฎฐา วัฒนมงคลลาภ
อภิชาติ ทวีบุตร
อรสา บุญเร่งทรัพย์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2550

PROGRAM DESIGN AND DEVELOPMENT FOR KRONECKER PRODUCT AND HADAMARD PRODUCT

SUPATTHA WATTHANAMONGKHONLAP

APICHART TAWEEBOOT

ORASA BUNRENGSUP

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIRMENT FOR DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2007

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การออกแบบและพัฒนาโปรแกรมเพื่อการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ด PROGRAM DESIGN AND DEVELOPMENT FOR KRONECKER PRODUCT AND HADAMARD PRODUCT
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุปัฏฐา วัฒนมงคลลาภ 47050039 นายอภิชาติ ทวีบุตร 47050043 นางสาวอรสา บุญเร่งทรัพย์ 47050044
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ รองศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2550

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ดร.สิริพร แฮนน่า วินเทอร์ ประธานกรรมการ	สิริพร
อาจารย์ภัทราวุธ จันทร์เสงี่ยม กรรมการ	ภัทราวุธ จ.
รองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	[signature]
รองศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	[signature]

[signature]

(รองศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

แด่ สถาบันและคณะวิทยาศาสตร์อันเป็นที่รัก
สุปัฏฐา

ขออุทิศให้กับบิดา-มารดา ผู้เป็นกำลังใจมาโดยตลอด
อภิชาติ

ระลึกสถาบันไว้ในความทรงจำตลอดไป
อรสา

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การออกแบบและพัฒนาโปรแกรมเพื่อการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ด	
ชื่อนักศึกษา	นางสาวสุปัฏฐา วัฒนมงคลลาภ	47050039
	นายอภิชาติ ทวีบุตร	47050043
	นางสาวอรสา บุญเร่งทรัพย์	47050044
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ	
	รองศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์	

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการออกแบบและพัฒนาโปรแกรมช่วยการคำนวณหาผลลัพธ์ของการคูณเมทริกซ์ประกอบด้วยการคูณเมทริกซ์ การคูณแบบครอนเนกเกอร์และการคูณแบบฮาดามาร์ด และแสดงผลการดำเนินการของเมทริกซ์ในเรื่องตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ โปรแกรมประกอบด้วย ส่วนรับข้อมูล ส่วนแสดงข้อมูล โดยใช้โปรแกรม Visual Basic.NET 2005 และส่วนของการคำนวณโดยใช้โปรแกรม MATLAB

Title	PROGRAM DESIGN AND DEVELOPMENT FOR KRONECKER PRODUCT AND HADAMARD PRODUCT	
Student	Ms.Supattha Watthanamongkhonlap	47050039
	Mr.Apichart Thaveeboot	47050043
	Ms.Orasa Boonrengsup	47050044
Degree	Bachelor of Science	
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science	
Programme	Applied Mathematics	
Academic Year	2007	
Advisor	Associate Professor Patcharin Hemchote	
	Associate Professor Praiboon Pantaragphong	

ABSTRACT

This special project is to design and develop program for computing the matrix product, Kronecker product and Hadamard product. It also compute the matrix operation such as determinant, inverse, trace, Eigenvalue and Eigenvector. The program consists of three parts such as input data, computation, and show result. The input and compute part developed by Visual Basic.NET 2005 and the computation part developed by MATLAB.

กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำปัญหาพิเศษเรื่องการออกแบบและพัฒนาโปรแกรมสำหรับการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และแบบฮาดามาร์ดจนสามารถสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์ และ รองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ อาจารย์ที่ปรึกษาผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่าง ๆ และยังเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้ผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้คำปรึกษาและสนับสนุนทางด้านทุนทรัพย์ จนการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จไปได้ด้วยดี รวมทั้งนายสันทัด กัณหวัฒนะ เพื่อน ๆ รุ่นพี่ และบุคคลอื่นๆที่ให้ความช่วยเหลือในเรื่องต่าง ๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้ด้วย

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญภาพ

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในทางคณิตศาสตร์เมทริกซ์เป็นเรื่องที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางและเป็นเรื่องที่มีความน่าสนใจมากเพราะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับหลายๆปัญหาโดยเฉพาะอย่างยิ่งปัญหาที่เกี่ยวกับระบบสมการที่ค่อนข้างซับซ้อน ในการดำเนินการทางเมทริกซ์จะใช้การบวกและการคูณเป็นหลัก ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้จะเน้นที่การคูณกันของเมทริกซ์เท่านั้น การคูณกันของเมทริกซ์นั้นมีอยู่หลายรูปแบบ และหนึ่งในนั้นคือการคูณเมทริกซ์แบบปกติ (Ordinary Matrix Multiplication) ที่เรารู้จักกันดี นอกจากนี้ยังมีการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์(Kronecker product)และแบบฮาดามาร์ด(Hadamard product)ซึ่งเป็นการคูณกันของเมทริกซ์ในอีกรูปแบบหนึ่งที่มีความน่าสนใจเช่นเดียวกัน และยังได้มีการนำมาประยุกต์ใช้ในเรื่องต่าง ๆ เช่น ใช้ในการแก้ระบบสมการ นำมาใช้ทางวิศวกรรมควบคุม และระบบการควบคุมต่าง ๆ การคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และแบบฮาดามาร์ดเป็นการดำเนินการที่น่าสนใจ แต่มีเพียงเฉพาะบุคคลเพียงบางกลุ่มเท่านั้นที่ได้ทำการศึกษาในเรื่องนี้อย่างจริงจังซึ่งยังไม่เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายมากนัก เนื่องจากการดำเนินการของเมทริกซ์นั้น หากเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ ตัวเลขมีค่ามากๆ หรือมี การดำเนินการที่ยุ่งยากซับซ้อน จะต้องใช้เวลาในการคิดคำนวณมากจึงทำให้ไม่เป็นที่น่าสนใจ

ดังนั้นถ้าหากมีโปรแกรมที่สามารถช่วยในการคิดคำนวณหาผลลัพธ์ได้สะดวก รวดเร็ว ถูกต้องช่วยในการศึกษาและ การคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และแบบฮาดามาร์ดจะทำให้กลุ่มผู้ที่สนใจ หรือต้องการศึกษาในเรื่องนี้ได้หันมาให้ความสนใจศึกษาเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ดกันมากขึ้น ซึ่งเป็นแนวทางหนึ่งในการศึกษาเรื่องเมทริกซ์ต่อ ๆ ไป

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1) เพื่อสร้างโปรแกรมช่วยในการคิดคำนวณในเรื่อง การคูณกันของเมทริกซ์ในรูปแบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ด

2) เพื่อเผยแพร่การคูณเมทริกซ์ในรูปแบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ดให้บุคคลทั่วไปที่สนใจศึกษาในเรื่องนี้ได้รู้จักกันอย่างกว้างขวาง

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1) เป็นโปรแกรมที่สามารถรับเมทริกซ์ได้ขนาดไม่เกิน 5×5 และค่าที่รับเข้ามาคำนวณสามารถกรอกเป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนได้ ซึ่งนำมาใช้คำนวณในเรื่องการดำเนินการและ

การตรวจสอบคุณสมบัติของเมทริกซ์ในรูปแบบการคูณของครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ดในเรื่องตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

2) โปรแกรมที่ออกแบบและพัฒนาเป็นแอพพลิเคชันที่ทำงานบนระบบปฏิบัติการวินส์โดว์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) เป็นเครื่องมือในการศึกษาการคำนวณเกี่ยวกับการดำเนินการและการตรวจสอบคุณสมบัติของเมทริกซ์ในรูปแบบการคูณของครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ดในเรื่องตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

2) โปรแกรมที่ออกแบบและพัฒนานี้สามารถช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับการดำเนินการและการตรวจสอบและตรวจสอบคุณสมบัติของการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ดได้เร็วขึ้น

1. 5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1) รวบรวมและศึกษาเนื้อหาและทฤษฎีพื้นฐานต่าง ๆ เกี่ยวกับ การคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์และฮาดามาร์ด

2) ศึกษาวิธีการเขียนโปรแกรมด้วย Visual Basic.NET เพื่อใช้ควบคุมการทำงานในส่วนการนำข้อมูลเข้า

3) ศึกษาวิธีการใช้งานโปรแกรม MATLAB เกี่ยวกับฟังก์ชันต่าง ๆเกี่ยวกับเมทริกซ์

4) ออกแบบหน้าจอและรูปแบบของตัวโปรแกรม

5) เขียนโปรแกรมเพื่อแสดงการทำงานตามที่ได้ออกแบบไว้

6) ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมเพื่อให้โปรแกรมมีประสิทธิภาพ

7) ตกแต่งรูปแบบการแสดงผลของโปรแกรมให้มีความสวยงาม

8) สรุปผล

9) นำเสนอ

บทที่ 2
ทฤษฎีและหลักการที่เกี่ยวข้อง

2.1 เมทริกซ์และการดำเนินการบนเมทริกซ์ (Matrices and Matrix Operations)

นิยาม 2.1.1 เมทริกซ์(Matrix) คือการจัดเรียงจำนวนใดๆ ในรูปของแถว (row) และแนวตั้ง (column) เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ภายในเครื่องหมาย [ ]

รูปทั่วๆไปของเมทริกซ์เขียนได้ดังนี้

$$
\begin{array}{cl}
 & \begin{array}{cccc} \text{แนวตั้งที่ 1} & \text{แนวตั้งที่ 2} & & \text{แนวตั้งที่ n} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\
A=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2} \\ \\ \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ m} \end{array}
\end{array}
$$

สมาชิก a_{ij} , $i = 1,2,3,\ldots,m$, $j = 1,2,3,\ldots,n$ คือสมาชิกตัวที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ i และแนวตั้งที่ j ถ้าเมทริกซ์ A ประกอบด้วย m แถว และ n แนวตั้ง เราจะกล่าวว่า A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ หรือ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

แถวที่ i ของเมทริกซ์ A ประกอบด้วย

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad (1 \le i \le m)$$

แนวตั้งที่ j ของเมทริกซ์ A ประกอบด้วย

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (1 \le j \le n)$$

ในบางครั้งเราใช้สัญลักษณ์ $A = [a_{ij}]$ หรือ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ แทน เมทริกซ์ A ซึ่งมี m แถว และ n แนวตั้ง

ตัวอย่าง 2.1.1 ให้

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & -1 & 1\\ 1 & -3 & 2 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4\\ 3\\ 0\\ -2\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}4 & -2 & 3\\ 7 & -6 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}14 & -3 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2 ×4, B เป็นเมทริกซ์ขนาด 4 × 1

C เป็นเมทริกซ์ขนาด 3 ×3, D เป็นเมทริกซ์ขนาด 1 × 5

จากเมทริกซ์ A จะเห็นว่า $a_{24} = 5$, $a_{13} = -1$

จากเมทริกซ์ B จะเห็นว่า $b_{41} = -2$, $b_{31} = -1$

นิยาม 2.1.2 เมทริกซ์ซึ่งมีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์ (Zero matrix)

ตัวอย่าง 2.1.2

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

A, B และ C เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ซึ่งมีขนาดต่างกัน

ข้อตกลง เมทริกซ์ศูนย์ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย **0**

นิยาม2.1.3 เมทริกซ์ซึ่งมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแนวตั้ง เรียกว่า เมทริกซ์จัตุรัส (Square matrix)

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์ ซึ่งมีขนาด 2×2

$$D=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 5\end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์ ซึ่งมีขนาด 3×3

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ขนาด $n\times n$ เรานิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A_n และสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก (Main diagonal) ของ A_n ประกอบด้วย a_{11} , a_{22} , a_{33} , . . . , a_{nn} จากตัวอย่างข้างบน สมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ C ประกอบด้วย 3 และ 4 สมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของ D ประกอบด้วย 0 , 2 และ 5

นิยาม 2.1.4 ถ้า $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ขนาด $n \times n$ ซึ่ง $a_{ij} = 0$ สำหรับทุก $i \neq j$ แล้วเราเรียกว่า เมทริกซ์ A ว่าเป็น เมทริกซ์แนวทแยง (Diagonal matrix)

ตัวอย่าง 2.1.4

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์แนวทแยงขนาด 2×2

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์แนวทแยงขนาด 4×4

และถ้าสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักของเมทริกซ์แนวทแยงมีค่าเท่ากันหมด เราเรียกเมทริกซ์นั้นว่า เมทริกซ์สเกลาร์ (Scalar matrix)

ตัวอย่าง 2.1.5

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์สเกลาร์ขนาด 3×3

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์สเกลาร์ขนาด 2×2

นิยาม 2.1.5 เมทริกซ์สเกลาร์ที่สมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 เรียกว่า เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix) นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์แล้ว $a_{ii} = 1$ และ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $i \neq j$ เราใช้สัญลักษณ์ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

ตัวอย่าง 2.1.6

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ , \ I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ I_n อาจเขียนในรูปลักษณ์ได้ดังนี้

$$I_n = [\delta_{ij}] \text{ โดยที่ } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 ; & i = j \\ 0 ; & i \neq j \end{cases}$$

δ_{ij} เรียกว่า ครอนเนกเกอร์เดลต้า (Kronecker delta)

นิยาม 2.1.6 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เมทริกซ์ A จะเท่ากับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุกค่า $i = 1,2,3,\ldots,m$ และ $j = 1,2,3,\ldots,n$

นั่นคือ เมทริกซ์ A และ B จะต้องมีขนาดเท่ากัน และทุกสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 2.1.7 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} x & 3 & -4 & z \\ 0 & -2 & y & 7 \end{bmatrix} , \ D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×4, B เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 ดังนั้น $A \neq B$ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ D เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 แต่ $b_{11} = 2$, $d_{11} = 3$ ซึ่งทำให้ $b_{11} \neq d_{11}$ ดังนั้น $B \neq D$ ซึ่ง A และ C เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×4 จากการพิจารณาสมาชิกของ A และ C จะเห็นว่า A = C ก็ต่อเมื่อ $x = 2$, $y = -1$ และ $z = 1$

การบวกเมทริกซ์ (Addition of Matrices)

นิยาม 2.1.7 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{m \times n}$

เรานิยามให้ $A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่าง2.1.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

จะได้ $$A + B = C = \begin{bmatrix} 3+1 & -1+5 \\ -2+0 & 0+(-3) \\ 4+(-1) & 1+0 \\ 5-3 & 12+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -3 \\ 3 & 1 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

ข้อสังเกต เมทริกซ์ A และ B จะบวกหรือรวมกันได้ ก็ต่อเมื่อทั้งสองเมทริกซ์มีขนาดเท่ากัน และเมทริกซ์ของผลบวกที่ได้จะมีขนาดเท่าเดิม

ดังนั้น ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว A + (-1) B จะเขียนแทนด้วย A – B และเรียกว่าเป็นผลต่างระหว่างเมทริกซ์ A และ B (difference between A and B)

ตัวอย่าง 2.1.9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ ดังนั้นจะได้

$$A - B = A + (-1)B = \begin{bmatrix} 1+(-5) & 2+(-1) & -3+(-4) \\ 1+(0) & -2+(-3) & 1+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 1 & -5 & -5 \end{bmatrix}$$

ผลคูณของเมทริกซ์ (Multiplication of matrices)

นิยาม 2.1.8 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ แล้ว ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B จะเป็นเมทริกซ์ $AB = [c_{ij}]$ ซึ่งมีขนาด $m \times p$ โดยที่

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{in} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

$i = 1, 2, \ldots, m$

$j = 1, 2, \ldots, p$

$$
\text{แถวที่ i} \longrightarrow
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & & \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{bmatrix}_{m\times n}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{แนวตั้งที่ j} \\
\downarrow \\
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np}
\end{bmatrix}_{n\times p}
\end{array}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp}
\end{bmatrix}
\longleftarrow \text{แถวที่ i}
$$

ข้อสังเกต (1) ผลคูณของเมทริกซ์ A และ เมทริกซ์ B จะหาได้ก็ต่อเมื่อ จำนวนแนวตั้งของเมทริกซ์ A เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B

(2) c_{ij} คือ สมาชิกในตำแหน่ง ij ของผลคูณ AB ได้มาจาก ผลบวกของผลคูณระหว่างสมาชิกในแถวที่ i ของเมทริกซ์ A กับสมาชิกในแนวตั้งที่ j ของเมทริกซ์ B

ตัวอย่าง 2.1.10 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×4 ดังนั้น เมทริกซ์ผลคูณ AB จึงมีขนาด 2×4 ตัวอย่างนี้จะเป็นการแสดงการหาสมาชิกในตำแหน่ง c_{23} และ c_{14}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ \boxed{2 \quad 6 \quad 0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{26} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$(2\bullet4)+(6\bullet3)+(0\bullet5) = 26$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ 2 \quad 6 \quad 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{13} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}$$

$(1\bullet3)+(2\bullet1)+(4\bullet2) = 13$

เนื่องจากการนิยามผลคูณของเมทริกซ์ AB ระหว่าง A และ B จำเป็นต้องพิจารณาจำนวนแนวตั้งของ A และจำนวนแถวของ B ดังนั้นเพื่อความสะดวกและรวดเร็วเราพิจารณาจากแผนภาพต่อไปนี้

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & AB \\ m \times n & & n \times p & = & m \times p \end{array}$$

จากแผนภาพถ้าจำนวนแนวตั้งของ A เท่ากับ จำนวนแถวของ B ผลคูณ AB ก็สามารถนิยามได้หรือสามารถหาค่าได้และจำนวนแถวของ A และจำนวนแนวตั้งของ B จะเป็นขนาดของผลคูณ AB เช่น

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & AB \\ 3 \times 4 & & 4 \times 7 & = & 3 \times 7 \end{array}$$

ตัวอย่าง 2.1.11 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times4}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{4\times3}$

จะได้ $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 25 \\ 1 & 9 & 15 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

ตัวอย่าง 2.1.12 จากตัวอย่าง 2.1.11 จะเห็นว่า สมาชิกในแนวตั้งที่ 1 ของ AB ได้มาจากผลคูณของเมทริกซ์ A กับแนวตั้งที่ 1 ของเมทริกซ์ B ดังในเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 25 \\ 1 & 9 & 15 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

แนวตั้งที่ 1 ของ AB

แนวตั้งที่ 1 ของ B

และสมาชิกในแถวที่ 2 ของ AB ได้มาจากผลคูณของแถวที่ 2 ของ A กับเมทริกซ์ B ดังในเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 25 \\ 1 & 9 & 15 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

แถวที่ 2 ของ A

แถวที่ 2 ของ AB

ตัวอย่าง 2.1.13 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×4 จะได้ว่า AB เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×4 แต่ BA ไม่สามารถหาได้ เนื่องจากจำนวนแนวตั้งของ B ไม่เท่ากับจำนวนแถวของ A

ตัวอย่าง 2.1.14 กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×2 แล้วจะได้ AB เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ BA เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3

ตัวอย่าง 2.1.15 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 13 & 1 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 2.1.14 , 2.1.15 และ 2.1.16 จะเห็นว่าเมทริกซ์ผลคูณ AB ไม่จำเป็นจะต้องเท่ากับเมทริกซ์ BA

2.2 คุณสมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการของเมทริกซ์

(Algebraic Properties of Matrix Operation)

ทฤษฎีบท 2.2.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$, B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ และ C เป็นเมทริกซ์ขนาด $p \times q$ จะได้ว่า $A(BC) = (AB)C$

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times3}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{3\times4}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{4\times3}$

$$\text{จะได้ } (AB)C = \begin{bmatrix} 19 & -1 & 6 & 13 \\ 16 & -8 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 16 & 56 \\ 12 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } A(BC) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 8 & -4 & 6 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 16 & 56 \\ 12 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $(AB)C = A(BC)$

2.3 การคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์ (Kronecker product)

$A = [a_{ij}]_{n\times m}$ และ $B = [b_{ij}]_{p\times q}$

ผลคูณครอนเนกเกอร์ของเมทริกซ์ A และ B กำหนดโดย

$A \otimes B = [c_{ij}]$ ซึ่งมีเมทริกซ์เป็น $np \times mq$ (เมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้น)

โดยที่

$$A \otimes B = [a_{ij}B] = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix}_{np\times mq}$$

ตัวอย่าง

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$$\therefore A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 8 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}_{4\times6}$$

คุณสมบัติของการดำเนินการคูณแบบครอนเนกเกอร์ (Properties of the Kronecker product Operation)

1. การเปลี่ยนกลุ่ม

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

2. ผกผัน

$(A \otimes B)^{-1} = (A^{-1} \otimes B^{-1})$ สำหรับเมทริกซ์ที่มีผกผัน A , B

3. ตัวกำหนด

$$\det(A_{n\times n} \otimes B_{p\times p})[\det(A)]^{p} \cdot [\det(B)]^{n}$$

4. รอยเมทริกซ์

$$tr(A \otimes B) = tr(A) \cdot tr(B)$$

5. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ถ้า λ และ μ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A และ B ตามลำดับ และ X,Y เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ λ และ μ ตามลำดับ แล้ว $\lambda\mu$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ $A \otimes B$ โดยมี $X \otimes Y$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัย

2.4 การคูณเมทริกซ์แบบฮาดามาร์ด (Hadamard product)

$A = [a_{ij}]_{n\times m}$ และ $B = [b_{ij}]_{n\times m}$

แล้วผลคูณฮาดามาร์ดของเมทริกซ์ A และ B กำหนดโดย

$A \circ B = [c_{ij}]$ ซึ่งมีขนาดเหมือนเมทริกซ์ A และ B

โดยที่

$$A \circ B = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 1\cdot 0 & 3\cdot 0 & 2\cdot 2 \\ 1\cdot 7 & 0\cdot 5 & 0\cdot 0 \\ 1\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 1 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

คุณสมบัติของการดำเนินการคูณแบบฮาดามาร์ด (Properties of the Hadamard product Operation)

1. การเปลี่ยนกลุ่ม

$$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$$

2. การสลับที่

$$A \circ B = B \circ A$$

2.5 ตัวกำหนด

เมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ สามารถหาจำนวนที่เรียกว่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ ตัวกำหนดนี้ทำให้ทราบว่าเมทริกซ์มีผกผันหรือไม่ นำไปใช้ในสูตรสำหรับหาเมทริกซ์ผกผัน และการประยุกต์ที่สำคัญเกี่ยวกับทฤษฎีของเมทริกซ์และเวกเตอร์

2.5.1 นิยามตัวกำหนด

พิจารณาผลคูณของสมาชิกของเมทริกซ์จัตุรัส โดยที่ผลคูณนั้นประกอบด้วยสมาชิกจากทุกแถวที่ไม่ซ้ำกันและจากทุกแนวตั้งที่ไม่ซ้ำกัน เช่น

เมทริกซ์ A ขนาด 2 x 2 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้วผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้คือ $a_{11}a_{22}$ และ $a_{12}a_{21}$

เมทริกซ์ A ขนาด 3 x 3 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้วผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้คือ $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$, $a_{13}a_{21}a_{32}$ และ $a_{13}a_{22}a_{31}$

ถ้าเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้น กรณีต่างๆ ของผลคูณของสมาชิกที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะมีหลายเทอม จึงต้องศึกษารูปแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมด

นิยาม 2.5.1 ให้ $A = [\, a_{ij} \,]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด n x n ตัวกำหนดของ A แทนด้วย det (A)หรือ |A| โดยที่ $\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ ซึ่งเป็นผลบวกของการเรียงสับเปลี่ยน $j_1, j_2, \ldots, j_n$ ทั้งหมดของเซต S = { 1, 2, … , n }เครื่องหมายของแต่ละการเรียงสับเปลี่ยน ให้เป็นบวกถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่ และให้เป็นลบถ้าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่

ในแต่ละเทอมของ $(\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ ของ det (A) ดัชนีของแถวของทุกสมาชิกจะเรียงกันเป็นจำนวนนับเสมอ ส่วนดัชนีของแนวตั้ง เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $j_1, j_2, \ldots, j_n$ และแต่

ละเทอมของ det (A) จะมีเครื่องหมายบวกหรือลบเป็นผลคูณของ n สมาชิกของ A ซึ่งมาจากแต่ละแถวที่ไม่ซ้ำกันและมาจากแต่ละแนวตั้งที่ไม่ซ้ำกัน

ตัวอย่าง 2.5.1 ให้ $A = [a_{11}]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 1x1 แล้ว $\det(A) = a_{11}$

ตัวอย่าง 2.5.2 เมื่อให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้ว det (A) เขียนในเทอมของ $a_{1\_}a_{2\_}$ และแทนที่ว่างด้วยสมาชิกของการเรียงสับเปลี่ยน ดัชนีคือ 12 และ 21เมื่อ 12 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่มีเครื่องหมายเป็นบวก ส่วน 21 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนคี่มีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนั้น

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

หรือ det (A) ได้มาจากผลคูณของสมาชิกบนเส้นจากซ้ายไปขวาลบด้วยผลคูณของสมาชิกบนเส้นจากขวาไปซ้าย ดังนี้

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ดังนั้น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว det (A) = 1(4) – 2(3) = 4 - 6 = -2

ตัวอย่าง 2.5.3 เมื่อให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้วหา det (A) เขียนในเทอม 6 เทอมของ

A มีขนาด 3 x 3 มีจำนวนสมาชิกจากการเรียงสับเปลี่ยน 3! = 6 จำนวน หา det (A) ที่เขียนในรูป 6 เทอมของ $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$ และ $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$ แล้วเติมที่ว่างด้วยสมาชิกการเรียงสับเปลี่ยน จากนั้นให้พิจารณาเครื่องหมาย + หรือ – ซึ่งขึ้นอยู่กับว่าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนคู่หรือ คี่ จะได้

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

หรืออาจใช้วิธีหา det (A) โดยเติมแนวตั้งที่ 1 และ 2 ของ A ดังแสดงด้านล่าง จากนั้นหาผลคูณของสมาชิกบนเส้นจากซ้ายไปขวาลบด้วยผลคูณของสมาชิกบนเส้นจากขวาไปซ้าย ดังนี้

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

หมายเหตุ วิธีการเติมแนวตั้งที่ 1 และ 2 นี้ใช้ได้เฉพาะเมทริกซ์ขนาด 3 x 3 เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.5.4 จงหา det (A) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

ผลเฉลย แทนค่าตามสูตรในตัวอย่าง 2.3.6

det (A) = 1(1)(2) + (-1)(1)(1) + 2(2)(3) - 2(1)(1) –1(3)(1) – (-1)(2)(2)

= 2 - 1 + 12 - 2 - 3 + 4

= 12

2.5.2 คุณสมบัติตัวกำหนด

ทฤษฎีบท 2.5.2 ถ้า B ได้มาจาก A โดยการสลับที่ 2 แถว (หรือแนวตั้ง) แล้ว

det (B) = - det(A)

ตัวอย่าง 2.5. 5 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2$

(การสลับที่แถวและการสลับเปลี่ยนเมทริกซ์)

ทฤษฎีบท 2.5.3 ถ้า A มี 2 แถว (หรือแนวตั้ง) เท่ากันแล้ว det (A) = 0

ตัวอย่าง 2.5.6 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

(เนื่องจากมีแถวที่ 1 และ 3 เหมือนกัน)

ทฤษฎีบท 2.5.4 ถ้าแถว (หรือแนวตั้ง) ของ A ประกอบสมาชิกที่เป็นศูนย์ แล้ว det (A) = 0

ตัวอย่าง 2.5.7 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

ทฤษฎีบท 2.5.5 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด n×n แล้ว det (uA) = u^ndet (A)เมื่อ u เป็นจำนวนใด ๆ

ทฤษฎีบท 2.5.6 ถ้า A = [a_{ij}] เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (ล่าง) แล้ว

det (A) = $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$

นั่นคือตัวกำหนดของเมทริกซ์สามเหลี่ยมคือผลคูณของสมาชิกบนแนวทแยงหลัก

2.6 ผกผันของเมทริกซ์ (Inverse of a Matrix)

นิยาม 2.6.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ จะกล่าวว่า A มีผกผัน (Invertible) หรือ A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมิใช่เอกฐาน (nonsingular matrix) ถ้าสามารถหาเมทริกซ์จัตุรัส B ได้ ซึ่งทำให้

$$AB = I_n = BA$$

และเรียกเมทริกซ์ B ว่าเป็นผกผันของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^{-1}

นั่นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมิใช่เอกฐานขนาด $n \times n$ แล้ว จะได้ว่า

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

และถ้า A ไม่มีผกผัน แล้วจะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)

ตัวอย่าง 2.6.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

เพราะว่า $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

และ $$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

ดังนั้น A มีผกผัน ซึ่ง A^{-1} = B และอาจจะกล่าวได้ว่า B มีผกผัน ซึ่ง B^{-1} = A เช่นกัน

ตัวอย่าง 2.6.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

เรามีวิธีในการหา A^{-1} โดยสมมุติให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ดังนั้นจะได้ $$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$\begin{bmatrix} 6a-3c & 6b-3d \\ 2a-c & 2b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

จากนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ จะทำให้ได้สมการดังต่อไปนี้

$$6a - 3c = 1 \qquad \text{.....(1)}$$

$$2a - c = 0 \qquad \text{.....(2)}$$

$$6a - 3d = 0 \qquad \text{.....(3)}$$

$$2b - d = 1 \qquad \text{.....(4)}$$

พิจารณา $(1) \div 3$ จะได้ $2a - c = \frac{1}{3}$ .....(5)

จาก (2) และ (5) จะได้ $0 = \frac{1}{3}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นั่นคือ ไม่สามารถหาจำนวนจริง a,b,c และ d ที่สอดคล้องตามสมการ (1), (2), (3) และ (4) ได้ ดังนั้น A จึงไม่มีผกผัน

ทฤษฎีบท 2.6.1 ถ้าเมทริกซ์ A มีผกผัน แล้ว ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.6.2 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จตุรัสที่มีขนาดเท่ากันซึ่งมิใช่เอกฐาน แล้วจะได้ AB เป็นเมทริกซ์ซึ่งมิใช่เอกฐาน และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ตัวอย่าง 2.6.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

จะได้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

และเนื่องจาก $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -8 & -15 & 13 \\ 4 & 7 & -6 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 375 & 703 & -607 \\ -121 & -227 & 196 \\ -47 & -88 & 76 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

บทแทรก 2.6.3 ถ้า $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ เป็นเมทริกซ์จตุรัสที่มีขนาดเท่ากันซึ่งมิใช่เอกฐาน แล้วจะได้ $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n$ เป็นเมทริกซ์ซึ่งมิใช่เอกฐาน และ $(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n)^{-1} = A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$

ทฤษฎีบท 2.6.4 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมิใช่เอกฐาน แล้วจะได้

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ตัวอย่าง 2.6.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.7 รอยเมทริกซ์ (Traces of Matrices)

ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times m}$ แล้ว รอยเมทริกซ์ของเมทริกซ์ A จะเป็น

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{mm} \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ii} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.7.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

$$\begin{aligned} tr(A) &= a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ &= 1 + 3 + 7 \\ &= 11 \end{aligned}$$

2.8 ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvalues and Eigenvector)

2.8.1 ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue and Eigenvector)

นิยาม 2.8.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ X ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ใน R^n X เรียกว่าเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvector) ของ A ก็ต่อเมื่อ

$$AX = \lambda X$$

สำหรับบางค่าสเกลาร์ λ

สเกลาร์ λ เรียกว่า **ค่าลักษณะเฉพาะของ A** (Eigenvalue) นอกจากนี้ X ยังเรียกว่าเป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ λ (Eigenvector corresponding to λ)

ตัวอย่าง 2.8.1 จงแสดงว่า $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

ที่สมนัยกับ $\lambda = 3$

เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
AX &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \\
&= 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= 3X
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น X เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ λ

ในการหาค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จัตุรัส A ซึ่งมีขนาด $n \times n$ เราลองพิจารณาสมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
AX &= \lambda X \\
&= \lambda I_n X \\
\lambda I_n X - AX &= \mathbf{0} \\
(\lambda I_n - A)X &= \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

ขณะนี้ระบบสมการเป็นสมการแบบเอกพันธ์ ดังนั้น $(\lambda I_n - A)X = \mathbf{0}$ มีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยก็ต่อเมื่อ

$$\det(\lambda I_n - A) = 0$$

เรียกว่า **สมการลักษณะเฉพาะ** (Characteristic equation)

ตัวอย่าง 2.8.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาฟังก์ชันพหุนามลักษณะเฉพาะของ A

เพราะว่า $\det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$

$$= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

เป็นสมการลักษณะเฉพาะ

เพราะว่าผลเฉลยของสมการคือ $\lambda = 1$ และ $\lambda = 2$

ดังนั้นเราได้ว่าค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ 1 และ 2

ทฤษฎีบท 2.8.1 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A

2. ระบบสมการ (λI_n - A)X = **0** มีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์

3. มีเวกเตอร์ X ที่ไม่เป็นศูนย์ใน R^n ที่ทำให้ AX = λ X

4. λ เป็นผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงของสมการลักษณะเฉพาะ det(λI_n - A) = 0

2.9 การคำนวณโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB

ความสามารถของโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB ที่ช่วยการคำนวณ เช่น

การคูณเมทริกซ์

```
>>A = [1, 3; 2, 4]
    A =
            1       3
            2       4

>>B = [2,1; 3,2]
    B =
            2       1
            3       2

>> A*B
    ans =
            11      7
            16      10
```

การคูณแบบครอนเนกเกอร์

```
>>A = [1,3;2,4]
    A =
            1       3
            2       4
```

```
>>B = [2,1;3,2]
     B =
          2    1
          3    2

>>kron(A,B)
     ans =
           6    3    4    2
           9    6    6    4
          -2   -1    0    0
          -3   -2    0    0
```

การคูณแบบฮาดามาร์ด

```
>>A = [1,3;2,4]
     A =
          1    3
          2    4

>>B = [2,1;3,2]
     B =
          2    1
          3    2

>> A.*B
     ans =
           6    2
          -3    0
```

การหาค่ากำหนดของเมทริกซ์

```
>>A = [1,3;2,4]

    A =

        1    3

        2    4

>> det(A)

    ans =

        -2


>>A = [1,-3,-1;2,4,4;3,0,4]

    A =

        1    -3    -1

        2     4     4

        3     0     4


>>det(A)

    ans =

        16
```

การหาเมทริกซ์ผกผัน

```
>>A = [1,3;2,5]

    A=

        1    3

        2    5


>>inv(A)

    ans =

        -5    3

        2    -1
```

```
>>A = [1,2,-1;2,5,4;3,7,4]
    A =
        1    2    -1
        2    5    4
        3    7    4

>>inv(A)
    ans =
        -8.0000 -15.000 13.0000
        4.0000  7.0000  -6.0000
        -1.0000 -1.0000 1.0000
```

การหารอยเมทริกซ์

```
>>A = [2,8,7;3,1,2;5,9,3]
    A =
        2    8    7
        3    2    1
        5    9    3

>>trace(A)
    ans =
        6
```

การหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

```
>>A = [3,2;-1,0]
    A =
        3    2
        -1   0
```

```
>> eig(A)

        ans =

                2

                1
```

การหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

```
>>A = [3,2;-1,0]

        A =

                3       2

                -1      0

>>[F,D] = eig(A)

F =

                0.8944   -0.7071

                -0.4472   0.7071
```

บทที่ 3
การออกแบบโปรแกรม

ในบทนี้เป็นการออกแบบส่วนของโปรแกรม และแนวทางการเขียนโปรแกรม

3.1 หลักการทำงาน

โปรแกรมจะเน้นการรับข้อมูลในรูปเมทริกซ์ แล้วทำการคำนวณผลคูณเมทริกซ์ การดำเนินการของผลคูณประกอบด้วย ตัวกำหนด รอยเมทริกซ์ ผกผัน ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะและแสดงผลลัพธ์ต่าง ๆ

โปรแกรม MATLAB เป็นโปรแกรมที่ออกแบบมาเพื่อการคำนวณและประมวลผลทางคณิตศาสตร์โดยเฉพาะ และผลคูณและการดำเนินการข้างต้นคำนวณได้ไม่ยาก แต่โปรแกรม MATLAB จะต้องมีข้อมูลในรูปแบบที่กำหนด หากผู้ใช้ไม่คุ้นเคย จะต้องศึกษากฎเกณฑ์การป้อนข้อมูลเมทริกซ์ซึ่งต้องเสียเวลาทำความเข้าใจ ทำให้เกิดโอกาสผิดพลาดเกิดขึ้นได้ง่าย และการแสดงผลลัพธ์ต่าง ๆ ก็แสดงผลในรูปแบบของโปรแกรม MATLAB ทำให้ไม่สะดวกต่อการดูผลลัพธ์

โปรแกรม Visual Basic.NET เป็นโปรแกรมที่สามารถเขียนเพื่อประมวลผลต่าง ๆ ได้ตามที่ผู้เขียนกำหนด ตั้งแต่การนำข้อมูลเข้าเพื่อการประมวลผล การคำนวณและการแสดงผลแต่การคำนวณจะต้องทำความเข้าใจในขั้นตอนวิธีการคำนวณต่าง ๆ อย่างมาก แต่ก็อาจไม่มีประสิทธิภาพเท่าที่ควร ดังนั้นในการพัฒนาโปรแกรมจะใช้วิธีการดังนี้

ให้โปรแกรมVisual Basic.NET เป็นส่วนควบคุมการดำเนินงานหลักโดยรับข้อมูลเมทริกซ์และส่งข้อมูลไปคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB และรับผลลัพธ์มาแสดงผลด้วย โปรแกรม Visual Basic.NET ซึ่งส่วนของการป้อนข้อมูลและแสดงผลลัพธ์สามารถออกแบบและเขียนให้ผู้ใช้มีความสะดวกและใช้งานได้ง่าย ตลอดจนสามารถตรวจสอบกฎเกณฑ์ พื้นฐานของข้อมูลได้

3.2 โครงสร้างของโปรแกรม

โปรแกรมจะเน้นการคำนวณของเมทริกซ์ ดังนี้

1) ส่วนข้อมูลเมทริกซ์ จะประกอบด้วยข้อมูลของเมทริกซ์ 3 เมทริกซ์ เรียกว่า A , B และ C แต่ละเมทริกซ์สามารถระบุขนาดและป้อนข้อมูลของเมทริกซ์ตามขนาดที่กำหนดเนื่องจากมีข้อจำกัดการแสดงผลลัพธ์จากการคูณจึงกำหนดขนาดสูงสุดไว้เป็น 5×5

2) เมทริกซ์เดี่ยว คำนวณการดำเนินการ

- ตัวกำหนด
- ผกผัน
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะ
- เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

3) การหาผลคูณเมทริกซ์ เป็นการหาผลคูณของเมทริกซ์โดยจะให้ผู้ใช้เลือกได้ว่าเป็นผลคูณของ 2 เมทริกซ์ หรือผลคูณของ 3 เมทริกซ์ จากเมทริกซ์ A,B,C ณ ตำแหน่งใด ๆ เช่น $B \times A \times A$ เป็นต้น และคำนวณหาผลดังต่อไปนี้จากผลคูณ ได้แก่ ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

4) การหาผลคูณแบบครอนเนกเกอร์ เป็นการหาผลคูณแบบครอนเนกเกอร์ที่ให้ผู้ใช้เลือกได้ว่าเป็นผลคูณของ 2 เมทริกซ์ หรือ ผลคูณของ 3 เมทริกซ์ จากเมทริกซ์ A,B,C ณ ตำแหน่งใด ๆ แล้วคำนวณผลต่อไปนี้จากเมทริกซ์ผลคูณ ได้แก่ ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

5) การหาผลคูณแบบฮาดามาร์ด เป็นการหาผลคูณแบบฮาดามาร์ดที่ให้ผู้ใช้เลือกได้ว่าเป็นผลคูณของ 2 เมทริกซ์ หรือ ผลคูณของ 3 เมทริกซ์ จากเมทริกซ์ A,B,C ณ ตำแหน่งใด ๆ แล้วคำนวณผลต่อไปนี้จากเมทริกซ์ผลคูณ ได้แก่ ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

เพื่อความสะดวกและง่ายต่อผู้ใช้โปรแกรมจะมีส่วนที่กล่าวถึงนิยามและตัวอย่าง รวมถึงคุณสมบัติพื้นฐานของการคูณในแต่ละแบบ

3.3 หลักการทำงานของโปรแกรม MATLAB

1) โปรแกรม MATLAB เมื่อเรียกใช้แบบปกติ จะขึ้นเครื่องหมาย (prompt) “>” เพื่อรอให้ผู้ใช้ป้อนคำสั่ง แล้วทำงานตามทีละคำสั่ง

2) โปรแกรม MATLAB ถ้าต้องการให้ทำงานตามลำดับคำสั่งอย่างต่อเนื่อง สามารถเขียนคำสั่งไว้ในไฟล์ที่มี extension เป็น .m เช่น ไฟล์ dataA.m

3) โปรแกรม MATLAB เมื่อเริ่มทำงานาจะตรวจดูว่ามีไฟล์ startup.m หรือไม่ ถ้ามีจะทำงานตามลำดับคำสั่ง MATLAB ที่เขียนรวมไว้ใน startup.m

3.4 การออกแบบให้ Visual Basic.NET และ MATLAB ทำงานร่วมกัน

1) ส่วนการจัดการข้อมูลเมทริกซ์

เนื่องจากไม่สามารถส่งข้อมูลจาก Visual Basic.NET ไปให้ MATLAB ได้โดยตรงจึงส่งโดยเก็บข้อมูลลงในไฟล์ .m ของ MATLAB

ข้อมูลของเมทริกซ์ A เก็บในชื่อ dataA.m

ข้อมูลของเมทริกซ์ B เก็บในชื่อ dataB.m

ข้อมูลของเมทริกซ์ C เก็บในชื่อ dataC.m

ในไฟล์แต่ละไฟล์จะเก็บข้อมูลตามกฎเกณฑ์ที่ MATLAB เข้าใจ และเก็บตัวแปรจำนวนแถวและจำนวนแนวตั้ง เช่น ในไฟล์ dataA.m มีรูปแบบดังนี้

dataA.m
A = [1,2,3;4,5,6] NumRow = 2 NumCol = 3

การเก็บข้อมูลลงไฟล์ หรือสร้างไฟล์ dataA.m จะสร้างเมื่อมีการสั่งยืนยันเก็บข้อมูลใน Visual Basic.NET

2) การเลือกการดำเนินการ

ในส่วนนี้จะให้ผู้ใช้เลือกการคูณว่าเป็นของ 2 เมทริกซ์ หรือ 3 เมทริกซ์ โดยระบุเมทริกซ์ A,B,C ในแต่ละตำแหน่งใด ๆ ได้พร้อมตรวจสอบว่าสามารถดำเนินการคูณได้หรือไม่ ถ้าได้ จะให้ Visual Basic.NET สร้างไฟล์ startup.m และเรียกใช้โปรแกรม MATLAB ใน Visual Basic.NET โดยใช้คำสั่ง shell("C:\MATLAB6p1\work") และคำสั่งในไฟล์ startup.m จะประกอบด้วยคำสั่งให้เรียกข้อมูลของเมทริกซ์ที่จะใช้และเรียกคำสั่งของการดำเนินการ เช่น ถ้าใช้ เมทริกซ์ A และ C ในไฟล์จะประกอบด้วย

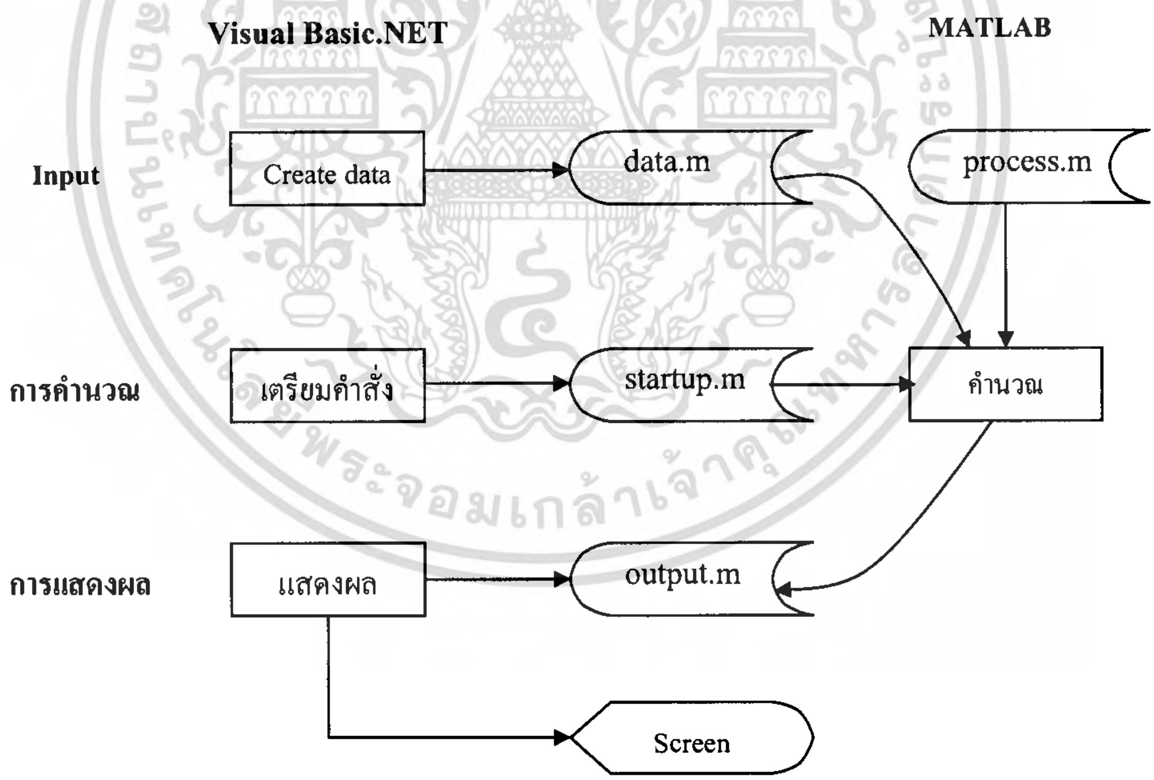
startup.m
dataA.m dataC.m Hprocess.m exit

3) ไฟล์คำสั่งการคูณและคำนวณของเมทริกซ์ผลคูณ

ไฟล์การคูณและการดำเนินการจะเตรียมใช้ล่วงหน้า ที่รองรับทั้ง 2 เมทริกซ์และ 3 เมทริกซ์

- Sprocess.m เป็นการหาของเมทริกซ์เดี่ยวและคำนวณหา ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ
- Mprocess.m เป็นการหาผลคูณของเมทริกซ์และคำนวณหา ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ
- Kprocess.m เป็นการหาผลคูณแบบครอนเนกเกอร์ของเมทริกซ์และคำนวณหา ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ
- Hprocess.m เป็นการหาผลคูณแบบฮาดามาร์ดของเมทริกซ์และคำนวณหา ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

ผลลัพธ์ของการคำนวณจะถูกสร้างและเก็บในไฟล์เพื่อให้โปรแกรม Visual Basic.NET เรียกและนำไปแสดง เช่น ไฟล์ detA.out , trace.out รายละเอียดไฟล์และการคำนวณ ดังนี้



รูปที่ 3.1 แผนภาพการทำงานร่วมกันของ Visual Basic.NET และ MATLAB

4) การแสดงผลลัพธ์ใน Visual Basic.NET

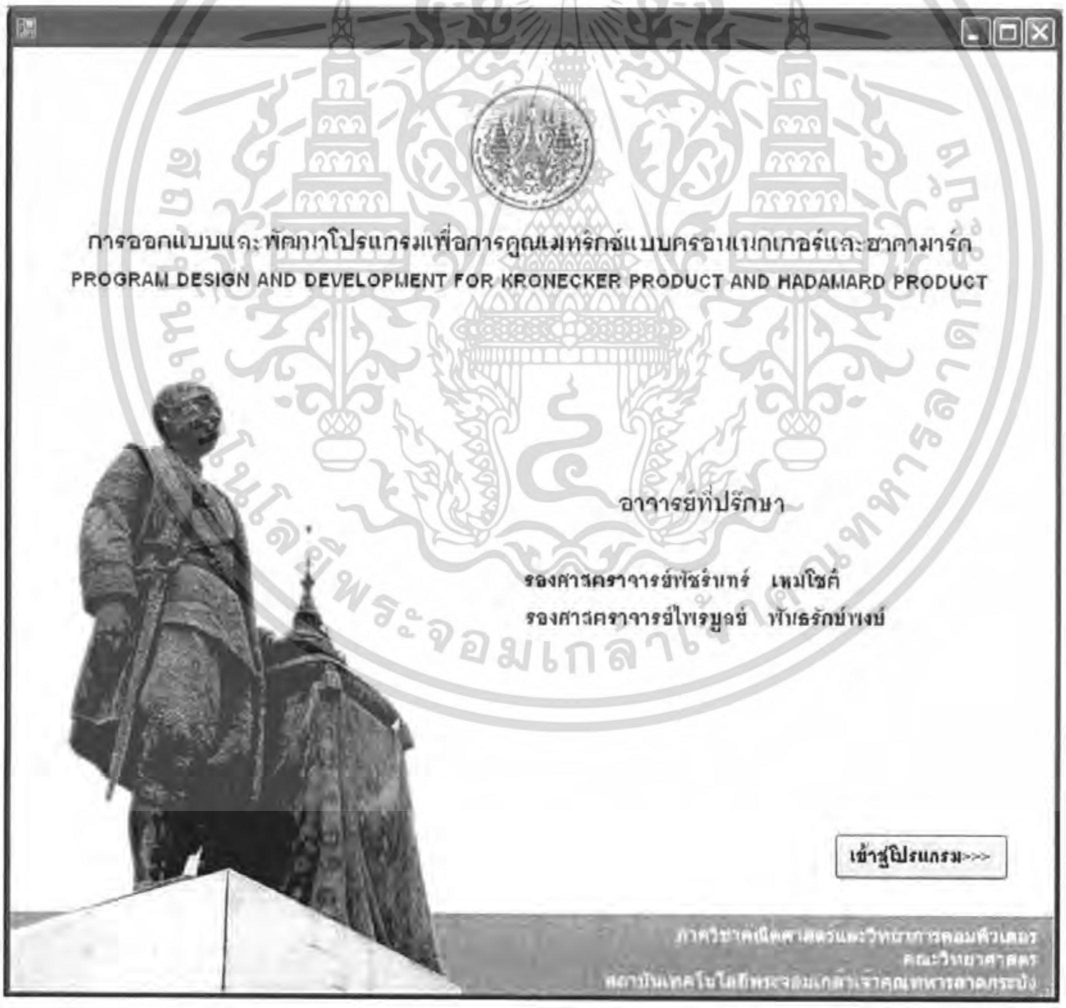
ให้ผู้ใช้เลือกว่าต้องการแสดงข้อมูลอะไร (ตัวกำหนด ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะ และค่าเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ) แล้วไปอ่านข้อมูลผลลัพธ์จากการคำนวณในข้อ 3 นำมาแสดง

บทที่ 4
ผลการดำเนินงาน

4.1 ส่วนประกอบของโปรแกรม

เมื่อเปิดโปรแกรมขึ้นมา หน้าจอหลักของโปรแกรมจะแสดงรายละเอียดของโปรแกรมซึ่งประกอบด้วย

- ชื่อปัญหาพิเศษ
- ชื่ออาจารย์ที่ปรึกษา
- ชื่อคณะและภาควิชา
- ปุ่ม เข้าสู่โปรแกรม>>> เพื่อเข้าสู่หน้าการใช้งานโปรแกรม



รูปที่ 4.1 หน้าจอหลักของโปรแกรม

เมื่อเข้าสู่โปรแกรมจะแบ่งออกเป็น 5 ส่วน คือ

1. ส่วนของ Input เป็นส่วนรับข้อมูล เพื่อนำค่ามาคำนวณ

2. ส่วนของ Single ซึ่งประกอบไปด้วย

2.1 นิยาม

- เมทริกซ์
- ตัวดำเนินการ
- ผกผัน
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

2.2 คุณสมบัติ

- ตัวดำเนินการ
- ผกผัน
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

2.3 ตัวอย่าง

- เมทริกซ์
- ตัวดำเนินการ
- ผกผัน
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

2.4 การคำนวณ

- ตัวดำเนินการ
- ผกผัน
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

3. ส่วน Matrix product ซึ่งประกอบไปด้วย

3.1 นิยาม

- การคูณเมทริกซ์

3.2 คุณสมบัติ

- การคูณเมทริกซ์
- ตัวกำหนด
- ผกผัน

3.3 ตัวอย่าง

- การคูณเมทริกซ์

3.4 การคำนวณ

- การคูณเมทริกซ์
- ตัวดำเนินการ
- ผกผัน
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

4. ส่วน Kronecker product ซึ่งประกอบไปด้วย

4.1 นิยาม

- การคูณแบบครอนเนกเกอร์

4.2 คุณสมบัติ

- การคูณแบบครอนเนกเกอร์

4.3 ตัวอย่าง

- การคูณแบบครอนเนกเกอร์

4.4 การคำนวณ

- การคูณแบบครอนเนกเกอร์
- ตัวดำเนินการ
- ผกผัน
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

5. ส่วน Hadamard product ซึ่งประกอบไปด้วย

5.1 นิยาม

- การคูณแบบฮาดามาร์ด

5.2 คุณสมบัติ

- การคูณแบบฮาดามาร์ด

5.3 ตัวอย่าง

- การคูณแบบฮาดามาร์ด

5.4 การคำนวณ

- การคูณแบบฮาดามาร์ด
- ตัวดำเนินการ
- ผกผัน

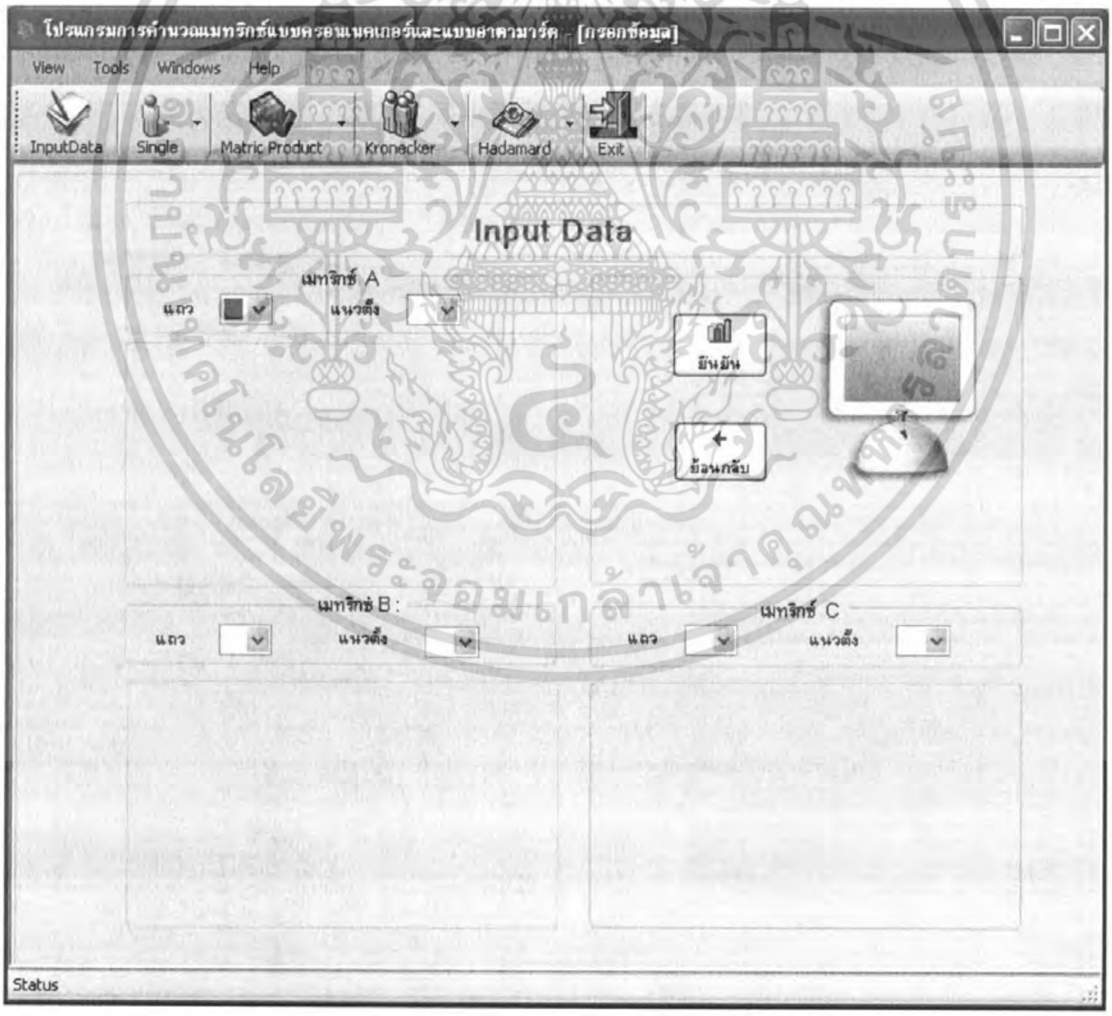
- รอยเมทริกซ์
- ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

4.2 การคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์

โปรแกรมนี้สามารถคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์ โดยได้แบ่งการคำนวณออกเป็น 4 ประเภท ได้แก่ เมทริกซ์เชิงเดี่ยว การคูณเมทริกซ์ การคูณแบบครอนเนกเกอร์ และการคูณแบบฮาดามาร์ด ซึ่งแต่ละแบบจะสามารถคำนวณการดำเนินการได้ 4 แบบ คือ ตัวดำเนินการ ผกผัน รอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

4.2.1 เมทริกซ์เชิงเดี่ยว

เมื่อกด Input Data จะมีส่วนให้กรอกข้อมูล ดังรูปที่ 4.2

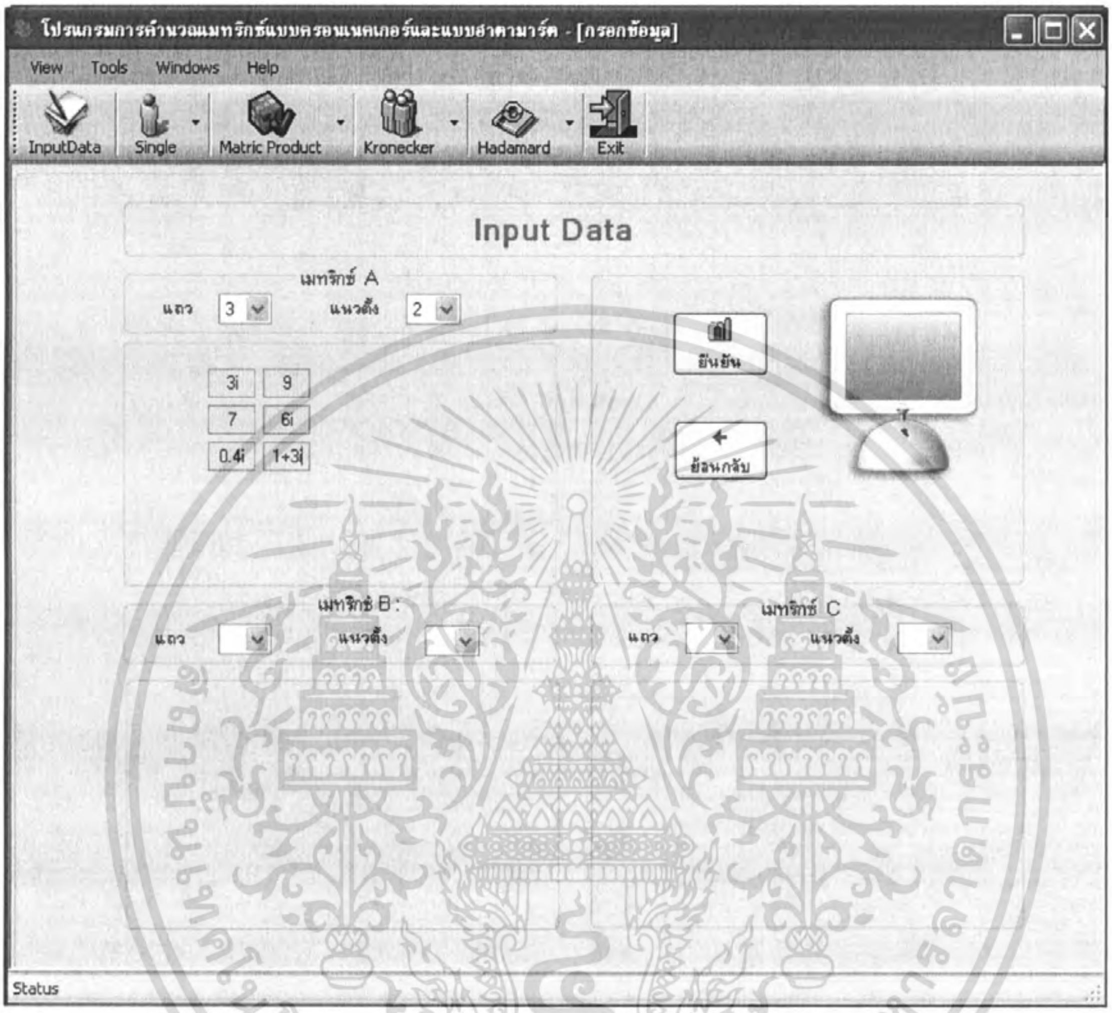


รูปที่ 4.2 หน้าหลักการรับข้อมูล

- การกรอกข้อมูลเข้า ประกอบด้วย

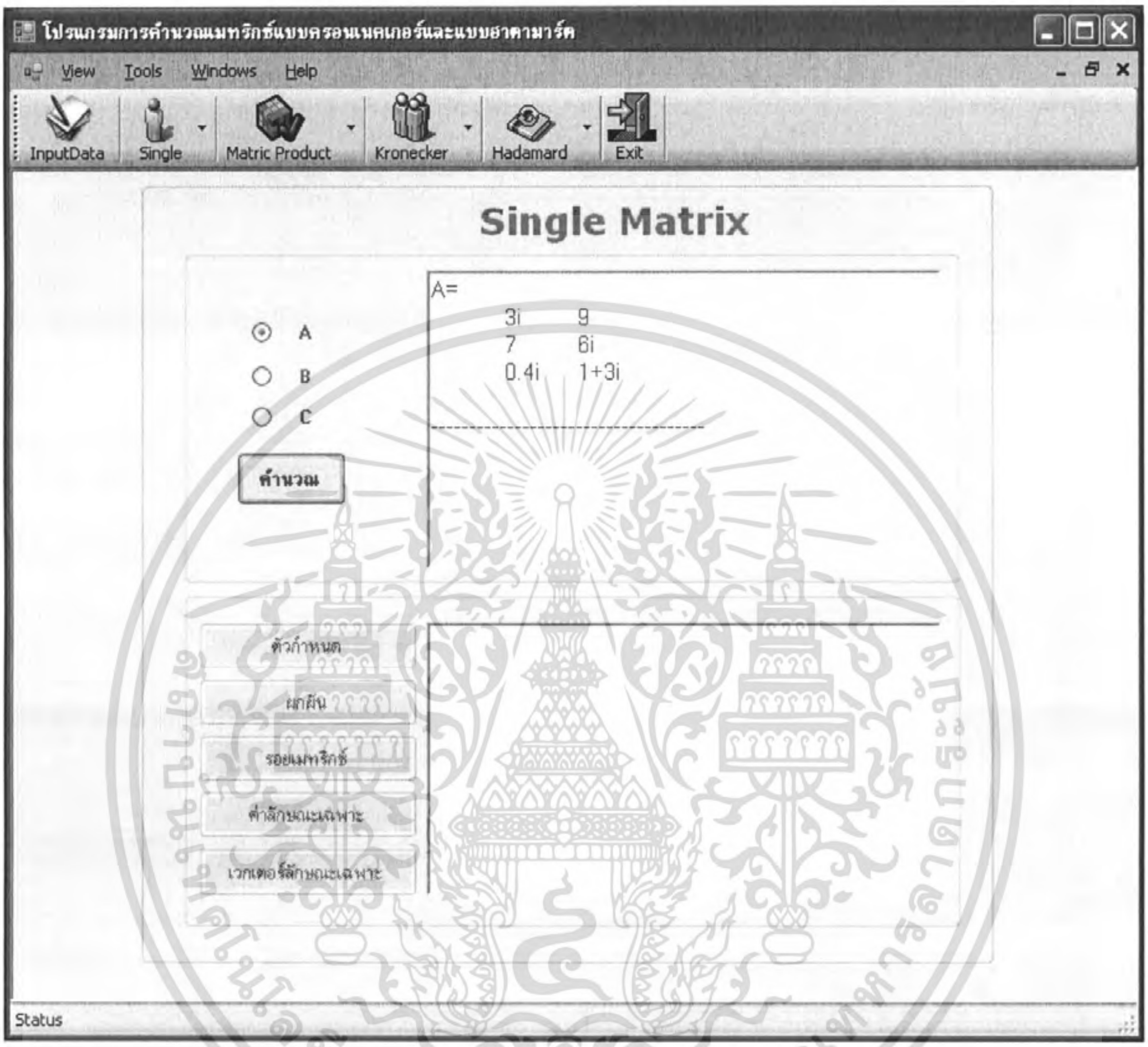
1. เมทริกซ์ A
    - จำนวนแถว
    - จำนวนหลัก
2. เมทริกซ์ B
    - จำนวนแถว
    - จำนวนหลัก
3. เมทริกซ์ C
    - จำนวนแถว
    - จำนวนหลัก

จากนั้นทำการกรอกข้อมูล และกดปุ่ม ยืนยัน เพื่อทำการเก็บข้อมูล ดังรูปที่ 4.3



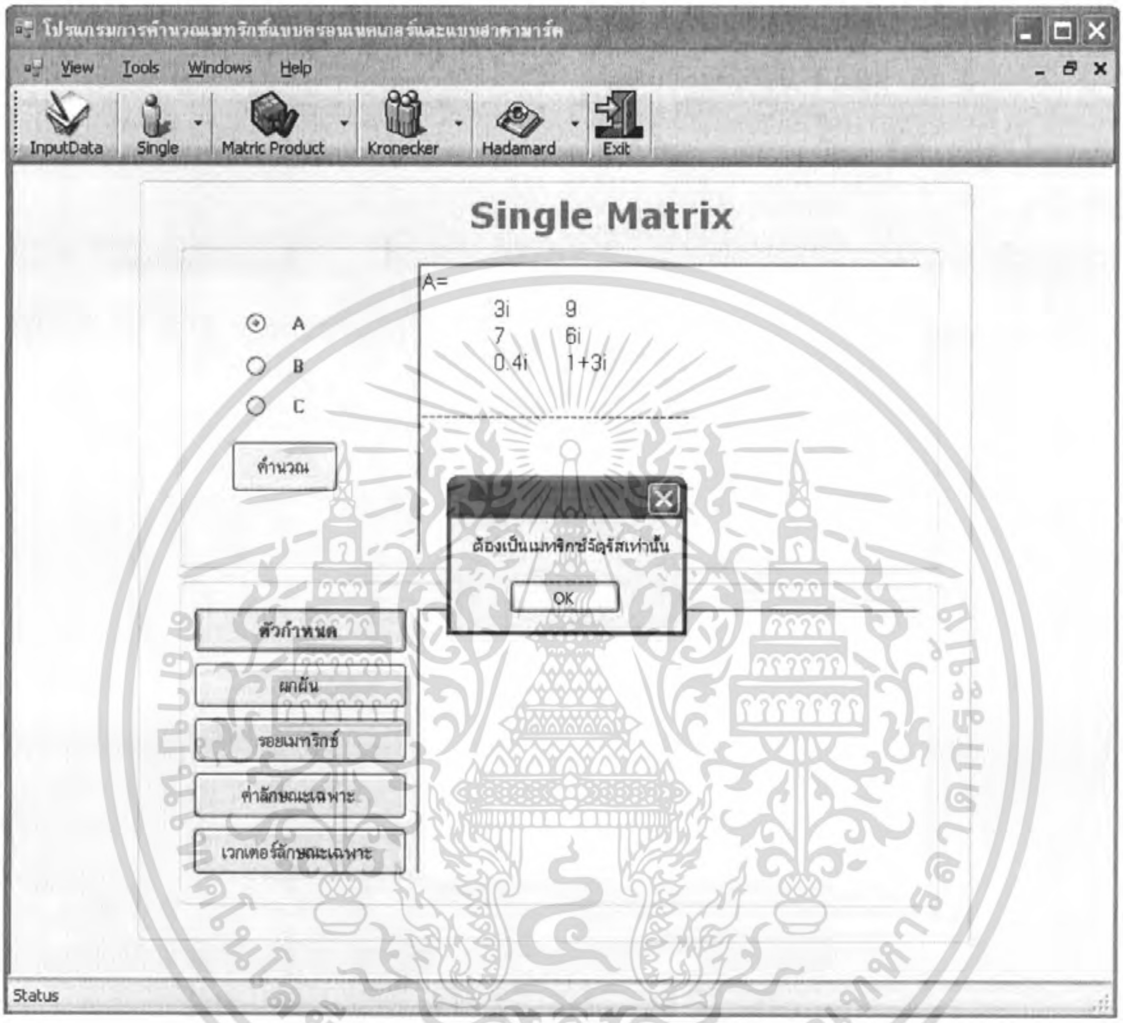
รูปที่ 4.3 การรับข้อมูลของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

จากนั้นเลือก Single >> การคำนวณ ดังรูปที่ 4.4



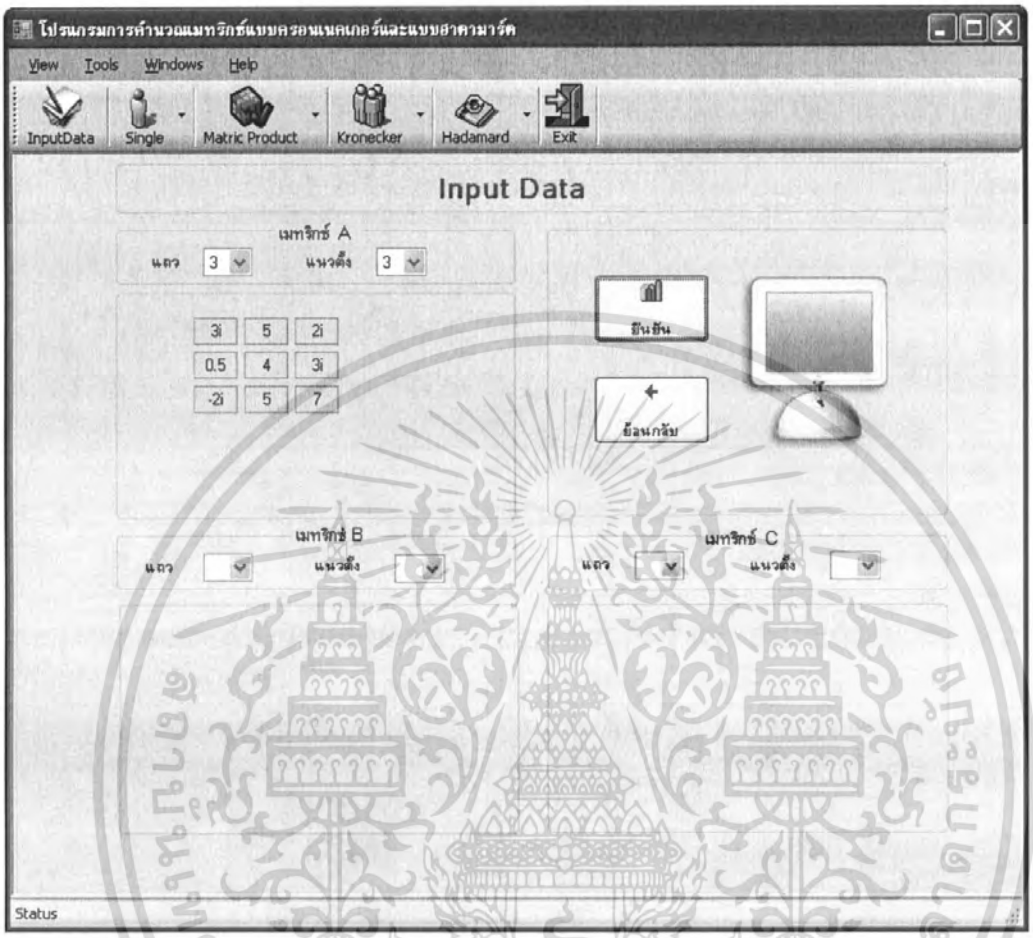
รูปที่ 4.4 การคำนวณของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

เลือกการดำเนินการ A แล้วกดปุ่ม คำนวณ จะแสดงข้อมูลที่ได้กรอกไปแล้ว ถ้าขนาดของเมทริกซ์ไม่เป็นจัตุรัสจะไม่สามารถหาคุณสมบัติได้ ดังรูปที่ 4.5



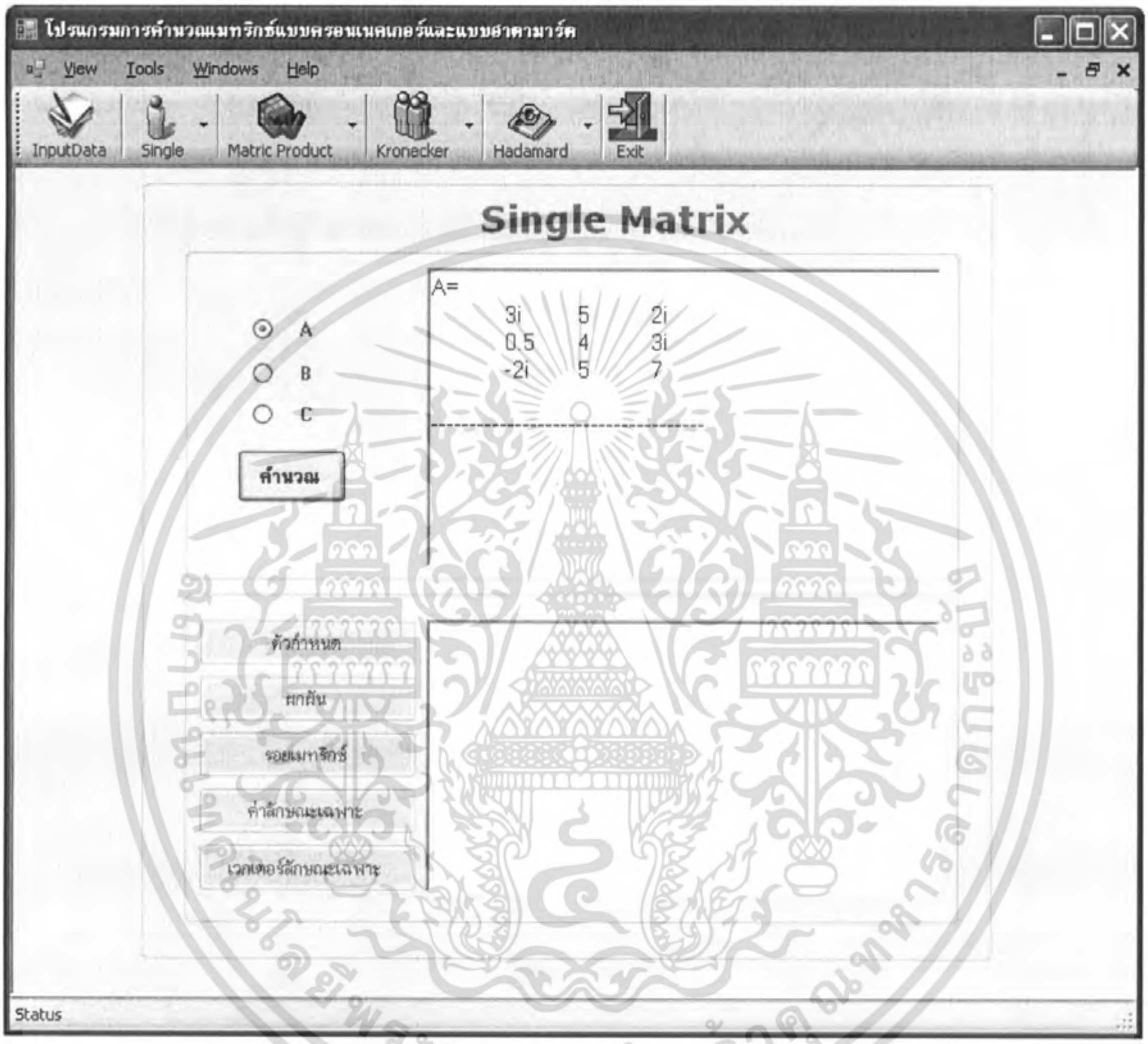
รูปที่ 4.5 การคำนวณของเมทริกซ์เชิงเดี่ยวที่ไม่สามารถหาคุณสมบัติได้

ทำการกรอกข้อมูลในหน้า Input Data แล้วเลือกขนาดเมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$ ดังรูปที่ 4.6



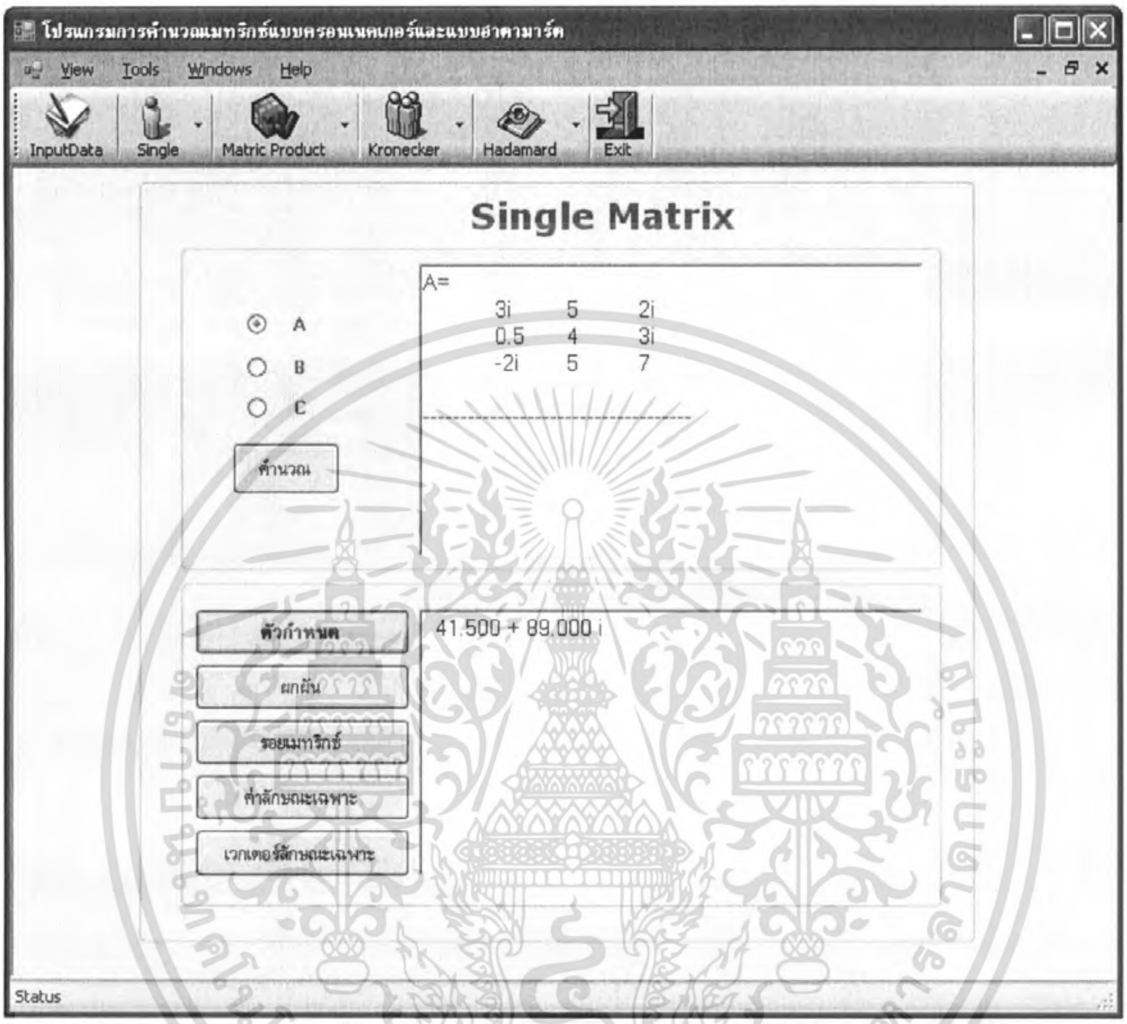
รูปที่ 4.6 การรับข้อมูลของเมทริกซ์เชิงเดี่ยวที่มีขนาด $n \times n$

เมื่อกด ปุ่มยืนยัน จะทำการเก็บข้อมูลแล้ว กลับไปเลือก Single>>> การคำนวณ ทำการเลือกการดำเนินการ แล้ว กดปุ่มคำนวณ จะแสดงข้อมูลเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่ได้กรอกไปแล้ว ดังรูปที่ 4.7



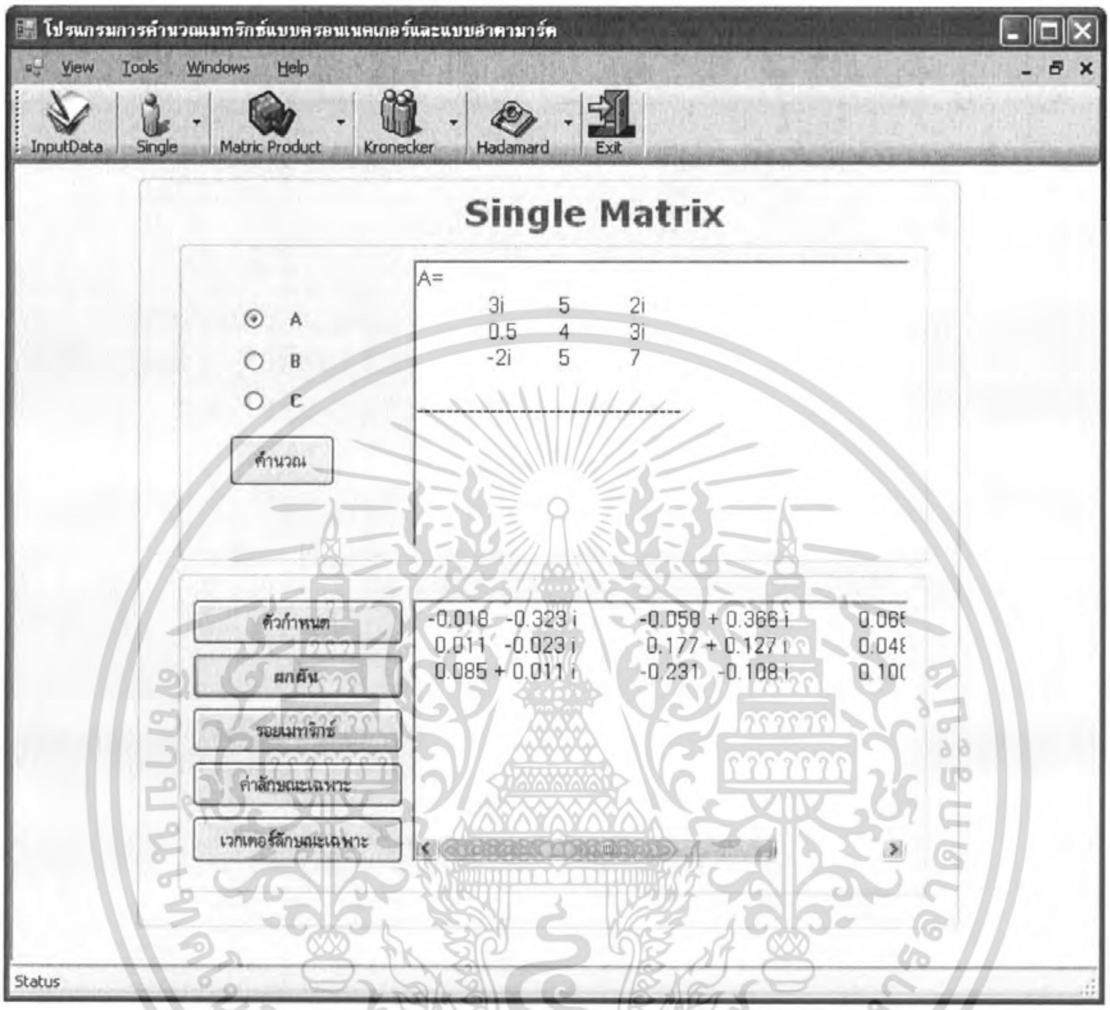
รูปที่ 4.7 ข้อมูลของเมทริกซ์เชิงเดี่ยวขนาด $n \times n$

เมื่อกดปุ่มตัวกำหนด จะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.8



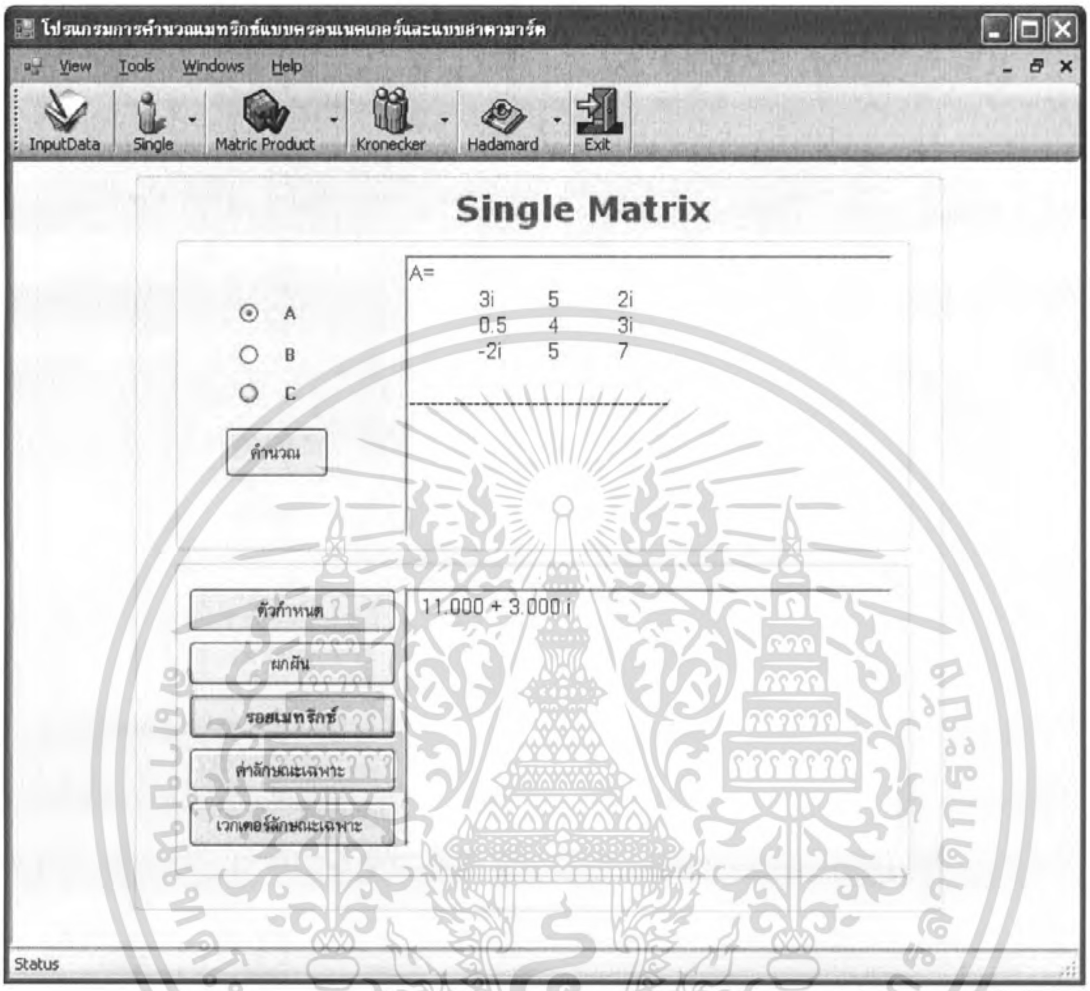
รูปที่ 4.8 ผลลัพธ์ตัวกำหนดของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

เมื่อกดปุ่มผกผันจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.9



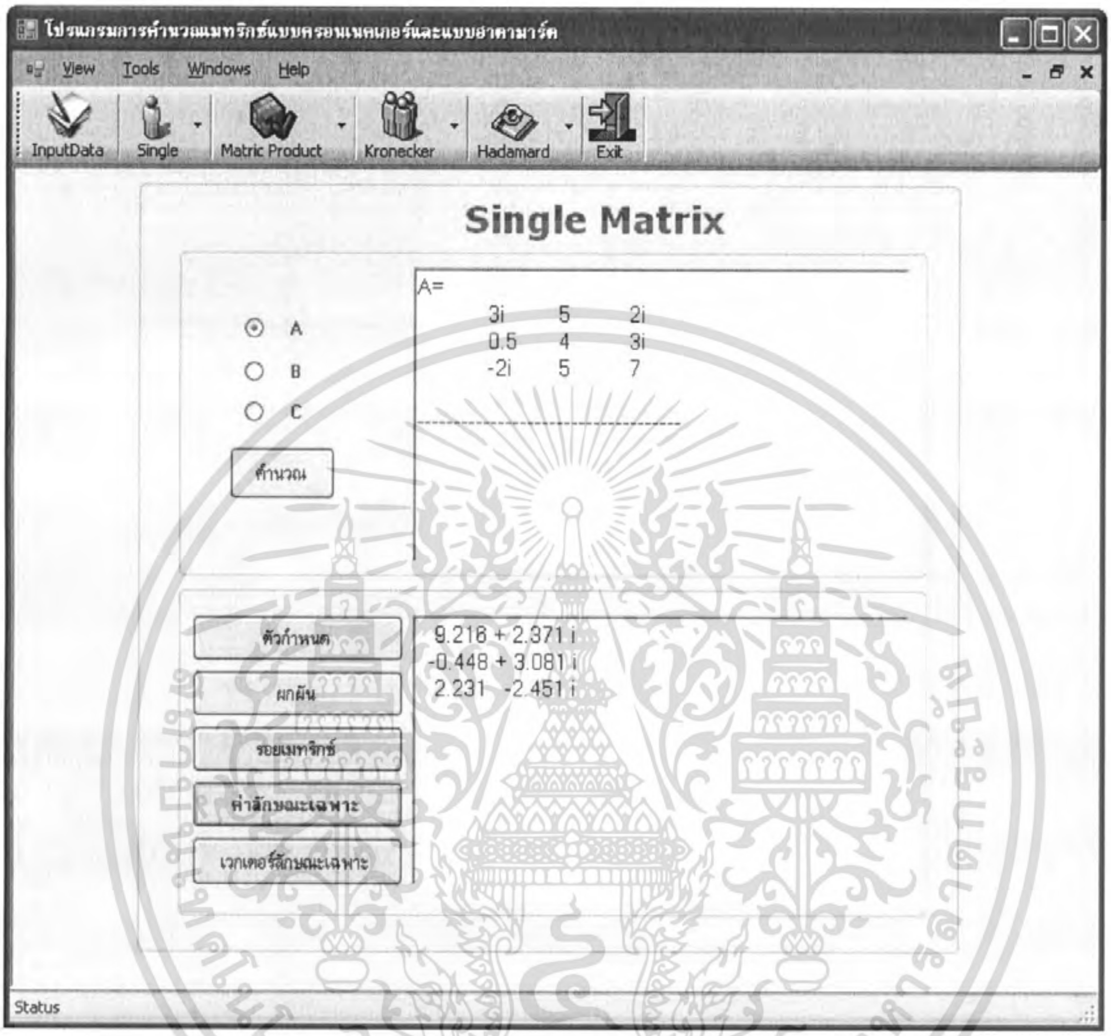
รูปที่ 4.9 ผลลัพธ์ผกผันของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

เมื่อกดปุ่มรอยเมทริกซ์จะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.10



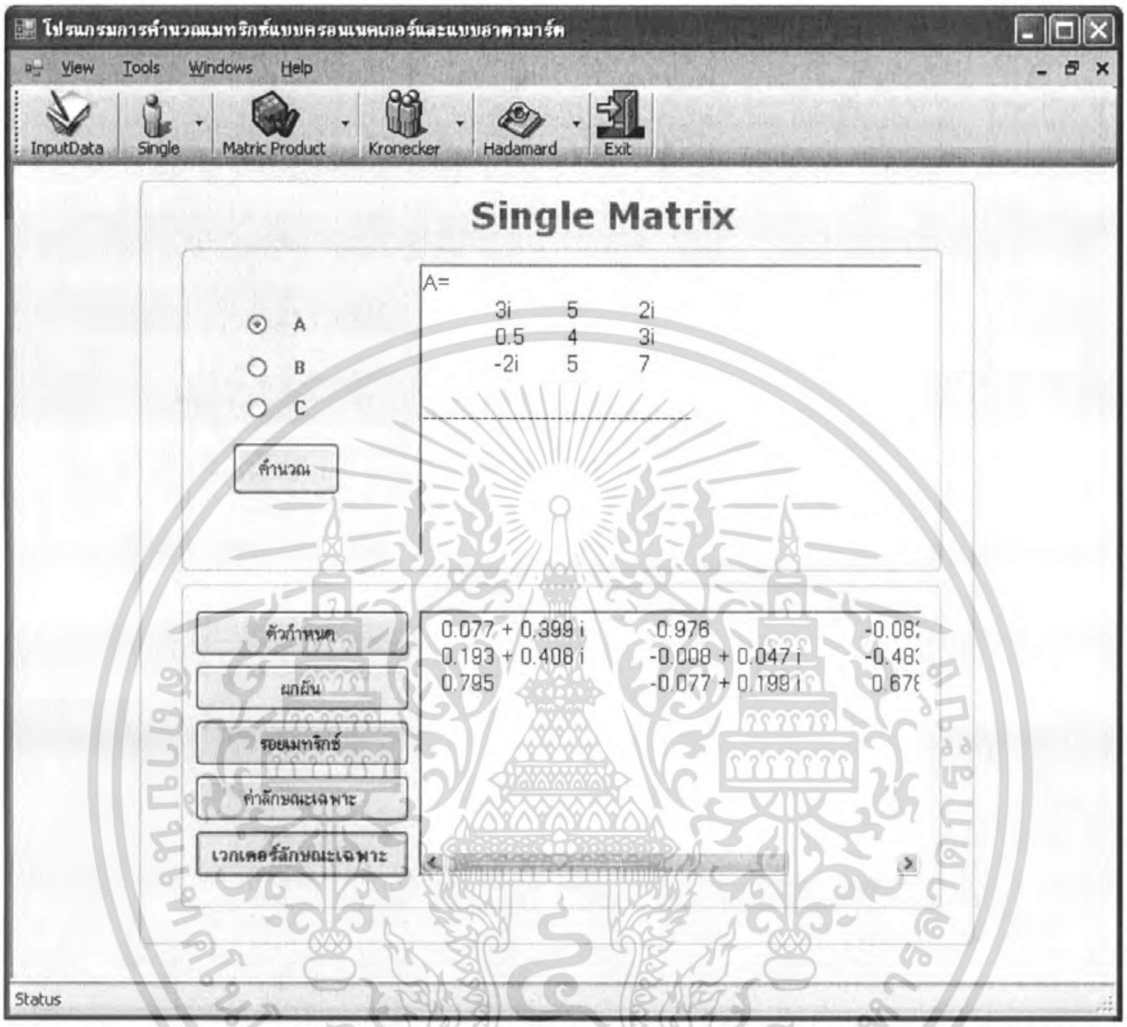
รูปที่ 4.10 ผลลัพธ์รอยเมทริกซ์ของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

เมื่อกดปุ่มค่าลักษณะเฉพาะจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.11



รูปที่ 4.11 ผลลัพธ์ค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

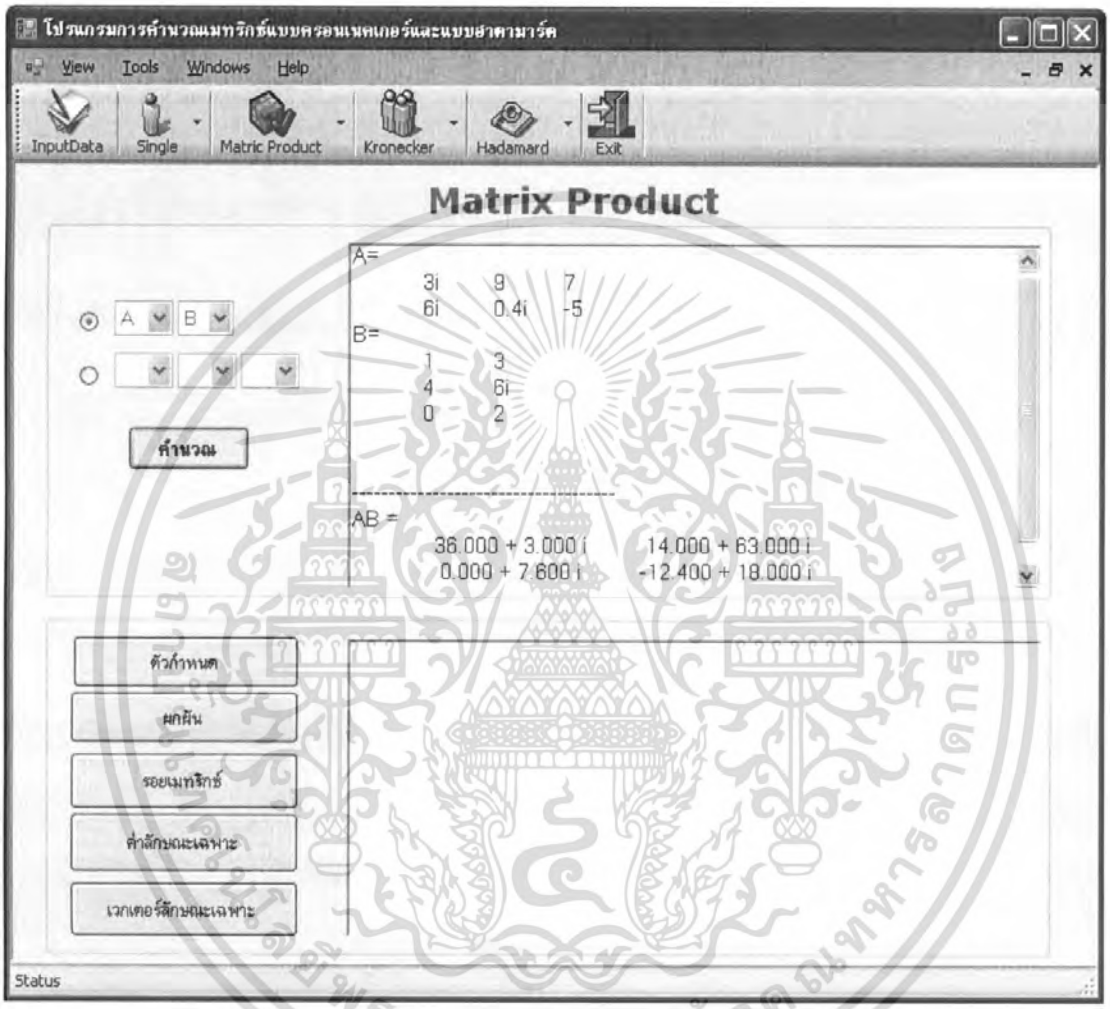
เมื่อกดปุ่มเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะจะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.12



รูปที่ 4.12 ผลลัพธ์เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

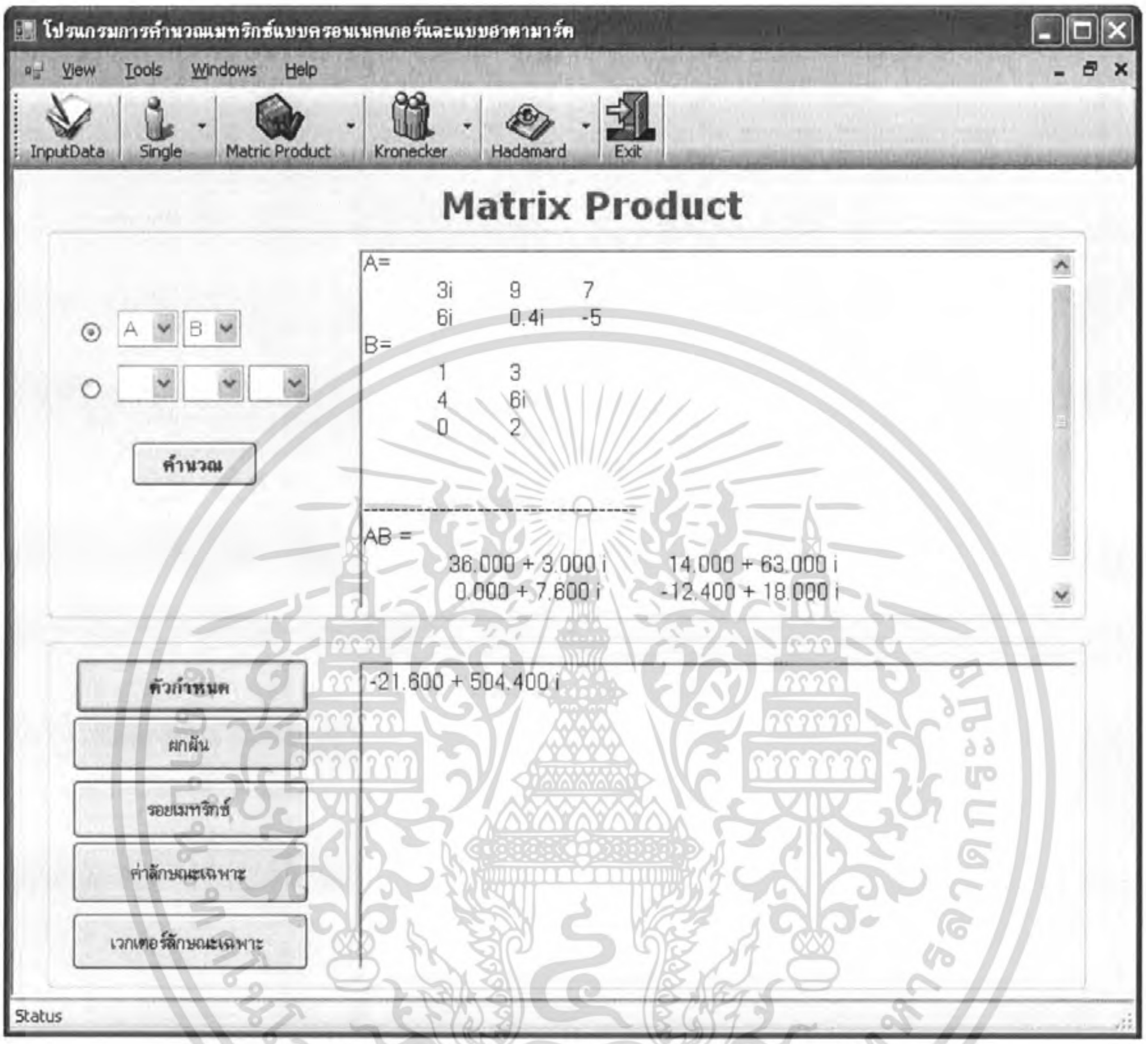
4.2.2 การคูณเมทริกซ์

เลือกการคูณเมทริกซ์แบบ 2 หรือ 3 เมทริกซ์ แล้วทำการเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการคูณ จากนั้นกดปุ่มคำนวณ จะแสดงข้อมูลและผลคูณได้เลือกไว้ ดังรูปที่ 4.13



รูปที่ 4.13 การเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการคูณ

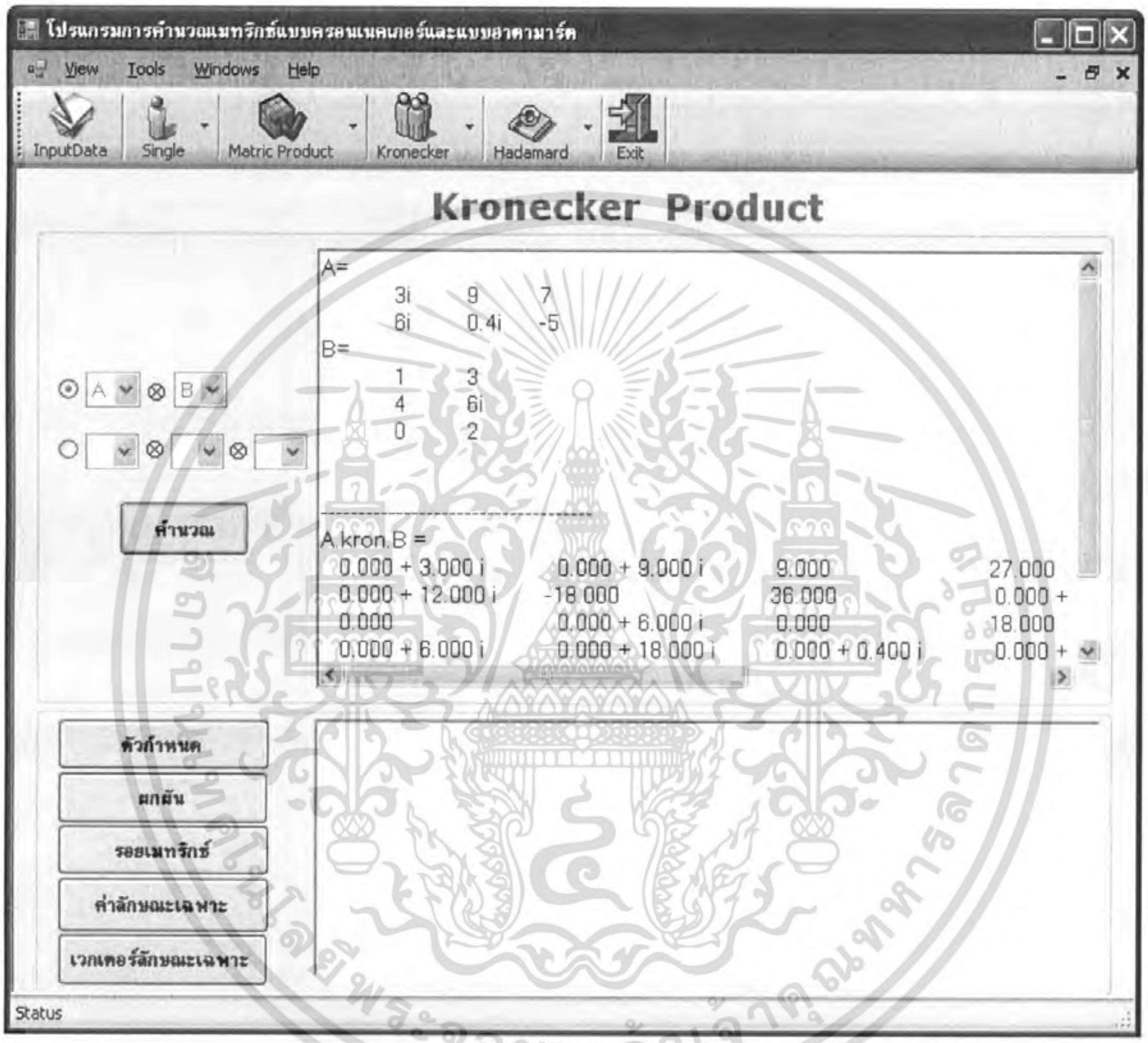
เมื่อกดปุ่มตัวกำหนด จะแสดงผลลัพธ์ตัวกำหนดของการคูณเมทริกซ์ที่เลือกไว้ดังรูปที่ 4.14



รูปที่ 4.14 ผลลัพธ์ตัวกำหนดของการคูณเมทริกซ์

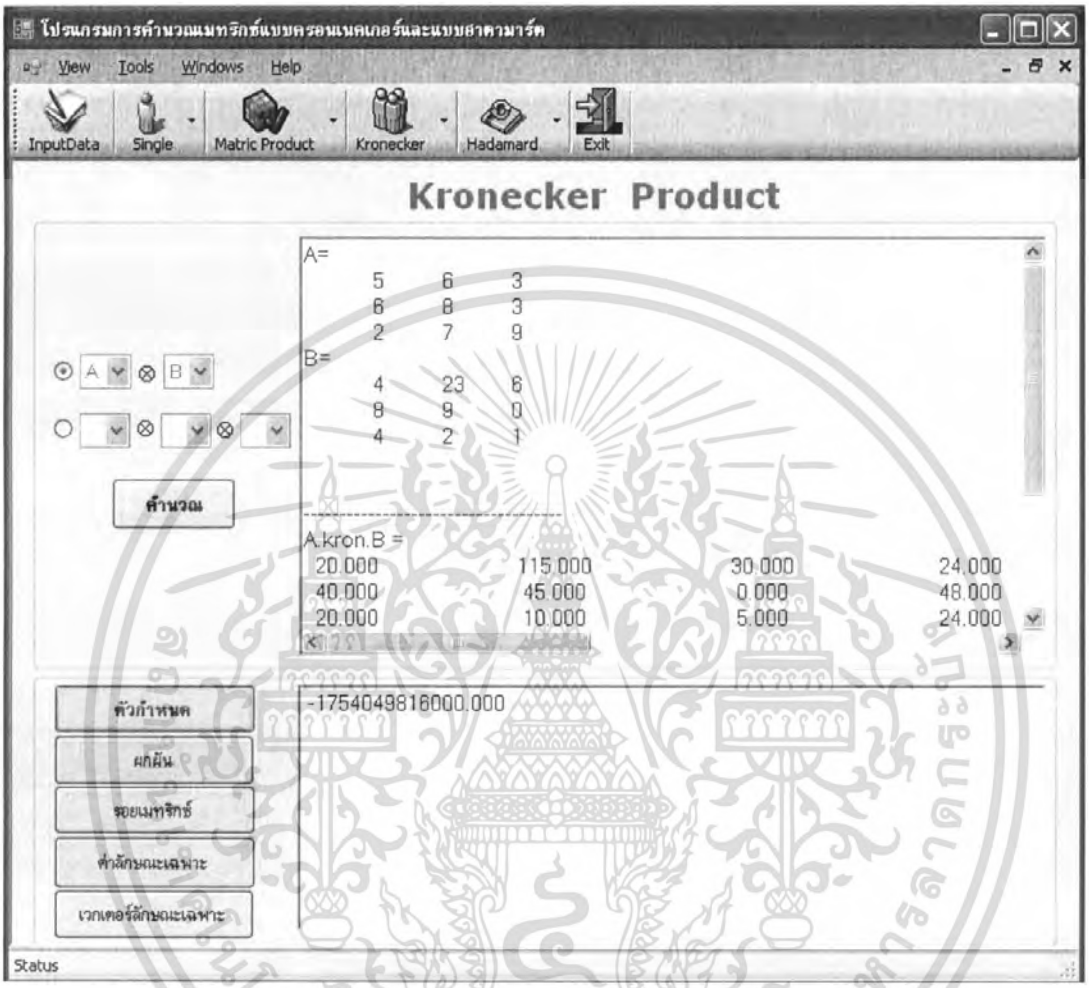
4.2.3 การคูณแบบครอนเนกเกอร์

เลือกการคูณเมทริกซ์แบบ 2 หรือ 3 เมทริกซ์ แล้วทำการเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการคูณ จากนั้นกดปุ่มคำนวณ จะแสดงข้อมูลและผลคูณแบบครอนเนกเกอร์ได้เลือกไว้ ดังรูปที่ 4.15



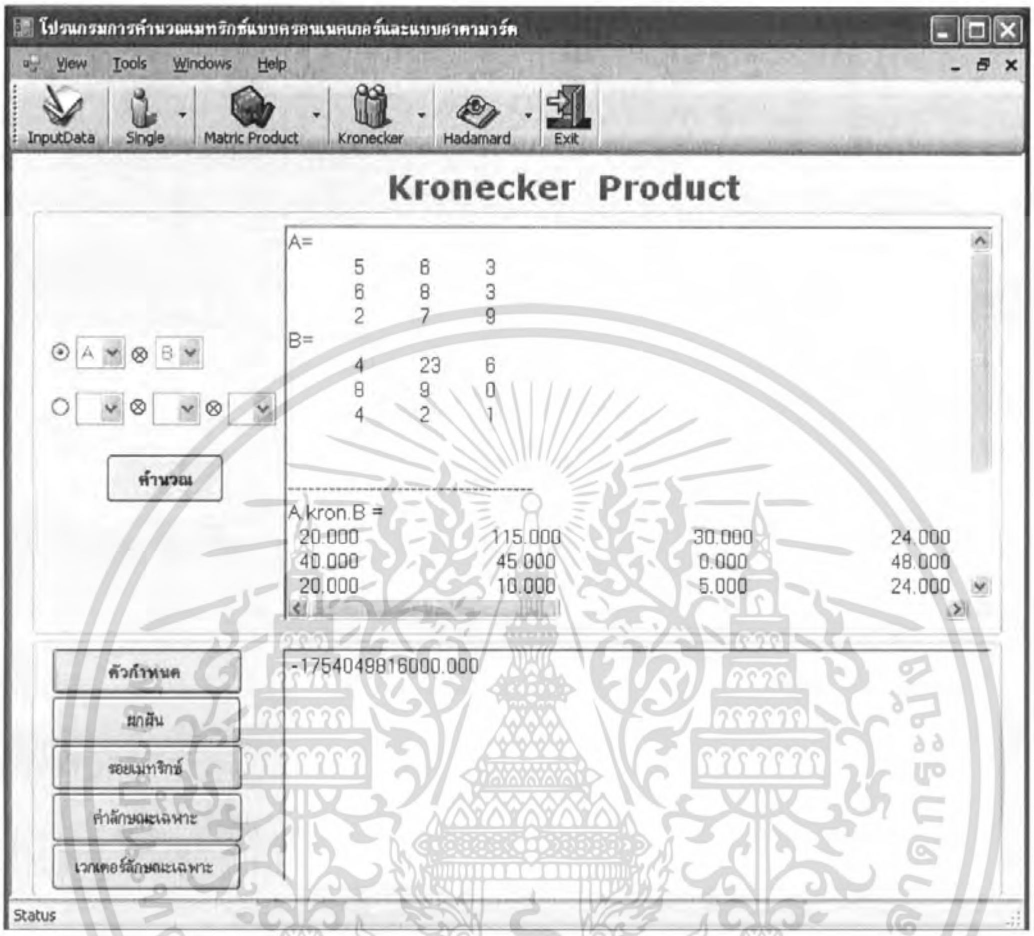
รูปที่ 4.15 การเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการคูณแบบครอนเนกเกอร์

เมื่อกดปุ่มตัวกำหนด จะแสดงผลลัพธ์ตัวกำหนดของการคูณเมทริกซ์ที่เลือกไว้ดังรูปที่ 4.16



รูปที่ 4.16 ผลลัพธ์ตัวกำหนดของการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์

เมื่อกดปุ่มผกผัน จะแสดงผลลัพธ์ดังรูปที่ 4.17



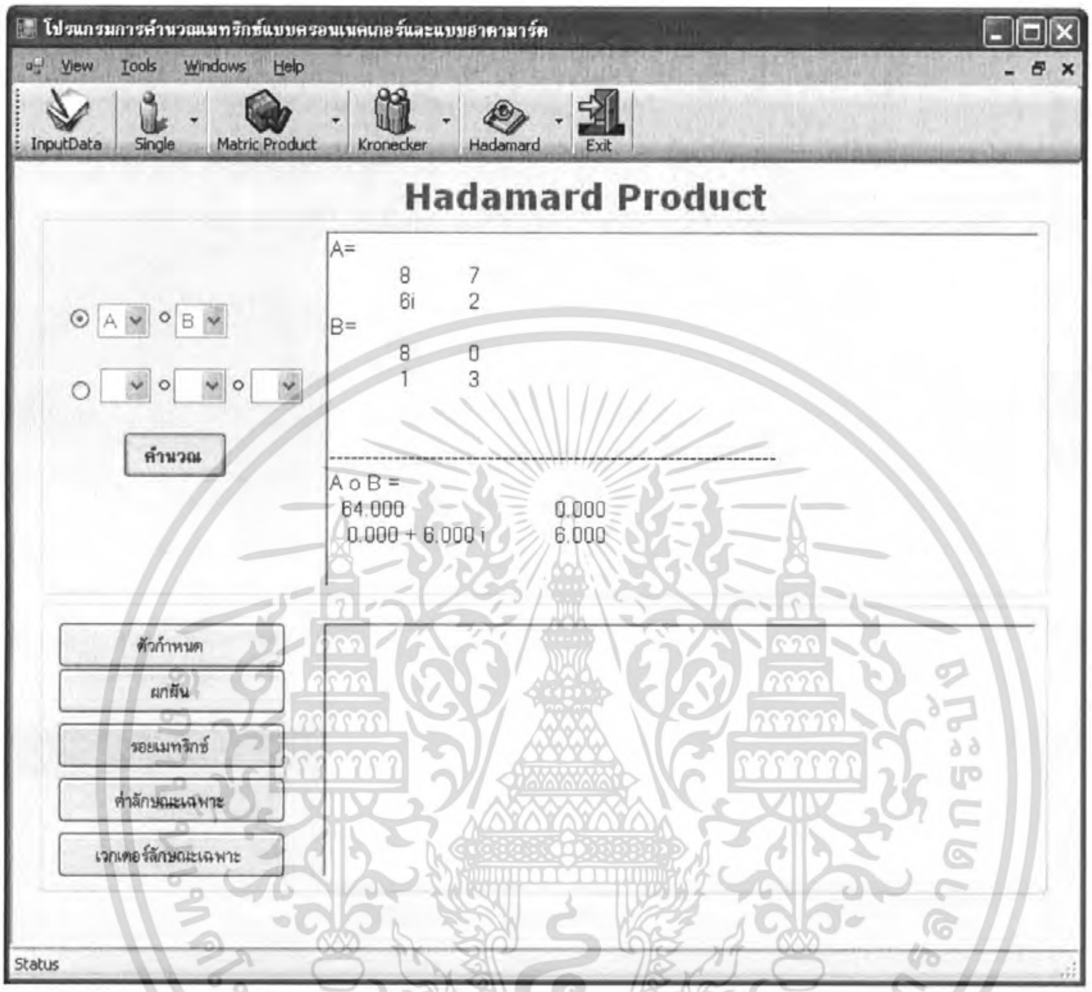
รูปที่ 4.17 ผลลัพธ์ผกผันของการคูณแบบครอนเนกเกอร์

4.2.4 การคูณแบบฮาดามาร์ด

เลือกการคูณเมทริกซ์แบบ 2 หรือ 3 เมทริกซ์ แล้วทำการเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการคูณ จากนั้นกดปุ่มคำนวณ จะแสดงข้อมูลและผลคูณแบบฮาดามาร์ดที่ได้เลือกไว้ ดังรูปที่ 4.18

รูปที่ 4.18 การเลือกเมทริกซ์ที่ต้องการคูณแบบฮาดามาร์ด

เมื่อกดปุ่มตัวกำหนด จะแสดงผลลัพธ์ตัวกำหนดของการคูณเมทริกซ์ที่เลือกไว้ ดังรูปที่ 4.19



รูปที่ 4.19 ผลลัพธ์ตัวกำหนดของการคูณเมทริกซ์แบบฮาดามาร์ด

4.3 ฟังก์ชันการคำนวณใน MATLAB

ส่วนการคำนวณด้วยโปรแกรม MATLAB จะถูกเตรียมไว้ล่วงหน้าและรับค่าตัวแปรที่อยู่ในไฟล์ข้อมูลของแต่ละเมทริกซ์ (dataA.m, dataB.m, dataC.m) ประกอบด้วย 4 ไฟล์ ดังนี้

4.3.1 ฟังก์ชันของเมทริกซ์เชิงเดี่ยว

ส่วนของการคำนวณเมทริกซ์เชิงเดี่ยวเก็บในไฟล์ชื่อ SProcess.m ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

```
if Row == Col
%Find det
wi_out = fopen(path_det,'w');
det = det(Sing);
fprintf(wi_out,'%7.3f\t', det);
fclose(wi_out);

%Find inv
if det ~= 0
   wi_out = fopen(path_inv,'w');
   F = inv(Sing)
   for i = 1:1: Row
      for j = 1:1: Col
         fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
      end
      fprintf(wi_out,'\n');
   end
   fclose(wi_out);
end

   %Find trace
   wi_out = fopen(path_trace,'w');
   fprintf(wi_out,'%7.3f\t', trace(Sing));
   fclose(wi_out);
```

```
%Find eigval
wi_out = fopen(path_eigval,'w');
fprintf(wi_out,'%7.3f\n', eig(Sing));
fclose(wi_out);

%Find eigvec
wi_out = fopen(path_eigvec,'w');
[F,D] = eig(Sing)
for i = 1:1: Row
    for j = 1:1: Col
        fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
    end
    fprintf(wi_out,'\n');
end
fclose(wi_out);
end
```

4.3.2 ฟังก์ชันของการคูณเมทริกซ์

ส่วนของการคูณเมทริกซ์เก็บในไฟล์ชื่อ MProcess.m ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

```
%Create product
wi_out = fopen(path_product,'w');
F  = Mul
for i = 1:1: Row
    for j = 1:1: Col
        fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
    end
    fprintf(wi_out,'\n');
end
fclose(wi_out);

if ((selA = = 1)&(one = = 1)&(NumRowA = = NumColA))|
    ((selB = = 1)&(one = = 1)&(NumRowB = = NumColB))|
```

```
((selC = = 1)&(one = = 1)&(NumRowC = = NumColC))|
((selA= =1)&(selB= =1)&(two= =1)&(NumRowA = = NumColB)&
        (NumColA= =NumRowB))|
((selA = = 1)&(selC = = 1)&(two = = 1)&(NumRowA = = NumColC)&
        (NumColA = = NumRowC))|
((selB = = 1)&(selC = = 1)&(two = = 1)&(NumRowB = = NumColC)&
        (NumColB = = NumRowC))|
((selA = = 1)&(selB = = 1)&(selC = = 1)&(three = = 1)&
        (NumColA = =NumRowB) &(NumColB = =NumRowC) & (NumRowA = = NumColC))
```

```
%Find det
wi_out = fopen(path_det,'w');
det = det(Mul)
fprintf(wi_out,'%7.3f', det);
fclose(wi_out);

%Find inv
if det ~= 0
  wi_out = fopen(path_inv,'w');
  F = inv(Mul)
  for i = 1:1: Row
    for j = 1:1: Col
      fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
    end
    fprintf(wi_out,'\n');
  end
  fclose(wi_out);
end

%Find trace
  wi_out = fopen(path_trace,'w');
  fprintf(wi_out,'%7.3f', trace(Mul));
```

```
  fclose(wi_out);

 %Find eigval
  wi_out = fopen(path_eigval,'w');
  fprintf(wi_out,'%7.3f\n', eig(Mul));
  fclose(wi_out);

 %Find eigvec
  wi_out = fopen(path_eigvec,'w');
  [F,D] = eig(Mul)
  for i = 1:1: Row
     for j = 1:1: Col
        fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
     end
     fprintf(wi_out,'\n');
  end
  fclose(wi_out);

end
```

4.3.3 ฟังก์ชันของการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์

ส่วนของการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์เก็บในไฟล์ชื่อ KProcess.m ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

```
%Create product
wi_out = fopen(path_product,'w');
F  = Kron
for i = 1:1: Row
   for j = 1:1: Col
      fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
   end
   fprintf(wi_out,'\n');
end
```

```
fclose(wi_out);

if ((selA = = 1)&(one = = 1)&(NumRowA = = NumColA))|
  ((selB = = 1)&(one = = 1 )&(NumRowB = = NumColB))|
  ((selC = = 1)&(one = = 1)&(NumRowC = = NumColC))|
  ((selA = = 1)&(selB = = 1)&(two = = 1)&( NumRowA = = NumColA ) &
        ( NumRowB = = NumColB ) &( NumRowA = = NumRowB ) &
        ( NumColA = = NumColB ))|
  ((selA = = 1)&(selC = = 1)&(two = = 1)&
        ( NumRowA = = NumColA ) & ( NumRowC = = NumColC ) &
        ( NumRowA = = NumRowC ) &( NumColA = = NumColC ))|
  ((selB = = 1)&(selC = = 1)&(two = = 1)&( NumRowB = = NumColB ) &
        ( NumRowC = = NumColC ) &( NumRowB = = NumRowC ) &
        ( NumColB = = NumColC ))|
  ((selA = = 1)&(selB = = 1)&(selC = = 1)&(three = = 1)&( NumRowA = = NumColA ) &
        ( NumRowB = = NumColB ) &( NumRowC = = NumColC ) &
        ( NumRowA = = NumRowB ) &( NumRowA = = NumRowC )&
        ( NumRowB = = NumRowC )&( NumColA = = NumColB ) &
        ( NumColA = = NumColC )&( NumColB = = NumColC ))

%Find det
wi_out = fopen(path_det,'w');
det = det(Kron)
fprintf(wi_out,'%7.3f', det);
fclose(wi_out);

%Find inv
if det ~= 0
  wi_out = fopen(path_inv,'w');
  F = inv(Kron)
  for i = 1:1: Row
    for j = 1:1: Col
```

```
        fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
      end
      fprintf(wi_out,'\n');
    end
    fclose(wi_out);
end


%Find trace
    wi_out = fopen(path_trace,'w');
    fprintf(wi_out,'%7.3f', trace(Kron));
    fclose(wi_out);

%Find eigval
    wi_out = fopen(path_eigval,'w');
    fprintf(wi_out,'%7.3f\n', eig(Kron));
    fclose(wi_out);

%Find eigvec
    wi_out = fopen(path_eigvec,'w');
    [F,D] = eig(Kron)
    for i = 1:1: Row
      for j = 1:1: Col
        fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
      end
      fprintf(wi_out,'\n');
    end
    fclose(wi_out);
end
```

4.3.4 ฟังก์ชันการคูณเมทริกซ์แบบฮาดามาร์ด

ส่วนของการคูณเมทริกซ์แบบฮาดามาร์ดเก็บในไฟล์ชื่อ HProcess.m ซึ่งมีขั้นตอน ดังนี้

```
%Create product
wi_out = fopen(path_product,'w');
F  = Had
for i = 1:1: Row
   for j = 1:1: Col
      fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
   end
   fprintf(wi_out,'\n');
end
fclose(wi_out);

if ((selA = = 1)&(one = = 1)&(NumRowA = = NumColA))|
  ((selB = = 1)&(one = = 1 )&(NumRowB = = NumColB))|
  ((selC = = 1)&(one = = 1)&(NumRowC = = NumColC))|
  ((selA = = 1)&(selB = = 1)&(two = = 1)&( NumRowA = = NumColA ) &
         ( NumRowB = = NumColB ) &( NumRowA = = NumRowB ) &
         ( NumColA = = NumColB ))|
  ((selA = = 1)&(selC = = 1)&(two = = 1)&( NumRowA = = NumColA ) &
         ( NumRowC = = NumColC ) &( NumRowA = = NumRowC ) &
         ( NumColA = = NumColC ))|
  ((selB = = 1)&(selC = = 1)&(two = = 1)&( NumRowB = = NumColB ) &
         ( NumRowC = = NumColC ) &( NumRowB = = NumRowC ) &
         ( NumColB = = NumColC ))|
  ((selA = = 1)&(selB = = 1)&(selC = = 1)&(three = = 1)&( NumRowA = = NumColA ) &
         ( NumRowB = = NumColB ) &( NumRowC = = NumColC ) &
         ( NumRowA = = NumRowB ) &( NumRowA = = NumRowC )&
         ( NumRowB = = NumRowC )&( NumColA = = NumColB ) &
         ( NumColA = = NumColC )&( NumColB = = NumColC ))
```

```
    for i = 1:1: Row
        for j = 1:1: Col
            fprintf(wi_out,'%7.3f\t', F(i,j));
        end
        fprintf(wi_out,'\n');
    end
    fclose(wi_out);

end
```

บทที่ 5
สรุปผลการดำเนินงาน

5.1 สรุปผลการดำเนินงาน

จากการทำปัญหาพิเศษนี้ โปรแกรมที่ได้ออกแบบและพัฒนาขึ้นมา สามารถช่วยการคำนวณหาผลลัพธ์ของการคูณของเมทริกซ์ประกอบด้วยการคูณเมทริกซ์ การคูณแบบครอนเนกเกอร์และการคูณแบบฮาดามาร์ด เพื่อแสดงการดำเนินการของเมทริกซ์ในเรื่องตัวกำหนด ผกผันรอยเมทริกซ์ ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ ที่ง่ายต่อการศึกษาและทำความเข้าใจ

ดังนั้นในการออกแบบและพัฒนาโปรแกรมนี้ขึ้นมาจึงหวังว่าจะเกิดประโยชน์ให้กับผู้ที่สนใจในเรื่องนี้สะดวกในการใช้งานทำให้เป็นที่สนใจและรู้จักกันอย่างแพร่หลายมากยิ่งขึ้น

5.2 อภิปรายการดำเนินงาน

ปัญหาพิเศษนี้ใช้การทำงานของโปรแกรมร่วมกันระหว่าง Visual Basic.NET และ MATLAB โดยนำความสามารถของแต่ละโปรแกรมมาใช้ ดังนี้

MATLAB

ส่วนการคำนวณของโปรแกรม MATHLAB มีฟังก์ชันการคำนวณหลายอย่างที่ผู้ใช้สามารถเลือกใช้ได้ แต่การใช้โปรแกรมผู้ใช้ต้องจดจำรูปแบบในการคำนวณ จึงจะสามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพ และ เมื่อมีจำนวนของข้อมูลมากๆ ยังทำให้การแสดงผลของข้อมูลไม่อยู่ในบรรทัดเดียวกัน ทำให้ผู้ใช้เกิดความไม่สะดวกในการใช้งาน

Visual Basic.NET

ส่วนของการรับข้อมูลเข้าและการแสดงผลของข้อมูล ใช้ Visual Basic.NET ในการสร้างเนื่องจากสามารถสร้างหน้าจอที่สวยงาม และผู้ใช้ทำความเข้าในการใช้โปรแกรมได้ง่ายยิ่งขึ้น

5.3 ข้อเสนอแนะ

1) การแสดงผลของโปรแกรมมีข้อจำกัดในส่วนของการคูณเมทริกซ์แบบครอนเนกเกอร์ เมื่อคำนวณเมทริกซ์ที่มีขนาดเกิน 5×5 ขึ้นไป จะทำให้ผลลัพธ์ของเมทริกซ์มีขนาตใหญ่ขึ้น และการแสดงผลใน Visual Basic.NET มีขนาดเกินจอภาพ ทำให้ดูไม่สะดวก ควรจะให้มีการจัดการผลลัพธ์ให้อยู่ในรูปแบบของไฟล์ .pdf แล้วจึงนำมาแสดงซึ่งทำให้สามารถเลื่อน scroll bar เพื่อให้ดูผลลัพธ์ได้ง่ายขึ้น

2) การแสดงผลลัพธ์ยังไม่ครอบคลุมทุกรูปแบบ ควรจะมีรูปแบบในการแสดงผลลัพธ์แบบจำนวนเต็ม ทศนิยม หรือเศษส่วน เพื่อให้ผู้ใช้เลือกใช้ได้ตามความเหมาะสม

รายการอ้างอิง

[1] รองศาสตราจารย์พัชรินทร์ เหมโชติ, *"พีชคณิตเชิงเส้น"*, ห้างหุ้นส่วนจำกัด ประสิทธิ์ภัณฑ์ แอนด์พริ้นติ้ง, 2550

[2] สัจจะ จรัสรุ่งรวีวร, *"Visual Basic 2005 ฉบับสมบูรณ์"*, บริษัท ไอดีซี อินโฟเพรส, 2549

[3] พร้อมเลิศ หล่อวิจิตร, *"คู่มือเรียน Visual Basic 2005"*, โปรวิชั่น, 2549

[4] ลัญฉกร วุฒิสิทธิกุลกิจ และคณะ, *"การใช้งานโปรแกรม MATLAB เบื้องต้น "*, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาฯ, 2549