

**สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง**

**การคำนวณหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น**



โครงการนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2550

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# **A Calculation of Electrical Potential Distribution in P-N Junction**



**Miss Wannisa Gummalat**

**Miss Orasa Inchuay**

**A Special Project Submitted in Partial Fulfillment of Requirement for the Degree of**

**Bachelor of Science**

**Department of Applied Physics**

**Faculty of Science**



**King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang**


**Academic Year 2007**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**โครงการพิเศษเรื่อง** การคำนวณหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น  
**นักศึกษา** นางสาวรรมิษา กำมะลาด  
 นางสาวอรสา อินช่วย  
**ภาควิชา** ฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์  
**สาขาวิชา** ฟิสิกส์ประยุกต์-เครื่องมือวิทยาศาสตร์และอุตสาหกรรม  
**อาจารย์ที่ปรึกษา** ดร.ปิติพร ถนอมงาม

ภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
 อนุมัติให้โครงการพิเศษเรื่องนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

คณะกรรมการตรวจสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ. วิชาญ เดชิตธีระ	
กรรมการ	อ. ธนภรณ์ สิวาพัฒนานนท์	
กรรมการ	อ. สุรชาติ กมลดีลก	
กรรมการที่ปรึกษา	ดร. ปิติพร ถนอมงาม	

  
 (รองศาสตราจารย์วิชาญ เดชิตธีระ)  
 หัวหน้าภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์  
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โครงการพิเศษเรื่อง	การคำนวณหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น
นักศึกษา	นางสาววรรณิษา กำมะลาด นางสาวอรสา อินช่วย
ภาควิชา	ฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	ฟิสิกส์ประยุกต์-เครื่องมือวิทยาศาสตร์และอุตสาหกรรม
ปีการศึกษา	2550
อาจารย์ที่ปรึกษา	ดร. ปิติพร ถนอมงาม

### บทคัดย่อ

โครงการพิเศษนี้เป็นการจำลองแบบการทำงานของรอยต่อสารกึ่งตัวนำในสองมิติ โดยวิธี Finite Difference ซึ่งวิธีนี้จะนำสมการปัวร์ซอง สมการความต่อเนื่องของอิเล็กตรอนและสมการความต่อเนื่องของโฮล มาทำเป็นสมการผลต่างสี่เหลี่ยมใน 2 มิติ เพื่อศึกษาการคำนวณหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้า ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนและความหนาแน่นของโฮล ซึ่งในการจำลองแบบการคำนวณหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น เป็นการคำนวณโดยใช้โปรแกรมแมทแล็บ โดยแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงความต่างศักย์ที่เกิดขึ้นระหว่างสารกึ่งตัวนำชนิดพีและเอ็น ซึ่งสามารถคำนวณค่าได้โดยการแก้สมการปัวร์ซอง และสมการความต่อเนื่องตามลำดับ การแก้สมการปัวร์ซองนั้นจะใช้การคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธี Finite Difference ค่าที่ได้จะออกมาในรูปกราฟการกระจายตัวในพื้นที่ 2 มิติ ซึ่งแบบจำลองที่ได้สามารถนำไปใช้คำนวณหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำต่างๆ ได้ และสามารถนำไปพัฒนาต่อสำหรับการวิจัยด้านสารกึ่งตัวนำต่อไป

<b>Special Project Title</b>	A Calculation of Electrical Distribution in P-N Junction
<b>Name</b>	Miss Wannisa Gummalat Miss Orasa Inchuay
<b>Department</b>	Applied Physics Faculty of Science
<b>Program</b>	Applied Physic-Science and Industry Instrumentation
<b>Academic Year</b>	2550
<b>Special Project Advisor</b>	Dr. Pitiporn Tanomngam

### ABSTRACT

This special project presents a simulation of two dimensional p-n junction using finite difference method (FDM). The principle of this simulation is to use the physical equations which consist of Poisson's equation and Continuity equation for electrons and holes to make two dimensional finite difference equation. This equation is used to study electrical potential distribution of p-n junction, electrons concentration and holes concentration. The electrical potential distribution in p-n junction is calculated by MATLAB program. The result of this program shows a change of electrical potential between p-type and n-type semiconductor which is calculated from Poisson's equation and continuity equation respectively. The solutions of Poisson's equation were determined using finite difference technique. The result of electrical potential distribution in p-n junction is illustrated in two dimensional surface distributions. A Calculation of electrical potential distribution can be used for semiconductor research and development.

## กิตติกรรมประกาศ

โรงงานพิเศษฉบับนี้จะสำเร็จร่วมนไปได้ด้วยดี เนื่องจากได้รับความเมตตากรุณาเป็นอย่างยิ่งจาก ดร.ปิติพร ถนอมงาม อาจารย์ประจำภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ซึ่งได้ให้คำปรึกษา คำแนะนำในการดำเนินการทดลองและการแก้ปัญหาต่างๆ ตลอดจนแนวทางในการทำโรงงานพิเศษฉบับนี้ ผู้จัดทำรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาของท่านอาจารย์ และขอกราบขอบพระคุณเป็นอย่างสูงไว้ ณ ที่นี้

ขอกราบขอบพระคุณ ภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้ใช้สถานที่ในการศึกษาหาความรู้และในการทำโรงงานพิเศษ ตลอดจนให้การสนับสนุนทางด้านงบประมาณในการดำเนินงาน

ขอกราบขอบพระคุณ บิคา มารดา ผู้มีพระคุณอย่างยิ่ง ที่ได้ให้ความรัก ให้ความช่วยเหลือด้านกำลังใจและทุนทรัพย์อย่างดีเสมอมา

สุดท้ายขอขอบพระคุณพี่ และเพื่อนร่วมรุ่นทุกคน ให้การสนับสนุน ให้ความช่วยเหลือและให้กำลังใจเสมอมา

นางสาววรรณิษา กำมะลาด  
นางสาวอรสา อินช่วม

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ก
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ข
กิตติกรรมประกาศ	ก
สารบัญ	ง
สารบัญรูป	จ
บทที่ 1 บทนำ	
1.1 ความเป็นมาของโครงการพิเศษ	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 ขอบเขตการวิจัย	2
1.4 ขั้นตอนการดำเนินงาน	2
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	2
บทที่ 2 ทฤษฎีและหลักการ	
2.1 คุณสมบัติของรอยต่อพี-เอ็นในสภาวะสมดุล	3
2.1.1 ปรากฏการณ์ที่รอยต่อแบบชันบันไดในสภาวะสมดุล	3
2.1.2 ศักย์ไฟฟ้าภายในของรอยต่อ (Built-in Potential : $V_{bi}$ )	7
2.1.3 แถบพลังงานของรอยต่อของพี-เอ็นในสภาวะสมดุล	10
2.1.4 สนามไฟฟ้าที่บริเวณรอยต่อพี-เอ็น	11
2.2 ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method)	13
2.2.1 การหาค่าอนุพันธ์	13
2.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย	16
2.2.2.1 สมการเอลลิปติก (elliptic equation)	16
2.2.2.2 สมการพาราโบลา (parabolic equation)	18
2.2.2.3 สมการไฮเพอร์โบลิก (hyperbolic equation)	24
2.3 ทฤษฎีโปรแกรม MATLAB	26
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย	
3.1 ศึกษาทฤษฎีคุณสมบัติของรอยต่อพี-เอ็นในสภาวะสมดุล	29
3.2 ศึกษาศักย์ไฟฟ้าภายในของรอยต่อ (Built-in Potential: $V_{bi}$ หรือ $\psi$ )	30
3.3 สมการปัวร์ซอง (Poisson's Equation)	32

3.4 สมการความต่อเนื่อง (Continuity Equations)	33
3.5 หลักการระเบียบวิธีผลต่างสี่บเนื่อง (Finite Difference Method)	34
3.6 หลักการของวิธีผลต่างสี่บเนื่อง และการประยุกต์วิธีผลต่างสี่บเนื่อง กับการคำนวณค่าศักย์พื้นผิวบริเวณรอยต่อ พี-เอ็น	35
<b>บทที่ 4 ผลการทดลองและอภิปรายผล</b>	<b>40</b>
4.1 การประยุกต์วิธีผลต่างสี่บเนื่อง	40
4.2 ผลการทดลอง	41
4.2.1 การทดลองการจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้า 2 มิติ	41
4.2.2 การทดลองการจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้า 2 มิติ ที่เกิดการแพร่ของอิเล็กตรอนและโฮลเมื่อเข้าสู่ภาวะสมดุล	48
<b>บทที่ 5 สรุปและข้อเสนอแนะ</b>	<b>50</b>
5.1 บทสรุปและวิจารณ์	50
5.2 ข้อเสนอแนะในการวิจัยและพัฒนาต่อ	50
เอกสารอ้างอิง (บรรณานุกรม)	
ภาคผนวก ก.	
ภาคผนวก ข.	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูป

	หน้า
รูปที่ 2.1 (ก) แสดงลักษณะการกระจายของอะตอมสารเจือ และ (ข) แสดงความหนาแน่นของพาหะที่ด้านทั้งสองของรอยต่อพี-เอ็น ชนิดชั้นบันได ก่อนเกิดรอยต่อ	3
รูปที่ 2.2 แสดงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น (ก) ก่อนเกิดรอยต่อ (ข) หลังจากเกิดรอยต่ออิเล็กทรอนิกส์และโฮลแพร่ข้ามรอยต่อ ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าภายในที่รอยต่อและ (ค) รอยต่อพีเอ็นในภาวะสมดุลอิเล็กทรอนิกส์และโฮลไม่สามารถข้ามรอยต่อได้	5
รูปที่ 2.3 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของโฮลและอิเล็กทรอนิกส์ เนื่องจากการแพร่และการครีพท์และทิศทางของกระแสที่เกิดขึ้นบริเวณปลอดพาหะ	7
รูปที่ 2.4 แสดงลักษณะการกระจายของ(ก) ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า (ข) สนามไฟฟ้าภายในและ (ค) ศักย์ไฟฟ้าภายในที่ปรากฏบริเวณรอยต่อพี-เอ็นในภาวะสมดุล	8
รูปที่ 2.5 แสดงลักษณะแถบพลังงานของรอยต่อพี-เอ็นในภาวะต่างๆ (ก) ก่อนเกิดรอยต่อ (ข) ขณะเกิดรอยต่อ (ค) ขณะรอยต่ออยู่ในภาวะสมดุล	10
รูปที่ 2.6 การกระจาย (ก) ความหนาแน่นประจุ (ข) สนามไฟฟ้า และ (ค) การกระจายของศักย์ภายในที่กระจายอยู่ในบริเวณปลอดพาหะของรอยต่อพี-เอ็นชนิดชั้นบันได	12
รูปที่ 2.7 แสดงลักษณะของตัวแปรตาม $y$ ซึ่งเปลี่ยนไปตามตัวแปรต้น $x$	13
รูปที่ 2.8 การเปรียบเทียบระหว่างค่าอนุพันธ์แมนตรงกับค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบต่างๆ	14
รูปที่ 2.9 การคำนวณอุณหภูมิภายใต้สถานะอยู่ตัวในแผ่นโลหะ จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเอลลิปติก	16
รูปที่ 2.10 การถ่ายเทความร้อนโดยการนำในแผ่นโลหะ	17
รูปที่ 2.11 การคำนวณการกระจายของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ในแท่งโลหะยาวจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลา	19
รูปที่ 2.12 การถ่ายเทความร้อนโดยการนำในแท่งโลหะ	19
รูปที่ 2.13 การแบ่งแท่งโลหะออกเป็นหลายส่วนเพื่อใช้กับวิธีผลต่างสี่บเนื่อง	21
รูปที่ 2.14 แผนภาพการคำนวณโดยระเบียบวิธีซัดแจ้ง	22
รูปที่ 2.15 แผนภาพการคำนวณโดยระเบียบวิธีแบบปริยาย	23

รูปที่ 2.16	แผนภาพการคำนวณโดยระเบียบวิธีของแครงก์-นิโคลสัน	24
รูปที่ 2.17	การคำนวณการเคลื่อนตัวเนื่องจากการสั้นของเส้นลวด จากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไฮเปอร์โบริก	24
รูปที่ 2.18	การสั้นของเส้นลวดและการพิจารณาเอลิเมนต์ช่วงสั้น เพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์	25
รูปที่ 3.1	การแบ่งสารกึ่งตัวนำออกเป็นตารางสี่เหลี่ยม	35
รูปที่ 4.1	ผลของศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติที่ $t = 5 \times 10^{-15} s$	42
รูปที่ 4.2	ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติที่ $t = 5 \times 10^{-15} s$	43
รูปที่ 4.3	ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติที่ $t = 5 \times 10^{-15} s$	43
รูปที่ 4.4	ผลของศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติที่ $t = 1.55 \times 10^{-14} s$	44
รูปที่ 4.5	ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติที่ $t = 1.55 \times 10^{-14} s$	44
รูปที่ 4.6	ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติที่ $t = 1.55 \times 10^{-14} s$	45
รูปที่ 4.7	ผลของศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติที่ $t = 3.15 \times 10^{-14} s$	46
รูปที่ 4.8	ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติที่ $t = 3.15 \times 10^{-14} s$	46
รูปที่ 4.9	ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติที่ $t = 3.15 \times 10^{-14} s$	47
รูปที่ 4.10	ผลของศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติ $\Delta t = 5 \times 10^{-16} s$	48
รูปที่ 4.11	ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติ $\Delta t = 5 \times 10^{-16} s$	49
รูปที่ 4.12	ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติ $\Delta t = 5 \times 10^{-16} s$	49

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาของโครงการพิเศษ

สารกึ่งตัวนำสามารถนำไปประยุกต์ใช้สร้างเป็นสิ่งประดิษฐ์ได้อย่างกว้างขวาง โดยการเติมอะตอมสารเจือลงในสารกึ่งตัวนำ ทำให้เกิดเป็นสารกึ่งตัวนำที่ไม่บริสุทธิ์ชนิดพีและสารกึ่งตัวนำชนิดเอ็น ซึ่งโดยโครงสร้างของรอยต่อพี-เอ็น ( p-n junction ) นั้นมีคุณสมบัติต่างๆ ซึ่งหากสามารถทราบค่าคุณสมบัติเหล่านั้นแล้วจะสามารถนำไปใช้ในการออกแบบอุปกรณ์สารกึ่งตัวนำที่มีประสิทธิภาพได้ คุณสมบัติของรอยต่อสารกึ่งตัวนำที่สนใจศึกษาเป็นหลัก ในโครงการพิเศษนี้คือค่าของศักย์ไฟฟ้าที่บริเวณรอยต่อพี-เอ็น จะเห็นว่าในรอยต่อพี-เอ็น ของสารกึ่งตัวนำจะเกิดการแพร่ของอิเล็กตรอนและโฮลจากด้านที่มีความหนาแน่นของพาหะสูงกว่าไปยังด้านที่มีความหนาแน่นของพาหะต่ำกว่า ดังนั้นจึงเกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของพาหะบริเวณรอยต่อพี-เอ็น และทำให้เกิดมีประจุไฟฟ้าบวกและลบของไอออนอะตอมสารเจือ มีผลทำให้มีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นที่บริเวณรอยต่อ และสนามไฟฟ้านี้จะต่อต้านการแพร่ข้ามรอยต่อของพาหะ

เมื่อรอยต่อเข้าสู่ภาวะสมดุล แสดงว่ามีความต่างศักย์เกิดขึ้นระหว่างด้านพีและด้านเอ็น ความต่างศักย์นี้ถูกเรียกว่า กำแพงศักย์ภายใน หรือศักย์ภายใน ( built-in potential barrier or built in potential ) ซึ่งสามารถทำการคำนวณหาค่าได้โดยการแก้สมการปัวร์ซอง ซึ่งการแก้สมการปัวร์ซองในโครงการพิเศษนี้จะใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง ( Finite difference ) และใช้โปรแกรม MATLAB ในการคำนวณหาค่าศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อพี-เอ็น โดยผู้จัดทำโครงการพิเศษนี้จะศึกษาคุณสมบัติของสารกึ่งตัวนำ และศึกษาการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธี Finite difference และโปรแกรม MATLAB มาผสมผสานกัน เพื่อหาค่าศักย์ไฟฟ้าตรงบริเวณรอยต่อพี-เอ็น ซึ่งผลที่ได้จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการออกแบบอุปกรณ์สารกึ่งตัวนำต่อไป

### 1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อคำนวณหาการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น

1.2.2 เพื่อศึกษาการใช้โปรแกรม MATLAB ในการเขียน โปรแกรมคำนวณ

#### เชิงตัวเลข

1.2.3 เพื่อศึกษาการจำลองแบบด้วยวิธี Finite Difference

1.2.4 เพื่อศึกษาและทำความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีรอยต่อพี-เอ็น

### 1.3 ขอบเขตของการวิจัย

1.3.1 ศึกษาและประยุกต์การคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธี Finite Difference เพื่อนำไปหาค่าศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อพี-เอ็น

1.3.2 นำโปรแกรม MATLAB มาประยุกต์ใช้ในการเขียนแบบจำลองรอยต่อพี-เอ็น ด้วยวิธี Finite Difference

1.3.3 สามารถนำแบบจำลองที่ได้มาทำนายค่าศักย์ไฟฟ้าที่รอยต่อพี-เอ็นได้อย่างถูกต้อง

### 1.4 ขั้นตอนการวิจัยและวิธีการดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 1 ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับทฤษฎีรอยต่อพี-เอ็น

ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาการเขียนโปรแกรม MATLAB

ขั้นตอนที่ 3 ศึกษาการคำนวณหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น

ขั้นตอนที่ 4 สร้างแบบจำลองในการหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อพี-เอ็น

ขั้นตอนที่ 5 สรุปผลและเสนอแนะ

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.5.1 สามารถหาค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น ได้

1.5.2 สามารถนำวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขแบบ Finite Difference มาแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ได้

1.5.3 สามารถเขียนโปรแกรม MATLAB ได้

1.5.4 สามารถนำโปรแกรม MATLAB ไปประยุกต์ใช้กับการคำนวณเชิงตัวเลขด้วยวิธี Finite Difference ได้

## บทที่ 2

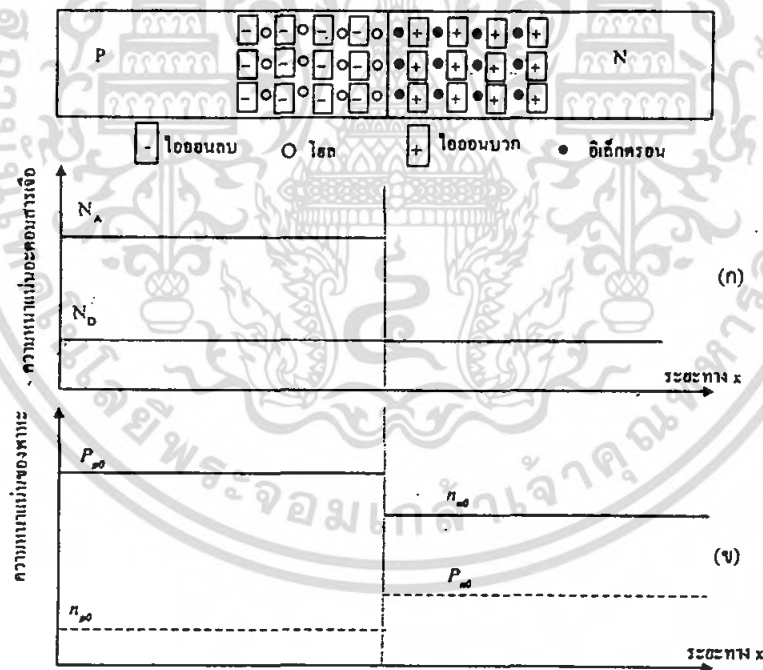
### หลักการและทฤษฎีเบื้องต้น

#### 2.1 คุณสมบัติของรอยต่อพี-เอ็นในสภาวะสมดุล

##### (P-N Junction Properties at Equilibrium)

##### 2.1.1 ปฏิกิริยาการที่รอยต่อแบบชั้นบันไดในสภาวะสมดุล

รอยต่อพี-เอ็นถูกสร้างขึ้นได้ด้วยวิธีต่างๆ หลายวิธี และจะทำให้ได้รอยต่อที่มีลักษณะต่าง ๆ กัน เพื่อให้ง่ายต่อการอธิบายและวิเคราะห์คุณสมบัติของรอยต่อพี-เอ็น จะเริ่มพิจารณาถึงรอยต่อพี-เอ็นชนิดชั้นบันได (step junction) ซึ่งด้านทีจะมีอะตอมสารเจือชนิดที่กระจายอยู่อย่างสม่ำเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 2.1(ก) ซึ่งรอยต่อแบบชั้นบันไดในลักษณะนี้ สามารถสร้างได้ด้วยวิธีการอัลลอย (alloy process) หรือวิธีอีพิแทกซี (epitaxy process) สำหรับรอยต่อพี-เอ็น ที่ได้จากรีการแพร่สารเจือ (diffusion process)



รูปที่ 2.1 (ก) แสดงลักษณะการกระจายของอะตอมสารเจือ และ (ข) แสดงความหนาแน่นของพาหะที่ด้านทั้งสองของรอยต่อพี-เอ็น ชนิดชั้นบันได ก่อนเกิดรอยต่อ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการพิจารณารอยต่อชั้นบันได ในเบื้องต้น จะสมมติการไหลของกระแสเพียง 1 มิติ เฉพาะในทิศทางแกน  $x$  เท่านั้นซึ่งกระแสนี้มีทิศทางตั้งฉาก กับพื้นที่หน้าตัดของรอยต่อที่มีขนาด สม่ำเสมอตลอดแนวแกน  $x$  แต่โดยความเป็นจริงแล้วจะมีกระแสที่ไหลในทิศทางอื่นๆด้วย และ แบบจำลองของรอยต่อพี-เอ็น ควรมีลักษณะเป็นแบบ 3 มิติ ซึ่งการวิเคราะห์จะยุ่งยากมากขึ้น จาก รูปที่ 2.1 กำหนดให้สัญลักษณ์ ต่างๆ มีความหมายดังต่อไปนี้

$p_{po}$  คือความหนาแน่นของโฮลทางด้านสารกึ่งตัวนำชนิดพี ซึ่งเป็นพาหะส่วนมาก (majority carrier concentration)

$n_{po}$  คือความหนาแน่นของอิเล็กตรอนทางด้านสารกึ่งตัวนำชนิดพี ซึ่งเป็นพาหะส่วนน้อย (minority carrier concentration)

$n_{no}$  คือ ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนทางด้านสารกึ่งตัวนำชนิดเอ็น ซึ่งเป็นพาหะส่วนมาก

$p_{no}$  คือ ความหนาแน่นของโฮลทางด้านสารกึ่งตัวนำชนิดเอ็น ซึ่งเป็นพาหะส่วนน้อย

$N_D^+$  คือ สัญลักษณ์ของอะตอมผู้ให้ที่กลายเป็น ไอออนบวก (positively ionized donor atoms) ซึ่งมี สภาพเป็นประจุไฟฟ้าบวก และไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ (immobile positive charge)

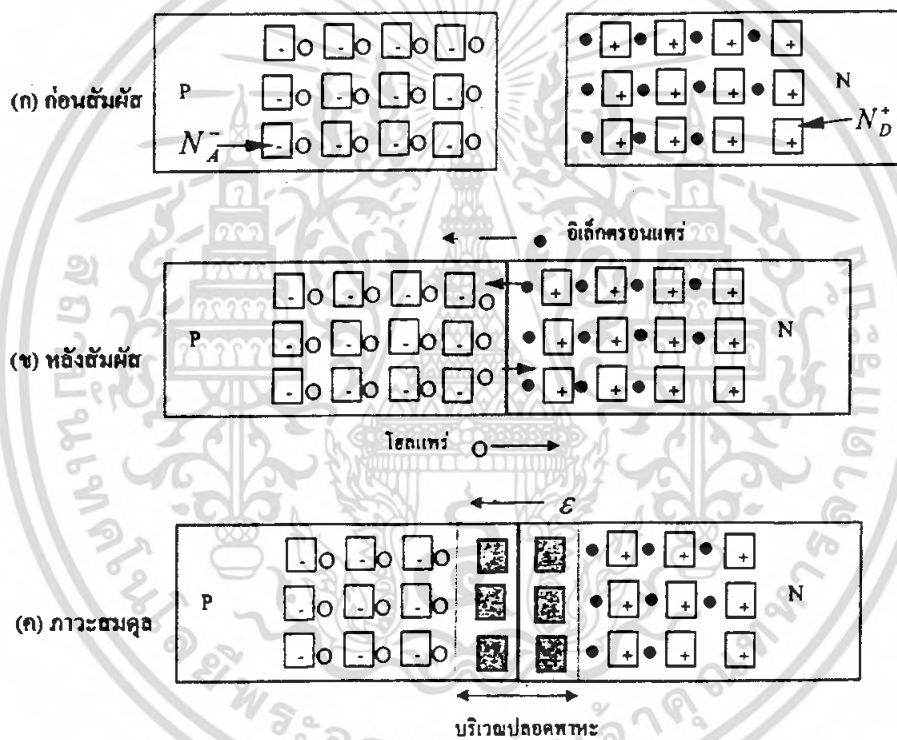
$N_A^-$  คือ สัญลักษณ์ของอะตอมผู้รับที่กลายเป็น ไอออนลบ (negatively ionized acceptor atoms) ซึ่งมี สภาพเป็นประจุไฟฟ้าลบ และไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ (immobile negative charge)

• คือ สัญลักษณ์ของอิเล็กตรอนอิสระ (free electron) มีประจุเป็นลบและเคลื่อนที่ได้ (mobile negative charge)

○ คือ สัญลักษณ์ของโฮล (hole) มีประจุเป็นบวกและเคลื่อนที่ได้ (mobile positive charge)

ขณะที่รอยต่อพี-เอ็น ยังไม่ถูกสร้างด้านพีและด้านเอ็นจะถูกแยกจากกันดังรูปที่ 2.2 (ก) โดยที่ด้านพีจะมีโฮลที่เกิดจากอะตอมผู้รับและมีประจุเป็นบวก ( $+q$ ) โดยความหนาแน่นของโฮล ( $p_p$ ) จะประมาณเท่ากับความหนาแน่นของอะตอมผู้รับที่ถูกไอออไนซ์เป็นไอออนลบ ( $N_A^-$ ) จึง ทำให้ด้านพียังคงมีสภาพเป็นกลางทางด้านไฟฟ้า ส่วนด้านเอ็นจะมีอิเล็กตรอนอิสระหรือ อิเล็กตรอนนำไฟฟ้าที่เกิดจากอะตอมผู้ให้และมีประจุเป็นลบ ( $-q$ ) โดยความหนาแน่นของ อิเล็กตรอน ( $n_n$ ) จะเท่ากับความหนาแน่นของอะตอมผู้ให้ที่ถูกไอออไนซ์เป็นไอออนบวก ( $N_D^+$ ) จึงทำให้ด้านเอ็นยังคงมีสภาพเป็นกลางทางด้านไฟฟ้าด้วยเช่นกัน และเมื่อรอยต่อพี-เอ็นถูกสร้างขึ้น จะเห็นว่าด้านทั้งสองมีความหนาแน่นของพาหะไม่เท่ากันเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดมีแรงกระทำต่อ พาหะเป็นเหตุให้พาหะเคลื่อนที่แพร่ไปยังด้านตรงข้าม เพื่อให้ด้านทั้งสองมีความหนาแน่นของ ประจุพาหะเท่ากัน ดังนั้น ทันทีที่เกิดรอยต่อจะเกิดมีการแพร่ของอิเล็กตรอนและโฮลจากด้านที่มี ความหนาแน่นสูงกว่าไปยังด้านที่มีความหนาแน่นต่ำกว่า ดังแสดงในรูปที่ 2.2 (ข)

การแพร่ของพาหะไปยังตรงข้ามนี้เกิดขึ้นที่บริเวณใกล้ๆกับรอยต่อเป็นอันดับแรก ดังนั้น ไอออนของอะตอมผู้ให้ และ ไอออนของอะตอมผู้รับซึ่งเป็นประจุที่ไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ จึงสามารถแสดงประจุไฟฟ้าออกมาได้ โดยไอออนบวกของอะตอมผู้ให้แสดงประจุไฟฟ้าบวก และ ไอออนลบของอะตอมผู้รับแสดงประจุไฟฟ้าลบ ดังนั้นทำให้เริ่มมีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นที่บริเวณภายในรอยต่อและเรียกว่า “สนามไฟฟ้าภายใน” (built in electric field) ดังแสดงในรูปที่ 2.2 (ก) สนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นนี้จะต่อต้านการเคลื่อนที่ของโฮลจากด้านพี และต่อต้านการเคลื่อนที่ของ อิเล็กตรอนจากด้านเอ็น ไม่ให้ข้ามไปยังด้านตรงข้าม



รูปที่ 2.2 แสดงปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น (ก) ก่อนเกิดรอยต่อ (ข) หลังจากเกิดรอยต่อ อิเล็กตรอนและโฮลแพร่ข้ามรอยต่อ ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าภายในที่รอยต่อและ (ค) รอยต่อพี-เอ็นใน ภาวะสมดุลอิเล็กตรอนและโฮลไม่สามารถข้ามรอยต่อได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในช่วงแรก เนื่องจากสนามไฟฟ้ามีค่าน้อย แรงจากสนามไฟฟ้าที่ต่อต้านการเคลื่อนที่ของพาหะจึงมีค่าน้อย ทำให้แรงที่เกิดจากการแพร่มีค่ามากกว่า ดังนั้นอิเล็กตรอนและโฮลสามารถแพร่ข้ามรอยต่อได้ต่อไป แต่อัตราการแพร่จะค่อยๆ ลดลง ในขณะที่สนามไฟฟ้าที่รอยต่อจะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในที่สุดสนามไฟฟ้าที่รอยต่อจะมีค่ามากพอที่ยับยั้งการแพร่ของอิเล็กตรอน และโฮลได้พอดี ทำให้อิเล็กตรอนและโฮลไม่สามารถแพร่ข้ามรอยต่อได้อีกต่อไป ภาวะนี้กระแสของพาหะสุทธิจะเป็นศูนย์ หรือก็คือ กระแสที่เกิดจากการแพร่ของพาหะ (diffusion current) จะเท่ากับกระแส คริฟท์ของพาหะ (drift current) ที่เกิดจากสนามไฟฟ้าภายในรอยต่อ ซึ่งกระแสทั้งสองนี้มีทิศตรงกันข้าม กระแสรวมจึงเป็นศูนย์เรียกภาวะนี้ว่า “ภาวะสมดุล” หรือ “equilibrium” เนื่องจากพาหะถูกอิทธิพลจากสนามไฟฟ้าพัดพาออกไป ดังนั้นย่านนี้ถูกรเรียกว่า “บริเวณปลอดพาหะ” หรือ “depletion region” หรือ “space charge region” บริเวณนี้ก็คือ บริเวณซึ่งมีประจุไฟฟ้าเกิดขึ้นนั่นเอง การที่เกิดมีสนามไฟฟ้าที่บริเวณรอยต่อ หรือบริเวณปลอดพาหะแสดงว่ามีความต่างศักย์เกิดขึ้นระหว่างด้านพีและด้านเอ็น ความต่างศักย์นี้เรียกว่า “ศักย์สัมผัส” หรือ “Contact potential” และศักย์สัมผัสบริเวณที่ปลอดพาหะนี้บางครั้งเรียกว่า “กำแพงศักย์ภายใน” หรือ “ศักย์ภายใน” (built-in potential barrier or built in potential) ขนาดของศักย์ภายในนี้ ( $V_{bi}$ ) จะขึ้นอยู่กับค่าความหนาแน่นของอะตอมสารเจือที่ด้านทั้งสองของรอยต่อ และอุณหภูมิที่รอยต่อ โดยทั่วไปจะมีค่าน้อยกว่า 1 โวลต์ สมการของกระแสที่เกิดจากการแพร่ของพาหะข้ามรอยต่อเขียนด้วยดังสมการนี้

$$J_{p(diff)} = -qD_p \frac{dp}{dx} \quad (1)$$

สนามไฟฟ้าภายในรอยต่อที่เกิดขึ้นทำให้เกิดกระแสคริฟท์ของโฮล เขียนเป็นสมการดังนี้

$$J_{p(drift)} = pq\mu_p \varepsilon \quad (2)$$

ดังนั้นกระแสโฮลรวม หรือกระแสโฮลสุทธิที่ไหลผ่านรอยต่อพี-เอ็นคือ

$$\begin{aligned} J_{p(total)} &= J_{p(diff)} + J_{p(drift)} \\ &= qD_p \frac{dp}{dx} - pq\mu_p \varepsilon \end{aligned} \quad (3)$$

ในภาวะสมดุลจะเกิดขึ้นเมื่อสนามไฟฟ้าภายในมีค่ามากพอที่จะต่อต้านการเคลื่อนที่ของโฮลข้ามรอยต่อ หรือก็คือกระแสโฮลสุทธิเท่ากับศูนย์ ดังสมการ

$$J_{p(total)} = 0 = qD_p \frac{dp}{dx} - pq\mu_p \varepsilon$$

หรือ

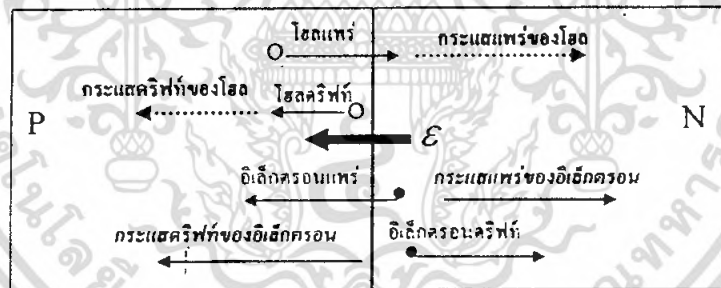
$$J_{p(diff)} + J_{p(drift)} = 0 \quad (4)$$

- โดยที่  $p$  คือ ความหนาแน่นของโฮล (hole concentration)  
 $D_p$  คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ของโฮล (hole's diffusion coefficient)  
 $\mu_p$  คือ สภาพคล่องของโฮล (hole's mobility)  
 $\mathcal{E}$  คือ สนามไฟฟ้าภายในรอยต่อ (built in electric field)

และสำหรับกรณีอิเล็กตรอนจากด้านเอ็น สามารถพิจารณาได้ทำนองเดียวกันกับกรณีของโฮลกล่าวคือ ในภาวะสมดุล กระแสการแพร่ของอิเล็กตรอนจะเท่ากับกระแสครีฟท์ของอิเล็กตรอนหรือ

$$J_{n(diff)} + J_{n(drift)} = 0 \quad (5)$$

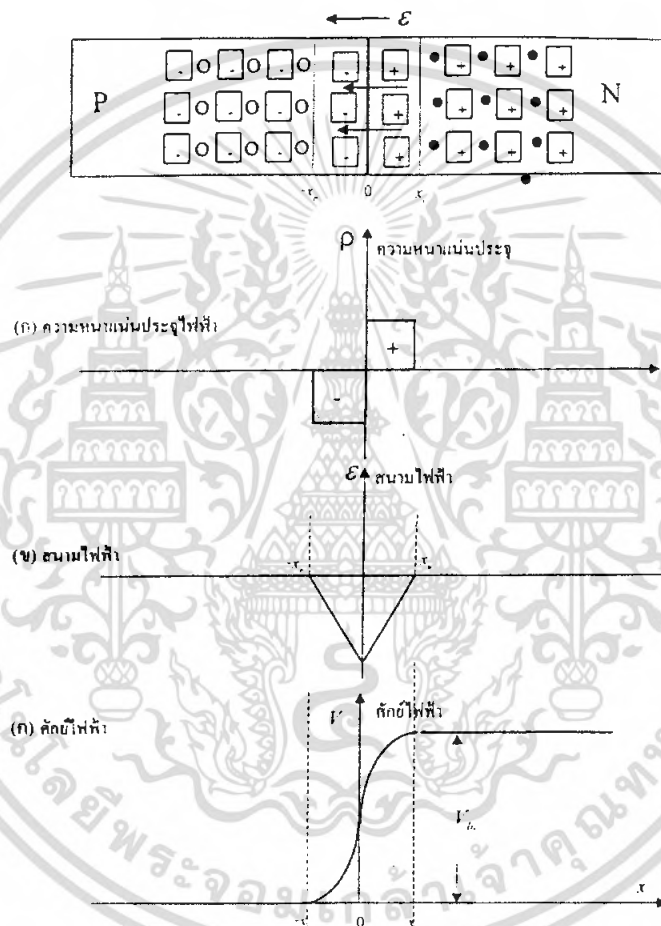
- โดยที่  $J_{n(diff)}$  คือ กระแสการแพร่ของอิเล็กตรอน  
 และ  $J_{n(drift)}$  คือ กระแสครีฟท์ของอิเล็กตรอน  
 สำหรับทิศทางการเคลื่อนที่ของโฮลและอิเล็กตรอน เนื่องจากการแพร่ และการครีฟท์ และทิศทางการกระแสที่เกิดขึ้นที่บริเวณรอยต่อพี-เอ็น แสดง ได้ดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 แสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของโฮลและอิเล็กตรอน เนื่องจากการแพร่และการครีฟท์และทิศทางการกระแสที่เกิดขึ้นบริเวณรอยต่อพี-เอ็น

### 2.1.2 ศักย์ไฟฟ้าภายในของรอยต่อ (Built-in Potential : $V_{bi}$ )

แรงดันที่ตกคร่อมบริเวณปลอดพาหะ หรือบริเวณรอยต่อที่เรียกว่า “ศักย์ภายใน” หรือ “แรงดันภายใน” (built in voltage :  $V_{bi}$  ) ขณะที่รอยต่อพี-เอ็น เข้าสู่ภาวะสมดุลสามารถพิจารณาและหาสมการแสดงศักย์ภายในที่ปรากฏในบริเวณปลอดพาหะในช่วงจากด้านพีที่ตำแหน่ง  $-x_p$  ถึงด้านเอ็นที่ตำแหน่ง  $x_n$  โดยที่  $x = 0$  เป็นตำแหน่งที่อยู่ตรงกลางของรอยต่อ



รูปที่ 2.4 แสดงลักษณะการกระจายของ (ก) ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า (ข) สนามไฟฟ้าภายในและ (ค) ศักย์ไฟฟ้าภายในที่ปรากฏบริเวณรอยต่อพี-เอ็นในภาวะสมดุล

เนื่องจากเมื่อรอยต่อเข้าสู่ภาวะสมดุล กระแสครีฟท์และกระแสแพร่จะเท่ากัน ทำให้กระแสสุทธิเป็นศูนย์ เช่นกรณีของกระแสอิเล็กตรอนจะได้ว่า

$$J_{n(x)} = J_{n(diff)} + J_{n(drift)} = 0$$

หรือ 
$$0 = qD_n \frac{dn(x)}{dx} + n(x)q\mu_n \varepsilon(x)$$

ดังนั้น 
$$\varepsilon(x) = -\frac{D_n}{\mu_n} \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} = -\frac{kT}{q} \frac{1}{n(x)} \frac{dn(x)}{dx} \quad (6)$$

แต่เนื่องจาก

$$\varepsilon(x) = -\frac{dv(x)}{dx} \quad (7)$$

ดังนั้น 
$$\varepsilon(x)dx = -dv(x) \quad (8)$$

อินทิเกรตสมการที่ (8) ตลอดบริเวณรอยต่อ จาก  $x = -x_p$  ถึง  $x = x_n$  จะได้เป็น

$$-\int_{-x_p}^{x_n} \varepsilon(x)dx = \int_{V_{-x_p}}^{V_{x_n}} dv(x) = V_{(x_n)} - V_{(-x_p)} = V_{bi} \quad (9)$$

แทนสมการที่(6) ใน (9) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} V_{bi} &= -\int_{-x_p}^{x_n} \varepsilon(x)dx = \frac{kT}{q} \int_{n(-x_p)}^{n(x_n)} \frac{1}{n(x)} dn(x) \\ &= \frac{kT}{q} \ln \left[ \frac{n(x_n)}{n(-x_p)} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ในกรณีของรอยต่อพี-เอ็นแบบขั้วบับนโค ซึ่งด้านพีถูกเติมด้วยอะตอมผู้รับ  $N_A$  และด้านเอ็นถูกเติมด้วยอะตอมผู้ให้  $N_D$  ดังนั้น

$$n(x_n) = n_n = N_D \quad (11)$$

$$n(-x_p) = n_p = \frac{n_i^2}{N_A} \quad (12)$$

แทนสมการที่ (11) และ (12) ในสมการที่ (10) จะได้ว่าแรงดันตกคร่อมรอยต่อพี-เอ็น คือ

$$V_{bi} = \frac{kT}{q} \ln \left[ \frac{n_n}{n_p} \right] \quad (13)$$

หรือ

$$V_{bi} = \frac{kT}{q} \ln \left[ \frac{N_A N_D}{n_i^2} \right] \quad (14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นอกจากนี้ สมการที่(13) อาจเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{qV_{bi}/kT} \quad (15)$$

และเนื่องจากในภาวะสมดุล  $p_p n_p = n_i^2 = n_n p_n$  หรือ  $\frac{p_p}{p_n} = \frac{n_n}{n_p}$

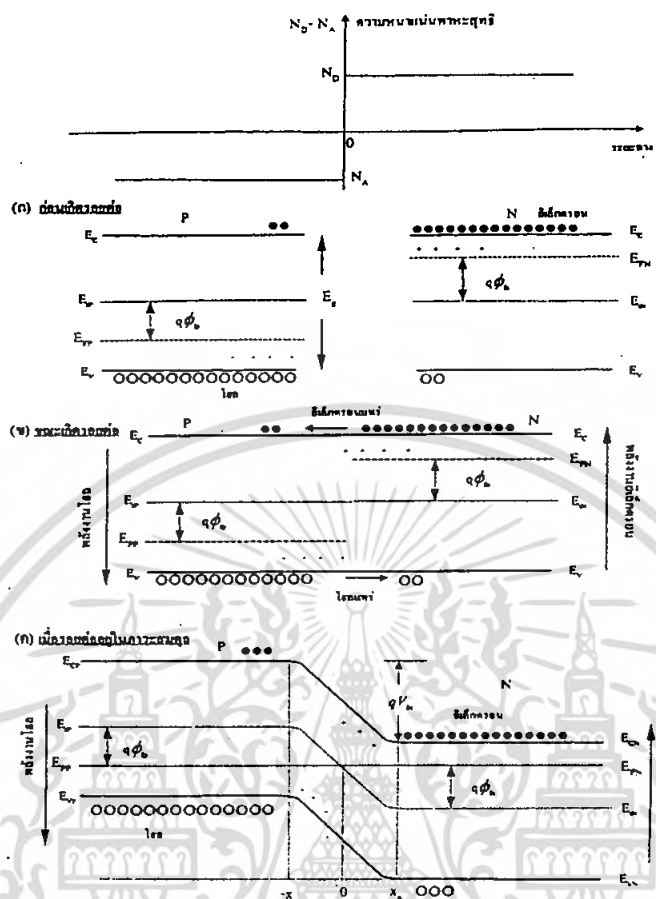
$$\text{ดังนั้น จะได้ว่า} \quad \frac{p_p}{p_n} = \frac{n_n}{n_p} = e^{qV_{bi}/kT} \quad (16)$$

$$\text{หรือ} \quad n_p = n_n e^{-qV_{bi}/kT} \quad \text{และ} \quad p_n = p_p e^{-qV_{bi}/kT}$$

สมการที่ (16) ถูกเรียกว่า “กฎของรอยต่อ” (Law of Junction) แสดงถึงความสัมพันธ์ของ ศักย์ภายในกับอัตราส่วนของความหนาแน่นของโฮล และอิเล็กตรอนที่กระจายอยู่ที่ด้านทั้งสองของ รอยต่อพี-เอ็น ซึ่งความสัมพันธ์นี้มีประโยชน์ในการคำนวณหาคุณสมบัติความสัมพันธ์ระหว่าง กระแส และแรงดันของรอยต่อพี-เอ็น ต่อไป

### 2.1.3 แถบพลังงานของรอยต่อของพี-เอ็นในสภาวะสมดุล

เราพิจารณาลักษณะของแถบพลังงาน (Energy band) ของรอยต่อพี-เอ็นในสภาวะ สมดุล ดังรูปที่ 2.5(ก) แสดงแถบพลังงานของสารกึ่งตัวนำด้านพี และด้านเอ็นในขณะที่ยังไม่เกิด รอยต่อ ซึ่งเนื่องจากเป็นสารกึ่งตัวนำชนิดเดียวกัน ขนาดของช่องว่างพลังงาน ( $E_g$ ) จึงเท่ากัน ระดับเฟอร์มี (Fermi level :  $E_{Fp}$ ) ของสารชนิดพีจะอยู่ต่ำกว่าระดับอินทรินซิก (intrinsic level :  $E_i$ ) และระดับเฟอร์มี (Fermi level :  $E_{Fn}$ ) ของสารชนิดเอ็นจะอยู่สูงกว่าระดับอินทรินซิก (intrinsic level :  $E_i$ ) จากรูปที่ 2.5 ค่าของ  $\phi_p$  ถูกเรียกว่า “ศักย์เฟอร์มีของสารชนิดพี” (Fermi potential of p-type) และค่าของ  $\phi_n$  ถูกเรียกว่า “ศักย์เฟอร์มีของสารชนิดเอ็น” (Fermi potential of n-type) เนื่องจากความหนาแน่นของโฮลและอิเล็กตรอนไม่เท่ากันจึงเกิดการแพร่จากด้านที่มีความ หนาแน่นสูงกว่าไปยังด้านที่มีความหนาแน่นต่ำกว่า ดังแสดงในรูป 2.5(ข)



รูปที่ 2.5 แสดงลักษณะแถบพลังงานของรอยต่อพี-เอ็นในภาวะต่างๆ  
 (ก) ก่อนเกิดรอยต่อ (ข) ขณะเกิดรอยต่อ (ค) ขณะรอยต่ออยู่ในภาวะสมดุล

ดังนั้นจึงเกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นของพาหะบริเวณรอยต่อทำให้เกิดมีประจุไฟฟ้าบวก และลบของไอออนอะตอมสารเจือ มีผลทำให้มีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นที่รอยต่อ เมื่อรอยต่อเข้าสู่ภาวะสมดุลทำให้สนามไฟฟ้าค่ามากพอ ทำให้ยับยั้งการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนและโฮลไม่ให้ข้ามผ่านรอยต่อได้ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ กระแสครีพท์จะเท่ากับกระแสแพร่ ดังนั้นระดับเฟอร์มิ  $E_F$  ของด้านทั้งสองจะอยู่ในระดับเดียวกันทำให้เกิดมีความต่างศักย์เสมือนกับเป็นกำแพงศักย์ต่อต้านไม่ให้อิเล็กตรอนและโฮลเคลื่อนที่ข้ามรอยต่อ เราเรียกภาวะนี้ว่า “ภาวะสมดุล” ดังรูปที่ 2.5(ค) ความชันของกราฟเป็นสิ่งที่แสดงถึงขนาดของสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นภายในรอยต่อ และแสดงลักษณะแถบพลังงานของรอยต่อพี-เอ็น ขณะที่ภาวะสมดุลจะเห็นกำแพงศักย์ที่รอยต่อ ( $V_{bi}$ ) หรือศักย์สัมผัส หมายถึงความแตกต่างของระดับพลังงานระหว่างด้านพีและด้านเอ็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นการนี้

$$V_{bi} = V(x_n) - V(-x_p)$$

หรือ 
$$V_{bi} = \frac{1}{q} [E_c(-x_p) - E_c(x_n)] = \frac{1}{q} [E_{cp} - E_{cn}] \quad (17)$$

หรือ 
$$V_{bi} = \frac{1}{q} [E_i(-x_p) - E_i(x_n)] = \frac{1}{q} [E_{ip} - E_{in}] \quad (18)$$

หรือ 
$$V_{bi} = \frac{1}{q} [(E_i - E_F)_{p-side} + (E_F - E_i)_{n-side}] \quad (19)$$

#### 2.1.4 สนามไฟฟ้าที่บริเวณรอยต่อพี-เอ็น

ในภาวะสมดุล ที่บริเวณรอยต่อพี-เอ็น จะปรากฏประจุไฟฟ้าบวกและลบขึ้น จึงทำให้สนามไฟฟ้าเกิดขึ้นที่บริเวณนี้ การพิจารณาค่าสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่งต่างๆบริเวณรอยต่อสามารถทำได้โดยการใช้ “สมการปัวร์ซอง” หรือ “Poisson’s equation” ซึ่งแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง  $x$  ใดๆ กับค่าความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าที่ตำแหน่งนั้นๆ ดังสมการที่ (20) โดยพิจารณาเพียง 1 มิติจะได้

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon} = \frac{\rho(x)}{K_s \varepsilon_0} \quad (20)$$

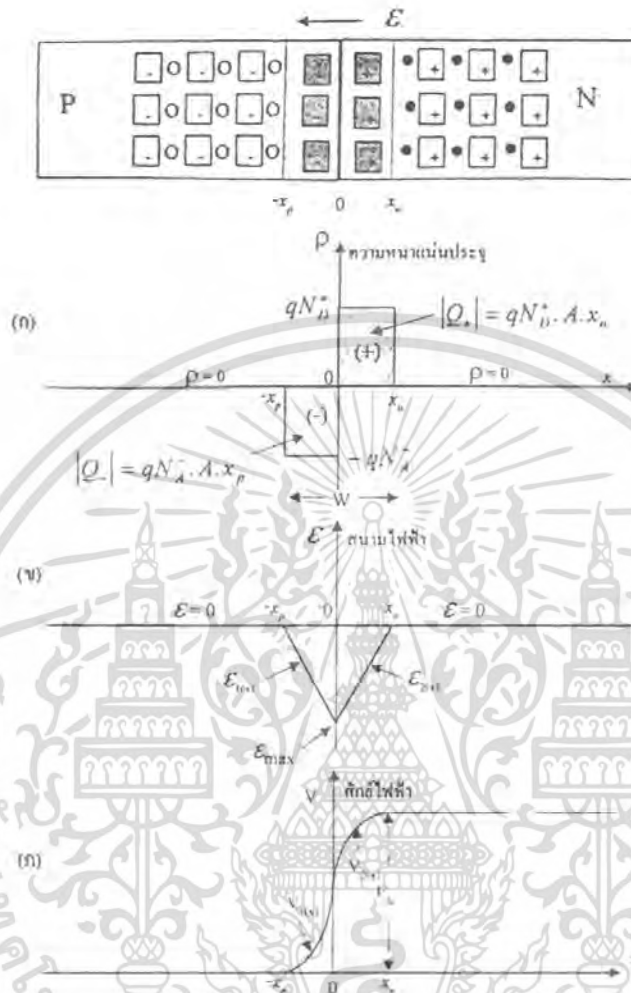
โดยที่  $\varepsilon(x)$  คือ สนามไฟฟ้าที่ตำแหน่ง  $x$  ใดๆ

$\rho(x)$  คือ ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้าที่ตำแหน่ง  $x$  ใดๆ

$K_s$  คือ ค่าคงที่ไดอิเล็กตริกของสารกึ่งตัวนำ

$\varepsilon_0$  คือ ค่าเปอร์มิตติวิตีของสุญญากาศ

$\varepsilon$  คือ ค่าเปอร์มิตติวิตีของสารกึ่งตัวนำ โดย  $\varepsilon = K_s \varepsilon_0$



รูปที่ 2.6 การกระจาย (ก) ความหนาแน่นประจุ (ข) สนามไฟฟ้า และ (ค) การกระจายของศักย์ภายในที่กระจายอยู่ในบริเวณปลอดพาหะของรอยต่อพี-เอ็นชนิดชันันต์

ดังนั้น ถ้าพิจารณารอยต่อแบบชันันต์ ดังแสดงในรูปที่ 2.6 จะได้ว่าที่บริเวณ  $-x_p < x < 0$  ถ้ากำหนดให้สนามไฟฟ้าคือ  $\varepsilon_1(x)$  และ  $\rho(x) = \rho_p = -qN_A$  ดังนั้น

$$\frac{d\varepsilon_1(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon} = -\frac{qN_A}{\varepsilon} \quad (21)$$

และที่บริเวณ  $0 < x < x_n$  กำหนดให้สนามไฟฟ้าคือ  $\varepsilon_2(x)$  และ  $\rho(x) = \rho_n = +qN_D$  ดังนั้น

$$\frac{d\varepsilon_2(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon} = \frac{qN_D}{\varepsilon} \quad (22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่นอกบริเวณปลอดภัยจะได้  $\rho = 0$

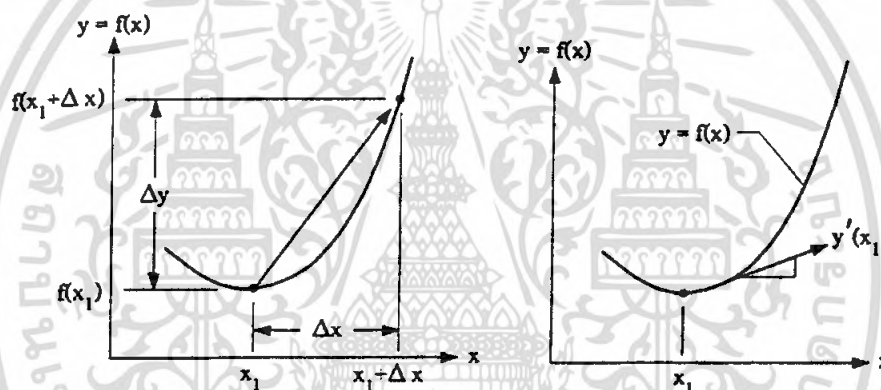
ดังนั้นสนามไฟฟ้านอกบริเวณปลอดภัยมีค่าเป็นศูนย์ หรือ

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = 0 \quad (23)$$

จากสมการที่ (23) แสดงว่า สนามไฟฟ้านอกบริเวณปลอดภัยมีค่าเป็นศูนย์ และสนามไฟฟ้าบริเวณปลอดภัยทางด้านอื่น  $\{\varepsilon_2(x)\}$  จะมีค่าเพิ่มขึ้นกับระยะทาง  $x$  ส่วนสนามไฟฟ้าบริเวณปลอดภัยทางด้านที่  $\{\varepsilon_1(x)\}$  จะมีค่าเป็นลบมากขึ้นกับระยะทางและจะมีค่าสูงสุดที่ตำแหน่งซึ่ง  $x = 0$  โดยมีค่าเป็น  $\varepsilon(0)$  ซึ่งเป็นตำแหน่งของรอยต่อ

## 2.2 ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method)

### 2.2.1 การหาค่าอนุพันธ์



รูปที่ 2.7 แสดงลักษณะของตัวแปรตาม  $y$  ซึ่งเปลี่ยนไปตามตัวแปรต้น  $x$

ค่าของอนุพันธ์โดยประมาณ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (1a)$$

เมื่อมีการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรต้น  $\Delta x$  เข้าสู่ศูนย์ เราจะได้ค่าอนุพันธ์ที่แท้จริงที่จุด  $x_1$

นั้น

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (2a)$$

ค่า  $dy/dx$  ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้สัญลักษณ์เป็น  $y'$  หรือ  $f'(x)$

ในวิชาแคลคูลัสนั้น หากกำหนดฟังก์ชัน  $f(x)$  มาให้ เราสามารถหาค่าอนุพันธ์โดยใช้สูตรต่างๆ เช่น ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันพหุนาม ดังนี้

$$y = f(x) = x^n \quad (3a)$$

เราสามารถหาค่าอนุพันธ์แม่นยำได้โดยตรง คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = nx^{n-1} \quad (4a)$$

เป็นต้น แต่ในทางปฏิบัติโดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ไม่ได้อยู่ในรูปแบบที่ง่ายต่อการหาค่าอนุพันธ์ดังเช่นตัวอย่างที่ยกขึ้นมาี้ ดังนั้นโดยปกติเราจะทำการหาค่าอนุพันธ์โดยประมาณ ซึ่งสามารถทำได้โดยสะดวก เราจะเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบได้ดังนี้

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (5a)$$

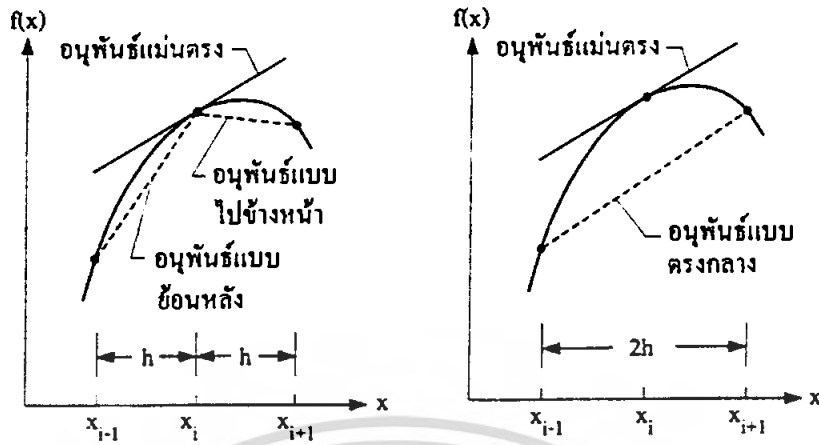
โดย  $h$  แทนช่วงระหว่าง  $x_i$  และ  $x_{i+1}$  เราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first derivative) ที่ตำแหน่ง  $x_i$  ได้จากอนุกรมเทย์เลอร์นี้ ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (6a)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h) \quad (7a)$$

โดย  $O(h)$  แสดงถึงค่าความผิดพลาดอันดับ  $h$  (error of order  $h$ ) ที่เกิดขึ้น สมการ(7a) นี้บางครั้งเรียกว่าเป็นสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยไปข้างหน้าอันดับที่ 1 (first forward-difference) ที่เรียกว่าเป็นผลต่างแบบไปข้างหน้าก็เพราะว่าเราใช้ข้อมูลของฟังก์ชันที่ตำแหน่ง  $x_i$  และ  $x_{i+1}$  เพื่อคำนวณหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ลักษณะของค่าอนุพันธ์โดยประมาณที่เกิดขึ้นเมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นยำได้แสดงดังรูป 2.8(ก)



(ก) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบ  
ไปข้างหน้าและแบบย้อนกลับ

(ข) ค่าอนุพันธ์โดยประมาณ  
แบบตรงกลาง

รูปที่ 2.8 การเปรียบเทียบระหว่างค่าอนุพันธ์แม่นยำกับค่าอนุพันธ์โดยประมาณแบบต่างๆ

ในการทำงานเดียวกับสมการ (5a) เราสามารถเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์อีกครั้ง แต่หาฟังก์ชันที่  
ตำแหน่ง  $x_{i-1}$  ดังนี้

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \dots \quad (8a)$$

ซึ่งนำไปสู่ค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง  $x_i$  ได้ ดังนี้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2!} f''(x_i) - \dots \quad (9a)$$

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \quad (10a)$$

สมการ (10a) นี้ สามารถนำไปคำนวณหาค่าอนุพันธ์โดยประมาณได้ เป็นสมการผลต่างจากการ  
แบ่งย่อยย้อนหลังอันดับที่ 1 (first backward divided-difference) ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่เกิดขึ้น  
เมื่อเปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แบบไปข้างหน้าและค่าอนุพันธ์แม่นยำได้ แสดงดังรูป 2.8(ก)

หากเรานำสมการ (8a) ไปลบออกจากสมการ (5a) เราจะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i) + \frac{2h^3}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (11a)$$

ซึ่งเราสามารถหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง  $x_i$  ได้คือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{h^2}{3!} f'''(x_i) + \dots \quad (12a)$$

## สำนักหอสมุดกลาง ธรรมศาสตร์

หรือเขียนได้ว่า

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h} + O(h^2) \quad (13a)$$

สมการ(13a) นี้ เรียกว่าเป็นสมการผลต่างแบ่งย่อยแบบตรงกลาง (Central divided-difference) ที่ให้ความผิดพลาดอันดับ  $h^2$  ซึ่งต่างจากค่าความผิดพลาดที่เกิดขึ้นในสมการของ 2 แบบ ที่แล้วที่อยู่ในอันดับ  $h$  ลักษณะของค่าอนุพันธ์ที่เกิดขึ้นจากสมการผลต่างการแบ่งย่อยแบบตรงกลางนี้ได้เปรียบเทียบกับค่าอนุพันธ์แม่นยำตรงแสดงในรูป 2.8 (ข)

ในการหาค่าอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไป เช่น การหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง เราสามารถทำได้เช่นกัน โดยเริ่มจากอนุกรมเทย์เลอร์ที่ใช้คำนวณฟังก์ชันที่ตำแหน่ง  $x_{i+2}$  จากค่าต่าง ๆ ที่  $x$ , ดังนี้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + 2hf'(x_i) + \frac{(2h)^2}{2!} f''(x_i) + \dots \quad (14a)$$

หากเราเอา 2 คูณกับสมการ (5a) แล้วลบออกจากสมการ (14a) นี้ จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + h^2 f''(x_i) + \dots \quad (15a)$$

ซึ่งก่อให้เกิดการหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง ดังนี้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (16a)$$

จากสมการ (7a) นี้เรียกว่าสมการผลต่างจากการแบ่งย่อยไปข้างหน้าอันดับที่สอง (second forward divided-difference) สมการอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงขึ้นไปสามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยใช้วิธีในทำนองเดียวกัน รวมทั้งอนุพันธ์อันดับต่างๆ เนื่องจากการแบ่งย่อยแบบย้อนหลังและแบบตรงกลาง

### 2.2.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยสำหรับปัญหาต่าง ๆ นั้นมีความหลากหลายและอยู่ในรูปแบบที่แตกต่างกัน และเพื่อเป็นการทำความเข้าใจระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในระดับพื้นฐาน เราจะศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสองที่อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

โดย  $a, b, c$  อาจเป็นค่าคงที่หรือฟังก์ชันของ  $x$  และ  $y$  ส่วน  $f$  อาจเป็นค่าคงที่ที่เป็นฟังก์ชันของ  $x, y, u, \partial u / \partial x$  และ  $\partial u / \partial y$  เราสามารถแยกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับย่อยชนิดต่างๆ ดังต่อไปนี้

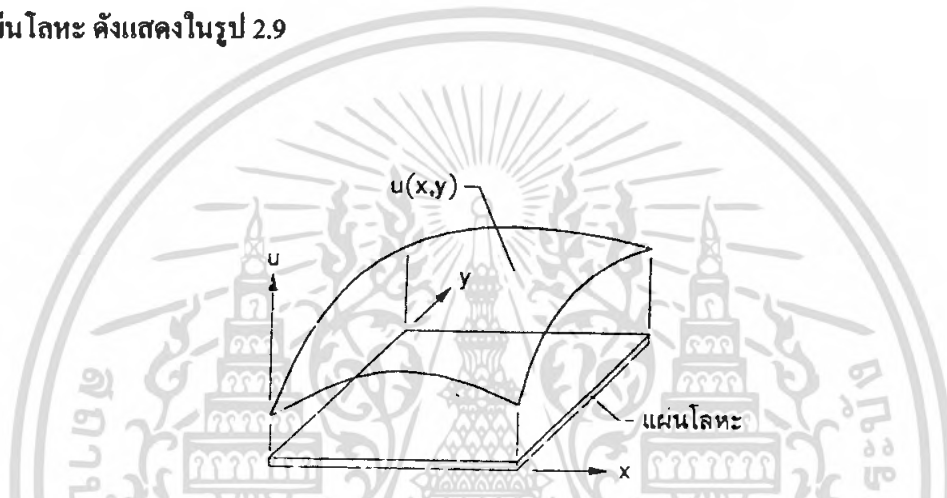
81597

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.2.1 สมการเอลลิปติก (elliptic equation) ตัวอย่างของสมการในกรณีเช่นนี้ ได้แก่ สมการของลาปลาซ (Laplace's equation) ซึ่งมีรูปแบบ ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

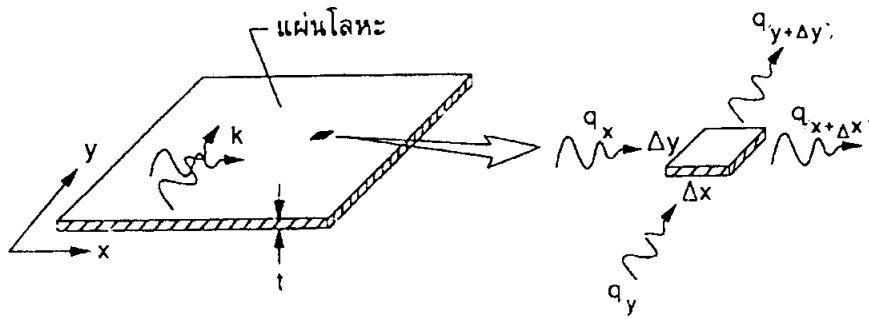
สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมีรูปแบบเช่นนี้โดยปกติจะอธิบายสถานะอยู่ตัวของปัญหานั้น ยกตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการนำความร้อนในแผ่นโลหะนั้นอยู่ในรูปแบบของสมการ (2) นี้ โดยตัวแปรต้น  $x$  และ  $y$  แทนโคออร์ดิเนตในทิศแกน  $x$  และ  $y$  ของแผ่นโลหะ และ  $u$  แทนอุณหภูมิซึ่งเป็นตัวแปรที่เป็นตัวแปรที่เปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่ง  $x$  และ  $y$  ต่างๆ ของแผ่นโลหะ ดังแสดงในรูป 2.9



รูปที่ 2.9 การคำนวณอุณหภูมิภายใต้สถานะอยู่ตัวในแผ่นโลหะจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบเอลลิปติก

#### - สมการเชิงอนุพันธ์

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในการใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่องซึ่งใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่อยู่ในรูปแบบของสมการเอลลิปติก เราจะมาพิจารณาปัญหาที่มีความหมายทางกายภาพ ซึ่งมีหลายปัญหาที่เราเคยศึกษาและพบเห็นอยู่เสมอ ปัญหาหนึ่งที่ยากเพื่อให้ง่ายแก่การทำความเข้าใจรวมทั้งจะใช้ในการอธิบายวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอลลิปติก ปัญหาที่เราจะนำมาพิจารณาเป็นตัวอย่างในที่นี้คือ ปัญหาการคำนวณลักษณะการกระจายของอุณหภูมิเนื่องจากการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัวในสองมิติบนแผ่นโลหะ ดังรูป 2.10



รูปที่ 2.10 การถ่ายเทความร้อนโดยการนำในแผ่นโลหะ

รูป 2.10 แสดงการถ่ายเทความร้อนด้วยการนำ (Conduction) ภายใต้สถานะอยู่ตัว (steady-state) ในแผ่นโลหะที่มีสัมประสิทธิ์การนำความร้อน เท่ากับ  $k$  โดยแผ่นโลหะมีความหนาเท่ากับ  $t$  สำหรับปัญหานี้เราสามารถประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ได้จากพิจารณาเอลิเมนต์ (element) เล็กๆ ทางด้านขวาของรูป 2.10 นี้ โดยใช้หลักความเป็นจริงของการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะอยู่ตัวที่ว่า

$$\text{ปริมาณความร้อนเข้า-ปริมาณความร้อนออก} = 0 \quad (3)$$

นั่นคือ

$$(q_x + q_y) - (q_{x+\Delta x} + q_{y+\Delta y}) = 0 \quad (4)$$

โดย  $q$  แทนปริมาณความร้อนที่ไหลในทิศทางโคออร์ดิเนต  $x$  หรือ  $y$  ดังแสดงในรูป ปริมาณความร้อนนี้ขึ้นอยู่กับสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของแผ่น โลหะชนิดนั้นๆ รวมทั้งพื้นที่หน้าตัดที่มีความร้อนไหลผ่านและความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ดังนี้

$$q_x = -k(t\Delta y)\frac{\partial T}{\partial x} \quad (5a)$$

$$q_y = -k(t\Delta x)\frac{\partial T}{\partial y} \quad (5b)$$

แทนสมการ (5a-5b) ลงในสมการ (4) และประยุกต์อนุกรมเทเลอร์ เราได้

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) t\Delta x\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) t(\Delta x)^2 \Delta y + \dots \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) t\Delta x\Delta y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) t(\Delta y)^2 \Delta y + \dots = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

จากนั้นทำการหารสมการ (6) ด้วย  $t\Delta x\Delta y$  แล้วจึงให้  $\Delta x \rightarrow 0$  และ  $\Delta y \rightarrow 0$  เราจะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0 \quad (7)$$

หากเราสมมติให้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $k$  นั้นคงที่โดยไม่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิ และไม่ขึ้นกับตำแหน่ง  $x, y$  บนแผ่นโลหะนั้น เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบของสมการเชิงเส้นดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

ในกรณีเช่นนี้ สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบของสมการ (8) จะยังคงอยู่ในรูปแบบของสมการเอลลิปติกโดยมีลักษณะเปลี่ยนแปลงไปเพียงเล็กน้อย ดังนี้

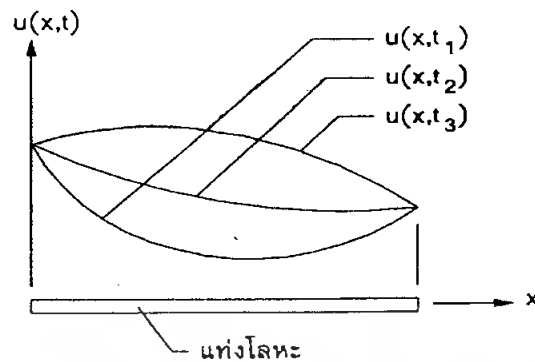
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (9)$$

โดย  $f(x, y)$  แทนฟังก์ชันใดๆ ที่อาจแปรผันกับโคออร์ดิเนต  $x$  และ  $y$  หรือในบางครั้งอาจเป็นเพียงค่าคงที่ค่าหนึ่ง สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบของสมการ (9) นี้ เรียกว่า สมการปัวร์ซอง (Poisson equation)

**2.2.2.2 สมการพาราโบลา (Parabolic equation)** ตัวอย่างของสมการในกรณีเช่นนี้ง่ายแก่การทำความเข้าใจ คือสมการของการถ่ายเทความร้อนในแท่งโลหะยาวที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10)$$

โดย  $k$  แทนสภาพการนำความร้อนซึ่งขึ้นอยู่กับชนิดของโลหะ  $u$  แทนลักษณะการกระจายของอุณหภูมิซึ่งเป็นตัวแปรตามที่ยื่นอยู่กับตัวแปรต้นอันประกอบด้วยโคออร์ดิเนต  $x$  ตามแนวความยาวของแท่งโลหะ และเวลา  $t$  ที่ผ่าน ไปดังแสดงในรูป 2.11



รูปที่ 2.11 การคำนวณการกระจายของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาในแท่งโลหะยาวจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบพาราโบลา

- สมการเชิงอนุพันธ์

รูปแบบของสมการพาราโบลาเกิดขึ้นกับปัญหาหลายชนิด ยกตัวอย่างปัญหาที่ง่ายแก่การเข้าใจซึ่งจะใช้อธิบายในหัวข้อนี้คือ ปัญหาของการถ่ายเทความร้อนในแท่งโลหะภายใต้สถานะไม่อยู่ตัว รูป 2.12 แสดงลักษณะการถ่ายเทความร้อนในแท่งโลหะซึ่งวางตัวตามแนวแกน  $x$  โดยอุณหภูมิตามตำแหน่งต่างๆ นั้นเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา  $t$



รูปที่ 2.12 การถ่ายเทความร้อนโดยการนำในแท่งโลหะ

กำหนดให้ แท่งโลหะมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน (thermal conductivity) เท่ากับ  $k$  ค่าความหนาแน่นของมวล (mass density) เท่ากับ  $\rho$  ค่าความร้อนจำเพาะ (specific heat) เท่ากับ  $c$  เราสามารถประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ได้โดยการพิจารณาเอลิเมนต์เล็กๆ ดังแสดงการทำงานทางด้านขวาของรูป 2.12 นี้ โดยใช้หลักความจริงของการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะไม่อยู่ตัวที่ว่า

$$\text{ปริมาณความร้อนเข้า} - \text{ปริมาณความร้อนออก} = \text{ปริมาณความร้อนสะสม} \quad (11)$$

นั่นคือ

$$q_x - q_{x+\Delta x} = \rho c A \Delta x \frac{\partial T}{\partial t} \quad (12)$$

โดย  $q_x$  และ  $q_{x+\Delta x}$  แทนปริมาณความร้อนที่ไหลเข้าและไหลออกผ่านพื้นที่หน้าตัด A ของเอลิเมนต์นี้ตามลำดับ ปริมาณความร้อนดังกล่าวขึ้นอยู่กับความชันของอุณหภูมิ (temperature gradient) ตามกฎของฟูริเยร์ (Fourier's law) ดังนี้

$$q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (13)$$

แทนสมการ (13) ลงในสมการ (12) และประยุกต์อนุกรมเทเลอร์เข้ากับพจน์  $q_{x+\Delta x}$  จะได้

$$kA \frac{\partial T}{\partial x} - \left[ -kA \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Delta x - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) (\Delta x)^2 - \dots \right] = \rho c A \Delta x \frac{\partial T}{\partial t} \quad (14)$$

สองพจน์แรกทางด้านซ้ายของสมการนี้จะหักล้างกันไป จากนั้นทำการหารตลอดด้วย  $A \Delta x$  แล้วจึงให้  $\Delta x \rightarrow 0$  เราจะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (15)$$

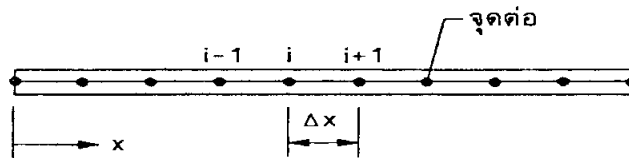
หากเราสมมติให้สัมประสิทธิ์ของการนำความร้อน  $k$  นั้นคงที่โดยไม่เปลี่ยนแปลงไปกับอุณหภูมิ  $T$  และไม่ขึ้นอยู่กับตำแหน่ง  $x$  ใดๆ บนแท่งโลหะนั้น เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปแบบของสมการพาราโบลา ดังนี้

$$\frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

เราจะทำการศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์แบบพาราโบลา ดังแสดงในสมการ (16) นี้หลายระเบียบวิธี เราจะพบ แต่ระเบียบวิธีมีลักษณะขั้นตอนในการแก้ที่มีทั้งข้อดีและข้อเสียแตกต่างกันไป ความเข้าใจในพื้นฐานของขั้นตอนรวมทั้งข้อดีและข้อเสียดังกล่าว จะช่วยให้เราสามารถเลือกใช้ระเบียบวิธีที่เหมาะสมกับสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติที่มีขนาดใหญ่ได้โดยถูกต้องต่อไป

- ระเบียบวิธีชัดเจน (Explicit Method)

คือ การประยุกต์สมการผลต่างสืบเนื่องเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ (16) ซึ่งอธิบายการถ่ายเทความร้อนภายใต้สถานะไม่อยู่ตัว ในตอนแรกเราจะแบ่งแท่งโลหะออกเป็นหลายๆ ส่วน โดยในแต่ละส่วนนั้นมีความยาวเท่ากับ  $\Delta x$  และส่วนต่างๆ เหล่านี้ต่างเชื่อมต่อกันที่จุดต่างๆ โดยใช้สัญลักษณ์  $i-1, i, i+1$  ดังแสดงในรูป 2.13



รูปที่ 2.13 การแบ่งแท่งโลหะออกเป็นหลายส่วนเพื่อใช้กับวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม

ที่จุดต่าง ๆ นี้เองจะเป็นตำแหน่งที่เราจะคำนวณหาค่าของอุณหภูมิ  $T$  ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา  $t$  เราจะประยุกต์วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมเข้ากับสมการเชิงอนุพันธ์ (16) โดยเราจะใช้การประมาณจากผลต่างแบบไปข้างหน้า (forward difference) เข้ากับพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งที่แปรผันกับเวลา ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (17)$$

โดย  $\Delta t$  แทนค่าของช่วงเวลา (time step) และครรขนิบ  $n$  ในสมการ (17) แทนช่วงเวลาครั้งที่  $n$  ในขณะเดียวกัน เราจะประยุกต์การประมาณของผลต่างแบบตรงกลาง (central difference) เข้ากับพจน์อนุพันธ์อันดับที่สองที่แปรผันกับระยะ  $x$  ดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (18)$$

ทั้งสมการ (17) และ (18) นี้เป็นการประมาณค่าที่ตำแหน่งของเวลาครั้งที่  $n$  หากเราแทนสมการทั้งสองนี้กลับลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (16) เราจะได้

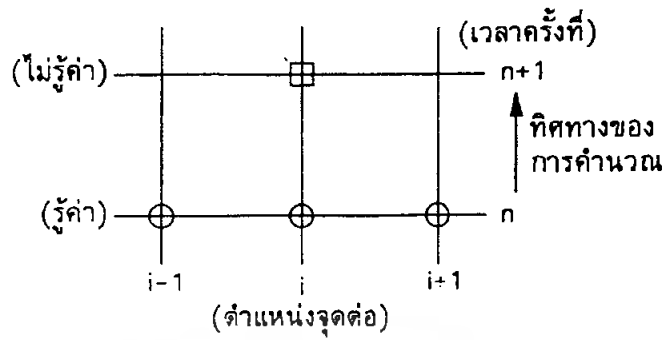
$$\frac{k}{\rho c} \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (19)$$

และหลังจากทำการจัดพจน์ต่างๆ จะก่อให้เกิดสมการเดียวที่สามารถนำไปใช้ในการคำนวณได้โดยตรง คือ

$$T_i^{n+1} = T_i^n + \alpha (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \quad (20)$$

$$\alpha = \frac{k \Delta t}{\rho c (\Delta x)^2} \quad (21)$$

สมการ (20) ที่เกิดขึ้นแสดงให้เห็นว่า อุณหภูมิที่จุดต่อ  $i$  ณ เวลาครั้งที่  $n+1$  สามารถคำนวณได้โดยตรงจากอุณหภูมิของ 3 จุดต่อที่  $i-1, i$  และ  $i+1$  ซึ่งรู้ค่าแล้วจากการคำนวณ ณ เวลาครั้งที่  $n$  ดังแสดงในรูป 2.14



รูปที่ 2.14 แผนภาพการคำนวณโดยระเบียบวิธีซัดแอง

แต่การใช้ระเบียบวิธีนี้เมื่อเงื่อนไขที่ว่า  $\alpha \leq 1/2$  ซึ่งจากสมการ(21) เราจะได้

$$\Delta t \leq \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2k} \quad (22)$$

- ระเบียบวิธีแบบปริยาย (Implicit Method)

เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาการลู่ออกของผลลัพธ์จากระเบียบวิธีแบบซัดแองเนื่องจากการใช้ค่าช่วงเวลา  $\Delta t$  ที่สูงกว่าช่วงเวลาวิกฤต เราจะสามารถใช้วิธีแบบปริยาย ซึ่งหลีกเลี่ยงข้อจำกัดในการใช้ค่าช่วงเวลา  $\Delta t$  ที่ใช้ในการคำนวณข้อแตกต่างระหว่างระเบียบวิธีปริยายกับระเบียบวิธีแบบซัดแองอยู่ ที่การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองที่แปรผันกับระยะ  $x$  ในระเบียบวิธีแบบปริยาย เราจะประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสองนี้ที่ตำแหน่งของเวลารั้งที่  $n+1$  ซึ่งเป็นตำแหน่งที่เรายังไม่ทราบค่าอุณหภูมิใดๆ เลย ในรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} \quad (23)$$

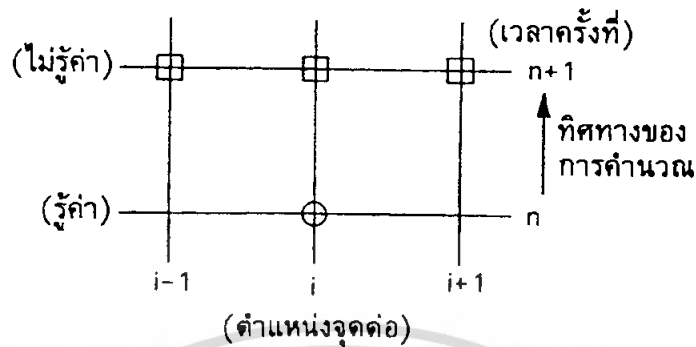
ในทำนองเดียวกัน หากเราแทนสมการ (23) นี้และสมการ (17) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (16) เราจะได้

$$\frac{k}{\rho c} \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (24)$$

หากเราใช้ค่าจำกัดความของค่า  $\alpha$  ดังแสดงในสมการ(21) แล้วทำการจัดพจน์เราจะได้

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\alpha)T_i^{n+1} - \alpha T_{i+1}^{n+1} = T_i^n \quad (25)$$

สมการ (25) นี้ สามารถแสดงโดยแผนภาพในรูป 2.15



รูปที่ 2.15 แผนภาพการคำนวณโดยระเบียบวิธีแบบปริยาย

- ระเบียบวิธีของแครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson Method)

เป็นระเบียบวิธีแบบปริยายอีกวิธีหนึ่งซึ่งให้ค่าความผิดพลาดอันดับสองทั้งกับเวลาและระยะทาง กล่าวคือ ให้ผลลัพธ์เที่ยงตรงมากกว่าระเบียบวิธีแบบปริยาย หลักการของแครงก์-นิโคลสันคือการประมาณพจน์อนุพันธ์อันดับหนึ่งแปรผันกับเวลาที่กึ่งกลางระหว่างช่วงเวลาของการคำนวณครั้งที่  $n$  และ  $n+1$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (26)$$

และทำเช่นเดียวกับพจน์อนุพันธ์อันดับสองที่แปรผันกับระยะทาง ดังนี้

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (27)$$

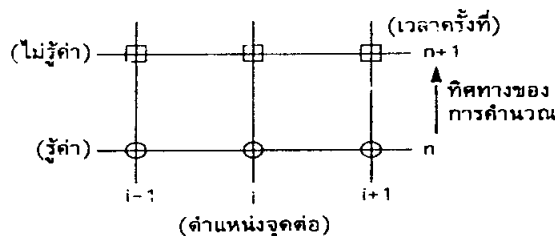
แทนสมการ (26) และ (27) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ (16) เราจะได้

$$\frac{k}{2\rho c(\Delta x)^2} (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1} + T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} \quad (28)$$

แทนค่า  $\alpha$  ซึ่งมีค่าจำกัดความคงแสดงในสมการ (21) แล้วทำการจัดพจน์ จะได้

$$-\alpha T_{i-1}^{n+1} + 2(1 + 2\alpha)T_i^{n+1} - \alpha T_{i+1}^{n+1} = \alpha T_{i+1}^n + 2(1 - \alpha)T_i^n + \alpha T_{i-1}^n \quad (29)$$

สมการ (29) นี้สามารถแสดงโดยแผนภาพในรูป 2.16

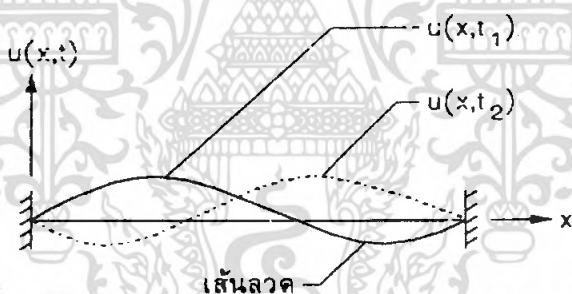


รูปที่ 2.16 แผนภาพการคำนวณโดยระเบียบวิธีของแครงก์-นิโคสัน

2.2.2.3 สมการไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic equation) ตัวอย่างของสมการคือ สมการการสั่นของเส้นลวดซึ่งขึงตึงที่ปลายทั้งสองข้าง รูปแบบของสมการดังกล่าวคือ

$$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (30)$$

โดย  $k^2$  แทนความตึงในเส้นลวดซึ่งมีค่าเป็นบวกเสมอ  $u$  แทนการเคลื่อนตัวของเส้นลวดซึ่งเป็นฟังก์ชันกับเวลา  $t$  ในทิศตั้งฉากกับความยาวของขดลวดที่อยู่ในแนวแกน  $x$  ดังแสดงในรูปที่ 2.17

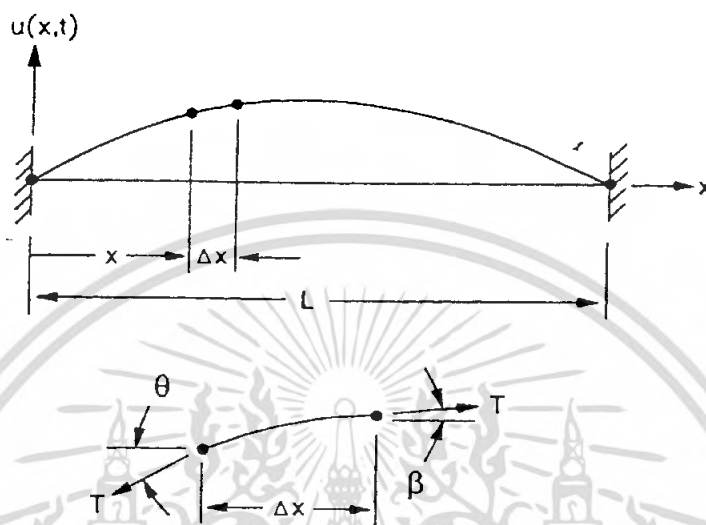


รูปที่ 2.17 การคำนวณการเคลื่อนตัวเนื่องจากการสั่นของเส้นลวดจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไฮเปอร์โบลิก

#### - สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบของสมการไฮเปอร์โบลิกทั่วไปจะแก้ปัญหาที่ผลลัพธ์มีลักษณะแพร่กระจาย (propagation) จากตำแหน่งหนึ่งไปยังอีกตำแหน่งหนึ่ง เช่น การสั่นของเส้นลวดซึ่งขึงตึงที่ปลายทั้งสองข้าง การเคลื่อนตัวของคลื่นช็อกในท่อ การสั่นของอนุตามแนวแกนของแท่งโลหะยาว เป็นต้น

เพื่อทำความเข้าใจเบื้องต้นในระเบียบวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบไฮเปอร์โบริก เราจะมาศึกษาปัญหาการสั่นของเส้นลวดที่มีความยาว  $L$  และถูกขึงตึงที่ปลายทั้งสองด้าน ดังแสดงในรูป 2.18



รูปที่ 2.18 การสั่นของเส้นลวดและการพิจารณาเอลิเมนต์ช่วงสั้นเพื่อใช้ในการประดิษฐ์สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ของการสั่น  $u(x,t)$  ในทิศทางฉากกับความยาวของลวดในแนวแกน  $x$  ซึ่งเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา  $t$  สามารถประดิษฐ์ขึ้นได้โดยการพิจารณาเอลิเมนต์สั้นๆ ในรูป 2.18 สำหรับการสั่นที่มีการเคลื่อนที่น้อยนั้น แรงตึงในเส้นลวดที่เปลี่ยนแปลงไปจากการสั่นจะมีค่าน้อยเมื่อเปรียบเทียบกับแรงตึงเริ่มแรก ดังนั้นเราจึงอาจสมมุติได้ว่าแรงตึง  $T$  ในเส้นลวดนั้นมีค่าคงที่ตลอดความยาวของเส้นลวดดังแสดงโดยรูปเล็กของรูป 2.18 และจากการสั่นที่มีการเคลื่อนที่น้อยนี้เอง เราสามารถสมมุติได้อีกว่ามุม  $\theta$  และ  $\beta$  นั้นมีค่าน้อย ยิ่งไปกว่านั้น หากแรงตึงในเส้นลวดนั้นมีค่าสูงกว่านั้นน้ำหนักของเส้นลวดมากเราอาจจะไม่มีแรงเนื่องจากน้ำหนักของเส้นลวดเข้ามาร่วมในการคำนวณด้วย ดังนั้น หากเราประยุกต์กฎข้อที่สองของนิวตันในทิศทางการสั่นเข้ากับเอลิเมนต์ช่วงสั้นในรูปเล็กของรูป 2.18 เราจะได้

$$T \sin \beta - T \sin \theta = \frac{w}{g} (\Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (31)$$

โดย  $w$  แทนน้ำหนักของเส้นลวดต่อหน่วยความยาว และ  $g$  แทนค่าความเร่งจากแรงโน้มถ่วง (Gravitation constant) หากมุม  $\theta$  และ  $\beta$  ต่างมีค่าน้อยแล้ว เราสามารถประมาณค่า  $\sin \theta = \tan \theta$

และ  $\sin \beta = \tan \theta$  ดังนั้นสมการ(31) จึงกลายเป็น

$$T \sin \beta - T \tan \theta = \frac{w}{g} (\Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (32)$$

แต่เนื่องจาก  $\tan \beta$  และ  $\tan \theta$  มีความหมายคือความชันที่ปลายทั้งสองของเอलिเมนต์ ดังนั้นเราจึงสามารถเขียนสมการ (32) ได้เป็น

$$T \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right) = \frac{w}{g} \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (33)$$

หรือ

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x}{\Delta x} = \frac{w}{Tg} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (34)$$

ดังนั้นหากเราให้  $\Delta x \rightarrow 0$  สมการ (34) จะกลายเป็น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{w}{Tg} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (35)$$

หรือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (36)$$

โดย

$$k^2 = \frac{Tg}{w} \quad (37)$$

สมการ (36) เป็นรูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์แบบไฮเปอร์โบริกใน 1 มิติ โดย  $k^2$  นั้นมีค่าเป็นบวกเสมอ

## 2.3 ทฤษฎีโปรแกรม MATLAB

โปรแกรม MATLAB ซึ่งเป็นโปรแกรมทางการคำนวณและวิเคราะห์ตัวเลขทางคณิตศาสตร์และวิศวกรรม เป็น โปรแกรมที่ได้รับความนิยมค่อนข้างมาก สำหรับความรู้พื้นฐานของ MATLAB ที่ควรจะทราบ มีดังนี้

### 1. MATLAB (matrix laboratory) คืออะไร

โปรแกรม MATLAB เป็นโปรแกรมทางการคำนวณ ทางด้านตัวเลข ทางด้านกราฟิกที่มีความซับซ้อนที่เกี่ยวกับ งานทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมขั้นสูง ทำให้การคำนวณที่ยุ่งยากกลายเป็นเรื่องง่าย แทนที่จะต้อง ไปเขียนโปรแกรมเช่นภาษาซี , พอร์แทรน หรือปาสคาล

## 2. คุณสมบัติเด่นของ MATLAB

สำหรับคุณสมบัติเด่นของโปรแกรม MATLAB จะมีดังนี้

### 2.1 Math and computation

ฟังก์ชันคณิตศาสตร์ให้เลือกใช้ในการคำนวณมากมายตลอดจนเราสามารถสร้างฟังก์ชันขึ้นมาใช้งานได้เองในสาขาที่ต้องการ

### 2.2 Algorithm development

Algorithm พัฒนาได้ง่ายไม่ยุ่งยาก สามารถแก้ปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนได้ง่าย และรวดเร็วกว่าโปรแกรมภาษาอื่นๆ เช่น C, Fortran, Basic เป็นต้น

### 2.3 Modeling, simulation, and prototyping

มีโครงสร้างแบบจำลอง (Simulink) ซึ่งเป็น package ที่เรานำไปสร้างบล็อกไดอะแกรมเพื่อใช้ทดสอบ และประเมินผลระบบ Dynamic ต่างๆ ก่อนนำไปใช้งานจริง

### 2.4 Data analysis, exploration, and visualization

สามารถวิเคราะห์และตรวจสอบข้อมูลได้ง่ายและรวดเร็ว

### 2.5 Scientific and engineering graphics

นำไปใช้งานทางด้านกราฟิกได้เป็นอย่างดีทั้งในด้านการแสดงภาพตั้งแต่สองมิติที่เป็น Rectangular polar stair bar รวมทั้งภาพสามมิติในรูปแบบพื้นผิว (surface) และระดับสูงต่ำ (contour) ตลอดจนสามารถนำภาพมาต่อกัน และเก็บไว้เพื่อที่จะสร้างเป็นภาพเคลื่อนไหวได้อีกด้วย

### 2.6 Application development, including Graphic

ประยุกต์ใช้ในการสร้างรูปแบบ Graphical User Interface ได้โดยการเลือกใช้ object และเมนูต่างๆ โดยโปรแกรม MATLAB จะมีเครื่องมือให้เลือกนำไปใช้ในการทำงานปฏิสัมพันธ์กันระหว่างผู้ใช้กับเครื่องมือคอมพิวเตอร์ได้

ทำการประมวลผลร่วมกับโปรแกรมอื่นได้ เช่น Fortran , Borland C/C++ , Microsoft Visual C++ และ Whatcom C/C++ ด้วยการเขียนฟังก์ชันที่เป็น mex ไฟล์โดยโปรแกรม MATLAB จะเรียกใช้รูทีนจากโปรแกรมภาษา C และ Fortran

โปรแกรม MATLAB เป็นระบบ interactive ซึ่งส่วนของข้อมูลพื้นฐานเป็นอาร์เรย์ที่ไม่ต้องการมิติ ทำให้โปรแกรม MATLAB สามารถทำการแก้ปัญหาทางเทคนิคต่างๆ ได้มาก ใช้เวลาในการประมวลผลน้อย และคิดว่าโปรแกรมภาษา C และ Fortran

## 3. โครงสร้างของ MATLAB

โครงสร้างของโปรแกรม MATLAB ประกอบด้วย 5 ส่วนใหญ่ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.1 ภาษาโปรแกรม MATLAB (The MATLAB language)

MATLAB เป็นโปรแกรมภาษาขั้นสูงที่ใช้ควบคุม flow statements ฟังก์ชัน โครงสร้าง ข้อมูลอินพุท/เอาต์พุท และลักษณะโปรแกรม Object-Oriented Programming ทำให้การเขียนโปรแกรมไม่ยุ่งยากเมื่อเทียบกับการเขียนโปรแกรมด้วยภาษาอื่นๆ เช่น C, Fortran ,Basic เป็นต้น

### 3.2 สภาพแวดล้อมในการทำงานของMATLAB (The MATLAB Working environment)

MATLAB จะมีกลุ่มของเครื่องมือที่เป็นประโยชน์สำหรับการทำงานของผู้ใช้โปรแกรม หรือโปรแกรมเมอร์ ประโยชน์ที่กล่าวนี้คือการจัดการตัวแปรใน workspace การนำข้อมูลหรือการผ่านค่าตัวแปรเข้า/ออก และกลุ่มของเครื่องมือต่างๆ นี้ก็จะใช้สำหรับพัฒนา จัดการ ตรวจสอบความผิดพลาดของโปรแกรม (debugging) ที่ได้เขียนขึ้น

### 3.3 ฟังก์ชันในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ (The MATLAB mathematical function library)

MATLAB จะมีไลบรารีทั่วไปที่ใช้ในการคำนวณอย่างกว้างขวาง เช่น sine , cosine และ พหุนามเชิงซ้อน โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้เป็นฟังก์ชันหรือไลบรารีเพิ่มเติมขึ้นจากไลบรารีที่ใช้กันโดยทั่วไป เช่น ฟังก์ชันในการหา eigenvalues และ eigenvectors การแยกตัวประกอบและ ส่วนประกอบของเมทริกซ์ด้วยวิธีต่างๆ การวิเคราะห์ข้อมูล การหาความน่าจะเป็น และการแก้ปัญหาของระบบเชิงเส้นที่เป็นพื้นฐานของสาขาวิชาต่างๆ เป็นต้น ทำให้โปรแกรม MATLAB มี ฟังก์ชันในการใช้งานค่อนข้างมากและครอบคลุมในรายละเอียดของการคำนวณในสาขาวิชาต่างๆ มากขึ้น

### 3.4 Handle Graphics

ระบบกราฟิกของ MATLAB จะประกอบด้วยคำสั่งขั้นสูงสำหรับการพล็อตกราฟโดยมี พื้นฐานอยู่บนแนวความคิดที่ว่าทุกๆ สิ่งบนหน้าต่างรูปภาพของโปรแกรม MATLAB จะเป็นวัตถุ (Object) ซึ่งมีเอกลักษณ์เฉพาะตัว Handle Graphics ประกอบด้วยคำสั่งขั้นสูงให้ได้เลือกใช้ในการ สร้าง Handle User Interface บนพื้นฐานการประยุกต์ใช้งาน นอกจากนี้โปรแกรม MATLAB ยังมี ฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการแสดงภาพสองมิติ ภาพสามมิติและภาพการเคลื่อนไหว

### 3.5 MATLAB Application Program Interface (API)

API จะใช้เพื่อสนับสนุนการติดต่อจากภายนอกโดยใช้โปรแกรมที่เป็น mex ไฟล์ซึ่งเป็น ไฟล์ที่เขียนขึ้นโดยใช้ mex ฟังก์ชันใน MATLAB ซึ่งจะเรียกใช้รูทีนจากโปรแกรมภาษา C และ Fortran หรืออาจกล่าวได้ว่า API เป็นไลบรารีที่เขียนด้วยโปรแกรมภาษา C และ Fortran ที่มีการ เชื่อมต่อกับโปรแกรม MATLAB ด้วยไฟล์ที่เป็น mex ฟังก์ชันอื่นทั้ง MATLAB API ก็ยังมี ความสามารถสำหรับการเรียก routine จาก MATLAB (dynamic linking) ก็ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 3

### วิธีการดำเนินการ

#### 3.1 ศึกษาทฤษฎีคุณสมบัติของรอยต่อพี-เอ็นในสภาวะสมดุล (PN Junction at equilibrium)

รอยต่อพี-เอ็นในสภาวะสมดุล ถูกสร้างขึ้นได้ด้วยวิธีต่างๆ หลายวิธี และจะทำให้ได้รอยต่อที่มีลักษณะต่าง ๆ กัน และเมื่อรอยต่อพี-เอ็นถูกสร้างขึ้น จะเห็นว่าด้านทั้งสองมีความหนาแน่นของพาหะไม่เท่ากันเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดมีแรงกระทำต่อพาหะเป็นเหตุให้พาหะเคลื่อนที่แพร่ไปยังด้านตรงข้าม เพื่อให้ด้านทั้งสองมีความหนาแน่นของประจุพาหะเท่ากัน ดังนั้น พื้นที่ที่เกิดรอยต่อ จะเกิดมีการแพร่ของอิเล็กตรอนและโฮลจากด้านที่มีความหนาแน่นสูงกว่าไปยังด้านที่มีความหนาแน่นต่ำกว่า

ดังที่กล่าวมาจะเห็นว่าการแพร่ของพาหะไปยังด้านตรงข้ามนี้เกิดขึ้นที่บริเวณใกล้ๆ กับรอยต่อเป็นอันดับแรก ดังนั้น ไอออนของอะตอมผู้ให้ และ ไอออนของอะตอมผู้รับซึ่งเป็นประจุที่ไม่สามารถเคลื่อนที่ได้ จึงสามารถแสดงประจุไฟฟ้าออกมาได้ โดยไอออนบวกของอะตอมผู้ให้แสดงประจุไฟฟ้าบวก และ ไอออนลบของอะตอมผู้รับแสดงประจุไฟฟ้าลบ ดังนั้น ทำให้เริ่มมีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นที่บริเวณภายในรอยต่อและเรียกว่า “สนามไฟฟ้าภายใน” (built in electric field)

เนื่องจากช่วงแรกสนามไฟฟ้ามีค่าน้อย แรงจากสนามไฟฟ้าที่ต่อต้านการเคลื่อนที่ของพาหะจึงมีค่าน้อย ทำให้แรงที่เกิดจากการแพร่มีค่ามากกว่า ดังนั้นอิเล็กตรอนและโฮลสามารถแพร่ข้ามรอยต่อได้ต่อไป แต่อัตราการแพร่จะค่อยๆ ลดลง ในขณะที่สนามไฟฟ้าที่รอยต่อจะมีค่าเพิ่มขึ้น จนในที่สุดสนามไฟฟ้าที่รอยต่อจะมีค่ามากพอที่ยับยั้งการแพร่ของอิเล็กตรอน และโฮลได้พอดี ทำให้อิเล็กตรอนและโฮลจึงไม่สามารถแพร่ข้ามรอยต่อได้อีก จึงทำให้เกิดกระแสของพาหะสุทธิเป็นศูนย์เรียกภาวะนี้ว่า “ภาวะสมดุล” หรือ “equilibrium” เนื่องจากพาหะถูกอิทธิพลจากสนามไฟฟ้าพัดพาออกไป ดังนั้นย่านนี้ถูกเรียกว่า “บริเวณปลอดพาหะ” หรือ “depletion region” และการที่เกิดมีสนามไฟฟ้าที่บริเวณรอยต่อ หรือบริเวณปลอดพาหะแสดงว่ามีความต่างศักย์เกิดขึ้นระหว่างด้านพีและด้านเอ็น ความต่างศักย์นี้เรียกว่า “ศักย์สัมผัส” หรือ “Contact potential” หรือบางครั้งเรียกว่า “กำแพงศักย์ภายใน” หรือ “ศักย์ภายใน” (built-in potential barrier or built in potential) ขนาดของศักย์ภายในนี้ ( $V_{bi}$ ) จะขึ้นอยู่กับค่าความหนาแน่นของอะตอมสารเจือที่ด้านทั้งสองของรอยต่อ และอุณหภูมิที่รอยต่อ

### 3.2 ศึกษาศักย์ไฟฟ้าภายในของรอยต่อ (Built-in Potential: $V_{bi}$ หรือ $\psi$ )

จากบทที่ 2 รูปที่ 12 สมการที่ 1-10

### 3.3 สมการปัวร์ซอง(Poisson's Equation)

ในการจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้าของรอยต่อของสารกึ่งตัวนำนั้น ซึ่งจะประกอบด้วยสมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งโดยปกติจะเรียกกันว่าสมการพื้นฐานของสารกึ่งตัวนำ (basic semiconductor equations) ซึ่งสมการเหล่านี้พิสูจน์ได้จากสมการแมกซ์เวล (Maxwell' equation)

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4)$$

เมื่อ

$\vec{H}$  = ความเข้มสนามแม่เหล็ก (Magnetic Field Intensity)

$\vec{B}$  = ความหนาแน่นของเส้นแรงแม่เหล็ก (Magnetic Flux density)

$\vec{E}$  = สนามไฟฟ้า (Electric Field)

$\vec{D}$  = ความหนาแน่นของฟลักซ์ไฟฟ้า (Electric Flux density)

$\vec{J}$  = ความหนาแน่นของกระแส (Current Density)

$\rho$  = ความหนาแน่นของประจุไฟฟ้า (Electric charge density)

สมการปัวร์ซองที่มาจากสมการแมกซ์เวล (3) อย่างไรก็ตามสามารถนำสมการแมกซ์เวลให้มีความสัมพันธ์ระหว่าง Electric Displacement Vector  $\vec{D}$  กับสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (5)$$

โดยที่  $\epsilon$  คือ ค่า Permittivity Tensor

จากนั้นมีความต้องการที่จะให้สนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  มีความสัมพันธ์กับค่าของศักย์ไฟฟ้าสถิต (Electrostatic Potential;  $\psi$ ) โดยการนำสมการ (14) มาหาความสัมพันธ์ดังนี้

$$\vec{E} = -(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0 \quad (6)$$

เมื่อ  $\vec{A}$  คือ Vector Potential

จากนั้นนำสมการที่ (6) แทนลงในสมการที่ (2) จะได้

$$\vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (7)$$

ถ้า " $\vec{\nabla} \times \vec{Z} = 0$ " จากสมการคิฟเฟอร์เนลพื้นฐาน ดังนี้

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \psi \quad (8)$$

จากนั้นนำสมการที่ (8) แทนลงในสมการที่ (5) จะได้

$$\vec{D} = -\epsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \epsilon \cdot \nabla \psi \quad (9)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\epsilon \cdot \nabla \psi) = -\rho \quad (10)$$

ดังนั้นในสมการแรกของสมการที่ (10) เป็นศูนย์เนื่องจากค่า Permittivity สามารถพิจารณาให้เป็น homogeneous ดังนั้น จะได้สมการที่ (10) ขึ้นมาใหม่ซึ่งเรียกว่าสมการปัวร์ของ

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \cdot \nabla \psi) = -\rho \quad (11)$$

ซึ่งค่าความหนาแน่นของประจุสามารถกระจายออกได้ดังสมการที่ (12)

$$\rho = q(p - n + C) \quad (12)$$

เมื่อ  $C$  คือ net ionized impurity concentration ( $N_d^+ - N_a^-$ )  
สุดท้ายนี้จะได้สมการปัวร์ของซึ่งจะใช้ในการวิเคราะห์ดังนี้

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (13)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{q}{\epsilon} (n - p - C) \quad (14)$$

### 3.4 สมการความต่อเนื่อง(Continuity Equations)

สมการความต่อเนื่องที่นำมาใช้สามารถหาได้จากสมการแมกซ์เวลล์ ถ้าใช้ divergence operator ให้กับสมการที่(1) ในบทที่ 2 จะได้ดังนี้

$$\text{จาก } \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (16)$$

ในขณะที่เดียวกันสามารถแบ่งความหนาแน่นกระแส  $\vec{J}$  ให้เป็น  $\vec{J}_p$  และ  $\vec{J}_n$  โดยที่

$\vec{J}_p$  คือความหนาแน่นของกระแสโดยโฮล

$\vec{J}_n$  คือความหนาแน่นของกระแสโดยอิเล็กตรอน

$$\vec{J} = \vec{J}_p + \vec{J}_n \quad (17)$$

จะกำหนดให้ประจุทั้งหมดในชั้นสารกึ่งตัวนำเป็นประจุที่ไม่แปรเปลี่ยนกับเวลาจนกระทั่ง  
อิเล็กตรอนและโฮลจะได้ว่า

$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

จากนั้นนำสมการของค่าความหนาแน่นของประจุและสมการที่(17) มาแทนลงสมการที่  
(15) จะได้ว่า

$$\nabla \cdot (\vec{J}_p + \vec{J}_n) + q \frac{\partial}{\partial t} (p - n) = 0 \quad (19)$$

สามารถกระจายสมการที่(19) ได้เป็น

$$\nabla \cdot \vec{J}_n - q \frac{\partial n}{\partial t} = q \cdot R \quad (20)$$

$$\nabla \cdot \vec{J}_p + q \frac{\partial p}{\partial t} = -q \cdot R \quad (21)$$

โดยที่  $R$  คือค่าการเกิดหรือการรวมตัวของอิเล็กตรอนและโฮล ถ้าค่า  $R$  มีค่าเป็นบวก  
หมายถึงการรวมตัวและถ้าค่า  $R$  เป็นลบหมายถึงการเกิด

### 3.5 หลักการระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method)

วิธีการจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้าของสารกึ่งตัวนำ โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องจะนำสมการ  
ปัวร์ซอง(22) สมการความต่อเนื่องสำหรับอิเล็กตรอน (23) และสมการความต่อเนื่องสำหรับโฮล  
(24) มาเป็นรูปแบบของวิธีผลต่างสืบเนื่อง สำหรับในโครงการพิเศษนี้ได้จำลองคุณสมบัติทาง  
ไฟฟ้าซึ่งทำให้ได้สมการใหม่ดังนี้

$$\lambda^2 \cdot \nabla^2 \psi - (n - p - C) = 0 \quad (22)$$

$$\nabla \cdot (D_n \cdot \nabla n - \mu_n \cdot n \cdot \nabla \psi) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (23)$$

$$\nabla \cdot (D_p \cdot \nabla p + \mu_p \cdot p \cdot \nabla \psi) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (24)$$

### 3.6 หลักการของวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม และการประยุกต์วิธีผลต่างสี่เหลี่ยมกับการวัดคำนวณค่าตัดยี่ พื้นผิวบริเวณรอยต่อพี-เอ็น

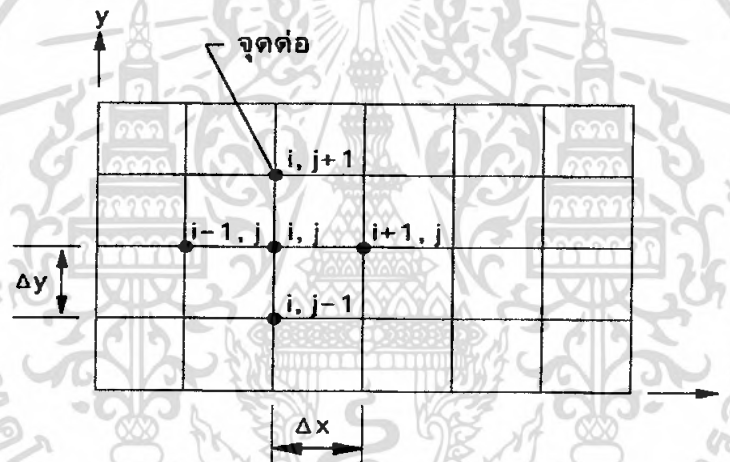
หลักการของวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมจะนำชิ้นสารกึ่งตัวนำมาแบ่งออกเป็นช่วงย่อยๆ ให้มีลักษณะเป็นสี่เหลี่ยม โดยกำหนดให้  $N_X$  คือจำนวนเส้นที่แบ่งบนแกน X และ  $N_Y$  คือจำนวนเส้นที่แบ่งบนแกน Y ซึ่งจะมีจุดตัดบนสารกึ่งตัวนำเท่ากับ  $N_X \cdot N_Y$  จุด ซึ่งจะเป็นจำนวนจุดที่ต้องการหาสำหรับสมการ (22), (23) และ (24)

จากสมการที่(22) ซึ่งเป็นสมการปัวร์ของ จะ ได้

$$\lambda^2 \cdot \nabla^2 \psi - (n - p - C) = 0$$

หรือ

$$\lambda^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - (n - p - C) = 0 \quad (25)$$



รูปที่ 3.1 การแบ่งสารกึ่งตัวนำออกเป็นตารางสี่เหลี่ยม

ดังนั้นจากรูป 3.1 เมื่อเราทำการประมาณค่าผลต่างแบบตรงกลาง (Central difference) จะ ได้

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (26)$$

และ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \quad (27)$$

จะได้

$$\lambda^2 \left( \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right) - n_{i,j} + p_{i,j} + C_{i,j} = 0 \quad (28)$$

ให้  $\rho = \frac{q}{\varepsilon}(n - p - C)$  โดยที่  $\varepsilon = K, \varepsilon_0$

เมื่อจัดรูปสมการจะได้สมการปัวร์ของ ดังนี้

$$\lambda^2 \left[ (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j} + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j} + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1} + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1} - 2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \psi_{i,j} \right] = \rho \cdot (\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2 \quad (29)$$

จากสมการที่ (23) เป็นสมการความต่อเนื่องสำหรับอิเล็กตรอน

$$\vec{\nabla} \cdot (D_n \cdot \nabla n - \mu_n \cdot n \cdot \nabla \psi) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial n}{\partial t}$$

จะได้

$$(D_n \cdot \nabla^2 n - \mu_n \cdot n \cdot \nabla^2 \psi) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (30)$$

$$D_n \left( \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right) - \mu_n \cdot n \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial n}{\partial t} \quad (31)$$

โดยใช้การประมาณจากผลต่างแบบตรงกลาง (Central difference)

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{n_{i+1,j}^n - 2n_{i,j}^n + n_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (32)$$

และ

$$\frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = \frac{n_{i,j+1}^n - 2n_{i,j}^n + n_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (33)$$

จากการประมาณผลต่างแบบไปข้างหน้า (Forward difference)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{n_{i,j}^{n+1} - n_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (34)$$

แทนสมการที่ (26),(27)และสมการที่ (32)-(34) แทนลงในสมการที่ (31) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D_n \left( \frac{n_{i+1,j}^n - 2n_{i,j}^n + n_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{n_{i,j+1}^n - 2n_{i,j}^n + n_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) - \mu_n \cdot n \left( \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) - R_{i,j}(\psi, n, p) = \frac{n_{i,j}^{n+1} - n_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (35)$$

จะได้

$$D_n \left[ \frac{(\Delta y)^2 \cdot n_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot n_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j-1}^n - 2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot n_{i,j}^n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \right] - \mu_n \cdot n_{i,j}^n \left[ \frac{(\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1}^n - 2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \psi_{i,j}^n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \right] - R_{i,j}(\psi, n, p) = \frac{n_{i,j}^{n+1} - n_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (36)$$

เมื่อทำการจัดรูปสมการจะได้

$$\frac{D_n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t \cdot \left( (\Delta y)^2 \cdot n_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot n_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j-1}^n - 2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot n_{i,j}^n \right) - \frac{\mu_n \cdot n_{i,j}^n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t \cdot \left( (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1}^n - 2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \psi_{i,j}^n \right) - R_{i,j}(\psi, n, p) = n_{i,j}^{n+1} - n_{i,j}^n \quad (37)$$

ให้  $k_1 = \frac{D_n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t$  และ  $k_2 = \frac{\mu_n \cdot n_{i,j}^n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t$  แทนค่า  $k_1$  และ  $k_2$  ในสมการที่ (37)

$$k_1 \left( (\Delta y)^2 \cdot n_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot n_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j-1}^n - 2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot n_{i,j}^n \right) - k_2 \left( (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1}^n - 2((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) \cdot \psi_{i,j}^n \right) - R_{i,j}(\psi, n, p) = n_{i,j}^{n+1} - n_{i,j}^n \quad (38)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นจะได้สมการความต่อเนื่องของอิเล็กทรอนิกส์ ดังนี้

$$\begin{aligned} n_{i,j}^{n+1} = & n_{i,j}^n + k_1 \left( (\Delta y)^2 \cdot n_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot n_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot n_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \cdot n_{i,j}^n \right) \\ & - k_2 \left( (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \cdot \psi_{i,j}^n \right) \\ & - R_{i,j}(\psi, n, p) \end{aligned} \quad (39)$$

สมการที่(24) เป็นสมการความต่อเนื่องของโฮล

$$\bar{\nabla} \cdot (D_p \cdot \nabla p + \mu_p \cdot p \cdot \nabla \psi) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

จะได้

$$(D_p \cdot \nabla^2 p + \mu_p \cdot p \cdot \nabla^2 \psi) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (40)$$

$$D_p \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \mu_p \cdot p \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - R(\psi, n, p) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (41)$$

ใช้การประมาณจากผลต่างแบบตรงกลาง (Central difference)

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \quad (42)$$

และ

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \quad (43)$$

จากการประมาณผลต่างแบบไปข้างหน้า (Forward difference)

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (44)$$

และจากสมการที่ (26) และ (27) แทนลงในสมการที่ (41) จะได้

$$\begin{aligned} D_p \left( \frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) - \mu_p \cdot p \left( \frac{\psi_{i+1,j}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \\ R_{i,j}(\psi, n, p) = \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{D_p}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t \cdot \left( (\Delta y)^2 \cdot p_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot p_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot p_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot p_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \cdot p_{i,j}^n \right) \\ & - \frac{\mu_p \cdot p_{i,j}^n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t \cdot \left( (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \psi_{i,j}^n \right) \\ & - R_{i,j}(\psi, n, p) = p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n \end{aligned} \quad (46)$$

เมื่อทำการจัดรูปสมการจะได้

$$\begin{aligned} & k_1 \left( (\Delta y)^2 \cdot p_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot p_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot p_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot p_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \cdot p_{i,j}^n \right) \\ & - k_2 \left( (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \psi_{i,j}^n \right) - R_{i,j}(\psi, n, p) \\ & = p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n \end{aligned} \quad (47)$$

ให้  $k_1 = \frac{D_p}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t$  และ  $k_2 = \frac{\mu_p \cdot p_{i,j}^n}{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2} \cdot \Delta t$  แทนค่า  $k_1$  และ  $k_2$  ลงในสมการที่ (44)

จากนั้นจะได้สมการความต่อเนื่องของโหนด ดังนี้

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n+1} &= p_{i,j}^n + k_1 \left( (\Delta y)^2 \cdot p_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot p_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot p_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot p_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \cdot p_{i,j}^n \right) \\ & - k_2 \left( (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i+1,j}^n + (\Delta y)^2 \cdot \psi_{i-1,j}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j+1}^n + (\Delta x)^2 \cdot \psi_{i,j-1}^n - 2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \cdot \psi_{i,j}^n \right) \\ & - R_{i,j}(\psi, n, p) \end{aligned} \quad (48)$$

ซึ่งจะนำสมการปัวร์ของ สมการที่(29) สมการความต่อเนื่องของอิเล็กตรอน สมการที่ (39) สมการความต่อเนื่องของโหนด สมการที่(48) ไปประยุกต์ใช้กับโปรแกรม MATLAB

## บทที่ 4

### ผลการทดลองและอภิปรายผล

ในโครงงานพิเศษฉบับนี้ได้ทำการทดลองคำนวณค่าศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อพี-เอ็น ของสารกึ่งตัวนำ ซึ่งมีการแบ่งชั้นสารกึ่งตัวนำออกเป็นส่วนย่อยๆ ขึ้นกับความละเอียดในการคำนวณ โดยใช้โปรแกรม MATLAB ทำการคำนวณโดยสามารถกำหนดเงื่อนไขของความหนาแน่นอะตอมของสารเจือและพาหะได้

#### 4.1 การประยุกต์วิธีผลต่างสืบเนื่อง

ในโครงงานพิเศษนี้จะใช้วิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference) มาประยุกต์เข้ากับสมการ-ปัวร์ของ สมการความต่อเนื่องของอิเล็กตรอนและสมการความต่อเนื่องของโฮล โดยได้ทำการแบ่งชั้นสารกึ่งตัวนำออกเป็นส่วนย่อยๆ ซึ่งเรียกว่า mesh โดยได้กำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นไว้ก่อนที่จะทำการประมวลผลโดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งมีดังนี้

#### ค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในโปรแกรม

- l1 คือ ความกว้างของสารกึ่งตัวนำในแนวแกน  $x$  ในหน่วยเซนติเมตร
- l2 คือ ความยาวของสารกึ่งตัวนำในแนวแกน  $y$  ในหน่วยเซนติเมตร
- n1 คือ จำนวนช่องของสารกึ่งตัวนำในแนวแกน  $x$
- n2 คือ จำนวนช่องของสารกึ่งตัวนำในแนวแกน  $y$
- $N_A$  คือ อะตอมผู้รับ ( Acceptor atom )
- $N_D$  คือ อะตอมผู้ให้ ( Donor atom )
- $n_i$  คือ ค่า Intrinsic Carrier Concentration
- $n_0$  คือ ความหนาแน่นของอิเล็กตรอน
- $p_0$  คือ ความหนาแน่นของโฮล
- $D_n$  คือ สัมประสิทธิ์การแพร่สำหรับอิเล็กตรอน (electron's diffusion coefficient)
- $D_p$  คือ สัมประสิทธิ์การแพร่สำหรับโฮล (hole's diffusion coefficient)
- $\Delta x$  คือ ระยะห่างของ node ของการแบ่งสารกึ่งตัวนำในแนวแกน  $x$
- $\Delta y$  คือ ระยะห่างของ node ของการแบ่งสารกึ่งตัวนำในแนวแกน  $y$
- $\Delta t$  คือ Step เวลาที่ใช้ไปในหน่วยวินาที

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\mu_n$  คือ สภาพคล่องของอิเล็กตรอน (electron's mobility)

$\mu_p$  คือ สภาพคล่องของโฮล (hole's mobility)

$k_s$  คือ ค่าคงที่ไดอิเล็กตริกของสารกึ่งตัวนำ

$\epsilon_0$  คือ ค่า Permittivity ของสุญญากาศ

ค่าคงที่ในการกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นมีดังนี้

$$N_A = 1 \times 10^{18} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_D = 5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

$$n_i = 1.45 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$D_n = 34.9313 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$D_p = 12.42 \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$\mu_n = 1.35 \times 10^3 \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

$$\mu_p = 480 \text{ cm}^2/\text{Vs}$$

$$q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$T = 300 \text{ K}$$

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-14} \text{ F/m}$$

## 4.2 ผลการทดลอง

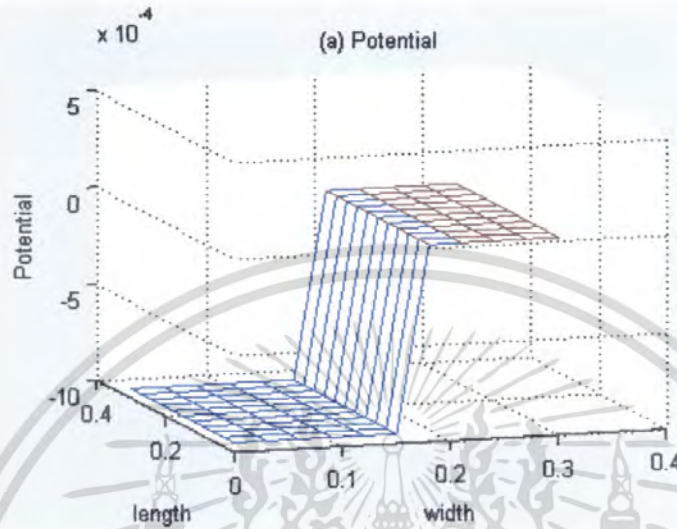
ในการทดลองการจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้า 2 มิติ โดยที่จะแบ่งระยะห่างระหว่าง mesh ตามแนวแกน  $x$  และแนวแกน  $y$  ซึ่งในการทดลองจะไม่มีกรรป้อนแรงดันจากภายนอก ซึ่งจะได้ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้า ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนและความหนาแน่นของโฮลของสารกึ่งตัวนำ

### 4.2.1 การทดลองการจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้า 2 มิติ

โดยในการทดลองครั้งนี้ได้กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นของสารกึ่งตัวนำไว้ดังต่อไปนี้

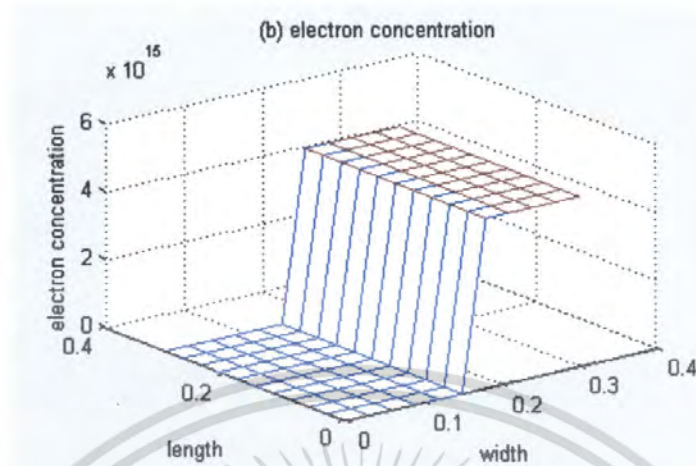
$$l_1 = 0.3 \text{ cm}, l_2 = 0.3 \text{ cm}, n_1 = 10, n_2 = 10, \Delta t = 5 \times 10^{-16} \text{ s}$$

1. ขณะที่อิเล็กตรอนและโฮลเกิดการแพร่ข้ามรอยต่อของสารกึ่งตัวนำที่เวลา  $t = 5 \times 10^{-16} \text{ s}$

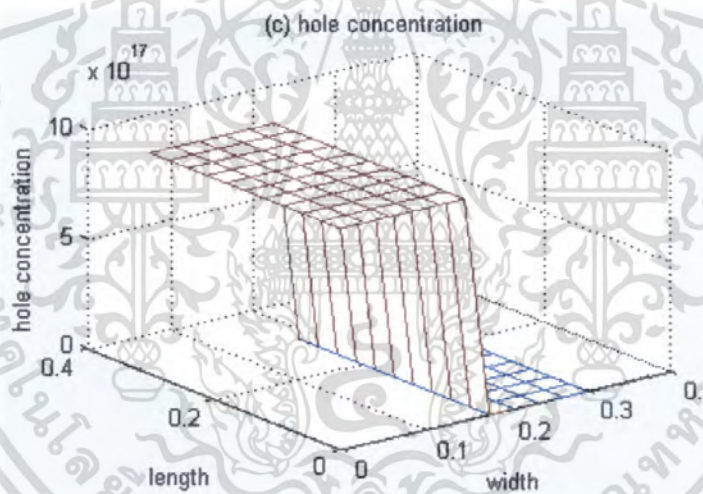


รูปที่ 4.1 ผลของความต่างศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.1 จะเห็นว่าที่เวลา  $t = 5 \times 10^{-16} \text{ s}$  ซึ่งเป็นช่วงเริ่มต้นของการแพร่ของพาหะ ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อของสารกึ่งตัวนำประมาณ  $1.34 \times 10^{-5}$  โวลต์ เมื่อพิจารณาในแนวแกน  $x$  ที่ระยะประมาณ 0 ถึง 0.15 เซนติเมตร จะเป็นสารกึ่งตัวนำชนิดพี และที่ระยะ 0.2 ถึง 0.3 เซนติเมตร จะเป็นสารกึ่งตัวนำชนิดเอ็น ในช่วงแรกยังมีการเพิ่มขึ้นของค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าเพียงเล็กน้อยเท่านั้น



รูปที่ 4.2 ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติ



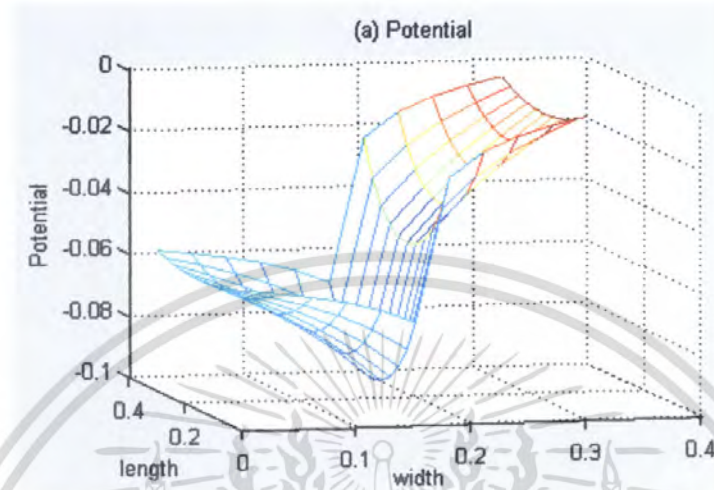
รูปที่ 4.3 ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.2 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในลักษณะสองมิติ จะเห็นว่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอนตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $1.94 \times 10^5 \text{ cm}^{-3}$

จากรูปที่ 4.3 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของโฮลในลักษณะสองมิติ จะเห็นว่าความหนาแน่นของโฮลตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $1.38 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$

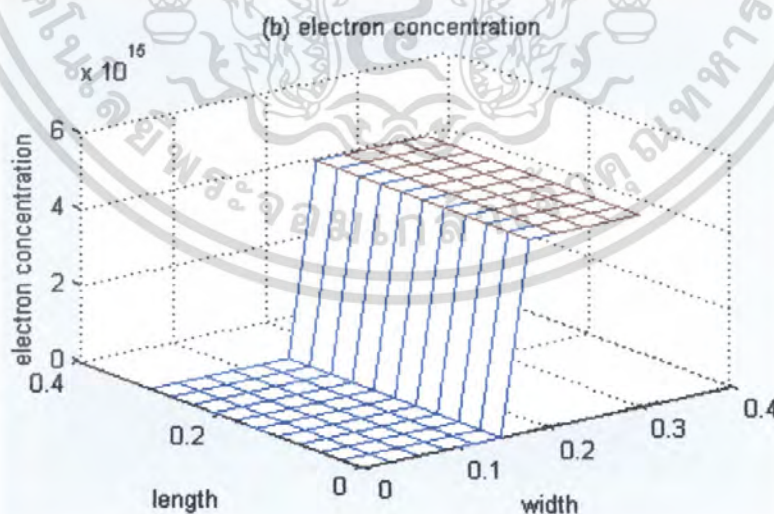
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2. การแพร่ของพาหะข้ามรอยต่อที่เวลา $t = 1.55 \times 10^{-14} s$



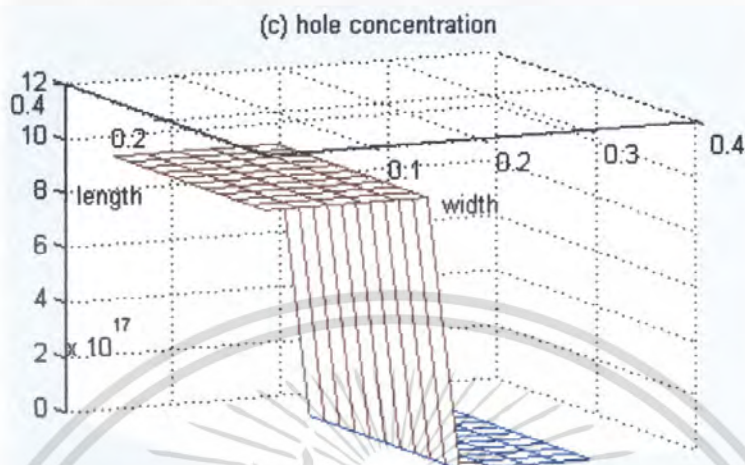
รูปที่ 4.4 ผลของความต่างศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.4 ที่เวลา  $t = 1.55 \times 10^{-14} s$  ค่าศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อของสารกึ่งตัวนำมีค่าอยู่ช่วงประมาณ 0.09049 โวลต์ จะเห็นว่าที่เวลา  $t = 1.55 \times 10^{-14} s$  จะมีการแพร่ของพาหะเพิ่มมากขึ้นมากกว่าที่เวลา  $t = 5 \times 10^{-16} s$  ซึ่งค่าของความต่างศักย์ไฟฟ้าก็จะมากขึ้นตามเวลาที่มากขึ้น



รูปที่ 4.5 ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

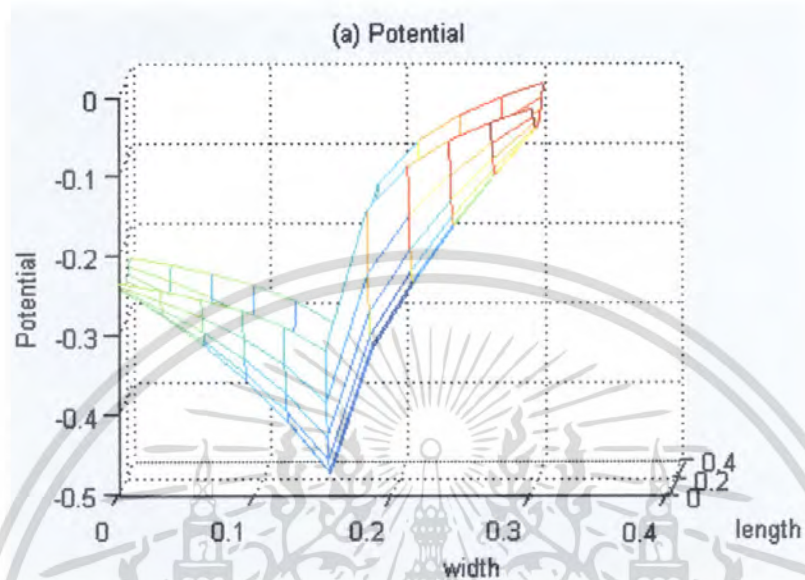


รูปที่ 4.6 ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.5 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในลักษณะสองมิติ ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $3.11 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$  จะเห็นว่าที่  $t = 1.55 \times 10^{-14} \text{ s}$  จะมีการแพร่ของอิเล็กตรอนเพิ่มมากขึ้นกว่าที่  $t = 5 \times 10^{-16} \text{ s}$

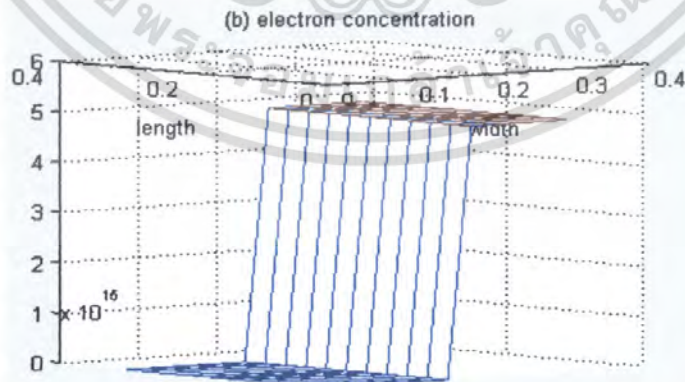
จากรูปที่ 4.6 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของโฮลในลักษณะสองมิติ ความหนาแน่นของโฮลตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $2.21 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$  จะเห็นว่าที่  $t = 1.55 \times 10^{-14} \text{ s}$  จะมีการแพร่ของโฮลเพิ่มมากขึ้นกว่าที่  $t = 5 \times 10^{-16} \text{ s}$

### 3. การแพร่ของพาหะที่เวลา $t = 3.15 \times 10^{-14} \text{ s}$



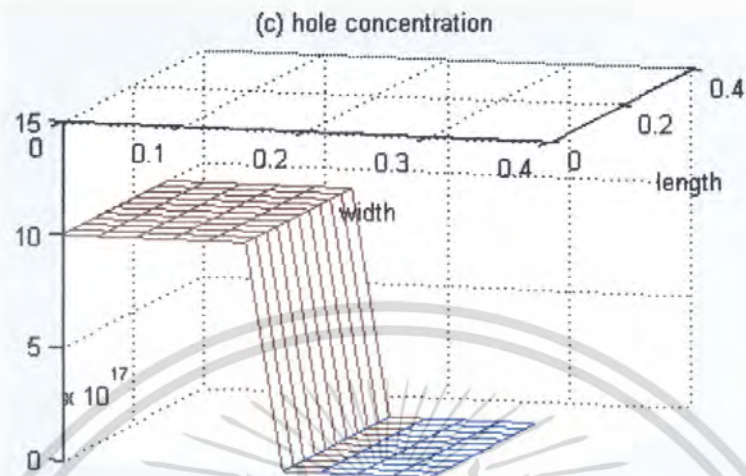
รูปที่ 4.7 ผลของความต่างศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.7 จะเห็นว่าที่เวลา  $t = 3.15 \times 10^{-14} \text{ s}$  ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อของสารกึ่งตัวนำจะมีค่าประมาณ 0.48805 โวลต์ ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าจะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จนกว่าจะเข้าสู่ภาวะสมดุล และที่สภาวะสมดุลค่าความต่างศักย์ไฟฟ้า จะขึ้นอยู่กับค่าความหนาแน่นของอะตอมของสารเจือที่ด้านทั้งสองของรอยต่อ



รูปที่ 4.8 ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

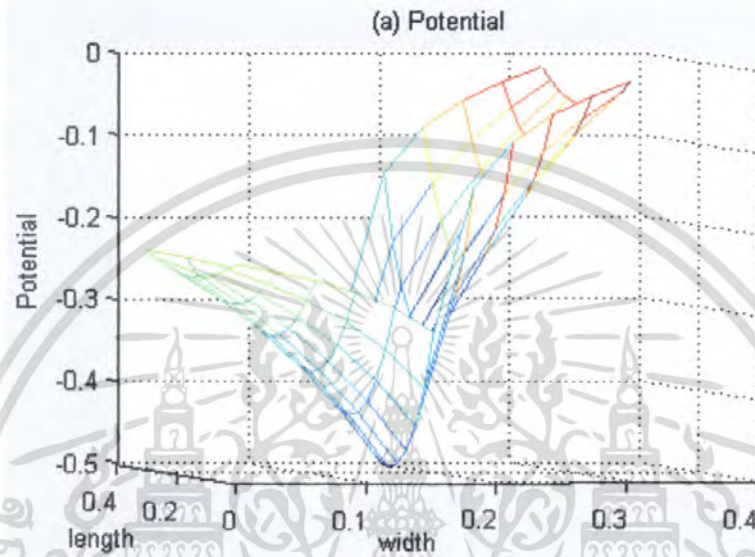


รูปที่ 4.9 ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.8 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในลักษณะสองมิติ จะเห็นว่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอนตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $6.21 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$  ซึ่งในช่วงแรก ๆ จะมีการแพร่เกิดขึ้นอย่างรวดเร็ว และจะค่อย ๆ ช้าลงตามลำดับ เมื่อเข้าสู่สภาวะสมดุลการแพร่ก็เกือบจะหยุดลงโดยสิ้นเชิง

จากรูปที่ 4.9 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของโฮลในลักษณะสองมิติ จะเห็นว่าความหนาแน่นของโฮลตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $4.42 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$  ซึ่งการแพร่ของโฮลก็จะเหมือนกับการแพร่ของอิเล็กตรอน โดยจะมีการแพร่น้อยลงเมื่อเข้าสู่สภาวะสมดุล

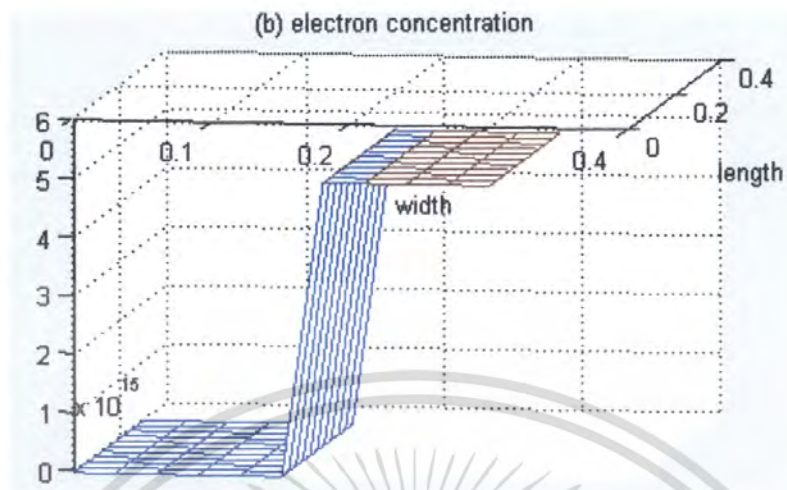
4.2.2 การทดลองการจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้า 2 มิติ ที่เกิดการแพร่ของอิเล็กตรอนและโฮลเมื่อเข้าสู่ภาวะสมดุล โดยใช้เงื่อนไขและการจำลองคุณสมบัติตามแบบในหัวข้อที่ 4.2.1



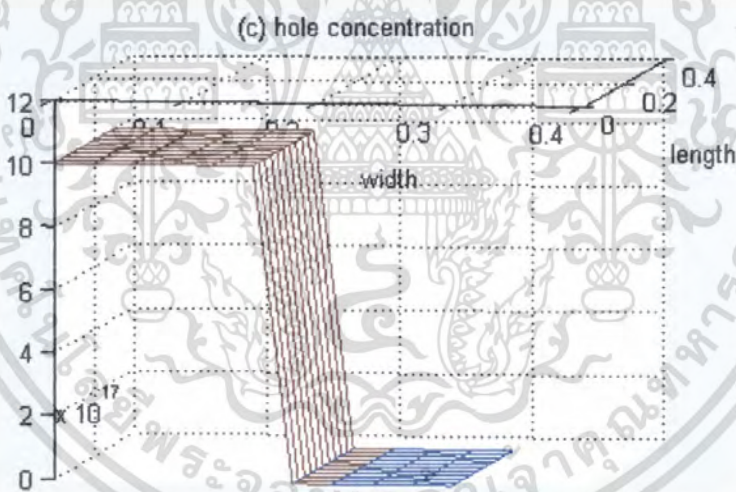
รูปที่ 4.10 ผลของความต่างศักย์ไฟฟ้าใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.10 จะเห็นว่าเมื่อมีการแพร่ของพาหะจนเข้าสู่ภาวะสมดุล ค่าศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อของสารกึ่งตัวนำจะมีค่าประมาณ 0.48805 โวลต์ ซึ่งเมื่อเทียบกับการทดลอง ค่าความต่างศักย์ศักย์ไฟฟ้าของซิลิกอนที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าน้อยกว่าค่าที่ได้จากการทดลอง ซึ่งค่าศักย์ไฟฟ้าจากการทดลองมีค่าเท่ากับ 0.66 โวลต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.11 ผลความหนาแน่นของอิเล็กตรอนใน 2 มิติ



รูปที่ 4.12 ผลความหนาแน่นของโฮลใน 2 มิติ

จากรูปที่ 4.11 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของอิเล็กตรอนในลักษณะสองมิติ จะเห็นว่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอนตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $6.21 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$

จากรูปที่ 4.12 เป็นการแสดงผลของความหนาแน่นของโฮลในลักษณะสองมิติ จะเห็นว่าความหนาแน่นของโฮลตรงบริเวณรอยต่อเท่ากับ  $4.42 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

### สรุปและข้อเสนอแนะ

#### 5.1 บทสรุปและวิจารณ์

ในการนำเสนอหลักการและวิธีการหาความหนาแน่นของอิเล็กตรอนและโฮล ศักย์ไฟฟ้าตรงบริเวณรอยต่อพี-เอ็นในชั้นสารกึ่งตัวนำในลักษณะสองมิติที่ได้นำเสนอขึ้นในโครงการพิเศษนี้ ซึ่งเป็นแนวทางหนึ่งที่ได้ทำการวิจัยโดยการจำลองแบบด้วยวิธีผลต่างสลับเนื่อง ซึ่งทำให้เห็นปรากฏการณ์ของรอยต่อพี-เอ็น ทั้งในลักษณะการเปลี่ยนแปลงของค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อพี-เอ็น ความหนาแน่นของอิเล็กตรอนและความหนาแน่นของโฮลที่เกิดในสถานะแตกต่างกัน ซึ่งในโครงการนี้ได้กำหนดเงื่อนไขและแบ่งการจำลองดังนี้

การจำลองคุณสมบัติทางไฟฟ้าในลักษณะ 2 มิติโดยกำหนดขนาดของ Sample เท่ากับ  $0.3 \times 0.3 \text{ cm}^2$  ระยะห่างระหว่าง mesh เป็น  $0.03 \text{ cm}$  เท่ากันและได้มีการแบ่งช่วงเวลาเพื่อดูค่าการกระจายตัวของค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าที่เวลาต่าง ๆ ออกเป็น 4 ช่วง คือที่เวลา  $t = 5 \times 10^{-16} \text{ s}$ ,  $t = 1.55 \times 10^{-14} \text{ s}$ ,  $t = 3.15 \times 10^{-14} \text{ s}$  และ  $\Delta t = 5 \times 10^{-16} \text{ s}$  ซึ่งการแพร่จะเกิดขึ้นอย่างรวดเร็วในช่วงแรก แต่จะค่อยๆ ซ้ำลงตามลำดับ และในสถานะสมดุลการแพร่ก็เกือบจะหยุดลงโดยสิ้นเชิง โดยค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าจะมีค่ามากขึ้นอยู่กับจำนวนประจุที่เกิดขึ้นที่รอยต่อนั้น ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าบริเวณรอยต่อของสารกึ่งตัวนำที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าประมาณ 0.48805 โวลต์ ซึ่งค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าของซิลิกอนที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าน้อยกว่าค่าที่ได้จากการทดลอง ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าจากการทดลองมีค่าเท่ากับ -0.66 โวลต์ ซึ่งความผิดพลาดที่เกิดขึ้นนั้นอาจเกิดจากการที่ไม่ได้ใส่ค่า Recombination ( การที่ free electron และ hole เคลื่อนที่มาเจอกันทำให้ทั้งคู่ นั้นเกิดการรวมตัวกัน เรียกปรากฏการณ์นี้ว่า ขบวนการรวมตัว ) และพารามิเตอร์บางตัวเข้าไปในการทำโครงการพิเศษนี้ ทำให้ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ได้จากการคำนวณไม่เท่ากับค่าที่ได้จากการทดลอง

#### 5.2 ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยและการพัฒนาต่อ

ในการจำลองค่าการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าในรอยต่อพี-เอ็น สองมิติโดยใช้วิธีผลต่างสลับเนื่องเป็นประโยชน์และใช้งานได้อย่างง่าย สามารถนำไปปรับปรุงและประยุกต์ใช้กับอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ต่างๆ ได้ ซึ่งในโครงการพิเศษนี้ได้จำลองโดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งมีข้อดีคือ

ง่ายต่อการนำไปใช้และการแสดงผลในหนึ่งมิติและสองมิติ และอาจมีข้อเสียคือ ถ้าเป็นการจำลองในลักษณะที่มีจำนวน mesh มากๆ จะใช้เวลาที่นานในการประมวลผล

ข้อผิดพลาดที่เกิดขึ้นนี้อาจสามารถแก้ไขได้โดย ใส่ค่า Recombination และพารามิเตอร์ให้ครบตามสมการ ซึ่งจะสามารถทำให้ได้ค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ค่าใกล้เคียง 0.66 โวลต์ ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการทดลอง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## เอกสารอ้างอิง

สมเกียรติ สุกเดช. เซมิคอนดักเตอร์ ดีไวซ์. ฉบับพิมพ์ที่ 13, มีนาคม 2549.

ปราโมทย์ เศษอำไพ. ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 5. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์  
แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549.

มนัส ตั้งวรศิลป์, วรรัตน์ กัทธอมรกุล. คู่มือการใช้งาน MATLAB ฉบับสมบูรณ์. พิมพ์ครั้งที่ 2:  
สำนักพิมพ์ อินโฟเพลส.

Dr. Siegfried Selberherr. *Analysis and Semiconductor Devices*, April 1984.

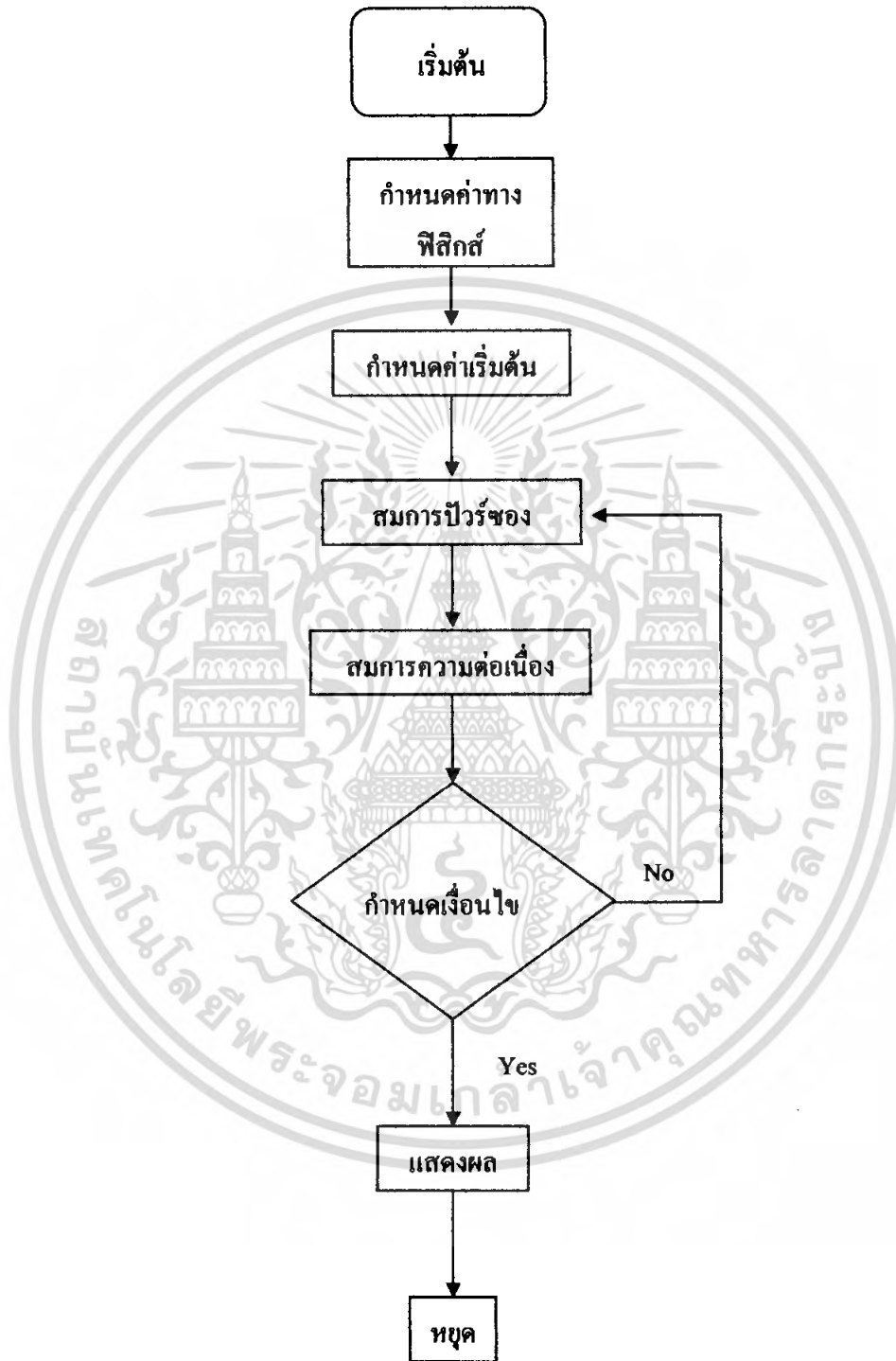
<http://www.chontech.ac.th/~electric/html/pn.htm>

<http://www.ee.mut.ac.th/materials/eect0210/chap2.pdf>



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### ภาคผนวก ก.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 1 ขณะที่เริ่มเกิดการแพร่อิเล็กทรอนิกส์และไอดข้ามรอยต่อของสารกึ่งตัวนำ  $t = 5 \times 10^{-16} s$

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
1	210.25	1.00E+18	-0.00095145	-0.00095145	1.71E-06
2	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
3	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
4	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
5	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
6	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
7	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
8	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
9	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
10	210.25	1.00E+18	-0.00095145	-0.00095145	8.56E-07
11	210.25	1.00E+18	-0.00095145	-0.00095145	1.71E-06
12	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
13	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
14	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
15	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
16	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
17	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
18	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
19	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
20	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
21	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
22	210.25	1.00E+18	-0.00095145	-0.00095145	8.56E-07
23	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
24	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
25	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
26	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
27	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
28	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
29	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
30	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
31	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
32	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
33	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
34	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
35	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
36	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
37	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
38	210.25	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	0
39	210.25	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	0
40	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
41	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
42	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
43	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
44	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
45	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
46	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
47	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
48	210.25	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	0
49	210.25	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	0
50	210.25	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	0
51	210.25	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
52	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
53	210.25	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	0
54	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	0
55	210.25	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.56E-07
56	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	1.72E-06
57	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	8.68E-07
58	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	8.68E-07
59	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	8.68E-07
60	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	8.68E-07
61	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	8.68E-07
62	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	8.68E-07
63	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095142	-0.00095142	8.68E-07
64	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095143	-0.00095143	8.68E-07
65	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095144	-0.00095144	8.68E-07
66	1.94E+05	1.00E+18	-0.00095145	-0.00095145	1.72E-06
67	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.80E-07
68	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
69	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
70	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
71	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
72	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
73	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
74	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
75	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
76	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.68E-07
77	5.00E+15	1.38E+07	1.34E-05	1.34E-05	-8.80E-07

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
78	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
79	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
80	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
81	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
82	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
83	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
84	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
85	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
86	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
87	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
88	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
89	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
90	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
91	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
92	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
93	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
94	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
95	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
96	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
97	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
98	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
99	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
100	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
101	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
102	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
103	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
104	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
105	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
106	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
107	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
108	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
109	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	0
110	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
111	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-2.41E-08
112	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
113	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
114	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
115	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
116	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
117	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
118	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
119	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
120	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-1.20E-08
121	5.00E+15	42050	1.34E-05	1.34E-05	-2.41E-08

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. การแพร่ของพาหะข้ามรอยต่อที่เวลา  $t = 1.55 \times 10^{-14}$  s

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
1	210.25	1.00E+18	-0.05463	-0.05463	9.61E-05
2	210.25	1.00E+18	-0.05576	-0.05576	4.80E-05
3	210.25	1.00E+18	-0.05671	-0.05671	4.80E-05
4	210.25	1.00E+18	-0.05741	-0.05741	4.80E-05
5	210.25	1.00E+18	-0.05784	-0.05784	4.80E-05
6	210.25	1.00E+18	-0.05798	-0.05798	4.80E-05
7	210.25	1.00E+18	-0.05784	-0.05784	4.80E-05
8	210.25	1.00E+18	-0.05741	-0.05741	4.80E-05
9	210.25	1.00E+18	-0.05671	-0.05671	4.80E-05
10	210.25	1.00E+18	-0.05576	-0.05576	4.80E-05
11	210.25	1.00E+18	-0.05463	-0.05463	9.61E-05
12	210.25	1.00E+18	-0.05598	-0.05598	4.80E-05
13	210.25	1.00E+18	-0.05833	-0.05833	-7.15E-10
14	210.25	1.00E+18	-0.06028	-0.06028	-9.37E-10
15	210.25	1.00E+18	-0.06171	-0.06171	-1.06E-09
16	210.25	1.00E+18	-0.06258	-0.06258	-1.13E-09
17	210.25	1.00E+18	-0.06287	-0.06287	-1.08E-09
18	210.25	1.00E+18	-0.06258	-0.06258	-9.53E-10
19	210.25	1.00E+18	-0.06171	-0.06171	-8.10E-10
20	210.25	1.00E+18	-0.06028	-0.06028	-6.20E-10
21	210.25	1.00E+18	-0.05834	-0.05834	-3.49E-10
22	210.25	1.00E+18	-0.05598	-0.05598	4.80E-05
23	210.25	1.00E+18	-0.05757	-0.05757	4.80E-05
24	210.25	1.00E+18	-0.06132	-0.06132	-9.37E-10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
25	210.25	1.00E+18	-0.06437	-0.06437	-1.19E-09
26	210.25	1.00E+18	-0.06658	-0.06658	-1.33E-09
27	210.25	1.00E+18	-0.06791	-0.06791	-1.43E-09
28	210.25	1.00E+18	-0.06835	-0.06835	-1.33E-09
29	210.25	1.00E+18	-0.06791	-0.06791	-1.19E-09
30	210.25	1.00E+18	-0.06658	-0.06658	-1.02E-09
31	210.25	1.00E+18	-0.06437	-0.06437	-7.47E-10
32	210.25	1.00E+18	-0.06132	-0.06132	-4.45E-10
33	210.25	1.00E+18	-0.05757	-0.05757	4.80E-05
34	210.25	1.00E+18	-0.05958	-0.05958	4.80E-05
35	210.25	1.00E+18	-0.06501	-0.06501	-1.06E-09
36	210.25	1.00E+18	-0.06929	-0.06929	-1.33E-09
37	210.25	1.00E+18	-0.07233	-0.07233	-1.53E-09
38	210.25	1.00E+18	-0.07413	-0.07413	-1.62E-09
39	210.25	1.00E+18	-0.07472	-0.07472	-1.54E-09
40	210.25	1.00E+18	-0.07413	-0.07413	-1.40E-09
41	210.25	1.00E+18	-0.07233	-0.07233	-1.16E-09
42	210.25	1.00E+18	-0.0693	-0.0693	-8.26E-10
43	210.25	1.00E+18	-0.06502	-0.06502	-4.92E-10
44	210.25	1.00E+18	-0.05959	-0.05959	4.80E-05
45	210.25	1.00E+18	-0.06238	-0.06238	4.80E-05
46	210.25	1.00E+18	-0.06986	-0.06986	-1.13E-09
47	210.25	1.00E+18	-0.07548	-0.07548	-1.43E-09
48	210.25	1.00E+18	-0.07932	-0.07932	-1.62E-09
49	210.25	1.00E+18	-0.08155	-0.08155	-1.68E-09
50	210.25	1.00E+18	-0.08228	-0.08228	-1.62E-09

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
51	210.25	1.00E+18	-0.08156	-0.08156	-1.43E-09
52	210.25	1.00E+18	-0.07933	-0.07933	-1.19E-09
53	210.25	1.00E+18	-0.07549	-0.07549	-8.74E-10
54	210.25	1.00E+18	-0.06986	-0.06986	-5.24E-10
55	210.25	1.00E+18	-0.06238	-0.06238	4.80E-05
56	3.11E+06	1.00E+18	-0.06668	-0.06668	9.68E-05
57	3.11E+06	1.00E+18	-0.07657	-0.07657	4.87E-05
58	3.11E+06	1.00E+18	-0.08345	-0.08345	4.87E-05
59	3.11E+06	1.00E+18	-0.08794	-0.08794	4.87E-05
60	3.11E+06	1.00E+18	-0.09049	-0.09049	4.87E-05
61	3.11E+06	1.00E+18	-0.09131	-0.09131	4.87E-05
62	3.11E+06	1.00E+18	-0.09049	-0.09049	4.87E-05
63	3.11E+06	1.00E+18	-0.08795	-0.08795	4.87E-05
64	3.11E+06	1.00E+18	-0.08345	-0.08345	4.87E-05
65	3.11E+06	1.00E+18	-0.07657	-0.07657	4.87E-05
66	3.11E+06	1.00E+18	-0.06669	-0.06669	9.68E-05
67	5.00E+15	2.21E+08	-0.02027	-0.02027	-2.71E-05
68	5.00E+15	2.21E+08	-0.03216	-0.03216	-2.67E-05
69	5.00E+15	2.21E+08	-0.03966	-0.03966	-2.67E-05
70	5.00E+15	2.21E+08	-0.04438	-0.04438	-2.67E-05
71	5.00E+15	2.21E+08	-0.04701	-0.04701	-2.67E-05
72	5.00E+15	2.21E+08	-0.04786	-0.04786	-2.67E-05
73	5.00E+15	2.21E+08	-0.04701	-0.04701	-2.67E-05
74	5.00E+15	2.21E+08	-0.04439	-0.04439	-2.67E-05
75	5.00E+15	2.21E+08	-0.03967	-0.03967	-2.67E-05
76	5.00E+15	2.21E+08	-0.03216	-0.03216	-2.67E-05

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
77	5.00E+15	2.21E+08	-0.02028	-0.02028	-2.71E-05
78	5.00E+15	42050	-0.01234	-0.01234	-3.70E-07
79	5.00E+15	42050	-0.02181	-0.02181	9.18E-12
80	5.00E+15	42050	-0.02835	-0.02835	1.18E-11
81	5.00E+15	42050	-0.03261	-0.03261	1.32E-11
82	5.00E+15	42050	-0.035	-0.035	1.35E-11
83	5.00E+15	42050	-0.03577	-0.03577	1.30E-11
84	5.00E+15	42050	-0.035	-0.035	1.18E-11
85	5.00E+15	42050	-0.03261	-0.03261	9.80E-12
86	5.00E+15	42050	-0.02836	-0.02836	7.20E-12
87	5.00E+15	42050	-0.02181	-0.02181	4.22E-12
88	5.00E+15	42050	-0.01234	-0.01234	-3.70E-07
89	5.00E+15	42050	-0.00769	-0.00769	-3.70E-07
90	5.00E+15	42050	-0.01438	-0.01438	7.20E-12
91	5.00E+15	42050	-0.01934	-0.01934	8.81E-12
92	5.00E+15	42050	-0.02269	-0.02269	9.80E-12
93	5.00E+15	42050	-0.02461	-0.02461	1.02E-11
94	5.00E+15	42050	-0.02524	-0.02524	9.80E-12
95	5.00E+15	42050	-0.02462	-0.02462	8.69E-12
96	5.00E+15	42050	-0.02269	-0.02269	7.20E-12
97	5.00E+15	42050	-0.01934	-0.01934	5.09E-12
98	5.00E+15	42050	-0.01438	-0.01438	2.85E-12
99	5.00E+15	42050	-0.00769	-0.00769	-3.70E-07
100	5.00E+15	42050	-0.00446	-0.00446	-3.70E-07
101	5.00E+15	42050	-0.00867	-0.00867	4.34E-12
102	5.00E+15	42050	-0.01193	-0.01193	5.21E-12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
103	5.00E+15	42050	-0.0142	-0.0142	6.08E-12
104	5.00E+15	42050	-0.01553	-0.01553	6.21E-12
105	5.00E+15	42050	-0.01596	-0.01596	5.83E-12
106	5.00E+15	42050	-0.01553	-0.01553	5.09E-12
107	5.00E+15	42050	-0.01421	-0.01421	4.22E-12
108	5.00E+15	42050	-0.01194	-0.01194	2.85E-12
109	5.00E+15	42050	-0.00867	-0.00867	1.61E-12
110	5.00E+15	42050	-0.00446	-0.00446	-3.70E-07
111	5.00E+15	42050	-0.00189	-0.00189	-7.41E-07
112	5.00E+15	42050	-0.00392	-0.00392	-3.70E-07
113	5.00E+15	42050	-0.00553	-0.00553	-3.70E-07
114	5.00E+15	42050	-0.00666	-0.00666	-3.70E-07
115	5.00E+15	42050	-0.00733	-0.00733	-3.70E-07
116	5.00E+15	42050	-0.00755	-0.00755	-3.70E-07
117	5.00E+15	42050	-0.00733	-0.00733	-3.70E-07
118	5.00E+15	42050	-0.00666	-0.00666	-3.70E-07
119	5.00E+15	42050	-0.00553	-0.00553	-3.70E-07
120	5.00E+15	42050	-0.00392	-0.00392	-3.70E-07
121	5.00E+15	42050	-0.00189	-0.00189	-7.41E-07

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3. การแพร่ของพาหะที่เวลา $t = 3.15 \times 10^{-14} s$

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
1	210.25	1.00E+18	-0.23441	-0.23441	0.000407
2	210.25	1.00E+18	-0.24225	-0.24225	0.000203
3	210.25	1.00E+18	-0.24878	-0.24878	0.000203
4	210.25	1.00E+18	-0.25362	-0.25362	0.000203
5	210.25	1.00E+18	-0.25659	-0.25659	0.000203
6	210.25	1.00E+18	-0.25759	-0.25759	0.000203
7	210.25	1.00E+18	-0.2566	-0.2566	0.000203
8	210.25	1.00E+18	-0.25364	-0.25364	0.000203
9	210.25	1.00E+18	-0.2488	-0.2488	0.000203
10	210.25	1.00E+18	-0.24227	-0.24227	0.000203
11	210.25	1.00E+18	-0.23443	-0.23443	0.000407
12	210.25	1.00E+18	-0.24373	-0.24373	0.000203
13	210.25	1.00E+18	-0.26	-0.26	-1.65E-08
14	210.25	1.00E+18	-0.27343	-0.27343	-2.11E-08
15	210.25	1.00E+18	-0.28332	-0.28332	-2.39E-08
16	210.25	1.00E+18	-0.28934	-0.28934	-2.51E-08
17	210.25	1.00E+18	-0.29136	-0.29136	-2.43E-08
18	210.25	1.00E+18	-0.28936	-0.28936	-2.19E-08
19	210.25	1.00E+18	-0.28336	-0.28336	-1.83E-08
20	210.25	1.00E+18	-0.27348	-0.27348	-1.38E-08
21	210.25	1.00E+18	-0.26005	-0.26005	-8.47E-09
22	210.25	1.00E+18	-0.24376	-0.24376	0.000203
23	210.25	1.00E+18	-0.25471	-0.25471	0.000203
24	210.25	1.00E+18	-0.28063	-0.28063	-2.11E-08

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
25	210.25	1.00E+18	-0.30168	-0.30168	-2.68E-08
26	210.25	1.00E+18	-0.31695	-0.31695	-3.02E-08
27	210.25	1.00E+18	-0.32615	-0.32615	-3.16E-08
28	210.25	1.00E+18	-0.32922	-0.32922	-3.05E-08
29	210.25	1.00E+18	-0.32618	-0.32618	-2.75E-08
30	210.25	1.00E+18	-0.317	-0.317	-2.30E-08
31	210.25	1.00E+18	-0.30174	-0.30174	-1.71E-08
32	210.25	1.00E+18	-0.28069	-0.28069	-1.05E-08
33	210.25	1.00E+18	-0.25475	-0.25475	0.000203
34	210.25	1.00E+18	-0.26867	-0.26867	0.000203
35	210.25	1.00E+18	-0.30618	-0.30618	-2.39E-08
36	210.25	1.00E+18	-0.33576	-0.33576	-3.02E-08
37	210.25	1.00E+18	-0.35672	-0.35672	-3.42E-08
38	210.25	1.00E+18	-0.36914	-0.36914	-3.56E-08
39	210.25	1.00E+18	-0.37326	-0.37326	-3.43E-08
40	210.25	1.00E+18	-0.36918	-0.36918	-3.11E-08
41	210.25	1.00E+18	-0.35679	-0.35679	-2.58E-08
42	210.25	1.00E+18	-0.33584	-0.33584	-1.90E-08
43	210.25	1.00E+18	-0.30625	-0.30625	-1.16E-08
44	210.25	1.00E+18	-0.26871	-0.26871	0.000203
45	210.25	1.00E+18	-0.28799	-0.28799	0.000203
46	210.25	1.00E+18	-0.33969	-0.33969	-2.51E-08
47	210.25	1.00E+18	-0.37854	-0.37854	-3.16E-08
48	210.25	1.00E+18	-0.40512	-0.40512	-3.56E-08
49	210.25	1.00E+18	-0.42053	-0.42053	-3.70E-08
50	210.25	1.00E+18	-0.42558	-0.42558	-3.57E-08

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
51	210.25	1.00E+18	-0.42056	-0.42056	-3.21E-08
52	210.25	1.00E+18	-0.40518	-0.40518	-2.66E-08
53	210.25	1.00E+18	-0.37862	-0.37862	-1.97E-08
54	210.25	1.00E+18	-0.33977	-0.33977	-1.20E-08
55	210.25	1.00E+18	-0.28803	-0.28803	0.000203
56	6.21E+06	1.00E+18	-0.31779	-0.31779	0.000409
57	6.21E+06	1.00E+18	-0.38613	-0.38613	0.000206
58	6.21E+06	1.00E+18	-0.43367	-0.43367	0.000206
59	6.21E+06	1.00E+18	-0.46476	-0.46476	0.000206
60	6.21E+06	1.00E+18	-0.48234	-0.48234	0.000206
61	6.21E+06	1.00E+18	-0.48805	-0.48805	0.000206
62	6.21E+06	1.00E+18	-0.48238	-0.48238	0.000206
63	6.21E+06	1.00E+18	-0.46481	-0.46481	0.000206
64	6.21E+06	1.00E+18	-0.43374	-0.43374	0.000206
65	6.21E+06	1.00E+18	-0.3862	-0.3862	0.000206
66	6.21E+06	1.00E+18	-0.31783	-0.31783	0.000409
67	5.00E+15	4.42E+08	-0.14222	-0.14222	-5.46E-05
68	5.00E+15	4.42E+08	-0.22441	-0.22441	-5.38E-05
69	5.00E+15	4.42E+08	-0.27632	-0.27632	-5.38E-05
70	5.00E+15	4.42E+08	-0.30896	-0.30896	-5.38E-05
71	5.00E+15	4.42E+08	-0.32712	-0.32712	-5.38E-05
72	5.00E+15	4.42E+08	-0.33296	-0.33296	-5.38E-05
73	5.00E+15	4.42E+08	-0.32714	-0.32714	-5.38E-05
74	5.00E+15	4.42E+08	-0.309	-0.309	-5.38E-05
75	5.00E+15	4.42E+08	-0.27637	-0.27637	-5.38E-05
76	5.00E+15	4.42E+08	-0.22446	-0.22446	-5.38E-05

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
77	5.00E+15	4.42E+08	-0.14225	-0.14225	-5.46E-05
78	5.00E+15	42050	-0.08735	-0.08735	-7.47E-07
79	5.00E+15	42050	-0.15281	-0.15281	1.53E-10
80	5.00E+15	42050	-0.19808	-0.19808	1.92E-10
81	5.00E+15	42050	-0.2275	-0.2275	2.15E-10
82	5.00E+15	42050	-0.24405	-0.24405	2.22E-10
83	5.00E+15	42050	-0.24941	-0.24941	2.13E-10
84	5.00E+15	42050	-0.24407	-0.24407	1.91E-10
85	5.00E+15	42050	-0.22753	-0.22753	1.58E-10
86	5.00E+15	42050	-0.19813	-0.19813	1.17E-10
87	5.00E+15	42050	-0.15285	-0.15285	6.97E-11
88	5.00E+15	42050	-0.08737	-0.08737	-7.47E-07
89	5.00E+15	42050	-0.0552	-0.0552	-7.47E-07
90	5.00E+15	42050	-0.10143	-0.10143	1.15E-10
91	5.00E+15	42050	-0.13574	-0.13574	1.43E-10
92	5.00E+15	42050	-0.15892	-0.15892	1.59E-10
93	5.00E+15	42050	-0.17223	-0.17223	1.65E-10
94	5.00E+15	42050	-0.17656	-0.17656	1.58E-10
95	5.00E+15	42050	-0.17224	-0.17224	1.41E-10
96	5.00E+15	42050	-0.15894	-0.15894	1.17E-10
97	5.00E+15	42050	-0.13577	-0.13577	8.53E-11
98	5.00E+15	42050	-0.10146	-0.10146	5.01E-11
99	5.00E+15	42050	-0.05522	-0.05522	-7.47E-07
100	5.00E+15	42050	-0.03286	-0.03286	-7.47E-07
101	5.00E+15	42050	-0.06198	-0.06198	7.14E-11
102	5.00E+15	42050	-0.08454	-0.08454	8.79E-11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
103	5.00E+15	42050	-0.10023	-0.10023	9.78E-11
104	5.00E+15	42050	-0.10939	-0.10939	1.01E-10
105	5.00E+15	42050	-0.1124	-0.1124	9.57E-11
106	5.00E+15	42050	-0.1094	-0.1094	8.53E-11
107	5.00E+15	42050	-0.10025	-0.10025	6.97E-11
108	5.00E+15	42050	-0.08456	-0.08456	5.01E-11
109	5.00E+15	42050	-0.062	-0.062	2.93E-11
110	5.00E+15	42050	-0.03287	-0.03287	-7.47E-07
111	5.00E+15	42050	-0.01508	-0.01508	-1.49E-06
112	5.00E+15	42050	-0.02911	-0.02911	-7.47E-07
113	5.00E+15	42050	-0.04023	-0.04023	-7.47E-07
114	5.00E+15	42050	-0.04809	-0.04809	-7.47E-07
115	5.00E+15	42050	-0.05273	-0.05273	-7.47E-07
116	5.00E+15	42050	-0.05426	-0.05426	-7.47E-07
117	5.00E+15	42050	-0.05273	-0.05273	-7.47E-07
118	5.00E+15	42050	-0.0481	-0.0481	-7.47E-07
119	5.00E+15	42050	-0.04024	-0.04024	-7.47E-07
120	5.00E+15	42050	-0.02912	-0.02912	-7.47E-07
121	5.00E+15	42050	-0.01508	-0.01508	-1.49E-06

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4 เกิดการแพร่ของอิเล็คตรอนและโฮมและเข้าสู่ภาวะสมดุล

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
1	210.25	1.00E+18	-0.23441	-0.23441	0.000407
2	210.25	1.00E+18	-0.24225	-0.24225	0.000203
3	210.25	1.00E+18	-0.24878	-0.24878	0.000203
4	210.25	1.00E+18	-0.25362	-0.25362	0.000203
5	210.25	1.00E+18	-0.25659	-0.25659	0.000203
6	210.25	1.00E+18	-0.25759	-0.25759	0.000203
7	210.25	1.00E+18	-0.2566	-0.2566	0.000203
8	210.25	1.00E+18	-0.25364	-0.25364	0.000203
9	210.25	1.00E+18	-0.2488	-0.2488	0.000203
10	210.25	1.00E+18	-0.24227	-0.24227	0.000203
11	210.25	1.00E+18	-0.23443	-0.23443	0.000407
12	210.25	1.00E+18	-0.24373	-0.24373	0.000203
13	210.25	1.00E+18	-0.26	-0.26	-1.65E-08
14	210.25	1.00E+18	-0.27343	-0.27343	-2.11E-08
15	210.25	1.00E+18	-0.28332	-0.28332	-2.39E-08
16	210.25	1.00E+18	-0.28934	-0.28934	-2.51E-08
17	210.25	1.00E+18	-0.29136	-0.29136	-2.43E-08
18	210.25	1.00E+18	-0.28936	-0.28936	-2.19E-08
19	210.25	1.00E+18	-0.28336	-0.28336	-1.83E-08
20	210.25	1.00E+18	-0.27348	-0.27348	-1.38E-08
21	210.25	1.00E+18	-0.26005	-0.26005	-8.47E-09
22	210.25	1.00E+18	-0.24376	-0.24376	0.000203
23	210.25	1.00E+18	-0.25471	-0.25471	0.000203
24	210.25	1.00E+18	-0.28063	-0.28063	-2.11E-08
25	210.25	1.00E+18	-0.30168	-0.30168	-2.68E-08

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
26	210.25	1.00E+18	-0.31695	-0.31695	-3.02E-08
27	210.25	1.00E+18	-0.32615	-0.32615	-3.16E-08
28	210.25	1.00E+18	-0.32922	-0.32922	-3.05E-08
29	210.25	1.00E+18	-0.32618	-0.32618	-2.75E-08
30	210.25	1.00E+18	-0.317	-0.317	-2.30E-08
31	210.25	1.00E+18	-0.30174	-0.30174	-1.71E-08
32	210.25	1.00E+18	-0.28069	-0.28069	-1.05E-08
33	210.25	1.00E+18	-0.25475	-0.25475	0.000203
34	210.25	1.00E+18	-0.26867	-0.26867	0.000203
35	210.25	1.00E+18	-0.30618	-0.30618	-2.39E-08
36	210.25	1.00E+18	-0.33576	-0.33576	-3.02E-08
37	210.25	1.00E+18	-0.35672	-0.35672	-3.42E-08
38	210.25	1.00E+18	-0.36914	-0.36914	-3.56E-08
39	210.25	1.00E+18	-0.37326	-0.37326	-3.43E-08
40	210.25	1.00E+18	-0.36918	-0.36918	-3.11E-08
41	210.25	1.00E+18	-0.35679	-0.35679	-2.58E-08
42	210.25	1.00E+18	-0.33584	-0.33584	-1.90E-08
43	210.25	1.00E+18	-0.30625	-0.30625	-1.16E-08
44	210.25	1.00E+18	-0.26871	-0.26871	0.000203
45	210.25	1.00E+18	-0.28799	-0.28799	0.000203
46	210.25	1.00E+18	-0.33969	-0.33969	-2.51E-08
47	210.25	1.00E+18	-0.37854	-0.37854	-3.16E-08
48	210.25	1.00E+18	-0.40512	-0.40512	-3.56E-08
49	210.25	1.00E+18	-0.42053	-0.42053	-3.70E-08
50	210.25	1.00E+18	-0.42558	-0.42558	-3.57E-08
51	210.25	1.00E+18	-0.42056	-0.42056	-3.21E-08

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
52	210.25	1.00E+18	-0.40518	-0.40518	-2.66E-08
53	210.25	1.00E+18	-0.37862	-0.37862	-1.97E-08
54	210.25	1.00E+18	-0.33977	-0.33977	-1.20E-08
55	210.25	1.00E+18	-0.28803	-0.28803	0.000203
56	6.21E+06	1.00E+18	-0.31779	-0.31779	0.000409
57	6.21E+06	1.00E+18	-0.38613	-0.38613	0.000206
58	6.21E+06	1.00E+18	-0.43367	-0.43367	0.000206
59	6.21E+06	1.00E+18	-0.46476	-0.46476	0.000206
60	6.21E+06	1.00E+18	-0.48234	-0.48234	0.000206
61	6.21E+06	1.00E+18	-0.48805	-0.48805	0.000206
62	6.21E+06	1.00E+18	-0.48238	-0.48238	0.000206
63	6.21E+06	1.00E+18	-0.46481	-0.46481	0.000206
64	6.21E+06	1.00E+18	-0.43374	-0.43374	0.000206
65	6.21E+06	1.00E+18	-0.3862	-0.3862	0.000206
66	6.21E+06	1.00E+18	-0.31783	-0.31783	0.000409
67	5.00E+15	4.42E+08	-0.14222	-0.14222	-5.46E-05
68	5.00E+15	4.42E+08	-0.22441	-0.22441	-5.38E-05
69	5.00E+15	4.42E+08	-0.27632	-0.27632	-5.38E-05
70	5.00E+15	4.42E+08	-0.30896	-0.30896	-5.38E-05
71	5.00E+15	4.42E+08	-0.32712	-0.32712	-5.38E-05
72	5.00E+15	4.42E+08	-0.33296	-0.33296	-5.38E-05
73	5.00E+15	4.42E+08	-0.32714	-0.32714	-5.38E-05
74	5.00E+15	4.42E+08	-0.309	-0.309	-5.38E-05
75	5.00E+15	4.42E+08	-0.27637	-0.27637	-5.38E-05
76	5.00E+15	4.42E+08	-0.22446	-0.22446	-5.38E-05
77	5.00E+15	4.42E+08	-0.14225	-0.14225	-5.46E-05

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
78	5.00E+15	42050	-0.08735	-0.08735	-7.47E-07
79	5.00E+15	42050	-0.15281	-0.15281	1.53E-10
80	5.00E+15	42050	-0.19808	-0.19808	1.92E-10
81	5.00E+15	42050	-0.2275	-0.2275	2.15E-10
82	5.00E+15	42050	-0.24405	-0.24405	2.22E-10
83	5.00E+15	42050	-0.24941	-0.24941	2.13E-10
84	5.00E+15	42050	-0.24407	-0.24407	1.91E-10
85	5.00E+15	42050	-0.22753	-0.22753	1.58E-10
86	5.00E+15	42050	-0.19813	-0.19813	1.17E-10
87	5.00E+15	42050	-0.15285	-0.15285	6.97E-11
88	5.00E+15	42050	-0.08737	-0.08737	-7.47E-07
89	5.00E+15	42050	-0.0552	-0.0552	-7.47E-07
90	5.00E+15	42050	-0.10143	-0.10143	1.15E-10
91	5.00E+15	42050	-0.13574	-0.13574	1.43E-10
92	5.00E+15	42050	-0.15892	-0.15892	1.59E-10
93	5.00E+15	42050	-0.17223	-0.17223	1.65E-10
94	5.00E+15	42050	-0.17656	-0.17656	1.58E-10
95	5.00E+15	42050	-0.17224	-0.17224	1.41E-10
96	5.00E+15	42050	-0.15894	-0.15894	1.17E-10
97	5.00E+15	42050	-0.13577	-0.13577	8.53E-11
98	5.00E+15	42050	-0.10146	-0.10146	5.01E-11
99	5.00E+15	42050	-0.05522	-0.05522	-7.47E-07
100	5.00E+15	42050	-0.03286	-0.03286	-7.47E-07
101	5.00E+15	42050	-0.06198	-0.06198	7.14E-11
102	5.00E+15	42050	-0.08454	-0.08454	8.79E-11
103	5.00E+15	42050	-0.10023	-0.10023	9.78E-11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x	no	po	Xnew	Xold	Rho
104	5.00E+15	42050	-0.10939	-0.10939	1.01E-10
105	5.00E+15	42050	-0.1124	-0.1124	9.57E-11
106	5.00E+15	42050	-0.1094	-0.1094	8.53E-11
107	5.00E+15	42050	-0.10025	-0.10025	6.97E-11
108	5.00E+15	42050	-0.08456	-0.08456	5.01E-11
109	5.00E+15	42050	-0.062	-0.062	2.93E-11
110	5.00E+15	42050	-0.03287	-0.03287	-7.47E-07
111	5.00E+15	42050	-0.01508	-0.01508	-1.49E-06
112	5.00E+15	42050	-0.02911	-0.02911	-7.47E-07
113	5.00E+15	42050	-0.04023	-0.04023	-7.47E-07
114	5.00E+15	42050	-0.04809	-0.04809	-7.47E-07
115	5.00E+15	42050	-0.05273	-0.05273	-7.47E-07
116	5.00E+15	42050	-0.05426	-0.05426	-7.47E-07
117	5.00E+15	42050	-0.05273	-0.05273	-7.47E-07
118	5.00E+15	42050	-0.0481	-0.0481	-7.47E-07
119	5.00E+15	42050	-0.04024	-0.04024	-7.47E-07
120	5.00E+15	42050	-0.02912	-0.02912	-7.47E-07
121	5.00E+15	42050	-0.01508	-0.01508	-1.49E-06

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## ภาคผนวก ข.

### โปรแกรมการจำลองการกระจายตัวของศักย์ไฟฟ้าแบบสองมิติ

```
%Element Matrix + System Matrix
l1=input('Enter width:');
l2=input('Enter length:');
n1=input('Enter n1:'); %X-axis
n2=input('Enter n2:'); %Y-axis
delta1=l1/n1;delta2=l2/n2;
x=0:delta1:l1;
y=0:delta2:l2;
n1=n1+1; n2=n2+1;
N=n1*n2;
P=zeros(N);
Xnew=zeros(N,1); %Potential
X=zeros(N,1);
no=zeros(N,1); %electron concentration
po=zeros(N,1); %hole concentration
Rho=zeros(N,1);
Na=zeros(N,1);Nd=zeros(N,1);
pdope=1e18;ndope=5e15;ni=1.45e10;
Dn=34.9313 ; Dp=12.42 ; deltat=5e-16; Un=1.35e3;Up=480;

errs=ones(N,1);
figure;
count=0;
for j=1:n2
    for i=1:n1
        count=count+1;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
X1=(n1*(j-1))+i;
```

```
X2=(n1*(j-1))+i+1;
```

```
X3=(n1*(j-1))+i-1;
```

```
X4=(n1*(j))+i;
```

```
X5=(n1*(j-2))+i;
```

```
P(count,X1)=P(count,X1)-((2*(delta1^2))+(2*(delta2^2)));
```

```
if (i>1)
```

```
    P(count,X3)=P(count,X3)+(delta2^2);
```

```
end
```

```
if (j>1)
```

```
    P(count,X5)=P(count,X5)+(delta1^2);
```

```
end
```

```
if (i<n1)
```

```
    P(count,X2)=P(count,X2)+(delta2^2);
```

```
end
```

```
if (j<n2)
```

```
    P(count,X4)=P(count,X4)+(delta1^2);
```

```
end
```

```
%concentration
```

```
if rem(N,2)==0
```

```
    if count<=round(N/2) %p-type
```

```
        po(count)=pdope;Na(count)=pdope;no(count)=ni^2/pdope;Nd(count)=no(count);
```

```
    end
```

```
    if count>round(N/2) %n-type
```

```
        no(count)=ndope;Nd(count)=ndope;po(count)=ni^2/ndope;Na(count)=po(count);
```

```
    end
```

```
else
```

```
    middle=(N+1)/2;
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

if count<=round(middle+(n1-1)/2) %p-type
    po(count)=pdope;Na(count)=pdope;no(count)=ni^2/pdope;Nd(count)=no(count);
end
if count>round(middle+(n1-1)/2) %n type
    no(count)=ndope;Nd(count)=ndope;po(count)=ni^2/ndope;Na(count)=po(count);
end
end
end
end

num=0
while max(errs)>5e-2
    num=num+1;
    %for a=1:64
    Rho=1.6e-19.*(no-po-(Nd-Na)).*(delta1^2.*delta2^2)/(11.8.*8.85e-14);

% Iteration Method
Xold=ones(N,1);
err=ones(N,1);

while(max(err) > 1e-4)
    for i=1:N
        if i==1
            Xnew(1)=(Rho(1)-P(1,2:N)*Xold(2:N))/P(i,i);
        elseif i==N
            Xnew(N)=(Rho(N)-P(N,1:N-1)*Xold(1:N-1))/P(i,i);
        else
            Xnew(i)=(Rho(i)-(P(i,1:i-1)*Xold(1:i-1))-(P(i,i+1:N)*Xold(i+1:N)))/P(i,i);
        end
        err(i)=abs(Xnew(i)-Xold(i))/Xnew(i);
    end
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

Xold(i)=Xnew(i);
end
end

%Continuity Equation
k1=(Dn*deltat)/((delta1^2)*(delta2^2)) ;
kk1=(Dp*deltat)/((delta1^2)*(delta2^2));

for j=1:n2
for i=1:n1
X1=(n1*(j-1))+i;
X2=(n1*(j-1))+i+1;
X3=(n1*(j-1))+i-1;
X4=(n1*(j))+i;
X5=(n1*(j-2))+i;

if i>1
nle=no(X3);ple=po(X3);Ptle=Xnew(X3);
else
nle=0;ple=0;Ptle=0;
end

if (i<n1)
nri=no(X2);pri=po(X2);Ptri=Xnew(X2);
else
nri=0;pri=0;Ptri=0;
end

if j>1
nbe=no(X5);pbe=po(X5);Ptbe=Xnew(X5);

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

else
    nbe=0;pbe=0;Ptbe=0;
end
if (j<n2)
    nup=no(X4);pup=po(X4);Ptup=Xnew(X4);
else
    nup=0;pup=0;Ptup=0;
end
k2=(Un*no(X1))*deltat/((delta1^2)*(delta2^2));
kk2=(Up*po(X1))*deltat/((delta1^2)*(delta2^2));

no(X1)=no(X1)+(k1*((delta2^2)*nri+(delta2^2)*nle+(delta1^2)*nup+(delta1^2)*nbe-
2*((delta1^2)+(delta2^2))*no(X1))-
k2*((delta2^2)*Ptile+(delta2^2)*Ptri+(delta1^2)*Ptup+(delta1^2)*Ptbe-
2*((delta1^2)+(delta2^2))*Xnew(X1));
po(X1)=po(X1)+(kk1*((delta2^2)*pri+(delta2^2)*ple+(delta1^2)*pup+(delta1^2)*pbe-
2*((delta1^2)+(delta2^2))*po(X1))-
kk2*((delta2^2)*Ptile+(delta2^2)*Ptri+(delta1^2)*Ptup+(delta1^2)*Ptbe-
2*((delta1^2)+(delta2^2))*Xnew(X1));
end
end

errs=abs((Xnew-X)./Xnew);
X=Xnew;
max(errs)
z=reshape(Xnew,n1,n2);
z1=reshape(no,n1,n2);
z2=reshape(po,n1,n2);
z3=reshape(Rho,n1,n2);
clf;

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
subplot(2,2,1);mesh(x,y,z);  
title('(a) Potential');  
subplot(2,2,2);mesh(x,y,z1);  
title('(b) electron concentration');  
subplot(2,2,3);mesh(x,y,z2);  
title('(c) hole concentration');  
subplot(2,2,4);mesh(x,y,z3);  
title('(d) Rho');  
end  
num
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้