การประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองค์สำหรับวิธีปริพันธ์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

ฐิติพร รุ่งสุริยะศิลป์
วรางคณา ขัดนาค
ศศิกร สงขาว

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2550

AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

THITIPORN RUNGSURIYASIN

WARANGKANA KADNAK

SASIKORN SONGKOW

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2007

หัวข้อปัญหาพิเศษ การประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์สำหรับวิธีปริพันธ์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

ชื่อนักศึกษา นางสาวฐิติพร รุ่งสุริยะศิลป์ 47050009

นางสาววรางคณา ขัดนาค 47050028

นางสาวศศิกร สงขาว 47050034

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

อาจารย์จินดา ไชยช่วย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตร วิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2550

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
อาจารย์พรชัย ชัยสนิท ประธานกรรมการ	
อาจารย์พุทธพร วานิชกร กรรมการ	
รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อาจารย์จินดา ไชยช่วย กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	

(รองศาสตราจารย์ไพรบูลย์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

แด่ สถาบันที่ให้ความรู้

ฐิติพร

แด่ บิดา-มารดา ผู้เป็นกำลังใจมาโดยตลอด

วรางคณา

แด่ สถาบันอันเป็นที่รัก

ศศิกร

หัวข้อปัญหาพิเศษ การประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์สำหรับวิธีปริพันธ์เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ชื่อนักศึกษา นางสาวฐิติพร รุ่งสุริยะศิลป์ 47050009

นางสาววรางคณา ขัดนาค 47050028

นางสาวศศิกร สงขาว 47050034

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2550

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร.ไมตรี โพธิ์สุข

รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

อาจารย์จินดา ไชยช่วย

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้ เป็นแนวทางหนึ่งที่แนะนำใช้วิธีเชิงตัวเลขที่ใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ในวิธีใหม่นี้จะใช้หลักความจริงที่ว่าปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นสมมูลกับสมการปริพันธ์ ดังนั้นจะใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหา โดยใช้วิธีเกาส์-เลอจองด์และจะนำผลเฉลยที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีของรุงเงคุตตา

Special Project Title	AN APPLICATION OF LEGENDRE ORTHOGONAL POLYNOMIAL FOR INTEGRATION METHOD IN FINDING THE NUMERICAL SOLUTION OF THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
Students	Ms.Thitiporn Rungsuriyasin 47050009
	Ms.Warangkana Kadnak 47050028
	Ms.Sasikorn Songkow 47050034
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2007
Special Project Advisor	Associate Professor Dr.Maitree Podisuk
	Associate Professor Pongpan Rattanathanawan
	Mr.Chinda Chaichuay

ABSTRACT

In this special problem, the new way of finding the numerical solution of the initial value problem of the ordinary differential equation will be introduced. This new method uses the fact that the initial value problem of the ordinary differential equation is equivalent to the integral equation. Thus we use the integral equation to compute the solution by Gauss-Legendre Quadrature formulas and compare the results with the result of Runge-Kutta Method.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องรูปแบบปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รองศาสตราจารย์ดร.ไมตรี โพธิ์สุข รองศาสตราจาย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ และอาจารย์จินดา ไชยช่วย

อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำ และเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้ประสาทวิชา ความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ และขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ รวมทั้งเพื่อนๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง (ต่อ)

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ ปัญหาที่ประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ และเงื่อนไขของตัวแปรอิสระและค่าตัวแปรตาม การกำหนดค่าตัวแปรอิสระและค่าตัวแปรตามหนึ่งคู่เป็นเงื่อนไข เรียกเงื่อนไขนี้ว่า เงื่อนไขจุดเริ่มต้น

รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ $y'(x) = f(x, y)$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(a) = c$ โดยที่สมการเชิงอนุพันธ์จะสามารถหาคำตอบได้สองแบบ คือ แบบแรกได้แก่ การหาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ซึ่งวิธีนี้จะใช้ได้เฉพาะกรณีง่ายๆ แบบที่สองเป็นการหาคำตอบเชิงตัวเลข ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการคำนวณเชิงตัวเลขนั้นเป็นสิ่งที่สำคัญ และจากที่ทราบว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นที่กล่าวมาข้างต้นนั้นสมมูลกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t, y)dt$ ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหาแทนได้

โดยในที่นี้จะใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหา แล้วหาผลเฉลยที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากวิธีของรุงเงคุตตา

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1) เพื่อศึกษาวิธีการใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหาสมการเงื่อนไขเริ่มต้น

2) หารูปแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาของสมการเพื่อความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาผลเฉลย

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1) ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

2) หารูปแบบเชิงตัวเลขไม่เกิน 6 จุด

3) นำผลที่ได้จากการคำนวณเชิงตัวเลขที่ได้ไปใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น

1.4 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 1 ศึกษาข้อมูลและทฤษฎีที่ใช้ในการดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 2 หาสมการเพื่อคำตอบของสมการไม่เกิน 6 จุด

ขั้นตอนที่ 3 เขียนโปรแกรมเพื่อทดสอบสมการ เพื่อหาค่าที่ต้องการออกมา

ขั้นตอนที่ 4 วิเคราะห์และรวบรวมข้อมูลที่ได้

ขั้นตอนที่ 5 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) เพื่อนำไปใช้ได้ดีในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น
2) เพื่อเป็นแนวทางให้มีการศึกษาวิจัยต่อเนื่องไปอีก

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ(ordinary differential equations)

อยู่ในรูปสมการ $$y'(x) = f(x,y) \tag{2.1}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $$y(a) = c$$

2.1 วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งมีรูปสมการเป็น

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \tag{2.2}$$

นั่นคือวิธีออยเลอร์จะหา y_{m+1} โดยใช้เส้นตรงที่มีความชัน $y'(x_m)$ และผ่านจุด (x_m, y_m) เป็นตัวกำหนด ซึ่งในงานวิจัยจะเรียกสมการ (2.2) นี้ว่า RK-1 ซึ่งใช้แทนสมการรุงเง-คุตตา อันดับหนึ่ง

2.2 วิธีของเทย์เลอร์ (Taylor's Method)

วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งเป็นวิธีที่ให้ผลดีเป็นที่น่าพอใจและมีผู้ที่นิยมใช้กันมาก เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่าย สาเหตุที่เรียกว่าวิธีของเทย์เลอร์เพราะใช้อนุกรมเทย์เลอร์เป็นหลัก

จากสมการ $y'(x) = f(x,y)$, $y(a) = c$

โดยที่ $a \le x \le b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y(c) = 0$ และ $x_k = a + kh$

กระจายเทอม $y(x_m + h)$ ตามอนุกรมกำลังเทย์เลอร์ได้

$$y(x_m + h) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{6} y'''(x_m) + \dots \tag{2.3}$$

ดังนั้น $y(x_m + h) \cong y_m + hf(x_m, y_m)$

จึงให้ $$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \tag{2.4}$$

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (2.4) วิธีของเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง หรือที่นิยมเรียกกันว่าวิธีของออยเลอร์ในทำนองเดียวกัน จากรูปแบบที่ (2.3)

$$y(x_m+h) = y(x_m)+hy'(x_m)+\frac{h^2}{2}y''(x_m) \quad \text{แต่} \; y'(x) = f(x,y)$$

$$\therefore y'' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = f_x + f_y y' = f_x + ff_y$$

$$\therefore y(x_m+h) \cong y_m + hf(x_m,y_m)+\frac{h^2}{2}\left[f_x(x_m,y_m)+f(x_m,y_m)f_y(x_m,y_m)\right]$$

ดังนั้นจึงทำให้

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m,y_m)+\frac{h^2}{2}\left[f_x(x_m,y_m)+f(x_m,y_m)f_y(x_m,y_m)\right] \tag{2.5}$$

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (2.5) วิธีของเทย์เลอร์อันดับสอง

สำหรับวิธีของเทย์เลอร์อันดับสาม ก็เป็นเช่นเดียวกันกับสองแบบแรกซึ่งใช้รูปแบบที่ (2.3) ได้ว่า

$$y(x_{m+1}) = y(x_m)+hy'(x_m)+\frac{h^2}{2}y''(x_m)+\frac{h^3}{6}y'''(x_m)+\ldots$$

$$y'(x) = f(x,y),\; y'' = f_x + ff_y$$

$$\begin{aligned}
\therefore y''' &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x + ff_y\right) \\
&= \frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial (ff_y)}{\partial x} \\
&= \left[f_{xx}\frac{dx}{dx}+f_{xy}\frac{dy}{dx}\right]+f\left[\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right]+f_y\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right] \\
&= f_{xx}+ff_{xy}+ff_{yx}+f^2f_{yy}+f_yf_x+ff_y^2
\end{aligned}$$

ถ้า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องแล้ว $f_{xy} = f_{yx}$ จะได้ว่า

$$y''' = f_{xx}+2ff_{xy}+f^2f_{yy}+f_xf_y+ff_y^2$$

ดังนั้นรูปแบบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสาม

$$y_{m+1} = y_m + h[f]_{(x_m,y_m)}+\frac{h^2}{2}\left[f_x+ff_y\right]_{(x_m,y_m)}+\frac{h^3}{6}\left[f_{xx}+2ff_{xy}+f_xf_y+f^2f_{yy}+ff_y^2\right]_{(x_m,y_m)} \tag{2.6}$$

สำหรับรูปแบบวิธีของเทย์เลอร์อันดับที่สูงขึ้นไปจะหาได้ในทำนองเดียวกันกับทั้งสามแบบที่แล้วมา โดยใช้รูปแบบที่ (2.3)

2.3 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Method)

ปี ค.ศ. 1895 นักคณิตศาสตร์ชื่อรุงเง (C. Runge) ได้สร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้น ต่อมาในปี ค.ศ.1901 นักคณิตศาสตร์ชื่อคุตตา (W.Kutta) ได้ปรับปรุงวิธีการของรุงเง และให้ชื่อระเบียบวิธีใหม่นี้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันมากในการประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

$$y(a) = c$$

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเป็นระเบียบวิธีแบบขั้นเดียวโดยรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ s คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \quad , \quad m = 1,2,... \tag{2.7}$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (increment function) $\phi(x_m, y_m; h)$ คือความชันเฉลี่ยตลอดขนาดชั้น h ซึ่งกำหนดให้มีรูปแบบโดยทั่วไป ดังนี้

$$\phi(x,y;h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{2.8}$$

เมื่อ

$$k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; \quad i = 1 \\ f(x_m + hc_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j) & ; \quad i = 2,...,s \end{cases} \tag{2.9}$$

และ

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \tag{2.10}$$

โดยที่ a_i , c_i และ b_{ij} เป็น สัมประสิทธิ์ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และ h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละชั้นมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ และ s เป็นอันดับของระเบียบวิธี

วิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Method) เป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่นิยมใช้กันมาก ซึ่งเป็นวิธีที่ปรับปรุงมาจากวิธีออยเลอร์ แต่สำหรับวิธีของรุงเง-คุตตาจะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่หลายจุด เช่นในกรณีที่ใช้ความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่สองจุด จะได้รูปแบบ

$$y_{m+1} = y_m + h\left(a_1 k_1 + a_2 k_2\right) \tag{2.11}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

นั่นคือวิธีนี้ใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และจะมีค่าความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของ $y'(x_m)$ และ $f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$

รูปแบบของสมการที่ (2.11) เรียกว่าวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง (Runge-Kutta method of second order) ซึ่งจะต้องหาค่า a_1, a_2, α และ β ซึ่งวิธีการหาค่าเหล่านี้จะกระทำโดยใช้ความรู้ของการกระจายของอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ส่วนวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สาม (Runge-Kutta method of third order) จะมีรูปแบบเป็น

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3) \tag{2.12}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta_1 h k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2)$$

ซึ่ง

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ และ } \alpha_2 = 1$$
$$\beta_1 = \frac{1}{2},\ \beta_2 = -1,\ \beta_3 = 2,\ a_1 = \frac{1}{6},\ a_2 = \frac{2}{3},\ a_3 = \frac{1}{6}$$

ในทำนองเดียวกันกับวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง และ อันดับที่สาม อาจจะหาวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสูงขึ้นเรื่อยๆ ได้ แต่ทั้งในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สูงเกินกว่าสี่จะไม่ทำให้การหาผลเฉลยได้ผลดีขึ้น ดังนั้นโดยทั่วไปจึงใช้วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ที่นิยมใช้จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.13}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$
$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_m + h, y_m + h k_3)$$

โดยทั่วไปจะเขียน RK-2 , RK-3 และ RK-4 แทนวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง อันดับที่สาม และอันดับที่สี่ ตามลำดับ

2.4 Goeken-Johnson formula

ในปี 1999 Goeken และ Johnson ได้พัฒนาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ เพื่อหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นแบบอิสระ (autonomous) ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{5}{48}K_1 + \frac{27}{56}K_2 \frac{125}{336}K_3 + \frac{1}{24}K_4 \tag{2.14}$$

เมื่อ
$$K_1 = hf(y_m)$$

$$K_2 = hf(y_m + \frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{18}hf_y K_1)$$

$$K_3 = hf(y_m - \frac{152}{125}K_1 + \frac{252}{125}K_2 - \frac{44}{125}hf_y K_1)$$

$$K_4 = hf(y_m + \frac{19}{2}K_1 + \frac{22}{7}K_2 + \frac{22}{14}K_3 + \frac{5}{2}hf_y K_1)$$

เราเรียกสมการ (2.14) นี้ว่า GJ

2.5 Wu's formula

ในปี 2003 Wu ก็ได้พัฒนาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาขึ้นมา เพื่อหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นแบบอิสระ ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$\begin{aligned} y_{m+1} = \frac{3}{2}y_m - \frac{1}{2}y_{m-1} + h\Big[& \frac{1}{2}f_m + \frac{121}{192}f(y_m, \frac{8}{11}hf_m) \\ & + \frac{23}{192}f(y_m - \frac{44}{23}hf_m + \frac{44}{23}hf(y_m + \frac{8}{11}hf_m)) - \frac{121}{192}f(y_{m-1} + \frac{20}{29}hf_{m-1}) \\ & - \frac{23}{192}hf(y_{m-1} - \frac{44}{23}hf_{m-1} + \frac{44}{23}f(y_{m-1} + \frac{8}{11}hf_{m-1}))\Big] \end{aligned} \tag{2.15}$$

เราเรียกสมการ (2.15) นี้ว่า WU

2.6 Runge-Kutta-Fehlberg method

การที่จะรับประกันการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น คือ การแก้ปัญหาสองครั้งโดยการใช้ขนาด h และ $\frac{h}{2}$ และการคำนวณสำหรับขั้นตอนขนาดที่เล็กกว่าซึ่งจะทำซ้ำหลายครั้ง ถ้าหากมันได้กำหนดว่าข้อตกลงยังไม่ดีเพียงพอ Runge-Kutta-Fehlberg method เป็นอีกหนึ่งหนทางที่จะแก้ปัญหานี้

มีการพิจารณาถึงข้อกำหนดที่เกี่ยวกับขั้นตอนขนาดของ h ที่ถูกใช้ในแต่ละขั้นตอนจะเกิดค่าประมาณที่แตกต่างกันสองค่าและทั้งสองค่าจะถูกนำมาเปรียบเทียบกัน ถ้าหากคำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงข้อตกลง ก็จะสามารถยอมรับค่าประมาณที่คำนวณมาได้ แต่ถ้าหากทั้งสองคำตอบไม่สอดคล้องกับค่าความถูกต้องที่ระบุไว้ ขั้นตอนในการทำก็จะเพิ่มมากขึ้นโดยการลดขนาดของ h เป็น $\frac{h}{2}$ แต่ละขั้นตอน Runge-Kutta-Fehlberg method สามารถใช้ค่า 6 ค่านี้ :

$$k_1 = hf(t_j, y_j)$$
$$k_2 = hf(t_j + \frac{1}{4}h, y_j + \frac{1}{4}k_1)$$
$$k_3 = hf(t_j + \frac{3}{8}h, y_j + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$
$$k_4 = hf(t_j + \frac{12}{13}h, y_j + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$
$$k_5 = hf(t_j + h, y_j + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$
$$k_6 = hf(t_j + \frac{1}{2}h, y_j - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)$$

จากนั้น การประมาณค่าผลเฉลยของ I.V.P. ถูกสร้างโดยใช้เครื่องมือ Runge-Kutta ที่ order 4 :

$$y_{j+1} = y_j + h(\frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5) \tag{2.16}$$

และค่าที่ดีกว่าสำหรับผลเฉลยที่กำหนดขึ้นโดยใช้ Runge-Kutta ที่ order 5:

$$z_{j+1} = y_j + h(\frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6) \tag{2.17}$$

ขั้นตอนที่ดีที่สุดที่ s และ h สามารถกำหนดโดยการคูณค่าสเกลาร์ไป s ครั้ง ขึ้นกับขนาดของ h

ค่าสเกลาร์ s คือ $s = \left(\frac{\in h}{2\left|z_{j+1} - y_{j+1}\right|}\right)^{1/4} = 0.840496\left(\frac{\in h}{\left|z_{j+1} - y_{j+1}\right|}\right)^{1/4}$

2.7 รูปแบบของนิวตัน–โค้ต (Newton–Cotes formula)

กำหนด $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจุดอยู่ในช่วงปิด $[a,b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ ต้องการหาจำนวนจริง $A_1, A_2, ..., A_n$ เพื่อใช้หาค่าประมาณของ

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k) + E(f) \qquad (2.18)$$

เรียกรูปแบบที่ (2.18) ว่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยรูปแบบของนิวตัน–โค้ต $w(x)$ เรียกว่าฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อน

นิยาม 2.1 ถ้า $x_1 = a$ และ $x_n = b$ แล้ว เรียกรูปแบบนิวตัน–โค้ตจาก (2.18) ว่ารูปแบบนิวตัน–โค้ต ชนิดปิด (Newton–Cotes closed formula) และถ้า $x_1 > a$ และ $x_n < b$ แล้ว เรียกรูปแบบนิวตัน–โค้ตนี้ว่า รูปแบบ นิวตัน–โค้ตชนิดเปิด (Newton–Cotes open formula)

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้ากำหนดจุด $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นจุดต่าง ๆ กันในช่วงปิด $[a,b]$ และค่า $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)$ และฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ แล้ว จะมีจำนวนจริง $A_1, A_2, ..., A_n$ ที่ทำให้

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k)$$

สำหรับ $f(x)$ เป็นพหุนามที่กำลังน้อยกว่าหรือเท่ากับ $n-1$ [1]

2.8 รูปแบบเกาส์–ควอดเดรเจอร์ (Gauss–Quadrature formula type)

เป็นรูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k) + E(f)$$

เมื่อ เรียกว่า $w(x)$ ฟังก์ชันถ่วง (weight function) x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ (nodal point) ซึ่งเป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ A_k เรียกว่าค่าถ่วง (weight) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์ และ $E(f)$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น

ทฤษฎีบท 2.2 กำหนดให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ สมมติว่าสามารถหาค่า $A_1, A_2, ..., A_n$ ได้และการหาค่าปริพันธ์

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{k-1}^{n} A_k f(x_k) + E(f) \qquad (2.19)$$

ไม่มีความคลาดเคลื่อน สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $n-1$ แล้วรูปแบบ (2.16) จะไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนเลย ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน $2n-1$ [1]

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้ารูปแบบ (2.16) ไม่มีค่าคลาดเคลื่อนเลยสำหรับฟังก์ชัน $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกินจุด $2n-1$ แล้ว $x_1, x_2, ..., x_n$ จะเป็นรากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ [1]

ทฤษฎีบท 2.4 ค่า $A_1, A_2, ..., A_n$ ในรูปแบบที่ (2.16) เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมด [1]
จากทฤษฎีบท 2.4 จะเห็นได้ว่า

$$\left(Q_{n-1,j}(x)\right)^2 = \frac{P_n^2(x)}{\left(x-x_j\right)^2}$$

เมื่อทำให้สัมประสิทธิ์ของเทอม x^n เป็น1

และ $$\left(Q_{n-1,j}(x)\right)^2 = \left(P_n'(x_j)\right)^2$$

ดังนั้น $$A_j = \frac{1}{\left(P_n'(x_j)\right)^2}\int_a^b \frac{w(x)P_n^2(x)}{\left(x-x_j\right)^2 dx} \tag{2.20}$$

2.8.1 เกาส์-เลอจองด์

เนื่องจากการหาปริพันธ์ตามรูปแบบของเกาส์ต้องใช้พหุพจน์ตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ดังนั้นการหาปริพันธ์แบบนี้จึงแยกออกเป็นหลายๆแบบตามพหุพจน์ตั้งฉากที่ใช้

พหุพจน์ตั้งฉากเลอจองด์เป็นพหุพจน์ตั้งฉากในช่วงปิด $[-1,1]$ โดยมีฟังก์ชัถ่วง w(x) = 1 ดังนั้นรูปแบบของการหาปริพันธ์แบบนี้คือ

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E(f) \tag{2.21}$$

โดยทั่วๆไป ช่วงของการอินทิเกรทจะไม่ใช่ -1 ถึง 1 แต่อาจจะเป็นช่วงใดๆ ก็ได้ ดังนั้นจึงมีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนรูปแบบของรูปแบบที่ (2.20) ให้เป็นไปตามที่ต้องการ

สมมติว่าต้องการหาปริพันธ์ในช่วงปิด $[a,b]$ ใดๆ นั่นคือต้องการหาค่าของ $\int_a^b f(z)dz$

ให้ $$z = \frac{(b-a)x+b+a}{2} \tag{2.22}$$

$$\therefore \int_a^b f(z)dz = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\,\frac{(b-a)x+b+a}{2}\,dx \cong \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\,\frac{(b-a)x_k+b+a}{2}dx$$

ดังนั้นรูปแบบที่ (2.20) จะเปลี่ยนเป็น

$$\int_a^b f(z)dz = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\,\frac{(b-a)x_k+b+a}{2} + E[f] \tag{2.23}$$

ตารางที่ 2.1 เป็นตารางค่าของ x_k และ A_k จากรูปแบบเกาส์เลอจองด์ เพื่อสะดวกในการใช้รูปแบบการหาปริพันธ์

ตารางที่ 2.1 ตารางค่าของ x_k และ A_k จากรูปแบบเกาส์เลอจองด์

	$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \sum_{n=1}^{n} A_k f(x_k)$	
n	x_k	A_k
2	-0.577350269189626	1.0
	0.577350269189626	1.0
3	-0.774596669241483	0.555555555555556
	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454
5	-0.906179845938664	0.236926885056189
	-0.538469310105683	0.478628670499366
	0.0	0.568888888888889
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.906179845938664	0.478628670499366
6	-0.932409514203152	0.171324492379170
	-0.661209386466265	0.360761573048139
	-0.238619186083197	0.467913934572691
	0.238619186083197	0.467913934572691
	0.661209386466265	0.360761573048139
	0.932409514203152	0.171324492379170

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = f(x, y), x \in [a, b] \tag{I}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(a) = c$ (II)

ซึ่งสมมูลกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t, y)dt$ (III)

จากเดิมจะหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (I) – (II) แต่ในที่นี้จะทำการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขจากสมการ (III) แทน

จากงานวิจัยของ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และ อาจารย์วรรณพร สรรประเสริฐ (จาก[5] - [8]) ได้เสนอผลงานการวิจัยเกี่ยวกับใช้สูตรปริพันธ์รูปแบบเชิงตัวเลข มาพิสูจน์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นไว้หลายผลงาน จะขอยกตัวอย่างเช่น

งานวิจัยชิ้นที่ 1 (จาก [2])

Numerical Integration Formulas for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations

โดยในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้สมการเชิงปริพันธ์แทนสมการปัญหาค่าเริ่มต้น แล้วใช้สูตรอนุพันธ์ 4 สูตร หาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลข แล้วนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับการหาผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา, วิธีออยเลอร์, Goeken-Johnson formula, Wu's formula

การสร้างสูตรเพื่อการแก้ปัญหา

เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า สมการที่ (I) – (II) สมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y)dt \tag{III}$$

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการ

เชิงอนุพันธ์ (I) โดยที่ $y_{m+1}(x) = y_m + \int_a^x f(t, y_m(t))dt$ (IV)

ดังนั้น จะทำการประมาณค่าหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ โดยใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลขของ

$$y_{m+1} = y_m + \int_a^{a+h} f(t, y_m(t))dt \tag{3.1}$$

สูตรอนุพันธ์ทั้ง 4 สูตรที่จะใช้ในงานวิจัยชิ้นนี้คือ

Midpoint formula

$$\int_a^b y(x)dx = (b-a)y\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.2}$$

Trapezoidal formula

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\{y(a)+y(b)\} \tag{3.3}$$

Modified Trapezoidal formula

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\{y(a)-y(b)\} + \frac{1}{12}(b-a)^2\{y'(a)-y'(b)\} \tag{3.4}$$

และ Simpson's formula

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{6}\left[y(a) + 4y\left(\frac{a+b}{2}\right) + y(b)\right] \tag{3.5}$$

จากสมการ (3.2), (3.3), (3.4) และ (3.5) เราจะได้สมการใหม่ 4 สมการคือ

1.) สมการ PS1

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + \frac{h}{2}, y_m + bb) \tag{3.6}$$

เมื่อ $$bb = \frac{h}{2} f(x_m, y_m)$$

2.) สมการ PS2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\{K_1 + K_2\} \tag{3.7}$$

เมื่อ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

3.) สมการ PS3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\{K_1 + K_2\} + \frac{h^2}{12}\{AA - BB\} \tag{3.8}$$

เมื่อ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$$K_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

$$AA = f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)$$

$$\begin{aligned} BB = {} & f_x(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m)) \\ & + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m)) f_y(x_m + h, y_m + hf(x_m y_m)) \end{aligned}$$

และ

4.) สมการ PS4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}\left[f(x_m, y_m) + 4f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f\left(x_m, y_m\right)\right) + f\left(x_m + h, y_m + hf\left(x_m, y_m\right)\right)\right] \tag{3.9}$$

และต่อไปนี้จะกำหนดให้
- RK 1 แทน สมการรุงเก-คุตตาอันดับ 1
- RK 2 แทน สมการรุงเก-คุตตาอันดับ 2
- RK 3 แทน สมการรุงเก-คุตตาอันดับ 3
- WU formula และ GJ formula จะใช้กับสมการที่มีตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

ตัวอย่างที่ 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,100]$ เมื่อ $y(5) = 5$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.1, 3.2 และ 3.3

ตารางที่ 3.1 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 5.1 , $h = 0.1$, *True value* y = 5.0755075525

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	5.0800000000	4.492447×10^{-3}
RK2 (2.11)	5.0756506239	1.430714×10^{-4}
RK3 (2.12)	5.0756507618	6.547634×10^{-8}
PS1 (3.6)	5.0754361150	7.142748×10^{-5}
PS2 (3.7)	50756506230	1.430714×10^{-4}
PS3 (3.8)	5.0756444162	1.368637×10^{-4}
PS4 (3.9)	5.0755076180	6.547634×10^{-8}

ตารางที่ 3.2 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 5.1, h = 0.001, True value y = 5.0755075525

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	5.0755119022	4.349691×10^{-8}
RK2 (2.11)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
RK3 (2.12)	5.0755076180	6.547634×10^{-8}
PS1 (3.6)	5.0755075525	5.820766×10^{-11}
PS2 (3.7)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
PS3 (3.8)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
PS4 (3.9)	5.0755075525	7.275958×10^{-12}

ตารางที่ 3.3 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 100, h = 0.001, True value y = 6.5686159179

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	6.5686559406	4.002266×10^{-5}
RK2 (2.11)	6.5686159595	4.156027×10^{-8}
RK3 (2.12)	6.5686159586	4.071626×10^{-8}
PS1 (3.6)	6.5686159165	1.462467×10^{-9}
PS2 (3.7)	6.5686159595	4.156027×10^{-8}
PS3 (3.8)	6.5686159595	4.156027×10^{-8}
PS4 (3.9)	6.5686159586	4.071626×10^{-8}

ตัวอย่างที่ 2 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0, 1.1]$ เมื่อ $y(0) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.4, 3.5 และ 3.6

ตารางที่ 3.4 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x = 0.1, h = 0.1, True value y = 1.0050251887		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0000000000	5.025189×10^{-3}
RK2 (2.11)	1.0049751860	5.000273×10^{-5}
RK3 (2.12)	1.0050377578	1.256881×10^{-5}
PS1 (3.6)	1.0049937617	3.142699×10^{-5}
PS2 (3.7)	1.0049751860	5.000273×10^{-5}
PS3 (3.8)	1.0049627790	6.240965×10^{-5}
PS4 (3.9)	1.0049875698	3.761890×10^{-5}

ตารางที่ 3.5 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x =0.1 , h =0.0001, True value y = 1.0050251887		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0050200075	5.101223×10^{-6}
RK2 (2.11)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
RK3 (2.12)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS1 (3.6)	1.0050251887	1.818989×10^{-11}
PS2 (3.7)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS3 (3.8)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS4 (3.9)	1.0050251887	1.818989×10^{-12}

ตารางที่ 3.6 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x =1.1 , h =0.0001, True value y = 6.1100397659		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	6.0616904647	4.834930×10^{-2}
RK2 (2.11)	6.1100181633	2.160255×10^{-5}
RK3 (2.12)	6.1100398300	6.413757×10^{-5}
PS1 (3.6)	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
PS2 (3.7)	6.1100181633	2.160255×10^{-5}
PS3 (3.8)	6.1099903436	4.942231×10^{-5}
PS4 (3.9)	6.1100066900	3.307559×10^{-5}

ตัวอย่างที่ 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{2y}{x}, x \in [2,10]$ เมื่อ $y(2) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos x}{x^2}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.7, 3.8 และ 3.9

ตารางที่ 3.7 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 2.1, h = 0.1, True value y = 0.9271426912

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9227324357	4.410255×10^{-3}
RK2 (2.11)	0.9272135323	7.084114×10^{-5}
RK3 (2.12)	0.9271409569	1.256881×10^{-6}
PS1 (3.6)	0.9273232808	1.805896×10^{-4}
PS2 (3.7)	0.9272135323	7.084114×10^{-5}
PS3 (3.8)	0.9273578742	2.151830×10^{-4}
PS4 (3.9)	0.9272866980	1.440068×10^{-4}

ตารางที่ 3.8 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x =2.1, h =0.0001, True value y = 0.9271426912

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9271386264	4.064775×10^{-6}
RK2 (2.11)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
RK3 (2.12)	0.9271426912	2.728484×10^{-12}
PS1 (3.6)	0.9271426913	1.673470×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
PS3 (3.8)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
PS4 (3.9)	0.9271426913	1.300577×10^{-10}

ตารางที่ 3.9 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x =10.0, h =0.0001, True value y = 0.0442292469

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.0442252473	3.999578×10^{-6}
RK2 (2.11)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
RK3 (2.12)	0.0442294669	2.329243×10^{-10}
PS1 (3.6)	0.0442292468	1.350600×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
PS3 (3.8)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
PS4 (3.9)	0.0442292467	1.527951×10^{-10}

ตัวอย่างที่ 4 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \dfrac{xy}{y^2 - x^2}, x \in [0,100]$ เมื่อ $y(0) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.10, 3.11 และ 3.12

ตารางที่ 3.10 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x = 0.1, h = 0.1, True value y =1.0050124371		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.1000000000	9.498756×10^{-2}
RK2 (2.11)	1.0050505051	3.806794×10^{-5}
RK3 (2.12)	1.0050081470	4.290066×10^{-6}
PS1 (3.6)	1.0050125313	9.421456×10^{-8}
PS2 (3.7)	1.0050505051	7.084114×10^{-5}
PS3 (3.8)	1.0049572340	5.520314×10^{-5}
PS4 (3.9)	1.0050251872	1.275212×10^{-5}

ตารางที่ 3.11 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x =0.1, h =0.0001, True value y = 1.0050124371

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0050074292	5.007957×10^{-6}
RK2 (2.11)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
RK3 (2.12)	1.0050124371	9.094947×10^{-12}
PS1 (3.6)	1.0050124371	9.094947×10^{-12}
PS2 (3.7)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
PS3 (3.8)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
PS4 (3.9)	1.0050124371	1.818989×10^{-11}

ตารางที่ 3.12 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x =10.0, h =0.0001, True value y = 0.0442292469

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1413.2151819	1.619565×10^{-3}
RK2 (2.11)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
RK3 (2.12)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS1 (3.6)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS2 (3.7)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS3 (3.8)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS4 (3.9)	1413.2148829	1.318799×10^{-4}

<u>ตัวอย่างที่ 5</u> จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = y^3, x \in [0, 49.5]$ เมื่อ $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{100-2x}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.13, 3.14 และ 3.15

ตารางที่ 3.13 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

$x = 0.1$, $h = 0.1$, True value $y = 0.1001001502$

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.10010000000	1.502503×10^{-7}
RK2 (2.11)	0.10010015015	1.002718×10^{-10}
RK3 (2.12)	0.10010015025	1.1366868×10^{-6}
GJ (2.14)	0.10010030624	1.559881×10^{-7}
WU (2.15)	0.10010584213	5.691884×10^{-6}
PS1 (3.6)	0.10010015008	1.753051×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.10010015015	1.002718×10^{-10}
PS3 (3.8)	0.10010015002	2.255547×10^{-10}
PS4 (3.9)	0.10010015010	1.502940×10^{-10}

ตารางที่ 3.14 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

$x = 0.1$, $h = 0.0001$, True value $y = 0.1001001502$

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.10010015010	1.504077×10^{-10}
RK2 (2.11)	0.10010025026	4.547474×10^{-13}
RK3 (2.12)	0.10010025026	4.547474×10^{-13}
GJ (2.14)	0.10010025025	1.004693×10^{-7}
WU* (2.15)	0.10000010599	1.000443×10^{-4}
PS1 (3.6)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}
PS2 (3.7)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}
PS3 (3.8)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}
PS4 (3.9)	0.10010025025	4.547474×10^{-13}

ตารางที่ 3.15 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

x = 49.5, h = 0.0001, True value y =1.0

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9996548547	3.451453×10^{-4}
RK2 (2.11)	1.0000000038	3.845344×10^{-9}
RK3 (2.12)	1.0000000088	8.847564×10^{-9}
GJ (2.14)	1.0003861906	3.861906×10^{-4}
WU (2.15)	17.085971673	16.085971673
PS1 (3.6)	0.9999999987	1.309672×10^{-10}
PS2 (3.7)	1.0000000038	3.845344×10^{-9}
PS3 (3.8)	1.0000000019	1.939043×10^{-9}
PS4 (3.9)	1.0000000013	1.329681×10^{-9}

* ใช้ WU formula ที่ $y(0)$ และ $y(\frac{h}{2})$

สรุป

สูตรใหม่ทั้ง 4 สูตร (PS1, PS2, PS3, PS4) เป็นสูตรรูปแบบเชิงตัวเลขที่ดีที่จะใช้ในการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งจะทำให้ผู้ใช้มีแนวทางในการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นเพิ่มมากขึ้น

อย่างไรก็ตามจากผลการทดลองในการใช้สูตรใหม่ทั้ง 4 สูตร (PS1, PS2, PS3, PS4) ให้ผลดีกับสมการในตัวอย่างเฉพาะ 5 สมการเท่านั้น และสมการจาก WU เป็นสูตรขั้น 2 เราจึงขอแนะนำให้ใช้สูตร PS1 และ PS4

งานวิจัยชิ้นที่ 2 (จาก [3])

Integration Method for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations

วิธีการอินทิเกรตเพื่อแก้ปัญหา

โดยในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้สมการเชิงปริพันธ์และวิธีลดตัวแปรของเกาส์เพื่อหาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้สมการเชิงปริพันธ์แทนสมการปัญหาค่าเริ่มต้น

บทนำ

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.10}$$

กับเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1 \\ y'(x_0) &= c_2 \\ y''(x_0) &= c_3 \\ &\vdots \\ y^{(n)}(x_0) &= c_n \end{aligned} \tag{3.11}$$

โดยส่วนใหญ่แล้วเราจะใช้ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตาในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง n สมการของระบบสมการข้างต้น ได้เป็น

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 , & y_1(x_0) &= c_1 \\ y_2' &= y_3 , & y_2(x_0) &= c_2 \\ y_3' &= y_4 , & y_3(x_0) &= c_3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ y_{n-1}' &= y_n , & y_{n-1}(x_0) &= c_{n-1} \\ y_n' &= F(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), & y_n(x_0) &= c_n \end{aligned} \tag{3.12}$$

หลังจากแก้สมการอันดับหนึ่ง n สมการสำหรับ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ และค่าของ y_1 อยู่ใน y ในระบบสมการเริ่มต้น

การสร้างสูตรเพื่อแก้ปัญหา

ปัจจุบัน คอมพิวเตอร์จะช่วยให้เราคำนวณสมการบางสมการที่มีขนาดใหญ่ได้ในเวลาเพียงเล็กน้อยเท่านั้น และเราสามารถนำไปประยุกต์ในการหาคำตอบของการคำนวณเชิงตัวเลขของอันดับสูง

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการที่อ้างถึงในด้านบน จะเริ่มจากสมการทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น จาก

$$y'(x) = f(x,y), \quad x \in [a,b] \tag{I}$$

กับเงื่อนไขค่าเริ่มต้น y(a) = c (II)

เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า สมการที่ (I) – (II) สมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t,y)dt \tag{III}$$

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จากสมการที่ 4 และ 5 จะได้

$$y(x)_{m+1} = c + \int_a^x f(t, y_m(t))dt \tag{IV}$$

จากนั้นจากสมมติฐานที่ว่า ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการ 4 และ 5 มาทำการประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ ซึ่งจะใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลข คือ Trapezoidal formula

$$\int_a^{a+h} f(t,y(t))dt = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right] \tag{3.13}$$

ดังนั้น $$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\left[y_m + y_{m+1}\right]$$

หรือ $$y_{m+1} = \frac{(1+0.5h)}{(1-0.5h)} y_m \tag{3.14}$$

เราจะนำความคิดข้างต้นมาประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4

$$y^{(4)} = p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x) \quad x \in [a,b] \tag{3.15}$$

ในสมการที่ 9 ทำให้เราทราบระบบของ สมการเชิงเส้น

$$y(a) = c_1, y'(a) = c_2, y''(a) = c_3 \text{ และ } y'''(a) = c_4 \tag{3.16}$$

ใช้สมการที่ (3.14) เราจะหาระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 & y_1(a) &= c_1 \\ y_2' &= y_3 & y_2(a) &= c_2 \\ y_3' &= y_4 & y_3(a) &= c_3 \\ y_4' &= p(x)y_4 + q(x)y_3 + r(x)y_2 + s(x)y_1 + t(x) & y_4(a) &= c_4 \end{aligned} \tag{3.17}$$

จากสมการที่ 9 เราจะได้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\mathrm{Ax + b} \tag{3.18}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{h}{2} \\ -\frac{h}{2}s(x_{m+1}) & -\frac{h}{2}r(x_{m+1}) & -\frac{h}{2}q(x_{m+1}) & 1-\frac{h}{2}p(x_{m+1}) \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} y_{1m+1} \\ y_{2m+1} \\ y_{3m+1} \\ y_{4m+1} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} y_{1m} + \frac{h}{2}y_{2m} \\ y_{2m} + \frac{h}{2}y_{3m} \\ y_{3m} + \frac{h}{2}y_{4m} \\ y_{4m} + \frac{h}{2}p(x_m)y_{4m} + \frac{h}{2}q(x_m)y_{3m} + \frac{h}{2}r(x_m)y_{2m} + \frac{h}{2}s(x_m)y_{1m} + \frac{h}{2}t(x_m) \end{bmatrix}$$

เราจะใช้ Gauss elimination method ในการหาค่า $y_{1m+1}, y_{2m-1}, y_{4m+1}$ ซึ่ง y_{1m+1} คือค่าของ $y_{m-1} \approx y(x_{m+1})$ เราจะเรียก method นี้ว่า Integration Method

ตัวอย่างที่ 1

$y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 2x^2 - 16x + 32, x \in [0,1]$

และมีเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$y(0) = 3, y'(0) = -2, y''(0) = 1, y'''(0) = -2$

เราสามารถการแก้ปัญหาการวิเคราะห์จากสมการข้างบน

$y(x) = e^x \cos x - e^x \sin x + xe^x - e^x + x^2 - 2x + 3$

และคำตอบจะเป็นไปตามตารางที่ 3.16, 3.17 และ 3.18

ตารางที่ 3.16 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0 h = 0.01			
x	Calculated y	y	error
0.1	2.8238029187	2.8238044729	1.5541590983 x 10^{-6}
0.2	2.6357151797	2.6357185093	3.3296309994 x 10^{-6}
0.3	2.4537005297	2.4537055251	4.9953814596 x 10^{-6}
0.4	2.2756773164	2.2756836460	6.3296683948 x 10^{-6}
0.5	2.0996476491	2.0996546935	7.0444402809 x 10^{-6}
0.6	1.9237964939	1.9238032685	6.7746805144 x 10^{-6}
0.7	1.7466142097	1.7466192770	5.0673443184 x 10^{-6}
0.8	1.5670457722	1.5670471418	1.3696117094 x 10^{-6}
0.9	1.3846701566	1.3846651735	4.9830741773 x 10^{-6}
1.0	1.199135684	1.1998987893	1.4779127014 x 10^{-5}

ตารางที่ 3.17 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0 h = 0.001			
x	Calculated y	y	error
0.1	2.8065733818	2.8065733989	$1.7142156139 \times 10^{-8}$
0.2	2.6191198348	2.6191198697	$3.4870626866 \times 10^{-8}$
0.3	2.4375506564	2.4375507077	$5.1295501180 \times 10^{-8}$
0.4	2.2597880028	2.2597880670	$6.4192136051 \times 10^{-8}$
0.5	2.0838457643	2.0838458350	$7.0631358540 \times 10^{-8}$
0.6	1.0979306325	1.9079306993	$6.6811480792 \times 10^{-8}$
0.7	1.7305668906	1.7305669388	$4.8166839406 \times 10^{-8}$
0.8	1.5507481951	1.5507482042	$9.0476532932 \times 10^{-9}$
0.9	1.3681198385	1.3681197812	$5.7269062381 \times 10^{-8}$
1.0	1.1831952019	1.1831950431	$1.5879959392 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 3.18 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0 h = 0.0001			
x	Calculated y	y	error
0.1	2.8046628519	2.8046628519	$1.3096723706 \times 10^{10}$
0.2	2.6172785463	2.6172785463	$3.8198777474 \times 10^{10}$
0.3	2.4359369431	2.4359369431	$3.7471181713 \times 10^{10}$
0.4	2.2581993358	2.2581993358	$9.8225427791 \times 10^{11}$
0.5	2.0822649690	2.0822649690	$2.9103830457 \times 10^{10}$
0.6	1.9063427942	1.9063427942	$6.2027538661 \times 10^{10}$
0.7	1.7289605960	1.7289605940	$1.1514202924 \times 10^{-9}$
0.8	1.5491170249	1.5491170249	$1.9772414817 \times 10^{-9}$
0.9	1.3664641637	1.3664641637	$3.1632225728 \times 10^{-9}$
1.0	1.1815242925	1.1815242925	$4.8366928240 \times 10^{-9}$

ตัวอย่างที่ 2

$y^{(4)}-2y''+y=8e^{x}+4\sin x+4\cos x, x\in[0,1]$

และจะมีเงื่อนไขดังนี้

$y(0)=1, y'(0)=1, y''(0)=1, y'''(0)=5$

เราสามารถการแก้ปัญหาการวิเคราะห์จากสมการข้างบน

$y(x)=x^{2}e^{x}+\cos x+\sin x$

และคำตอบจะเป็นไปตามตารางที่ 3.19, 3.20 และ 3.21

ตารางที่ 3.19 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0 h = 0.01			
x	Calculated y	y	error
0.1	1.0946987881	1.0946940939	4.6941986511 x 10^{-6}
0.2	1.2145295232	1.2145170406	1.2315585589 x 10^{-5}
0.3	1.3566132871	1.3565896524	2.3634742320 x 10^{-5}
0.4	1.5297852099	1.5297462537	3.8956188291 x 10^{-5}
0.5	1.7449372774	1.7448778712	5.9406176661 x 10^{-5}
0.6	2.0153561946	2.0152700694	8.6125164671 x 10^{-5}
0.7	2.3571116294	2.3569911626	1.2046674601 x 10^{-4}
0.8	2.7895023325	2.7893382977	1.6403707270 x 10^{-4}
0.9	3.3355686900	3.3353499710	2.1874595244 x 10^{-4}
1.0	4.0226815259	4.0226815259	2.8678020317 x 10^{-4}

ตารางที่ 3.20 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0 h = 0.001			
x	Calculated y	y	error
0.1	1.1058893445	1.1058892911	$5.3416442825 \times 10^{-8}$
0.2	1.2262744816	1.2262743482	$1.3337376004 \times 10^{-7}$
0.3	1.3707546113	1.3707543630	$2.4827568268 \times 10^{-7}$
0.4	1.5472100466	1.5472096410	$4.0567101678 \times 10^{-7}$
0.5	1.7667327975	1.7667321822	$6.1524769990 \times 10^{-7}$
0.6	2.0428421855	2.0428412969	$8.8863816927 \times 10^{-7}$
0.7	2.3918779423	2.3918767027	$1.2395830709 \times 10^{-6}$
0.8	2.8334519043	2.8334502200	$1.6843332560 \times 10^{-6}$
0.9	3.3909669692	3.3909647271	$2.2421336325 \times 10^{-6}$
1.0	4.0922131964	4.0922102606	$2.9357761377 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 3.21 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0 h = 0.0001			
x	Calculated y	y	error
0.1	1.1058892916	1.1058892911	$5.4205884226 \times 10^{10}$
0.2	1.2275920203	1.2275920189	$1.3678800315 \times 10^{9}$
0.3	1.3721848851	1.3721848826	$2.4811015464 \times 10^{9}$
0.4	1.5489749342	1.5489749305	$3.7289282773 \times 10^{9}$
0.5	1.7689425471	1.7689425417	$5.4042175179 \times 10^{9}$
0.6	2.0456305826	2.0456305750	$7.5779098552 \times 10^{9}$
0.7	2.3954060994	2.3954060890	$1.0368239600 \times 10^{8}$
0.8	2.9379126154	2.8379126014	$1.3980752556 \times 10^{8}$
0.9	3.3965897114	2.3965896929	$1.8542777980 \times 10^{8}$
1.0	4.0992698753	4.0992698512	$2.4141627364 \times 10^{8}$

งานวิจัยชิ้นที่ 3 (จาก [4])

Solving the initial value problem of ordinary differential equation of higher order by integration method

บทนำ

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = F(x, y, y', ..., y^{n-1}) \tag{I}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ

$$\begin{aligned} y(x_0) &= c_1 \\ y'(x_0) &= c_2 \\ y''(x_0) &= c_3 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= c_n \end{aligned} \tag{II}$$

ซึ่งโดยทั่วไปจะใช้วิธีรุงเงกุตตาในการแปลงสมการด้านบนเป็นระบบสมการอันดับ n ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

การสร้างสูตร

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการที่อ้างถึงในด้านบน จะเริ่มจากสมการทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

$$y'(x) = f(x, y), \qquad x \in [a, b] \tag{III}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น คือ $y(a) = c$ (IV)

ซึ่งสมมูลกันกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t, y)dt$ (V)

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (III) – (IV) โดยที่

$$y_{m+1}(x) = y_m + \int_a^x f(t, y_m(t))dt \tag{VI}$$

จากนั้นจากสมมติฐานที่ว่า ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการ (III) – (IV) มาทำการประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ ซึ่งจะใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลข คือ

Trapezoidal formula

$$\int_a^{a+h} f(t, y(t))dt = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right] \tag{3.19}$$

และ Simpson's formula

$$\int_a^{a+h} f\left(t, y(t)\right)dt = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{2a+h}{2}\right) + f(a+h)\right] \tag{3.20}$$

โดยจากจากสมการ Trapezoidal formula และ Simpson's formula ข้างต้นจะได้ 8 สูตรดังนี้

สำหรับ $y' = f(x,y), y(a) = A$ จะได้ว่ามี

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\left(f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1})\right) \tag{3.21}$$

สำหรับ $y'' = f(x,y,y'), y(a) = A$ และ $y'(a) = A'$ ซึ่งสมมูลกับ

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = f(x, y_1, y_2)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(f\left(x_m, y_m, y_{2_m}\right) + f\left(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

สำหรับ $y''' = f(x,y,y',y''), y(a) = A, y'(a) = A', y''(a) = A''$ ซึ่งสมมูลกับ

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = f(x, y_1, y_2, y_3)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(y_{3_m} + y_{3_{m+1}}\right) \\ y_{3_{m+1}} &= y_{3_m} + \frac{h}{2}\left(f\left(x_m, y_m, y_{2_m}, y_{3_m}\right) + f\left(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

สำหรับ $y^{iv} = f\left(x, y, y', y'', y'''\right), y\left(a\right) = A, y'(a) = A', y''(a) = A'', y'''(a) = A'''$

ซึ่งสมมูลกับ

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = y_4$$

$$y_4' = f\left(x, y_1, y_2, y_3, y_4\right)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned}
y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right) \\
y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(y_{3_m} + y_{3_{m+1}}\right) \\
y_{3_{m+1}} &= y_{3_m} + \frac{h}{2}\left(y_{4_m} + y_{4_{m+1}}\right) \\
y_{4_{m+1}} &= y_{4_m} + \frac{h}{2}\left(f\left(x_m, y_m, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}\right) + f\left(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}\right)\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

ในลำดับที่ 1 y_m ที่ให้มาและ y_{m+1} จาก trapezoidal จะหาค่า y_{m+2} ได้ คือ

$$y_{m+2} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_m + 4y_{m+1} + y_{m+2}\right) \tag{3.25}$$

ในลำดับที่ 2 y_{1_m}, y_{2_m} ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะหาค่า $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}$ ได้ คือ

$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}\right) \tag{3.26}$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}\left(f\left(x_m, y_{1_m}, y_{2_m}\right) + 4f\left(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}\right) + f\left(x_{m+2}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}\right)\right)$$

ในลำดับที่ 3 $y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}$ ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะหาค่า $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}$ ได้ คือ

$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}\right) \tag{3.27}$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}\left(y_{3_m} + 4y_{3_{m+1}} + y_{3_{m+2}}\right)$$

$$\begin{aligned} y_{3_{m+2}} = y_{3_m} + \frac{h}{3}\Big(& f\left(x_m, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}\right) + 4f\left(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}\right) \\ & + f\left(x_{m+2}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}\right)\Big) \end{aligned}$$

ในลำดับที่ 4 $y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}$ ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะหาค่า $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}, y_{4_{m+2}}$ ได้

คือ

$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}\right) \tag{3.28}$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}\left(y_{3_m} + 4y_{3_{m+1}} + y_{3_{m+2}}\right)$$

$$y_{3_{m+2}} = y_{3_m} + \frac{h}{3}\left(y_{4_m} + 4y_{4_{m+1}} + y_{4_{m+2}}\right)$$

$$\begin{aligned} y_{4_{m+2}} = y_{4_m} + \frac{h}{3}\Big(& f\left(x_m, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}\right) + 4f\left(x_{m+1}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}\right) \\ & + f\left(x_{m+2}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}} + y_{3_{m+2}} + y_{4_{m+2}}\right)\Big) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1 หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{2y}{x}$, $x \in [2,3]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{4 + \cos(2) - \cos(x)}{x^2}$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{m+1} = \frac{y_m\left(1 - \dfrac{h}{x_m}\right) + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{\sin x_m}{x_m^2} + \dfrac{\sin x_{m+1}}{x_{m+1}^2}\right)}{1 + \dfrac{h}{x_{m+1}}}$$

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{m+2} = M/(1 + \frac{2h}{3x_{m+2}})$$

ที่ $$M = y_m\left(1 - \frac{2h}{3x_m}\right) - \frac{8hy_{m+1}}{3x_{m+1}} + \frac{h}{3}\left(\frac{\sin x_m}{x_m^2} + 4\frac{\sin x_{m+1}}{x_{m+1}^2} + \frac{\sin x_{m+2}}{x_{m+2}^2}\right)$$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3.22 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.1$, $h = 0.1$, $y = 0.92714269117$			
Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00013284506713	0.00000000062664	0.00007084114259	0.00001734315 45

ตารางที่ 3.23 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.1,\ h = 0.01,\ y = 0.92714269117$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000132545483	0.00000000007640	0.00000066328266	0.00000000163800

ตารางที่ 3.24 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.1,\ h = 0.001,\ y = 0.92714269117$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001324588	0.00000000001364	0.00000000660930	0.00000000001273

ตารางที่ 3.25 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.1,\ h = 0.0001,\ y = 0.92714269117$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000061664	0.00000000076852	0.00000000082400	0.00000000076670

ตารางที่ 3.26 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 3.0,\ h = 0.1,\ y = 0.50820507334$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00037354729557	0.00000171579177	0.00023297424923	0.00000442352120

ตารางที่ 3.27 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 3.0,\ h = 0.01,\ y = 0.50820728672$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000373132752	0.00000000019281	0.00000221333175	0.00000000424370

ตารางที่ 3.28 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 3.0,\ h = 0.001,\ y = 0.50820728672$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000003727109	0.00000000008640	0.00000002209526	0.00000000007094

ตารางที่ 3.29 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 3.0,\ h = 0.0001,\ y = 0.50820728672$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000328600	0.00000000373075	0.00000000383534	0.00000000361979

ตัวอย่างที่ 2 การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y'' = \dfrac{1}{x^2 e^{2x}} - 4y - 4y', x \in [1,2]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0$ และ $y'(1) = \dfrac{-1}{e^2}$

ซึ่งคำตอบของสมการ คือ $y(x) = \dfrac{-\ln x}{e^{2x}}$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+1} = y_{1,m} + \frac{h}{2}\left(y_{2,m} + y_{2,m+1}\right)$$

$$y_{2,m+1} = \frac{M}{1 + 2h + h^2}$$

โดยที่ $M = \left(1 - 2h - h^2\right)y_{2,m} - 4hy_{1,m} + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{1}{x_m^2 e^{2x_m}} + \dfrac{1}{x_{m+1}^2 e^{2x_{m+1}}}\right)$

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}\left(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2}\right)$$

$$y_{2,m+2} = \frac{M}{1 + \frac{4}{3}h + \frac{4}{9}h^2}$$

โดยที่

$$M = \left(1 - \frac{4}{3}h - \frac{4}{9}h^2\right)y_{2,m} - \left(\frac{16}{3}h + \frac{16}{9}h^2\right)y_{2,m+1} - \frac{8}{3}hy_{1,m} - \frac{16}{3}hy_{1,m+1} + \frac{h}{3}\left(\frac{2^{-2x_m}}{x_m^2} + \frac{e^{-2x_{m+1}}}{x_{m+1}^2} + \frac{e^{-2x_{m+2}}}{x_{m+2}^2}\right)$$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3.30 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.1,\ h = 0.1,\ y = -0.010150146243$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00015524673117	0.00000000020027	0.00041052270392	0.00003125036133

ตารางที่ 3.31 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.1,\ h = 0.01,\ y = -0.010150146243$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000152200482	0.00000000015881	0.00000334368453	0.00000002504973

ตารางที่ 3.32 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.1,\ h = 0.001,\ y = -0.010150146243$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001521452	0.00000000000251	0.00000003276871	0.00000000002274

ตารางที่ 3.33 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 2.0,\ h = 0.1,\ y = -0.012695419162$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00003106919285	0.00000279127178	0.00019009434600	0.00001609703141

ตารางที่ 3.34 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 2.0,\ h = 0.01,\ y = -0.012695419162$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000031214103	0.00000000000355	0.00000146320170	0.00000001249283

ตารางที่ 3.35 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 2.0,\ h = 0.001,\ y = -0.012695419162$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000312001	0.00000000000091	0.00000001429055	0.00000000001643

ตัวอย่างที่ 3 การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y''' + y'' - 3y' - \dfrac{6e^{x}}{x^{4}}, \quad x \in [1,2]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = e, y'(1) = 0, y''(1) = e$

ซึ่งคำตอบของสมการ คือ $y(x) = \dfrac{e^{x}}{x}$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+1} = y_{1,m} + \frac{h}{2}\left(y_{2,m} + y_{2,m+1}\right)$$

$$y_{2,m+1} = y_{2,m} + \frac{h}{2}\left(y_{3,m} + y_{3,m+1}\right)$$

$$y_{3,m+1} = \frac{M}{1 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}h^{2} - \frac{h^{3}}{8}}$$

โดยที่

$$M = \left(1 - \frac{3}{2}h - \frac{3}{4}h^{2} + \frac{h^{3}}{8}\right)y_{3,m} + \left(-3h + \frac{h^{2}}{2}\right)y_{2,m} + hy_{1,m} - 3h\left(\frac{e^{x_m}}{x_m^{4}} + \frac{e^{x_{m+1}}}{x_{m+1}^{4}}\right)$$

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}\left(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2}\right)$$

$$y_{2,m+2} = y_{2,m} + \frac{h}{3}\left(y_{3,m} + 4y_{3,m+2} + y_{3,m+2}\right)$$

$$y_{3,m+2} = \frac{M}{1 - h + \frac{h^{2}}{3} - \frac{h^{3}}{27}}$$

โดยที่

$$M = \left(1 + h - \frac{h^{2}}{3} + \frac{h^{3}}{27}\right)y_{3,m} + \left(4h - \frac{4}{3}h^{2} + \frac{4}{27}h^{3}\right)y_{3,m+1} + \left(-2h + \frac{2}{9}h^{2}\right)y_{2,m} + \left(-4h + \frac{4}{9}h^{2}\right.$$

$$+ \frac{2}{3}hy_{1,m} + \frac{4}{3}hy_{1+m+1} - 2h\left(\frac{e^{x_m}}{x_m^{4}} + \frac{4e^{x_{m+1}}}{x_{m+1}^{4}} + \frac{e^{x_{m+2}}}{x_{m+2}^{4}}\right)$$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3.36 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1,\ h = 0.1,\ y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00030599165595	0.00000002952947	0.00081321582911	0.00009287811190

ตารางที่ 3.37 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1,\ h = 0.01,\ y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000293977791	0.00000000063665	0.00000533787170	0.00000009884752

ตารางที่ 3.38 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1,\ h = 0.001,\ y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000002942397	0.00000000002183	0.00000005065158	0.00000000012005

ตารางที่ 3.39 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.1,\ h = 0.0001,\ y = 2.7318732376$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000001091	0.00000000025466	0.00000000065484	0.00000079450183

ตารางที่ 3.40 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0,\ h = 0.1,\ y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.01494241224600	0.00021100712911	0.05015573438500	0.00216866279520

ตารางที่ 3.41 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0,\ h = 0.01,\ y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00049050454640	0.00000010041913	0.00057297762396	0.00000207840276

ตารางที่ 3.42 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0,\ h = 0.001,\ y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000149049447	0.00000000010114	0.00000578748222	0.00000000219370

ตารางที่ 3.43 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 2.0,\ h = 0.0001,\ y = 3.6443723151$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001015724	0.00000000105865	0.00000005369657	0.00000000468935

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ

$$y^{iv} = x + y - xy' + y'' + xy''' + \frac{2}{x^3}, \quad x \in [1,2]$$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0, y'(1) = 1, y''(1) = 1, y'''(1) = -1$

คำตอบของสมการ คือ $y(x) = x \ln x$

สำหรับ Trapezoidal formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}\left(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2}\right)$$

$$y_{2,m+2} = y_{2,m} + \frac{h}{3}\left(y_{3,m} + 4y_{3,m+1} + y_{3,m+2}\right)$$

$$y_{3,m+1} = y_{3,m} + \frac{h}{2}\left(y_{4,m} + y_{4,m+1}\right)$$

$$y_{4,m+1} = \frac{M}{1 - \frac{h}{2}x_{m+1} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8}x_{m+1} - \frac{h^4}{16}}$$

โดยที่
$$M = \left(1 + \frac{h}{2}x_m + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8}x_{m+1} + \frac{h^4}{16}\right)y_{3,m} + \left(h - \frac{h^2}{2}x_{m+1} + \frac{h^3}{4}\right)y_{3,m}$$
$$+ \frac{h}{2}\left(h - x_m - x_{m+1}\right)y_{2,m} + hy_{1,m} + h\left(\frac{x_m}{2} + \frac{x_{m+1}}{2} + \frac{1}{x_m^3} + \frac{1}{x_{m+1}^3}\right).$$

สำหรับ Simpson's formula เราจะได้สมการคือ

$$y_{1,m+2} = y_{1,m} + \frac{h}{3}\left(y_{2,m} + 4y_{2,m+1} + y_{2,m+2}\right)$$

$$y_{2,m+2} = y_{2,m} + \frac{h}{3}\left(y_{3,m} + 4y_{3,m+1} + y_{3,m+2}\right)$$

$$y_{3,m+2} = y_{3,m} + \frac{h}{3}\left(y_{4,m} + 4y_{4,m+1} + y_{4,m+2}\right)$$

$$\begin{aligned} y_{4,m+2} = \{ & \frac{h}{3}\left(x_m + 4x_{m+1} + x_{m+2} + \frac{2}{x_m^3} + \frac{8}{x_{m+1}^3} + \frac{2}{x_{m+2}^3}\right) + \frac{2h}{3}y_{1,m} + \frac{4h}{3}y_{1,m+1} \\ & + \frac{h}{3}y_{2,m}\left(\frac{2h}{3} - x_m - x_{m+2}\right) + \frac{4h}{3}y_{2,m+1}\left(\frac{h}{3} - x_{m+1}\right) \\ & + \frac{2h}{3}y_{3,m}\left(1 - \frac{hx_{m+2}}{3} + \frac{h^2}{9}\right) + \frac{4h}{3}y_{3,m+1}\left(1 - \frac{hx_{m+2}}{3} + \frac{h^2}{9}\right) \\ & + y_{3,m}\left(1 + \frac{hx_m}{3} + \frac{h^2}{9} - \frac{h^3 x_{m+2}}{27} + \frac{h^4}{81}\right) \\ & + \frac{4h}{3}y_{4,m+1}\left(x_{m+1} + \frac{h}{3} - \frac{h^2 x_{m+2}}{9} + \frac{h^3}{27}\right)\}/M \end{aligned}$$

โดยที่ $$M = \frac{1}{1 - \frac{h}{2}x_{m+1}} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{8}x_{m+1} - \frac{h^4}{16}$$

ผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3.44 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.1,\ h = 0.1,\ y = 1.05$			
Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00006929845259	0.00000000070384	0.00015880221258	0.00000786445423

ตารางที่ 3.45 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.1,\ h = 0.01,\ y = 1.05$			
Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000068867234	0.00000064145761	0.00000139831525	0.00000000627642

ตารางที่ 3.46 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.1,\ h = 0.001,\ y = 1.05$			
Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000690989	0.00000645738442	0.00000001379260	0.00000000002979

ตารางที่ 3.47 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.1,\ h = 0.0001,\ y = 1.05$			
Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000000070372	0.00000000084503	0.00000000091177	0.00000000076966

ตารางที่ 3.48 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 2.0,\ h = 0.1,\ y = 1.3877975821$			
Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00013412624503	0.00077794139906	0.00150322096490	0.00003451793236

ตารางที่ 3.49 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 2.0$, $h = 0.01$, $y = 1.3877975821$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000126594568	0.00001004191290	0.00001637324749	0.00000003304830

ตารางที่ 3.50 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 2.0$, $h = 0.001$, $y = 1.3877975821$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001227090	0.00005593667083	0.00000016431841	0.00000000032742

ตารางที่ 3.51 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 2.0$, $h = 0.0001$, $y = 1.3877975821$

Error of Trapezoidal	Error of Simpson	Error of RK2	Error of RK3
0.00000001243461	0.00000113504575	0.00000001390799	0.00000001216722

งานวิจัยชิ้นที่ 4 (จาก [5])

Open Formula of Integration Method

การสร้างสูตร

ในบทความนี้จะแนะนำ 5 สูตร ของประเภทสูตรแบบเปิด สูตรทั้ง 5 สูตรนี้คือ สูตร 1 จุด, สูตร 2 จุด, สูตร 3 จุด, สูตร 4 จุด และ สูตร 5 จุด

ทำการแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยเท่าๆ กัน n ช่วงซึ่งมีความยาวช่วงเท่ากับ h โดยที่ $h=\dfrac{b-a}{n}$

สูตร 1 จุด : จากสูตรการหาค่าจุดกึ่งกลาง จะได้สูตร 1 จุด คือ

$$y_{m+2}=y_m+2hf\left(x_{m+1},y_{m+1}\right) \tag{3.29}$$

ถ้าให้ $s=2h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^3\right)$

สูตร 2 จุด : ใช้จุด x_{m+1} และ x_{m+2} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m,x_{m+3}\right]$ จะได้สูตร 2 จุด คือ

$$y_{m+3}=y_m+1.5h\left(f\left(x_{m+1},y_{m+1}\right)+f\left(x_{m+2},y_{m+2}\right)\right) \tag{3.30}$$

ถ้าให้ $s=3h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^3\right)$

สูตร 3 จุด : ใช้จุด x_{m+1},x_{m+2} และ x_{m+3} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m,x_{m+4}\right]$ จะได้สูตร 3 จุด คือ

$$y_{m+4}=y_m+\frac{4}{3}h\left(2f\left(x_{m+1},y_{m+1}\right)-f\left(x_{m+2},y_{m+2}\right)+2f\left(x_{m+3},y_{m+3}\right)\right) \tag{3.31}$$

ถ้าให้ $s=4h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^5\right)$

สูตร 4 จุด : ใช้จุด x_{m+1},x_{m+2},x_{m+3} และ x_{m+4} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m,x_{m+5}\right]$ จะได้สูตร 4 จุด คือ

$$y_{m+5}=y_m+\frac{5}{24}h(11f(x_{m+1},y_{m+1})+f(x_{m+2},y_{m+2})+f(x_{m+3},y_{m+3})+11f(x_{m+4},y_{m+4})) \tag{3.32}$$

ถ้าให้ $s=5h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^5\right)$

สูตร 5 จุด : ใช้จุด $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, x_{m+4}$ และ x_{m+5} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m, x_{m+6}\right]$ จะได้สูตร 5 จุด คือ

$$y_{m+6} = y_m + \frac{3}{10}h(11f(x_{m+1}, y_{m+1}) - 14f(x_{m+2}, y_{m+2}) + 26f(x_{m+3}, y_{m+3}) - 14f(x_{m+4}, y_{m+4})$$
$$+11f(x_{m+5}, y_{m+5})) \tag{3.33}$$

ถ้าให้ $s = 6h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^7\right)$ จะทำการแทนชื่อสูตรข้างต้นด้วย

OP1 สำหรับ สูตร 1 จุด

OP2 สำหรับ สูตร 2 จุด

OP3 สำหรับ สูตร 3 จุด

OP4 สำหรับ สูตร 4 จุด

OP5 สำหรับ สูตร 5 จุด

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,6]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(5) = 5$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ผลเฉลยที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$y(5.1) = 5.0755075525$$
$$y(5.2) = 5.1431008437$$
$$y(5.3) = 5.2040953564$$
$$y(5.4) = 5.2595111955$$
$$y(5.5) = 5.3101549284$$
$$y(5.6) = 5.3566749440$$
$$y(5.7) = 5.3995999887$$
$$y(5.8) = 5.4393666599$$
$$y(5.9) = 5.4763275867$$
$$y(6.0) = 5.5108133286$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.52 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 1 (3.1)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755046862	2.8663271×10^{-6}
5.2	5.1430958019	5.041729×10^{-6}
5.3	5.2040886257	6.730697×10^{-6}
5.4	5.2595031282	8.067364×10^{-6}
5.5	5.3101457857	9.142699×10^{-6}
5.6	5.3566649238	1.002015×10^{-5}
5.7	5.3995892437	1.074504×10^{-5}
5.8	5.4393553094	1.135046×10^{-5}
5.9	5.4763275867	1.186103×10^{-5}
6.0	5.5108133285	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.53 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 2 (3.2)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755037420	3.810506×10^{-6}
5.2	5.1430942445	6.500206×10^{-6}
5.3	5.2040852614	1.009503×10^{-5}
5.4	5.2594995841	1.161142×10^{-5}
5.5	5.3101421781	1.275022×10^{-5}
5.6	5.3566599151	1.502891×10^{-5}
5.7	5.3995843610	1.562768×10^{-5}
5.8	5.4393505982	1.606170×10^{-5}
5.9	5.4763216577	1.779009×10^{-5}
6.0	5.5108076708	1.795303×10^{-5}

ตารางที่ 3.54 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 3 (3.3)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075514	1.350494×10^{-9}
5.2	5.1431008412	2.437446×10^{-9}
5.3	5.2040953537	2.713922×10^{-9}
5.4	5.2595111920	3.507012×10^{-9}
5.5	5.3101549249	3.441528×10^{-9}
5.6	5.3566749400	3.023605×10^{-9}
5.7	5.3995999849	3.812602×10^{-9}
5.8	5.4393666555	3.307370×10^{-9}
5.9	5.4763394437	3.045432×10^{-9}
6.0	5.5108256194	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.55 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 4 (3.4)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075500	2.517481×10^{-9}
5.2	5.1431008396	3.118192×10^{-9}
5.3	5.2040953512	5.187758×10^{-9}
5.4	5.2595111896	5.908078×10^{-9}
5.5	5.3101549219	6.417395×10^{-9}
5.6	5.3566749372	6.781192×10^{-9}
5.7	5.3995999817	7.043127×10^{-9}
5.8	5.4393666526	7.246854×10^{-9}
5.9	5.4763394404	7.399649×10^{-9}
6.0	5.5108256163	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.56 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 5 (3.5)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075525	2.546585×10^{-10}
5.2	5.1431008437	3.874892×10^{-10}
5.3	5.2040953564	6.912160×10^{-10}
5.4	5.2595111957	8.876668×10^{-10}
5.5	5.3101549285	1.069566×10^{-9}
5.6	5.3566749442	1.193257×10^{-9}
5.7	5.3995999890	1.367880×10^{-9}
5.8	5.4393666603	1.520675×10^{-9}
5.9	5.4763394482	1.593435×10^{-9}
6.0	5.5108256244	1.229533×10^{-5}

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{xy}{y^2 - x^2}, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1 + x^2}}}$

ได้ค่าที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$y(0.1) = 1.0050124371$$
$$y(0.2) = 1.0201959029$$
$$y(0.3) = 1.0459645461$$
$$y(0.4) = 1.0829215632$$
$$y(0.5) = 1.1317139243$$
$$y(0.6) = 1.1928228789$$
$$y(0.7) = 1.2663324102$$
$$y(0.8) = 1.3517639463$$
$$y(0.9) = 1.4480661205$$
$$y(1.0) = 1.5537739740$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.57 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 1 (3.1)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050121908	2.462839×10^{-7}
0.2	1.0201949649	9.379783×10^{-7}
0.3	1.0459626233	1.922830×10^{-6}
0.4	1.0829186387	2.924542×10^{-6}
0.5	1.1317103672	3.557063×10^{-6}
0.6	1.1928194532	3.425730×10^{-6}
0.7	1.2663300924	2.317742×10^{-5}
0.8	1.3517635818	3.644145×10^{-7}
0.9	1.4480681110	1.990549×10^{-6}
1.0	1.5537781956	3.221509×10^{-5}

ตารางที่ 3.58 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 2 (3.2)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050120714	3.657533×10^{-7}
0.2	1.0201945107	1.392214×10^{-6}
0.3	1.0459616609	2.885201×10^{-6}
0.4	1.0829171787	3.384572×10^{-6}
0.5	1.1317086023	5.321956×10^{-6}
0.6	1.1928177371	5.141781×10^{-6}
0.7	1.2663289348	3.475356×10^{-5}
0.8	1.3517634157	5.305956×10^{-7}
0.9	1.4480691036	2.983132×10^{-6}
1.0	1.5537803094	6.335387×10^{-5}

ตารางที่ 3.59 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 3 (3.3)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124373	1.709850×10^{-10}
0.2	1.0201959036	7.657945×10^{-10}
0.3	1.0459645480	1.846274×10^{-9}
0.4	1.0829215666	3.421519×10^{-9}
0.5	1.1317139294	5.078618×10^{-9}
0.6	1.1928228850	6.037226×10^{-9}
0.7	1.2663324157	5.509719×10^{-9}
0.8	1.3517639498	3.552486×10^{-9}
0.9	1.4480661216	1.109584×10^{-9}
1.0	1.5537739733	1.109584×10^{-9}

ตารางที่ 3.60 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 4 (3.4)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124374	3.019522×10^{-10}
0.2	1.0201959042	1.296939×10^{-9}
0.3	1.0459645493	3.143214×10^{-9}
0.4	1.0829215690	5.8043952×10^{-9}
0.5	1.1317139329	8.631105×10^{-9}
0.6	1.1928228892	1.025546×10^{-9}
0.7	1.2663324195	9.369614×10^{-9}
0.8	1.3517639523	6.040864×10^{-9}
0.9	1.4480661223	1.897206×10^{-9}
1.0	1.5537739728	1.897206×10^{-9}

ตารางที่ 3.61 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 5 (3.5)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124371	1.818989×10^{-12}
0.2	1.0201959029	1.818989×10^{-12}
0.3	1.0459645461	0.0
0.4	1.0829215632	5.456968×10^{-12}
0.5	1.1317139243	9.094947×10^{-12}
0.6	1.1928228789	1.637090×10^{-11}
0.7	1.2663324101	2.182787×10^{-11}
0.8	1.3517639462	1.637090×10^{-11}
0.9	1.4480661204	1.637090×10^{-11}
1.0	1.5537739740	1.637090×10^{-11}

ตัวอย่างที่ 3 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = y^3, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{100-2x}}$

ได้ค่าที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$y(0.1) = 0.1001001503$$
$$y(0.2) = 0.002006020$$
$$y(0.3) = 0.003013568$$
$$y(0.4) = 0.004024161$$
$$y(0.5) = 0.100537815$$
$$y(0.6) = 0.1006054546$$
$$y(0.7) = 0.1007074368$$
$$y(0.8) = 0.1008097298$$
$$y(0.9) = 0.1009123352$$
$$y(1.0) = 0.1010152545$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดังตารางที่ 3.62 3.63 3.64 3.65 และ 3.66

ตารางที่ 3.62 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 1 (3.1)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	2.501110×10^{-12}
0.2	0.1002006020	5.229595×10^{-12}
0.3	0.1003013568	7.730705×10^{-12}
0.4	0.1004024161	1.023182×10^{-11}
0.5	0.1005037815	1.273293×10^{-11}
0.6	0.1006054546	1.546141×10^{-11}
0.7	0.1007074368	1.818989×10^{-11}
0.8	0.1008097298	2.103206×10^{-11}
0.9	0.1009123351	2.387424×10^{-11}
1.0	0.1010152544	2.637535×10^{-11}

ตารางที่ 3.63 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 2 (3.2)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	3.410605×10^{-12}
0.2	0.1002006020	6.707523×10^{-12}
0.3	0.1003013568	1.136868×10^{-11}
0.4	0.1004024161	1.500666×10^{-11}
0.5	0.1005037815	1.841727×10^{-11}
0.6	0.1006054546	2.330580×10^{-11}
0.7	0.1007074368	2.683009×10^{-11}
0.8	0.1008097298	3.046807×10^{-11}
0.9	0.1009123351	3.558398×10^{-11}
1.0	0.1010152544	3.910827×10^{-11}

ตารางที่ 3.64 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 3 (3.3)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	0.0
0.2	0.1002006020	1.136868×10^{-13}
0.3	0.1003013568	0.0
0.4	0.1004024161	0.0
0.5	0.1005037815	0.0
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	0.0
0.8	0.1008097298	0.0
0.9	0.1009123352	2.273737×10^{-13}
1.0	0.1010152545	0.0

ตารางที่ 3.65 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 4 (3.4)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	1.136868×10^{-13}
0.2	0.1002006020	0.0
0.3	0.1003013568	1.136868×10^{-13}
0.4	0.1004024161	1.136868×10^{-13}
0.5	0.1005037815	1.136868×10^{-13}
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	1.136868×10^{-13}
0.8	0.1008097298	0.0
0.9	0.1009123352	$1.1236868 \times 10^{-13}$
1.0	0.1010152545	1.136868×10^{-13}

ตารางที่ 3.66 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 5 (3.5)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	0.0
0.2	0.1002006020	0.0
0.3	5.2040953564	2.273737×10^{-13}
0.4	0.1004024161	1.136868×10^{-13}
0.5	0.1005037815	1.136868×10^{-13}
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	1.136868×10^{-13}
0.8	0.1008097298	1.136868×10^{-13}
0.9	0.1009123352	1.136868×10^{-13}
1.0	0.1010152545	1.136868×10^{-13}

ตัวอย่างที่ 4 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{2y}{x}, x \in [2,3]$
ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$ ที่จุด $x = 3$ โดยที่ $h = 0.01$
คำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{4 + \cos 2 - \cos x}{x^2}$
และ $y(3) = 0.5082050733$
ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่ 3.67

ตารางที่ 3.67 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	0.5067707775	1.434296×10^{-3}
RK2 ()	0.5082072867	2.213332×10^{-6}
RK3 ()	0.5082050692	3.243702×10^{-9}
RK4 ()	0.5082050734	3.547474×10^{-11}
OP1(3.1)	0.5082128146	7.741231×10^{-6}
OP2 (3.2)	0.5082160491	1.097568×10^{-5}
OP3 (3.3)	0.5082050756	2.187335×10^{-9}
OP4 (3.4)	0.5082050771	3.698915×10^{-9}
OP5 (3.5)	0.5082050733	7.003109×10^{-11}

<u>**ตัวอย่างที่ 5**</u> หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ ที่จุด $x = 1$ โดยที่ $h = 0.01$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

และ $y(1) = 2.4142135625$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่ 3.68

ตารางที่ 3.68 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	2.2781717556	1.360418×10^{-1}
RK2 ()	2.3160806852	9.813288×10^{-2}
RK3 ()	2.4142056843	7.878192×10^{-6}
RK4 ()	2.4142135222	3.035246×10^{-8}
OP1(3.1)	2.4099523426	3.261220×10^{-3}
OP2 (3.2)	2.4078786870	6.334876×10^{-3}
OP3 (3.3)	2.4141286225	8.493999×10^{-5}
OP4 (3.4)	2.4140741639	1.393987×10^{-4}
OP5 (3.5)	2.4142071062	6.456310×10^{-6}

ตัวอย่างที่ 6 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}, x \in [1,100]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ ที่จุด $x = 10$ และ $x = 100$ โดยที่ $h = 0.01$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

และ
$$\begin{aligned} y(10) &= 3.4785054262 \\ y(100) &= 10.1 \end{aligned}$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่ 3.69 และ 3.70

ตารางที่ 3.69 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	3.4777897010	7.157252×10^{-4}
RK2 ()	3.4785012135	3.212602×10^{-6}
RK3 ()	3.4785054261	3.001777×10^{-11}
RK4 ()	3.4785054261	3.001777×10^{-11}
OP1(3.1)	3.4785138507	8.424493×10^{-6}
OP2 (3.2)	3.4785180615	1.263532×10^{-5}
OP3 (3.3)	3.4785054305	3.361937×10^{-9}
OP4 (3.4)	3.4785054336	7.399649×10^{-9}
OP5 (3.5)	3.4785054262	0.0

ตารางที่ 3.70 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6

Formula	Calculated y	Error
RK1 ()	10.099748331	2.516690×10^{-4}
RK2 ()	10.099995831	3.168949×10^{-6}
RK3 ()	10.100000000	7.275958×10^{-11}
RK4 ()	10.100000000	7.275958×10^{-11}
OP1(3.1)	10.100008336	8.336094×10^{-6}
OP2 (3.2)	10.100012503	1.250285×10^{-5}
OP3 (3.3)	10.100000004	3.220554×10^{-9}
OP4 (3.4)	10.100000007	7.392373×10^{-9}
OP5 (3.5)	10.100000000	7.275958×10^{-11}

บทที่ 4
ผลการศึกษาวิจัย

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = f(x,y), x \in [a,b] \tag{4.1}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$y(a) = c \tag{4.2}$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t,y)dt \tag{4.3}$$

แทนค่าสมการ (4.1) – (4.2) เพื่อแก้สมการ (4.3) ดังนั้นจะได้สูตร

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(t,y)dt \tag{4.4}$$

ในการประมาณค่าของ $f(x,y)$ ในสมการที่ (4.4) ในการเข้าใกล้ผลเฉลยจะใช้ Taylor Series และจะใช้ Gauss Legendre Quadrature ในการประมาณค่าสมการปริพันธ์ในสมการที่ (4.4)

การสร้างสูตรเพื่อแก้ปัญหา

จะกำหนดให้ $t = x_m + sh$ เมื่อ x_m และ h เป็นค่าคงที่ เมื่อทำการหาอนุพันธ์เทียบตัวแปรอิสระ s จะได้

$$dt = hds$$

ดังนั้นจากสมการ (4.4) จะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + h\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x_m + sh, y(x_m + sh))ds \tag{4.5}$$

ในการหาปริพันธ์จะใช้การหาปริพันธ์ด้วยรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์ แต่เนื่องจากพหุพจน์ตั้งฉากเลอจองด์ เป็นพหุพจน์ตั้งฉากในช่วงปิด $[-1,1]$ โดยมีฟังก์ชันถ่วง $w(x) = 1$ ดังนั้นรูปแบบการหาปริพันธ์แบบนี้ คือ

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{4.6}$$

เมื่อต้องการหาปริพันธ์ในช่วงปิด $[0,1]$ จะสามารถหาได้โดยใช้รูปแบบ คือ

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right) \tag{4.7}$$

ให้ $s = \dfrac{1+x_k}{2}$ ดังนั้นจากสมการ (4.5) จะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n} A_k f\left(\frac{1+x_k}{2}\right) \tag{4.8}$$

เมื่อทำการกระจายผลรวมตั้งแต่ $k=1$ ถึง n จะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[&A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \\ &+ A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right) \\ &+ \ldots + A_n f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_n}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_n}{2}\right)\right)\right)] \end{aligned} \tag{4.9}$$

สำหรับที่ $n=1$ จะได้รูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right)] \tag{4.10}$$

สำหรับที่ $n=2$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[&A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \\ &+ A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right)] \end{aligned} \tag{4.11}$$

สำหรับที่ $n=3$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[&A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \\ &+ A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right) \\ &+ A_3 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right)\right)\right)] \end{aligned} \tag{4.12}$$

สำหรับที่ $n=4$ จะได้รูปแบบ คือ

$$\begin{aligned} y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[&A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right) \\ &+ A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right) \\ &+ A_3 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right)\right)\right) \\ &+ A_4 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right)\right)\right)] \end{aligned} \tag{4.13}$$

สำหรับที่ $n=5$ จะได้รูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_3 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_4 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_5 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_5}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_5}{2}\right)\right)\right)] \tag{4.14}$$

สำหรับที่ $n=6$ จะได้รูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[A_1 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_1}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_2 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_2}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_3 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_3}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_4 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_4}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_5 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_5}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_5}{2}\right)\right)\right)$$

$$+ A_6 f\left(x_m + h\left(\frac{1+x_6}{2}\right), y\left(x_m + h\left(\frac{1+x_6}{2}\right)\right)\right)] \tag{4.15}$$

ส่วนในการประมาณค่า $y(x_m + sh)$ จะใช้การกระจายเทอม $y(x_m + sh)$ ตามอนุกรมกำลังเทย์เลอร์ ซึ่งจะมีรูปแบบดังนี้ คือ

$$y(x_m + sh) = y_m + shf(x_m, y_m) + \frac{s^2h^2}{2}(f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m)f_y(x_m, y_m)) \tag{4.16}$$

ดังนั้น เมื่อให้ $s = \frac{1+x_k}{2}$ ก็จะทำให้ได้ว่า

$$y(x_m + sh) = y\left(x_m + \left(\frac{1+x_k}{2}\right)h\right) = y_m + \left(\frac{1+x_k}{2}\right)hf(x_m, y_m)$$

$$+ \frac{\left(\frac{1+x_k}{2}\right)^2 h^2}{2}(f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m)f_y(x_m, y_m)) \tag{4.17}$$

ตัวอย่างที่ 1

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 5.0$

ซึ่งมีคำตอบของสมการ คือ $y = 5 + \ln 5 - \ln x + \ln(x-4)$

(4.18)

หยุดหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon \le 0.0000001$

ตารางที่ 4.1 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	x = 5.1, h =0.1 , True value y = 5.075507552508145	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.075436115040075	$7.143746806992368\times10^{-5}$
(4.11)	5.075507508878028	$4.363011729680011\times10^{-8}$
(4.12)	5.075507552520396	$1.2250644942923827\times10^{-11}$
(4.13)	5.075507552508204	$5.861977570020827\times10^{-14}$
(4.14)	5.0755075524703805	$3.7764458227229625\times10^{-11}$
(4.15)	5.075507552508075	$7.016609515630989\times10^{-14}$
RK-2(2.11)	5.0756506238859185	$1.4307137777347378\times10^{-4}$
RK-3(2.12)	5.075507550676936	$1.8312089622440908\times10^{-9}$
RK-4(2.13)	5.0755076179886895	$6.548054454214025\times10^{-8}$
RK-4(2,14)	5.075507581636823	$2.9128676136203234\times10^{-8}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507550676936	$1.8312089622440908\times10^{-9}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507554348487	$1.8403421009338672\times10^{-9}$

ตารางที่ 4.2 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	$x = 5.1$, $h = 0.01$, True value $y = 5.075507552508144$	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.075506835862621	$7.166455233686975\times10^{-7}$
(4.11)	5.075507552503743	$4.4009240696141205\times10^{-12}$
(4.12)	5.0755075525459	$3.7755576443032624\times10^{-11}$
(4.13)	5.075507552508145	$8.881784197001252\times10^{-16}$
(4.14)	5.075507552470392	$3.775202372935382\times10^{-11}$
(4.15)	5.075507552508144	0.0
RK-2(2.10)	5.075507552508144	$1.4333108495634406\times10^{-6}$
RK-3(2.11)	5.075507552508144	$3.597122599785507\times10^{-13}$
RK-4(2.13)	5.075507552514745	$6.600942015211331\times10^{-12}$
RK-4(2,14)	5.75507552511079	$2.9345414986892138\times10^{-12}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507552507784	$3.597122599785507\times10^{-13}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507552508166	$2.220446049250313\times10^{-14}$

ตารางที่ 4.3 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	$x = 5.1$, $h = 0.001$, True value $y = 5.075507552508169$	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.07550754534146	$7.166709004025051\times10^{-9}$
(4.11)	5.075507552508141	$2.8421709430404007\times10^{-14}$
(4.12)	5.075507552545899	$3.772981926886132\times10^{-11}$
(4.13)	5.075507552508141	$2.8421709430404007\times10^{-14}$
(4.14)	5.07550755247039	$3.7778669081944827\times10^{-11}$
(4.15)	5.075507552508141	$2.8421709430404007\times10^{-14}$
RK-2(2.10)	5.075507552508169	$1.4333343401062848\times10^{-8}$
RK-3(2.11)	5.075507552508169	$2.220446049250313\times10^{-14}$
RK-4(2.13)	5.075507552508142	$2.6645352591003757\times10^{-14}$
RK-4(2,14)	5.0755075525081415	$2.7533531010703882\times10^{-14}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507552508147	$2.220446049250313\times10^{-14}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507552508143	$2.5757174171303632\times10^{-14}$

ตารางที่ 4.4 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 1

Formula	x = 5.1, h =0.0001 , True value y = 5.07550755250798	
	Calculated y	Error
(4.10)	5.075507552436473	$7.150724457005708\times10^{-11}$
(4.11)	5.07550755250815	$1.7053025658242404\times10^{-13}$
(4.12)	5.075507552545915	$3.793498848381205\times10^{-11}$
(4.13)	5.07550755250815	$1.7053025658242404\times10^{-13}$
(4.14)	5.075507552470402	$3.75779407590926\times10^{-11}$
(4.15)	5.07550755250815	$1.7053025658242404\times10^{-13}$
RK-2(2.10)	5.07550755250798	$1.4352075083934324\times10^{-10}$
RK-3(2.11)	5.07550755250798	$1.9451107391432743\times10^{-13}$
RK-4(2.13)	5.07550755250815	$1.7053025658242404\times10^{-13}$
RK-4(2,14)	5.07550755250815	$1.705302565824240\times10^{-13}$
RK Fehlberg-5(2.16)	5.075507552508174	$1.9451107391432743\times10^{-13}$
RK Fehlberg-6(2.17)	5.075507552508152	$1.723066134218243\times10^{-13}$

ตัวอย่างที่ 2

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = y^3$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการ คือ $y = \dfrac{1}{\sqrt{100 - 2x}}$

(4.19)

หยุดหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon \leq 0.0000001$

ตารางที่ 4.5 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	x = 0.1, h =0.1 , True value y = 0.10010015025043828	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015018762508	$6.281319908651994\times10^{-11}$
(4.11)	0.10010015025025022	$1.880579025836937\times10^{-13}$
(4.12)	0.10005007512515016	$5.0075125288123745\times10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025025024	$1.880440247958859\times10^{-13}$
(4.14)	0.10010015025020015	$2.3812896099428826\times10^{-13}$
(4.15)	0.10010015025025024	$1.880440247958859\times10^{-13}$
RK-2(2.10)	0.10010015015005	$1.0038828102132413\times10^{-10}$
RK-3(2.11)	0.10009995035038287	$1.999000554114838\times10^{-7}$
RK-4(2.13)	0.1001001502504383	$1.3877787807214457\times10^{-17}$
RK-4(2,14)	0.10010015025042573	$1.2545520178264269\times10^{-14}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010008835678888	$6.189364940012432\times10^{-8}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.10010013287881973	$1.737161854642455\times10^{-8}$

ตารางที่ 4.6 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	$x = 0.1$, $h = 0.01$, True value $y = 0.10010015025043828$	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015024981017	$6.281086761816823\times10^{-13}$
(4.11)	0.10010015025043811	$1.6653345369377348\times10^{-16}$
(4.12)	0.10005004128900175	$5.010896143653465\times10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025043811	$1.6653345369377348\times10^{-16}$
(4.14)	0.10010015025038795	$5.0334736378943035\times10^{-14}$
(4.15)	0.10010015025043811	$1.6653345369377348\times10^{-16}$
RK-2(2.10)	0.10010015025043828	$1.0049183707394604\times10^{-12}$
RK-3(2.11)	0.10010013017925301	$2.00711852693658\times10^{-8}$
RK-4(2.13)	0.10010015025043831	$2.7755575615628914\times10^{-17}$
RK-4(2,14)	0.10010015025043827	$1.3877787807814457\times10^{-17}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010015025043828	$6.1991267397143446\times10^{-10}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.10010014850681405	$1.7436242311097416\times10^{-9}$

ตารางที่ 4.7 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	$x = 0.1$, $h = 0.001$, True value $y = 0.10010015025043828$	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015025043208	$6.203371150093062\times10^{-15}$
(4.11)	0.10010015025043824	$4.163336342344337\times10^{-17}$
(4.12)	0.10005003790705544	$5.0112343382840985\times10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025043824	$4.163336342344337\times10^{-17}$
(4.14)	0.10010015025038811	$5.016820292524926\times10^{-14}$
(4.15)	0.10010015025043824	$4.163336342344337\times10^{-17}$
RK-2(2.10)	0.10010015025042826	$1.0019762797242038\times10^{-14}$
RK-3(2.11)	0.10010014824250514	$2.0079331392031108\times10^{-9}$
RK-4(2.13)	0.10010015025043824	$4.163336342344337\times10^{-17}$
RK-4(2,14)	0.10010015025043824	$4.163336342344337\times10^{-17}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010014963042779	$6.200104873954615\times10^{-10}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.100100150076011	$1.7442718103222177\times10^{-10}$

ตารางที่ 4.8 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 2

Formula	$x = 0.1$, $h = 0.0001$, True value $y = 0.10010015025043828$	
	Calculated y	Error
(4.10)	0.10010015025043857	$2.914335439641036\times10^{-16}$
(4.11)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696\times10^{-16}$
(4.12)	0.1000500375688776	$5.0112681560673944\times10^{-5}$
(4.13)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696\times10^{-16}$
(4.14)	0.10010015025038807	$5.0209836288672705\times10^{-14}$
(4.15)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696\times10^{-16}$
RK-2(2.10)	0.10010015025043854	$2.636779683484747\times10^{-16}$
RK-3(2.11)	0.10010015004963664	$2.0080163920582 1699\times10^{-10}$
RK-4(2.13)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696\times10^{-16}$
RK-4(2,14)	0.10010015025043861	$3.3306690738754696\times10^{-16}$
RK Fehlberg-5(2.16)	0.10010015018843614	$6.200213953366784\times10^{-11}$
RK Fehlberg-6(2.17)	0.10010015023299479	$1.7443491096003072\times10^{-11}$

ตัวอย่างที่ 3

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1.0$

ซึ่งมีคำตอบของสมการ คือ $y = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

(4.20)

หยุดหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon \le 0.0000001$

ตารางที่ 4.9 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.1$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	x = 0.1, h =0.1 , True value y = 1.005025188681312	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050125117187545	$1.267696255746742\times10^{-5}$
(4.11)	1.0050250572917958	$1.3138951615587757\times10^{-7}$
(4.12)	1.0050250625027306	$1.2617858136110272\times10^{-7}$
(4.13)	1.005025062500245	$1.2618106692841025\times10^{-7}$
(4.14)	1.005025062497718	$1.261835940180589\times10^{-7}$
(4.15)	1.0050250625002202	$1.26181091797406\times10^{-7}$
RK-2(2.10)	1.0049751859510498	$5.0002730262121986\times10^{-5}$
RK-3(2.11)	1.0050377574960885	$1.2568814776514614\times10^{-5}$
RK-4(2.13)	1.0050252273803153	$3.869900333519638\times10^{-8}$
RK-4(2,14)	1.0050293772521075	$4.188570795538027\times10^{-6}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.005026656299475	$1.4676181629980078\times10^{-6}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050265801713743	$1.3914900622857829\times10^{-6}$

ตารางที่ 4.10 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.01$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	x = 0.1, h =0.01 , True value y = 1.005025188681312	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050250603685909	$1.2831272111490932\times10^{-7}$
(4.11)	1.0050251884247268	$2.565851975333544\times10^{-10}$
(4.12)	1.0050251884277908	$2.535212040299939\times10^{-10}$
(4.13)	1.0050251884252617	$2.5605029208009\times10^{-10}$
(4.14)	1.0050251884227324	$2.5857960217479103\times10^{-10}$
(4.15)	1.0050251884252615	$2.5605051412469493\times10^{-10}$
RK-2(2.10)	1.0050250228100317	$1.6587128026657183\times10^{-7}$
RK-3(2.11)	1.0050252013530787	$1.2671766747078864\times10^{-8}$
RK-4(2.13)	1.0050251886852704	$3.958389171998533\times10^{-12}$
RK-4(2,14)	1.0050251929065321	$4.225220173736943\times10^{-9}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.005025207945326	$1.926401393959054\times10^{-8}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050252068964727	$1.821516071309759\times10^{-8}$

ตารางที่ 4.11 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.001$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	x = 0.1, h =0.001 , True value y = 1.005025188681312	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050251873980258	$1.2832861440159604\times10^{-9}$
(4.11)	1.0050251886810533	$2.5868196473766147\times10^{-13}$
(4.12)	1.0050251886835846	$2.2726265314076954\times10^{-12}$
(4.13)	1.0050251886810535	$2.5845992013273644\times10^{-13}$
(4.14)	1.0050251886785222	$2.7897684162780934\times10^{-12}$
(4.15)	1.0050251886810535	$2.5845992013273644\times10^{-13}$
RK-2(2.10)	1.005025187364524	$1.3167880119624442\times10^{-9}$
RK-3(2.11)	1.0050251886939998	$1.2687850770021214\times10^{-11}$
RK-4(2.13)	1.0050251886813117	$2.220446049250313\times10^{-16}$
RK-4(2,14)	1.0050251886855408	$4.228839500797221\times10^{-12}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.0050251888786752	$1.9736323686458945\times10^{-10}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050251888679091	$1.8659718215019439\times10^{-10}$

ตารางที่ 4.12 ตารางผลเฉลยเมื่อ $h = 0.0001$ ของตัวอย่างที่ 3

Formula	$x = 0.1$, $h = 0.0001$, True value y = 1.005025188681312	
	Calculated y	Error
(4.10)	1.0050251886684816	$1.2830625450988009\times10^{-11}$
(4.11)	1.0050251886813106	$1.5543122344752192\times10^{-15}$
(4.12)	1.005025188683844	$2.531752585355207\times10^{-12}$
(4.13)	1.0050251886813106	$1.5543122344752192\times10^{-15}$
(4.14)	1.0050251886787815	$2.530642362330582\times10^{-12}$
(4.15)	1.0050251886813106	$1.5543122344752192\times10^{-15}$
RK-2(2.10)	1.0050251886684902	$1.2821965711395933\times10^{-11}$
RK-3(2.11)	1.0050251886813242	$1.199040866595169\times10^{-14}$
RK-4(2.13)	1.0050251886813115	$6.661338147750939\times10^{-16}$
RK-4(2,14)	1.0050251886813166	$4.440892098500626\times10^{-15}$
RK Fehlberg-5(2.16)	1.0050251886832866	$1.9744206269933784\times10^{-12}$
RK Fehlberg-6(2.17)	1.0050251886831876	$1.8753887331968144\times10^{-12}$

บทที่ 5
สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย

จากการใช้หลักความจริงที่ว่าปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นสมมูลกับสมการปริพันธ์แล้วจึงใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหาโดยใช้วิธีเกาส์-เลอจองด์นั้น เมื่อดูผลจากการทดลองจากตัวอย่างต่างๆ สรุปได้ว่าวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นโดยการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการปริพันธ์ที่สมมูลกันได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้ที่สนใจในงานด้านนี้สามารถหารูปแบบต่างๆ ในการหาผลเฉลยเพิ่มได้อีก เพื่อที่จะเลือกเอารูปแบบที่ได้พัฒนาขึ้นไปใช้งานได้ตามความเหมาะสมกับปัญหา อีกทั้งใช้รูปแบบต่างๆ ที่ได้ นำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นที่ผู้สนใจต้องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขได้ โดยใช้พหุนามตั้งฉากอื่นๆที่แตกต่างไปจาก Legendre Orthogonal Polynomials

รายการอ้างอิง

[1] รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข. "**การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**". ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2549

[2] Maitree Podisuk and Wannaporn Sanprasert, "**Numerical Integration Formulas for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equation**" .WSEAS Transanctions on Mathematics, Issue 1, Volume 4 . January 2005, Page 34-39

[3] Maitree Podisuk and Wannaporn Sanprasert, "**Integration Method for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equation**" KMITL SCIENCE JOURNAL, Volume 5, No.1 February 2005, Page 450-459

[4] Maitree Podisuk, Wannaporn Sanprasert and Chinda Chaichuay . "**Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equation of Higher Order by Integration Method** " Proceedings of the 9th International Conference on Applied Mathematics, Istanbul, Turkey, May 27-29, 2006, Page 530-535

[5] Maitree Podisuk, Wannaporn Sanprasert and Netchanok Kongchouy, " **Open Formula of Integration Method** " ,KMITL International Conference on Science and Applied Science, Bangkok, Thailand, March 8-10, 2006(will also be published in KMITL Science Journal)