

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ระบบควบคุมโรบัสต์

ROBUST CONTROL



ปริญญาบัตรนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต
สาขาวิศวกรรมแมคคาทรอนิกส์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2550

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญาโทปีการศึกษา 2550

ภาควิชาวิศวกรรมแมคคาทรอนิกส์ คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง ระบบควบคุมโรบัสต์
ROBUST CONTROL

ผู้จัดทำ นายณัฐนนท์ ณัฐวุฒิ 46010199



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ระบบควบคุมโรบัสต์

โดย

นายฉัฐนนท์ ฉัฐวุฒิ

อาจารย์ที่ปรึกษา

ผศ. ดร. ประเมษฐ์ ประชนยานันทน์

ปีการศึกษา 2550

บทคัดย่อ

ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้ ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีทางด้านระบบควบคุมโรบัสต์ โดยเฉพาะเรื่อง LQR หรือ Linear Quadratic regulator และ ระบบควบคุมโรบัสต์ LQR เป็น ทฤษฎีด้านการควบคุมที่ดีที่สุดและเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมและนิยมนำไปประยุกต์ใช้ในเชิงอุตสาหกรรม LQR เป็นคุณสมบัติของโรบัสต์เนส ในปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้ เราศึกษาคุณสมบัติด้านโรบัสต์เนส และยังแสดงให้เห็น ถ้าประสิทธิผลของการแปรผันค่าเมตริก Q และ R ของคุณสมบัติของทฤษฎีโรบัสต์เนส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ROBUST CONTROL

By

Mr. Nattanon Nattawut

Advisor

Asst. Prof. Dr. Poramate Pranayanuntana

Academic Year 2007

ABSTRACT

In this project I study robust control theory particularly the LQR or linear Quadratic regulator. LQR is the most widely used algorithm of an optimal control theory applied to industrial control. LQR possesses robustness properties. In this project I study this robustness properties and also show the effect of the two weight matrices Q&R on these robustness properties.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ACKNOWLEDGEMENT

I wish to thank Dr.Poramate Pranayanuntana for his guidance, both in the selection of this project topic and in its writing. Without him this project seems to be untouchable. I have spent lots of time with him at his place (Condo) and sometimes he even asked us to go to his home to finish up the work over many weekends. Therefore, I have learned many things from him.

I thank my friends – Mr. Nattapong Weerawong, Mr. Khemjira Assawathanatorn, Mr. Itthinan Lauha-apichanchot, Ms. Kaweena Konnark, Mr. Tanun Tangpanichyanon and Mr. Supakorn Patipanpreechawut whose supports and suggestions are very helpful.

I wish to thank all the teachers in the control/mechatronics department for all valuable suggestions and knowledge over the passed 4 years.

Finally, I wish to thank my father, mother, brother and sisters who support me until this project is finished.

TABLE OF CONTENTS

	Page
Chapter 1 Linear Quadratic control	1
1.1 Deterministic formulation of the Linear Quadratic Regulator (LQR)	1
Chapter 2 Robustness LQR	7
2.1 Robustness Properties of Linear Quadratic Regulator	7
2.2 Return Difference Equality	9
2.3 Robustness of LQR with sector Bounded Nonlinearities	18
2.4 Loss of Pass band Robustness Properties with Observer in the Loop	22
Chapter 3 Design of the state feedback by using the LQR	35
3.1 MATLAB implementation	35
3.2 Laboratory Exercises	37
Appendix A Stability	60
A.1 Main Stability Theorems	60
Appendix B Observability and Detectability	63

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

TABLE OF CONTENTS(CONTINUE)

	Page
Appendix C L_2 Norm	66
C.1 Deterministic Formulation	66
Bibliography	70



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LIST OF TABLES

Table	Page
3.1 Data for Varying Q	47
3.2 Data for Varying Q	52



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LIST OF FIGURES

Figure	Page
1.1 Feedback representation of LQR problem	6
2.1 Feedback interconnection	7
2.2 Feedback interconnection	8
2.3 Feedback interconnection	8
2.4 Feedback interconnection	9
2.5 Feedback interconnection	12
2.6 Nyquist plot	13
2.7 Nyquist plot	14
2.8 Forbidden disk	15
2.9 Forbidden disk	16
2.10 Feedback control design problem	19
2.11 Feedback representation of Figure 2.10	19
2.12 Robustness of LQR with sector Bounded Nonlinearities	20

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LIST OF FIGURES(CONTINUE)

Figure	Page
2.13 Feedback close-loop system	23
2.14 Feedback interconnection	25
2.15 Feedback diagram	25
2.16 The sector-bounded nonlinearities	26
2.17 Nonlinearities or unmodeled dynamics	27
3.1 Feedback system	35
3.2 Help of LQR in MATLAB	37
3.3 Step response (when varying Q)	41
3.4 Open loop Bode magnitude and phase (when varying Q)	42
3.5 Closed loop Bode magnitude and phase (when varying Q)	43
3.6 Open loop Bode magnitude and phase (when $Q = 1$)	44
3.7 Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$)	45
3.8 Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$)	46
3.9 Step response (when varying R)	49

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

LIST OF FIGURES(CONTINUE)

Figure	Page
3.10 Open loop Bode magnitude and phase (when varying R)	50
3.11 Closed loop Bode magnitude and phase (when varying R)	51
3.12 Nyquist Diagram	56
3.13 Nyquist Diagram	57
3.14 Nyquist Diagram	58
3.15 Open loop Bode magnitude and phase	59

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 1

Linear Quadratic control

1.1 Deterministic formulation of the Linear Quadratic Regulator (LQR)

Given the n^{th} order stabilizable system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), t \geq 0, x(0) = x_0 \quad (1.1.1)$$

Determine $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ such that the static full-state feedback control law

$$u(t) = Kx(t) \quad (1.1.2)$$

Satisfies the following criteria:

- I) The closed-loop system (1.1.1), (1.1.2) is asymptotically stable
- II) The performance functional

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (1.1.3)$$

Is minimized

$$\bullet A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, u \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, R \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

$$\bullet (A, B) \text{ stabilizable and } (A, Q^{\frac{1}{2}}) \text{ detectable}$$

Note that the performance function (1.1.3) indicates the desire to regulate the state trajectories $x(t)$ close to origin without excessive control effort.

$$\bullet x^T(t)Qx(t) \text{ term penalizes the deviation of state at instant } t \text{ from origin.}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- The $n \times n$ matrix Q determines the relative weight placed on each component of state.
- The $u^T(t)Ru(t)$ term penalizes the control expenditure. Here I assume $R > 0$.

Note that using (1.1.1) and (1.1.2) the closed-loop dynamics can be written as

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) \quad (1.1.4)$$

Where $\tilde{A} \triangleq A + BK$. Using the standard solution for state equation is follows that

$$x(t) = e^{\tilde{A}t}x(0) \quad (1.1.5)$$

Thus the performance index (1.1.3) becomes

$$\begin{aligned} J(K) &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T(t)[Q + K^T RK]x(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^T(0)e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A} t} x(0) dt \\ &= \frac{1}{2} tr \left[x^T(0) \left(\int_0^{\infty} e^{\tilde{A}^T t} + \tilde{R} e^{\tilde{A} t} dt \right) x(0) \right] \\ &= \frac{1}{2} tr \left[\int_0^{\infty} e^{\tilde{A}^T t} \tilde{R} e^{\tilde{A} t} dt \{x(0)x^T(0)\} \right] \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Where $\tilde{R} \triangleq Q + K^T RK$.

It is clear from (1.1.6) that the performance index is dependent on the initial state of the system. In order to eliminate the dependence of the performance index on the initial state of system I average the performance obtained over a linearly independent set of initial states. Hence

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

assume $x_0^{(1)} \dots x_0^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ are r linearly independent initial conditions for the system (1.1.1).

Taking the average performance over $x_0^{(j)}, j = 1, \dots, r$ yields

$$J_{avg}(K) = tr \left[\int_0^\infty e^{\lambda' t} \tilde{R} e^{\lambda t} dt \sum_{i=1}^r \frac{x_0^{(i)} x_0^{(i)T}}{r} \right] \quad (1.1.7)$$

$$V = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r x_0^{(i)} x_0^{(i)T}$$

$$J_{avg}(K) = tr \left[\int_0^\infty e^{\lambda' t} \tilde{R} e^{\lambda t} dt V \right] \quad (1.1.8)$$

Note that I could equivalently assume that the initial state $x(0)$ is a random variable with 0 mean and intensity V , i.e.:

$$E[x(0)] = 0$$

$$E[x(0)x^T(0)] = V$$

Then let

$$\begin{aligned} J(K) &= Etr \left[\int_0^\infty e^{\lambda' t} \tilde{R} e^{\lambda t} dt V \right] \\ &= tr \left[\int_0^\infty e^{\lambda' t} \tilde{R} e^{\lambda t} dt V \right] \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

Next, in order to satisfy the design specification *i*) I restrict K to a set of stabilizing control laws. So define

$$S \triangleq \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : \tilde{A} = A + BK \text{ is asymptotically stable}\}$$

Next, note that existence of a $K \in S$ implies existence of a $n \times n$ nonnegative-definite controllability Gramian M such that

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$0 = \tilde{A}M + M\tilde{A}' + V \quad (1.1.10)$$

In order to obtain closed-form gain expression for K I further restrict K to the open set

$$S^* \triangleq \{K \in S : M \text{ is positive definite}\} \quad (1.1.11)$$

Notation: $\Sigma \triangleq BR^{-1}B^T$

Theorem 1.1.1: Suppose $K \in S^*$ solves the LQR problem. Then \exists an $n \times n$ nonnegative definite matrix $P \in K$ is given by

$$K = -R^{-1}B^T P \quad (1.1.12)$$

and such that P satisfies

$$0 = A^T P + PAPQ - P\Sigma P \quad (1.1.13)$$

Furthermore, the minimal cost is given by

$$J_{avg}(K) = trPV \quad (1.1.14)$$

Proof: It follows (1.1.9) from that

$$J_{avg}(K) = trM\tilde{R} \quad (1.1.15)$$

Where

$$M = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{\lambda t} V e^{\lambda' t} dt \quad (1.1.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

which further implies existence of a nonnegative definite matrix M (Since $K \in S$) such that

$$0 = \tilde{A}M + M\tilde{A}^T + V$$

In order to optimize (1.1.15) subject to the constraint equation (1.1.10) over the open set S^* from the Lagrangian

$$L[K, M, P, \lambda] = \text{tr}[\lambda M\tilde{R} + (\tilde{A}M + M\tilde{A}^T + V)P] \quad (1.1.17)$$

Where the Lagrange multipliers λ and P are not both zero.

Note that $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is a matrix that accounts for the constraint equation (1.1.10). Next

$$\frac{\partial L}{\partial M} = \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + \lambda\tilde{R} \quad (1.1.18)$$

Setting $\frac{\partial L}{\partial M} = 0$ for each $\lambda \geq 0$ I have a unique nonnegative-definite solution for P .

However setting $\lambda = 0$ result in $P = 0$ (since \tilde{A} is asymptotically stable). Hence, without loss of generality I take $\lambda = 1$

$$0 = \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + \tilde{R} \quad (1.1.19)$$

Next.

$$\frac{\partial L}{\partial M} = 2RKM + 2B^T PM = 0$$

$$\Rightarrow K = -R^{-1}B^T P$$

Next. Manipulate (1.1.19) to obtain (1.1.13) as follows:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$0 = (A + BK)^T P + P(A + BK) + Q + K^T R K$$

$$0 = A^T P + PA + K^T B^T P + PBK + K^T R K + Q$$

$$0 = A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P - PBR^{-1}B^T P + (PBR^{-1})R(R^{-1}B^T P) + Q$$

$$0 = A^T P + PA + Q - P\Sigma P$$

Next, Note that (1.1.19) implies

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} \tilde{R} e^{A t} dt$$

Now (1.1.19) is equivalent to (1.1.14).

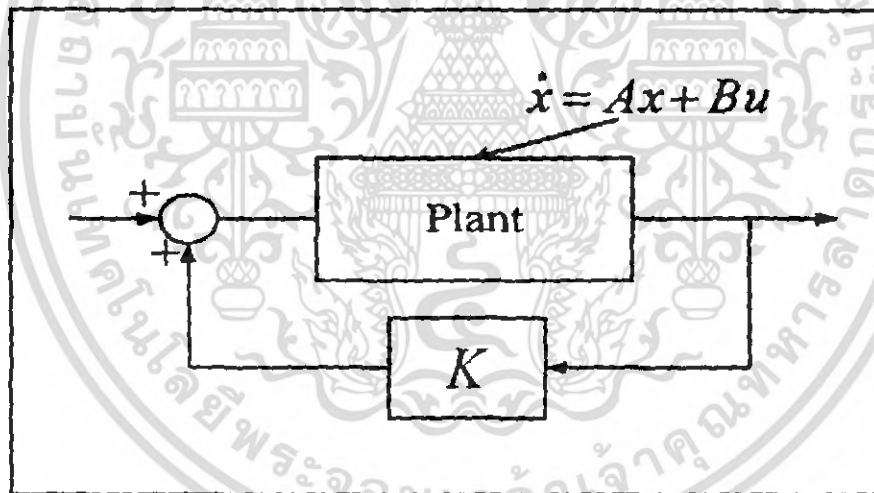


Figure 1.1 Feedback representation of LQR problem.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Chapter 2

Robustness LQR

2.1 Robustness Properties of Linear Quadratic Regulator

I developed the LQR design framework which provides an optimal feedback control law when the full state of plant is available for feedback. Also, recall that the LQR design framework minimizes a quadratic cost functional from the external Gaussian disturbance to the specified performance variable in H_2 sense. In the following discussion I examine the frequency domain properties of the LQR controllers and connect these to the classical notions of robustness (e.g., gain and phase margins). In fact I will demonstrate that the LQR controllers provide some very desirable robust stability margins. Before proceeding, recall that in the classical relative stability analysis problems the following feedback interconnection is considered:

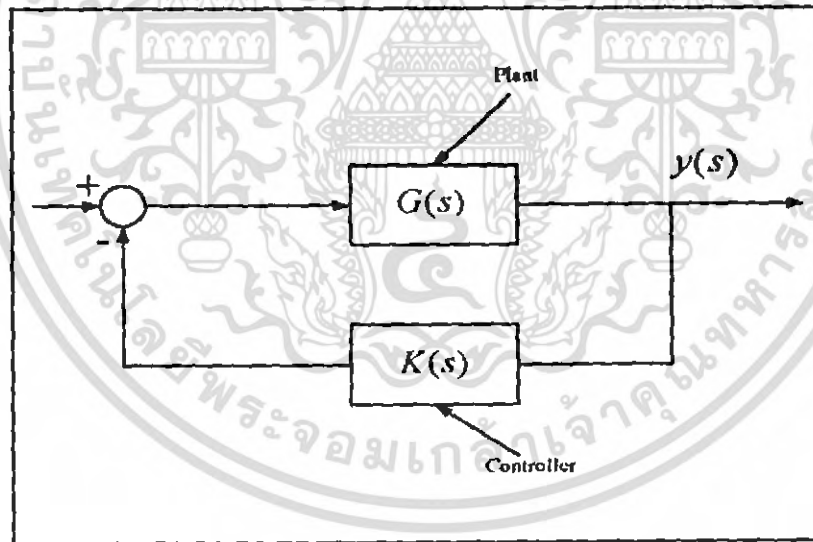


Figure 2.1 Feedback interconnection

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Also, it is obvious that the LQR problem can be depicted as a feedback interconnection given by:

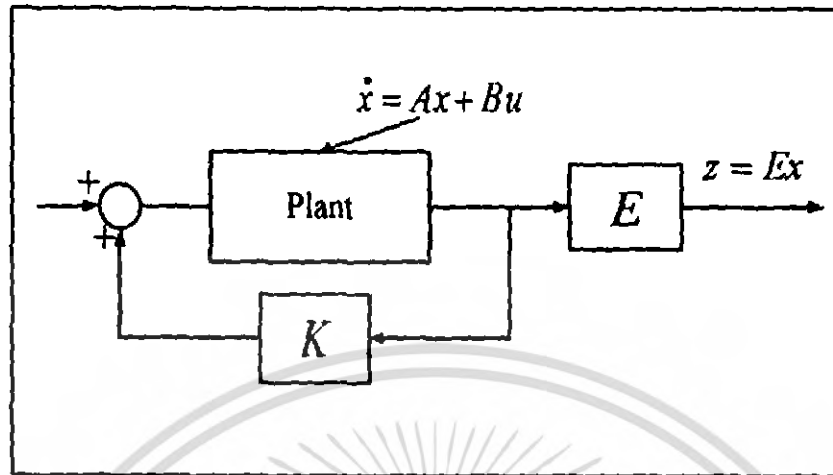


Figure 2.2 Feedback interconnection.

Note that the closed-loop system formed by the plant and LQ regulator involves the entire state of the plant rather than just the plant outputs. The feedback interconnection of Figure 2.2 can be reinterpreted as the following block diagram interconnection:

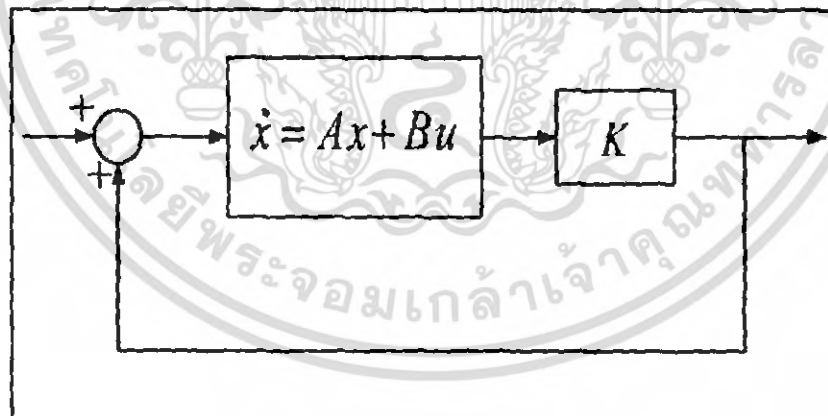


Figure 2.3 Feedback interconnection.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Now, note that the feedback interconnection of Figure 2.3 can be transformed to the classical feedback control system with unity negative feedback as shown below:

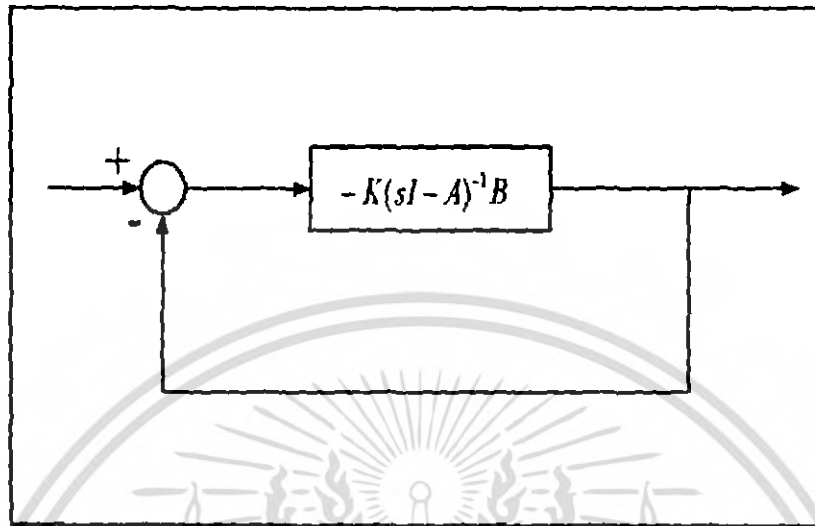


Figure 2.4 Feedback interconnection.

So, Fig 2.4 can be interpreted as the fact that LQR problem involves a negative feedback loop wrapped around a SISO system with transfer function $-K(sI - A)^{-1}B$. Now if I wishes to study the relative stability margin properties of the LQR then these issues can be addressed by addressing $G(s) = -K(sI - A)^{-1}B$ in the usual manner.

2.2 Return Difference Equality

Theorem 2.2.1 Consider the n^{th} -order dynamic system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$u(t) = Kx(t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

such that the quadratic performance measure

$$J(K) = \int_0^{\infty} [x^T(s)Qx(s) + u^T(s)Ru(s)] ds$$

is minimize. Assume that (A, B) is stabilizable and (A, E_1) is detectable where $Q = E_1^T E_1$. Furthermore, let $R > 0$. Then if K is the optimal control gain then the following identity holds:

$$B^T [-j\omega I - A]^{-T} Q [j\omega I - A]^{-1} B + R = [I - K(-j\omega I - A)^{-1} B]^T R [I - K(j\omega I - A)^{-1} B] \quad (2.2.1)$$

and as a consequence:

$$[I - K(-j\omega I - A)^{-1} B]^T R [I - K(j\omega I - A)^{-1} B] \geq R \quad (2.2.2)$$

Proof: In order to Show (2.2.1), recall that the optimal full-state feedback control gain K under the stated assumptions is given by

$$K = -R^{-1} B^T P \quad (2.2.3)$$

Where P satisfies the algebraic regulator Riccati Equation:

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1} B^T P$$

or, equivalently

$$0 = A^T P + PA + Q - K^T R K \quad (2.2.4)$$

Now, adding and subtracting $j\omega P$ to and from (2.2.4) and rearranging terms, I obtain:

$$Q = (-j\omega I - A)^T P + P(j\omega I - A) + K^T R K \quad (2.2.5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Next, forming

$$B^T (-j\omega I - A)^{-1} (2.2.5)(j\omega I - A)^{-1} B$$

yield:

$$\begin{aligned} B^T (-j\omega I - A)^{-1} Q(j\omega I - A)^{-1} B &= B^T P(j\omega I - A)^{-1} B + B^T (-j\omega I - A)^{-1} P B \\ &\quad + B^T (-j\omega I - A)^{-1} K^T R K(j\omega I - A)^{-1} B \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Next, since $K = -R^1 B^T P \Rightarrow -RK = B^T P$ so (2.2.6) yields:

$$\begin{aligned} B^T (-j\omega I - A)^{-1} Q(j\omega I - A)^{-1} B &= -RK(j\omega I - A)^{-1} B - B^T (-j\omega I - A)^{-1} K^T R \\ &\quad + B^T (-j\omega I - A)^{-1} K^T R K(j\omega I - A)^{-1} B \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Finally, adding R on both sides of (2.2.7) and completing the square and the R-H-S of (2.2.7), (2.2.1) is immediate. Finally, (2.2.2) follows from (2.2.1) trivially.

Note that in the single input case, $K(j\omega I - A)^{-1} B$ is a scalar transfer function. In this case, equation (2.2.1) (known as the return difference equality) becomes:

$$R + B^T (-j\omega I - A)^{-1} Q(j\omega I - A)^{-1} B = Q |1 - K(j\omega I - A)^{-1} B|^2 \quad (2.2.8)$$

and with $Q = E_1^T E_1$ (2.2.8) becomes:

$$R + |E_1 (j\omega I - A)^{-1} B|^2 = Q |1 - K(j\omega I - A)^{-1} B|^2 \quad (2.2.9)$$

Hence, in the single input case (2.2.9) yields a specialization of (2.2.2) given by:

$$|1 - K(j\omega I - A)^{-1} B|^2 \geq 1 \quad (2.2.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

i.e., for all ω the return difference is bounded by 1. For the multiinput case if $R = I_m$, then (2.2.2) yields:

$$\sigma_r [I - K(j\omega I - A)^{-1} B] \geq 1 \quad (2.2.11)$$

Note that by substituting $-K(j\omega I - A)^{-1} B = x(\omega) + jy(\omega)$ in (2.2.10) I obtain

$$|1 + x(\omega) + jy(\omega)|^2 \geq 1$$

$$[1 + x(\omega)]^2 + [y(\omega)]^2 \geq 1 \quad (2.2.12)$$

It is now clear from equation (2.2.12) that the Nyquist plot of the loop transfer function $-K(j\omega I - A)^{-1} B$ remains outside the unit disk centered at $-1 + j0$ point. This fact can be utilized to obtain relative stability margins of LQ regulator. However, before proceeding, I review the notion of gain and phase margins.

Consider the negative feedback interconnection

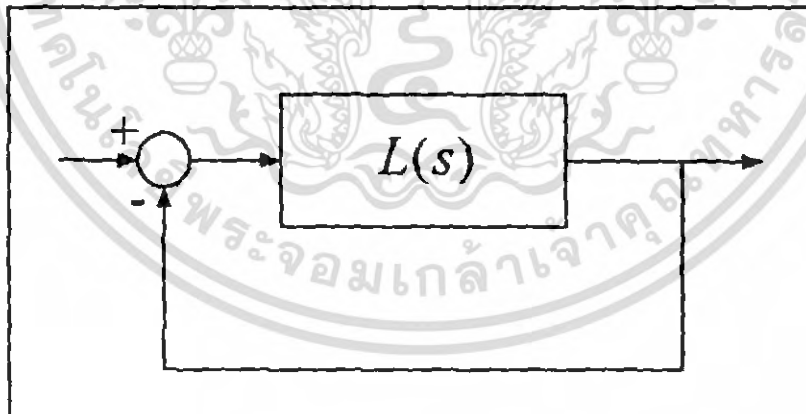


Figure 2.5 Feedback interconnection.

Suppose that the unity negative feedback interconnection shown in Figure 2.5 is stable with $L(s) = L_0(s)$. Then the system is said to possess:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Gain Margin: k_{\min} and k_{\max} if the close-loop system is stable for all $L(s) = kL_0(s)$ where $k_{\min} < k < k_{\max}$ but unstable for $L(s) = k_{\max}L_0(s)$ and $L(s) = k_{\min}L_0(s)$ and where $0 \leq k_{\min} \leq 1$ and $k_{\max} \geq 1$.

Phase Margin: ϕ_m if the close-loop system is stable for all $L(s) = e^{-j\phi}L_0(s)$ with $\phi < \phi_{\max}$ but unstable for $L(s) = e^{-j\phi_{\max}}L_0(s)$.

Note that these margins can be easily read off the Nyquist diagram of the loop transfer function $L_0(s)$.

Note that in the following diagram Figure 2.6 k_{\max} and k_{\min} indicate how much the loop gain can be increased and decreased, respectively, without causing close-loop instability. Similarly in Figure 2.7 ϕ_{\max} indicates the limit of phase angle before instability is encountered.

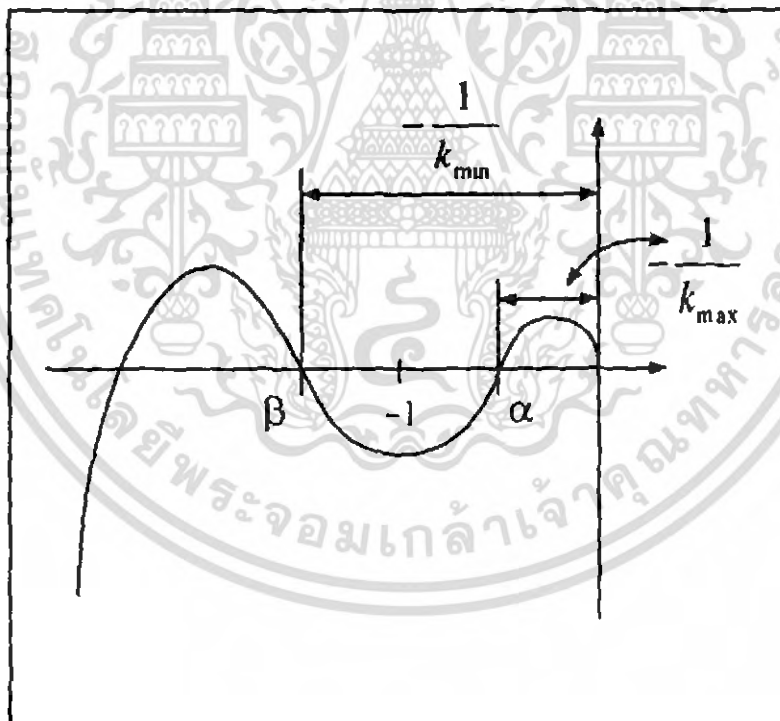


Figure 2.6 Nyquist plot.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

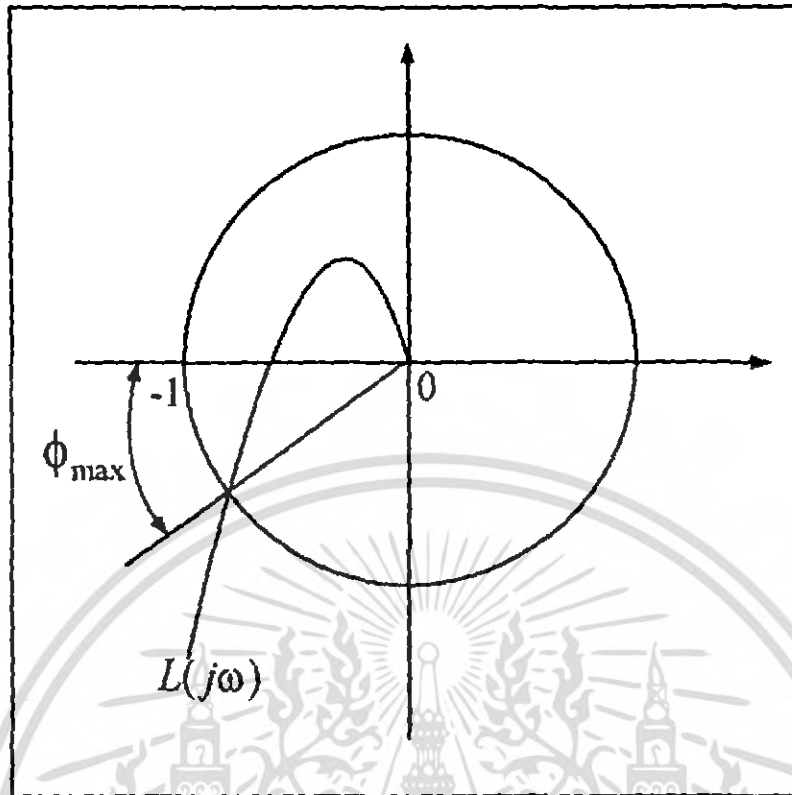


Figure 2.7 Nyquist plot.

Next, I revert my attention to equation (2.2.12) which implies that the Nyquist plot of $-K(j\omega I - A)^{-1}B$ remains outside the unit disk centered at $-1 + j0$. Hence, I obtain the forbidden disk in the Nyquist plane as shown below:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

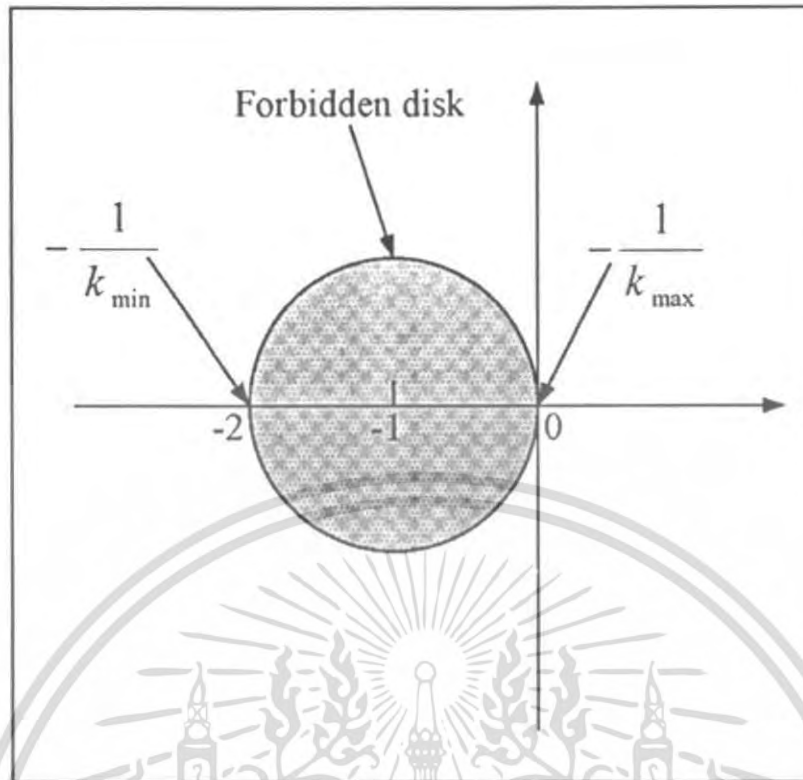


Figure 2.8 Forbidden disk.

Hence, Figure 2.8 indicates that the Nyquist plot of $-K(j\omega I - A)^{-1}B$ can lie anywhere in the Nyquist plane except in the forbidden disk. Hence, I obtain:

$$\frac{-1}{k_{\min}} = -2 \Rightarrow k_{\min} = \frac{1}{2} \Rightarrow 20 \log_{10}(t) = -6dB$$

$$\frac{-1}{k_{\min}} = 0 \Rightarrow k_{\max} = \infty \Rightarrow \infty dB$$

So, the LQR design guarantees stability of the close-loop system for a gain reduction of up to $6dB$ and an arbitrarily large gain increase. Similarly, in order to obtain the phase margin of LQR regulator note that $\angle AOC$ represents the maximum allowable phase change. Since $AO = OC = AC = 1$. It follows that $\phi_{\max} = 60^\circ$.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

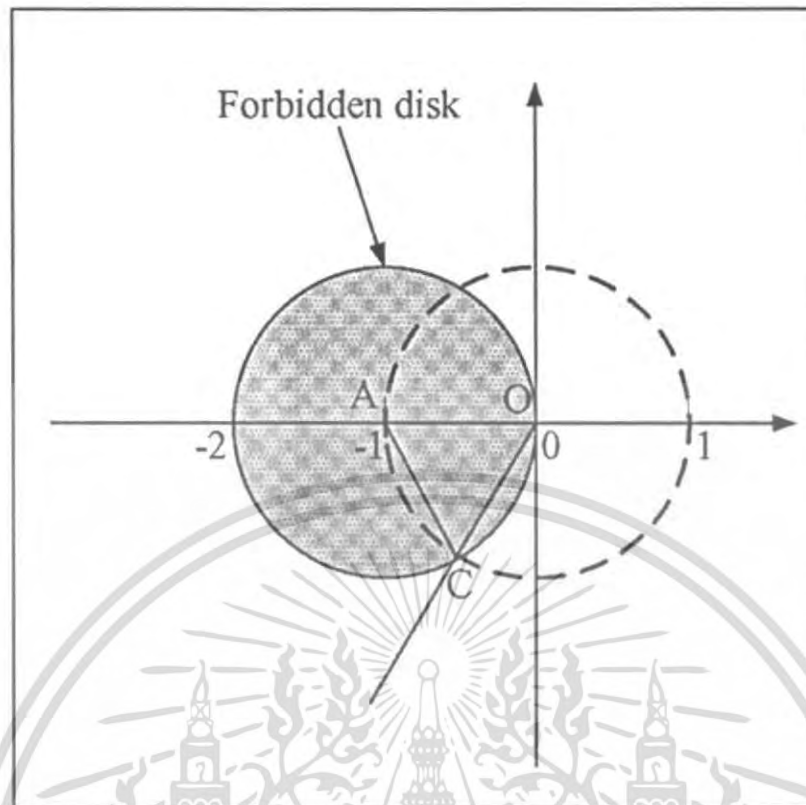


Figure 2.9 Forbidden disk.

Hence, I have shown that the LQR control design possesses at least $6dB$ gain reduction margin, ∞dB gain increase margin and 60° of phase margin.

Next, I present an algebraic technique to obtain the guaranteed gain and phase margins of the LQR design. Recall that the optimal regulator gain is given by $K = -R^{-1}B^T P$ where P is characterized via.

$$0 = A^T P + PA + Q - P \Sigma P$$

where $\Sigma = BR^{-1}B^T$. Next, adding and subtracting $2\sigma K^T B^T P$ to and from above and noting that $K^T B^T P$ is symmetric ($K^T B^T P = -BR^{-1}B^T P = PBK$), I obtain

$$0 = (A + \sigma BK)^T P + P(A + \sigma BK) + Q + (2\sigma - 1)P \Sigma P \quad (2.2.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Next, it follows that if (A, B) is stabilizable then $(A + \sigma BK)[(2\sigma - 1)P\Sigma P + R_1]^{-1/2}$ is also stabilizable for $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$:

$$(A, B) \text{ Stabilizable} \Rightarrow (A + \sigma BK, B) \text{ stabilizable}$$

$$(A + \sigma BK, [(2\sigma - 1)PBR_2^{-1}B^T P + R_1]^{-1/2}) \text{ Stabilizable} \quad \frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$$

Next, since exists $P \geq 0$ satisfying (2.2.13) for $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$, it follows that $A + \sigma BK$ is asymptotically stable for $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$.

Note that $\frac{1}{2} < \sigma \leq \infty$ clearly implies that the LQR design possesses ∞dB upward gain margin and $6 dB$ downward gain margin. Next, I show that the phase margin of an LQR design is at least 60° . Note that for $A + \sigma BK$ to be A.S. it is required that

$$2\sigma - 1 \geq 0$$

$$2\sigma \geq 1$$

Now, let 2σ be the sum of a complex number $\sigma + jy$ and its complex conjugate $\sigma - jy$.

Then

$$(\sigma + jy) + (\sigma - jy) \geq 1$$

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} \geq 1$$

$$\cos\theta + j\sin\theta + \cos\theta - j\sin\theta \geq 1$$

$$2\cos\theta \geq 1$$

$$\cos \theta \geq \frac{1}{2}$$

$$\theta \leq 60^\circ$$

2.3 Robustness of LQR with sector Bounded Nonlinearities

In the just concluded discussion I established that the LQR design possesses nice robustness properties in the presence of gain and phase variations at the plant input. In the following discussion I generalize this result to demonstrate that the LQR design in fact provides robustness in the face of arbitrary sector bounded nonlinearities.

Hence, consider the control design problem for linear system with input nonlinearity

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\phi(u(t)) \quad (2.3.1)$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (2.3.2)$$

where $\phi(\cdot)$ denotes a vector of component decoupled nonlinearities

$\phi(u) = [\phi_1(u_1) \dots \phi_m(u_m(t))]^T$ such that

$$\frac{1}{2} + \varepsilon_1 \leq \frac{\phi_i(u_i)}{u_i} \leq \varepsilon_2^{-1} \quad \forall i = 1 \dots m \quad (2.3.3)$$

and where ε_1 and ε_2 are small positive scalars. Note that the feedback control design problem of (2.3.1), (2.3.2) can be depicted in a schematic form as.

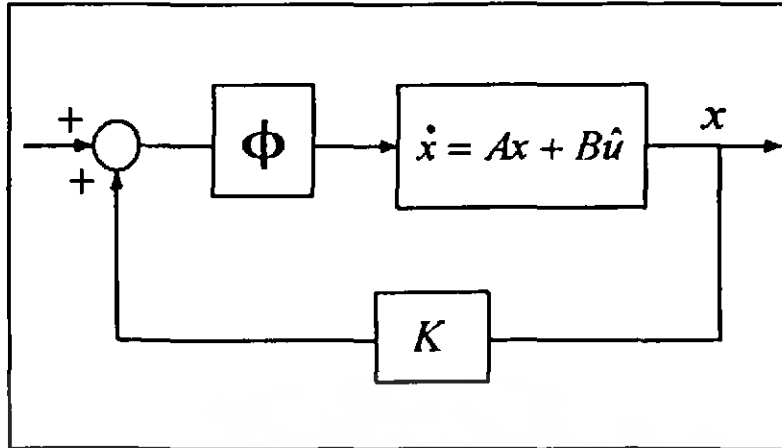


Figure 2.10 Feedback control design problem.

Note that the feedback representation of Figure 2.10 is equivalent to :

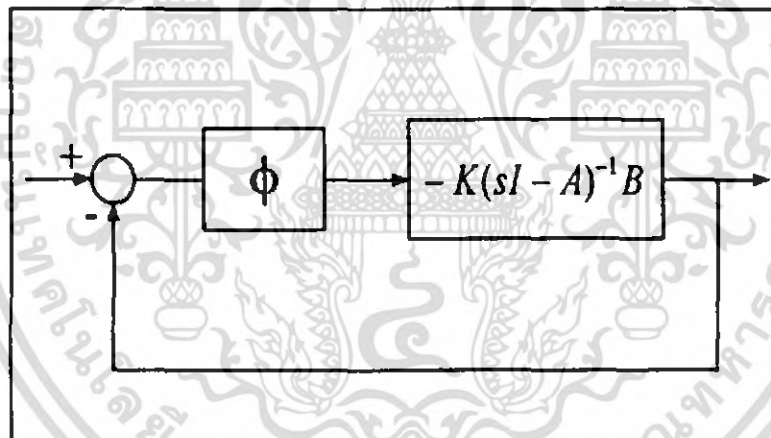


Figure 2.11 Feedback representation of Figure 2.10

Note that the nonlinearities in (2.3.3) can be shown to be sector-bounded. Furthermore, it follows that the each element of $\phi(t)$ is memoryless and is confined within a sector that is supposed to lie in 1st and 3rd quadrant as shown in the figure 2.12.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

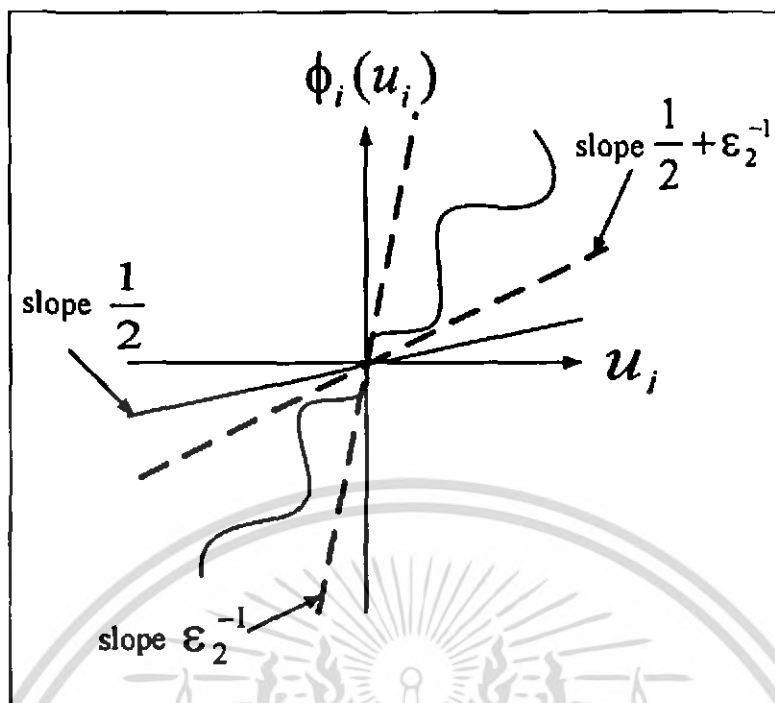


Figure 2.12 Robustness of LQR with sector Bounded Nonlinearities.

Theorem 2.3.1 Given the optimal LQ regulator gain $K = -R^{-1}B^T P$ where P is the solution of algebraic regulator Riccati equation, the optimal close-loop system is A.S. for all arbitrary nonlinearities satisfying (2.3.3) when such nonlinearities are inserted at the plant input.

Proof: Recall, P satisfies:

$$0 = A^T P + PA + Q - P\Sigma P \quad (2.3.4)$$

where $\Sigma \triangleq BR^{-1}B^T$ Next, let

$$V(x) = x^T P x \quad (2.3.5)$$

be a Lyapunov function candidate. In this discussion, I constrain the algebraic regulator Riccati equation solution P to be positive definite. Note that the Lyapunov derivative of (2.3.5) along system trajectories is given by

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\
&= x^T(t)[A^T P + PA]x(t) + \phi^T(u)B^T Px(t) + x^T(t)PB\phi(u)
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Next, using (2.3.4) and $-RK = B^T P$, it follow that (2.3.6) is equivalent to

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= x^T [P\Sigma P - Q]x - \phi^T(u)RKx - x^T K^T R\phi(u) \\
&= -x^T Qx + x^T K^T RKx - \phi^T(u)RKx - x^T K^T R\phi(u)
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Next, with $R = \text{diag}_{i=1}^m(r_i)$ I obtain

$$\begin{aligned}
2x^T K^T R\phi(u) &= \sum_{i=1}^m 2r_i (Kx)_i \phi_i(u) \\
&\geq \sum_{i=1}^m 2r_i \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_i\right) (Kx)_i^2 \\
&= (1 + 2\varepsilon_i) \sum_{i=1}^m r_i (Kx)_i^2 \\
&= (1 + 2\varepsilon_i) x^T K^T RKx
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Hence, using (2.3.7), (2.3.8) yields:

$$\dot{V} \leq -x^T Qx - 2\varepsilon_i x^T K^T RKx \tag{2.3.9}$$

Since $\dot{V}(x) \leq 0$ I have stability, In order to show A.S. note that $\dot{V}(x) = 0$ implies $x^T Qx = 0$ and $Kx = 0$

$$x^T Qx = 0 \Rightarrow x^T E_1^T E_1 x = 0 \tag{2.3.10}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

and $Kx = 0 \Rightarrow u = 0$ so $\phi(u) = 0$

Now

$$\dot{x} = Ax + B\phi(u) = Ax \quad (2.3.11)$$

Using $\dot{x} = Ax$ and $\varepsilon_1 x = 0$ it follows that since (A, ε_1) is detectable, $\dot{V}(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ Hence A.S. is establishes.

2.4 Loss of Pass band Robustness Properties with Observer in the Loop

In the following discussion I demonstrate that the guaranteed pass band robustness properties of LQR Controllers do not carry over to the LQR realm. It will be shown that the LQR Controller eventhough optimal for the nominal plant, may have unsatisfactory performance when the nominal plant model does not capture the real physical plant. It will be shown that the LQR control design problem result in a return difference in equality which differs from the LQR case. In the following development I shall ignore the plant disturbance and measurement noise since they do not influence consider the L.T.I. dynamic system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.4.1)$$

with dynamic compensator

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c y(t) \quad (2.4.2)$$

$$u(t) = C_c x_c(t) \quad (2.4.3)$$

Note that with the optimal controller gain $A_c = A - B_c C + B C_c$ (2.4.2) can be rewritten as

$$\dot{x}_c(t) = (A - B_c C) x_c(t) + B u(t) \quad (2.4.4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Hence, the close-loop system (2.4.1) - (2.4.3) can be represented as:

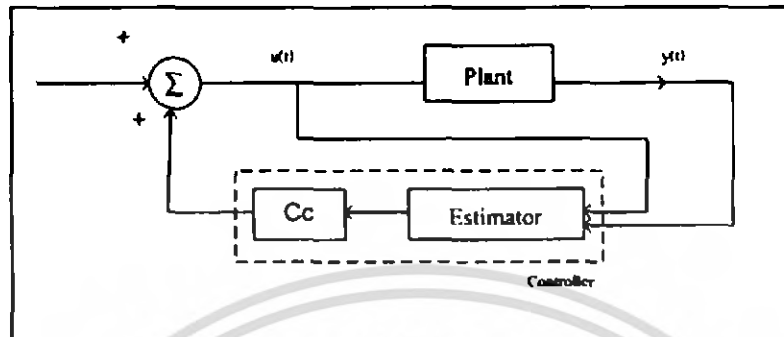


Figure 2.13 Feedback close-loop system.

Next, I rewrite (2.4.1) and (2.4.2) as

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
 &= Ax(t) + B[\hat{u}(t) + r(t)] \\
 &= (A + BC_c)x(t) - BC_c x_c(t) + B\hat{u}(t) + Br(t) \\
 &= (A + BC_c)x(t) - BC_c x_c(t) + BuC_c x_c(t) + Br(t)
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

where $e(t) \triangleq x(t) - x_c(t)$ and

$$\dot{x}_c(t) = (A - B_c C + BC_c)x_c(t) + B_c y(t) + Br(t) \tag{2.4.6}$$

Now computing $\dot{e}(t)$ I get

$$\dot{e}(t) \triangleq \dot{x}(t) - \dot{x}_c(t)$$

เอกสารนี้เป็นของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
 ไม่ว่าการณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= (A + BC_c)(x(t) - x_c(t)) - BC_c e(t) - BC_c x_c(t) - B_c C x(t) \\
&= (A + BC_c)e(t) - BC_c e(t) - B_c C e(t) \\
&= A e(t) - B_c C e(t) \\
&= (A - B_c C)e(t)
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

Hence, augmenting (2.4.5) and (2.4.7) I obtain:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + BC_c & -BC_c \\ 0 & A - B_c C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Hence the transfer function from reference signal r to the output y is given by

$$\begin{aligned}
G_{y,r}(s) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \left[sI_{2n} - \begin{bmatrix} A + BC_c & -BC_c \\ 0 & A - B_c C \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= C [sI_n - (A + BC_c)]^{-1} B
\end{aligned}$$

Note that with $C_c = -R_2^{-1} B^T P$ (same as LQR gain), it follows that the transfer function $G_{y,r}(s)$ is the same transfer function if just full-state feedback were to be employed. Next, note that figure 2.13 can be reinterpreted as a unity feedback interconnection shown below:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

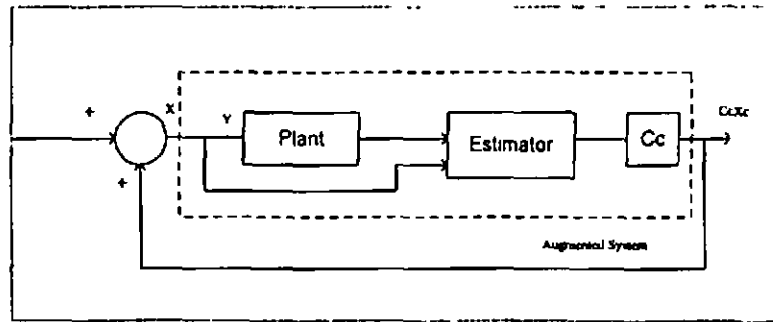


Figure 2.14 Feedback interconnection.

Now note that at steady state $C_c x_c \rightarrow C_c x$ which implies that the transfer function of the augmented system shown in figure 2.14 is $C_c [SI - A]^{-1} B$. This exactly is the transfer function that was used to evaluate the gain and phase margin properties of the LQR design. So the augmented system interpretation of figure 2.14 allows for LQR type robustness guarantees if the loop were to be broken at point x marked in figure 2.14.

The following feedback diagram however provides a more realistic arrangement.

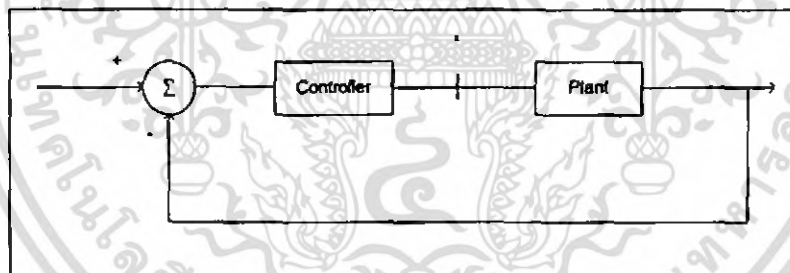


Figure 2.15 Feedback diagram

$$\text{Controller: } -C_c [SI - (A + BC_c - B_c C)]^{-1} B_c$$

$$\text{Plant: } C_c [SI - A]^{-1} B$$

Now, in order to analyze the input robustness properties I must open the loop at the plant input marked x in the above figure, which gives a loop transfer function:

$$-[-C_c [SI - (A + BC_c - B_c C)]^{-1} B_c] [C_c [SI - A]^{-1} B] \quad (*)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

It should be noted that if the loop in figure 2.14 were to be opened at y , once again (*) will be obtained. Note, however, that the above loop transfer function does not correspond to the loop transfer function $C_c [SI - A]^{-1} B$ obtained in the LQR robustness analysis. Hence, the return difference equation obtained in the LQR design is no longer applicable for the prediction of pass band robustness of LQR design. So, in the realistic case depicted in figure 2.15 the guaranteed pass band properties of LQR design do not apply, however, they do apply to the setup depicted in fig 2.14. However, the guaranteed pass band properties of LQR design obtained within the setup of figure 2.14 do not occur at the actual plant input and hence they are not very attractive. This fact becomes even more transparent by the following analysis.

Recall that the LQR design permitted robustness to arbitrary time-varying nonlinearities in the sector $(\frac{1}{2}, \infty)$ (I only showed time-invariant case) inserted into the control loop prior to the plant input. This property also carries over to the LQR design when the sector-bounded nonlinearities are inserted in the loop as shown below:

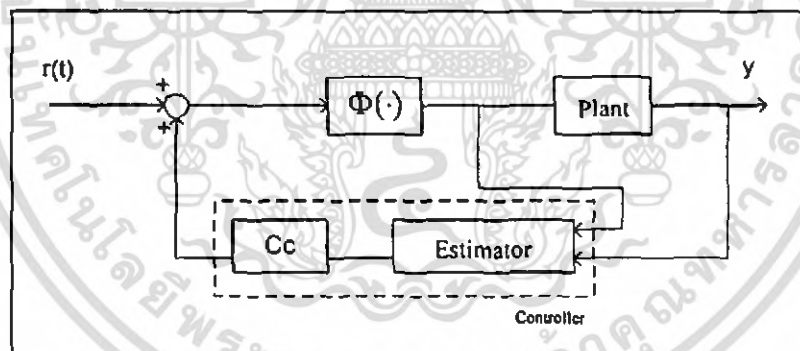


Figure 2.16 The sector-bounded nonlinearities

However, note that the guaranteed robustness in the face of sector bounded nonlinearities in figure 2.16 is achieved at a point in the feedback loop where it is usually physically not meaningful from a control implementation point of view, it is quite obvious that no nonlinearities or unmodeled dynamics will arise in the feedback loop at the location indicated in the above figure. A more realistic case where such nonlinearities or unmodeled dynamics might arise is shown in the following figure:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

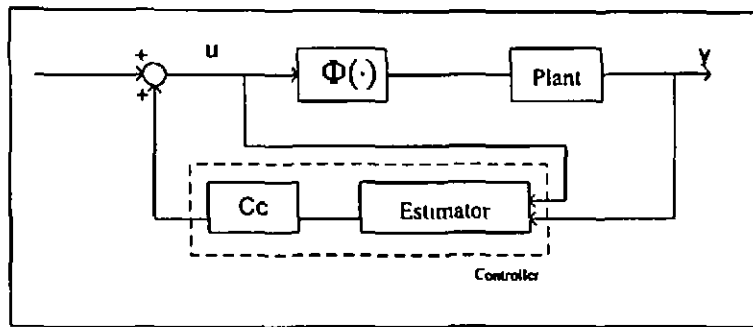


Figure 2.17 Nonlinearities or unmodeled dynamics.

However, for the case shown in figure 2.17, the LQR like guarantee of robustness to time-varying sector bounded nonlinearities evaporated.

One way to overcome this problem would be to insert the same nonlinearity ϕ in the path from u to the estimator. However there is a potential difficulty in implementing this solution specifically, the exact nature of the nonlinearity $\phi(\cdot)$ is usually not known and hence it would be physically impossible to insert an artificial $\hat{\phi}(\cdot)$ in the path from u to the estimator where $\hat{\phi}(\cdot)$. However, in order to exploit the guaranteed pass band robustness property of LQR controllers that occur at "wrong place" one could potentially try to make the path from u to estimator output depends more on the plant output y compared to plant input u . In the ideal case when the path from u to estimator is effectively delete the schemes of figure 2.16 and figure 2.17 are equivalent and hence the guaranteed pass band robustness properties are recovered using an LQR controller. The systematic way of implementing the above solution is known as linear-quadratic-Gaussian/loop-transfer-recovery (LQG/LTR) design framework. However, note that the LQG/LTR procedure can yield at most the LQR type relative stability margin guarantees.

Proof: When in

$$0 = A Q + Q A^T + \rho D_1 D_1^T - Q C^T V_2^{-1} C Q \quad (2.4.8)$$

I let $\rho \rightarrow \infty$

Then

$$B_c = \sqrt{\rho} D_1 W V_2^{-1/2} \quad (2.4.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Where W is some orthogonal matrix and B_c is Kalman filter gain.

Proof: Recall $B_c = QC^T V_2^{-1/2}$

add and subtract $j\omega Q$ to and from (2.4.8)

$$0 = (-j\omega Q + A)Q + Q(j\omega I + A)^T + V_1 - QC^T V_2^{-1} CQ$$

$$\rho D_1 D_1^T = (j\omega Q - A)Q + Q(-j\omega I - A)^T + QC^T V_2^{-1} CQ \quad (2.4.10)$$

Form $C(j\omega I - A)^{-1} (2.4.10) (-j\omega I - A)^{-T} C^T$

$$\begin{aligned} \rho U(j\omega)U^*(j\omega) &= CQ(-j\omega I - A)^{-T} C^T + C(j\omega I - A)^{-1} QC^T \\ &\quad + C(j\omega I - A)^{-1} QC^T V_2^{-1} CQ(-j\omega I - A)^{-T} C^T \end{aligned}$$

Where $U(j\omega) \triangleq C(j\omega I - A)^{-1} D_1$

Next:

$$B_c = QC^T V_2^{-1}$$

$$QC^T = B_c V_2$$

$$\begin{aligned} \rho U(j\omega)U^*(j\omega) &= V_2 B_c^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T + C(j\omega I - A)^{-1} B_c V_2 \\ &\quad + C(j\omega I - A)^{-1} B_c V_2 B_c^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T \end{aligned}$$

$$\rho U(j\omega)U^*(j\omega) = V_2 W^*(j\omega) + W(j\omega) V_2 + W(j\omega) V_2 W^*(j\omega)$$

where $W(j\omega) \triangleq C(j\omega I - A)^{-1} B_c$

Now, divide through in this equation by ρ

$$U(j\omega)U^*(j\omega) = \frac{V_2}{\rho} W^*(j\omega) + \frac{W(j\omega)}{\rho} V_2 + \frac{1}{\rho} W(j\omega) V_2 W^*(j\omega)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(j\omega I - A)^{-1} D_1 D_1^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T = \frac{V_2}{\rho} B_c^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T + \frac{1}{\rho} C (j\omega I - A)^{-1} B_c \\ + \frac{1}{\rho} C (j\omega I - A)^{-1} B_c V_2 B_c^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T$$

For above identity to hold, when $\rho \rightarrow \infty$, I must have

$$B_c = \sqrt{\rho} \tilde{B}_c$$

where \tilde{B}_c is independent of ρ . Then I will get as $\rho \rightarrow \infty$

$$C(j\omega I - A)^{-1} D_1 D_1^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T = C(j\omega I - A)^{-1} \tilde{B}_c V_2 \tilde{B}_c^T (-j\omega I - A)^{-T} C^T$$

Solution of which will be of the form:

$$\tilde{B}_c V_2^{1/2} = D_1 W$$

$$\text{so } \tilde{B}_c = D_1 W V_2^{-1/2}$$

$$B_c = \sqrt{\rho} D_1 W V_2^{-1/2} \quad \text{Q.E.D.}$$

LQG/LTR Design: Now I present an asymptotic recovery procedure which endows the LQG Controllers with LQR-type relative stability margins. This procedure was first reported in a celebrated paper by Doyle and Stein (IEEE TAC, 1979) and is commonly referred to as LQG-loop transfer recovery method.

The key concept in this procedure is to replace the plant disturbance intensity V_1 by $V_1 + rBB^T$ where B is the plant input matrix and r is a scalar parameter. Using LQG/LTR procedure, it can be shown that the loop transfer function, with loop opened at the actual plant input, for LQG problem asymptotically approaches the loop transfer function for the LQR problem as $r \rightarrow \infty$. Hence, by injecting large fictitious disturbances in the plant, the LQG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

controller asymptotically recovers the LQR-type relative stability margins. In the following discussim a detail proof is provided for the intuitive argument proposed .

In the Kalman filter design Riccati equation, replace the plant noise intensity V_1 by $V_1 + rBB^T$ where $r > 0$ is an arbitrary scalar.

Then:

$$0 = AQ + QA^T + V_1 + rBB^T - QC^T V_2^{-1} CQ \quad (2.4.11)$$

Also, recall that the gain B_c is computed via

$$B_c = QC^T V_2^{-1} \quad (2.4.12)$$

Hence, (2.4.11) can be rewritten as:

$$0 = AQ + QA^T + V_1 + rBB^T - B_c V_2 B_c^T \quad (2.4.13)$$

Next, divide equation (2.4.13) by r so that

$$0 = A \left(\frac{Q}{r} \right) + \left(\frac{Q}{r} \right) A^T + \left(\frac{V_1}{r} \right) + BB^T - \left(\frac{B_c V_2^{1/2}}{r} \right) \left(\frac{B_c V_2^{1/2}}{r} \right)^T \quad (2.4.14)$$

Note that as I let $r \rightarrow \infty$ (a very large number) (2.4.14) can be replace by (Kwakernaak and Sivan, 1972)

$$\begin{aligned} BB^T - \left(\frac{B_c V_2^{1/2}}{\sqrt{r}} \right) \left(\frac{B_c V_2^{1/2}}{\sqrt{r}} \right)^T &= 0 \\ \left(\frac{B_c V_2^{1/2}}{\sqrt{r}} \right) \left(\frac{B_c V_2^{1/2}}{\sqrt{r}} \right)^T &= BB^T \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

It now follows by direct substitution in (2.4.15) that the solutions of above are of the form

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{B_c}{\sqrt{r}} V_2^X = BW \quad (2.4.16)$$

where W is an arbitrary orthogonal matrix. Hence using (2.4.16)

$$B_c = \sqrt{r} BW V_2^X \quad (2.4.17)$$

Next, consider the controller transfer function

$$G_c(s) = C_c [SI - A_c]^{-1} B_c$$

Recall

$$A_c = A - B_c C + BC_c$$

So

$$G_c(s) = C_c [SI - A - B_c C + BC_c]^{-1} B_c \quad (2.4.18)$$

Next, define

$$\phi_c(s) \triangleq (SI - A - BC_c)^{-1} \quad (2.4.19)$$

In the following developments, I will suppress the argument s of $\phi_c(\cdot)$. However, before proceeding I state and prove the matrix inversion Lemma.

Lemma:

$$(I + XY)^{-1} X = X(I + YX)^{-1}$$

Proof:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$(I + XY)^1 X(I + YX) = (I + YX)^{-1}(I + XY)X$$

$$(I + XY)^1 X = X(I + YX)^{-1} \quad \text{Q.E.D.}$$

Next, note that using (2.4.19), (2.4.18) can be rewritten as:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= C_c [\phi_c^{-1} + B_c C]^{-1} B_c \\ &= C_c [\phi_c^{-1} (I + \phi_c B_c C)]^{-1} B_c \\ &= C_c [I + \phi_c B_c C]^{-1} \phi_c B_c \\ &= C_c \phi_c B_c [I + \phi_c B_c C]^{-1} \end{aligned}$$

So:

$$G_c(s) = C_c \phi_c B_c [I + \phi_c B_c C]^{-1} \quad (2.4.20)$$

Now, substitute for B_c in (2.4.20) using (2.4.17), so that:

$$G_c(s) = C_c \phi_c \left(\sqrt{r} B W V_2^{-1/2} \right) \left[I + C \phi_c \sqrt{r} B W V_2^{-1/2} \right]^{-1} \quad (2.4.21)$$

Note that when r gets very large

$$\left[I + C \phi_c \sqrt{r} B W V_2^{-1/2} \right]^{-1} \approx \left[C \phi_c \sqrt{r} B W V_2^{-1/2} \right]^{-1} \quad (2.4.22)$$

Hence, using (2.4.22), (2.4.21) yields:

$$G_c(s) = C_c \phi_c B [C \phi_c B]^{-1} \quad (2.4.23)$$

Next, let us define $\phi \triangleq [SI - A]^{-1}$ and restrict attention to $\phi_c B$, so that:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
\phi_c B &= (SI - A - BC_c)^{-1} B \\
&= (\phi^{-1} - BC_c)^{-1} B \\
&= [I - \phi BC]^{-1} \phi B \\
&= \phi B [I - C\phi B]^{-1}
\end{aligned} \tag{2.4.24}$$

So, now (2.4.23) yields:

$$\begin{aligned}
G_c(s) &= C_c \phi_c B [C\phi_c B]^{-1} \\
&= C_c \phi B [I - C\phi B]^{-1} [C\phi B (I - C\phi B)^{-1}]^{-1} \\
&= C_c \phi B (C\phi B)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.4.25}$$

Next, recall that if in the LQR control problem, the loop is opened at the actual plant input, the loop gain is given by

$$-G_c(s)G(s) = -C_c [SI - A_c]^{-1} B_c \cdot C [SI - A]^{-1} B \tag{2.4.26}$$

Which, using (2.4.25) yields:

$$\begin{aligned}
-G_c(s)G(s) &= -C_c \phi B (C\phi B)^{-1} (C\phi B) \\
&= -C_c \phi B
\end{aligned} \tag{2.4.27}$$

However, $-C_c \phi B$ corresponds to the loop transfer function obtained in the LQR problem. Hence using the regulator Riccati equation I can now show that the closed loop system with an LQG regulator provides similar relative stability margin guarantees as the LQR controller.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Comment: Note that the above procedure is valid for minimum phase systems only (systems with stable poles and strictly left half plane zeros). This is so because when forming $G_c(s)G(s)$ in (2.4.27) a plant inversion was performed to cancel the plant dynamics [$(C\phi B)^{-1}$ term]. Clearly, if the open loop plant contained right half plane zeros, they will manifest themselves as unstable poles of $(C\phi B)^{-1}$ and the computation of loop transfer function $G_c(s)G(s)$ will involve unstable pole-zero cancellation, which renders the above relative stability analysis meaningless. Extension, of LQG/LTR procedure for nonminimum phase systems have been developed in the literature but will not be pursued here. A direct procedure for designing guaranteed gain and phase margin dynamic controller has been developed by Kapila (Ph.D.dissertation 1996). This procedure is directly applicable to systems with non minimum phase zeros. Moreover this procedure can yield dynamic controllers that can potentially provide larger gain and phase margins than the recovered LQR type margins provided by LQG/LTR procedure. Furthermore, note that the LQG/LTR procedure discussed above is extremely sensitive to plant dynamics. The direct synthesis procedure of Kapila (1996) is also applicable to systems with parametric uncertainties.

Chapter 3

Design of the state feedback by using the LQR

3.1 MATLAB implementation

The commands

```
>> K=lqr(A,B,Q,R);
```

Solve the continuous-time linear quadratic regulator problem and the associated Riccati equation.

This command calculates the optimal feedback gain matrix K such that the feedback control law.

$$u(t) = -Kx(t)$$

Minimizes the performance index

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

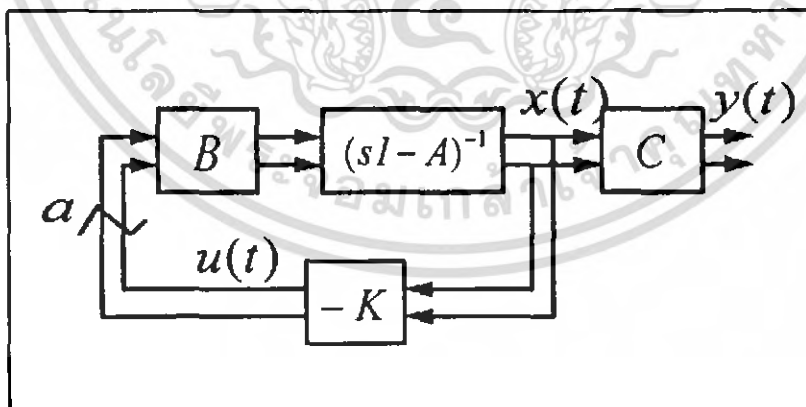


Figure 3.1 Feedback system.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

subject to constraint equation

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Another command

```
>> [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R,N);
```

Also returns matrix P , the unique positive-definite solution to the associated matrix Riccati equation:

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

If matrix $A - BK$ is a stable matrix, such a positive-definite solution P always exists. The close-loop poles or eigenvalues of $A - BK$ are also obtained by this command. It is important to note that for certain systems matrix $A - BK$ cannot be made a stable matrix, whenever K is chosen. In such a case there does not exist a positive-definite matrix P for the matrix Riccati equation. For such a case the commands.

do not give the solution.

```
>> K=lqr(A,B,Q,R);
>> [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R);
```

```

>> help lqr

LQR Linear-quadratic regulator design for continuous-time systems.

[K,S,E] = LQR(A,B,Q,R,N) calculates the optimal gain matrix K
such that the state-feedback law  $u = -Kx$  minimizes the cost
function

 $J = \text{Integral} (x'Qx + u'Ru + 2*x'Nu) dt$ 

subject to the state dynamics  $\dot{x} = Ax + Bu$ .

The matrix N is set to zero when omitted. Also returned are the
Riccati equation solution S and the closed-loop eigenvalues E:

 $SA + A'S - (SB+N)R^{-1}(B'S+N') + Q = 0, E = \text{EIG}(A-B*K)$ 

```

Figure 3.2 Help of LQR in MATLAB.

3.2 Laboratory Exercise

Exercise. 1) (LQR command.) Consider the system described by

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

where

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The performance index J is given by

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

where

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = [1]$$

Assume that the following control u is used.

$$u(t) = Kx(t)$$

From Riccati equation

$$0 = A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$K = -R^{-1}B^T P$$

$$= -[1][0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [-1 \ -1]$$

Thus the optimal control signal is given by

$$u(t) = Kx(t) = -x_1(t) - x_2(t)$$

MATLAB yields the solution to this problem.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```
>> %****Enter state matrix A and control matrix B****%
```

```
>> A=[0 1; 0 -1];
```

```
>> B=[0; 1];
```

```
>> Q=[1 0; 0 1];
```

```
>> R=[1];
```

```
>> A
```

```
A =
```

```
 0 1
 0 -1
```

```
>> B
```

```
B =
```

```
 0
 1
```

```
>> %%%%%Matrix K can be obtained by entering
the following command%%%%%%%%%
```

```
>> K=lqr(A,B,Q,R)
```

```
K =
```

```
1.0000 1.0000
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Exercise. 2) (Effects of Q and R) The state space equations and the transfer function are repeated below for convenience.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.4 & 0 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1.4 & 9.8 & -0.02 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 6.3 \\ 0 \\ 9.8 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1]x$$

I would like to determine the effects of weighting matrices Q and R .

Case I: Change Q by $I, 10I, 100I, 1000I, 1000000I$

Use MATLAB solve this case

```

a=[-0.4 0 -0.01; 1 0 0; -1.4 9.8 -0.02];
b=[6.3; 0; 9.8];
c=[0 0 1];
d=0;
t=0:0.1:10;
bsize=size(b); noinp=bsize(2); csize=size(c); noout=csize(1);
r=1; qq=[1 10 100 1000 1000000];
for i=1:5
    q=qq(i);
    [gain,p]=lqr(a,b,q*eye(3),r);
    cgh=gain; dgh=0;
    at=a-b*gain; bt=b; ct=c; dt=0;
    out=step(at,bt,ct,dt,1,t); out=out/out(length(out));
    hold on
    figure(1)
    bode(a,b,cgh,dgh);
    title('Open loop Bode magnitude and phase(change Q)')
    hold on
    figure(2)
    bode(at,bt,ct,dt);
    title('Closed loop Bode magnitude and phase(change Q)')
    hold on
    figure(3)
    plot(t,out)
    grid
    title('Step response(change Q)')
    xlabel('Time(sec)')
    ylabel('Output')
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

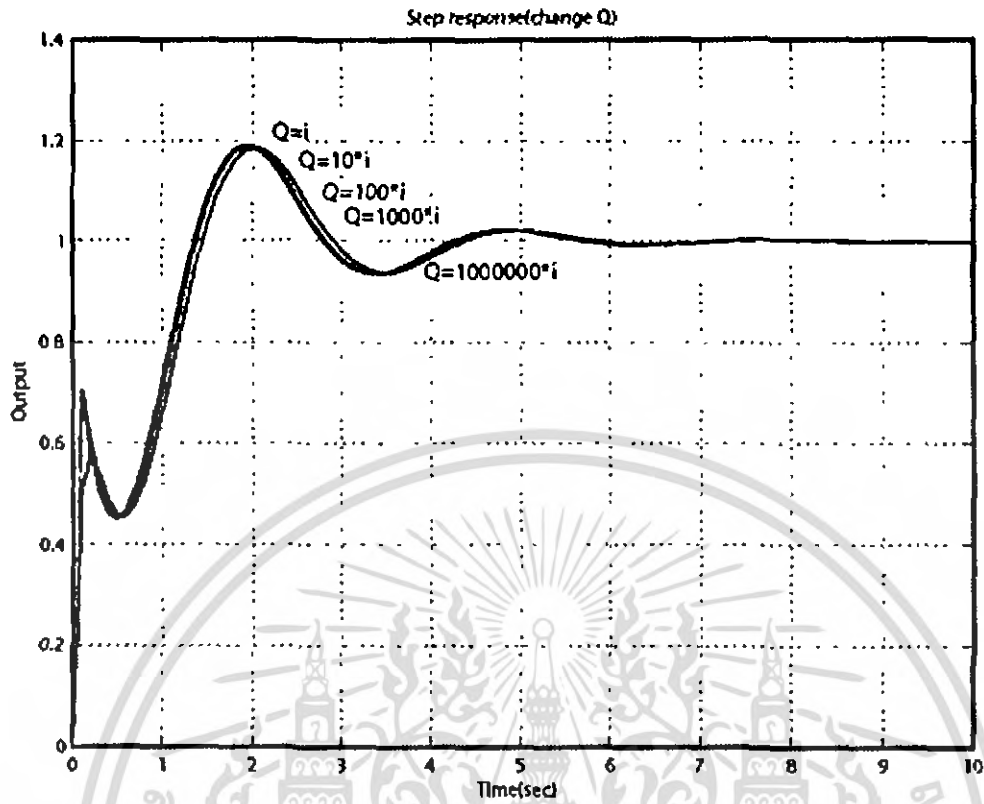


Figure 3.3 Step response (when varying Q).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

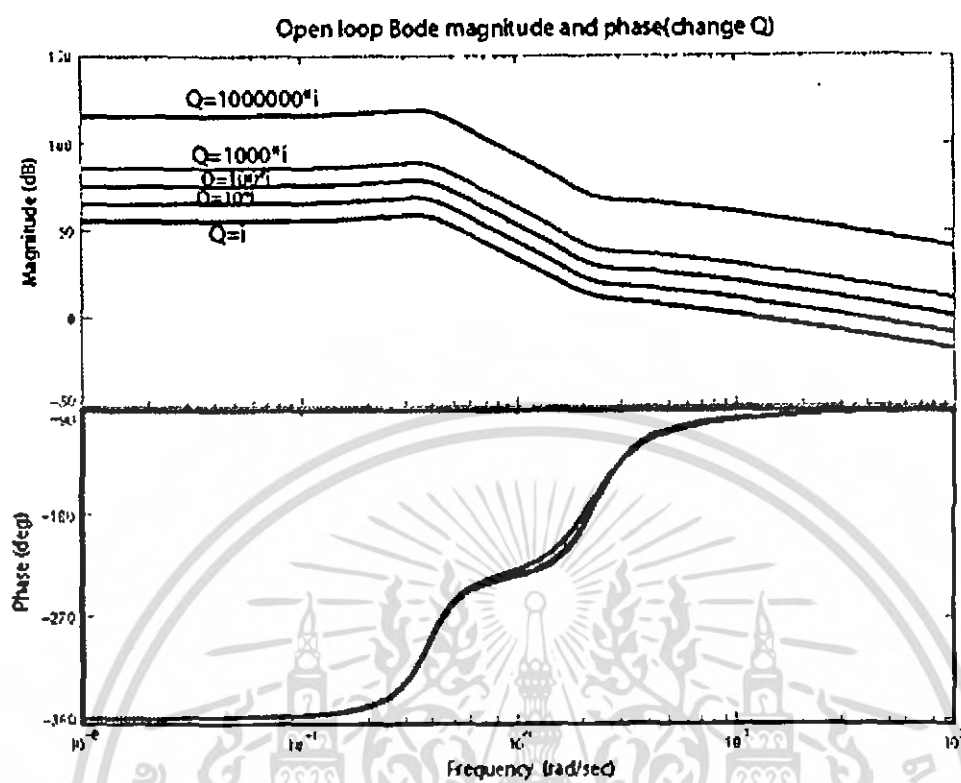


Figure 3.4 Open loop Bode magnitude and phase (when varying Q).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

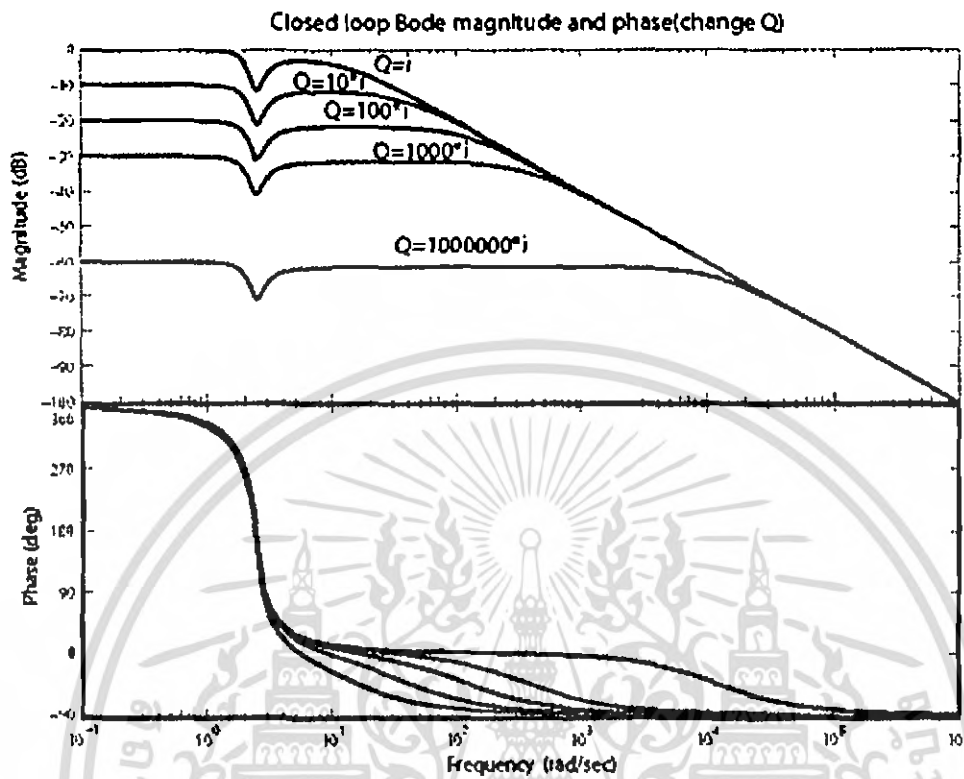


Figure 3.5 Closed loop Bode magnitude and phase (when varying Q).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Consider the case where $Q = 1$.

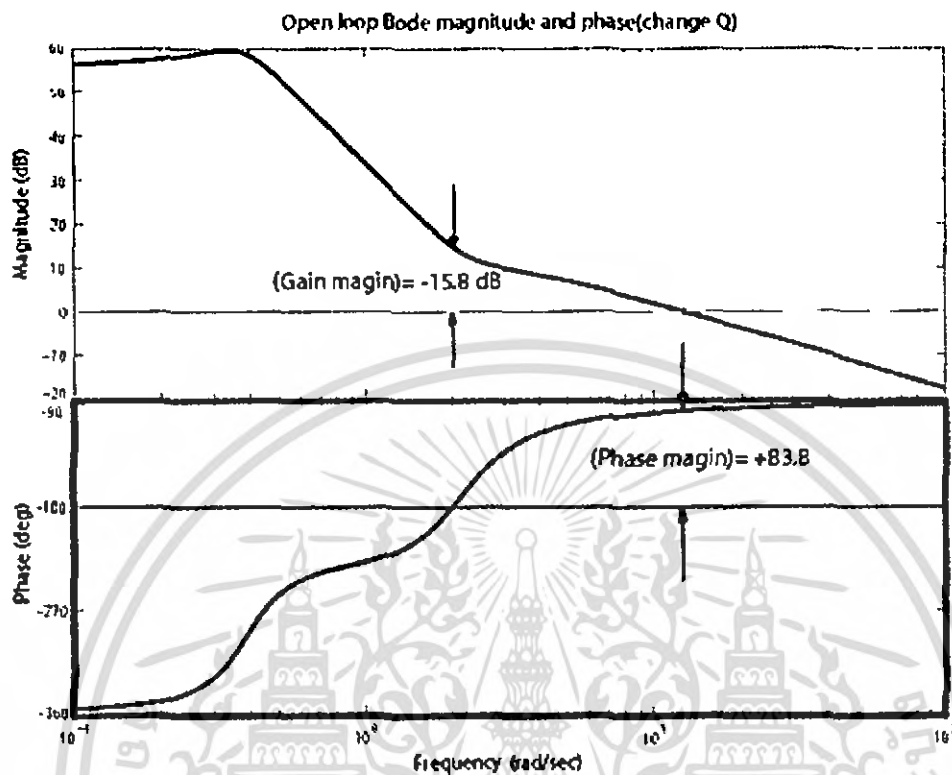


Figure 3.6 Open loop Bode magnitude and phase (when $Q = 1$).

The phase and gain margin for $K = [0.52 \quad 4.38 \quad 0.99]$ are

$$\text{Gain Margin} = -15.8 \text{ dB}$$

$$\text{Phase Margin} = 83.8^\circ$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

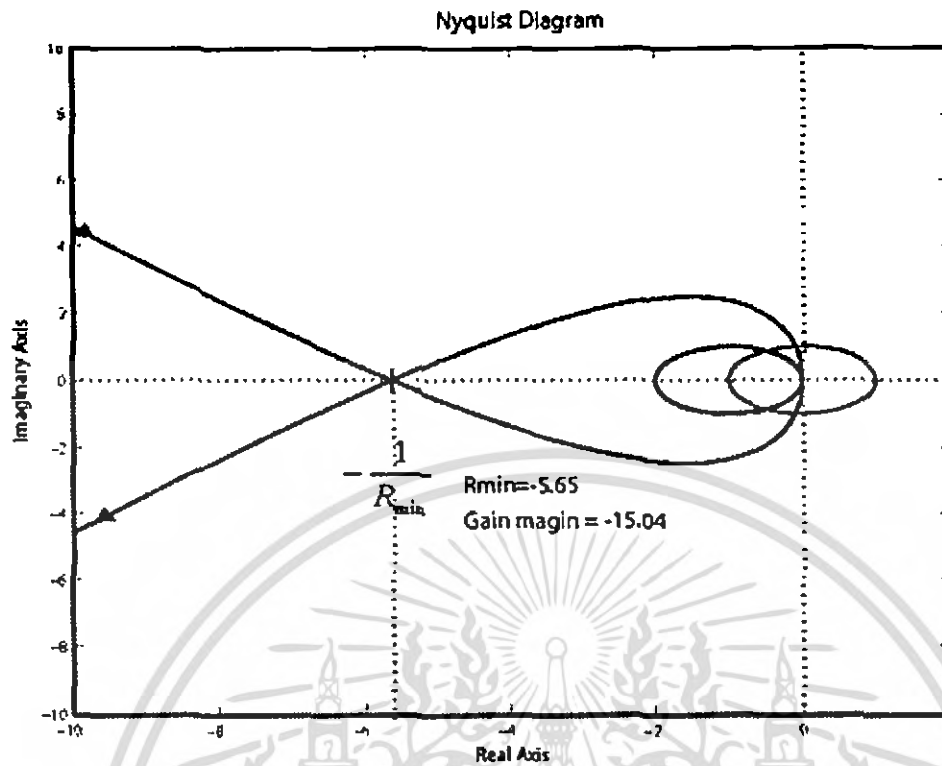


Figure 3.7 Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$).

$$Z = N + P$$

$$N = Z - P$$

Where Z = number of zeros of $1 + G(s)H(s)$ in the right-half s plane

N = number of clockwise encirclements of the $-1 + j0$ point

P = number of poles of $G(s)H(s)$ in the right-half s plane

From this Nyquist and MATLAB

$$N = 2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานที่ $P = 2$ ศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Z = -2 + 2$$

$$Z = 0$$

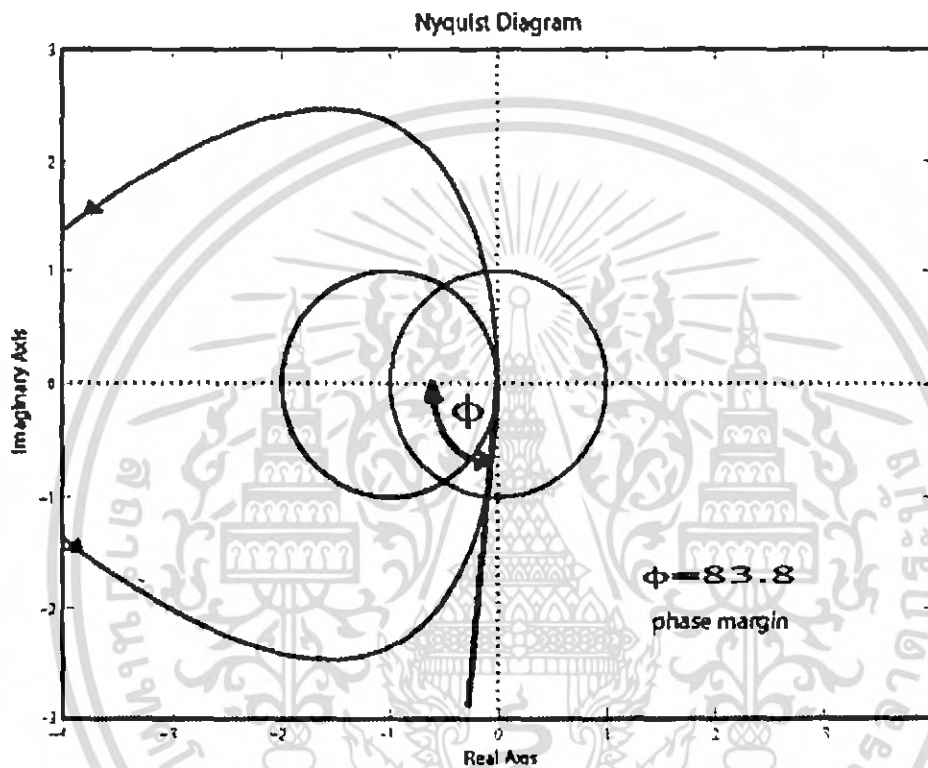


Figure 3.8 Nyquist Diagram and forbidden disk (when $Q = 1$).

This problem is stable for $K = [0.52 \quad 4.38 \quad 0.99]$, $Q = 1$ and $R = 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The cheap control case.

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

$$\frac{r}{q} \rightarrow 0$$

$\|u\|$ tends to increase because its cost is relatively decreasing, so larger gains are used. This may cause saturation problem in practice.

Table 3.1 Data for Varying Q

Table 1. Data for Varying Q

Q	Control gain vector			Gain margin	Phase margin	wcg	wcp
1	0.52	4.38	1	-15.8	83.8	12.7	2
10	1.12	11.89	3.15	-22.9	88.2	37.9	2.12
100	3.13	35.73	9.98	-30.8	89.4	1117.4	2.15
1000	9.53	111.15	31.57	-40.7	89.8	369.4	2.16
1,000,000	296.36	3489.2	998.39	-70.6	-	-	2.17

The phase margin is larger than 80 degrees in all case (for $Q = 10^6$, there was no gain crossover frequency over the selected range for the Bode plot). The negative gain margin indicates by how much the gain can be reduced before instability occurs. It is at least $-15dB$ and increases with Q . Using the gain crossover frequency as an approximate measure of the bandwidth, I observe that as the stability margins increase, bandwidth increases.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Case II: Change R by $R = 1, 10, 100, 1000, 1000000$

Use MATLAB solve this case

```

a=[-0.4 0 -0.01; 1 0 0; -1.4 9.8 -0.02];
b=[6.3; 0; 9.8];
c=[0 0 1];
d=0;
t=0:0.1:10;
bsize=size(b); noinp=bsize(2); csize=size(c); noout=csize(1);
rr=[1 10 100 1000 1000000]; q=eye(3);
for i=1:5
    r=rr(i);
    [gain,p]=lqr(a,b,q,r);
    cgh=gain; dgh=0;
    at=a-b*gain; bt=b; ct=c; dt=0;
    out=step(at,bt,ct,dt,1,t); out=out/out(length(out));
    hold on
    figure(1)
    bode(a,b,cgh,dgh);
    title('Open loop Bode magnitude and phase(change R)')
    hold on
    figure(2)
    bode(at,bt,ct,dt);
    title('Closed loop Bode magnitude and phase(change R)')
    hold on
    figure(3)
    plot(t,out)
    grid
    title('Step response')
    xlabel('Time(sec)')
    ylabel('Output')
end

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

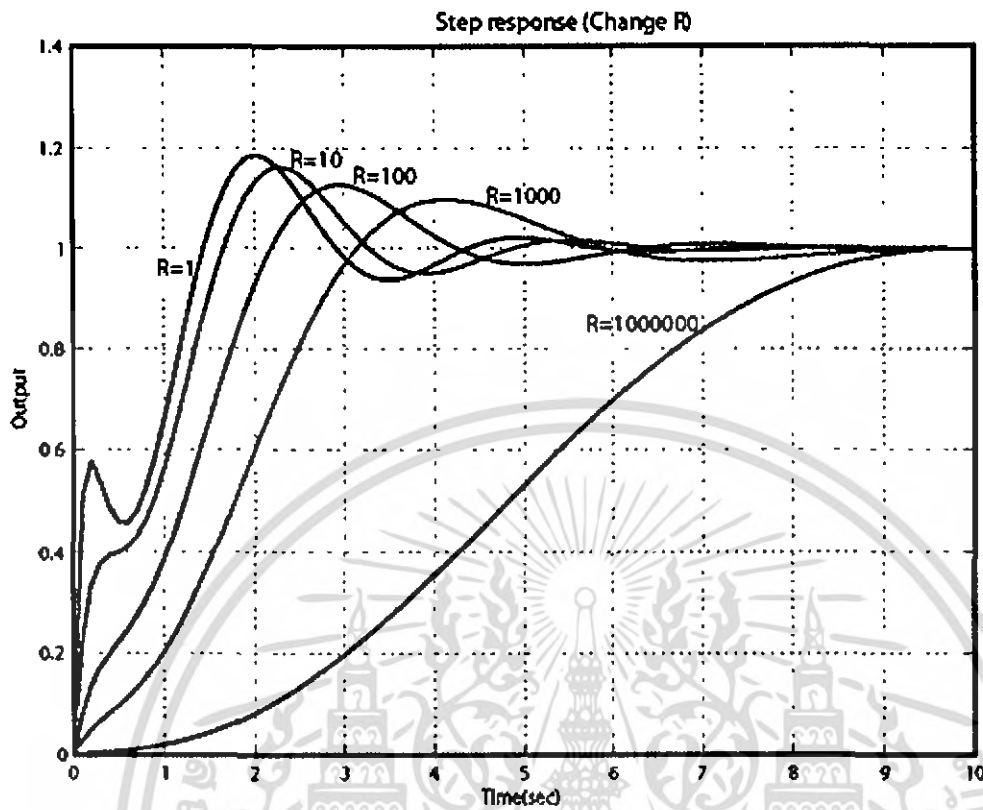


Figure 3.9 Step response (when varying R).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

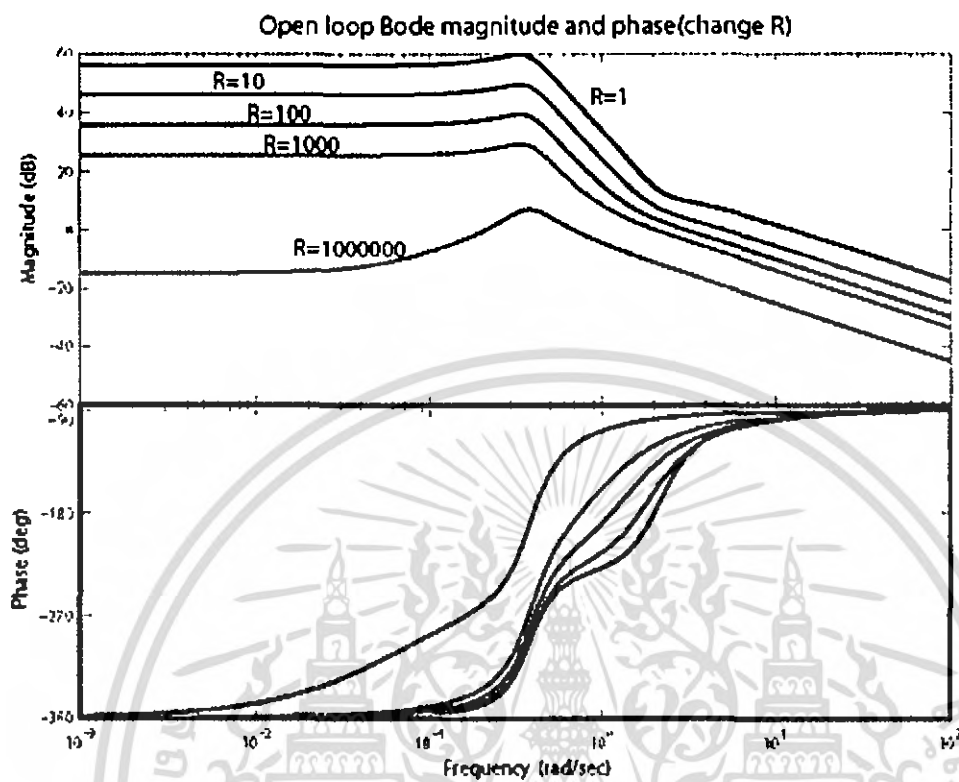


Figure 3.10 Open loop Bode magnitude and phase (when varying R).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

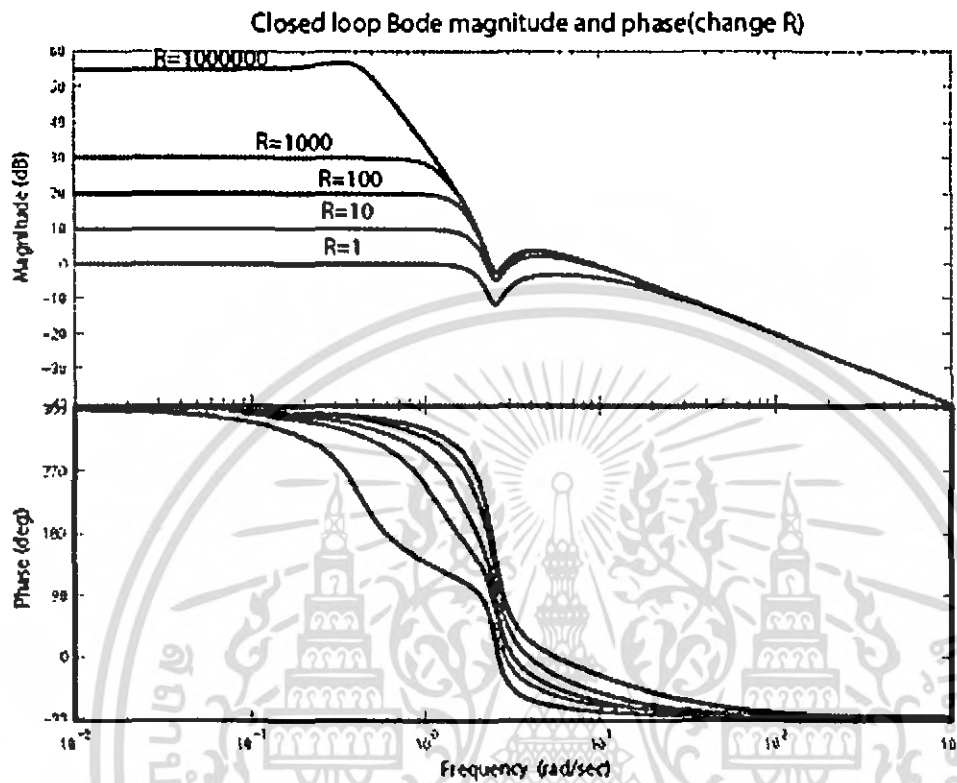


Figure 3.11 Closed loop Bode magnitude and phase (when varying R).

I study the minimum energy control case. The ratio of Q/R is allowed to approach zero. The values of control gain vector, step response characteristics, and stability margin measures are shown in Table 3.2. Note that, as expected, the gain decrease with higher values of R .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Table 3.2 Data for Varying Q

Table 2. Data for Varying R

R	Control gain vector			Gain margin	Phase margin	wcg	wcp
1	0.52	4.38	1	-15.8	83.8	12.7	2
10	0.39	1.96	0.31	-11.8	71.2	5.2	1.6
100	0.35	0.98	0.09	-12.6	61.9	3.1	1.1
1000	0.28	0.48	0.02	-14	60.5	2.1	0.7
1,000,000	0.08	0.06	0.0002	-7.2	60.7	0.7	0.4

The step response characteristics indicate that with large values of R . The overshoot decreases, whereas all speed of response measure will increase, resulting in a well damped and slow system. The margins indicate that the lower gain and phase margin are pushed to their limits of -6 dB and 60 degree with increasing R . The bandwidth decreases as the margins are reduced, but roll-off rate remains at -20 dB per decade.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Exercise. 3) (Applied to other problem.) For a plant described by:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & -0.05 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ -1.5 & -8.9 & -0.05 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] x(t)$$

design a linear quadratic controller that minimizes the cost function

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

Perform the design for different values of Q and R

Solution.

$$A = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.1 & -0.05 \\ 1 & 0.1 & 0 \\ -1.5 & -8.9 & -0.05 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

and the cost function is

$$J(K) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

Then

$$Q = I$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$R = 1$$

Solve MATLAB find K, P

```
>> A=[-0.3 0.1 -0.05; 1 0.1 0; -1.5 -8.9 -0.05];
>> B=[2;0;4];
>> C=[0 0 1];
>> D=0;
>> Q=eye(3);
>> R=1;
>> [K,P,E]=lqr(A,B,Q,R)
```

K =

5.9789 10.2705 -1.0786

P =

8.4490 15.8136 -2.7298
15.8136 31.4205 -5.3392
-2.7298 -5.3392 1.0952

E =

-3.0224 + 0.7856i
-3.0224 - 0.7856i
-1.8484

such that

$$K = [5.9789 \quad 10.2705 \quad -1.00786]$$

$$P = \begin{bmatrix} 8.4490 & 15.8136 & -2.7298 \\ 15.8136 & 31.4205 & -5.3392 \\ -2.7298 & -5.3392 & 1.0952 \end{bmatrix}$$

Obtain the open-loop transfer function to calculate the gain and phase margins. Compare the results for different values of Q and R .

Solving by MATLAB (see Nyquist and bode plot).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

A=[-0.3 0.1 -0.05; 1 0.1 0; -1.5 -8.9 -0.05];
B=[2;0;4];
C=[0 0 1];
D=0;
qq=[1 2 3 4 5];
for i=1:5
Q1=qq(i)*eye(3);
R1=1;
[k1,p1,e]=lqr(A,B,Q1,R1)
Ac=A-B*k1;
figure(1)
[num1,den1]=ss2tf(A,B,k1,D)
nyquist(num1,den1)
hold on
end
x=[-2;0.01;0];
y=sqrt(1-(x+1).^2)
plot(x,y,'r')
plot(x,-y,'r')
hold off

```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

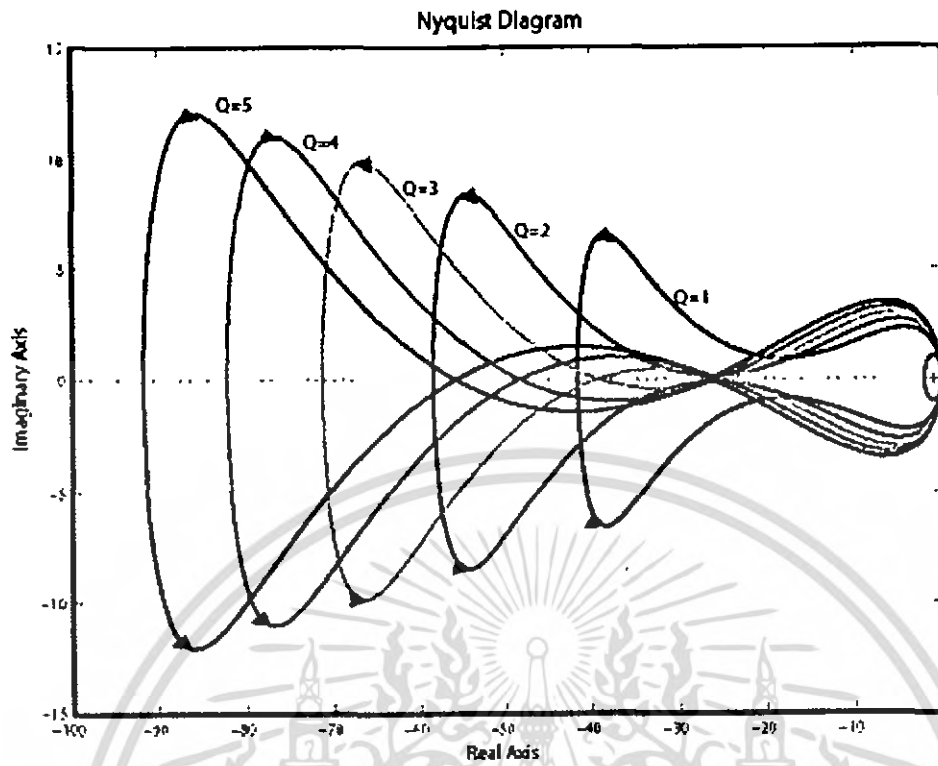


Figure 3.12 Nyquist Diagram.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

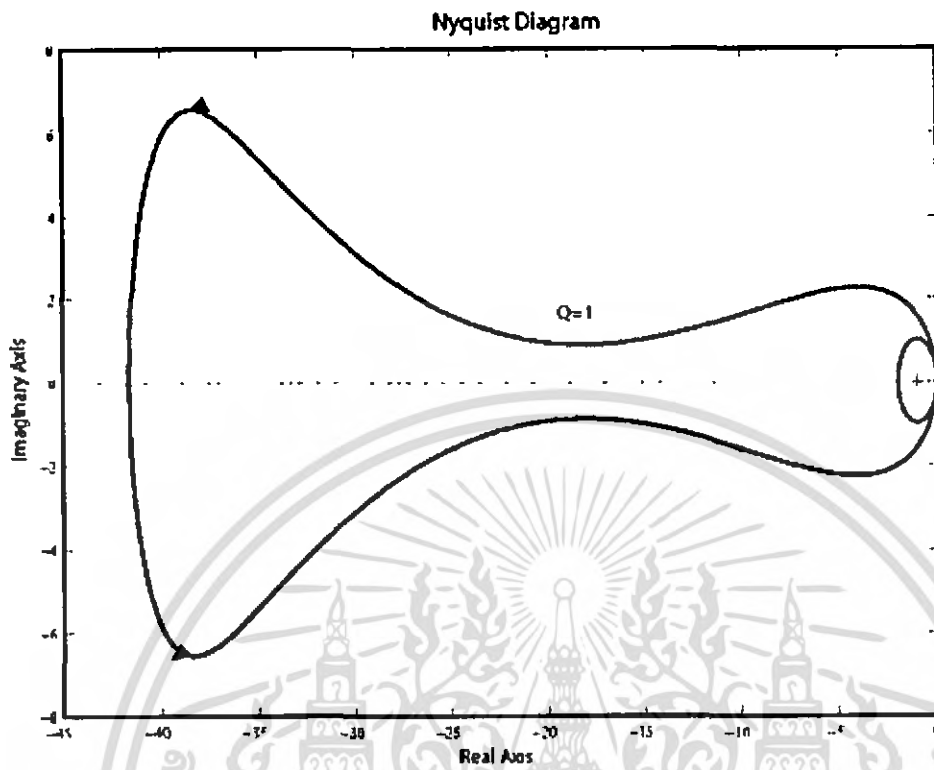


Figure 3.13 Nyquist Diagram.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

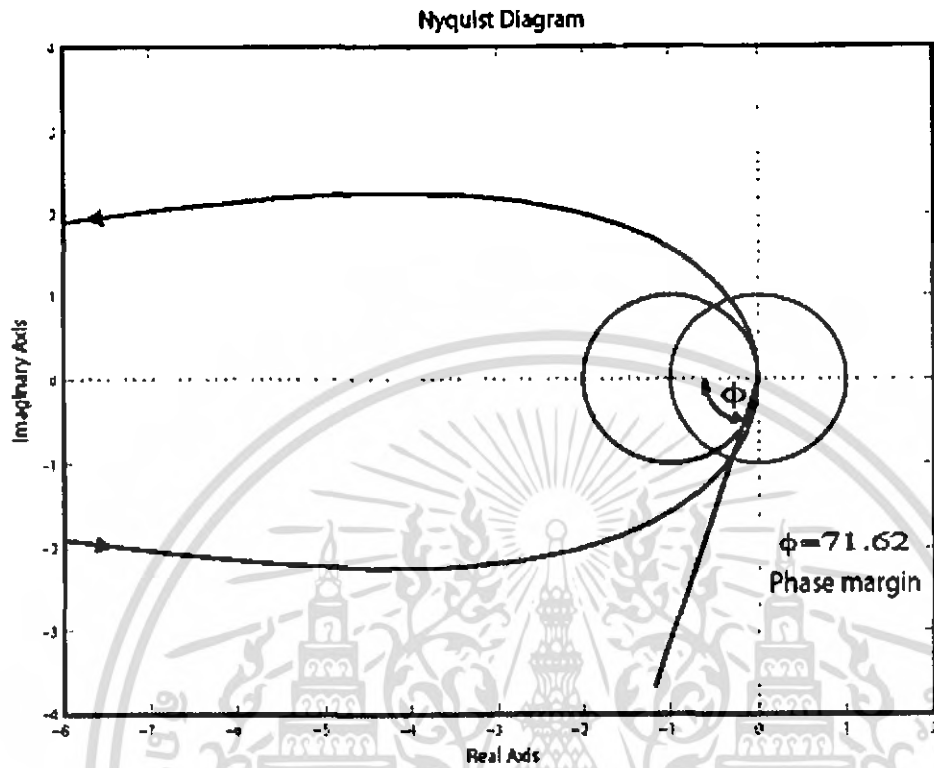


Figure 3.14 Nyquist Diagram.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

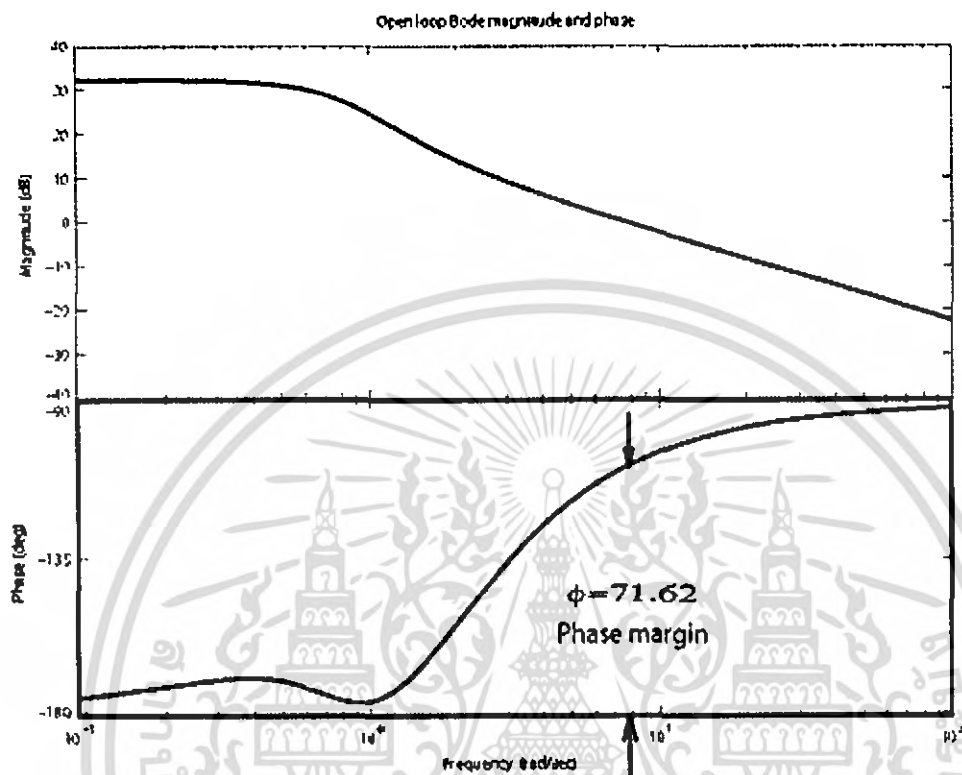


Figure 3.15 Open loop Bode magnitude and phase.

By graph I know phase and gain margins.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Bibliography

- [1] D. J. Higham and N. J. Higham. **MATLAB guide**: SIAM 2000.
- [2] K. Ogata. **MODERN CONTROL ENGINEERING**. 4th ED. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 2002.
- [3] K. Ogata. **Designing linear control systems with MATLAB**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1994.
- [4] K. Ogata. **Solving control engineering problem with MATLAB**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1994.
- [5] J. Moscinski and Z. Ogonowski. **Advanced Control with MATLAB and SIMULINK**. Mayland Avenue: Elish Horwood Inc. 1995
- [6] G. H. Golub and C. F. Loan. **Matrix Computation**. 3rd ED. Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press. 1996.
- [7] R. A. Horn and C. R. Johnson, **Matrix Analysis**. New York: Cambridge University Press. 1985
- [8] B. Shahian and M. Hassul. **CONTROL SYSTEM DESIGN Using MATLAB**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1993.
- [9] K. Zhou. **Essentials of robust control**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1998.
- [10] K. Zhou. **Robust and Optimal Control**. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. 1995.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Appendix A

Stability

A.1 Main Stability Theorems

Lyapunov Stability. To begin with, I remind reader that Lyapunov Stability, asymptotic stability, uniform asymptotic stability, etc.. are properties not of a dynamic system as a whole, but rather of its individual solutions. Consider the time-varying system

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (\text{A.1.1})$$

Where $x \in \mathbb{R}^n$, and $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ is piecewise continuous in t and locally Lipschitz in x . The solution of (A.1.1) which starts from the point x_0 at time $t_0 \geq 0$ is denoted as $x(t; x_0, t_0)$ with $x(t_0; x_0, t_0) = x_0$. Lyapunov stability concepts describe continuity properties of $x(t; x_0, t_0)$ with respect to x_0 . If the initial condition x_0 is perturbed to \tilde{x}_0 then, for stability, the resulting perturbed solution $x(t; \tilde{x}_0, t_0)$ is required to stay close to $x(t; x_0, t_0)$ for all $t \geq t_0$. In addition, for asymptotic stability, the error $x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)$ is required to vanish as $t \rightarrow \infty$. So, the solution $x(t; x_0, t_0)$ of (A.1.1) is

bounded, if there exist a constant $B(x_0, t_0) > 0$ such that

$$|x(t; x_0, t_0)| < B(x_0, t_0), \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{A.1.2})$$

stable, if for each $\varepsilon > 0$ there exists a $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ such that

$$|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta \Rightarrow |x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{A.1.3})$$

attractive, if there exists an $r(t_0) > 0$ and, for each $\varepsilon > 0$, $aT(\varepsilon, t_0) > 0$ such that

$$|\tilde{x}_0 - x_0| < r \Rightarrow |x(t; \tilde{x}_0, t_0) - x(t; x_0, t_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 + T \quad (\text{A.1.4})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับทางวิชาการเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นับผูกพันให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

asymptotically stable, if it is stable and attractive; and

unstable, if it is not stable.

The stability properties of $x(t; x_0, t_0)$ in general depend on the initial time t_0 . For different t_0 , different values of $B(x_0, t_0)$, $\delta(\varepsilon, t_0)$, $r(t_0)$ and $T(\varepsilon, t_0)$ may be needed to satisfy (A.1.2), (A.1.3) and (A.1.4). When these constants are independent of t_0 the corresponding properties are *uniform* (Clearly, all properties are uniform if the system is time-invariant: $\dot{x} = f(x)$). For adaptive systems, uniform stability is more desirable than just stability. Even more desirable is *uniform asymptotic stability*, often shortened to UAS. The solution $x(t; x_0, t_0)$ is UAS if it is *uniformly stable and uniformly attractive*, that is, if $\delta(\varepsilon, t_0) = \delta(\varepsilon)$, $r(t_0) = r$ and $T(\varepsilon, t_0) = T(\varepsilon)$ do not depend on t_0 .

Some solutions of a given system may be stable and others unstable, In particular, (A.1.1) may have stable and unstable *equilibrium*, that is constant solution $x(t; x_0, t_0) \equiv x_e$ satisfying $f(x_e, t) \equiv 0$. If an equilibrium x_e is asymptotically stable, then it has a *region of attraction* a set Ω of initial state x_0 such that $x(t; x_0, t_0) \rightarrow x_e$ as $t \rightarrow \infty$ for all $x_0 \in \Omega$ (when x_e is only stable, then the solution starting in Ω remain close to x_e in the sense of (A.1.3)). In this report, the stability properties for which an estimate of the region of attractions given are referred to as *regional*. Otherwise they are called *local*. When the region of attraction is the whole space \mathbb{R}^n , then the stability properties are *global*.

.

Any equilibrium under investigation can be translated to the origin by redefining the state x as $z = x - x_e$. Such a translation $z = x - x(t; x_0, t_0)$ can be defined for any solution $x(t; x_0, t_0)$ so that the solution under investigation can always be considered to be an equilibrium at the origin with a corresponding redefinition of $f(x, t)$ into $\bar{f}(z, t)$ such that $\bar{f}(0, t) \equiv 0$, namely

$$\dot{z} = f(z + x(t; x_0, t_0), t) - f(x(t; x_0, t_0), t) \triangleq \bar{f}(z, t) \quad (\text{A.1.5})$$

Therefore, there is no loss of generality in standardizing the stability results for the zero solution $z(t; x_0, t_0) \equiv 0$. In adaptive tracking problems, this zero solution is particularly meaningful when the state z represents the tracking error and its derivatives.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

To be of practical interest, stability conditions must not required that explicitly solve (A.1.1). The direct method of Lyapunov aims at determining the stability properties of $x(t; x_0, t_0)$ from the properties of $f(x, t)$ and its relationship with a positive definite function $V(x, t)$. For global result, this function must be radically unbounded, that is $V(x, t) \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$ uniformly in t . For simplicity, I will assume that the translation to the origin has been performed, that is, $f(0, t) \equiv 0$, and thus the solution under investigation is $x \equiv 0$.

Uniform asymptotic stability is a desirable property, because systems that possess it can deal better with perturbation and disturbances. I shall see that, in general, adaptive designs achieve less than uniform asymptotic stability. However, they achieve more than uniform stability because they force the tracking error to converge to zero. This key property is referred to as *regulation* when the reference signal is constant, and *tracking* when it is a time-vary signal. For convergence analysis, a powerful tool is the following theorem due to LaSalle and Yoshizawa:

Theorem A.1.1 (LaSalle-Yoshizawa) Let $x = 0$ be an equilibrium point of (A.1.1) and suppose f is locally Lipschitz in x uniformly in t . Let $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ be a continuously differentiable, positive definite and radically unbounded function $V(x)$ such that

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, t) \leq -W(x) \leq 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1.6})$$

where W is a continuous function. Then, all solutions of (A.1.1) are *globally uniformly bounded* and satisfy

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = 0 \quad (\text{A.1.7})$$

In addition, if $W(x)$ is positive definite, then the equilibrium $x = 0$ is *globally uniformly asymptotically stable (GUAS)*.

Appendix B

Observability and Detectability

Consider the dynamical system

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.0.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{B.0.2})$$

where $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, y \in \mathbb{R}^l$ and $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$. I say that the system (B.0.1), (B.0.2) or the pair (A, C) is observable if $\forall t_1 > 0$ the initial state x_0 can be determined from the time history of the input $u(t)$ and $y(t)$ in the interval $[0, t_1]$. Otherwise I say that (B.0.1), (B.0.2) or the pair (A, C) is unobservable.

Theorem B.0.2: Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{l \times n}$. Then the following statements are equivalent.

I) (A, C) is observable.

II) The matrix

$$W_0 \triangleq \int_0^t e^{A^*s} C^T C e^{As} ds > 0 \quad \forall t > 0$$

III) $\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$

IV) $\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

V) Let λ and x be any corresponding eigenvalue and eigenvector of A , i.e.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$Ax = \lambda x \quad \text{then} \quad Cx \neq 0$$

VI) The eigenvalue of $A+LC$ can be freely assigned (with the restriction that complex eigenvalues occur in conjugate pairs.) by a suitable choice of L .

Proposition B.0.3: If (A,C) is observable and $u(t)$ and $y(t)$ are known for $t \in [0, t_1]$, then x_0 is given by

$$x_0 = \left[\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{A t} ds \right]^{-1} \left[\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T \left[y(s) - C \int_0^s e^{A \sigma} B u(\sigma) d\sigma \right] ds \right]$$

Definition B.0.4: The pair (A,C) is said to be detectable if

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \lambda \in \Sigma(A) \cap \mathbb{C}$$

Note that it follows from the above proposition that (A,C) is detectable if and only if (A^T, C^T) is stabilizable.

Lemma B.0.5 if (A,C) is observable (response, detectable), then $(A+KC, C)$ is observable (response, detectable), $K \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Lemma B.0.6 Assume (A,C) is observable and let $D \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{n \times l}$ and $R \in \mathbb{R}^{l \times l}$ where R is p.d. Then $\left([A+ED], [C^T C + D^T R D]^{1/2} \right)$ is also observable.

Proposition B.0.7 Let (A,C) be detectable and assume $\exists P \in \mathbb{N}^n$ satisfying

$$0 = A^T P + PA + C^T C$$

Then A is continuous time stable.

Lemma B.0.8 Let $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ be continuous time stable. Then \exists a unique $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfying
 เอกสารนี้เป็นเอกสารทสงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นุญญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$0 = A^T P + PA + R$$

for all $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In particular P is given by

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} R e^{A t} dt$$

finally, if $R = C^T C$ where $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$ then $P > 0$ if and only if (A, C) is observable.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Appendix C

L_2 Norm

C.1 Deterministic Formulation:

Consider the stable linear time-invariant system:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (\text{C.1.1})$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (\text{C.1.2})$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, B \in \mathbb{R}^{n \times m}, C \in \mathbb{R}^{l \times n}$$

Then

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \geq 0,$$

and so

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + C \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (\text{C.1.3})$$

Next, if I let $x_0 = 0$ and $u(t) = 2\delta(t)\bar{u}$ where \bar{u} where $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ is a constant and $\delta(t)$ is a unit impulse centered at $t = 0$ such that

$$\int_0^t \Phi(t)\delta(t)dt = \frac{1}{2}\Phi(0)$$

Then equation (C.1.3) yields.

$$y(t) = Ce^{At}B\bar{u} \quad (\text{C.1.4})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Next, define

$$H(t) \triangleq Ce^{At} B$$

Where $H(t) \in \mathbb{R}^{l \times n}, \forall t \geq 0$ is called the impulse response matrix and $y(t)$ is called the impulse response of system (C.1.1), (C.1.2)

Alternatively, if in (C.1.3) I let $u(t) = 0, \forall t \geq 0$ and $x_0 = B\bar{u}$ then the free response of the system is

$$y(t) = Ce^{At} x_0 = Ce^{At} B\bar{u}$$

Which is identical to the response obtained in (C.1.4) for $x_0 = 0$ and $u(t) = 2\delta(t)\bar{u}$.

Every impulse response of (C.1.1), (C.1.2) can be equivalently obtained via the free response of system (C.1.1), (C.1.2) with suitable initial condition.

In order to develop deterministic formulation of L_2 norm, consider the quadratic performance functional

$$\tau(x_0, u) \triangleq \int_0^{\infty} y^T(t) y(t) dt$$

Note that it follows from the above discussions that

$$\tau(0, 2\delta(t)\bar{u}) = \tau(B\bar{u}, 0)$$

Next, let $\hat{\tau}(\bar{u}) \triangleq \tau(0, 2\delta(t)\bar{u}) = \tau(B\bar{u}, 0)$. Then

$$\begin{aligned} \hat{\tau}(\bar{u}) &= \int_0^{\infty} (Ce^{At} B\bar{u})^T (Ce^{At} B\bar{u}) dt \\ &= \bar{u}^T \left[\int_0^{\infty} (Ce^{At} B)^T (Ce^{At} B) dt \right] \bar{u} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
&= \text{tr} \left[\bar{u} \bar{u}^T \int_0^\infty (C e^{At} B)^T (C e^{At} B) dt \right] \\
&= \text{tr} \left[\bar{u} \bar{u}^T H^T(t) H(t) dt \right]
\end{aligned}$$

Next, let $\bar{u} = e_i \triangleq \text{Col}_i(\text{Im})$. Furthermore, compute $\sum_{i=1}^m \hat{\tau}(e_i)$ as below:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m \hat{\tau}(e_i) &= \text{tr} \left[\left[\sum_{i=1}^m (e_i e_i^T) \right] \int_0^\infty H^T(t) H(t) dt \right] \\
&= \text{tr} \left[\text{Im} \int_0^\infty H^T(t) H(t) dt \right] \\
&= \int_0^\infty \text{tr} \left[H^T(t) H(t) \right] dt
\end{aligned}$$

Recall the notation

$$\|x\|_F = \left[\text{tr} [xx^T] \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\text{tr} [x^T x] \right]^{\frac{1}{2}}$$

Hence,

$$\sum_{i=1}^m \hat{\tau}(e_i) = \int_0^\infty \|H(t)\|_F^2 dt$$

I next define the L_2 norm of $H(\cdot)$ as follows:

$$\|H(\cdot)\|_2 \triangleq \left[\int_0^\infty \|H(t)\|_F^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{C.1.5})$$

Theorem C.1.1 Consider the stable triple (A, B, C) with impulse response $H(t) = C e^{At} B, t \geq 0$.

Then the L_2 norm of $H(\cdot)$ is given by

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับ $\|H(\cdot)\|_2^2 = \text{tr}(CQC^T) = \text{tr}(B^T P B)$ มุ่งอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Where $Q, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfy:

$$0 = AQ + QA^T + BB^T$$

$$0 = A^T P + PA + C^T C$$

Proof: Note that (C.1.5) implies:

$$\begin{aligned} \|H(\cdot)\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{tr} [H^T(t)H(t)] dt \\ &= \text{tr} \int_0^\infty [B^T e^{At} C^T C e^{At} B] dt \\ &= \text{tr} \left\{ C \left[\int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \right] C^T \right\} \\ &= \text{tr} \left\{ B^T \left[\int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \right] B \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

Now since A is stable a unique solution satisfying (C.1.6) can be obtained and is given by

$$Q = \int_0^\infty e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

So (C.1.6) reduces to

$$\|H(\cdot)\|_2^2 = \text{tr}(CQC^T)$$

I proof for second part is similar

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้