

**สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง**

**ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง**

**THE SHORTEST PATH ON QUADRIC SURFACE**



**ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต**

**ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์**

**คณะวิทยาศาสตร์**

**สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง**

**ปีการศึกษา 2550**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# **THE SHORTEST PATH ON QUADRIC SURFACE**



**A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIRMENT FOR DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE  
FACULTY OF SCIENCE  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**ACADEMIC YEAR 2007**


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ      ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง  
 THE SHORTEST PATH ON QUADRIC SURFACE

ชื่อนักศึกษา      นายณัฐพล บุญนำ      47050010  
                          นายเดชาวุฒิ เวฬุวนารักษ์      47050013  
                          นางสาววาสนา ว่องไว      47050029

ภาควิชา      คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์  
 สาขาวิชา      คณิตศาสตร์ประยุกต์  
 อาจารย์ที่ปรึกษา      รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล  
                          อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นำปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2550

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล ประธานกรรมการ	
ดร.ศิริพร แชนนำ วินเทอร์ กรรมการ	
รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	



(รองศาสตราจารย์ไพบูรณ์ พันธรักษ์พงษ์)  
 หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์  
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่คุณแม่ผู้ให้กำลังใจเสมอมา และคุณพ่อที่ล่วงลับไปแล้ว  
ณัฐพล

ขอบคุณทุกสิ่งทุกอย่างที่คุณพ่อคุณแม่มอบให้ ด้วยความรักและเป็นห่วง  
เดชาวุฒิ

แต่คุณพ่อผู้เป็นที่รักและหวังดีเสมอ และแต่คุณแม่ผู้เป็นที่รักที่ได้ล่วงลับไปแล้ว  
ขอขอบคุณสำหรับความรักที่อบอุ่นที่สุดที่มีอาหาได้จากที่ไหน  
วาสนา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้งกำลังสอง	
ชื่อนักศึกษา	นายณัฐพล บุญนำ	47050010
	นายเดชาวุฒิ เวฬุวนารักษ์	47050013
	นางสาววาสนา ว่องไว	47050029
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2550	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภักดีณี ชิตสกุล	
	อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก	

## บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษเล่มนี้ ได้นำเสนอวิธีการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวกำลังสอง ซึ่งสำหรับผิวกำลังสองที่ได้ศึกษานั้น ประกอบด้วย ทรงกลม ทรงกระบอก รูปกรวย ทรงพาราโบลา ทรงไฮเพอร์โบลา และทรงห่วย่าง ด้วยวิธีการประยุกต์จากสมการออยเลอร์  $F_x - \frac{dF'_x}{dx} = 0$  อย่างไรก็ตามในการหาสมการเส้นโค้งที่เป็นคำตอบซึ่งแทนระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสองนั้น จะทำได้โดยกำหนดสมการเส้นโค้งของพื้นผิว โดยใช้ระบบพิกัดที่เกี่ยวข้องกับพื้นผิว หลังจากนั้นจึงใช้สมการออยเลอร์ในการหาคำตอบ

<b>Title</b>	THE SHORTEST PATH ON QUADRIC SURFACE	
<b>Students</b>	Mr.Nathaphon Boonnam	47050010
	Mr.Dechawut Weluwanaruk	47050013
	Ms.Watsana Wongwai	47050029
<b>Degree</b>	Bachelor of Science	
<b>Department</b>	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science	
<b>Programme</b>	Applied Mathematics	
<b>Academic year</b>	2007	
<b>Advisor</b>	Associate Professor Pakkinee Chitsakul	
	Ms.Thurdkwan Changpuek	

## ABSTRACT

This special problem, we studied the method to find the shortest path between two given points on quadric surfaces. The quadric surfaces that we studied include sphere, cylinder, cone, paraboloid, hyperboloid, and torus by using the application of Euler's equation  $F_x - \frac{dF'_x}{dx} = 0$ . However, in this case we find the curved equation that is the solution that represents the shortest path on quadric surfaces. On the other hand, we transform the quadric surface into parameterized surface. Afterwards, we use the Euler's equation to find the solution.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# กิตติกรรมประกาศ

ในการจัดทำหัวข้อปัญหาพิเศษเรื่อง ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสองเล่มนี้ สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล และอาจารย์เทอดขวัญ ช่างเผือก อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษที่คอยให้คำแนะนำและเป็นທີ່ปรึกษาในการแก้ไข ปัญหาต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นเรื่องรายละเอียดเนื้อหา หรือปัญหาอุปสรรคในการดำเนินงาน รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษเล่มนี้ด้วย

ขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์กฤษณา ไตรสุรัตน์ และดร.สิริพร แสนนำ วินเทอร์ กรรมการสอบปัญหาพิเศษที่คอยชี้แนะแนวทางในการปรับปรุง แก้ไข และตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษเล่มนี้ให้สมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาททั้งทางด้านวิชาความรู้ ตลอดจนคุณธรรม จริยธรรม และประสบการณ์ในการใช้ชีวิตประจำวันแก่ทางคณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษเล่มนี้สัมฤทธิ์ผลไปได้ด้วยดี

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่คอยอำนวยความสะดวกทั้งในด้านของการออกเอกสารต่างๆ อีกทั้งในส่วนของการใช้คอมพิวเตอร์ และพิมพ์เอกสารในห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

ขอขอบคุณเพื่อนๆ ทุกคนที่คอยให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษเล่มนี้ รวมถึงคอยให้กำลังใจเสมอมาจนกระทั่งปัญหาพิเศษเล่มนี้สำเร็จลุล่วงทุกประการ

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณน้องๆ ที่ช่วยเหลือในด้านการจัดพิมพ์รูปเล่มที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้ด้วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .....	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .....	ii
กิตติกรรมประกาศ .....	iii
สารบัญ .....	iv
สารบัญรูปภาพ .....	vii
บทที่ 1 บทนำ .....	1
1.1 ที่มาและความสำคัญของการทำปัญหาพิเศษ .....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ .....	4
1.3 ข้อยกเว้นและขอบเขตของปัญหาพิเศษ .....	4
1.4 ขั้นตอนและกรอบเวลาของปัญหาพิเศษ .....	5
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ .....	5
บทที่ 2 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....	6
2.1 ผิวโค้งกำลังสอง (Quadric Surface) .....	6
2.1.1 ทรงกลม (Sphere) .....	7
2.1.2 ทรงกระบอก (Cylinder) .....	8
2.1.3 รูปกรวย (Cone) .....	9
2.1.4 ทรงพาราโบล (Paraboloid) .....	10
2.1.5 ทรงไฮเพอร์โบล (Hyperboloid) .....	11
2.1.6 ทรงห่วงยาง (Torus) .....	12
2.2 ปัญหาที่เราสนใจ .....	13
2.2.1 ปัญหาพื้นผิวของการหมุนน้อยที่สุด .....	13
2.2.2 ปัญหาการมีมาตราส่วนเท่ากัน .....	13
2.2.3 ปัญหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดระหว่าง $P_0$ และ $P_1$ อยู่บนผิว $S$ .....	14
2.3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง .....	16
2.3.1 กฎของลิบนิซ (Leibniz's Rule) .....	16
2.3.2 สมการออยเลอร์ (Euler's Equation) .....	16
2.3.3 สมการลากรองจ์ (Lagrange's Equation) .....	18

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ (ต่อ)

หน้า

2.3.4 สมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์ (Euler-Lagrange Differential Equation) .....	19
2.3.5 สมการมาตราส่วนเท่า (Isoperimetric Equation) .....	20
2.3.6 การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดบนพื้นผิว .....	21
2.4 โปรแกรมสำเร็จรูปที่เกี่ยวข้อง .....	21
2.4.1 โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica 5 .....	21
<b>บทที่ 3 ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง .....</b>	<b>23</b>
3.1 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม .....	23
3.1.1 องค์ประกอบของผิวทรงกลม .....	23
3.1.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงกลม .....	23
3.1.3 สมการภาพฉายของวงกลมใหญ่ .....	27
3.1.4 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดทั้งสองบนผิวทรงกลม ณ จุดตั้งยืน ...	28
3.2 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกระบอก .....	29
3.2.1 องค์ประกอบของผิวทรงกระบอก .....	29
3.2.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงกระบอก .....	29
3.2.3 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดทั้งสองบนผิวทรงกระบอก โดยใช้กฎของฮิลิกซ์ .....	32
3.3 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวรูปกรวย .....	33
3.3.1 องค์ประกอบของผิวรูปกรวย .....	33
3.3.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวรูปกรวย .....	33
3.4 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงพาราโบล่า .....	37
3.4.1 องค์ประกอบของผิวทรงพาราโบล่า .....	37
3.4.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงพาราโบล่า .....	37
3.5 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงไฮเพอร์โบล่า .....	41
3.5.1 องค์ประกอบของผิวทรงไฮเพอร์โบล่า .....	41
3.5.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงไฮเพอร์โบล่า ..	41
3.6 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงห้วงยาง .....	44
3.6.1 องค์ประกอบของผิวทรงห้วงยาง .....	44

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ (ต่อ)

หน้า

3.6.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงห้วงยาง .....	45
<b>บทที่ 4 การวิเคราะห์ผลการทดลอง .....</b>	<b>48</b>
4.1 การวิเคราะห์สำหรับทรงกลม .....	48
4.2 การวิเคราะห์สำหรับทรงกระบอก .....	49
4.3 การวิเคราะห์สำหรับรูปกรวย .....	50
4.4 การวิเคราะห์สำหรับทรงพาราโบล่า ทรงไฮเพอร์โบล่า และทรงห้วงยาง .....	50
<b>บทที่ 5 สรุปผลและแนวทางการพัฒนาวิจัย .....</b>	<b>51</b>
5.1 สรุปผลการวิจัย .....	51
5.2 การอภิปรายผลการวิจัย .....	51
5.3 ข้อเสนอแนะ .....	51
<b>รายการอ้างอิง .....</b>	<b>52</b>
<b>ภาคผนวก .....</b>	<b>53</b>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญรูปภาพ

รูปที่	หน้า
2.1 ทรงกลม (Sphere) .....	7
2.2 ทรงกระบอก (Cylinder) .....	8
2.3 รูปกรวย (Cone) .....	9
2.4 ทรงพาราโบลา (Paraboloid) .....	10
2.5 ทรงไฮเพอร์โบลา (Hyperboloid) .....	11
2.6 ทรงห่วงยาง (Torus) .....	12
2.7 พื้นผิวของการหมุนรอบ .....	13
2.8 หน้าจอเริ่มต้น โปรแกรม Mathematica 5 .....	21
2.9 หน้าจอการทำงาน โปรแกรม Mathematica 5 .....	22
4.1 แสดงตำแหน่งจุดคู่ตั้งชัน $P_1$ และ $P_2$ และระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม .....	48
4.2 แสดงตำแหน่งจุดคู่ตั้งชัน $P_1$ และ $P_2$ และระยะทางจากภาพฉายในทรงกลม .....	48
4.3 แสดงตำแหน่งจุด $(\theta_1, z_1)$ และ $(\theta_2, z_2)$ อยู่ในระดับเดียวกัน .....	49
4.4 แสดงตำแหน่งจุด $(\theta_1, z_1)$ และ $(\theta_2, z_2)$ ไม่ได้อยู่ในระดับเดียวกัน .....	49
4.5 แสดงตำแหน่งจุด $(r_1, \theta_1)$ และ $(r_2, \theta_2)$ อยู่ในระดับเดียวกัน .....	50
4.6 แสดงตำแหน่งจุด $(r_1, \theta_1)$ และ $(r_2, \theta_2)$ ไม่อยู่ในระดับเดียวกัน .....	50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงที่มาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ ในที่นี้จะกล่าวถึง Geodesic ที่เราศึกษานั้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาพิเศษเล่มนี้ได้อย่างไรบ้าง รวมทั้งวัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ ข้อจำกัดและขอบเขตของปัญหาพิเศษ ขั้นตอนและกรอบเวลาของปัญหาพิเศษ และประโยชน์ต่อกลุ่มวิจัยที่เกี่ยวข้องของปัญหาพิเศษเล่มนี้ เพื่อเป็นแนวทางในการทำปัญหาพิเศษสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

### 1.1 ที่มาและความสำคัญของปัญหาพิเศษ

ในทางคณิตศาสตร์ ปัญหา Geodesic คือ ปัญหาเกี่ยวกับระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวนั้น เท่ากับว่าระยะทางนั้นเป็นส่วนที่น้อยที่สุดที่ไม่มีวันเพิ่มขึ้น นอกจากนี้ Geodesic ทำให้เกิดทิศทางบนพื้นผิวและมีคุณสมบัติที่น่าสนใจมากมาย ซึ่งสำหรับในกรณีที่พื้นผิวเป็นระนาบ ระยะทางที่สั้นที่สุดคือ เส้นตรง ทำให้เกิดปัญหาที่ตามมาคือ ในกรณีที่พื้นผิวของเราเป็นผิวโค้ง ซึ่งตัวอย่างที่ง่ายที่สุดคือทรงกลม ทำให้เราต้องศึกษาว่าระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลมนั้นคืออะไร

สำหรับโลกซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกลมนั้น เมื่อเราพูดถึงระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวโลก ในความรู้สึกของเรา เราจะรู้สึกว่าระยะทางที่พูดถึงนั้นเป็นเส้นตรง เพราะโลกเรามีขนาดกว้างใหญ่ไพศาลมาก แต่เป็นที่ยอมรับกันในหมู่นักคณิตศาสตร์ว่า โลกของเรานั้นเป็นผิวโค้ง ไม่ใช่พื้นที่ราบ ดังนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโลกนั้นก็คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม เพราะฉะนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลมจะมีกราฟลักษณะอย่างไร

จากที่เราารู้แล้วว่า จากระนาบ ถ้าเส้นกราฟที่สั้นที่สุดคือเส้นตรงแล้วระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกลม คือส่วนของวงกลม ที่เรียกว่า วงกลมใหญ่ของทรงกลม (Great Circle) ปัญหาต่อมาก็คือ เราจะต้องพิสูจน์เรื่องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสองได้ จากการศึกษาในแคลคูลัสของการแปรผัน (Calculus of Variation) และเรขาคณิตเชิงอนุพันธ์ (Differential Geometry) เราจะนำมาใช้อ้างอิงในการพิสูจน์เรื่องการหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง

อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงแล้ว ลักษณะของโลกมีแกนตั้งและแกนนอนไม่เท่ากัน ซึ่งโลกนั้นมีลักษณะเหมือนผลส้ม นอกจากเราจะศึกษา Geodesic บนทรงกลมแล้ว เราจึงสนใจที่จะศึกษา Geodesic บนรูปทรงต่างๆ อีกด้วย

สำหรับพื้นผิวจะแสดงค่าอิงพารามิเตอร์โดย  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  และ  $z = z(u, v)$  Geodesic สามารถตั้งขึ้นมาได้โดยกำหนดให้  $I$  แทนความยาวของส่วนโค้งที่น้อยที่สุดจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$I = \int ds = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} ds \quad (1.1)$$

เมื่อ

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (1.2)$$

$$dx^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} dudv + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2 \quad (1.3)$$

และในทำนองเดียวกันสำหรับ  $dy^2$  และ  $dz^2$  จะได้

$$I = \int \left[ \left( \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \right) du^2 + 2 \left( \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dudv + \left( \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right) dv^2 \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

สามารถจัดรูปใหม่ได้

$$I = \int \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2} du \quad (1.5)$$

$$= \int \sqrt{Pu'^2 + 2Qu' + R} dv \quad (1.6)$$

เมื่อ

$$v' = \frac{dv}{du} \quad (1.7)$$

$$u' = \frac{du}{dv} \quad (1.8)$$

และ

$$P = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad (1.9)$$

$$Q = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (1.10)$$

$$R = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \quad (1.11)$$

เริ่มต้นที่สมการที่ (1.5)

$$I = \int \sqrt{P + 2Qv' + Rv'^2} du \quad (1.12)$$

$$= \int L du \quad (1.13)$$

อนุพันธ์เทียบกับ  $v$  และ  $v'$  จะได้สมการที่ (1.14) และ (1.15) ตามลำดับ

$$\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{1}{2} (P + 2Qv' + Rv'^2)^{-1/2} \left( \frac{\partial P}{\partial v} + 2 \frac{\partial Q}{\partial v} v' + \frac{\partial R}{\partial v} v'^2 \right) \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v'} = \frac{1}{2} (P + 2Qv' + Rv'^2)^{-1/2} (2Q + 2Rv') \quad (1.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นสมการออยเลอร์ – ลากรองจ์จะได้

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial v} + 2v' \frac{\partial Q}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v}}{2\sqrt{P+2Qv'+Rv'^2}} - \frac{d}{du} \left( \frac{Q+Rv'}{\sqrt{P+2Qv'+Rv'^2}} \right) = 0 \quad (1.16)$$

ในกรณีพิเศษนี้เมื่อ  $P$ ,  $Q$  และ  $R$  เป็นฟังก์ชันซัดแข็งของ  $u$  เท่านั้น จะได้

$$\frac{Q+Rv'}{\sqrt{P+2Qv'+Rv'^2}} = c_1 \quad (1.17)$$

$$\frac{Q^2 + 2QRv' + R^2v'^2}{P+2Qv'+Rv'^2} = c_1^2 \quad (1.18)$$

$$v'R(R-c_1^2) + 2v'Q(R-c_1^2) + (Q^2 - Pc_1^2) = 0 \quad (1.19)$$

$$v' = \frac{1}{2R(R-c_1^2)} \left[ 2Q(c_1^2 - R) \pm \sqrt{4Q^2(R-c_1^2)^2 - 4R(R-c_1^2)(Q^2 - Pc_1^2)} \right] \quad (1.20)$$

ขณะนี้ ถ้า  $P$  และ  $R$  เป็นฟังก์ชันซัดแข็งของ  $u$  เท่านั้น และ  $Q=0$  จะได้

$$v' = \frac{\sqrt{4R(R-c_1^2)Pc_1^2}}{2R(R-c_1^2)} = c_1 \sqrt{\frac{P}{R(R-c_1^2)}} \quad (1.21)$$

ดังนั้น

$$v = c_1 \int \sqrt{\frac{P}{R(R-c_1^2)}} du \quad (1.22)$$

ในกรณีที่  $Q=0$  เมื่อ  $P$  และ  $R$  เป็นฟังก์ชันซัดแข็งของ  $v$  เท่านั้น จะได้

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v}}{2\sqrt{P+Rv'^2}} - \frac{d}{du} \left( \frac{Rv'}{\sqrt{P+Rv'^2}} \right) = 0 \quad (1.23)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial P}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v} - 2\sqrt{P+Rv'^2} R \left[ \frac{v''}{\sqrt{P+Rv'^2}} + \left( -\frac{1}{2} \right) \frac{v'(2Rv'v'')}{(P+Rv'^2)^{3/2}} \right] = 0 \quad (1.24)$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} + v'^2 \frac{\partial R}{\partial v} - 2Rv'' + \frac{2Rv'^2v''}{P+Rv'^2} = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{Rv'^2}{\sqrt{P+Rv'^2}} - \sqrt{P+Rv'^2} = c_1 \quad (1.26)$$

$$Rv'^2 - (P+Rv'^2) = c_1 \sqrt{P+Rv'^2} \quad (1.27)$$

$$\left( -\frac{P}{c_1} \right)^2 = P+Rv'^2 \quad (1.28)$$

$$\frac{P^2 - c_1^2 P}{Rc_1^2} = v'^2 \quad (1.29)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ

$$u = c_1 \int \sqrt{\frac{R}{P^2 - c_1^2 P}} dv \quad (1.30)$$

เมื่อพื้นผิวของการหมุนรอบที่  $y = g(x)$  หมุนบนแกน  $x$  เพราะฉะนั้นสมการของพื้นผิวคือ

$$y^2 + z^2 = g^2(x) \quad (1.31)$$

พื้นผิวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปอิงพารามิเตอร์โดย

$$x = u \quad (1.32)$$

$$y = g(u) \cos v \quad (1.33)$$

$$z = g(u) \sin v \quad (1.34)$$

เพราะฉะนั้น สมการของ Geodesic ก็คือ

$$v = c_1 \int \frac{\sqrt{1 + [g'(u)]^2} du}{g(u) \sqrt{[g(u)]^2 - c_1^2}}$$

เนื่องจากรูปแบบต่างๆ เชิงเรขาคณิตนั้น เมื่อแสดงค่าอิงพารามิเตอร์ออกมาแล้วปรับให้อยู่ในรูปสมการที่ (1.9), (1.10) และ (1.11) ซึ่งไม่จำเป็นเสมอไปที่  $Q=0$  ดังนั้นจึงจำเป็นต้องนำการหา Geodesic ดังกล่าวข้างต้น มาทำการประยุกต์สำหรับการหา Geodesic ของผิวกำลังสองที่กำลังศึกษาในปัญหาพิเศษเล่มนี้

## 1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

- 1.2.1 หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่สั้นที่สุดบนทรงกลม
- 1.2.2 หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง
- 1.2.3 ศึกษาถึงเงื่อนไขการมี Geodesic เพียงหนึ่งเดียวหรือมากกว่าหนึ่ง

## 1.3 ข้อจำกัดและขอบเขตของปัญหาพิเศษ

- 1.3.1 หาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง
- 1.3.2 แสดงกราฟของระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง

## 1.4 ขั้นตอนและกรอบเวลาของปัญหาพิเศษ

- 1.4.1 ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับ Geodesic ในเชิงเรขาคณิตในรูปแบบต่างๆ (15 วัน)
- 1.4.2 ศึกษาเนื้อหาเพิ่มเติมเกี่ยวกับผิวกำลังสอง (15 วัน)
- 1.4.3 พิสูจน์และวิเคราะห์การหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง (60 วัน)
- 1.4.4 จัดทำรายงานคู่มือการทำปัญหาพิเศษ (30 วัน)
- 1.4.5 ตรวจสอบ ปรับปรุง แก้ไขรายงานคู่มือการทำปัญหาพิเศษ (15 วัน)
- 1.4.6 จัดทำรูปเล่มคู่มือการทำปัญหาพิเศษ (15 วัน)
- 1.4.7 จัดทำและปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอปัญหาพิเศษ (15 วัน)

## 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1.5.1 สามารถหาระยะทางที่สั้นที่สุดได้บนผิวกำลังสองบางรูป
- 1.5.2 สามารถประมาณค่าความยาวได้บางรูป

ส่วนประกอบของคู่มือการทำปัญหาพิเศษเล่มนี้ประกอบด้วย บทที่ 1 กล่าวถึงบทนำของการทำปัญหาพิเศษ บทที่ 2 กล่าวถึงทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง บทที่ 3 กล่าวถึงปัญหาหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง บทที่ 4 กล่าวถึงผลการทดลองและวิเคราะห์ข้อมูล และบทที่ 5 กล่าวถึงสรุปผลและแนวทางการพัฒนาวิจัยของการทำปัญหาพิเศษ ในส่วนของภาคผนวกนั้น จะกล่าวถึงรหัสต้นฉบับ (source code) ของรูปภาพในบทที่ 2 ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica 5

## บทที่ 2

### ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงความหมายของผิวกำลังสอง และผิวกำลังสองที่จะศึกษาได้แก่ ทรงกลม ทรงกระบอก รูปกรวย ทรงพาราโบลา ทรงไฮเพอร์โบลา และทรงห่วย่าง ซึ่งปัญหาที่เราสนใจ ประกอบด้วย ปัญหาพื้นผิวของการหมุนน้อยที่สุด ปัญหาการมีมาตราส่วนเท่ากัน และปัญหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมด้วยจุดสองจุดระหว่าง  $P_0$  และ  $P_1$  อยู่บนผิว  $S$  นอกจากนี้ ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องได้แก่ กฎของไลบ์นิซ สมการออยเลอร์ สมการลากรองจ์ สมการออยเลอร์-ลากรองจ์ สมการมาตราส่วนเท่า และการหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดบนพื้นผิว อีกทั้งโปรแกรมสำเร็จรูปที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ โปรแกรม Mathematica 5

#### 2.1 ผิวกำลังสอง (Quadric Surface)

ในทางคณิตศาสตร์ ผิวกำลังสองคือ ผิวไฮเพอร์ D มิติ นิยามโดยการรวมกลุ่มของจุดซึ่งใช้คุณสมบัติร่วมกันของฟังก์ชันของพหุนามกำลังสอง ในพิกัด  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ผิวกำลังสองรูปทั่วไป ถูกนิยามโดยสมการพีชคณิต

$$\sum_{i,j=0}^D Q_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=0}^D P_i x_i + R = 0 \quad (2.1)$$

เมื่อ  $Q$  คือเมตริกซ์  $D+1$  มิติ,  $P$  คือเวกเตอร์  $D+1$  มิติ และ  $R$  คือค่าคงที่ สำหรับค่า  $Q$ ,  $P$  และ  $R$  นั้น จะถูกแทนค่าด้วยจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อน แต่ในความเป็นจริงแล้ว ผิวกำลังสองถูกนิยามบนวงแหวน ซึ่งในทั่วไปนั้น การรวมกลุ่มของจุดซึ่งใช้คุณสมบัติร่วมกันของจุดต่ำสุดของเซตของพหุนามจะเรียกว่า รูปแบบทางพีชคณิต และเราจะศึกษาในด้านของเรขาคณิตเชิงพีชคณิต

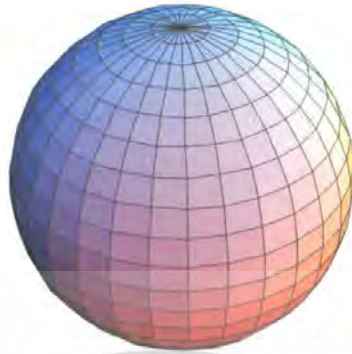
ผิวกำลังสองนั้นมีตัวอย่างของรูปแบบทางพีชคณิต ซึ่งทุกๆ รูปแบบภาพฉายทางพีชคณิตสามารถแสดงได้เป็นสมมติฐานไปยังจุดตัดของเซตของผิวกำลังสอง

สมการบรรทัดฐานสำหรับผิวกำลังสองที่มี 3 มิติ และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0,0,0)$  เป็นจุดกำเนิด คือ

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2.2)$$

ด้วยวิธีการแทนที่ และการหมุนต่างๆ ผิวกำลังสองสามารถที่จะเปลี่ยนให้อยู่ในรูปแบบหนึ่งของหลายรูปแบบที่เป็นบรรทัดฐาน ในรูปแบบปริภูมิแบบยูคลิดที่มี 3 มิติ ประกอบด้วยระนาบเส้น จุด หรือไม่มีจุดทั้งหมด ซึ่งสำหรับปัญหาพิเศษดังกล่าว เราจะทำการศึกษาในผิวกำลังสองดังต่อไปนี้

### 2.1.1 ทรงกลม (Sphere)



รูปที่ 2.1 ทรงกลม (Sphere)

รูปแบบสมการ	$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$
จุดตัดแกน	จุดตัดแกน $x$ คือ $(\rho, 0, 0)$ และ $(-\rho, 0, 0)$ จุดตัดแกน $y$ คือ $(0, \rho, 0)$ และ $(0, -\rho, 0)$ จุดตัดแกน $z$ คือ $(0, 0, \rho)$ และ $(0, 0, -\rho)$
สมมาตร	พื้นผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด พื้นผิวมีสมมาตรกับแกนทั้งสาม พื้นผิวมีสมมาตรกับระนาบทั้งสาม
รอยตัด	ตัดด้วยระนาบ $xy$ ได้รูปวงกลม $x^2 + y^2 = \rho^2$ ; $z = 0$ ตัดด้วยระนาบ $yz$ ได้รูปวงกลม $y^2 + z^2 = \rho^2$ ; $x = 0$ ตัดด้วยระนาบ $xz$ ได้รูปวงกลม $x^2 + z^2 = \rho^2$ ; $y = 0$

จัดให้อยู่ในรูปของรัศมี ( $\rho$ ) มุมละติจูด ( $\phi$ ) และมุมลองจิจูด ( $\theta$ ) ได้ดังนี้

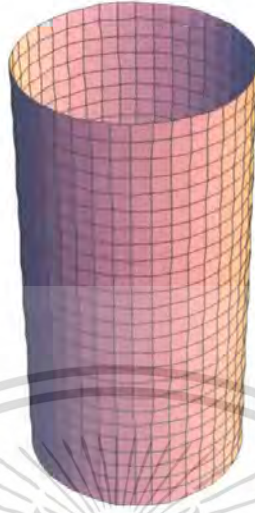
$$x = \rho \cos \phi \cos \theta \quad \text{โดยที่ } -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y = \rho \cos \phi \sin \theta \quad \text{โดยที่ } -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$z = \rho \sin \phi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.2 ทรงกระบอก (Cylinder)



รูปที่ 2.2 ทรงกระบอก (Cylinder)

รูปแบบสมการ  $x^2 + y^2 = \rho^2$

จุดตัดแกน  $x$  คือ  $(\rho, 0, 0)$  และ  $(-\rho, 0, 0)$   
 จุดตัดแกน  $y$  คือ  $(0, \rho, 0)$  และ  $(0, -\rho, 0)$   
 ไม่มีจุดตัดแกน  $z$

สมมาตร  
 พื้นผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด  
 พื้นผิวมีสมมาตรกับแกนทั้งสาม  
 พื้นผิวมีสมมาตรกับระนาบทั้งสาม

รอยตัด  
 ตัดด้วยระนาบ  $xy$  ได้รูปวงกลม  $x^2 + y^2 = \rho^2$   
 ตัดด้วยระนาบ  $yz$  ได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า  $y = |\rho|$  ;  $x = 0$   
 ตัดด้วยระนาบ  $xz$  ได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า  $x = |\rho|$  ;  $y = 0$

จัดให้อยู่ในรูปของรัศมี ( $\rho$ ) และมุมลองติจูด ( $\theta$ ) ได้ดังนี้

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{โดยที่ } -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$y = \rho \sin \theta$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.3 รูปกรวย (Cone)



รูปที่ 2.3 รูปกรวย (Cone)

รูปแบบสมการ  $x^2 + y^2 = z^2$

จุดตัดแกน

พื้นผิวผ่านจุดกำเนิด

สมมาตร

พื้นผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด  
พื้นผิวมีสมมาตรกับแกนพิกัดทั้งสาม  
พื้นผิวมีสมมาตรกับระนาบพิกัดทั้งสาม

รอยตัด

ตัดด้วยระนาบ  $xy$  ได้จุดกำเนิด  
ตัดด้วยระนาบ  $yz$  ได้เส้นตรง คือ  $y^2 = zr^2$  ;  $x = 0$   
ตัดด้วยระนาบ  $xz$  ได้เส้นตรง คือ  $x^2 = zr^2$  ;  $y = 0$

จัดให้อยู่ในรูปของรัศมี ( $\rho$ ) มุมละติจูด ( $\phi$ ) และมุมลองจิจูด ( $\theta$ ) ได้ดังนี้

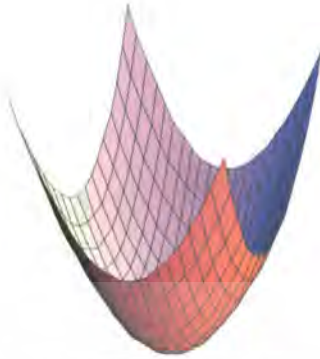
$$x = \rho \sin \phi \cos \theta \quad \text{โดยที่ } -\pi \leq \theta \leq \pi$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.4 ทรงพาราโบล (Paraboloid)



รูปที่ 2.4 ทรงพาราโบล (Paraboloid)

รูปแบบสมการ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$

จุดตัดแกน พื้นผิวผ่านจุดกำเนิด

สมมาตร ไม่มีสมมาตรกับจุดกำเนิด  
มีสมมาตรกับแกน  $z$  แต่ไม่มีสมมาตรกับแกน  $x, y$   
มีสมมาตรกับระนาบ  $yz$  และ  $xz$  แต่ไม่สมมาตรกับระนาบ  $xy$

รอยตัด ตัดด้วยระนาบ  $xy$  ได้จุดกำเนิด  
ตัดด้วยระนาบ  $yz$  ได้รูปพาราโบล  $y^2 = b^2 cz$  ;  $x=0$   
ตัดด้วยระนาบ  $xz$  ได้รูปพาราโบล  $x^2 = a^2 cz$  ;  $y=0$

จัดให้อยู่ในรูปของมุมละติจูด ( $\phi$ ) และมุมลองจิจูด ( $\theta$ ) เมื่อ  $a, b$  เป็นค่าคงที่ได้ดังนี้

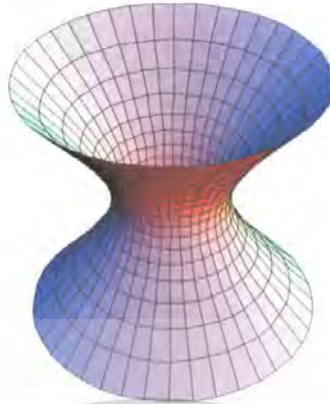
$$x = a\phi \cos \theta \quad \text{โดยที่ } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$y = b\phi \sin \theta \quad \text{โดยที่ } 0 \leq \phi \leq \phi_{\max}$$

$$z = \phi^2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.5 ทรงไฮเพอร์โบลลา (Hyperboloid)



รูปที่ 2.5 ทรงไฮเพอร์โบลลา (Hyperboloid)

รูปแบบสมการ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

จุดตัดแกน  
จุดตัดแกน  $x$  คือ  $(a,0,0)$  และ  $(-a,0,0)$   
จุดตัดแกน  $y$  คือ  $(0,b,0)$  และ  $(0,-b,0)$   
พื้นผิวไม่ตัดแกน  $z$

สมมาตร  
พื้นผิวมีสมมาตรกับจุดกำเนิด  
พื้นผิวมีสมมาตรกับแกน พิกัดทั้งสาม  
พื้นผิวมีสมมาตรกับระนาบพิกัดทั้งสาม

รอยตัด  
ตัดด้วยระนาบ  $xy$  ได้รูปวงรี  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ;  $z = 0$

ตัดด้วยระนาบ  $yz$  ได้รูปไฮเพอร์โบลลา  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  ;  $x = 0$

ตัดด้วยระนาบ  $xz$  ได้รูปไฮเพอร์โบลลา  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  ;  $y = 0$

จัดให้อยู่ในรูปของมุมละติจูด ( $\phi$ ) และมุมลองจิจูด ( $\theta$ ) เมื่อ  $a, b, c$  เป็นค่าคงที่ได้ดังนี้

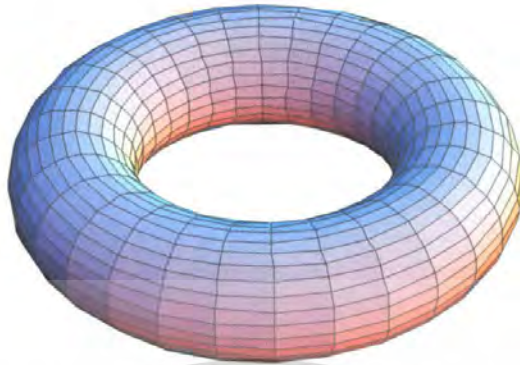
$$x = a \cos \theta \cosh \phi \quad \text{โดยที่ } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$y = b \sin \theta \sinh \phi \quad \text{โดยที่ } -\pi \leq \phi \leq \pi$$

$$z = c \sinh \phi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.1.6 ทรงท่วงยาง (Torus)



รูปที่ 2.6 ทรงท่วงยาง (Torus)

รูปแบบสมการ 
$$\left[ \rho - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2} \right]^2 + \left[\frac{z}{R}\right]^2 = 1$$

จัดให้อยู่ในรูปของรัศมี  $(R, \rho)$  มุมละติจูด  $(\phi)$  และมุมลองติจูด  $(\theta)$  ได้ดังนี้

$$x = (R + \rho \cos \phi) \cos \theta$$

$$y = (R + \rho \cos \phi) \sin \theta$$

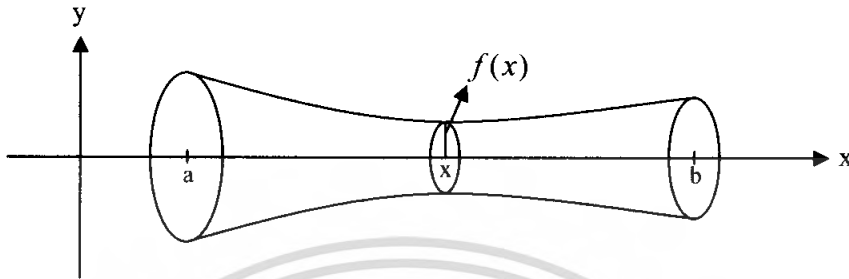
$$z = \rho \sin \phi$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.2 ปัญหาที่เราสนใจ

### 2.2.1 ปัญหาพื้นผิวของการหมุนน้อยที่สุด

มีวงกลมสองวงซึ่งจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน สามารถหาพื้นผิวของการหมุนรอบ ซึ่งเชื่อมวงกลมทั้งสองให้พื้นที่ผิวน้อยที่สุด หรือหารูปร่างของเส้นโค้งขอบที่ให้พื้นที่น้อยที่สุด



รูปที่ 2.7 พื้นผิวของการหมุนรอบ

เมื่อคลี่พื้นผิวนี้ออกมา เราจะทำการหาพื้นที่จากสูตรทั่วไป (พื้นที่ = กว้าง  $\times$  ยาว) จะได้

$$ds = 2\pi y(x) \times xL(x) \quad (2.3)$$

ดังนั้น พื้นผิวของการหมุน จะได้

$$S = 2\pi \int_a^b y(x) dL(x) = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (2.4)$$

ปัญหาในขณะนี้คือ ต้องการหาฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์บนพื้นผิวของการหมุนรอบได้ แต่ถ้าบางพื้นผิวไม่สามารถหาอนุพันธ์บนพื้นผิวของการหมุนรอบได้ จะทำให้ไม่ได้  $y(x)$  ที่ให้ค่าอนุพันธ์ที่ต่ำที่สุด จึงไม่สามารถใช้ปัญหาพื้นผิวของการหมุนน้อยที่สุดได้

### 2.2.2 ปัญหาการมีมาตรการส่วนเท่ากัน

เส้นโค้งปิดเรียบเชิงเดียวที่กำหนดความยาวคงที่ สามารถหาพื้นที่ที่มากที่สุดที่อยู่ภายใต้เส้นโค้ง  $c: x = \phi(t), y = \varphi(t) ; t_0 \leq t \leq t_1$  โดยที่พื้นที่  $A$  ของบริเวณบนระนาบที่ถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้งปิดเรียบเชิงเดียวนั้น ได้ดังสมการ

$$A = \oint_c xdy = \int_{t_0}^{t_1} \phi(t)\varphi'(t)dt \quad (2.5)$$

กำหนดให้ความยาวของเส้นโค้ง  $L_0$  เขียนในรูปสมการได้

$$L_0 = \int_{t_0}^{t_1} [(\phi'(t))^2 + (\varphi'(t))^2]^{1/2} dt \quad (2.6)$$

ปัญหาคือ ต้องการหา  $\phi$  และ  $\varphi$  ซึ่งให้ค่าพื้นที่ปริพันธ์ที่มากที่สุด โดยเป็นความยาวที่กำหนด  $L_0$  ดังนั้นสมการอิงตัวแปรเสริมของ  $c$  จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\vec{r} = xi + yj \quad (2.7)$$

เพราะฉะนั้น พื้นที่คือ

$$\iint_R dA = \iint_R dx dy = \iint_R dy dx \quad (2.8)$$

จากทฤษฎีของกรีน (Green's Theorem) จะได้

$$\oint_c M dx + N dy = \iint_R \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \quad (2.9)$$

ถ้า  $M = 0$  และ  $N = x$  จะได้

$$\oint_c x dy = \iint_R dA \quad (2.10)$$

ถ้า  $M = y$  และ  $N = 0$  จะได้

$$\oint_c y dx = - \iint_R dA \quad (2.11)$$

ดังนั้น

$$A = \iint_R dx dy = \oint_c x dy = - \oint_c y dx \quad (2.12)$$

$$2A = \oint_c x dy + \left( - \oint_c y dx \right) \quad (2.13)$$

$$A = \frac{1}{2} \left[ \oint_c x dy + \left( - \oint_c y dx \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\therefore A = - \frac{1}{2} \oint_c (y dx - x dy) \quad (2.15)$$

จากสมการดังกล่าวข้างต้น ถ้าพื้นที่ที่กำหนดขึ้นมาให้ นั้น เส้นรอบรูปไม่เท่ากันทั้งหมด อาทิเช่น ทรงพาราโบล่า ทรงไฮเพอร์โบล่า เป็นต้น ดังนั้นจะทำให้ไม่สามารถใช้ปัญหาการมีมาตราส่วนเท่ากันได้

### 2.2.3 ปัญหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมด้วยจุดสองจุดระหว่าง $P_0$ และ $P_1$ อยู่บนผิว $S$

พื้นผิว  $S$  สามารถเขียนในรูปแบบทั่วไปคือ  $x = f(u, v)$ ,  $y = g(u, v)$  และ  $z = h(u, v)$  ที่จุด  $P_0 \equiv (u_0, v_0)$  และ  $P_1 \equiv (u_1, v_1)$  บนพื้นผิว  $S$  มี  $c$  ซึ่งผ่าน  $P_0$  และ  $P_1$  นั่นคือ  $c$  อยู่บน  $R_{uv}$  โดยที่  $u = u(t)$  และ  $v = v(t)$  เมื่อ  $t_0 \leq t \leq t_1$

ดังนั้นจึงสามารถเขียน  $c$  ให้อยู่ในรูปแบบสมการอิงตัวแปรเสริมของ  $x = f(u(t), v(t))$ ,  $y = g(u(t), v(t))$  และ  $z = h(u(t), v(t))$  เมื่อ  $t_0 \leq t \leq t_1$  จะได้

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{df}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dg}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dh}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} dt \quad (2.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่ง  $x = f(u, v)$ ,  $y = g(u, v)$  และ  $z = h(u, v)$  โดยที่  $u = u(t)$  และ  $v = v(t)$  จะได้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (2.17)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (2.18)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial h}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dt} \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial g}{\partial u} \frac{du}{dt} \frac{\partial g}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial u} \frac{du}{dt} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 \right] \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \\ &\quad + 2 \left[ \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} \right] \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \\ &\quad + \left[ \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2 \right] \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$= E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (2.23)$$

ดังนั้น

$$L = \int_a^b \left[ E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt}\right) + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} dt \quad (2.24)$$

เมื่อ

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad (2.25)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (2.26)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \quad (2.27)$$

ปัญหาในขณะนี้คือ ต้องการหา  $u$  และ  $v$  ที่ให้ค่าปริพันธ์ต่ำสุด ซึ่ง ณ ขณะนี้ ถือว่าเป็นวิธีการหาเส้นโค้งที่มีระยะทางที่สั้นที่สุด เพราะเมื่อเรากำหนดพิกัดจุดระหว่าง  $P_0$  และ  $P_1$  บนผิว  $S$  ซึ่งพื้นผิวนี้นี้จะกำหนดตัวแปรตามค่าพารามิเตอร์  $x, y, z$  ทำให้หาเส้นโค้งได้ อย่างไรก็ตาม จากปัญหาดังกล่าว จะได้เพียงค่าความยาวที่ติดอยู่ในรูปปริพันธ์ จึงจำเป็นที่จะต้องนำทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง เข้ามาประยุกต์ใช้ และพิสูจน์ค่าความยาวเส้นโค้งออกมา อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

### 2.4.1 กฎของลีบนิซ (Leibniz's Rule)

ถ้ามีปริพันธ์ของรูปแบบ  $\int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy$  แล้ว เมื่อ  $x \in (x_0, x_1)$  อนุพันธ์ของการปริพันธ์

เป็นนิพจน์

$$\frac{d}{dx} \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy \quad (2.28)$$

โดยมีเงื่อนไขว่า  $f$  และ  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ต่อเนื่องบนขอบเขตในรูปแบบของ  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$

พิสูจน์

กำหนดให้  $u(x) = \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy$  หลังจากนั้น

$$\frac{d}{dx} u(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (2.29)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{y_0}^{y_1} f(x+h, y) dy - \int_{y_0}^{y_1} f(x, y) dy}{h} \quad (2.30)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{y_0}^{y_1} (f(x+h, y) - f(x, y)) dy}{h} \quad (2.31)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int_{y_0}^{y_1} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} dy \quad (2.32)$$

$$= \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy \quad (2.33)$$

สามารถพิสูจน์ให้เห็น โดยการต่อเนื่องแบบเอกรูป เพราะฉะนั้น

$$\frac{d}{dx} u(x) = \int_{y_0}^{y_1} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy \quad (2.34)$$

### 2.4.2 สมการออยเลอร์ (Euler's Equation)

ให้  $f(x, y, y')$  เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องอันดับที่สอง เมื่อเทียบกับอาร์กิวเมนต์ทั้งหมด โดย  $y = f(x)$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต

$$y(a) = A, \quad y(b) = B \quad (2.35)$$

ซึ่งทำให้เชิงฟังก์ชัน

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (2.36)$$

มีค่าสุดขีด (Extremum)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรืออาจกล่าวได้ว่า ปัญหาในเรื่องของแคลคูลัสของการแปรผัน คือ การหาเชิงฟังก์ชันซึ่งให้ค่าปลายสุดในรูปแบบที่ (2.36) บนเซตของเส้นโค้งเรียบทั้งหมดที่เชื่อมระหว่างจุดที่กำหนดให้  $P_1 = (a, A)$  และ  $P_2 = (b, B)$  ซึ่งเป็นไปตาม (2.35)

จากกฎของลิวนิซ (Leibniz's Rule) จะได้ว่า

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' dx \quad (2.37)$$

ทำการปริพันธ์ที่ละส่วนในพจน์ที่ 2 โดย

$$\text{ให้ } u = \frac{\partial f}{\partial y'} \quad \text{และ } dv = \delta y' dx \quad (2.38)$$

$$du = \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} dx \quad \text{และ } v = \delta y' \quad (2.39)$$

จะได้

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} \delta y dx + \left. \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y \right|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y dx \quad (2.40)$$

สมมติ ถ้า  $y(a) = A, y(b) = B$  เป็นเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า  $\delta y|_a = 0, \delta y|_b = 0$  ตามลำดับ ดังนั้น

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (2.41)$$

ถ้า  $\delta J[y(x)] = 0$  แล้ว  $J[y(x)]$  มีค่าสุดขีด และ  $\delta J = 0$  ก็ต่อเมื่อ

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad (2.42)$$

จากนั้น สำหรับเชิงฟังก์ชันในสมการที่ (2.36) ที่นิยามบนเซตของฟังก์ชัน  $y = y(x)$  ซึ่งมีอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งต่อเนื่อง และเป็นไปตามเงื่อนไขขอบเขต (2.35) มีค่าสุดขีดบนฟังก์ชันที่กำหนด  $y(x)$  แล้ว เชิงฟังก์ชันต้องเป็นไปตามสมการของออยเลอร์ซึ่งกล่าวไว้ว่า

$$f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0 \quad (2.43)$$

เส้นโค้งปริพันธ์ของสมการออยเลอร์ เรียกว่า เส้นโค้งลากรองจ์ (Lagrange curves)

สมการออยเลอร์ สามารถขยายในรูปแบบอื่นได้ดังนี้

จาก  $f(x, y, y')$  สามารถหา  $f_y(x, y, y')$  และ  $f_{y'}(x, y, y')$  ได้ และ

$$\frac{\partial f_{y'}}{\partial x} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_y}{\partial y'} \cdot \frac{dy'}{dx} \quad ; f = f(x, y, y') \quad (2.44)$$

$$= f_{xy'} + f_{yy'} y' + f_{y'y'} y'' \quad (2.45)$$

นำค่าในสมการที่ (2.55) แทนในสมการที่ (2.53) จะได้

$$f_y - (f_{y'x} + f_{y'y'} y' + f_{y'y'} y'') = 0 \quad (2.46)$$

หรือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สแกนจากเว็บไซต์ของสำนักหอสมุดกลางพระจอมเกล้าลาดกระบัง ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ซ้ำโดยไม่ได้รับอนุญาต (2.47) ด้านการคัดลอก  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการที่ (2.47) คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ดังนั้นคำตอบทั่วไปต้องขึ้นกับค่าคงที่สองตัวใดๆ ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขขอบเขตใน (2.35) นั่นเอง

### 2.4.3 สมการลากรองจ์ (Lagrange's Equation)

ถ้าเชิงฟังก์ชันกำหนดอยู่ในรูป

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (2.48)$$

สำหรับ  $y(x) \in C^1[a, b]$  ซึ่ง  $C^1[a, b] = \{y(x) \mid y'(x) \text{ ต่อเนื่องบนช่วง } [a, b]\}$

เมื่อ  $f(x, y, y')$  ต่อเนื่องกับอาร์กิวเมนต์  $x, y(x)$  และ  $y'(x)$

และ  $f(x, y, y')$  มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องภายในโดเมน  $x \in [a, b], y \in R, y' \in R$

แล้ว เชิงฟังก์ชัน  $J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y') dx$  หาอนุพันธ์ได้ในปริภูมิ  $C^1[a, b]$

$$\text{และมีการแปรผันอยู่ในรูป } \delta J[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial y'} \delta y' \right) dx \quad (2.49)$$

**พิสูจน์**

กำหนดให้

$$G = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (2.50)$$

จากกฎลูกโซ่  $\delta J[y(x)] = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial y'} \delta y'$  จะได้

$$\delta J[y(x)] = \frac{\partial G}{\partial x} \delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial G}{\partial y'} \delta y' \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_a^b f(x, y, y') dx \right] \delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_a^b f(x, y, y') dx \right] \delta y \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \int_a^b f(x, y, y') dx \right] \delta y' \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} \left[ \int_a^b f(x, y, y') dx \right] \delta y + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \int_a^b f(x, y, y') dx \right] \delta y' \quad (2.53)$$

เนื่องจาก  $\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_a^b f(x, y, y') dx \right] \delta x = 0$  เพราะ  $G(y, y') = \int_a^b f(x, y, y') dx$  ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_a^b f(x, y, y') dx \right] \delta x = \frac{\partial G(y, y')}{\partial x} = 0 \quad (2.54)$$

$$\text{เป็นการแปรผันของเชิงฟังก์ชัน } J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (2.55)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 2.4.4 สมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์ (Euler-Lagrange Differential Equation)

สมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์เป็นสมการหลักมูลของแคลคูลัสของความแปรผัน กำหนดว่า ถ้า  $J$  ถูกนิยามโดยปริพันธ์ของรูปแบบ

$$J = \int f(t, y, \dot{y}) dt \quad (2.56)$$

ที่ซึ่ง

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} \quad (2.57)$$

เมื่อ  $J$  เป็นตัวแปรนิ่ง ถ้าสมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (2.58)$$

ถ้า  $\dot{y}$  คือสัญกรณ์ของการอนุพันธ์เวลา (time-derivative notation) ซึ่งถูกแทนที่โดย  $y_x$  คือสัญกรณ์ของการอนุพันธ์ปริภูมิ (space-derivative notation) จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial y_x} \right) = 0 \quad (2.59)$$

ในปัญหาทางด้านฟิสิกส์นั้น  $f_x$  (อนุพันธ์ย่อยของ  $f$  ที่เกี่ยวข้องกับ  $x$ ) มีค่าเป็น 0 ซึ่งเป็นขั้นตอนการใช้ของสมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์ลดลงเป็นการทำให้ง่ายขึ้น ซึ่งรูปแบบการหาปริพันธ์ย่อยเรียกว่าเอกลักษณ์ของเบลทรามี (Beltrami identity)

$$f - y_x \frac{\partial f}{\partial y_x} = C \quad (2.60)$$

สำหรับค่าตัวแปร 3 ตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial u_y} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial u_z} = 0 \quad (2.61)$$

ปัญหาในแคลคูลัสของความแปรผัน บ่อยครั้งสามารถที่จะแก้ปัญหาได้โดยวิธีแก้ปัญหของสมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์ที่เหมาะสม ซึ่งการหาอนุพันธ์ของสมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์จะได้

$$\delta J = \delta \int L(q, \dot{q}, t) dt = \int \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt \quad (2.62)$$

$$= \int \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} \right] dt \quad (2.63)$$

เมื่อ  $\delta \dot{q} = d(\delta q) / dt$  ในขณะนี้การหารปริพันธ์ในเทอมที่สองโดยการใช้

$$\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad dv = d(\delta q) \quad (2.64)$$

$$d\mu = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt \quad v = \delta q \quad (2.65)$$

ดังนั้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} dt = \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d(\delta q) = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (2.66)$$

รวมสมการที่ (2.65) และ (2.66) ทำให้

$$\delta J = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (2.67)$$

แต่เรามีเท่านั้น ไม่ใช่จุดปลาย ดังนั้น

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$$

และสมการที่ (2.67) จะได้

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (2.68)$$

เราหาค่าคงที่ จาก  $\delta J = 0$  จะหายไปเมื่อเปลี่ยน  $\delta q$  ซึ่งนำมาจากสมการที่ (2.68) จะได้

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.69)$$

นี่คือ สมการอนุพันธ์ออยเลอร์-ลากรองจ์

#### 2.4.5 สมการมาตราส่วนเท่า (Isoperimetric Equation)

กำหนดสองเชิงฟังก์ชัน  $F(x, y, y')$  และ  $G(x, y, y')$  ความสั้นโค้ง  $y = y(x)$

โดยกำหนดให้

$$K[y] = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = L \quad (2.70)$$

เป็นความยาวตามเส้น โค้ง และให้เชิงฟังก์ชัน

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (2.71)$$

มีค่าสุดขีดโดยที่  $F$  และ  $G$  มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่หนึ่งและอันดับที่สอง ต่อเนื่องกันสำหรับ  $x_0 \leq x \leq x_1$  และสำหรับค่า  $y, y'$  ใดๆ

จากสมการออยเลอร์ ถ้าเส้นโค้ง  $y = y(x)$  ใ้ค่าสุดขีดของเชิงฟังก์ชันในสมการที่ (2.71)

โดยมีเงื่อนไขดังสมการที่ (2.70) และ

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0, \\ y(x_1) &= y_1 \end{aligned} \quad (2.72)$$

มีค่าคงที่  $\lambda$  สำหรับเส้นโค้ง  $y = y(x)$  คือค่าสุดขีดของเชิงฟังก์ชัน จะได้ว่า

$$L = \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')] dx \quad (2.73)$$

### 2.4.6 การหาเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุดสองจุดบนพื้นผิว

จาก  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  และ  $z = z(u, v)$  โดยที่  $u = u(t)$  และ  $v = v(t)$  จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt = J[u, v] \quad (2.81)$$

เมื่อ

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \quad (2.82)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (2.83)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \quad (2.84)$$

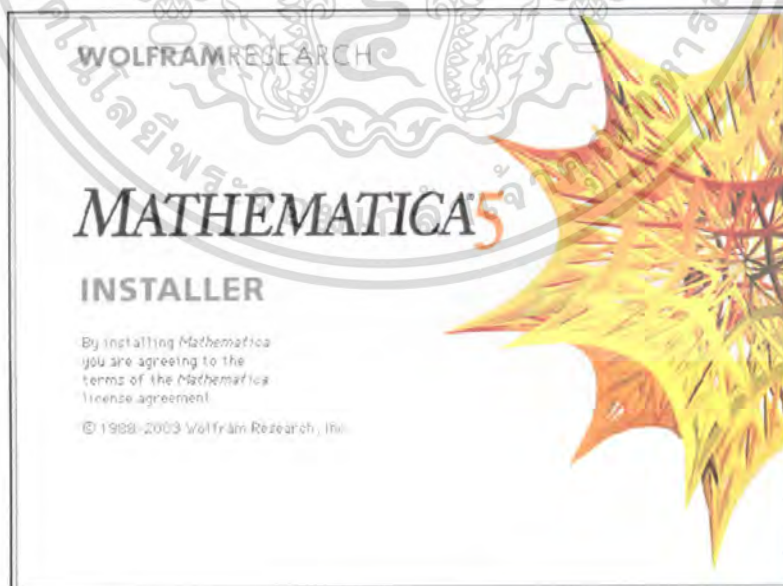
สมการออยเลอร์คือ

$$\frac{E_u u'^2 + 2F_u u'v' + G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2Eu' + 2Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0 \quad (2.85)$$

$$\frac{E_v u'^2 + 2F_v u'v' + G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{2Eu' + 2Fv'}{\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}} = 0 \quad (2.86)$$

## 2.4 โปรแกรมสำเร็จรูปที่เกี่ยวข้อง

### 2.4.1 โปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica 5



รูปที่ 2.8 หน้าจอเริ่มต้น โปรแกรม Mathematica 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Mathematica 5 เป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ศึกษาเป็นพิเศษ ซึ่งส่วนมากจะใช้ในสาขาทางวิทยาศาสตร์ และคณิตศาสตร์ ได้ถูกคิดโดย สตีเฟน โวลแฟรม และพัฒนาโดยคณะทำงานของนักคณิตศาสตร์ และผู้เขียน โปรแกรม ซึ่งเป็นผู้นำเอาศาสตร์ของทั้ง 2 แขนงมารวมกัน และก่อให้เกิดโปรแกรมดังกล่าว สำหรับโปรแกรม Mathematica เริ่มขายโดยผู้วิจัยโวลแฟรมของที่ราบอินอยส์

โปรแกรมสำเร็จรูปนี้จัดเตรียมไว้ให้สนับสนุนสัญลักษณ์หรือการคำนวณเชิงตัวเลข ความแม่นยำในการสุ่มเลขคณิต การจัดการข้อมูล และแผนผัง ซึ่งโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica มีภาษาทางคอมพิวเตอร์ที่จะสนับสนุนเชิงฟังก์ชัน และรูปแบบการดำเนินการของโปรแกรม



รูปที่ 2.9 หน้าจอการทำงาน โปรแกรม Mathematica 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 3

### ปัญหาหระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสอง

ในบทนี้จะกล่าวถึงปัญหาหระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสองที่จะศึกษา ได้แก่ ทรงกลม ทรงกระบอก รูปกรวย ทรงพาราโบล่า ทรงไฮเพอร์โบล่า และทรงห้วงยาง

#### 3.1 ปัญหาหระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม

##### 3.1.1 องค์ประกอบของผิวทรงกลม

ในระบบพิกัดทรงกลม จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกลมจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ  $\phi, \theta$  เมื่อ

$\phi$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $z$  บวก

$\theta$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $x$  บวก บนระนาบ  $xy$

โดยที่  $\rho$  คือ รัศมีของทรงกลม

ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงกลมกับระบบมุมฉาก เป็นดังนี้

$$x = x(\phi, \theta) = \rho \cos \phi \cos \theta \quad (3.1)$$

$$y = y(\phi, \theta) = \rho \cos \phi \sin \theta \quad (3.2)$$

$$z = z(\phi, \theta) = \rho \sin \phi \quad (3.3)$$

##### 3.1.2 การหระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงกลม

สำหรับจุด  $P(x, y, z)$  บนผิวทรงกลม พิกัด  $(x, y, z)$  ของจุด  $P$  บนผิวทรงกลม โดยสมมติให้

$$\vec{r}(\phi, \theta) = x(\phi, \theta)\hat{i} + y(\phi, \theta)\hat{j} + z(\phi, \theta)\hat{k} \quad (3.4)$$

เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวของทรงกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้เป็นคือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุด 2 จุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกลม โดยมีวิธีการดังนี้

อนุพันธ์เทียบกับ  $\theta$  ในสมการที่ (3.1), (3.2) และ (3.3) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \phi \sin \theta \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \sin \phi \cos \theta \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad (3.7)$$

ในการทำงานเดียวกัน อนุพันธ์เทียบ  $\phi$  ในสมการที่ (3.1), (3.2) และ (3.3) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \rho \cos \phi \cos \theta \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \cos \phi \sin \theta \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = -\rho \sin \phi \quad (3.10)$$

กำหนดให้  $L$  เป็นความยาวของส่วนโค้ง เขียนสมการได้

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right) + G \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2} dt \quad ; a \leq t \leq b \quad (3.11)$$

เมื่อ

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \quad (3.12)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \phi} \quad (3.13)$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 \quad (3.14)$$

นำค่าที่ได้จากสมการที่ (3.5), (3.6), (3.7), (3.8), (3.9) และ (3.10) มาแทนค่าในสมการที่ (3.12), (3.13) และ (3.14) จะได้

$$\begin{aligned} E &= \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + 0 \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} F &= -\rho^2 \sin \phi \sin \theta \cos \phi \cos \theta + \rho^2 \sin \phi \sin \theta \cos \phi \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} G &= \rho^2 \cos^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \rho^2 \sin^2 \phi \\ &= \rho^2 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \\ &= \rho^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

หลังจากนั้น นำค่า  $E$ ,  $F$  และ  $G$  แทนค่าในสมการที่ (3.11) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 \sin^2 \phi (\theta')^2 + \rho^2 (\phi')^2} dt \quad ; a \leq t \leq b \quad (3.18)$$

เมื่อ  $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$  ดังนั้น  $d\theta = \theta' dt$  ในทำงานองเดียวกัน  $d\phi = \phi' dt$  และเนื่องจาก  $\theta = \theta(\phi)$  ทำให้

$$L = \rho \int_a^b \sqrt{\sin^2 \phi (d\theta)^2 + (d\phi)^2} \quad (3.19)$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{1 + \sin^2 \phi (\theta')^2} \quad (3.20)$$

ดังนั้นเชิงฟังก์ชันจะได้

$$J[\theta(\phi)] = \rho \int_{\phi_1}^{\phi_2} \sqrt{\sin^2 \phi (\theta')^2 + 1} d\phi \quad (3.21)$$

จากสมการออยเลอร์

$$H_\theta - \frac{dH_{\theta'}}{d\phi} = 0 \quad (3.22)$$

จากสมการที่ (3.20) จะได้

$$H_\theta = 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} H_{\theta'} &= \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \phi (\theta')^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot 2\theta' \sin^2 \phi \\ &= \frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi (\theta')^2}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

นำค่า  $H_\theta$  และ  $H_{\theta'}$  จากสมการที่ (3.23) และ (3.24) แทนในสมการที่ (3.22) จะได้

$$0 - \frac{d}{d\phi} \frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi (\theta')^2}} = 0 \quad (3.25)$$

หรือ

$$\frac{\theta' \sin^2 \phi}{\sqrt{1 + \sin^2 \phi (\theta')^2}} = C_1 \quad ; C_1 \text{ เป็นค่าคงที่} \quad (3.26)$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\begin{aligned} \theta' \sin^2 \phi &= C_1 \sqrt{1 + \sin^2 \phi (\theta')^2} \\ (\theta')^2 (\sin^2 \phi)^2 &= C_1^2 (1 + \sin^2 \phi (\theta')^2) \\ (\theta')^2 (\sin^2 \phi)^2 &= C_1^2 + C_1^2 \sin^2 \phi (\theta')^2 \\ (\theta')^2 ((\sin^2 \phi)^2 - C_1^2 \sin^2 \phi) &= C_1^2 \\ (\theta')^2 \sin^2 \phi (\sin^2 \phi - C_1^2) &= C_1^2 \\ (\theta')^2 &= \frac{C_1^2}{\sin^2 \phi (\sin^2 \phi - C_1^2)} \\ \theta' &= \frac{C_1}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - C_1^2}} \\ \theta &= C_1 \int \frac{1}{\sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi - C_1^2}} d\phi \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\theta = \int \frac{C_1 \csc^2 \phi}{\sqrt{1 - C_1^2 \csc^2 \phi}} d\phi \quad (3.27)$$

เนื่องจาก  $\csc^2 \phi = 1 + \cot^2 \phi$  และเนื่องจาก  $\frac{d \cot \phi}{d\phi} = -\csc^2 \phi$  ดังนั้น  $d \cot \phi = -\csc^2 \phi d\phi$

จะได้

$$\theta = \int \frac{C_1 d(-\cot \phi)}{\sqrt{1 - C_1^2 (1 + \cot^2 \phi)}}$$

$$\theta = \int \frac{d(-C_1 \cot \phi)}{\sqrt{(1 - C_1^2) - C_1^2 \cot^2 \phi}}$$

$$\theta = -\int \frac{d\left(\frac{C_1 \cot \phi}{\sqrt{1 - C_1^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{C_1^2 \cot^2 \phi}{1 - C_1^2}}}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left( \frac{C_1 \cot \phi}{\sqrt{1 - C_1^2}} \right) + C_2$$

ดังนั้น

$$\theta(\phi) = \cos^{-1} (C_1 \cot \phi) + C_2 \quad (3.28)$$

เมื่อ

$$C_2 = \frac{C_1}{\sqrt{1 - C_1^2}}$$

นำมาปรับรูปสมการใหม่อีกครั้ง จะได้

$$C \cot \phi = \cos(\theta(\phi) - C_2)$$

$$C \cot \phi = \cos(\theta(\phi)) \cos(C_2) + \sin(\theta(\phi)) \sin(C_2)$$

$$\cot \phi = \cos(\theta(\phi)) \frac{\cos(C_2)}{C} + \sin(\theta(\phi)) \frac{\sin(C_2)}{C}$$

$$\frac{\cos \phi}{\sin \phi} = A \cos(\theta(\phi)) + B \sin(\theta(\phi)) ; A = \frac{\cos(C_2)}{C}, B = \frac{\sin(C_2)}{C} \quad (3.29)$$

คูณ  $\rho$  ตลอดทั้งสมการที่ (3.29) จะได้

$$\rho \cos \phi = A(\rho \sin \phi \cos(\theta(\phi))) + B(\rho \sin \phi \sin(\theta(\phi)))$$

$$z = Ax + By \quad (3.30)$$

จากสมการที่ (3.30) เป็นสมการระนาบที่ตัดทรงกลม และผ่านจุดศูนย์กลางโดยมีรอยตัดระหว่างทรงกลมดังกล่าวเป็นวงกลมที่ใหญ่ที่สุดหรือวงกลมใหญ่ (Great Circle) และส่วนของวงกลมใหญ่ที่เชื่อมจุดทั้งสองจุดเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.1.3 สมการภาพฉายของวงกลมใหญ่

ในกรณี 2 มิติ เมื่อเส้นโค้งสองเส้นตัดกันสิ่งที่ได้คือ จุดตัด ส่วนในกรณี 3 มิติ เมื่อผิวโค้งสองผิวตัดกันสิ่งที่ได้คือ เส้นโค้ง

กำหนดให้ทรงกลม

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-m)^2 = \rho^2$$

ถูกตัดด้วยระนาบ  $rx + sy + tz + u = 0$  หรือ  $z = \alpha + \beta x + \gamma y$ ;  $\|\vec{p}(t)\| = \rho$

เมื่อ

$$\alpha = -\frac{u}{t}, \beta = -\frac{r}{t} \text{ และ } \gamma = -\frac{s}{t}$$

สมการของรอยตัดคือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (\alpha + \beta x + \gamma y - m)^2 = \rho^2$$

หรือ

$$(x^2 - 2xh + h^2) + (y^2 - 2yh + k^2) + (\beta x + \gamma y)^2 + 2(\beta x + \gamma y)(\alpha - m) + (\alpha - m)^2 = \rho^2$$

$$(x^2 - 2xh + h^2) + (y^2 - 2yh + k^2) + ((\beta^2 x^2 + 2\beta\gamma xy) + \gamma^2 y^2) + 2\alpha\beta x + 2\alpha\gamma y$$

$$-2\beta mx - 2\gamma my + \alpha^2 - 2\alpha m + m^2 - \rho^2 = 0 \quad (3.31)$$

ดังนั้น สมการภาพฉายของวงกลมใหญ่บนระนาบ  $xy$  คือ

$$(1 + \beta^2)x^2 + (1 + \gamma^2)y^2 + 2\beta\gamma xy + 2(\alpha\beta - \beta m - h)x + 2(\alpha\gamma - \gamma m - k)y$$

$$+ (h^2 + k^2 + m^2 - \rho^2 + (\alpha^2 - 2\alpha m)) = 0 \quad (3.32)$$

เทียบเคียงได้กับสมการเส้นโค้งกำลังสอง

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

ข้อสังเกตถ้า  $(x', y')$  เป็นจุดใดๆ ที่อยู่เฉพาะบนระนาบที่ตัดทรงกลมซึ่งให้รอยตัดเป็นวงกลมใหญ่ เมื่อ  $\rho$  เป็นรัศมีของทรงกลม สมการของวงกลมใหญ่บนระนาบตัดจะอยู่ในรูป  $(x' - h)^2 + (y' - k)^2 = \rho^2$  สำหรับวงกลม แต่สมการของวงกลมใหญ่ดังกล่าว จะไม่ได้มีรูปแบบเดียวกันเมื่อนำมาพิจารณาบนระนาบ  $xy$  เพราะวงกลมดังกล่าวจะให้ “ภาพฉาย” บนระนาบ  $xy$  โดยรูปร่างของภาพฉายนั้นขึ้นอยู่กับมุมที่ระนาบตัดทำกับระนาบ  $xy$  หรือองค์ประกอบของระนาบตัดนั่นเอง และในกรณีทั่วไป ภาพฉายที่เกิดขึ้นมักจะเป็นรูปวงรีบนระนาบ  $xy$  ที่มีการย้ายและเลื่อนแกนตามองค์ประกอบของทรงกลมและระนาบตัด โดยกรณีที่ระนาบตัดขนานกับระนาบ ภาพฉายจะเป็นวงกลม ซึ่งวงกลมเป็นรูปแบบเฉพาะของวงรีที่มีแกนเอกเท่ากับแกนโท และสมการของทั้งวงกลมและวงรีก็เป็นส่วนหนึ่งของสมการเส้นโค้งกำลังสอง

### 3.1.4 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดทั้งสองบนผิวทรงกลม ณ จุดตั้งยัน

เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงกลม ทั้งนี้เนื่องมาจากผลลัพธ์ของสมการออยเลอร์ คือ

$$\theta(\phi) = \cos^{-1} \left( \frac{C_1 \cot \phi}{\sqrt{1-C_1^2}} \right) + C_2 \quad (3.33)$$

เป็นคำตอบและเมื่อปรับสมการเสร็จแล้ว เราพบว่า แนวเส้นโค้ง  $\theta(\phi)$  ดังกล่าว สามารถมองได้อีกมุมหนึ่งว่า เป็นแนวเส้นโค้งบนพื้นผิวของทรงกลมที่เกิดจากการนำระนาบตัดผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมและเรื่องความรู้ในเรื่องเรขาคณิตเชิงทรงกลม สามารถสรุปได้ว่า แนวเส้นโค้งนั้นคือ วงกลมใหญ่ วงกลมที่ใหญ่ที่สุดใน 2 มิติ จะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวที่ผ่านจุด 2 จุด ส่วนใน 3 มิติ จุด 3 จุด จะมีระนาบเพียง 1 ระนาบเท่านั้นที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด เมื่อจุดทั้ง 3 จุดไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน แต่บางกรณีอาจจะสรุปไม่ได้ว่าระนาบที่ให้วงกลมใหญ่จะเพียงหนึ่งเดียวที่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมและอีก 2 จุดบนผิวทรงกลม คือ กรณีที่จุด 2 จุดบนผิวเป็นจุดตั้งยัน คือ จุดปลายทั้งสองของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม

ในกรณีที่จุดทั้งสองเป็นจุดคู่ตั้งยัน เซกเมนต์ของทรงกลมใหญ่จะยาว  $\pi\rho$  ซึ่งเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดคู่ตั้งยัน เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่เป็นฐานของเซกเมนต์ที่มีเวกเตอร์  $\overline{OP}_1$  และ  $\overline{OP}_2$  เป็นแกนของเซกเมนต์

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } S &= \theta\rho \text{ เมื่อ } \theta = \arccos \left( \frac{\overline{OP}_1 \cdot \overline{OP}_2}{\rho^2} \right) \text{ จาก } \overline{OP}_1 \cdot \overline{OP}_2 = |\overline{OP}_1| |\overline{OP}_2| \cdot \cos \theta \text{ และ} \\ |\overline{OP}_1| &= |\overline{OP}_2| = \rho, \overline{OP}_1 \cdot \overline{OP}_2 = (x_1 - h)(x_2 - h) + (y_1 - k)(y_2 - k) + (z_1 - m)(z_2 - m) \\ \text{เพราะฉะนั้น } S &= \rho \arccos \left( \frac{\overline{OP}_1 \cdot \overline{OP}_2}{\rho^2} \right) \\ S &= \rho \arccos \left( \frac{[(x_1 - h) + (y_1 - k) + (z_1 - m)] \cdot [(x_2 - h) + (y_2 - k) + (z_2 - m)]}{\rho^2} \right) \\ S &= \rho \arccos \left( \frac{\rho^2 \cdot \rho^2}{\rho^2} \right) \\ S &= \rho \arccos \left( \frac{\rho^4}{\rho^2} \right) \\ S &= \rho \arccos(\rho^2) \\ \rho^2 &= \cos \left( \frac{S}{\rho} \right) \\ \therefore \rho &= \sqrt{\cos(\theta)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.2 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกระบอก

#### 3.2.1 องค์ประกอบของผิวทรงกระบอก

ในระบบพิกัดทรงกระบอก จุดแต่ละจุดบนผิวทรงกระบอกจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่าคือ  $\theta, z$  เมื่อ

$\theta$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $x$  บวก บนระนาบ  $xy$

$z$  คือ ความยาวของทรงกระบอก

โดยที่  $\rho$  คือ รัศมีของทรงกลม บนระนาบ  $xy$

ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงกระบอกกับระบบมุมฉาก เป็นดังนี้

$$x = x(\theta, z) = \rho \cos \theta \quad (3.35)$$

$$y = y(\theta, z) = \rho \sin \theta \quad (3.36)$$

$$z = z(\theta, z) = z \quad (3.37)$$

#### 3.2.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดบนผิวทรงกระบอก

สำหรับจุด  $P(x, y, z)$  บนผิวทรงกระบอกเชื่อมพิกัด  $(x, y, z)$  ของจุด  $P$  บนผิวทรงกระบอก โดยสมมติ

$$\vec{r}(\theta, z) = x(\theta, z)\hat{i} + y(\theta, z)\hat{j} + z(\theta, z)\hat{k} \quad (3.38)$$

ให้เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวทรงกระบอก สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุด 2 จุด ที่แตกต่างกันบนผิวทรงกระบอกโดยมีวิธีการดังนี้

อนุพันธ์เทียบกับ  $\theta$  ในสมการที่ (3.35), (3.36) และ (3.37) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos \theta \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad (3.41)$$

อนุพันธ์เทียบกับ  $z$  ในสมการที่ (3.35), (3.36) และ (3.37) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0 \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = 0 \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 \quad (3.44)$$

กำหนดให้  $L$  เป็นความยาวของส่วนโค้ง เขียนสมการได้

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{d\theta}{dt} \frac{dz}{dt} \right) + G \left( \frac{dz}{dt} \right)^2} dt \quad ; a \leq t \leq b \quad (3.45)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (3.46)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial z} \quad (3.47)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 \quad (3.48)$$

นำค่าที่ได้จากสมการที่ (3.39), (3.40), (3.41), (3.42), (3.43) และ (3.44) มาแทนค่าในสมการที่ (3.46), (3.47) และ (3.48) จะได้

$$\begin{aligned} E &= \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta + 0^2 \\ &= \rho^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} F &= (-\rho \sin \theta)(0) + (\rho \cos \theta)(0) + (0)(1) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} G &= (0)^2 + (0)^2 + (1)^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.51)$$

หลังจากนั้น นำค่า  $E$ ,  $F$  และ  $G$  แทนค่าในสมการที่ (3.45) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 (\theta')^2 + 1} dt ; a \leq t \leq b \quad (3.52)$$

เมื่อ  $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$  ดังนั้น  $d\theta = \theta' dt$  และเนื่องจาก  $\theta = \theta(z)$  ทำให้

$$L = \int_a^b \sqrt{\rho^2 (\theta')^2 + 1} dt \quad (3.53)$$

$$J[\theta(z)] = \int_a^b \sqrt{\rho^2 (\theta')^2 + 1} dz \quad (3.54)$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{1 + \rho^2 (\theta')^2} ; \rho \text{ เป็นค่าคงที่} \quad (3.55)$$

จากสมการของออยเลอร์

$$H_\theta - \frac{d}{dz} H_{\theta'} = 0 \quad (3.56)$$

จากสมการที่ (3.55) จะได้

$$H_\theta = 0 \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} H_{\theta'} &= \frac{1}{2} (1 + \rho^2 (\theta')^2)^{\frac{1}{2}-1} (2\rho^2 (\theta')) \\ &= \frac{2\rho^2 (\theta')}{2\sqrt{1 + \rho^2 (\theta')^2}} \end{aligned} \quad (3.58)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำค่า  $H_\theta$  และ  $H_{\theta'}$  ที่ได้จากสมการที่ (3.57) และ (3.58) แทนในสมการที่ (3.56) จะได้

$$0 - \frac{d}{dz} \frac{\rho^2(\theta')}{\sqrt{1+\rho^2(\theta')^2}} = 0$$

$$\frac{\rho^2(\theta')}{\sqrt{1+\rho^2(\theta')^2}} = C_1 \quad ; C_1 \text{ เป็นค่าคงที่}$$

$$\rho^2(\theta') = C_1 \sqrt{1+\rho^2(\theta')^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$\rho^4(\theta')^2 = C_1^2(1+\rho^2(\theta')^2)$$

$$\rho^4(\theta')^2 - C_1^2\rho^2(\theta')^2 = C_1^2$$

$$(\theta')^2 = \frac{C_1^2}{(\rho^4 - C_1^2\rho^2)}$$

$$\theta' = \frac{C_1}{\sqrt{\rho^4 - C_1^2\rho^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\frac{C_1}{\rho^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - C_1^2}}$$

$$d\theta = \frac{\frac{C_1}{\rho^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - C_1^2}} dz$$

เทียบปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$\int d\theta = \int \frac{\frac{C_1}{\rho^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - C_1^2}} dz$$

$$\theta = \left( \frac{\frac{C_1}{\rho^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - C_1^2}} \right) z + C_2$$

$$\theta(z) = mz + C_2 \quad ; m = \frac{\left( \frac{C_1}{\rho^2} \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{C_1}{\rho} \right)^2}} \quad (3.59)$$

จากสมการที่ (3.59) เป็นสมการระนาบที่ตัดทรงกระบอก และผ่านจุดศูนย์กลาง โดยมีรอยตัด ระหว่างทรงกระบอกดังกล่าว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.2.3 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดทั้งสองบนผิวทรงกระบอกโดยใช้กฎของฮิลิกซ์

การหาระยะทางที่สั้นที่สุดโดยจากกฎของฮิลิกซ์ กล่าวไว้ว่า ส่วนของเส้นโค้งใน 3 มิติ จะได้ 3 สมการในพิกัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยจะจำกัดความเฉพาะส่วนที่เป็นเกลียวบนพื้นผิวทรงกระบอก

$$x = \rho \cos t \quad ; -\infty < t < +\infty \quad (3.60)$$

$$y = \rho \sin t \quad ; -\infty < t < +\infty \quad (3.61)$$

$$z = t \quad ; -\infty < t < +\infty \quad (3.62)$$

แต่เราต้องการให้อยู่ในรูปของ  $\theta$  จะให้  $t$  เป็นค่า  $\theta$  ได้ จะได้ว่า

$$x = \rho \cos \theta \quad (3.63)$$

$$y = \rho \sin \theta \quad (3.64)$$

$$z = \theta \quad (3.65)$$

ระยะทางที่สั้นที่สุดบนทรงกระบอก คือ

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 + [z'(\theta)]^2} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[-\rho \sin \theta]^2 + [\rho \cos \theta]^2 + [1]^2} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{[\rho^2 \sin^2 \theta] + [\rho^2 \cos^2 \theta] + [1]^2} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(\rho^2)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 1} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + 1} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} (\rho^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

$$L = \theta \sqrt{\rho^2 + 1} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$L = (\theta_2 \sqrt{\rho^2 + 1}) - (\theta_1 \sqrt{\rho^2 + 1})$$

$$L = \sqrt{\rho^2 + 1} (\theta_2 - \theta_1) \quad (3.66)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.3 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวรูปกรวย

#### 3.3.1 องค์ประกอบของผิวรูปกรวย

ในระบบพิกัดรูปกรวย จุดแต่ละจุดบนผิวรูปกรวยจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ  $\rho, \theta$  เมื่อ

$\rho$  คือ รัศมีของรูปกรวย

$\theta$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $x$  บวก บนระนาบ  $xy$

โดยที่  $\phi$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $z$  บวก ซึ่งในที่นี้เป็นค่าคงที่

ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบผิวรูปกรวยกับระบบมุมฉากเป็นดังนี้

$$x = x(\rho, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta \quad (3.67)$$

$$y = y(\rho, \theta) = \rho \sin \phi \sin \theta \quad (3.68)$$

$$z = z(\rho, \theta) = \rho \cos \phi \quad (3.69)$$

#### 3.3.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดบนผิวรูปกรวย

สำหรับจุด  $P(x, y, z)$  บนผิวทรงกระบอกเชื่อมพิกัด  $(x, y, z)$  ของจุด  $P$  บนผิวรูปกรวย โดยสมมติให้

$$\vec{r}(\rho, \theta) = x(\rho, \theta)\hat{i} + y(\rho, \theta)\hat{j} + z(\rho, \theta)\hat{k} \quad (3.70)$$

เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวของรูปกรวย สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้เป็นคือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุด 2 จุด ที่แตกต่างกันบนผิวรูปกรวย โดยมีวิธีการดังนี้

อนุพันธ์เทียบกับ  $\rho$  ในสมการที่ (3.67), (3.68) และ (3.69) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \sin \phi \cos \theta \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \phi \sin \theta \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos \phi \quad (3.73)$$

อนุพันธ์เทียบกับ  $\theta$  ในสมการที่ (3.67), (3.68) และ (3.69) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \phi \sin \theta \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \sin \phi \cos \theta \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad (3.76)$$

กำหนดให้  $L$  เป็นความยาวของส่วนโค้ง เขียนสมการได้

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) + G \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2} dt \quad ; a \leq t \leq b \quad (3.77)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์สำหรับการนำไปใช้ประโยชน์ทางการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดลอกเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 \quad (3.78)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad (3.79)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (3.80)$$

นำค่าที่ได้จากสมการที่ (3.71), (3.72), (3.73), (3.74), (3.75) และ (3.76) มาแทนค่าในสมการที่ (3.78), (3.79) และ (3.80) จะได้

$$\begin{aligned} E &= \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.81)$$

$$\begin{aligned} F &= -\rho \sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta + \rho \sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} G &= \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta \\ &= \rho^2 \sin^2 \phi \end{aligned} \quad (3.83)$$

หลังจากนั้น นำค่า  $E$ ,  $F$  และ  $G$  แทนค่าในสมการที่ (3.77) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{(\rho')^2 + \rho^2 \sin^2 \phi (\theta')^2} dt ; a \leq t \leq b \quad (3.84)$$

เมื่อ  $\frac{d\rho}{dt} = \rho'$  ดังนั้น  $d\rho = \rho' dt$  ในทำนองเดียวกัน  $d\theta = \theta' dt$  และเนื่องจาก  $\rho = \rho(\theta)$  ทำให้

$$L = \int_a^b \sqrt{(d\rho)^2 + \rho^2 \sin^2 \phi (d\theta)^2} \quad (3.85)$$

$$J[\theta(z)] = \rho \sin \phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2} d\theta \quad (3.86)$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{1 + \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2} \quad (3.87)$$

จากสมการของฮอยเลอร์

$$H_\rho - \rho' H_{\rho'} = 0 \quad (3.88)$$

จากสมการ (3.87) จะได้

$$H_\rho = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2 \left(-\frac{2}{\rho^3}\right) = -\frac{\frac{1}{\rho^3} \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho'}{\rho \sin \phi}\right)^2}} \quad (3.89)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_{\rho'} = \frac{1}{2} \left( 1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{2\rho}{(\rho \sin \phi)^2} \right) = - \frac{\frac{\rho'}{(\rho \sin \phi)^2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}} \quad (3.90)$$

แต่เนื่องจาก  $H = \sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}$  ไม่ขึ้นกับ  $\theta$  สมการออยเลอร์จึงเปลี่ยนรูปเป็น

$H - \rho' H_{\rho'} = C$  เมื่อนำมาแทนในสมการ จะได้  $H - \rho' H_{\rho'} = C_1$  ทำให้

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2} - \frac{\left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}} &= C_1 \\ \frac{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2 - \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}} &= C_1 \\ \frac{(\rho \sin \phi)^2 + (\rho')^2 - (\rho')^2}{(\rho \sin \phi)^2 \sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}} &= C_1 \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2}} &= C_1 \\ \sqrt{1 + \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2} &= \frac{1}{C_1} \\ \left( \frac{\rho'}{\rho \sin \phi} \right)^2 &= C_2 \quad ; C_2 = \frac{1}{C_1^2} - 1 \end{aligned}$$

$$\frac{\rho'}{\rho \sin \phi} = \sqrt{C_2}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta} = \sqrt{C_2} \sin \phi$$

$$\frac{1}{\rho} d\rho = \sqrt{C_2} \sin \phi d\theta$$

เทียบปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$\int \frac{1}{\rho} d\rho = C_3 \int \sin \phi d\theta \quad ; C_3 = \sqrt{C_2}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการวิจัยเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho = e^{(C_3 \sin \phi)\theta + \ln C_4} \quad (3.91)$$

ดังนั้น  $\rho = Ae^{(B \sin \phi)\theta}$  เป็นสมการเส้นโค้งคำตอบ โดยที่  $A = e^{\ln C_4}$  และ  $B = C_3$   
กำหนดให้ เส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนผิวกรวยกลมที่ผ่านจุด  $(\rho_1, \theta_1)$  และ  $(\rho_2, \theta_2)$  ทำให้ได้สมการ

$$\rho_1 = Ae^{(B \sin \phi)\theta_1} \quad (3.92)$$

$$\rho_2 = Ae^{(B \sin \phi)\theta_2} \quad (3.93)$$

นำสมการที่ (3.92) หารกับสมการที่ (3.93) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= \frac{Ae^{(B \sin \phi)\theta_2}}{Ae^{(B \sin \phi)\theta_1}} & (3.94) \\ &= \frac{e^{(B \sin \phi)\theta_2}}{e^{(B \sin \phi)\theta_1}} \\ &= e^{(B \sin \phi)\theta_2 - (B \sin \phi)\theta_1} \\ &= e^{(B \sin \phi)(\theta_2 - \theta_1)} \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right) = (B \sin \phi)(\theta_2 - \theta_1)$$

$$B = \frac{\ln\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)}{(\sin \phi)(\theta_2 - \theta_1)} \quad (3.95)$$

นำสมการที่ (3.92) ลบกับสมการที่ (3.93) จะได้

$$\rho_2 - \rho_1 = A\left(e^{(B \sin \phi)\theta_2} - e^{(B \sin \phi)\theta_1}\right) \quad (3.96)$$

$$A = \frac{\rho_2 - \rho_1}{e^{(B \sin \phi)\theta_2} - e^{(B \sin \phi)\theta_1}} \quad (3.97)$$

เนื่องจากกรวยเป็นรูปทรงสมมาตร ดังนั้น  $0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq \pi$

ขั้นตอนในการคำนวณหาระยะทางระหว่างจุดบนพื้นผิวกรวยกลม เราต้องกำหนดค่า  $\phi$  ของกรวยกลม โดยที่  $0 < \phi < \pi$  หลังจากนั้นกำหนดพิกัดของจุดทั้งสองบนผิวกรวยกลม คือ จุด  $P_1(\rho_1, \theta_1)$  และ  $P_2(\rho_2, \theta_2)$  ต่อมาจึงคำนวณหาสัมประสิทธิ์  $A$  และ  $B$  เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนผิวกรวยที่ผ่านจุดทั้งสอง เราจะได้สมการ  $\rho = Ae^{(B \sin \phi)\theta}$  นำมาคำนวณด้วยสูตร

$$L(P_1, P_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + (\rho')^2} d\theta \quad \text{ก็จะได้คำตอบ ดังนี้}$$

$$L(P_1, P_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + (\rho')^2} d\theta$$

$$L(P_1, P_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \left(Ae^{(B \sin \phi)\theta}\right)'}^2 d\theta$$

$$L(P_1, P_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + \left(AB \sin \phi e^{(B \sin \phi)\theta}\right)'}^2 d\theta \quad (3.98)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.4 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงพาราโบล

#### 3.4.1 องค์ประกอบของผิวทรงพาราโบล

ในระบบพิกัดทรงพาราโบล จุดแต่ละจุดบนผิวทรงพาราโบลจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ  $\rho, \theta$  เมื่อ

$\rho$  คือ รัศมีของทรงพาราโบล

$\theta$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $x$  บวก บนระนาบ  $xy$

โดยที่  $a, b$  เป็นค่าคงที่

ในกรณีผิวทรงพาราโบล เราได้นำทฤษฎี “พื้นที่ผิวการหมุน” มาประยุกต์ใช้ในการระบุตำแหน่งจุดบนพื้นผิวทรงพาราโบล

จากสมการทรงพาราโบลเชิงวงรี

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

กำหนดให้  $a = b$  ดังนั้น

$$z = \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2)$$

จากระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

เนื่องจาก  $x^2 + y^2 = \rho^2$  เพราะฉะนั้น

$$z = z(\rho, \theta) = \frac{\rho^2}{a^2}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงพาราโบลกับระบบมุมฉากเป็นดังนี้

$$x = x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \tag{3.99}$$

$$y = y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta \tag{3.100}$$

$$z = z(\rho, \theta) = \frac{\rho^2}{a^2} \tag{3.101}$$

#### 3.4.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดบนผิวทรงพาราโบล

สำหรับจุด  $P(x, y, z)$  บนผิวทรงพาราโบลเชื่อมพิกัด  $(x, y, z)$  ของจุด  $P$  บนผิวทรงพาราโบล โดยสมมติ

$$\bar{\rho}(\rho, \theta) = x(\rho, \theta)\mathbf{i} + y(\rho, \theta)\mathbf{j} + z(\rho, \theta)\mathbf{k} \tag{3.102}$$

ให้เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวของทรงพาราโบล สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุด 2 จุด ที่แตกต่างกันบนผิวทรงพาราโบลโดยมีวิธีการดังนี้

อนุพันธ์เทียบ  $\rho$  ในสมการที่ (3.99), (3.100) และ (3.101) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \theta \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \theta \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{2\rho}{a^2} \quad (3.105)$$

อนุพันธ์เทียบกับ  $\theta$  ในสมการที่ (3.99), (3.100) และ (3.101) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \quad (3.106)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos \theta \quad (3.107)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad (3.108)$$

กำหนดให้  $L$  เป็นความยาวของส่วนโค้ง เขียนสมการได้

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) + G \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2} dt \quad ; a \leq t \leq b \quad (3.109)$$

เมื่อ

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \rho} \right)^2 \quad (3.110)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial z}{\partial \theta} \quad (3.111)$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 \quad (3.112)$$

นำค่าที่ได้จากสมการที่ (3.103), (3.104), (3.105), (3.106), (3.107) และ (3.108) มาแทนค่าในสมการที่ (3.110), (3.111) และ (3.112) จะได้

$$\begin{aligned} E &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \frac{4\rho^2}{a^4} \\ &= 1 + \frac{4\rho^2}{a^4} \end{aligned} \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} F &= -\rho \sin \theta \cos \theta + \rho \cos \theta \sin \theta + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.114)$$

$$\begin{aligned} G &= \rho^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \theta \\ &= \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho^2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

หลังจากนั้น นำค่า  $E$ ,  $F$  และ  $G$  แทนค่าในสมการที่ (3.109) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\left( 1 + \frac{4\rho^2}{a^4} \right) (\rho')^2 + (\rho')^2 (\theta')^2} dt \quad (3.116)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $\frac{d\rho}{dt} = \rho'$  ดังนั้น  $d\rho = \rho' dt$  ในทำนองเดียวกัน  $d\theta = \theta' dt$  และเนื่องจาก  $\rho = \rho(\theta)$  ทำให้

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (d\rho)^2 + (\rho)^2 (d\theta)^2} \quad (3.117)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + (\rho)^2} d\theta \quad (3.118)$$

$$J[\rho(\theta)] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2 + \rho^2} d\theta \quad (3.119)$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2} \text{ ไม่ขึ้นกับ } \theta \quad (3.120)$$

จากสมการออยเลอร์  $H - \rho' H_{\rho'} = C$  จะได้

$$\begin{aligned} H_{\rho'} &= \frac{1}{2} \left( \rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho') \\ &= \frac{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}} \end{aligned} \quad (3.121)$$

นำค่าในสมการที่ (3.121) มาแทนค่าในสมการออยเลอร์จะได้

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2} - \rho' \left( \frac{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) \rho'}{\sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}} \right) &= C_1 \\ \frac{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}} - \frac{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}} &= C_1 \\ \frac{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2 - \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}} &= C_1 \\ \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right) (\rho')^2}} &= C_1 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sqrt{\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right)(\rho')^2} = \frac{\rho^2}{C_1}$$

$$\rho^2 + \left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right)(\rho')^2 = \frac{\rho^4}{(C_1)^2}$$

$$(\rho')^2 = \frac{\frac{\rho^4}{(C_1)^2} - \rho^2}{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right)}$$

$$(\rho')^2 = \rho^2 \frac{\left(\frac{\rho^2}{C_1^2} - 1\right)}{\left(1 + \frac{4\rho^2}{a^4}\right)}$$

$$\rho' = \rho \frac{\sqrt{\frac{\rho^2}{C_1^2} - 1}}{\sqrt{1 + \frac{4\rho^2}{a^4}}}$$

$$\rho' = \rho \frac{\sqrt{\rho^2 - C_1^2}}{C_1} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + 4\rho^2}}$$

$$\rho' = \frac{a^2}{C_1} \cdot \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - C_1^2}}{\sqrt{a^4 + 4\rho^2}}$$

$$\rho' = \frac{a^2}{2C_1} \cdot \frac{\rho\sqrt{\rho^2 - C_1^2}}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}{\rho^2 - C_1^2}} d\rho = \frac{a^2}{2C_1} d\theta$$

ทำการเทียบปริพันธ์ทั้งสองข้าง จะได้

$$\int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}{\rho^2 - C_1^2}} d\rho = \int \frac{a^2}{2C_1} d\theta$$

$$\int \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{\rho^2 + \left(\frac{a^2}{2}\right)^2}{\rho^2 - C_1^2}} d\rho = \frac{a^2\theta}{2C_1} + C_2 \quad (3.122)$$

เนื่องจากไม่สามารถหาปริพันธ์โดยตรงได้ จึงจำเป็นต้องคิดในรูปปริพันธ์ดังสมการที่ (3.122)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.5 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงไฮเพอร์โบล่า

#### 3.5.1 องค์ประกอบของผิวทรงไฮเพอร์โบล่า

ในระบบพิกัดทรงไฮเพอร์โบล่า จุดแต่ละจุดบนผิวทรงไฮเพอร์โบล่าจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ  $\theta, \phi$  เมื่อ

$\theta$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $x$  บวก บนระนาบ  $xy$

$\phi$  คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับ  $z$  บวก

โดยที่  $a, b, c$  เป็นค่าคงที่ และกำหนดให้  $a = b = \rho$

ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงไฮเพอร์โบล่ากับระบบมุมฉากเป็นดังนี้

$$x = x(\theta, \phi) = \rho \cos \theta \cosh \phi \quad (3.123)$$

$$y = y(\theta, \phi) = \rho \sin \theta \sinh \phi \quad (3.124)$$

$$z = z(\theta, \phi) = c \sinh \phi \quad (3.125)$$

#### 3.4.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดบนผิวทรงไฮเพอร์โบล่า

สำหรับจุด  $P(x, y, z)$  บนผิวทรงไฮเพอร์โบล่าเชื่อมพิกัด  $(x, y, z)$  ของจุด  $P$  บนผิวทรงไฮเพอร์โบล่า โดยสมมติ

$$\vec{r}(\theta, \phi) = x(\theta, \phi)\hat{i} + y(\theta, \phi)\hat{j} + z(\theta, \phi)\hat{k} \quad (3.126)$$

ให้เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวของทรงไฮเพอร์โบล่า สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุด 2 จุด ที่แตกต่างกันบนผิวทรงไฮเพอร์โบล่าโดยมีวิธีการดังนี้ อนุพันธ์เทียบกับ  $\theta$  ในสมการที่ (3.123), (3.124) และ (3.125) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -\rho \sin \theta \cosh \phi \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \rho \cos \theta \sinh \phi \quad (3.128)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \quad (3.129)$$

อนุพันธ์เทียบกับ  $\phi$  ในสมการที่ (3.123), (3.124) และ (3.125) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \rho \cos \theta \sinh \phi \quad (3.130)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \rho \sin \theta \cosh \phi \quad (3.131)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = c \cosh \phi \quad (3.132)$$

กำหนดให้  $L$  เป็นความยาวของส่วนโค้ง เขียนสมการได้

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} \right) + G \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2} dt \quad ; a \leq t \leq b \quad (3.133)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่เสียค่าใช้จ่าย  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad (3.134)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \phi} \quad (3.135)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2 \quad (3.136)$$

นำค่าที่ได้จากสมการที่ (3.127), (3.128), (3.129), (3.130), (3.131) และ (3.132) มาแทนค่าในสมการที่ (3.134), (3.135) และ (3.136) จะได้

$$\begin{aligned} E &= -\rho^2 \sin^2 \theta \cosh^2 \phi + \rho^2 \cos^2 \theta \sinh^2 \phi + 0 \\ &= \rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) \end{aligned} \quad (3.137)$$

$$\begin{aligned} F &= \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi + \rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi \\ &= 2\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi \end{aligned} \quad (3.138)$$

$$\begin{aligned} G &= \rho^2 \cos^2 \theta \sinh^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \theta \cosh^2 \phi + c^2 \cosh^2 \phi \\ &= \rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi + \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) + c^2 \cosh^2 \phi \end{aligned} \quad (3.139)$$

หลังจากนั้น นำค่า  $E$ ,  $F$  และ  $G$  แทนค่าในสมการที่ (3.133) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{\begin{aligned} &\rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ &+ 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi \left(\frac{d\theta}{dt}\right) \left(\frac{d\phi}{dt}\right) \\ &+ \rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi + \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) + c^2 \cosh^2 \phi \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \end{aligned}} dt$$

เมื่อ  $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$  ดังนั้น  $d\theta = \theta' dt$  ในทำนองเดียวกัน  $d\phi = \phi' dt$  และเนื่องจาก  $\theta = \theta(\phi)$  ทำให้

$$\begin{aligned} J[\theta(\phi)] &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\begin{aligned} &\rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) (d\theta)^2 \\ &+ 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi (d\theta)(d\phi) \\ &+ \rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi + \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) + c^2 \cosh^2 \phi (d\phi)^2 \end{aligned}} d\theta \\ &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\begin{aligned} &\rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) (\theta')^2 \\ &+ 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi (\theta')(\phi') \\ &+ \left(\rho^2 \left(\frac{\cosh 2\phi - \cos 2\theta}{2}\right) + c^2 \cosh^2 \phi\right) (\phi')^2 \end{aligned}} d\theta \end{aligned}$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{\begin{aligned} &\rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) (\theta')^2 \\ &+ 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi (\theta') (\phi') \\ &+ \left( \rho^2 \left( \frac{\cosh 2\phi - \cos 2\theta}{2} \right) + c^2 \cosh^2 \phi \right) (\phi')^2 \end{aligned}}$$

จากสมการของออยเลอร์

$$H_\theta - \theta' \frac{dH}{d\theta'} = 0 \quad (3.140)$$

จากสมการที่ (3.140) จะได้

$$H_\theta = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\left( \begin{aligned} &\rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) (\theta')^2 \\ &+ 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi (\theta') (\phi') \\ &+ \left( \rho^2 \left( \frac{\cosh 2\phi - \cos 2\theta}{2} \right) + c^2 \cosh^2 \phi \right) (\phi')^2 \end{aligned} \right) \\ &\left( \begin{aligned} &2\rho^2 \cos^2 \theta \sinh^2 \phi (\theta') (\theta'') - 2\rho^2 (\theta') \cos \theta \sin \theta \sinh^2 \phi \\ &- 2\rho^2 \sin^2 \theta \cosh^2 \phi (\theta') (\theta'') + 2\rho^2 (\theta') \sin \theta \cos \theta \cosh^2 \phi \\ &(\rho^2 \sin 2\theta \sinh \phi (\theta'') (\phi') + 2\rho^2 \cos 2\theta \sinh \phi (\theta') (\phi'')) \end{aligned} \right) \\ &\left( \begin{aligned} &\frac{\rho^2}{2} \cosh 2\phi (0) + (\phi')^2 (0) - \frac{\rho^2}{2} \cos 2\theta (0) + (\phi')^2 (-\rho^2 \sin 2\theta) \\ &+ c^2 \cosh^2 \phi (0) + (\phi')^2 (0) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \quad (3.141)$$

$$H_{\theta'} = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} &\left( \begin{aligned} &\rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) (\theta')^2 \\ &+ 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi (\theta') (\phi') \\ &+ \left( \rho^2 \left( \frac{\cosh 2\phi - \cos 2\theta}{2} \right) + c^2 \cosh^2 \phi \right) (\phi')^2 \end{aligned} \right) \\ &\left( \begin{aligned} &2\rho^2 \cos^2 \theta \sinh^2 \phi (\theta') (\theta'') - 2\rho^2 (\theta') \cos \theta \sin \theta \sinh^2 \phi \\ &- 2\rho^2 \sin^2 \theta \cosh^2 \phi (\theta') (\theta'') + 2\rho^2 (\theta') \sin \theta \cos \theta \cosh^2 \phi \\ &(\rho^2 \sin 2\theta \sinh \phi (\theta'') (\phi') + 2\rho^2 \cos 2\theta \sinh \phi (\theta') (\phi'')) \end{aligned} \right) \\ &\left( \begin{aligned} &\frac{\rho^2}{2} \cosh 2\phi (0) + (\phi')^2 (0) - \frac{\rho^2}{2} \cos 2\theta (0) + (\phi')^2 (-\rho^2 \sin 2\theta) \\ &+ c^2 \cosh^2 \phi (0) + (\phi')^2 (0) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right] \quad (3.142)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำค่าที่ได้ในสมการที่ (3.141) และ (3.142) แทนค่าในสมการที่ (3.140) จะได้

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) (\theta')^2 \\ + 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi (\theta') (\phi') \\ + \left( \rho^2 \left( \frac{\cosh 2\phi - \cos 2\theta}{2} \right) + c^2 \cosh^2 \phi \right) (\phi')^2 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{l} 2\rho^2 \cos^2 \theta \sinh^2 \phi (\theta') (\theta'') - 2\rho^2 (\theta') \cos \theta \sin \theta \sinh^2 \phi \\ - 2\rho^2 \sin^2 \theta \cosh^2 \phi (\theta') (\theta'') + 2\rho^2 (\theta') \sin \theta \cos \theta \cosh^2 \phi \\ \left( \rho^2 \sin 2\theta \sinh \phi (\theta'') (\phi') + 2\rho^2 \cos 2\theta \sinh \phi (\theta') (\phi') \right) \\ \left( (-\rho^2 \sin 2\theta) (\phi')^2 \right) \end{array} \right) \end{array} \right] \\ - \theta' \left[ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \rho^2 (\cos^2 \theta \sinh^2 \phi - \sin^2 \theta \cosh^2 \phi) (\theta')^2 \\ + 4\rho^2 \sin \theta \cos \theta \sinh \phi \cosh \phi (\theta') (\phi') \\ + \left( \rho^2 \left( \frac{\cosh 2\phi - \cos 2\theta}{2} \right) + c^2 \cosh^2 \phi \right) (\phi')^2 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{l} 2\rho^2 \cos^2 \theta \sinh^2 \phi (\theta') (\theta'') - 2\rho^2 (\theta') \cos \theta \sin \theta \sinh^2 \phi \\ - 2\rho^2 \sin^2 \theta \cosh^2 \phi (\theta') (\theta'') + 2\rho^2 (\theta') \sin \theta \cos \theta \cosh^2 \phi \\ \left( \rho^2 \sin 2\theta \sinh \phi (\theta'') (\phi') + 2\rho^2 \cos 2\theta \sinh \phi (\theta') (\phi') \right) \\ \left( (\phi')^2 (-\rho^2 \sin 2\theta) \right) \end{array} \right) \end{array} \right]' = 0 \quad (3.143)$$

เนื่องจากสมการที่ (3.143) ยากต่อการจัดรูปอย่างง่าย จึงจำเป็นต้องติดอยู่ในรูปสมการดังกล่าว

### 3.6 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงห้ววยาง

#### 3.6.1 องค์ประกอบของผิวทรงห้ววยาง

ในระบบพิกัดทรงห้ววยาง จุดแต่ละจุดบนผิวทรงห้ววยางจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 2 ค่า คือ  $\alpha, \beta$  เมื่อ

$\alpha$  คือ มุมระหว่าง 2 วงกลมที่ต่างกันบนระนาบ  $xy$

$\beta$  คือ มุมระหว่างรัศมีของวงกลมทำกับระนาบ  $xy$

โดยที่  $R$  เป็นรัศมีของทรงห้ววยาง นั่นคือระยะห่างจากจุดกำเนิด ไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\rho$  เป็นรัศมีของวงกลม

ซึ่งในกรณีของทรงห้ววยาง เราอาจจะพิจารณาจากการนำแผ่นวงกลมรัศมี  $\rho$  มาหมุนรอบแกน  $z$

ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงห่วงยางกับระบบมุมฉากเป็นดังนี้

$$x = x(\alpha, \beta) = (R + \rho \cos \beta) \cos \alpha \quad (3.144)$$

$$y = y(\alpha, \beta) = (R + \rho \cos \beta) \sin \alpha \quad (3.145)$$

$$z = z(\alpha, \beta) = \rho \sin \beta \quad (3.146)$$

### 3.6.2 การหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดบนผิวทรงห่วงยาง

สำหรับจุด  $P(x, y, z)$  บนผิวทรงห่วงยางเชื่อมพิกัด  $(x, y, z)$  ของจุด  $P$  บนผิวทรงห่วงยาง โดยสมมติให้

$$\bar{\rho}(\alpha, \beta) = x(\alpha, \beta)\hat{i} + y(\alpha, \beta)\hat{j} + z(\alpha, \beta)\hat{k} \quad (3.147)$$

เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวของทรงห่วงยาง สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุด 2 จุด ที่แตกต่างกันบนผิวทรงห่วงยางโดยมีวิธีการดังนี้

อนุพันธ์เทียบ  $\alpha$  ในสมการที่ (3.144), (3.145) และ (3.146) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -(R + \rho \cos \beta) \sin \alpha \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = (R + \rho \cos \beta) \cos \alpha \quad (3.149)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.150)$$

อนุพันธ์เทียบ  $\beta$  ในสมการที่ (3.144), (3.145) และ (3.146) จะได้

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\rho \cos \alpha \sin \beta \quad (3.151)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = -\rho \sin \alpha \sin \beta \quad (3.152)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = \rho \cos \beta \quad (3.153)$$

กำหนดให้  $L$  เป็นความยาวของส่วนโค้ง เขียนสมการได้

$$L = \int_a^b \sqrt{E \left( \frac{d\alpha}{dt} \right)^2 + 2F \left( \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\beta}{dt} \right) + G \left( \frac{d\beta}{dt} \right)^2} dt \quad ; a \leq t \leq b \quad (3.154)$$

เมื่อ

$$E = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (3.155)$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial z}{\partial \beta} \quad (3.156)$$

$$G = \left( \frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2 \quad (3.157)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำค่าที่ได้จากสมการที่ (3.148), (3.149), (3.150), (3.151), (3.152) และ (3.153) มาแทนค่าในสมการที่ (3.155), (3.156) และ (3.157) จะได้

$$\begin{aligned} E &= (R + \rho \cos \beta)^2 \sin^2 \alpha + (R + \rho \cos \beta)^2 \cos^2 \alpha \\ &= (R + \rho \cos \beta)^2 \end{aligned} \quad (3.158)$$

$$\begin{aligned} F &= \rho \cos \alpha \sin \beta (R + \rho \cos \beta) \sin \alpha - \rho \sin \alpha \sin \beta (R + \rho \cos \beta) \cos \alpha \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.159)$$

$$\begin{aligned} G &= \rho^2 \sin^2 \beta \cos^2 \alpha + \rho^2 \sin^2 \beta \sin^2 \alpha + \rho^2 \cos^2 \beta \\ &= \rho^2 \end{aligned} \quad (3.160)$$

หลังจากนั้น นำค่า  $E$ ,  $F$  และ  $G$  แทนค่าในสมการที่ (3.154) จะได้

$$L = \int_a^b \sqrt{(R + \rho \cos \beta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2} dt \quad a \leq t \leq b$$

เมื่อ  $\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'$  ดังนั้น  $d\alpha = \alpha' dt$  ในทำนองเดียวกัน  $d\beta = \beta' dt$  และเนื่องจาก  $\alpha = \alpha(\beta)$  ทำให้

$$\begin{aligned} J[\alpha(\beta)] &= \int_a^b \sqrt{(R + \rho \cos \beta)^2 (d\alpha)^2 + \rho^2 (d\beta)^2} \\ &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{(R + \rho \cos \beta)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \rho^2} d\beta \\ &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\left(\frac{R + \rho \cos \beta}{\rho}\right)^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 1} d\beta \\ &= \rho \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\left(\frac{R + \rho \cos \beta}{\rho}\right)^2 (\alpha')^2 + 1} d\beta \end{aligned} \quad (3.161)$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{\left(\frac{R + \rho \cos \beta}{\rho}\right)^2 (\alpha')^2 + 1} \quad (3.162)$$

จากสมการของฮอยเลอร์

$$H_\beta - \frac{dH}{d\alpha} \beta' \quad \text{ไม่ขึ้นกับ } \beta' \quad (3.163)$$

จากสมการที่ (3.162) จะได้

$$H_{\alpha'} = C_1 \quad (3.164)$$

$$H_{\alpha'} = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 (\alpha')^2 + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \times 2 \left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 \cdot \alpha' \right) \quad (3.165)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 (\alpha')^2 + 1 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] \times 2 \left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 \cdot \alpha' \right) \quad (3.166)$$

แทนค่าในสมการที่ (3.163) จะได้

$$\frac{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 \cdot \alpha'}{\sqrt{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 (\alpha')^2 + 1}} = C_1$$

$$\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 \cdot \alpha' = C_1 \sqrt{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 (\alpha')^2 + 1}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้

$$\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^4 \cdot (\alpha')^2 = C_1^2 \left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 (\alpha')^2 + 1 \right)$$

$$\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^4 \cdot (\alpha')^2 = C_1^2 + C_1^2 \left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 (\alpha')^2 \right)$$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$(\alpha')^2 = \frac{C_1^2}{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 \left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 - C_1^2 \right)}$$

$$(\alpha')^2 = \frac{C_1^2}{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^4 - C_1^2 \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2}$$

$$\alpha' = \frac{C_1}{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 - C_1 \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)}$$

$$\alpha = \int \frac{C_1}{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)^2 - C_1 \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right)} d\beta$$

$$\alpha = \int \frac{C_1}{\left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right) \left( \left( \frac{R + \rho \cos \beta}{\rho} \right) - C_1 \right)} d\beta \quad (3.167)$$

ไม่สามารถหาปริพันธ์โดยตรงได้ จึงจำเป็นต้องคิดในรูปดังสมการที่ (3.167)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

### การวิเคราะห์ผลการทดลอง

ในบทนี้จะกล่าวถึงปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลมที่จะศึกษานั้น ได้ทำการค้นคว้าด้วยวิธีแคลคูลัสของการแปรผัน ซึ่งใช้สมการของออยเลอร์เป็นพื้นฐานในการศึกษา และรูปทรงที่ได้นำมาศึกษาในปัญหาพิเศษเล่มนี้ ได้พบข้อจำกัดจำแนกตามกรณีได้ดังนี้

#### 4.1 การวิเคราะห์สำหรับทรงกลม

ในกรณีที่จุดทั้งสองเป็นจุดคู่เล็งขึ้น เซกเมนต์ของทรงกลมใหญ่จะยาว  $\pi\rho$  ซึ่งเป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดคู่เล็งขึ้น แต่ถ้าในกรณีที่ต้องการหาลำจากภาพฉายจะได้  $2\rho$  ดังรูป



รูปที่ 4.1 แสดงตำแหน่งจุดคู่เล็งขึ้น  $P_1$  และ  $P_2$  และระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม

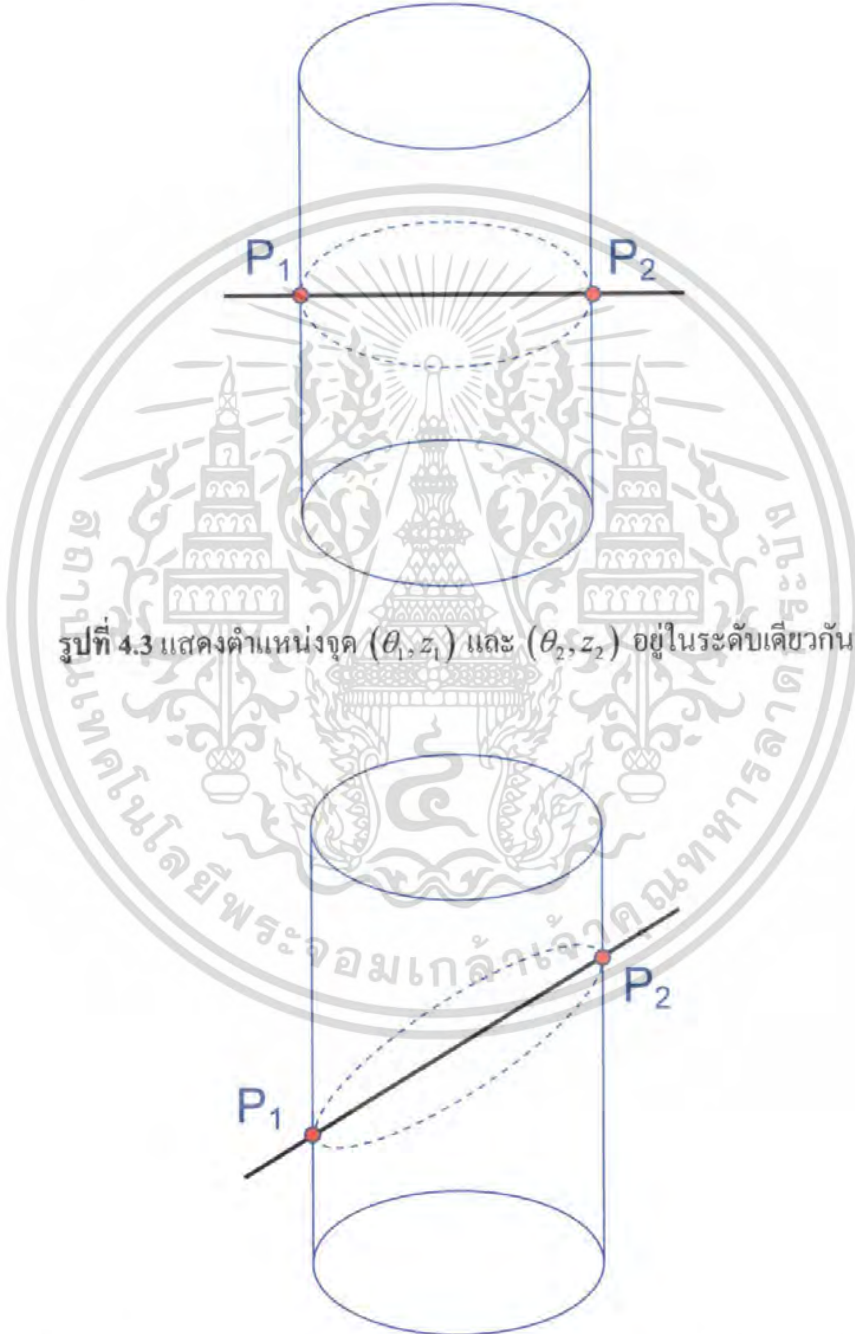


รูปที่ 4.2 แสดงตำแหน่งจุดคู่เล็งขึ้น  $P_1$  และ  $P_2$  และระยะทางจากภาพฉายในทรงกลม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับการศึกษาเท่านั้น เมื่ออนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาตจากเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.2 การวิเคราะห์สำหรับทรงกระบอก

จากการพิจารณาสังเกตพบว่า ถ้า  $z_1 = z_2$  จุด  $(\theta_1, z_1)$  และ  $(\theta_2, z_2)$  อยู่ในระดับเดียวกัน สามารถคำนวณหาค่าความยาว  $L$  ได้จากสมการ  $L = \sqrt{\rho^2 + 1}(\theta_2 - \theta_1)$  ซึ่งถ้า  $z_1 \neq z_2$  จะไม่สามารถหาค่า  $L$  จากสมการข้างต้นได้ดังรูป



รูปที่ 4.3 แสดงตำแหน่งจุด  $(\theta_1, z_1)$  และ  $(\theta_2, z_2)$  อยู่ในระดับเดียวกัน

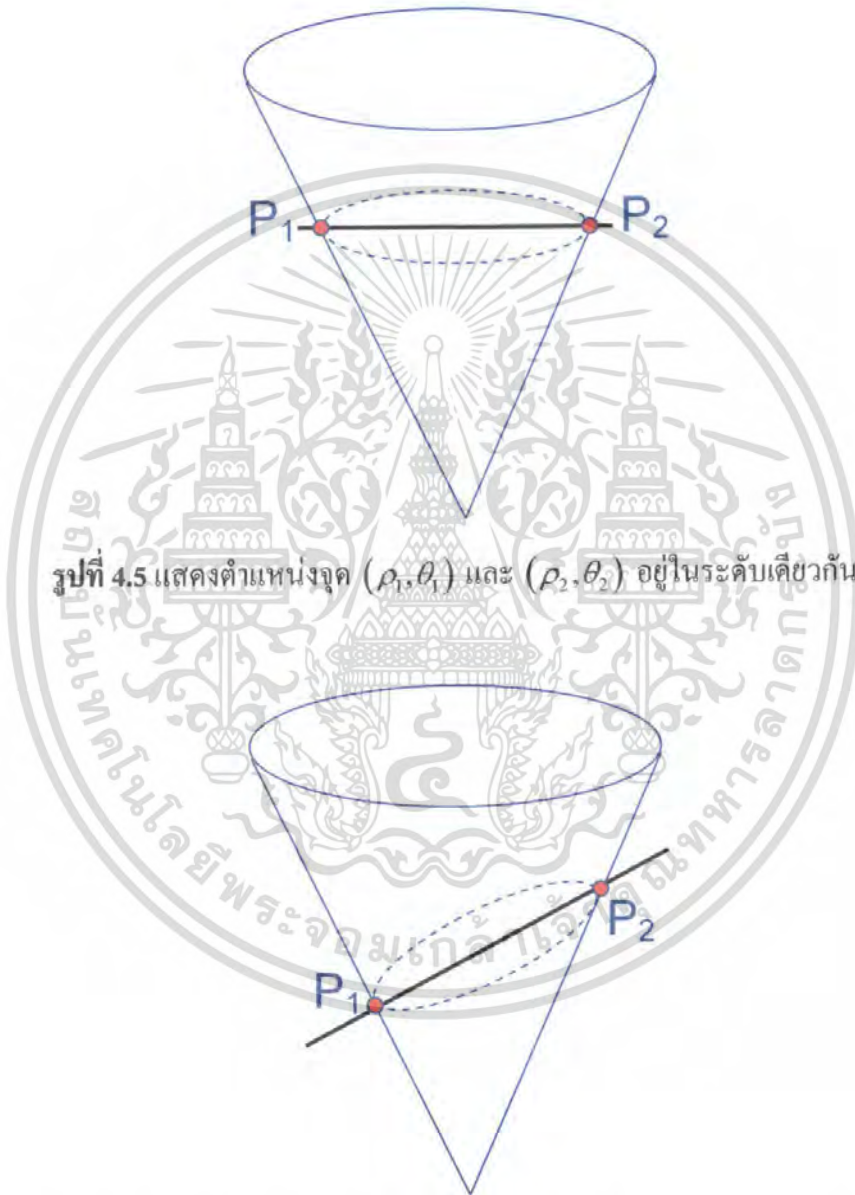
รูปที่ 4.4 แสดงตำแหน่งจุด  $(\theta_1, z_1)$  และ  $(\theta_2, z_2)$  ไม่ได้อยู่ในระดับเดียวกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 4.3 การวิเคราะห์สำหรับรูปกรวย

จากการพิจารณาจะสังเกตพบว่า

1. ถ้า  $\theta_1 = \theta_2$  สัมประสิทธิ์  $B$  จะไม่สามารถคำนวณค่าได้
2. ถ้า  $\phi_0 = 0$  สัมประสิทธิ์  $A$  จะไม่สามารถคำนวณค่าได้



รูปที่ 4.5 แสดงตำแหน่งจุด  $(\rho_1, \theta_1)$  และ  $(\rho_2, \theta_2)$  อยู่ในระดับเดียวกัน

รูปที่ 4.6 แสดงตำแหน่งจุด  $(\rho_1, \theta_1)$  และ  $(\rho_2, \theta_2)$  ไม่อยู่ในระดับเดียวกัน

### 4.4 การวิเคราะห์สำหรับทรงพาราโบลไฮเพอร์โบล่า และทรงห่วยยาง

ไม่สามารถทำการหาปริพันธ์ได้โดยตรง หากจะทำการคำนวณต้องคำนวณแบบประมาณ

**คำเชิงตัวเลขต่อไป**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัย การอภิปราย และข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะกล่าวถึงสรุปผลการวิจัย การอภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะในปัญหาพิเศษเล่มนี้ เพื่อให้ผู้วิจัยที่สนใจสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานวิจัยอื่นๆ ต่อไป

#### 5.1 สรุปผลการวิจัย

การหาสมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนผิวกำลังสองด้วยวิธีการประยุกต์จากสมการออยเลอร์ทำให้กรณีของทรงกลมนั้น สามารถใช้ระบบพิกัดตำแหน่งของจุดบนพื้นผิวได้โดยตรง หลังจากได้ทำการศึกษาแล้วพบว่า เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของทรงกลมนั้น คือ ส่วนของวงกลมใหญ่

สำหรับทรงกระบอก เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของทรงกระบอกนั้น คือ ส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเกลียวหรือฮิลิกซ์ (Helix)

สำหรับรูปกรวยนั้น เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของรูปกรวยนั้น คือ ส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล (Spiral)

#### 5.2 การอภิปรายผลการวิจัย

ในการศึกษาวิเคราะห์เพื่อที่จะค้นคว้าเกี่ยวกับเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวกำลังสองด้วยวิธีการเชิงฟังก์ชัน โดยใช้สมการออยเลอร์เป็นเครื่องมือในการศึกษา พบว่าวิธีการดังกล่าวมีข้อจำกัดในการศึกษา เนื่องจากวิธีการเชิงฟังก์ชันที่เราใช้สมการออยเลอร์นั้น สามารถที่จะระบุตำแหน่งได้ด้วยระบบพิกัดชนิดใดชนิดหนึ่งเท่านั้น เช่น ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ  $(x, y, z)$  เป็นต้น

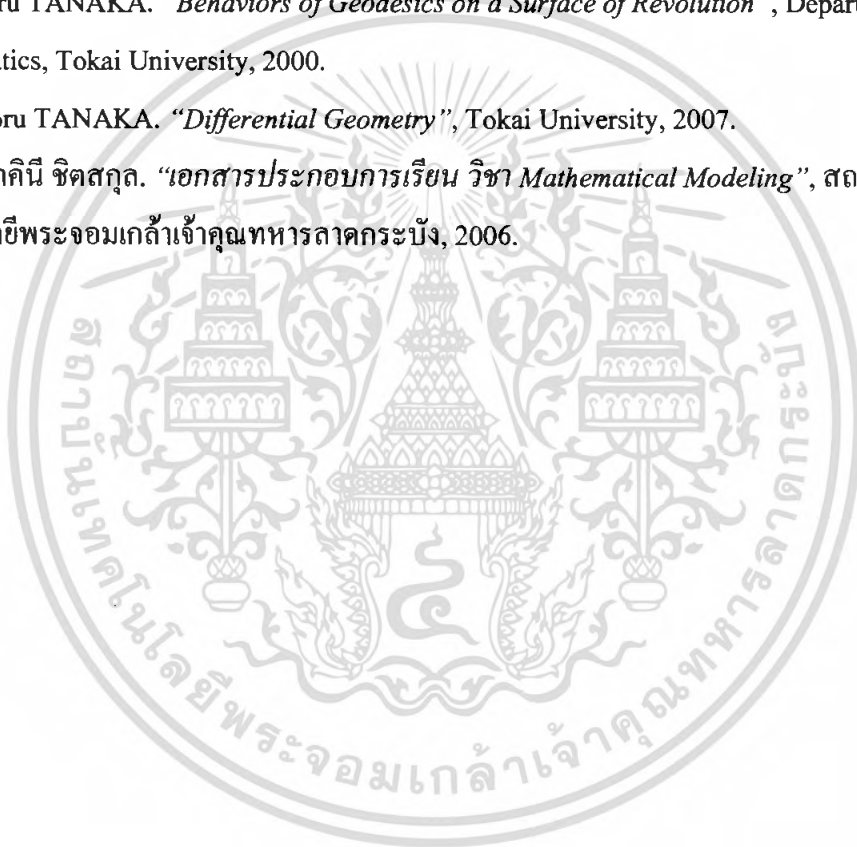
จากเหตุผลดังกล่าว รูปทรงกำลังสองที่ศึกษาเพื่อหาสมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวกำลังสอง จึงจำกัดเฉพาะอยู่ที่ระนาบทรงกลม ทรงกระบอก และรูปกรวยเท่านั้น ทำให้การหาสมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดของทรงพาราโบลา ทรงไฮเพอร์โบลา และทรงห้ววยาง จึงติดอยู่ในรูปของปริพันธ์ และยากที่จะดำเนินการต่อไปได้

#### 5.3 ข้อเสนอแนะ

การศึกษาปัญหาหระยะทางที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวของรูปทรงกำลังสองด้วยแคลคูลัสของการแปรผัน โดยใช้สมการออยเลอร์เป็นเครื่องมือศึกษานั้น ยังมีข้อจำกัดอยู่หลายประการ ดังนั้นสำหรับผู้ที่ต้องการศึกษาวิจัยต่อ ควรจะศึกษาในเรื่องของ Differential Geometry ด้วยอีกทางหนึ่ง เพื่อเป็นเอกสารเครื่องมือที่ช่วยในการหระยะทางที่สั้นที่สุดได้อีกทางหนึ่งนั้น ไม่นับญาติให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## รายการอ้างอิง

- [1] George B. Thomas, JR. “*Calculus and Analytic geometry*”, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1972.
- [2] I.M.Gelfand and S.V.Fomin. “*Calculus of Variations*”, Dover Publications, Inc. 1963.
- [3] John Opera. “*Differential geometry and its applications*”, Prentice-Hall, Inc. 1997.
- [4] Jürgen Jost and Xianqing Li-Jost. “*Calculus of Variations*”, Cambridge University Press. 1998.
- [5] Minoru TANAKA. “*Behaviors of Geodesics on a Surface of Revolution*”, Department of Mathematics, Tokai University, 2000.
- [6] Minoru TANAKA. “*Differential Geometry*”, Tokai University, 2007.
- [7] รศ.ภักคินี ชิตสกุล. “เอกสารประกอบการเรียน วิชา *Mathematical Modeling*”, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2006.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

**รหัสต้นฉบับ (Source code) รูปภาพพิกัดสอง  
ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป Mathematica 5**



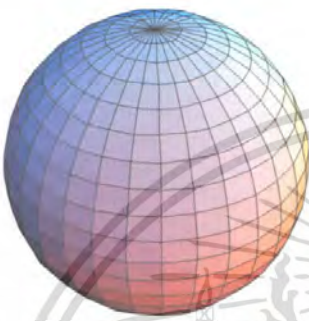

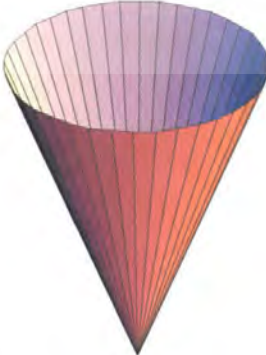
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คำสั่งสร้างภาพ 3 มิติด้วยค่าพารามิเตอร์

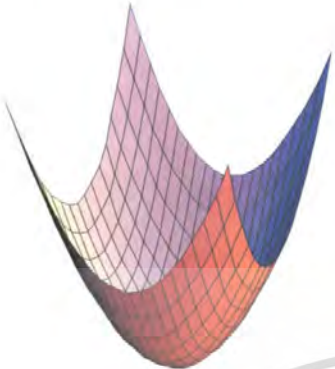
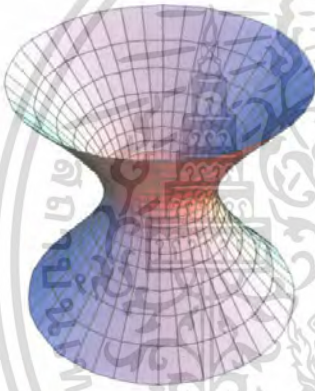
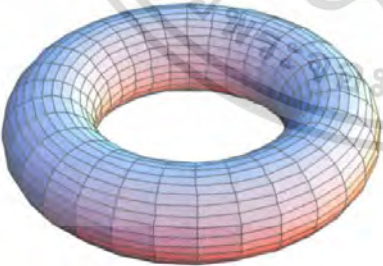
<<Graphics`ParametricPlot3D`

คำสั่งสร้างภาพ 3 มิติด้วยคำสั่งสำเร็จรูป

<<Graphics`Shapes`

ผลที่ได้	รหัสต้นฉบับ
	<pre>ParametricPlot3D[ {Cos[u]Cos[v], Sin[u]Cos[v], Sin[v]}, {u,0,2Pi,Pi/15}, {v,-Pi/2,Pi/2,Pi/20}, Axes-&gt;None,Boxed-&gt;False];</pre>
	<pre>ParametricPlot3D[ {Sin[t], Cos[t], u}, {t,0,2Pi,Pi/20}, {u,0,4,Pi/20}, Axes-&gt;False,Boxed-&gt;False];</pre>
	<pre>Show[RotateShape[Graphics3D[ Cone[2,3,40]],Pi,Pi,Pi], Boxed-&gt;False];</pre>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลที่ได้	รหัสต้นฉบับ
	<pre>ParametricPlot3D[ {u,v,u^2+v^2}, {u,-Pi/2,Pi/2,Pi/20}, {v,-Pi/2,Pi/2,Pi/15}, Axes-&gt;None,Boxed-&gt;False];</pre>
	<pre>ParametricPlot3D[ {Cosh[v]Cos[u],Cosh[v]Sin[u], Sinh[v]}, {u,0,2Pi,Pi/20}, {v,-Pi/2,Pi/2,Pi/15}, Axes-&gt;None,Boxed-&gt;False];</pre>
	<pre>ParametricPlot3D[ {Cos[t](3+Cos[u]), Sin[t](3+Cos[u]),Sin[u]}, {t,0,2Pi,Pi/15}, {u,0,2Pi,Pi/15}, Axes-&gt;None,Boxed-&gt;False];</pre>

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้