

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

**แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส
และติดฟิล์มกรองแสง**

**SIMULATION OF HEAT TRANSFER WITHIN A ROOM
WITH PLAIN AND FILMED GLASS**



กิตติพงษ์ ศรีแบริ
เจนจิรา ทองคำขาว
นิติกร พุ่มโพธิ์

รฟ.
176742
958

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน..... 82788
เดือนปี..... 23 ก.ค. 2551

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2550

b. 11949396

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไป
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**SIMULATION OF HEAT TRANSFER WITHIN A ROOM
WITH PLAIN AND FILMED GLASS**



**A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2007**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสและติดฟิล์มกรองแสง

SIMULATION OF HEAT TRANSFER WITHIN A ROOM WITH PLAIN AND FILMED GLASS

ชื่อนักศึกษา นายกิตติพงษ์ ศรีแจไต 47050003

นางสาวเจนจิรา ทองคำขาว 47050007

นายนิติกร พุ่มโพธิ์ 47050017

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์


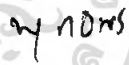


สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

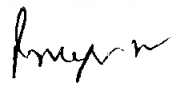
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล

ดร.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์

อาจารย์ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2550

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
รองศาสตราจารย์ผ่องพรรณ รัตนธนาวัฒน์ ประธานกรรมการ	
อาจารย์พุทธพร วานิชกร กรรมการ	
รองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
ดร.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	
อาจารย์ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์ กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	



(รองศาสตราจารย์ไพบูรณ์ พันธรักษ์พงษ์)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่คุณพ่อคุณแม่ผู้เป็นที่รัก
ขออุทิศให้กับบิดา-มารดา ผู้เป็นกำลังใจมาโดยตลอด
คณิตศาสตร์ประยุกต์

นาย กิตติพงษ์ ศรีแซไต
นางสาวเจนจิรา ทองคำขาว
นายนิติกร พุ่มโพธิ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	แบบจำลองการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสและติดฟิล์มกรองแสง	
ชื่อนักศึกษา	นายกิตติพงษ์ ศรีแจ้ไตร	47050003
	นางสาวเจนจิรา ทองคำขาว	47050007
	นายนิติกร พุ่มโพธิ์	47050017
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2550	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ภักดิณี ชิตสกุล	
	ดร.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์	
	อาจารย์ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์	

บทคัดย่อ

งานวิจัยชิ้นนี้ได้ศึกษาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องและอุณหภูมิภายในกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงซึ่งนำสมการทางคณิตศาสตร์ ที่เป็นสมการการนำความร้อนในระบบพิกัดฉาก 1 มิติ และ 2 มิติ มาประยุกต์ใช้ โดยหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference Method) และระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ (Finite Element Method) ซึ่งคำนวณได้จากโปรแกรมภาษาซีสร้างขึ้นตามหลักการของเทเลอร์กาลเลอร์คิน และนำมาตรวจสอบกับโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM และสมการแม่นยำตรง เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องพบว่าห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงจะมีอุณหภูมิต่ำกว่าห้องที่ติดกระจกใส รวมถึงเมื่อพิจารณาค่าใช้จ่ายที่สูญเสียไป โดยคำนวณจากโปรแกรม OTTVEE Version 1.0a จะเห็นได้ว่าห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงช่วยประหยัดค่าไฟฟ้าได้มากกว่า แต่การติดกระจกใสจะคุ้มทุนกว่าเมื่อพิจารณาช่วงระยะเวลาการใช้งานสั้นๆ เนื่องจากมีต้นทุนการผลิตต่ำกว่า

Special Project Title SIMULATION OF HEAT TRANSFER WITHIN A ROOM WITH PLAIN AND PLAIN GLASS

Students Mr.Kittipong Srihaltai 47050003
Mrs.Jenjira Thongkamkhaw 47050007
Mr.Nitikorn Pumpo 47050017

Degree Bachelor of Science

Department Mathematics and Computer Science, Faculty of Science

Programme Applied Mathematics

Academic Year 2007

Advisor Associate Professor Pakkinee Chitsakul
Dr.Jaipong Wangsawasdi
Ms.Sirikul Bunditsaovapak



ABSTRACT

This research studied heat transfer within a room with plain and filmed glass. Heat equations in 1-D and 2-D rectangular coordinate system are used, along with Finite Difference Method and Finite Element Method under Taylor-Galerkin principle. The simulation program has been developed to solve the problem, then rechecked with Easy FEM software and exact equation. As a result, the solutions are similar, especially the elaborated mesh. The temperature in the room with filmed glass is lower. According to OTTVEE version, the compute electrical cost of the room with filmed glass is lower. Hence, it would cost less in the long run.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องแบบจำลองการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมและระเบียบวิธีผลต่างชั้นประกอบอันจะสามารถสำเร็จล่วงไปด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ภักคินี ชิตสกุล คร.ใจปอง วงษ์สวัสดิ์ และอาจารย์ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์ ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาดังกล่าว รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณ โครงการ โครงงานอุตสาหกรรมสำหรับปริญญาตรี (IRPUS) ประจำปี 2250 ภายใต้การสนับสนุนของสำนักงานกองทุนสนับสนุนการวิจัยฝ่ายอุตสาหกรรมที่ให้ทุนสนับสนุนการทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้

ท้ายสุดนี้คณะผู้จัดทำขอขอบพระคุณบิดามารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนอนุเคราะห์ทางด้านทุนทรัพย์และกำลังใจจนการทำปัญหาพิเศษครั้งนี้สำเร็จด้วยดี รวมทั้งเพื่อน ๆ พี่ ๆ และน้อง ๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่าง ๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้



สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	ii
กิตติกรรมประกาศ.....	iii
สารบัญ.....	iv
สารบัญรูปภาพ.....	vii
สารบัญตาราง.....	ix
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา.....	2
1.4 ขั้นตอนของงานวิจัย.....	2
1.5 ส่วนประกอบของปัญหาพิเศษ.....	3
1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....	3
บทที่ 2 ทฤษฎีเกี่ยวกับความร้อน (Heat Transfer).....	4
2.1 การถ่ายเทความร้อน.....	4
2.2 ประเภทของกระเจกใสและฟิล์มกรองแสง.....	5
2.3 กระเจกใสและฟิล์มกรองแสงที่นำมาใช้ในปัญหาพิเศษฉบับนี้.....	11
2.4 ข้อมูลของอุณหภูมิกวามร้อน โดยเฉลี่ย.....	12
บทที่ 3 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข.....	15
3.1 ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ.....	15
3.2 ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข.....	22
3.3 สมการพาราโบลา.....	23
3.4 อนุกรมฟูเรียร์.....	27
3.5 ปัญหาการนำความร้อนในสภาวะไม่คงตัวในหนึ่งมิติ.....	30
3.6 ทฤษฎีและหลักการของระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันดับ.....	32
3.7 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และการอินทิเกรตเอลิเมนต์ เมทริกซ์เชิงตัวเลข.....	47
3.8 เทคนิคการหาค่าตอบของระบบสมการเชิงเส้น.....	49

สารบัญญ(ต่อ)

	หน้า
3.9 ปัญหาการสมการความร้อน.....	53
บทที่ 4 ผลการวิจัยค่านินงาน.....	75
4.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยหลักการของ TaylorGalerkin.....	76
4.2 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม.....	84
4.3 ผลการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของโปรแกรมภาษาซี.....	90
4.4 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของโปรแกรมภาษาซี กับผลเฉลยจริง.....	99
4.5 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจากโปรแกรมภาษาซี.....	103
4.6 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจากโปรแกรมภาษาซีกับ โปรแกรมสำเร็จรูปEasy FEM.....	104
4.7 การคำนวณค่าใช้จ่ายภายในห้องที่ความร้อนผ่านกระจกใสและ กระจกติดฟิล์มกรอง แสง.....	108
4.8 ประโยชน์ต่อผู้บริโภครและผู้ประกอบการ.....	116
บทที่ 5 สรุปและข้อเสนอแนะ.....	117
5.1 สรุปผล.....	117
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	117
รายการอ้างอิง.....	118
ภาคผนวก	

สารบัญรูปภาพ

รูปที่	หน้า
2.1 การถ่ายเทความร้อน.....	4
2.2 แสดงการสะท้อนของแสง.....	5
3.1 แสดงการประมาณค่าโดยตรงของอนุพันธ์.....	16
3.2 แสดงระบบ Grid ที่มีระยะห่างเท่าๆกัน.....	18
3.3 แสดงการกระจายความร้อนตามแนวยาวของโลหะ.....	23
3.4 แสดงเงื่อนไขขอบเขตที่อุณหภูมิของผิวผนังมีค่าคงที่.....	25
3.5 แสดงอัตราการนำความร้อนมีค่าคงที่ที่ผนัง.....	25
3.6 แสดงเงื่อนไขขอบเขตกรณีผิวของผนังถูกหุ้มด้วยฉนวน.....	26
3.7 แสดงเงื่อนไขขอบเขตเมื่อมีการถ่ายเทความร้อนโดยการพาความร้อนที่ผิวของผนังเข้าสู่ ตัวกลาง.....	26
3.8 แสดงถึงลักษณะของแผ่นอะลูมิเนียม.....	32
3.9 แสดงให้เห็นว่าตารางสี่เหลี่ยมที่ใช้ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง.....	33
3.10 การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียมด้วยการใช้ระเบียบวิธีจันประกอบอันตะ.....	34
3.11 แสดงถึงการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่าง ๆ.....	35
3.12 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่าง ประกอบด้วยสามจุดต่อ.....	36
3.13 การแบ่งขอบเขตออกเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์ย่อย.....	38
3.14 เอลิเมนต์สามเหลี่ยม.....	38
3.15 ตัวอย่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม.....	39
3.16 ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์.....	40
3.17 ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณภายในเอลิเมนต์.....	41
3.18 การแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์.....	45
3.19 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม.....	47
3.20 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมอันดับสูงที่ประกอบด้วยหลายจุดต่อ.....	48
3.21 แสดงแบบจำลองของห้องใน 3 มิติ.....	53
3.22 แสดงการนำความร้อนผ่านกระจก.....	53
3.23 แสดงการไหลของความร้อนใน 2 มิติ.....	56
3.24 แสดงการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัว.....	57
3.25 แสดงผิวด้านข้างของผนังที่ติดกระจก.....	58

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.26 แสดงการแบ่งขอบเขตของปัญหาโดยวิธีผลต่างอันตะ.....	59
3.27 แสดงการเลือกปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน.....	62
3.28 แสดงการแบ่งขอบเขตเป็นเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม.....	62
3.29 แสดงการกระจายของอุณหภูมิ.....	64
3.30 แสดงผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะ และระเบียบวิธีจึ้นประกอบอันตะเมื่อความร้อนผ่านกระจก.....	66
3.31 แสดงผิวด้านข้างของผนังที่ติดกระจก.....	66
3.32 แสดงการแบ่งขอบเขตของปัญหาโดยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรน.....	68
3.33 ผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะ และระเบียบวิธีจึ้นประกอบอันตะ เมื่อความร้อนผ่านฟิล์มกรองแสง.....	73
3.34 แสดงอุณหภูมิของกระจกและกระจกติดฟิล์มกรองแสงโดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ.....	73
3.35 แสดงอุณหภูมิของกระจกและกระจกติดฟิล์มกรองแสงโดยระเบียบวิธีจึ้นประกอบอันตะ....	74
4.1 Flowchart ของโปรแกรมการ Gengrid.....	84
4.2 Flowchart ของโปรแกรมคำนวณหาอุณหภูมิ ณ จุดต่างๆ.....	85
4.3 แสดงการคำนวณและการสร้าง Element.....	87
4.4 ขั้นตอนการทำงานทั้งหมดของโปรแกรมภาษาซี.....	89
4.5 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกใตที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5.....	90
4.6 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกใตที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10.....	90
4.7 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกใตที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15.....	91
4.8 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5.....	92
4.9 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10.....	92
4.10 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15.....	93
4.11 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใตที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5.....	94
4.12 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใตที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10.....	94
4.13 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใตที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20.....	95
4.14 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5.....	96
4.15 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10.....	96

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปที่	หน้า
4.16 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20.....	97
4.17 ผลการเปรียบเทียบอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในกระจกใส โดย โปรแกรมภาษาซีและ ผลเฉลยจริง.....	98
4.18 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในฟิล์มกรองแสง โดย โปรแกรมภาษาซีและ ผลเฉลยจริง.....	99
4.19 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในห้องที่ติดกระจกใส โดย โปรแกรมภาษาซีและ ผลเฉลยจริง.....	100
4.20 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดย โปรแกรมภาษาซีและผลเฉลยจริง.....	101
4.21 อุณหภูมิภายในกระจกใสและฟิล์มกรองแสง โดย โปรแกรมภาษาซี.....	102
4.22 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้อง.....	102
4.23 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใส.....	103
4.24 กราฟแสดงเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกติดฟิล์มกรอง.....	104
4.25 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส.....	105
4.26 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติด ฟิล์มกรองแสง.....	105
4.27 แสดงการป้อนค่าข้อมูลของห้อง.....	107
4.28 แสดงการป้อนข้อมูลของผนังห้องด้านต่างๆ.....	108
4.29 แสดงการป้อนอุณหภูมิภายในห้อง.....	108
4.30 แสดงการการคำนวณการใช้พลังงานของอาคาร.....	109
4.31 แสดงค่าไฟฟ้าภายในห้องที่ผ่านกระจกใสตลอดระยะเวลา 1 ปี.....	109
4.32 แสดงค่าไฟฟ้าภายในห้องที่ผ่านกระจกติดฟิล์มกรองแสงตลอดระยะเวลา 1 ปี.....	110
4.33 แสดงการเปรียบเทียบค่าใช้จ่ายรายเดือนระหว่างกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง.....	112
4.34 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารของกระจกใส.....	112
4.35 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารของกระจกติดฟิล์มกรองแสง.....	112

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ในปัจจุบันพบว่าปัญหาโลกร้อนจากดวงอาทิตย์ มีผลกระทบต่อการดำเนินชีวิตในปัจจุบัน ดังเห็นได้จากที่อยู่อาศัย อาคาร หอพัก หรือแม้แต่รถยนต์ จะเห็นได้ว่าการติดกระจกใสหรือฟิล์มกรองแสง เพื่อช่วยลดความร้อนจากภายนอกที่มีผลกระทบต่อการดำเนินชีวิต ดังนั้นจึงเป็นที่มาของปัญหาที่เรานำมาศึกษาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องและอุณหภูมิภายในกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงซึ่งนำสมการทางคณิตศาสตร์ ที่เป็นสมการการนำความร้อนในระบบพิกัดฉาก 1 มิติ และ 2 มิติมาประยุกต์ใช้ โดยหาผลเฉลยด้วยระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite Difference) ระเบียบวิธีจุ่มประกอบอันตะ (Finite Element) และพัฒนาโปรแกรมภาษาซีที่สร้างขึ้นตามหลักการของเทเลอร์กาลีเลอริคิน รวมถึงพิจารณาค่าใช้จ่ายที่สูญเสียไป โดยคำนวณจากโปรแกรม OTTVEE Version 1.0a จากปัญหาทั้งสองกรณี เราจะพิจารณาอุณหภูมิภายในห้องด้วย หมายถึงเรากำหนดให้อุณหภูมิเริ่มต้นภายในห้องที่ติดเครื่องปรับอากาศ คงที่ 25°C ในการศึกษาปัญหาทั้งสองกรณีดังกล่าวได้อาศัยสมการตั้งต้น โดยใช้สมการความร้อนในระบบพิกัดฉาก 1 มิติ และ 2 มิติ ดังต่อไปนี้

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

เมื่อ c^2 ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ซึ่ง $c^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$

เรียกว่า k ค่าสภาพนำความร้อน (Thermal Conductivity)

γ เป็นความร้อนจำเพาะของวัตถุ

ρ เป็นความหนาแน่นของวัตถุ

1.2 วัตถุประสงค์

1.2.1 เพื่อศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในกระจกใส

1.2.2 เพื่อศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสง

1.2.3 เพื่อศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในห้องเมื่อความร้อนผ่านกระจกใส

1.2.4 เพื่อศึกษาอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในห้องเมื่อความร้อนผ่านกระจกติด

ฟิล์มกรองแสง

1.2.5 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีผลต่างอันตะและระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะในการแก้ปัญหา 2 ปัญหา

1.2.6 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะเพื่อนำมาใช้เขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1.3.1 กำหนดให้อัตราการแพร่กระจายของความร้อนภายในกระจกใส ความร้อนสามารถผ่านได้ 100 % โดยศึกษาในกรณีที่อุณหภูมิภายในจะเปลี่ยนแปลงตามเวลาโดยมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของกระจกใสมีค่าเท่ากับ 4.27×10^{-5} เมตร²/วินาที

1.3.2 กำหนดให้อัตราการแพร่กระจายของความร้อนภายในฟิล์มกรองแสง โดยฟิล์มกรองแสงที่ใช้พิจารณาเป็นฟิล์มกรองแสงประเภท ฟิล์มเคลือบอนุภาคโลหะ (Metal Sputtering Film) ซึ่งมีเปอร์เซ็นต์การกรองแสงได้ถึง 70% และมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 12.18×10^{-5} เมตร²/วินาที

1.3.3 ศึกษาปัญหาภายในห้องซึ่งมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของอากาศภายในห้องเท่ากับ 1.9900497×10^{-5} เมตร²/วินาที โดยที่ภายในห้องมีอุณหภูมิคงที่ที่ 25°C และผนังห้องของด้านที่เหลือเป็นฉนวนไม่นำความร้อน และไม่มีการถ่ายเทความร้อน ซึ่งการแพร่กระจายของอุณหภูมิภายในห้องขึ้นอยู่กับตำแหน่งภายในห้อง

1.3.4 กำหนดให้ช่องว่างระหว่างฟิล์มกับกระจกไม่มีผลกระทบต่อ การนำความร้อน

1.3.5 ความร้อนจากภายนอกที่เราศึกษา จะศึกษาความร้อนในช่วงที่มีความร้อนเฉลี่ยเดือนกรกฎาคม พ.ศ.2550

1.4 ขั้นตอนของงานวิจัย

1.4.1 กำหนดปัญหาและวางขอบเขตของปัญหา

1.4.2 ศึกษาปัญหาและขอบเขตของปัญหา

1.4.3 ศึกษาระเบียบวิธีผลต่างอันตะและระเบียบวิธีผลต่างขึ้นประกอบอันตะ

1.4.4 นำปัญหาที่ศึกษามาเขียน โปรแกรมเพื่อหาผลเฉลย

1.4.5 ทดสอบปัญหาที่ได้ศึกษา

1.4.6 ปรับปรุงแก้ไขปัญหาและ โปรแกรม

1.4.7 จัดทำเอกสารรายงาน

1.5 ส่วนประกอบของปัญหาพิเศษ

ส่วนประกอบของปัญหาพิเศษแบ่งเป็นบทต่าง ๆ ดังนี้

บทที่ 1 บทนำซึ่งประกอบด้วยความสำคัญและที่มาของปัญหา วัตถุประสงค์ในการศึกษา เจาะใจขอบเขตของปัญหา ขั้นตอนการวิจัย ส่วนประกอบในบทต่างๆของปัญหาพิเศษ และ ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

บทที่ 2 ทฤษฎีการถ่ายเทความร้อน ลักษณะและคุณสมบัติของกระจกใสและฟิล์มกรองแสง และข้อมูลอุณหภูมิความร้อนจากดวงอาทิตย์ที่มีอิทธิพลต่อพื้นที่ในเขตกรุงเทพมหานคร ช่วง วันที่ 1-31 กรกฎาคม พ.ศ.2550

บทที่ 3 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทฤษฎีและหลักการของระเบียบวิธีผลต่างอันดับสอง เปรียบเทียบ ข้อแตกต่างระหว่างระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมและระเบียบวิธีผลต่างขั้นประกอบอันดับสอง แสดง ขั้นตอนทั่วไปของวิธีการผลต่างขั้นประกอบอันดับสองและการสร้างสมการผลต่างขั้นประกอบอันดับสอง ด้วยวิธีต่าง ๆ รวมถึงการเลือกลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

บทที่ 4 ขั้นตอนและผลการพัฒนาโปรแกรม แสดงตัวอย่างการทำงานของโปรแกรม สำหรับการแก้ปัญหาสมการความร้อน โดยระเบียบวิธีขั้นประกอบอันดับสองและการคำนวณค่าใช้จ่าย

บทที่ 5 การประเมินประสิทธิผลของโปรแกรมสำหรับการแก้ปัญหาสมการ PDE โดย เปรียบเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM สรุปผลการพัฒนาปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะในการพัฒนาปัญหาพิเศษฉบับนี้ต่อไปในอนาคต

1.6 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.6.1 ทำให้ผู้วิจัยสามารถนำความรู้ทางการ โปรแกรม ระเบียบวิธีผลต่างอันดับสอง และระเบียบวิธีผลต่างขั้นประกอบอันดับสองมาประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันที่เกิดขึ้นจริงได้

1.6.2 ทำให้ผู้วิจัยได้รับความรู้เพิ่มเติมจากการศึกษาระเบียบวิธีผลต่างอันดับสองและระเบียบวิธีผลต่างขั้นประกอบอันดับสอง

1.6.3 ทำให้ทราบถึงผลกระทบที่เกิดขึ้นระหว่างการติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง รวมทั้งตระหนักถึงความสำคัญของการใช้พลังงานให้คุ้มค่า

1.6.4 เป็นแนวทางช่วยในการตัดสินใจเลือกกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงให้เหมาะสมกับความต้องการของผู้บริโภค ทั้งในด้านการใช้งานและค่าใช้จ่าย

1.6.5 สามารถนำความรู้ที่ได้จากการศึกษาไปใช้เป็นแนวทางในการพัฒนาแบบจำลองที่ซับซ้อนในงานวิจัยระดับสูงได้

บทที่ 2

ทฤษฎีเกี่ยวกับความร้อน

ในบทที่ 2 ของปัญหาพิเศษฉบับนี้จะกล่าวถึง วิธีการถ่ายเทความร้อน คุณสมบัติต่างๆของ กระจกใส และกระจกติดฟิล์มกรองแสง และได้ทำการเก็บข้อมูลค่าความร้อนเพื่อหาค่าความร้อน โดยเฉลี่ยจากดวงอาทิตย์ของกรุงเทพมหานครที่มีอิทธิพลต่ออุณหภูมิภายในห้องซึ่งจะได้กล่าวถึง รายละเอียดต่างๆดังต่อไปนี้

2.1 การถ่ายเทความร้อน

ลักษณะการถ่ายเทความร้อนแบ่งออกเป็น 3 ชนิดคือ การนำความร้อน การพาความร้อน และการแผ่รังสี แต่ทว่าในความเป็นจริงการถ่ายเทความร้อนทั้งสามชนิดอาจเกิดขึ้นพร้อมๆกันอย่างไม่แยกไม่ออก



รูปที่ 2.1 การถ่ายเทความร้อน

- การนำความร้อน (Conduction) เป็นการถ่ายเทความร้อนจากโมเลกุล ไปสู่อีกโมเลกุลหนึ่งซึ่งอยู่ติดกันไปเรื่อยๆ จากอุณหภูมิสูงไปสู่อุณหภูมิต่ำ ยกตัวอย่างเช่น หากเราจับทัพพีในหม้อหุงข้าว ความร้อนจะเคลื่อนที่ผ่านทัพพีมายังมือของเรา ทำให้เรารู้สึกร้อน โลหะเป็นตัวนำความร้อนที่ดี อโลหะและอากาศเป็นตัวนำความร้อนที่เลว

- การพาความร้อน (Convection) เป็นการถ่ายเทความร้อนด้วยการเคลื่อนที่ของอะตอม และ โมเลกุลของสสารซึ่งมีสถานะเป็นของเหลวและก๊าซ ส่วนของแข็งนั้นจะมีการถ่ายเทความร้อนด้วยการนำความร้อน และการแผ่รังสีเท่านั้น การพาความร้อนจึงมักเกิดขึ้นในบรรยากาศ และ มหาสมุทร รวมทั้งภายในโลก และดวงอาทิตย์

รูปที่2 แสดงให้เห็นถึงธรรมชาติของวัฏจักรการพาความร้อน การแผ่รังสีจากกองไฟทำให้เกิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความร้อนที่ก้นหม้อน้ำด้านนอก โลหะทำให้เกิดการนำความร้อนเข้าสู่ภายในหม้อ ทำให้น้ำที่อยู่เบื้องล่างร้อนและขยายตัว ความหนาแน่นต่ำจึงลอยขึ้นสู่ข้างบน ทำให้น้ำเย็นความหนาแน่นสูงซึ่งอยู่ด้านบนเคลื่อนตัวลงมาแทนที่ เมื่อน้ำเย็นที่เคลื่อนลงมาได้รับความร้อนเบื้องล่าง ก็จะลอยขึ้นหมุนวนเป็นวัฏจักรต่อเนื่องกันไป ซึ่งเรียกว่า “วัฏจักรการพาความร้อน”

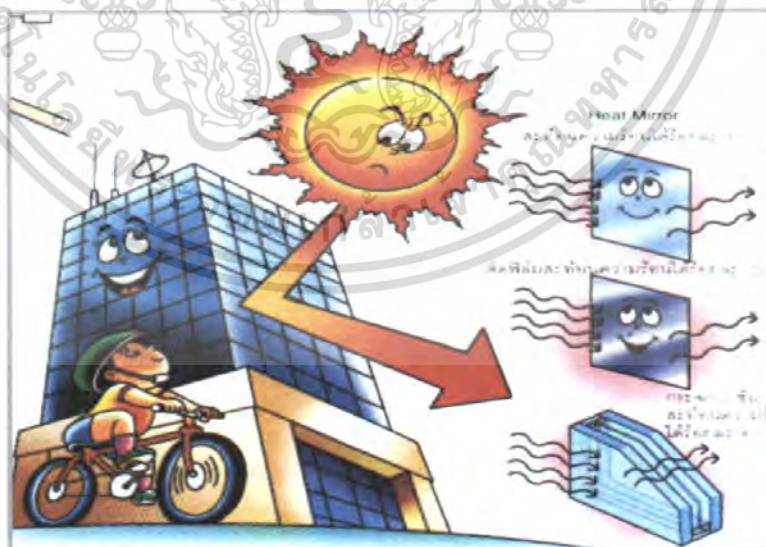
(Convection circulation)

- การแผ่รังสี (Radiation) เป็นการถ่ายเทความร้อนออกรอบตัวทุกทิศทุกทาง โดยไม่ต้องอาศัยตัวกลางในการส่งถ่ายพลังงาน ดังเช่น การนำความร้อน และการพาความร้อน การแผ่รังสีสามารถถ่ายเทความร้อนผ่านอวกาศได้ วัตถุทุกชนิดที่มีอุณหภูมิสูงกว่า -273°C หรือ 0 K (เคลวิน) ย่อมมีการแผ่รังสี วัตถุที่มีอุณหภูมิสูงแผ่รังสีคลื่นสั้น วัตถุที่มีอุณหภูมิต่ำแผ่รังสีคลื่นยาว

2.2 ประเภทของกระจกและฟิล์มกรองแสง

2.2.1 กระจก (Clear Glass)

ผนังกระจกที่สามารถป้องกันความร้อนได้ดีแต่ให้แสงที่ช่วยในการมองเห็นผ่านได้มาก เช่น กระจกสะท้อนความร้อน (Heat Mirror) จะช่วยสะท้อนความร้อนได้ประมาณร้อยละ 60 กระจกติดฟิล์มสะท้อนความร้อน โดยติดกระจกด้านในอาคารจะช่วยสะท้อนความร้อนได้ถึงประมาณร้อยละ 72 กระจก 2 ชั้น โดยที่ผิวด้านในของกระจกชั้นนอกจะมีแผ่นฟิล์มเคลือบสารที่มีรังสีต่ำ ตรงกลางจะเป็นช่องว่างอากาศซึ่งทำหน้าที่เป็นฉนวนอีกชั้นหนึ่ง ส่วนกระจกชั้นในที่อยู่ด้านในของอาคารเป็นกระจกใสธรรมดาช่วยสะท้อนความร้อนประมาณร้อยละ 80



รูปที่ 2.2 แสดงการสะท้อนของแสง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราสามารถแบ่งประเภทของกระจกได้เป็น 5 ประเภท ดังนี้

2.2.1.1 กระจกธรรมดา (Float Glass) กระจกธรรมดาเป็นกระจกพื้นฐานที่เกิดขึ้นจากกระบวนการผลิตโดยตรง แบ่งออกเป็น 2 ชนิด ซึ่งมีรายละเอียด และข้อพิจารณาในการนำไปใช้งาน ดังนี้

1) กระจกใส (Clear Glass) กระจกใสคือกระจกโปร่งแสงที่สามารถมองผ่านได้อย่างชัดเจนและให้ภาพสะท้อนที่สมบุรณ์ ไม่บิดเบี้ยว

คุณสมบัติของกระจกใส

- 1) สามารถมองเห็นจากภายนอกเข้ามาภายในได้อย่างชัดเจน
- 2) มีค่าการตัดแสงประมาณ 8% สำหรับกระจกใสหนา 12 มิลลิเมตร และตัดแสงได้มากขึ้นตามความหนาของกระจก
- 3) มีค่าการสะท้อนแสงประมาณ 7%
- 4) ผิวกระจกไม่ร้อน เพราะกระจกดูดกลืนความร้อนได้น้อยมาก

2) กระจกสี (Tinted Glass) ผลิตขึ้นโดยการผสมโลหะออกไซด์เข้าไปในส่วนผสม ในขั้นตอนการผลิตกระจก ทำให้กระจกมีสีสีน

คุณสมบัติของกระจกสี

- 1) ผิวกระจกร้อน เนื่องจากสีของเนื้อกระจกที่เกิดจากการเติมโลหะออกไซด์ต่างๆเป็นตัวดูดความร้อนทำให้ความร้อนจากกระจกแผ่เข้ามาภายในอาคาร
- 2) ตัดแสงไม่ให้เข้ามาภายในอาคารมาก กระจกสีมีค่าสัมประสิทธิ์เปรียบเทียบการบังแดดต่ำกว่ากระจกใสมากเมื่อค่าสัมประสิทธิ์การบังแดดต่ำมากๆ แสงเข้าน้อยทำให้ความร้อนเข้ามาได้น้อยด้วย
- 3) สามารถ สกักกั้นความร้อนจากแสงอาทิตย์ ที่ตกกระทบกระจกสีได้มากกว่ากระจกใส ปริมาณการดูดกลืนความร้อนขึ้นอยู่กับส่วนผสมของเนื้อกระจก ซึ่งสามารถผลิตให้มีการสกักกั้นรังสีอาทิตย์ได้หลายระดับ แต่ผิวกระจกจะร้อนขึ้นเมื่อมีการสกักกั้นรังสีมาก
- 4) ช่วยลดความจ้าของแสงที่ส่งผ่านกระจกสีทำให้ได้แสงที่นุ่มนวลและเกิดความสบายตาในการมอง

2.2.1.2) กระจกอบความร้อน (Heat Treated Glass) กระจกอบความร้อนหรือกระจกสีที่นำไปผ่าน กระบวนการปรับแต่งคุณภาพของเนื้อกระจก เพื่อให้มีความแข็งแรงมากขึ้น หรือรับแรงกระทำจากแรงภายนอกได้มากขึ้น แบ่งออกเป็น 2 ชนิดดังนี้

3.1) กระจกนิรภัยเทมเปอเรอร์ (Tempered Glass) กระจกนิรภัยเทมเปอเรอร์เป็นการนำกระจกไปผ่าน กระบวนการเทมเปอริง (Tempering) เพื่อเพิ่มความแข็งแรง โดยใช้หลักการเกี่ยวกับการทำคอนกรีตอัดแรง คือสร้างให้เกิดชั้นของแรงอัดขึ้นที่ผิวแก้วเพื่อต้านแรงจากภายนอก วิธีการนี้ทำได้โดยให้ความร้อนกับกระจกที่อุณหภูมิสูงกว่าจุดอ่อนตัวของแก้วเล็กน้อยที่ประมาณ 650-700 องศา

เซลเซียส และทำให้ผิวกระจกเกิดความเย็นตัวอย่างรวดเร็ว โดยใช้ลมเย็นเป่า ผลของความแตกต่างของอุณหภูมิระหว่างผิวนอกกับส่วนกลางของแผ่นกระจกจะทำให้เกิดชั้นของแรงอัดขึ้นที่ผิวของกระจกทั้ง 2 ด้าน โดยจะประกบชั้นส่วนกลางเหมือนลักษณะแซนวิช และชั้นที่ผิวนี้อันจะด้านแรงจากภายนอกทำให้กระจกที่ผ่านกระบวนการเทมเปอร์ริงแล้วมีความแข็งแรงเพิ่มขึ้นประมาณ 4 เท่า คุณสมบัติของกระจกอบความร้อน

1) ค่าความแข็งแรงต่อแรงดึงและแรงที่ทำให้หักงอ(Bending Strength) เมื่อเปรียบเทียบกับกระจกธรรมดาที่กระจกนิรภัยเทมเปอร์ที่มีความหนา 5 มิลลิเมตร กระจกธรรมดามีค่าความแข็งแรงต่อแรงดึงและแรงที่ทำให้กระจกหักงอ 500-650 กิโลกรัม/ตารางเซนติเมตร ในกระจกนิรภัยเทมเปอร์มีค่าสูงถึง 1,500 กิโลกรัม/ตารางเซนติเมตร

2) การต้านทานน้ำหนัก(Loading Resistance) คือความต้านทานต่อแรงดันและแรงกระแทกโดยแบ่งออกเป็น

- การต้านทานน้ำหนักหรือสถิต (Static Load Resistance)คือแรงที่มากระทบกระจก กระจกนิรภัยเทมเปอร์สามารถทนต่อแรงกระทบ ได้มากกว่ากระจกธรรมดาที่มีความหนาเดียวกันประมาณ 3-5 เท่า

- การต้านทานน้ำหนักกระแทก(Impact Load Resistance)คือความทนทานของกระจกต่อแรงกระแทกโดยทั่วไปกระจกนิรภัยเทมเปอร์สามารถรับแรงกระแทกได้ดี ได้ดีกว่ากระจกธรรมดาประมาณ 4 เท่า

3) ความปลอดภัยคือ การลดอันตรายที่จะเกิดจากการ โคนกระจกบาด เพราะการแตกของกระจกนิรภัย จะแตกออกเป็นเม็ดเล็กๆและมีความคมน้อย

4) การต้านทานความร้อน(Heat Resistance) คือความทนทานของกระจกต่อสภาวะการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิแบบทันทีทันใดจากการทดสอบความสามารถในการต้านทานความร้อนของกระจกนิรภัยเทมเปอร์เปรียบเทียบกับกระจกธรรมดาที่มีความหนามิลลิเมตรเท่ากัน มีผลการทดสอบดังต่อไปนี้

- กระจกนิรภัยเทมเปอร์สามารถทนต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิได้ที่ค่าความแตกต่างของอุณหภูมิสูงถึงประมาณ 170 องศาเซลเซียส และจะเริ่มแตกทั้งหมดเมื่ออุณหภูมิสูงถึงประมาณ 220 องศาเซลเซียส

- กระจกธรรมดาสามารถทนต่อการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิได้ที่ค่าความแตกต่างของอุณหภูมิเพียงประมาณ 60 องศาเซลเซียสและจะแตกทั้งหมดเมื่อค่าความแตกต่างของอุณหภูมิสูงขึ้นจนถึงประมาณ 100 องศาเซลเซียส

2.2.1.3) กระจกฮีตสเตรงเทน (Heat Strengthen Glass)

กระจกฮีตสเตรงเทน เป็นกระจกที่ได้จากกระบวนการผลิตที่คล้ายกับกระจกนิรภัยเทมเปอร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่ต่างกันที่กระจกสีตรงตรงแทนจะปล่อยให้กระจกเป็นตัวลงอย่างช้าๆจึงมีความแข็งแรงกว่ากระจกนิรภัยเทมเปอร์

คุณสมบัติของกระจกสีตรงแทน

- 1) เป็นกระจกกึ่งนิรภัย มีคุณสมบัติพิเศษคือ แข็งแกร่งกว่ากระจกธรรมดาประมาณ 2 เท่า
- 2) เหมาะสำหรับการป้องกันการแตกของกระจกจากความร้อน
- 3) ลักษณะการแตกของกระจกชนิดนี้ จะแตกเป็นแผ่นเหมือนกระจกธรรมดา

2.2.1.4) กระจกเคลือบผิว (Surface Coated Glass) กระจกเคลือบผิวเป็นกระจกธรรมดาที่นำไปผ่านกระบวนการเคลือบโลหะบนผิวกระจก เพื่อให้เกิดการสะท้อนแสง และความร้อนจากแสงอาทิตย์ สำหรับนำไปใช้งานในด้านการประหยัดพลังงานได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถแบ่งตามรูปแบบของการเคลือบผิวได้เป็น 2 ชนิดได้แก่

1) กระจกสะท้อนรังสีอาทิตย์ (Solar Reflective Glass) กระจกสะท้อนรังสีอาทิตย์เป็นกระจกธรรมดาที่เคลือบด้วยโลหะออกไซด์มีค่าความสะท้อนแสงค่อนข้างสูงความโปร่งแสงค่อนข้างน้อย มีสีส้มสวยงามหลายสีที่แตกต่างกันขึ้นอยู่กับรูปแบบการเคลือบและสีของกระจกที่เป็นวัตถุดิบที่นำมาเคลือบ

คุณสมบัติของกระจกสะท้อนรังสีอาทิตย์

- 1) ทำให้แสงอาทิตย์และรังสีความร้อนผ่านเข้ามาในอาคารได้น้อย
- 2) ช่วยลดแสงที่แรงจ้าให้นุ่มนวลลงทำให้เกิดความสบายตา
- 3) สร้างความเป็นส่วนตัวให้กับคนภายในอาคาร เนื่องจากมองเห็นทะลุเข้ามาในตัวอาคารได้ลำบาก

2) กระจกที่มีสภาพการแผ่รังสีต่ำ กระจกที่มีสภาพการแผ่รังสีต่ำเป็นกระจกเคลือบสารโลหะ โดยมีโลหะเงินบริสุทธิ์เป็นองค์ประกอบ

คุณสมบัติของกระจกที่มีสภาพการแผ่รังสีต่ำ

- 1) ป้องกันการถ่ายเทความร้อนผ่านกระจกได้ดี
- 2) ขอมให้แสงผ่านได้มากกว่ากระจกสะท้อนแสง
- 3) ช่วยสะท้อนรังสีอัลตราไวโอเล็ต(UV) ได้บางส่วน ปริมาณการสะท้อนขึ้นอยู่กับผู้ผลิตทำให้ลดความเสียหายซึ่งอาจเกิดกับพรมและเฟอร์นิเจอร์ต่างๆได้ระดับหนึ่ง
- 4) ช่วยลดความจ้าของแสง

2.2.1.5) กระจกตัดแปด (Processed Glass) กระจกตัดแปดเป็นกระจกที่นำมาตัดแปดด้วยกระบวนการต่างๆเพื่อตอบสนองการใช้งานที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งกระจกตัดแปดนี้สามารถแบ่งออกเป็น 3 ชนิดคือ

1) กระจกฉนวนกันความร้อน (Insulated Glass) กระจกฉนวนกันความร้อนผลิตโดยการนำกระจกอย่างน้อย 2 แผ่น ตัดให้ได้ขนาดตามต้องการมาประกบกันโดยมีอลูมิเนียมซึ่งบรรจุสารดูดซับความชื้นคั่นกลาง หลังจากนั้นจะปิดรอยที่ขอบกระจกผลก็คือ อากาศภายในช่องระหว่างกระจกจะกลายเป็นอากาศที่แห้งไม่มีความชื้นเหลืออยู่ซึ่งมีคุณสมบัติในการป้องกันความร้อน

คุณสมบัติกระจกฉนวนกันความร้อน

- 1) ป้องกันการถ่ายเทความร้อนจากภายนอกเข้ามาในอาคาร ทำให้ลดการใช้พลังงานไฟฟ้าจากเครื่องปรับอากาศ
- 2) ช่วยลดเสียงรบกวนจากภายนอกอาคาร ได้ดีกว่ากระจกธรรมดา
- 3) สามารถปรับแรงดันลมได้เพิ่มขึ้น
- 4) ให้ความปลอดภัยในอาคาร ในกรณีที่ใช้กระจกนิรภัยเทมเปอร์ หรือกระจกนิรภัยหลายชั้นมาผลิตเป็นกระจกฉนวนกันความร้อน

2.2.1.6) กระจกฮีตมิเรอร์ (Heat Mirror) ลักษณะของกระจกฮีตมิเรอร์เป็นระบบของกระจกสองชั้นที่เคลือบสารที่มีสภาพการแผ่รังสีต่ำทั้ง 2 ด้านของฟิล์มที่อยู่ระหว่างช่องอากาศ โดยที่ช่องว่างอากาศทั้งสองข้างจะกลายเป็นช่องว่างอากาศสะท้อนรังสี คุณสมบัติกระจกฮีตมิเรอร์

- 1) สามารถสะท้อนความร้อนออกไปจากกระจกได้มากถึงประมาณ 80% หรือยอมให้ความร้อนส่งผ่านเข้ามาเพียง 10% ที่เหลืออยู่ 10% จะถูกดูดกลืนเข้าไปในกระจก
- 2) ยอมให้แสงสว่างผ่านเข้ามาได้ดี ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับทางเลือกใช้องค์ประกอบของกระจกและฟิล์ม
- 3) ป้องกันรังสีอัลตราไวโอเล็ต โดยสะท้อนรังสีอัลตราไวโอเล็ตประมาณ 98%

2.2.1.7) กระจกฮีตสต็อป (Heat Stop) กระจกฮีตสต็อปมีลักษณะเป็นกระจกสองชั้นประกอบขึ้นด้วยกระจกสะท้อนแสงที่เคลือบด้วยสารที่มีสภาพการแผ่รังสีต่ำเป็นกระจกด้านนอก และด้านในใช้กระจกใส สารที่เคลือบนั้นสามารถป้องกันความร้อนอินฟราเรดให้ผ่านเข้ามาได้เพียง 5% ช่องว่างตรงกลางใส่ก๊าซอาร์กอน

คุณสมบัติกระจกฮีตสต็อป

- 1) สามารถสะท้อนความร้อนออกไปจากกระจกได้มาก
- 2) ยอมให้แสงสว่างผ่านกระจกเข้ามามากถึงประมาณ 60%
- 3) ป้องกันรังสีอัลตราไวโอเล็ต โดยสะท้อนรังสีอัลตราไวโอเล็ตได้ประมาณ 95 %
- 4) การใช้กระจกนิรภัยหลายชั้น สามารถช่วยลดการบาดเจ็บจากกระจกได้
- 5) ป้องกันการทะลุทะลวง เนื่องจากการแตกและการบุกรุกได้

- 6) ช่วยลดเสียงรบกวน และลดการก้องของเสียงได้ดี
- 7) ช่วยในการประหยัดพลังงานไฟฟ้าของเครื่องปรับอากาศ
- 8) แผ่นฟิล์มในกระจกนิรภัยหลายชั้นช่วยในการลดรังสีอัลตราไวโอเล็ต

2.2.1.8) กระจกอื่นๆ

1) กระจกเงา(Mirror) กระจกเงาที่ดีควรผลิตจากกระจกใส และมีคุณภาพสูง จึงจะให้ภาพที่แจ่มชัดเหมือนจริงไม่บิดเบี้ยวหลอกตา ผ่านกรรมวิธีเคลือบเงาด้วยเครื่องจักร 4 ชั้นตอนคือ

- 1) เคลือบวัสดุเงิน (Silvery Coating)
 - 2) เคลือบวัสดุทองแดงบริสุทธิ์(Pure Copper Coating)
 - 3)เคลือบวัสดุอย่างดีชั้นแรก(1 st Layer High Quality Colour Coating)
 - 4)เคลือบวัสดุอย่างดีชั้นที่ 2(2 st Layer High Quality Colour Coating)
- คุณสมบัติกระจกเงา

1) เหมาะสำหรับการตกแต่งภายใน โดยเฉพาะกระจกเงาใสซึ่งจะให้บรรยากาศภายในห้องที่สดใส

2) กระจกลวดลาย (Pattern Glass) กระจกลวดลาย ผลิตโดยกระจกที่ยังไม่แข็งตัวเข้าไปสู่แถวของลูกกลิ้ง เพื่อให้ได้ความหนาที่ต้องการ และพิมพ์ลวดลายซึ่งติดกับลูกกลิ้งลงบนผิวด้านใดด้านหนึ่งของกระจก หรือทั้ง 2 ด้าน

คุณสมบัติกระจกลวดลาย

1) กระจกลวดลายมีคุณสมบัติโปร่งแสงแต่ไม่โปร่งใส จึงทำให้เกิดภาพที่นุ่มนวล

3) กระจกเสริมลวด(Wired Glass) กระจกเสริมลวดผลิต โดยการใส่แผงตาข่ายลวดลงในกระจกขณะที่กระจกหลอมเหลว เพื่อเป็นการเพิ่มการแข็งแรงให้กับกระจกแบ่งออกเป็น 4 กลุ่ม ตามลวดลายของแบบตาข่ายดังนี้

- 1) ลายข้าวหลามตัด(Diamond-Shaped Pattern or Misco)
- 2) ลายสี่เหลี่ยม(Baroque Pattern)
- 3) ลายหกเหลี่ยม(Hexagonal Pattern)
- 4) ลายแนวตั้ง(Pinstripe Pattern)

คุณสมบัติกระจกเสริมลวด

- 1) มีความแข็งแรงทนทานเป็นพิเศษ จึงมักใช้เป็นกระจกป้องกันการโจรกรรม
- 2) แตกออกเป็นชิ้นเล็กๆ มีความคม

2.2.2 फिल्मกรองแสง

ฟิล์มกรองแสง คือ พลาสติก ทำมาจาก โพลีเอสเตอร์ที่มีความเหนียว บาง เรียบ ไร้รอยขุ่น และสามารถแนบสนิทเป็นเนื้อเดียวกับกระจกที่นำฟิล์มไปติด ซึ่งยึดอยู่บนกระจกได้ด้วยกาวที่มีความใส ไม่ทำให้ภาพที่มองผ่านฟิล์มบิดเบือน ฟิล์มกรองแสงนั้นทำหน้าที่ในการลด หรือกรองแสงสว่างที่ผ่านเข้ามาทางกระจก ดังนั้นฟิล์มกรองแสงทั่วไปจึงมีการย้อมสีเพื่อวัตถุประสงค์เฉพาะ การกรองแสงสว่างเท่านั้น แต่ฟิล์มกรองแสงที่มีความสามารถมากกว่าฟิล์มกรองแสงทั่วไป จะต้องสามารถลดความร้อน และรังสีอัลตราไวโอเล็ตได้เป็นอย่างดี ปัจจุบันฟิล์มกรองแสงมีอยู่ 3 ประเภท ได้แก่

2.2.2.1 ฟิล์มย้อมสี (Dyed Film) เป็นฟิล์มที่ผลิตจากการใช้สีมาเคลือบติดบนแผ่นโพลีเอสเตอร์ มีคุณสมบัติเพียงแต่กรองแสงสว่าง ส่วนความสามารถ ในการกรองคลื่นความร้อน น้อยมาก ไม่ถึง 20% เป็นฟิล์มที่มีราคาถูกที่สุด ไม่มีความคงทน อายุการใช้งานไม่เกิน 3 ปี ก็จะเปลี่ยนสี, จางลง โป่งพองได้ มักจะใช้เป็น"ฟิล์มแถม" แต่หากจะติดเพียงเพราะต้องการบดบังไม่ให้บุคคลภายนอกมองเห็นเข้ามาในรถก็เหมาะกับฟิล์มประเภทนี้

2.2.2.2 ฟิล์มเคลือบตะองโลหะ (Metal Reflective Film) เป็นฟิล์ม ที่ผลิตด้วยการใช้ไอของโลหะ ซึ่งเกิดจากเตาเผาโลหะมาเคลือบบนแผ่นโพลีเอสเตอร์ (Evaporation) ทำให้ฟิล์มประเภทนี้กันคลื่นความร้อน ได้ดีกว่าแบบแรกมาก คือประมาณ 50-90% แต่ให้ความมันวาวของสีโลหะ อายุการใช้งานคงทนกว่า ประมาณ 5-7 ปี ประเภทนี้เหมาะกับการใช้กับรถยนต์ เพราะคุณภาพ คู่มีค่า ราคาไม่แพง

2.2.2.3 ฟิล์มเคลือบอนุภาคโลหะ (Metal Sputtering Film) ใช้การเหนี่ยวนำของประจุไฟฟ้าในสุญญากาศให้อนุภาคโลหะไปเกาะติดบนแผ่นโพลีเอสเตอร์ ทำให้ได้ฟิล์มที่มีความคงทนมาก ลดความร้อนได้มากพอกันกับแบบที่2 ประมาณ 50-70% ฟิล์มประเภทนี้เหมาะสมกับการใช้ติดตั้งกระจกอาคารมากที่สุด มีราคาค่อนข้างสูง

2.3 กระจกใสและฟิล์มกรองแสงที่นำมาใช้ในปัญหาพิเศษฉบับนี้

2.3.1 กระจกใส

ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ เราจะใช้กระจกใส(Clear Glass) โดยที่กระจกใสคือกระจกโปร่งแสงที่สามารถมองผ่านได้อย่างชัดเจนและให้ภาพสะท้อนที่สมบูรณ์ ไม่บิดเบี้ยว และมีคุณสมบัติดังนี้

- 1) สามารถมองเห็นจากภายนอกเข้ามาภายในได้อย่างชัดเจน
- 2) มีค่าการตัดแสงประมาณ 8% สำหรับกระจกใสหนา 12 มิลลิเมตร และตัดแสงได้มากขึ้นตามความหนาของกระจก
- 3) มีค่าการสะท้อนแสงประมาณ 7%
- 4) ผิวกระจกไม่ร้อน เพราะกระจกคูดกั้นความร้อนได้น้อยมาก โดยกระจกใสมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 4.27×10^{-5} เมตร²/วินาที

2.3.2 ฟิล์มกรองแสง

ในปัญหาพิเศษฉบับนี้ เราจะใช้ฟิล์มเคลือบอนุภาคโลหะที่สามารถลดความร้อนได้ 70% โดยมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนเท่ากับ 12.18×10^{-5} เมตร²/วินาที

วัตถุประสงค์สำคัญของการเลือกใช้ฟิล์มกรองแสงมี 2 ส่วนใหญ่ ๆ คือ

1. เพื่อป้องกันความร้อนจากแสงแดด รวมถึงการลดแสงจ้า รังสียูวี (Solar Control) โดยจะพิจารณาคุณสมบัติของการควบคุมคลื่นรังสีต่างๆ ของแสงแดด
2. เพื่อป้องกันกระจกแตก กระจกหลุดร่วงเมื่อเกิดอุบัติเหตุ (Safety & Security) โดยคุณสมบัติหลักจะดูคุณภาพของความทนทานของเนื้อฟิล์ม การยึดติดกับกระจก เรียกรวมๆ ว่าคุณสมบัติด้านฟิสิกส์ (Physical Properties)

2.4 ข้อมูลของอุณหภูมิความร้อนโดยเฉลี่ย

ข้อมูลความร้อนโดยเฉลี่ยในเขตกรุงเทพมหานคร ช่วงวันที่วันที่ 1-31 กรกฎาคม พ.ศ.2550

ตาราง 2.1 แสดงความร้อนโดยเฉลี่ยในเขตกรุงเทพมหานคร ช่วงวันที่วันที่ 1-31 กรกฎาคม พ.ศ. 2550

สถานีอุตุนิยมวิทยา	อุณหภูมิ (°C)		ลมสูงสุด			ปริมาณฝน (มม.)	
	สูงสุด	ต่ำสุด	ทิศ	ความเร็ว (กม./ชม.)	เวลา	24 ชม.	รวมทั้งแค่คันปี
กรุงเทพมหานคร	34.2	24.6	WNW	35.21	17:50	ไม่มีฝน	763.4
กรุงเทพมหานคร	33.7	25.6	SSW	38.92	16:30	8.9	772.3
กรุงเทพมหานคร	33.2	24.9	WSW	22.24	13:15	0.1	772.4
กรุงเทพมหานคร	34.0	25.7	WSW	46.33	12:55	9.1	781.5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรุงเทพมหานคร	32.9	27.6	WSW	18.53	15:05	24.4	805.9
กรุงเทพมหานคร	27.9	25.3	SSW	25.95	12:40	7.7	813.6
กรุงเทพมหานคร	33.4	25.2	NNW	37.07	17:05	27.8	841.4
กรุงเทพมหานคร	34.3	25.2	WSW	18.53	12:30	4.6	846.0
กรุงเทพมหานคร	34.3	26.0	W	14.83	13:00	ไม่มีฝน	846.0
กรุงเทพมหานคร	33.8	25.6	SSE	27.80	18:20	11.6	857.6
กรุงเทพมหานคร	32.9	23.4	SSW	16.68	13:05	1.4	859.0
กรุงเทพมหานคร	33.8	26.4	SW	31.51	12:40	ฝนเล็กน้อย	859.0
กรุงเทพมหานคร	34.3	26.7	W	24.09	14:10	ไม่มีฝน	859.0
กรุงเทพมหานคร	34.5	27.8	SSW	22.24	15:20	0.2	859.2
กรุงเทพมหานคร	34.2	27.2	SSE	18.53	15:40	1.8	861.0
กรุงเทพมหานคร	33.8	26.8	SSW	27.80	17:40	11.9	872.9
กรุงเทพมหานคร	31.9	24.8	W	37.07	17:45	22.3	895.2
กรุงเทพมหานคร	32.7	24.2	SSW	14.83	19:40	ฝนเล็กน้อย	895.2
กรุงเทพมหานคร	34.7	25.9	SW	12.97	20:30	2.6	897.8
กรุงเทพมหานคร	35.0	26.1	W	25.95	19:03	4.4	902.2
กรุงเทพมหานคร	33.7	24.6	W	22.24	12:50	ไม่มีฝน	902.2
กรุงเทพมหานคร	35.4	25.7	ESE	7.41	14:20	ไม่มีฝน	902.2
กรุงเทพมหานคร	34.9	27.4	ESE	27.80	14:45	34.6	936.8
กรุงเทพมหานคร	33.3	24.3	W	24.09	01:40	ไม่มีฝน	936.8
กรุงเทพมหานคร	33.8	27.1	SSW	51.89	12:46	47.6	984.4
กรุงเทพมหานคร	34.9	24.6	NNE	33.36	14:55	8.5	992.9
กรุงเทพมหานคร	34.9	26.7	S	18.53	12:30	0.2	993.1
กรุงเทพมหานคร	34.8	27.4	S	16.68	14:30	ไม่มีฝน	993.1
กรุงเทพมหานคร	34.2	27.3	S	14.83	15:00	0.5	993.6

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กรุงเทพมหานคร	34.3	26.9	S	31.51	08:10	11.4	1,005.0
กรุงเทพมหานคร	34.1	26.3	WSW	42.62	17:20	26.3	1,031.3

เมื่อทำการหาค่าเฉลี่ยอุณหภูมิความร้อนในกรุงเทพมหานคร ช่วงวันที่ 1-31 กรกฎาคม พ.ศ.2550 จากตารางข้างต้นจะได้ค่าอุณหภูมิเฉลี่ย คือ 33.92 องศาเซลเซียส อุณหภูมิเฉลี่ยข้างต้นจะเป็นเงื่อนไขขอบเขตของการกระจายอุณหภูมิภายในกระจกใสและฟิล์มกรองแสง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

การแก้ปัญหาคำนวณการถ่ายเทความร้อน การไหล หรือแม้แต่ปัญหาการสั่น ล้วนต้องอาศัยกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยการสร้างสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้ในการอธิบายลักษณะต่างๆ ที่เกิดขึ้นและวิธีที่จำเป็นอย่างมากในการหาคำตอบได้แก่ ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งมีอยู่หลายวิธีด้วยกันเช่น ระเบียบวิธีขั้นประกอบ ระเบียบวิธีปริมาตรอันดับ ระเบียบวิธีผลต่างอันดับและ ระเบียบวิธีขั้นประกอบอันดับ โดยการเลือกใช้ขึ้นอยู่กับความต้องการความแม่นยำ เวลา และความสะดวกของผู้ที่ต้องการศึกษา

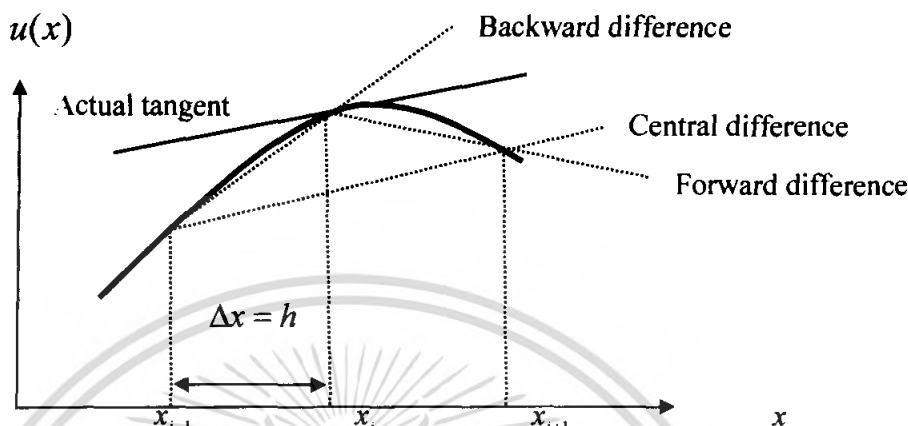
3.1 ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite difference method)

ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ เป็นวิธีการเริ่มแรกที่น่านำมาใช้ในการหาผลเฉลยและยังคงเป็นที่นิยมนำมาใช้ในการศึกษาปัญหาต่างๆ เช่น ปัญหาการถ่ายเทความร้อน ปัญหาคลื่น และปัญหาที่รูปร่างไม่ซับซ้อนมากนัก รวมทั้งยังสะดวกต่อการนำไปใช้ในการแก้ปัญหาใน 1 มิติ ซึ่งให้ความแม่นยำเพียงพอต่อการนำไปใช้

ในปี 1908 นักวิทยาศาสตร์ชื่อ Runge เป็นคนแรกที่น่าระเบียบวิธีผลต่างอันดับมาคำนวณด้วยวิธีขูด (Discretization) เพื่อตรวจสอบปัญหาเกี่ยวกับความยืดหยุ่น และต่อมาในปี 1910 Richardson ได้ทำการศึกษาต่อไป ปี 1946 Southwell ได้อธิบาย the pre-computer โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับในกลศาสตร์ภาวะต่อเนื่อง (Continuum mechanics) ต่อมาในปี 1946 Young และ Wheeler เป็นกลุ่มแรกที่น่าระเบียบวิธีผลต่างอันดับ มาใช้กับปัญหาการไหลของของไหลชนิดเพาเวอร์ลอ (a power-law fluid) ซึ่งเป็นของไหลนอนนิวโตเนียนที่ไหลในท่อสี่เหลี่ยม (a square duct) จากนั้นได้มีผู้นำความรู้ทางระเบียบวิธีผลต่างอันดับ มาศึกษาปัญหาทางด้านของไหลและเทคโนโลยีมากขึ้น ได้แก่ Richtmyer และ Morton 1967, Roache 1976 และ Crochet et al. 1984 เป็นต้น สามารถอธิบายถึงพฤติกรรมและผลกระทบต่างๆที่เกิดขึ้นได้ดีพอสมควร เนื่องจากมีข้อจำกัดในเรื่องของเทคโนโลยีและทรัพยากร จากการศึกษาเพิ่มขึ้นทำให้สามารถพัฒนาวิธีการนี้ได้จึงมีผู้สร้างทฤษฎีต่างๆขึ้นมากมาย ให้เราได้ศึกษาในปัจจุบัน

3.1.1 การประมาณค่าโดยตรง (Direct Approximation)

ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ เป็นการแทนค่าของอนุพันธ์ซึ่งสามารถหาได้ง่าย โดยการประมาณค่าโดยตรง ตัวอย่างเช่น ในการหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x นั่นคือการแปรผันของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระ x ส่วนตัวแปรอื่นๆจะถือว่าเป็นค่าคงที่



รูปที่ 3.1 แสดงการประมาณค่าโดยตรงของอนุพันธ์

พิจารณาฟังก์ชัน u ซึ่งขึ้นอยู่กับ x เพียงอย่างเดียว แสดงดังรูปที่ 3.1 และระเบียบวิธีผลต่างอันตะ แทนอนุพันธ์รวม (total derivative) ของตัวแปร u จะใช้ได้ (valid) กับอนุพันธ์ย่อย

พิจารณาที่อนุพันธ์รวมอันดับที่ 1 $\frac{du}{dx}$ ณ จุด $x = x_i$ ซึ่งเป็นความชันของเส้นโค้งที่จุด x_i แสดงดังรูปที่ 3.1 เราสามารถประมาณค่าอนุพันธ์นี้ได้ 3 วิธีที่แตกต่างกัน พิจารณาตามแนวแกน x หลังจากจุด x_i ที่ x_{i+1} ซึ่งมีระยะห่าง $\Delta x = h$ จาก x_i และความชันที่แท้จริง (Actual tangent) สามารถประมาณได้ด้วยเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุดบนเส้นโค้งซึ่ง $u(x)$ จะสมนัยกับ x และ x_i ดังนั้นจะได้ว่า

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \quad \text{Two point forward difference} \quad (3.1)$$

สมการนี้รู้จักในชื่อของ ผลต่างข้างหน้า 2 จุด (Two point forward difference) ที่เรียกว่า two point เนื่องจากเราใช้ 2 จุดที่ i และ $i+1$ ส่วนคำว่า forward เนื่องจากมอง step หลัง x_i

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถสร้างผลต่างย้อนหลัง 2 จุด สำหรับ $\frac{du}{dx}$ ที่จุด $x = x_i$ ได้ดังนี้

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad \text{Two point backward difference} \quad (3.2)$$

สมการนี้รู้จักในชื่อของ ผลต่างย้อนหลังแบบ 2 จุด (Two point backward difference)

โดยพิจารณาจาก *step* ก่อนหน้า x_i ที่ x_{i-1} ซึ่งมีระยะห่าง $\Delta x = h$ จาก x_i และผลต่างตรงกลาง 3 จุด สำหรับ $\frac{du}{dx}$ ที่จุด $x = x_i$ คือ

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad \text{Three point central difference} \quad (3.3)$$

โดยพิจารณาที่ *step* ก่อนหน้า x_i ที่ x_{i-1} และ *step* หลัง x_i ที่ x_{i+1}

ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite difference method) คือสมการที่ (3.1-3.3) สามารถนำไปใช้หาค่าของอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่าได้ พิจารณาตัวอย่าง อนุพันธ์อันดับที่ 2 โดยใช้สมการที่ (3.1) ซึ่งเป็นวิธีผลต่างข้างหน้าจะได้

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i &= \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx}\right)_i \\ &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+2} - u_{i+1}}{h} - \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right] \\ &= \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} \quad \text{Forward difference} \end{aligned} \quad (3.4)$$

ใช้สมการที่ (3.2) ซึ่งเป็นสมการ ผลต่างย้อนหลัง จะได้

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i &= \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx}\right)_i \\ &\approx \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[\frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{h} \right] \\ &= \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} \quad \text{Backward difference} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ใช้สมการที่ (3.3) ซึ่งเป็นผลต่างตรงกลาง จะได้

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_i &= \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx}\right)_i \\ &\approx \frac{1}{2\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+1} + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i \right] - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_i - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-1} \right] \right\} \end{aligned}$$

ซึ่งค่า $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ มีได้หลายค่า ตามแต่ละช่วง

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \\
&= \frac{1}{h} \left[\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right] \\
&= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \qquad \text{Central difference} \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

โดยที่ Δ แทนผลต่าง เช่น Δu แทนค่าผลต่าง u

3.1.2 การเข้าสู่อนุกรมเทเลอร์และค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข

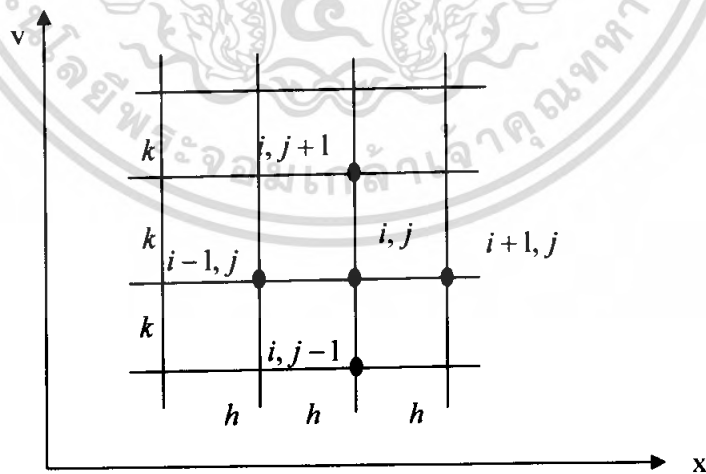
(Taylor Series Approach and Numerical Error)

ถึงแม้ว่าการประมาณค่าโดยวิธีทางตรงที่ผ่านมาจะเป็นวิธีที่ง่าย แต่จะมีค่าความคลาดเคลื่อน (*error*) ที่เกิดขึ้นจากการประมาณค่าซึ่งเป็นสิ่งสำคัญสำหรับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

วิธีหนึ่งของระเบียบวิธีผลต่างอันดับ (Finite difference method) ที่ใช้ได้ คือ การประมาณค่าด้วยอนุกรมเทเลอร์ (Taylor Series) แต่ก็ยังคงมีค่าความคลาดเคลื่อนอยู่ซึ่งเรียกว่าค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (truncation error)

3.1.3 ระบบ Grid ที่มีระยะห่างเท่าๆกัน (Even Grid System)

หลักการของระเบียบวิธีผลต่างอันดับที่มีระบบ Grid ที่มีระยะห่างเท่าๆกัน คือการแบ่งพื้นที่ออกเป็นส่วนๆ แต่ละลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งมีความกว้าง $\Delta x = h$ และ $\Delta y = k$ โดยที่ h, k เป็นค่าคงที่ แสดงได้ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 แสดงระบบ Grid ที่มีระยะห่างเท่าๆกัน

กระจายอนุกรมเทเลอร์สำหรับฟังก์ชัน $u(x, y)$ ขยายรอบ x , ที่ $(x, +h)$ และ $(x, -h)$ ตามลำดับ ได้ดังนี้

$$u(x+h, y) = u(x, y) + h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots$$

$$u(x-h, y) = u(x, y) - h \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \dots$$

ซึ่งค่า h เป็นขนาดของ *grid* ซึ่งต้องมีค่าเล็กเพียงพอที่จะทำให้อนุกรมลู่อู่เข้าในดัชนีกำกับ (*double-subscript*) ให้ *subscript* ตัวแรกเป็นตำแหน่งของ x และ *subscript* ตัวที่สองเป็นตำแหน่งของ y จากข้างบนนี้เขียนใหม่ได้เป็น

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (3.7)$$

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \quad (3.8)$$

จากสมการที่ (3.7) จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \end{aligned} \quad (3.9)$$

จากสมการที่ (3.8) จัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} - \frac{h}{2!} \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + \frac{h^2}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) \end{aligned} \quad (3.9a)$$

ถ้าสมการมีอนุพันธ์อันดับที่ 2 หรืออันดับที่สูงกว่าพจน์ของอนุพันธ์นั้นจะถูกตัดออก ซึ่งจะทำให้การประมาณค่าผลต่างข้างหน้าและผลต่างย้อนหลังของอนุพันธ์อันดับที่ 1 ตามลำดับ ซึ่ง h จะต้องมีค่าเล็กเพียงพอในการทำให้อนุกรมลู่เข้า พจน์ที่ตัดออกในอันดับที่ 2 และอันดับอื่นๆจะมีค่าน้อยกว่าพจน์ที่ตัดออกตอนแรก ถ้าเรานำสมการที่ (3.7) - (3.8) และจัดรูปสมการใหม่ เราจะได้ผลต่างตรงกลางคือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u_{i,j}}{\partial x^3} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \end{aligned} \quad (3.9b)$$

โดยที่ $O(h^2)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation error) ซึ่งเป็นสัดส่วนกับ h^2

ถ้าเรานำสมการที่ (3.7) + (3.8) และจัดรูปสมการใหม่ เราจะได้ผลต่างตรงกลางสำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 2 คือ

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{2h^2}{4!} \frac{\partial^4 u_{i,j}}{\partial x^4} + \dots \\ &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)\end{aligned}\quad (3.9c)$$

ซึ่งค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation error) คือ $O(h^2)$

ในการทำงานเดียวกัน สำหรับอนุพันธ์ของ y เราจะได้

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k) \quad \text{Forward difference} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \quad \text{Backward difference} \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \quad \text{Central difference} \quad (3.10b)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \quad \text{Central difference} \quad (3.10c)$$

ซึ่งสมการที่ (3.9) และ (3.10) จะถูกนำมาใช้บ่อย เนื่องจากสามารถใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ

(Finite difference method) แทน สำหรับอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นได้

ในบางครั้งเราสามารถหาอนุพันธ์ผสมอันดับที่ 2 ของ $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ สำหรับกรณีนี้จะใช้
อนุกรมเทเลอร์กระจาย จะได้

$$\frac{\partial u_{i+1,j+1}}{\partial x \partial y} = u_{i,j} + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \right) + \dots \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u_{i+1,j-1}}{\partial x \partial y} = u_{i,j} + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - 2hk \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \right) + \dots \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial u_{i-1,j+1}}{\partial x \partial y} = u_{i,j} + \frac{1}{1!} \left(-h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} + k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} - 2hk \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \right) + \dots \quad (3.11b)$$

$$\frac{\partial u_{i-1,j-1}}{\partial x \partial y} = u_{i,j} + \frac{1}{1!} \left(-h \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} - k \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \right) + \frac{1}{2!} \left(h^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \right) + \dots \quad (3.11d)$$

นำสมการที่ (3.11a) - (3.11b) - (3.11c) + (3.11d) จะได้

$$u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} = 4hk \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} + O(h+k)^4$$

ในเทอมของอนุพันธ์อันดับที่ 3 จะหายไป ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk} + \frac{O(h+k)^4}{4hk}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ $h = k$ จะได้

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2} + O(h^2) \quad (3.12)$$

ซึ่งการประมาณค่าสมการที่ (3.12) จะเป็นผลต่างตรงกลางอันดับที่ 2

สรุปเปรียบเทียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite difference method) สำหรับระบบ *grid* ที่มีขนาดที่เท่าๆกัน

1. ผลต่างข้างหน้า (Forward difference)

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 1 (First-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่ 1 (First-order accuracy)

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} + O(h) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} + O(k) \quad (3.13a)$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 2 (Second-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่ 1 (First-order accuracy)

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+2,j} - 2u_{i,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.13b)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+2} - 2u_{i,j} + u_{i,j-2}}{k^2} + O(k^2) \quad (3.13c)$$

2. ผลต่างย้อนหลัง (Backward difference)

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 1 (First-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่ 1 (First-order accuracy)

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} + O(h) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k} + O(k) \quad (3.14a)$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 2 (Second-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่ 1 (First-order accuracy)

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.14b)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{k^2} + O(k^2) \quad (3.14c)$$

3. ผลต่างตรงกลาง (Central difference)

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 1 (First-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่ 1 (First-order accuracy)

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + O(h^2) \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + O(k^2) \quad (3.15a)$$

สำหรับอนุพันธ์อันดับที่ 2 (Second-order derivative) เมื่อพิจารณาความแม่นยำอันดับที่ 1 (First-order accuracy)

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) \quad (3.15b)$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) \quad (3.15c)$$

4. ผลต่างตรงกลางของอนุพันธ์อันดับที่ 2 ผสม

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4h^2} + O(h^2) \quad (3.16)$$

3.2 ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข (Numerical Error)

ค่าความคลาดเคลื่อน(Error) เชิงตัวเลขมี 2 ชนิด คือ

1. Truncation error เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการตัดพจน์หลังในอนุกรมเทเลอร์ สามารถเห็นได้ในทุกๆ ระเบียบวิธีผลต่างอันตะ (Finite difference method) ซึ่งค่า Truncation error จะลด เมื่อ *grid* มีขนาดลดลง อย่างไรก็ตาม มันไม่สามารถเพิ่มจำนวนเทอมในอนุกรมได้ เพราะประกอบไปด้วยอนุพันธ์อันดับที่สูงกว่าที่เราจะทำการประมาณค่าอนุพันธ์ ซึ่งเราไม่ทราบค่าแน่นอน ในทฤษฎีนี้ค่าของ Truncation error จะเข้าใกล้ 0 เมื่อขนาด *grid* เข้าใกล้ 0 แต่ในความเป็นจริง ขนาดของ *grid* ไม่สามารถเล็กมากได้เนื่องจาก

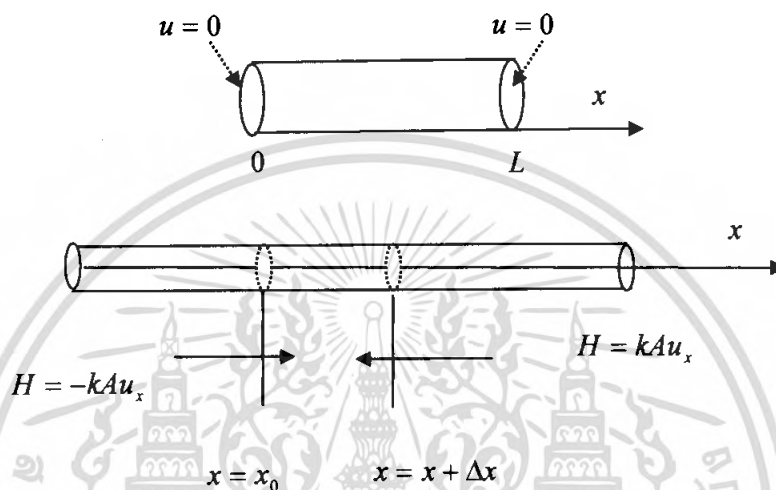
- Total error (ผลรวมของ Truncation error และ round off error) ของผลเฉลยอาจเกิดขึ้นจากค่า error ของ round off error แทน

- จำนวน *grid* ในการคำนวณมีมากเกินไปเกินความต้องการ และเวลาที่ใช้ในการหาผลเฉลยจะมากตามไปด้วย ซึ่งการเพิ่มขึ้นของเวลาในการคำนวณเป็นสิ่งสำคัญมากสำหรับวิธีทำซ้ำ

2. ในการคำนวณตัวเลขของคอมพิวเตอร์ จำนวนจริงจะถูกเก็บในรูปแบบของ Finite number โดยการปัดเศษเป็นจำนวน เช่น $\frac{2}{3}$ ในคอมพิวเตอร์เก็บเป็น 0.6666666667 ซึ่งค่าจริงคือ 0.666666666... การปัดเศษทำให้เกิดค่า error ขึ้น เรียกว่า round off error

3.3 สมการพาราโบลิก (Parabolic Equation)

3.3.1 สมการความร้อนในมิติขึ้นกับเวลา (The Time Dependent One-Dimensional Heat Equation) พิจารณาที่แท่งโลหะยาว ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดคงที่และมีฉนวนหุ้ม แสดงดังรูปที่ 2.6.1 เพื่อให้ความร้อนไหลไปตามแนวยาวของแท่งโลหะเท่านั้น และอุณหภูมิที่กระจายนี้ก็คือ $u = u(x, t)$ ถ้าเราตั้งให้แกน x อยู่ในแนวยาวของแท่งโลหะ จะได้ว่าอุณหภูมิ u จะขึ้นอยู่กับ x และ t เท่านั้น เราจะได้ความร้อน u ภายในแท่งโลหะตามแนวยาว x เมื่อเวลา t แสดงดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 แสดงการกระจายความร้อนตามแนวยาวของโลหะ

ให้ $u = u(x, t)$ เป็นอุณหภูมิทุกจุดบนระยะหน้าตัดที่ระยะ x เมื่อเวลา t ก่อนจะกล่าวถึงสมการความร้อน ขอกล่าวถึงกฎการนำความร้อนที่สำคัญ 2 ข้อคือ

1. ปริมาณความร้อน Q ในวัสดุซึ่งมีมวล m มีค่าเท่ากับ

$$Q = \rho mu$$

โดยที่ u คืออุณหภูมิของวัสดุนั้น

ρ คือความร้อนจำเพาะของวัตถุ

2. อัตราการไหลของความร้อน Q_1 ผ่านพื้นที่หน้าตัด ดังรูปที่ 3. จะแปรผกผันกับพื้นที่หน้าตัด A และอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x ของอุณหภูมิ u จะได้

$$Q_1 = -KA \frac{\partial u}{\partial x}$$

จากกฎทางฟิสิกส์จะได้ว่า อัตราการไหลของความร้อนผ่านพื้นที่หน้าตัด A ที่มีระยะเท่ากับ x มีค่าเท่ากับ $-KA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x$ เมื่อ $K > 0$ เป็นค่าคงตัว

เรียกว่า k ค่าสภาพนำความร้อน (Thermal Conductivity)

ข้อตกลงเกี่ยวกับการไหลของความร้อนมีดังนี้

-ถ้าอัตราการไหลของความร้อนเป็นบวก ความร้อนจะไหลจากไปในทิศทางที่ x มีค่าเพิ่มขึ้น

-ถ้าอัตราการไหลของความร้อนเป็นลบ ความร้อนจะไหลจากไปในทิศทางที่ x มีค่าลดลง

พิจารณาที่ระยะหน้าตัด P_1 และ P_2 สมมติความร้อนไหลจาก P_1 ไป P_2

อัตราการไหลของความร้อนผ่านหน้าตัด $P_1 = -KAu_x(x,t)$

อัตราการไหลของความร้อนผ่านหน้าตัด $P_2 = -KAu_x(x,t)$

ความร้อนที่หายไประหว่างหน้าตัด P_1 และ P_2 คือ $\gamma\rho A\Delta x u_t$

เมื่อ γ เป็นความร้อนจำเพาะของวัตถุ

ρ เป็นความหนาแน่นของวัตถุ

เพราะฉะนั้น

$$kA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)] = \gamma\rho A\Delta x u_t$$

หรือ

$$\frac{k}{\gamma\rho} \frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = u_t$$

เมื่อ $\Delta x \rightarrow 0$ จะได้

$$\frac{k}{\gamma\rho} u_{xx} = u_t$$

ให้ $c^2 = \frac{k}{\gamma\rho}$ จะได้

$$c^2 u_{xx} = u_t$$

หรือ

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

เมื่อ c^2 เป็นค่าสภาพการแพร่ความร้อน (Thermal Diffusivity) ของวัตถุ

สมการเชิงอนุพันธ์ $c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ เรียกว่าสมการการไหลของความร้อนใน 1 มิติ

จากสมการการไหลของความร้อนใน 1 มิติจะมีการกำหนดเงื่อนไขดังนี้

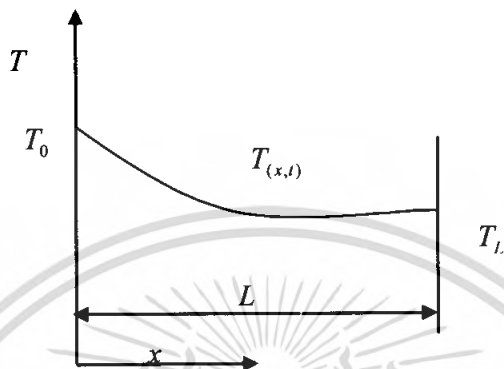
3.3.2 เงื่อนไขขอบเขต (Boundary Condition)

ในการแก้สมการการนำความร้อน ซึ่งเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลเพื่อหาค่าอุณหภูมิที่จุดต่างๆ ในตัวกลางหรือวัตถุใดๆ เราต้องทราบเงื่อนไขขอบเขต(Boundary Condition) และเงื่อนไขเริ่มต้น (initial condition) ของระบบเสียก่อน เงื่อนไขขอบเขตจะระบุค่าของอุณหภูมิและอัตราการถ่ายเทความร้อนที่ขอบเขตของระบบ ส่วนเงื่อนไขเริ่มต้นจะระบุค่าที่จุดต่างๆ ในขณะที่ยัง

พิจารณา หรือที่ $t = 0$ สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่จะศึกษาในปัญหาการนำความร้อนอยู่ 3 แบบ โดยมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. เงื่อนไขขอบเขตแบบที่หนึ่ง (Boundary Condition of the First Kind)

ในกรณีที่อุณหภูมิของผิวผนัง (Boundary Surface) มีค่าคงที่ และเรารู้ค่าของอุณหภูมิดังกล่าว ตัวอย่างของเงื่อนไขขอบเขตแบบที่หนึ่งที่ง่ายที่สุดก็คือ กรณีการนำความร้อนผ่านผนังราบดังแสดงในรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 แสดงเงื่อนไขขอบเขตที่อุณหภูมิของผิวผนังมีค่าคงที่

และเขียนเป็นสมการ ได้ดังนี้

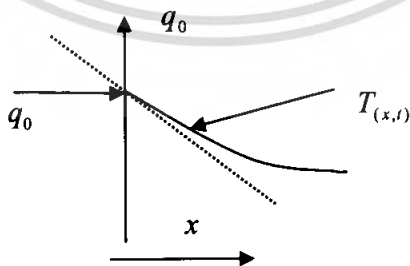
$$\text{ที่ } x = 0, T(x,t) = T_0$$

$$\text{ที่ } x = L, T(x,t) = T_L$$

2. เงื่อนไขขอบเขตแบบที่สอง (Boundary Condition of the Second Kind)

เงื่อนไขขอบเขตแบบที่สอง เป็นกรณีที่เรารู้อัตราการนำความร้อนต่อหน่วยพื้นที่ผิวของผนังราบ ตัวอย่างของเงื่อนไขขอบเขตแบบที่สองมีดังต่อไปนี้

กรณีที่ค่าของอัตราการนำความร้อนมีค่าคงที่ที่ผนัง แสดงได้ดังรูปที่ 3.5 และเงื่อนไขขอบเขตเขียนเป็นสมการได้ดังต่อไปนี้

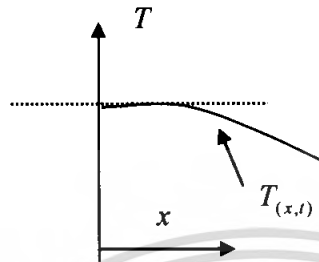


รูปที่ 3.5 แสดงอัตราการนำความร้อนมีค่าคงที่ที่ผนัง

และเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_0$$

กรณีที่เรารู้หุ้มนวณที่ผิวของผนัง และทำให้ไม่มีการสูญเสียความร้อนจากผนัง โดยการนำความร้อน แสดงดังรูปที่ 3.6 เงื่อนไขขอบเขตในกรณีนี้จะเขียนได้เป็นสมการดังต่อไปนี้



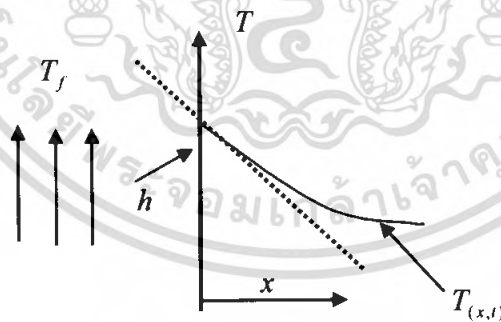
รูปที่ 3.6 แสดงเงื่อนไขขอบเขตกรณีที่มีหุ้มนวณถูกหุ้มนวณด้วยหุ้มนวณ

และเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$$

3. เงื่อนไขขอบเขตแบบที่สาม (Boundary Condition of the Third Kind)

เมื่อมีการถ่ายเทความร้อน โดยการพาความร้อนที่ผิวของผนัง เข้าสู่ตัวกลางที่เราเรู้อุณหภูมิ เงื่อนไขที่เกิดขึ้นจะเรียกว่า เงื่อนไขขอบเขตแบบที่สาม แสดงดังรูปที่ 3.7 ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.7 แสดงเงื่อนไขขอบเขตเมื่อมีการถ่ายเทความร้อน โดยการพาความร้อนที่ผิวของผนัง เข้าสู่ตัวกลาง

จากรูปที่ 3.7 เราจะเห็นว่าที่ผิวของผนัง อัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการพาเข้าสู่ผนัง จะมีค่าเท่ากับอัตราการถ่ายเทความร้อนโดยการนำความร้อนจากผิวผนังเข้าสู่ตัวผนังในกรณีนี้เงื่อนไขขอบเขตจะหาได้จากสมการซึ่งให้ความสมดุลของความร้อนดังนี้

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(T_f - T) \Big|_{x=0}$$

3.4 อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier Series)

ฟูรีเยร์เป็นผู้ได้รับเริ่มในการใช้ออนุกรมฟูรีเยร์ศึกษาเกี่ยวกับการไหลของความร้อนในความเป็นจริงแล้ว ได้มีการศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับอนุกรมนี้ตั้งแต่ปี ค.ศ.1740 โดยนักคณิตศาสตร์และนักฟิสิกส์หลายท่านเช่น Bernoulli, D'Alamert, Lagrange และ Euler ได้ค้นพบสูตรในรูปอินทิกรัล (Integral Formulas) ซึ่งต่อมาเรียกว่า สัมประสิทธิ์ฟูรีเยร์

ฟูรีเยร์ได้เสนอผลงานที่ Paris Academy of Sciences ในปี 1807 และปี 1811 โดยการนำไปประยุกต์ในเรื่องการนำความร้อน และได้เสนอแนวคิดที่ว่า ฟังก์ชันที่ใช้แทนปัญหาเหล่านี้ควรจะอยู่ในรูปของอนุกรมฟังก์ชันตรีโกณ และได้มีการวิจารณ์ผลงานของเขาทำให้ไม่ได้รับการตีพิมพ์ แต่ต่อมาเขาได้พยายามพัฒนาแนวคิดดังกล่าวต่อไปจนเป็นที่ยอมรับและในปี 1822 เขาได้ตีพิมพ์เผยแพร่ La Theorie Analytique de la Chaleur ซึ่งทฤษฎีต่างๆที่พัฒนาขึ้นมาามีผลต่อการเปลี่ยนแปลงในวงการคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นทางด้าน Modern Algebra หรือ งานของ Cantor ที่เกี่ยวกับทฤษฎีเซต

3.4.1 ฟังก์ชันคาบ (Periodic Function)

นิยามที่ 1 ฟังก์ชัน f จะกล่าวว่าเป็นฟังก์ชันที่มีคาบ p (Period p) ก็ต่อเมื่อ $f(t) = f(t + p)$ ทุกค่า t , $p > 0$ และเรียก f ฟังก์ชันมีคาบ (Periodic Function) สำหรับค่า p ที่น้อยที่สุดเราเรียกว่า คาบที่น้อยที่สุด (The Least Period) หมายเหตุ: คาบของฟังก์ชัน f จะหมายถึง คาบที่น้อยที่สุด

3.4.2 อนุกรมฟูรีเยร์ (Fourier series)

1. สูตรของออยเลอร์-ฟูรีเยร์ (Euler-Fourier Formulas) อนุกรมตรีโกณมิติแบบ

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t + \dots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad \text{เมื่อ } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

เป็นอนุกรมซึ่งใช้กันมากในการแก้ปัญหาทางฟิสิกส์ เช่น ในทฤษฎีของเสียง การนำความร้อนคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า วงจรไฟฟ้า และการสั่นสะเทือนของระบบเมคานิกส์ และผลที่สำคัญยิ่ง

ของอนุกรมตรีโกณมิติแบบดังกล่าวคือ เราอาจใช้ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องได้ ซึ่งอนุกรมของเทเลอร์นั้นใช้แทนได้เฉพาะฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับเท่านั้น อนุกรมตรีโกณมิติแบบจึงแก้ปัญหา ได้กว้างกว่าอนุกรมของเทเลอร์ เนื่องจาก A, a_n และ b_n เป็นค่าคงที่เรามาพิจารณาว่าค่า A, a_n และ b_n ที่เหมาะสมที่จะทำให้อนุกรมตรีโกณมิติดังกล่าวเป็นตัวแทนของ $f(t)$ ได้ดีนั้นควรเป็นอย่างไร

ทฤษฎีบทที่ 1 ถ้าอนุกรม $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$ สามารถ

อินทิเกรตทีละเทอม (Integrate Term by Term) ตั้งแต่ $-T/2$ ถึง $T/2$ ได้สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

แล้วจะได้ว่า

$$(1) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{โดยที่ } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(2) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \text{โดยที่ } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

หมายเหตุ: เงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการอินทิเกรตทีละเทอม คืออนุกรมนั้นต้องลู่เข้าอย่างสม่ำเสมอ (Uniformly Convergent) ไปยังฟังก์ชันนั้น

ทฤษฎีบทที่ 2 ถ้าอนุกรม $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$

สามารถอินทิเกรตทีละเทอม (Integrate Term by Term) ตั้งแต่ c ถึง $c+T$ ทุกๆจำนวนจริง c ได้สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ แล้วจะได้ว่า

$$(1) \quad a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$(2) \quad b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt$$

หมายเหตุ: เราเรียก a_n, b_n ที่มีสูตรตามทฤษฎีที่ 1 หรือทฤษฎีที่ 2 ว่า สูตรของออยเลอร์-ฟูเรียร์ (Euler-Fourier Formular)

3.4.3 คุณสมบัติของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์; ฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก

(Properties of Sine and Cosine ; Orthogonal Functions)

นิยามที่ 2 เซตของฟังก์ชัน $\{\phi_k(t)\}$ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก (Orthogonal) บนช่วง $a < t < b$ ถ้า สอดฟังก์ชันใดๆ $\phi_m(t)$ และ $\phi_n(t)$ สอดคล้องกับความสัมพันธ์ในสมการ

$$\text{ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉาก (Orthogonal Relation)} \quad \int_a^b \phi_m(t) \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0; m \neq n \\ r_n; m = n \end{cases}$$

3.4.4 ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากสำหรับฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

(Orthogonality Relation for Sine and Cosine Function)

$$(1) \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{เมื่อ } m \neq 0$$

$$(2) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{เมื่อ } m \text{ เป็นค่าคงที่ไม่ใช่จะจง}$$

$$(3) \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0; m \neq n \\ T/2; m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$(4) \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = \begin{cases} 0; m \neq n \\ T/2; m = n \neq 0 \end{cases}$$

$$(5) \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad \text{สำหรับทุกค่า } m \text{ และ } n \quad \text{เมื่อ } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

หมายเหตุ: ความสัมพันธ์ในสมการ (1) - (5) นี้ แสดงว่าเซตของฟังก์ชัน

$\{1, \cos \omega_0 t, \cos 2\omega_0 t, \dots, \cos n\omega_0 t, \dots, \sin \omega_0 t, \sin 2\omega_0 t, \dots, \sin n\omega_0 t, \dots\}$ เป็นเซตของฟังก์ชันเชิงตั้งฉากบนช่วง $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

นิยามที่ 3 กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(t)$ เป็นฟังก์ชันคาบ T ซึ่ง $f(t+T) = f(t)$ เราจะเรียกอนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos \omega_0 t + \dots + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin \omega_0 t + \dots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad \text{หรือเขียนได้ดังรูป}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n) \quad \text{เมื่อ } \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{โดยที่}$$

$$(1) a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad \text{โดยที่ } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$(2) b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad \text{โดยที่ } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(3) \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

ว่า อนุกรมฟูเรียร์ตรีโกณมิติ (Trigonometric Fourier series)

เมื่อ a_n, b_n เป็นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Fourier Coefficients) ของ $f(t)$

นิยามที่ 4 ให้ $f(t)$ นิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$ และนอกช่วงนี้ f มีคุณสมบัติว่า

$f(t+2\pi) = f(t)$ นั่นคือ $f(t)$ มีคาบเท่ากับ 2π อนุกรมฟูเรียร์ของ $f(t)$ จะมีรูปเป็น

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

โดยที่ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

และถ้า $f(t)$ มีคาบ 2π , a_n และ b_n อาจจะเขียนอยู่ในรูป

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

$$\frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_c^{c+2\pi} f(t) dt$$

เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

3.5 ปัญหาการนำความร้อนในสถานะไม่คงตัวในหนึ่งมิติ

การวิเคราะห์ปัญหาการถ่ายเทความร้อนอย่างแปรปรวน เราสามารถแก้ปัญหาคด้วยสมการการนำความร้อนในรูปทั่วไป โดยวิธีการแยกตัวแปร (Separation of Variables Method) คล้ายกับการวิเคราะห์ที่ใช้ในปัญหาที่มีสถานะสม่ำเสมอสองมิติ

การหาผลเฉลยของสมการการไหลของความร้อนใน 1 มิติ

$$\text{จากสมการ} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (3.17)$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดให้อุณหภูมิเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา

$$u(0, t) = 0 \quad \text{และ} \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L$

แก้สมการด้วยวิธีการแยกตัวแปร (Separation of Variables Method)

สมมติให้ $u(x, t) = X(x)T(t)$ และ $-\lambda^2$ เป็นค่าคงที่ของฟังก์ชันแบบแยกตัวแปรได้ เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$X(x)T'(t) = c^2 X(x)'' T(t)$$

หรือ
$$\frac{X(x)''}{X} = \frac{T(t)'}{c^2 T(t)}$$

เพราะว่า $\frac{X(x)''}{X}$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $\frac{T(t)'}{c^2 T(t)}$ เป็นฟังก์ชันของ t

ดังนั้น จะเท่ากับค่าคงที่ที่ทำให้ $\frac{X(x)''}{X} = \frac{T(t)'}{c^2 T(t)} = -\lambda^2, \quad \lambda^2 > 0$

จะได้สมการดังนี้

$X(x)'' + \lambda^2 x = 0$ ซึ่งมีผลเฉลยเป็น $X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$
และ $T' + \lambda^2 c^2 T = 0$ ซึ่งมีผลเฉลยเป็น $T(t) = c_3 e^{-\lambda^2 c^2 t}$

จากเงื่อนไขขอบเขต $X(0)T(t) = u(0,t) = 0$ และ $X(L)T(t) = u(L,t) = 0$

เพราะฉะนั้น $X(0) = X(L) = 0$ ดังนั้น $c_1 = 0$ และ $c_2 \sin \lambda L = 0$

เราสนใจกรณีที่มี $u(x,t) \neq 0$

ดังนั้นเลือก $c_2 \neq 0$ และให้ $\sin \lambda L = 0$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

ให้ $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ และ $X_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{L}$ จากสมการ $T' + \lambda^2 c^2 T = 0$ จะได้ว่า

$$T_n(t) = B_n e^{-(n\pi/L)^2 c^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, B_n \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ เราจะได้

$$u_n(x,t) = B_n e^{-(n\pi/L)^2 c^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

ผลที่ตามมาคือคำตอบของสมการความร้อนใน 1 มิติ จะได้เป็น

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-(n\pi/L)^2 c^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3.18)$$

เพราะว่า $u(x,0) = f(x)$ เพราะฉะนั้น $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$

นั่นคือ B_n เป็นสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูรีเยร์ของ $f(x)$ บนช่วง $0 < x < L$

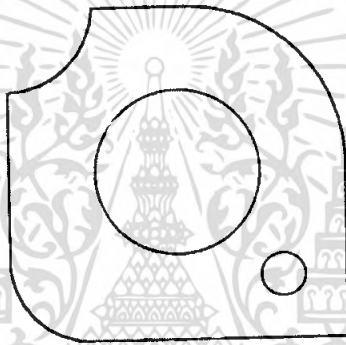
$$\text{ดังนั้น } B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \#$$

3.6 ทฤษฎีและหลักการของระเบียบวิธีจันประกอบอันตะ

ความสามารถในการแก้ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีส่วนอย่างมากในการสร้างเสริมปรับปรุงความเป็นอยู่ของมนุษย์ให้ดียิ่งขึ้นปรากฏการณ์ส่วนใหญ่ที่เกิดขึ้นรอบตัวสามารถอธิบายได้โดยกฎเกณฑ์ทางฟิสิกส์และทำการประดิษฐ์ขึ้นมาในลักษณะของสมการต่างๆได้ ซึ่งจะอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential equation) หรือในรูปแบบของสมการอินทิกรัล (integral equation) เป็นต้น ตัวอย่างเช่น ปัญหาการคำนวณหาการกระจายอุณหภูมิภายในห้อง ต้องเริ่มมาจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่อธิบายสถานะของความสมดุลในการถ่ายเทความร้อน เป็นต้น สมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาต่างๆ นั้น ปกติประดิษฐ์ขึ้นมาได้โดยไม่ยาก

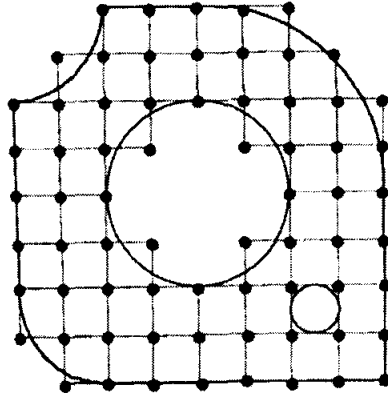
เลย หากแต่ว่าผลเฉลยแม่นยำ (Exact solution) ที่ต้องการและจำเป็นต้องการหาออกมาโดยวิธีวิเคราะห์ (analysis method) นั้นทำได้ยากลำบากมากหรืออาจจะหาไม่ได้เลยก็ได้ เหตุผลดังกล่าวก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณ (approximate solution) ขึ้น วิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณนั้นมีหลาย ๆ วิธีการ วิธีที่นิยมกันอย่างกว้างขวางในอดีตที่ผ่านมา คือ วิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม (finite different method)

หลักการที่สำคัญของวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมก็คือการหาผลเฉลยโดยประมาณ โดยเริ่มจากการเขียนสมการเชิงอนุพันธ์ให้อยู่ในรูปแบบของระบบสมการผลต่างสี่เหลี่ยม ข้อดีของวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยมนี้ก็คือ เป็นวิธีที่ง่ายแก่การศึกษาและทำความเข้าใจ รวมไปถึงความสะดวกในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้ในการคำนวณหาผลเฉลยของปัญหานั้น ๆ และที่สำคัญที่สุด ได้กลายเป็นสิ่งที่จำเป็นเพื่อการพัฒนาปรับปรุงคุณภาพสิ่งของนั้น ๆ ให้ดียิ่งขึ้น ส่วนข้อเสียของวิธีการหาผลต่างสี่เหลี่ยมก็มีหลายประการ เช่น ความไม่สะดวกในการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต



รูปที่ 3.8 แสดงถึงลักษณะของแผ่นอะลูมิเนียม

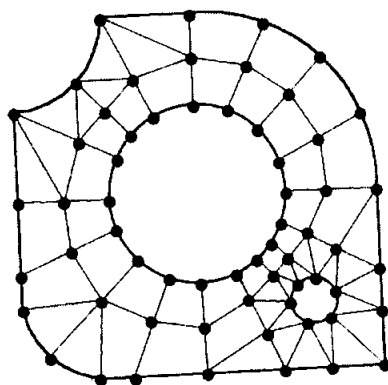
ลักษณะหนึ่งที่ใช้เสริมความแข็งแรงของโครงสร้าง ภายในปีกเครื่องบิน การวิเคราะห์หาการกระจายของความเค้น บนแผ่นอะลูมิเนียมนี้ ภายใต้แรงกระทำที่กำหนดให้โดยการใช่วิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite different method) จะ เริ่มจากการแบ่งแผ่นอะลูมิเนียมนี้ออกเป็นช่องตารางสี่เหลี่ยม ดังรูปที่ 3.9 โดยที่ตาราง สี่เหลี่ยมเหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ (grid points) ตามหัวมุมของสี่เหลี่ยมต่าง ๆ และขนาดของ ปัญหาหรือจำนวนตัวไม่รู้ค่า จะขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดต่อนี้เอง



รูปที่ 3.9 แสดงให้เห็นว่าตารางสี่เหลี่ยมที่ใช้โดยระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม

ระเบียบวิธีผลต่างสี่เหลี่ยมไม่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงของแผ่นอะลูมิเนียมดังกล่าวได้โดยตรง หากใช้ตารางสี่เหลี่ยมให้มีขนาดเล็กลงซึ่งหมายถึงจะต้องเพิ่มจำนวนตารางสี่เหลี่ยมให้มากขึ้นก็จะสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงมากยิ่งขึ้น แต่ในขณะเดียวกันจำนวนจุดต่อที่เพิ่มมากขึ้นทำให้จำนวนสมการผลต่างสี่เหลี่ยมมากขึ้นด้วย และกระบวนการแก้ปัญหาจำเป็นต้องการหน่วยความจำบนเครื่องคอมพิวเตอร์เพิ่มขึ้นรวมถึงเวลาที่ใช้ในการคำนวณจะสูงมากขึ้นตามไปด้วย

จากรูปข้างต้น จะแสดงให้เห็นถึงความยากลำบากในการนำไปประยุกต์วิธีการนี้เพื่อใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนในปัจจุบันนี้ สาเหตุของความยากลำบากดังกล่าวมีส่วนก่อให้เกิดวิธีการหาผลเฉลยโดยประมาณวิธีใหม่ที่เรียกว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method: FEM) ซึ่งวิธีการนี้สามารถนำมาใช้กับปัญหาที่มีรูปร่างลักษณะซับซ้อนเช่นใดก็ได้ โดยสามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมที่แท้จริงได้ใกล้เคียงเที่ยงตรงกว่าหลักการของวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม กล่าวคือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเนื้อที่หลาย ๆ ชิ้นที่เรียกว่า “เอลิเมนต์” โดยเอลิเมนต์ต่าง ๆ อาจจะอยู่ในรูปลักษณะของสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าก็ได้ ดังรูปที่ 3.10



รูปที่ 3.10 การวิเคราะห์หาผลเฉลยบนแผ่นอะลูมิเนียมด้วยการใช้ระเบียบวิธีจิ้นประกอบอันตะ

ผลประโยชน์สิ่งแรกที่ได้เห็นได้ชัดเมื่อเปรียบเทียบได้ชัดเจนจากรูปที่ 3.9 โดยวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite difference method) กับรูปที่ 3.10 โดยระเบียบวิธีจิ้นประกอบอันตะ (Finite element method) ประกอบด้วยเอลิเมนต์ขนาดต่าง ๆ กัน ที่สามารถจำลองรูปร่างลักษณะดั้งเดิมของแผ่นอะลูมิเนียมได้เป็นอย่างดี ซึ่งหมายถึงปัญหานี้จะถูกแก้เพื่อหาผลเฉลยโดยประมาณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ที่มีรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงดั้งเดิมมากที่สุด ดังนั้นค่าผลเฉลยโดยประมาณที่จะคำนวณออกมาได้จะมีความแม่นยำมากขึ้นตามไปด้วย

3.6.1 วิธีการของระเบียบวิธีจิ้นประกอบอันตะ

ในการแก้ปัญหาใดปัญหาหนึ่ง ปัญหานั้นจะประกอบด้วยสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่กำหนดมาให้ ค่าผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact solution) ดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าของตัวแปรต่าง ๆ กันตามตำแหน่งต่าง ๆ บนรูปร่างลักษณะของปัญหานั้น หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าผลเฉลยแม่นยำตรงประกอบด้วยค่าต่าง ๆ ทั้งหมดนับเป็นจำนวนอนันต์ค่า แทนที่จะทำการหาค่าแม่นยำที่ประกอบด้วยค่าต่าง ๆ จำนวนมากมายเช่นนี้ ซึ่งสำหรับปัญหาในทางปฏิบัติจะทำได้ หลักการก็คือ ทำการเปลี่ยนค่าทั้งหมดที่มีจำนวนอนันต์ค่านั้นมาเป็นค่าโดยประมาณที่มีจำนวนนับได้ (finite) ด้วยการแทนรูปร่างลักษณะของปัญหาด้วยเอลิเมนต์ (element) ซึ่งมีขนาดต่าง ๆ กัน

โดยหลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จะเริ่มต้นจากการพิจารณาเอลิเมนต์ทีละเอลิเมนต์ โดยทำการสร้างสมการสำหรับแต่ละเอลิเมนต์ที่ตั้งอยู่บนรากฐานที่ว่า สมการที่สร้างขึ้นมานั้นจำเป็นต้องสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่ทำอยู่ จากนั้นนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่สร้างขึ้นมาได้ มาประกอบกันเข้าก่อให้เกิดระบบสมการชุดใหญ่ ซึ่งในความหมายทางกายภาพ ก็คล้ายกับการนำทุกเอลิเมนต์มาประกอบรวมเข้าด้วยกันก่อให้เกิดรูปร่างลักษณะทั้งหมดของปัญหาที่แท้จริง จากนั้นจึงทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ให้มาลงในระบบสมการชุดใหญ่แล้วจึงทำการแก้สมการดังกล่าว ซึ่งจะก่อให้เกิดผลเฉลยโดยประมาณที่ต้องการ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ของปัญหานั้น

เป็นคำอธิบายในลักษณะกว้าง ๆ เพื่อที่จะให้เห็นภาพรวมของระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ ได้ อธิบายในขั้นต้นว่าทำไมถึงต้องใช้ระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะซึ่งจะกล่าวถึงข้อแตกต่างของวิธี ผลต่างสี่เหลี่ยมและระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ

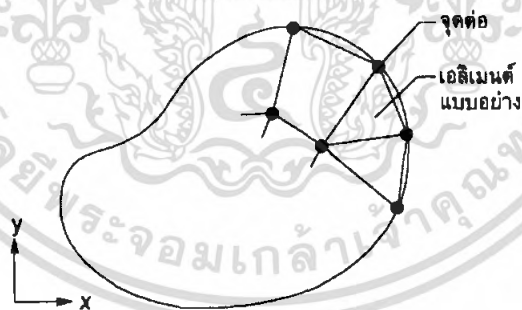
3.6.2 ข้อแตกต่างระหว่างวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยมและระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะ

วิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม เป็นการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical method) เพื่อใช้ในการหา ผลเฉลยโดยประมาณของปัญหาที่กำหนดมาให้ หลักการของวิธีนี้คือ การแทนตัวอนุพันธ์ที่ปรากฏ อยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์ ด้วยสมการทางพีชคณิตโดยประมาณ ซึ่งอยู่ในรูปของตัวแปร ณ จุดต่อ ต่าง ๆ ในขอบเขตของรูปร่างของลักษณะปัญหานั้น

ส่วนระเบียบวิธีขึ้นประกอบอันตะเป็นการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณ ของปัญหาที่กำหนดมาให้เช่นกัน โดยแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่จะใช้ในการคำนวณออกเป็น ชั้นส่วนย่อยๆที่เรียกว่าเอลิเมนต์เอลิเมนต์เหล่านี้เชื่อมต่อกันที่จุดต่อ(Nodes) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะ คำนวณค่าตัวแปรตาม (dependent variables) ที่ต้องการ

3.6.3 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

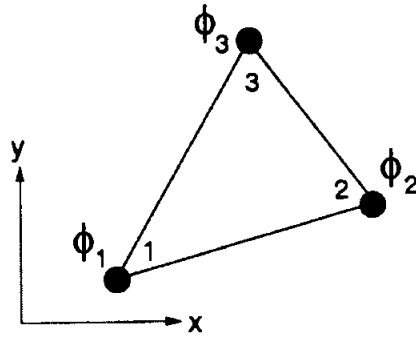
วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ทั้งหมด 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้
ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการที่จะหาผลลัพธ์นั้นออกเป็นเอลิ เมนต์ย่อย ๆ ดังรูปที่ 3.11 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่าง ๆ กัน



รูปที่ 3.11 แสดงถึงการแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่าง ๆ

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกประมาณฟังก์ชันภายในเอลิเมนต์ (element interpolation function) เช่น เอลิ เมนต์สามเหลี่ยม เอลิเมนต์ ดังกล่าวประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2, 3 ดังแสดงในรูปที่ 3.12 โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งก็คือ ϕ_1 , ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวที่ไม่รู้ ค่าที่จุดต่อเหล่านี้อาจเป็นค่าการยึดหรือหดตัว หากเราทำปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจ

เป็นค่าอุณหภูมิ หากเราทำปัญหาเกี่ยวกับ ปัญหาการถ่ายเทความร้อน หรือไม่ก็อาจเป็นปัญหาการถ่ายเทของของเหลว เป็นต้น



รูปที่ 3.12 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่าง ประกอบด้วยสามจุดต่อ

เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่าง ประกอบด้วยสามจุดต่อ โดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ ลักษณะการกระจายตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อดังนี้

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad (3.19)$$

โดย $N_i(x, y)$, $i=1,2,3$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ จากสมการที่ (3.19) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{Bmatrix} \\ &= [N]_{(1 \times 3)} \begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{Bmatrix}_{(3 \times 1)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

โดย $[N]$ คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณค่าภายในเอลิเมนต์
 $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น
 ซึ่งสัญลักษณ์ $[]$ หมายถึงเมทริกซ์ในแนวนอน
 และ $\{ \}$ หมายถึงเมทริกซ์ในแนวตั้ง

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ ดังตัวอย่างเช่น สมการเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่าง จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (3.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น $[k]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e$ (3.22)

ขั้นตอนที่ 3 นี้ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการที่ (3.7) สามารถทำได้โดย

- ก. วิธีการโดยตรง (direct approach)
- ข. วิธีการแปรผัน (variable approach)
- ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals)
- ง.

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้น ในรูปแบบดังนี้

$$\sum (\text{elementequation}) \Rightarrow [k]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (3.23)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต ลงในสมการ (3.23) แล้วจึงทำการแก้สมการนั้นเพื่อหาค่า $\{\phi\}_{\text{sys}}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ของโครงสร้าง หรือค่าของอุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ เมื่อเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่าง ๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถทำการหาค่าอื่น ๆ ที่ต้องการทราบต่อไปได้ เช่น เมื่อรู้อุณหภูมิที่จุดต่าง ๆ ก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ เป็นต้น

3.6.4 การสร้างสมการโดยวิธีการแปรผัน

3.6.4.1 วิธีการแปรผัน (variation method): ในการแก้ปัญหาภาวะต่อเนื่อง ไม่ว่าจะ เป็นทางด้านของแข็ง ของไหล ฯลฯ ปกติเราสามารถทำได้ 2 วิธี คือ

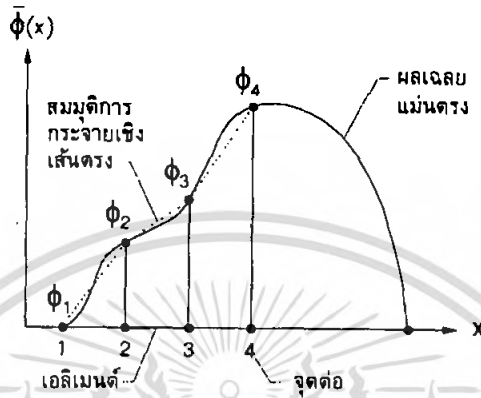
- ก. โดยการใช้สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ร่วมกับการใช้เงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสม
- ข. โดยการใช้สูตรการแปรผัน (variation formulation)

หลักการสำคัญในการใช้สูตรการแปรผันก็คือ เราจำเป็นต้องทำการหาหรือสร้างฟังก์ชัน ซึ่งเมื่อเราทำการหาค่าต่ำสุด (Minimization) ของฟังก์ชันนั้นแล้ว จะเป็นผลให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์และเงื่อนไขขอบเขตที่สอดคล้องกับปัญหาที่เราทำการแก้ปัญหานั้น ดังตัวอย่างเช่น สมการอนุพันธ์ ต่อไปนี้

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -f(x) \quad (3.24)$$

โดย $u = u(x)$ และเงื่อนไขขอบเขตที่เหมาะสมนั้นจะมีความสมมูลกัน

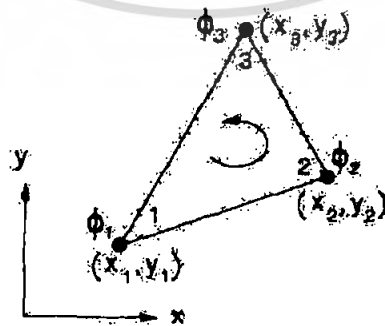
การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในวิธีการแปรผัน จะเริ่มจากการสมมติผลเฉลยโดยประมาณขึ้นมาซึ่งครอบคลุมทั้งขอบเขตปัญหาที่กำหนดมาให้ โดยจะมีการแบ่งขอบเขตออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในรูปที่ 3.6 ซึ่งต่อกันที่จุดต่อต่าง ๆ โดยค่าที่จุดต่อ $\phi_i, i = 1, 2, 3, \dots$ นั้นไม่รู้ค่า และต้องการหาการกระจายของผลเฉลยระหว่างจุดต่อ อาจสมมติให้อยู่ในรูปแบบที่ง่าย เช่น ในลักษณะเชิงเส้นตรงดังแสดงในรูปที่ 3.13 เป็นต้น



รูปที่ 3.13 การแบ่งขอบเขตออกเป็นไฟไนต์เอลิเมนต์ย่อย

3.6.4.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติ

ปัญหาส่วนใหญ่ในสองมิติจะใช้เอลิเมนต์ที่มีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม ทั้งนี้ก็เพราะว่าลักษณะขอบเขตของปัญหาแบบสองมิติทั่ว ๆ ไปสามารถแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อย ๆ ได้โดยง่าย อีกทั้งสมการเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามารถสร้างขึ้นได้โดยง่ายและนำไปใช้ในการประดิษฐ์โปรแกรมได้โดยสะดวกด้วย เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบที่ง่ายที่สุดประกอบด้วยสามจุดต่อ หมายเลข 1, 2, 3 ซึ่งวนอยู่ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ดังแสดงในรูปที่ 3.14 โดยที่จุดต่อซึ่งอยู่ตำแหน่ง $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3$ เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า ϕ_i การสร้างฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมก็สามารถทำได้เช่นเดียวกับเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ ซึ่งเอลิเมนต์สามเหลี่ยมเราจะเริ่มโดยสมมุติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณแบบแผ่นเรียบบนเอลิเมนต์ นั่นคือ



รูปที่ 3.14 เอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.25)$$

โดย α_i , $i=1,2,3$ เป็นค่าคงตัว ซึ่งหาได้จากเงื่อนไขที่จุดต่อทั้งสาม ดังนี้

$$\text{จุดต่อที่ 1: } \phi(x_1, y_1) = \phi_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1$$

$$\text{จุดต่อที่ 2: } \phi(x_2, y_2) = \phi_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2$$

$$\text{จุดต่อที่ 3: } \phi(x_3, y_3) = \phi_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3$$

จากทั้ง 3 สมการนี้ เราสามารถหาค่า α_i , $i=1,2,3$ ให้อยู่ในรูปของค่าที่จุดต่อ ϕ_i และตำแหน่งของจุดต่อ (x_i, y_i) ซึ่งหลังจากแทนกลับลงไปในสมการ (3.25) แล้วทำการจัดพจน์ต่าง ๆ เราจะได้ลักษณะของการกระจายของผลเฉลยสำหรับเอลิเมนต์ที่อยู่ในรูป

$$\phi(x, y) = \begin{bmatrix} N_1(x, y) & N_2(x, y) & N_3(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ \phi \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \times 3 \\ 3 \times 1 \end{matrix}$$

โดย $[N]$ เรียกว่า เมทริกซ์ของการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element Interpolation matrix)

$\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ของตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (vector of nodal unknowns)

และในที่นี้

$$N_i(x, y) = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i=1,2,3 \quad (3.26)$$

โดย $A =$ พื้นที่ของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

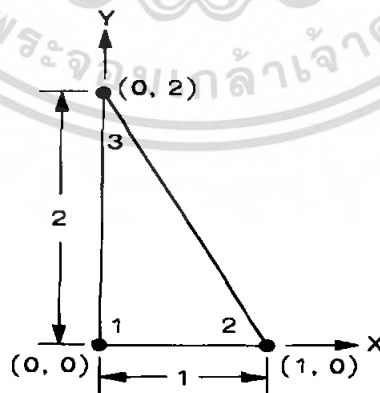
$$A = \frac{1}{2} [x_2(y_3 - y_1) + x_1(y_2 - y_3) + x_3(y_1 - y_2)] \quad (3.27)$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2$$

$$a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3, \quad b_2 = y_3 - y_1, \quad c_2 = x_1 - x_3$$

$$a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad b_3 = y_1 - y_2, \quad c_3 = x_2 - x_1 \quad (3.28)$$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจในลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ เราจะพิจารณาเอลิเมนต์ ดังแสดงในรูปที่ 3.15 ซึ่งจะมีขนาดและตำแหน่งของจุดต่อต่าง ๆ ดังนี้



รูปที่ 3.15 ตัวอย่างเอลิเมนต์สามเหลี่ยม

$$x_1 = 0 \quad y_1 = 0$$

$$x_2 = 1 \quad y_1 = 0$$

$$x_3 = 0 \quad y_1 = 2$$

จากสมการ(3.13) พื้นที่ของเอลิเมนต์คือ $A = \frac{1}{2}[1(2-0) + 0(0-2) + 0(0-0)]$

และจากสมการ(3.14) สัมประสิทธิ์ a_i, b_i, c_i , $i = 1, 2, 3$ คือ

$$a_1 = (1)(2) - (0)(0) = 2 \quad b_1 = 0 - 2 = -2 \quad c_1 = 0 - 1 = -1$$

$$a_2 = (0)(0) - (0)(2) = -2 \quad b_2 = 2 - 0 = 2 \quad c_2 = 0 - 0 = 0$$

$$a_3 = (0)(0) - (1)(0) = 0 \quad b_3 = 0 - 0 = 0 \quad c_3 = 1 - 0 = 1$$

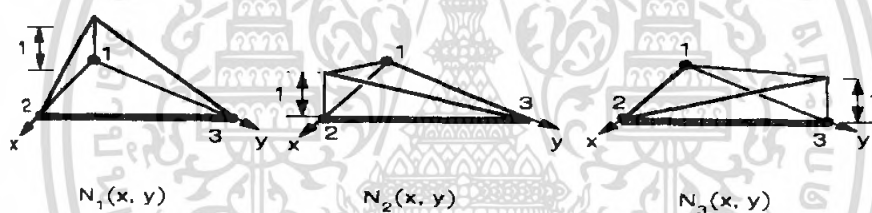
ดังนั้นฟังก์ชันการประมาณการภายในเอลิเมนต์นี้คือ

$$N_1 = \frac{1}{2(1)}(2 + (-2)x + (-1)y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$$

$$N_2 = \frac{1}{2(1)}(0 + (2)x + (0)y) = x$$

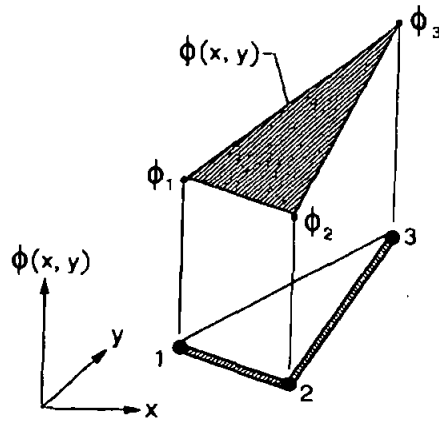
$$N_3 = \frac{1}{2(1)}(0 + (0)x + (1)y) = \frac{1}{2}y$$

ซึ่งต่างมีการกระจายในลักษณะแผ่นเรียงดังแสดงในรูปที่ 3.16



รูปที่ 3.16 ลักษณะการกระจายของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ฟังก์ชันการประมาณภายใน N_i เหล่านี้ เมื่อนำไปคูณกับค่าที่จุดต่อ ϕ ดังแสดงในสมการ (3.23) จะก่อให้เกิดลักษณะของการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณภายในเอลิเมนต์ดังแสดงในรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณภายในเอลิเมนต์

3.6.4.3 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสองมิติโดยวิธีการแปรผัน

เพื่อแสดงลำดับขั้นตอนการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสองมิติโดยวิธีการแปรผัน เราจะยกตัวอย่างง่าย ๆ เช่น ปัญหาที่เป็นไปตามสมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้น ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการปัวส์ซอง ดังนี้

$$\nabla^2 \phi = \int_A \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \right] dx dy = -f(x, y) \quad (3.29)$$

สมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบนี้พบกันมากในงานออกแบบ ตัวอย่างเช่น สมการการกระจายของอุณหภูมิในสถานะอยู่ตัว (steady-state) บนแผ่นโลหะซึ่งได้รับความร้อนที่ผิว เป็นต้น หากแผ่นโลหะมีรูปร่างหรืออยู่ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ซับซ้อนจะเป็นการยากที่จะหาผลเฉลยแม่นยำได้ แต่ปัญหาเช่นนี้ สามารถทำได้โดยง่ายหากเราใช้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถสร้างได้โดยการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันการแปรผันที่สอดคล้องกับสมการ (3.29) ก็คือ

$$J(\phi) = \int_A \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - f\phi \right] dx dy \quad (3.30)$$

หากเราใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมซึ่งมีจุด 3 จุดต่อ โดยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ คือ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ดังกล่าวที่ได้แสดงในรูปที่ 3.10 เราจะได้สมการเอลิเมนต์ทั้งหมด 3 สมการ จากการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันการแปรผัน J ที่เกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อทั้งสามนั้น

เราเริ่มทำการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันการแปรผัน J ที่เกี่ยวข้องกับ ϕ_1 จะได้

$$\frac{\partial J}{\partial \phi_1} = \int_A \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - f \frac{\partial \phi}{\partial \phi_1} \right] dx dy \quad (3.31)$$

เนื่องจาก

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad & \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_3 \\
 \text{และ} \quad & \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial x} \\
 \text{ในทำนองเดียวกัน} \quad & \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_3 \\
 & \frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial N_1}{\partial y} \\
 \text{และ} \quad & \frac{\partial \phi}{\partial \phi_1} = N_1
 \end{aligned}$$

เมื่อแทนพจน์เหล่านี้ลงในสมการ (3.17) จะได้

$$\int_A \left[\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_3 \right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_1 + \frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_2 + \frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_3 \right) \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \right) - f N_1 \right] dx dy = 0$$

จากนั้นจึงคูณออกมาและจัดเรียงพจน์ใหม่จะได้

$$\begin{aligned}
 & \int_A \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy \phi_1 + \int_A \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy \phi_2 \\
 & + \int_A \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) dx dy \phi_3 = \int_A f N_1 dx dy
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

ซึ่งเป็นสมการที่จากการหาค่าต่ำสุดของ J ที่เกี่ยวข้องกับ ϕ_1 ในทำนองเดียวกันเราจะได้สมการที่สองและสามหากเราทำการหาค่าต่ำสุดของ J ที่เกี่ยวข้องกับ ϕ_2 และ ϕ_3 ตามลำดับทั้งสามสมการที่ได้นี้ คือ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการของเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \phi \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\text{หรือ} \quad \underset{(3 \times 3)}{[k]}^{(e)} \underset{(3 \times 1)}{\{\phi\}}^{(e)} = \underset{(3 \times 1)}{\{F\}}^{(e)} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
 \text{โดย} \quad K_{ij} &= \int_A \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \\
 F_i &= \int_A f N_i dx dy \quad i, j = 1, 2, 3
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

แต่จากสมการ (3.26) ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้สร้างมาแล้วคือ

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2A}$$

แทนกลับลงในสมการ (3.34) จะได้

$$\begin{aligned}
 K_{ij} &= \int_A \left(\frac{b_i b_j}{2A 2A} + \frac{c_i c_j}{2A 2A} \right) dx dy \\
 &= \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4A^2} \int_A dx dy \\
 K_{ij} &= \frac{b_i b_j + c_i c_j}{4A} \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน หากค่า f ในสมการ (2.35) คงที่เราจะได้

$$\begin{aligned}
 F_i &= f \int_A N_i dx dy \\
 &= f \int_A \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) dx dy \\
 F_i &= \frac{fA}{3} \tag{3.37}
 \end{aligned}$$

สมการ (3.37) นั้นสามารถอินทิเกรตได้ง่าย ๆ โดยใช้สูตรที่ว่า

$$\int_A N_1^\alpha N_2^\beta N_3^\chi dx dy = \frac{\alpha! \beta! \chi!}{(\alpha + \beta + \chi + 2)!} \cdot 2A \tag{3.38}$$

ดังตัวอย่างเช่น หาก $\alpha = 1, \beta = \chi = 0$ เราจะได้

$$\begin{aligned}
 \int_A N_1 dx dy &= \frac{1! 0! 0!}{(1+0+0+2)!} \cdot 2A \\
 &= \frac{2A}{3!} = \frac{A}{3} \quad \text{เป็นต้น}
 \end{aligned}$$

ซึ่งในหัวข้อนี้เราได้เรียนรู้ลำดับขั้นตอนในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์แบบสองมิติโดยวิธีการแปรผัน เราพบว่าประโยชน์ของวิธีการนี้คือเราสามารถสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ขึ้นมาได้โดยง่ายอย่างไรก็ตามวิธีการนี้ก็มีจุดอ่อนซึ่งก็คือ เราจำเป็นต้องรู้ฟังก์ชันการแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ ซึ่งสำหรับปัญหาหลาย ๆ ชนิดในทางปฏิบัติ เช่น การคำนวณปรากฏการณ์ของของไหลบางอย่าง เราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นมาได้ แต่ไม่สามารถหาฟังก์ชันการแปรผันที่สอดคล้องกันนั้นได้ สาเหตุเช่นนี้เอง จึงเป็นผลทำให้การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ ในช่วงหลังได้มีการพัฒนาวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์นี้โดยการใช้สมการอนุพันธ์โดยตรง ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

3.6.5 การสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

เราได้ทราบหลักการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการแปรผัน สมการเหล่านี้สามารถสร้างขึ้นได้โดยง่ายหากเรารู้ฟังก์ชันการแปรผันที่สอดคล้องกับปัญหาที่เราจะแก้ นั่น แต่สำหรับปัญหาทั่ว ๆ ไปในทางปฏิบัติ โดยปกติเราจะรู้เพียงแต่สมการเชิงอนุพันธ์ และไม่สามารถหาฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องได้ จึงต้องเรียนรู้วิธีการหนึ่งที่เรียกว่าวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method

of weighted residuals) คือหลักการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากการใช้สมการอนุพันธ์โดยตรง โดยไม่จำเป็นต้องรู้ฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกัน โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง สามารถจำแนกออกได้หลายวิธีการย่อย แต่วิธีที่สะดวกหลาย ๆ อย่างในการนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่จะกล่าวถึง ก็คือ วิธีการกาลอร์กิน (Galerkin)

3.6.5.1 วิธีการกาลอร์กิน (Galerkin)

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยวิธีการกาลอร์กิน ทำโดยการคูณฟังก์ชันเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นทำการอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนแล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_{\Omega} R(t) W_i(t) dt = 0 \quad (3.39)$$

และเนื่องจากเราต้องการ 2 สมการดังนั้นค่า $i = 1, 2$ การเลือกฟังก์ชันน้ำหนัก $W_i(t)$ นั้นโดยปกติจะเลือกจากฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับตัวไม่รู้ค่า C_1 และ C_2 ที่ปรากฏอยู่ในสมการของผลเฉลยโดยประมาณ

$$X(t) = 1 + C_1 \underbrace{t}_{W_1} + C_2 \underbrace{t^2}_{W_2} \quad (3.40)$$

แทน $W_1 = t$ และ $W_2 = t^2$ ลงในสมการ (3.25) จะได้

$$\int_0^1 R(t) t dt = 0 ; \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{6}C_1 + \frac{11}{12}C_2 = 0$$

$$\int_0^1 R(t) t^2 dt = 0 ; \quad \frac{1}{3} + \frac{7}{12}C_1 + \frac{7}{10}C_2 = 0$$

และจาก 2 สมการนี้ เราจะได้

$$C_1 = -0.9143 \quad \text{และ} \quad C_2 = 0.2857 \quad \text{ดังนั้น}$$

$$x(t) = 1.0.9143t + 0.2857t^2 \quad (3.41)$$

อนึ่ง ด้วยเหตุผลหลาย ๆ ประการดังที่ได้อธิบายในตอนท้ายของหัวข้อย่อยนี้ เราจะใช้วิธีการกาลอร์กินนี้ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ในเอลิเมนต์ต่าง ๆ เช่น ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์หนึ่งมิติ ดังเช่นสมการดังนี้

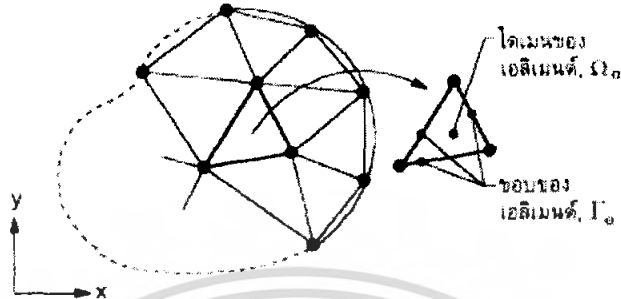
$$\phi = \underbrace{N_1}_{W_1} \phi_1 + \underbrace{N_2}_{W_2} \phi_2 \quad (3.42)$$

ในที่นี้ ϕ_1 และ ϕ_2 คือตัวไม่รู้ค่าเช่นเดียวกับ C_1 และ C_2 ในสมการ (3.40) ดังนั้น N_1 และ N_2 สามารถนำไปใช้เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก W_1 และ W_2 ในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้

3.6.5.2 วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างสำหรับไฟไนต์เอลิเมนต์

3.6.5.2.1 ลำดับขั้นตอนทั่วไป

การแก้ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษคก้างประกอบด้วยลำดับ
ขั้นตอน ที่สำคัญ 6 ขั้นตอนดังต่อไปนี้
ขั้นที่ 1 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย เช่น แบ่ง
ออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อย ๆ สำหรับปัญหาในสองมิติ



รูปที่ 3.18 การแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์

จากนั้นให้ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการแก้ นั้น สมการเชิง
อนุพันธ์โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$L(\bar{\phi}) = 0 \quad (3.43)$$

โดย L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator)

$\bar{\phi}$ คือ ตัวแปรตามแน่นอนตรง

ขั้นที่ 2 สมมุติลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ให้อยู่ในรูป

$$\phi = \phi(x, y) \sum_{i=1}^m N_i \phi_i = [N] \{\phi\} \quad (3.44)$$

โดย m คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น

N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ϕ_i คือ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

ขั้นที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยวิธีการถ่วงน้ำหนักของเศษคก้างหากเราแทนผลเฉลย
โดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.30) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.29) เราจะพบว่า

$$L(\phi) \text{ จะ } \neq 0 \quad \text{แต่จะ } = R$$

$$\text{ซึ่ง } R \text{ คือ เศษคก้าง (Residual) นั้นหมายถึง } R = L(\phi) = L([N] \{\phi\}) = L\left(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i\right) \quad (3.45)$$

และจากวิธีการเลอร์คิน (Galerkin) ดังที่ได้อธิบายในหัวข้อย่อย 3.6.5.1 ซึ่งมีขั้นตอน โดยเริ่มจากการ
คูณเศษคก้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมน
ของเอลิเมนต์นั้น แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int W_i R d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.46)$$

และโดยปกติเราจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าบับโนฟ-กาเลอร์กิน (Bubnov-Galerkin) แต่หากเราเลือก $W_i = N_{i,1}$ ซึ่งใช้กับปัญหาบางชนิดจะเรียกว่าเพโทรฟ-กาเลอร์กิน (Petrov-Galerkin) **ขั้นที่ 4** อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) ซึ่งหากเราแทนสมการ (3.45) ลงในสมการ (3.46) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^{(e)}} W_i R d\Omega &= \int_{\Omega^{(e)}} W_i L \left(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i \right) d\Omega \\ &= \underbrace{\int_{\Omega^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Omega} + \underbrace{\int_{\Gamma^{(e)}} (W_i, N_i, \phi_i) d\Gamma} = 0 \end{aligned}$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขต
ของเอลิเมนต์ $\Omega^{(e)}$ ของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$

ขั้นที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma^{(e)}$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่นๆที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะทำให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น

ขั้นที่ 6 จากนั้นจึงเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ นั่นคือ

$$[K] \{\phi\} = \{F\} \quad (3.47)$$

$(n \times n) \quad (n \times 1) \quad (n \times 1)$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งเกร็ง (Element Stiffness Matrix)
 $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่างๆ ของเอลิเมนต์
 $\{F\}$ คือ โหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์นั้น

เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังเช่นแสดงในสมการ (3.30) แล้ว ลำดับขั้นตอนต่อไปก็ทำเช่นเดียวกันกับที่ได้อธิบายข้างต้น กล่าวคือ รวมสมการของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดสมการระบบรวม จากนั้นก็กำหนดกฎเกณฑ์ขอบเขต แล้วจึงแก้สมการระบบรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่างๆ

3.7 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และการอินทิเกรตเอลิเมนต์เมทริกซ์เชิงตัวเลข

เราได้ศึกษาขั้นตอนในการสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยวิธีการแปรผันและโดยวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างตามลำดับ เราได้พบว่า ขั้นตอนที่สำคัญขั้นตอนหนึ่งในวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ การเลือกลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation functions) การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสามารถเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้ และหากผู้ผู้มีความเข้าใจในลักษณะของปัญหานั้น ๆ ได้โดยอ้อมแท็กก็สามารถประคิษฐ์

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงได้สำหรับปัญหาในบางกรณี

3.7.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์สองมิติ

3.7.1.1 เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมเป็นเอลิเมนต์ที่นิยมใช้กันมากเนื่องจากแบบจำลองของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยเอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวนมากสามารถสร้างขึ้นมาได้โดยง่ายและโดยอัตโนมัติ เราได้ศึกษาเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อตรงแสดงในรูปที่ 3.14 และได้ทำการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมนั้น โดยเริ่มจาก

การสมมุติลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในลักษณะการกระจายแบบแผ่นเรียบ (flat plane) กล่าวคือ

$$\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (3.48)$$

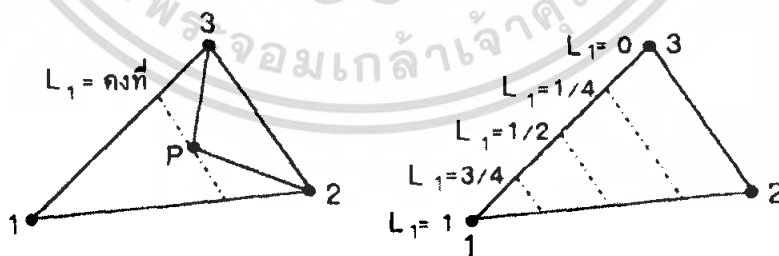
โดย $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ เป็นค่าคงตัวที่หาได้จากเงื่อนไขของค่าที่ตำแหน่งจุดต่อทั้งสาม หลังจากนั้นเราสามารถเขียนลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในรูปแบบของค่าที่จุดต่อ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ได้ดังนี้

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 \quad (3.49)$$

โดย $N_i, i = 1, 2, 3$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของพิกัด x, y ดังแสดงในสมการ (3.26) และค่ามีลักษณะการกระจายในรูปแบบของแผ่นเรียบดังแสดงในรูปที่ 3.9 เช่นเดียวกับเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ การกระจายของผลเฉลยที่ได้โดยประมาณของเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดธรรมชาติ ดังนี้

$$\phi = L_1 \phi_1 + L_2 \phi_2 + L_3 \phi_3 \quad (3.50)$$

โดย $L_i, i = 1, 2, 3$ สามารถอธิบายได้โดยการพิจารณารูปที่ 3.19



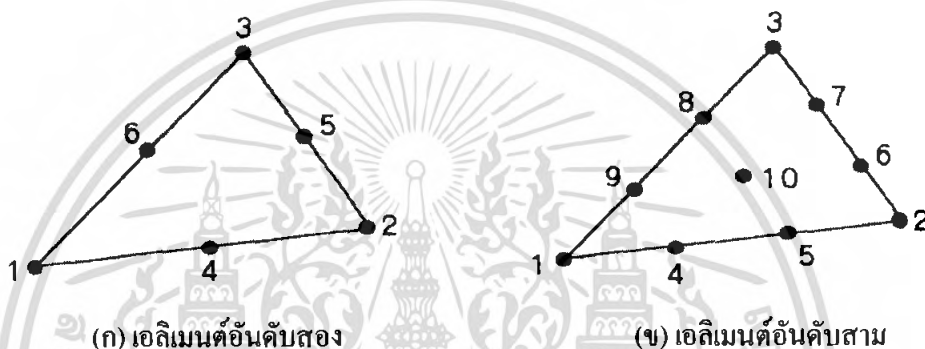
รูปที่ 3.19 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

เช่น $L_1 = (\text{พื้นที่สามเหลี่ยม P23}) / (\text{พื้นที่สามเหลี่ยม 123})$ เป็นต้น นั่นคือ ตลอดแนวเส้นตรงระหว่างจุดต่อ 2 และ 3 ค่า L_1 นี้จะเท่ากับศูนย์ และบนเส้นประซึ่งขนานกับเส้นตรงระหว่างจุดต่อ

2 และ 3 นี้แสดงในรูปเล็กซ้ายมือ ค่า L_1 จะมีค่าคงตัวไม่ว่าจุด P จะอยู่ ณ ตำแหน่งใดบนเส้นประนี้ และค่า L_1 นี้จะแปรผันในลักษณะเชิงเส้นตรงจากศูนย์จนถึงหนึ่งดังแสดงในรูปเล็กขวามือ ในทำนองเดียวกัน L_2 และ L_3 คืออัตราส่วนระหว่างพื้นที่สามเหลี่ยม P31 และ P12 ต่อพื้นที่สามเหลี่ยม 123 ตามลำดับ เนื่องจากฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ L_1, L_2 และ L_3 ต่างอยู่ในรูปของอัตราส่วนของพื้นที่ ดังนั้นจึงถูกเรียกกันโดยทั่วไปว่าเป็นฟังก์ชันการประมาณภายใน ในรูปแบบพิกัดของพื้นที่ (area coordinates) และสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของพิกัด x, y ได้เช่นเดียวกับสมการ (3.26) นั่นคือ

$$L_i = N_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.51}$$

เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมอาจประกอบด้วยจุดต่อมากกว่า 3 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 3.20 ซึ่งประกอบด้วยเอลิเมนต์อันดับสอง (quadratic) และอันดับสาม (cubic)



รูปที่ 3.20 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมอันดับสูงที่ประกอบด้วยหลายจุดต่อ

ฟังก์ชันการประมาณภายในของเอลิเมนต์เหล่านี้สามารถสร้างขึ้นได้โดยง่ายให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดของพื้นที่ $L_i, i = 1, 2, 3$ ดังแสดงในสมการ (3.51) และ (3.38) ดังนี้

เอลิเมนต์อันดับสอง :

$$\text{จุดต่อที่มุม} \quad N_i = L_i(2L_i - 1), \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.52}$$

$$\text{จุดต่อที่ด้าน} \quad N_4 = 4L_1L_2 \tag{3.53}$$

เอลิเมนต์อันดับสาม :

$$\text{จุดต่อที่มุม} \quad N_i = \frac{1}{2}(3L_i - 1)(3L_i - 2) \tag{3.54}$$

$$\text{จุดต่อที่ด้าน} \quad N_4 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 1) \tag{3.55}$$

$$N_5 = \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1 - 2) \tag{3.55}$$

$$\text{จุดตรงกลาง} \quad N_{10} = 27L_1L_2L_3 \tag{3.56}$$

ในหัวข้อนี้เราจะมาทำการศึกษาลักษณะและขั้นตอนการสร้างฟังก์ชันการประมาณภายใน เอลิเมนต์ของเอลิเมนต์ในรูปแบบสองมิติ จากนั้นเราจะได้ศึกษาวิธีการคำนวณเอลิเมนต์เมทริกซ์ต่าง ๆ โดยการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่ได้สร้างขึ้นมานี้ ซึ่งในบางกรณีเราจำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical integration) เพื่อการคำนวณหาเอลิเมนต์เมทริกซ์เหล่านี้ ขั้นตอนดังกล่าวมีความสำคัญที่จำเป็นต้องทำความเข้าใจเพื่อช่วยในการประดิษฐ์ไฟไนต์เอลิเมนต์โปรแกรมคอมพิวเตอร์หรือการใช้โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่ว ๆ ไปได้อย่างถูกต้อง

3.8 เทคนิคการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

(Technique for solving system of linear equation)

ในการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสิ่งที่ต้องคำนึงถึงคือ จำนวนสมการจะต้องมีไม่น้อยกว่าจำนวนตัวแปร จึงจะเพียงพอในการหาผลเฉลยของระบบสมการนั้น สำหรับวิธีการแก้ระบบสมการสามารถทำได้หลายวิธีด้วยกัน ทั้งเทคนิคโดยตรง (Direct technique) และเทคนิคโดยอ้อม (Indirect technique) โดยแต่ละเทคนิคจะมีวิธีการหาคำตอบ ความแม่นยำรวมทั้ง ข้อดีและข้อเสียต่างกัน การหาคำตอบในวิทยานิพนธ์นี้จะใช้เทคนิคโดยอ้อม

เทคนิคโดยอ้อม หรืออาจหมายถึง เทคนิคการทำซ้ำ (Iterative technique) คือเทคนิคในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น $A\vec{x} = \vec{b}$ โดยเริ่มจากประมาณค่าเริ่มต้น $\vec{x}^{(0)}$ ไปแทนในสมการเพื่อหาค่า \vec{x} และให้ $\vec{x}^{(1)}$ แทนผลเฉลย จากนั้นสร้างลำดับของเวกเตอร์คำตอบ $\left\{ \vec{x}^{(k)} \right\}_{k=0}^{\infty}$ จนกระทั่งคู่เข้าสู่ผลเฉลย \vec{x}

เทคนิคการทำซ้ำนี้ ส่วนมากจะไม่ค่อยนำมาแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีมิติน้อยๆ เนื่องจากเวลาที่ใช้ในการคำนวณเพื่อให้ได้คำตอบที่แม่นยำทำได้ยาวนานกว่าวิธีเทคนิคโดยตรง สำหรับสมการใหญ่ การคำนวณด้วยเทคนิคการทำซ้ำ จะมีประสิทธิภาพสูงกว่าทั้งในเรื่องการจัดสรรหน่วยความจำในคอมพิวเตอร์ และเวลาที่ใช้ในการคำนวณ (Computational time) ดังนั้นวิธีการแบบนี้จึงเป็นที่นิยมกันมาก

การหาผลเฉลยของปัญหาในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial difference equations) และปัญหาค่าขอบ (Boundary value problem) บางปัญหาจำเป็นต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขซึ่งมีหลายวิธีด้วยกันดังนี้

3.8.1 ระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบจาโคบี (Jacobi Iterative Method)

ในการศึกษาระเบียบวิธีการทำซ้ำแบบจาโคบี (Jacobi Iterative Method) วิธีนี้จะเป็นการประมาณค่าผลเฉลย x_i ลำดับที่ i ของระบบสมการ $\vec{A}\vec{x} = \vec{b}$ ณ เวลา k โดยการจัดสมการ $\vec{A}\vec{x} = \vec{b}$ ใหม่ให้อยู่ในรูปของผลรวม

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j = b_i$$

หรือเขียนเป็นเมทริกซ์จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

แล้วทำการย้ายนิพจน์ทางซ้ายที่ไม่ได้อยู่ในแนวทแยงไปไว้ทางขวาของสมการ

$$a_{ii} x_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j + b_i$$

นำสัมประสิทธิ์ของ x_i ในแนวทแยง (a_{ii}) หาคancelออกจะได้

$$x_i = \frac{- \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j + b_i}{a_{ii}} \quad \text{โดยที่ } a_{ii} \neq 0$$

หรือเขียนในรูปเมทริกซ์จะได้เป็น

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & \cdots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1}/a_{mn} & -a_{m2}/a_{mn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_m/a_{mn} \end{bmatrix}$$

หลังจากการเลือกเวกเตอร์เริ่มต้น $x^{(0)}$ แล้วลำดับของเวกเตอร์คำตอบ ณ เวลา k จะกำหนดโดย

$$x_j^{(k)} = \frac{- \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}, \quad \text{โดยที่ } (a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, 3, \dots, n, k \geq 1) \quad (3.57)$$

ในการหาผลเฉลยจะประมาณค่า $x^{(0)}$ เป็นค่าเริ่มต้น และจากนั้นให้ทำการคำนวณซ้ำ

$$\text{ตามสมการ } x_j^{(k)} = \frac{- \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}} \quad \text{จนกระทั่งได้ผลเฉลยที่มีความแม่นยำตามต้องการ}$$

เพื่อให้ง่ายแก่ความเข้าใจ เราจะพิจารณาระบบสมการที่ประกอบด้วย 3 สมการย่อยดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

หลักการของวิธีนี้ก็คือการเขียนแต่ละสมการข้อนี้ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถคำนวณ x_1 ได้โดยตรงจากสมการที่ 1 คำนวณ x_2 ได้โดยตรงจากสมการ 2 เช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ดังนี้

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \quad (3.57a)$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3}{a_{22}} \quad (3.57b)$$

$$x_3 = \frac{b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2}{a_{33}} \quad (3.57c)$$

จากนั้นเริ่มทำการคำนวณโดยเริ่มจากการเดาค่าของ x_1, x_2, x_3 และแทนลงในสมการที่ (3.57a)-(3.57c) เพื่อคำนวณหาค่า x_1, x_2, x_3 ใหม่ แล้วทำซ้ำเช่นนี้ไปเรื่อยๆจนผลลัพธ์ของ x_1, x_2, x_3 ต่างเข้าสู่ผลลัพธ์ที่มีความผิดพลาด ε ที่ยอมรับให้ได้ นั่นคือ

$$\left| \frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{x_i^{k+1}} \right| * 100\% < \varepsilon$$

โดยที่ตัวห้อยล่าง $i = 1, 2, 3$ แทนหมายเลขสมการสำหรับระบบสมการในที่นี้ และตัวห้อยบน k แทนการทำซ้ำครั้งที่ k

3.8.2 เทคนิคการทำซ้ำเกาส์ไจเดล (Gauss-Seidel Method)

เทคนิคการทำซ้ำเกาส์ไจเดล หรือเรียกว่า Liebmann's Method เป็นวิธีที่ปรับปรุงมาจากระเบียบวิธีการทำซ้ำจาโคบี โดยการคำนวณครั้งแรกของแต่ละรอบที่ k จะกำหนดเหมือนสมการที่ (3.57) ดังนี้

$$x_j^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i}{a_{ii}}, \quad \text{โดยที่ } a_{ii} \neq 0 \quad (3.58)$$

ส่วนในการคำนวณหา $x_i^{(k)}$ ที่ตำแหน่ง i ถัดไป ($i \neq 1$) เราจะนำค่า $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$ ที่คำนวณแล้วมาใช้คำนวณหา $x_i^{(k)}$ เพื่อเป็นการนำค่าที่เข้าใกล้ผลเฉลยมาใช้ในการคำนวณ ทำให้สามารถหาผลเฉลยได้แม่นยำและคำนวณได้เร็วขึ้น หรือถ้าสมการนั้นไม่สามารถหาผลเฉลยได้ก็จะทำให้ค่าที่กำลังคำนวณลู่ออกเร็วขึ้น สมการที่ใช้ในการคำนวณหา $x_i^{(k)}$ เป็นดังนี้

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}}, \quad (a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \dots, n, k \geq 1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อนำ a_{ii} คูณตลอดทั้งสองสมการ และจัดรูปสมการใหม่จะได้

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} + a_{ii}x_i^{(k)} = -\sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i, \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.59)$$

3.8.3 ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่อง (Successive Over-Relaxation Method)

ระเบียบวิธีการผ่อนปรนเกินสืบเนื่องหรือเรียกว่า SOR เป็นระเบียบวิธีคล้ายคลึงกับระเบียบวิธีการทำซ้ำเกาส์ไจเดล แต่ถูกดัดแปลงให้เกิดอัตราการลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่แท้จริงสูงขึ้น โดยการถ่วงน้ำหนักของค่าที่คำนวณได้จากการทำซ้ำครั้งเก่าและครั้งใหม่ โดยมีหลักการดังนี้

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \omega \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \quad (3.60)$$

เมื่อ ω เป็นตัวประกอบการประมาณค่านอกช่วง (Extrapolation factor)

ถ้า $0 < \omega < 1$ จะเรียกว่า วิธีภายใต้การผ่อนคลาย (Under-relaxation method) ใช้เมื่อระเบียบวิธีของเกาส์ไจเดล ให้ผลเฉลยที่คำนวณไม่ลู่เข้าและต้องการปรับปรุงให้ผลเฉลยลู่เข้า

ถ้า $\omega > 1$ จะเรียกว่า วิธีการเกินผ่อนคลาย (Over-relaxation method) ใช้เมื่อระเบียบวิธีของเกาส์ไจเดล ให้ผลเฉลยที่คำนวณลู่เข้าและอยากเร่งให้ผลเฉลยลู่เข้าเร็วขึ้น

$r_{ij}^{(k)}$ เป็นส่วนประกอบของเวกเตอร์เศษตกค้าง (Residual vector) สำหรับ \vec{x}
 $(\vec{r} = \vec{b} - \vec{A}\vec{x})$
 ที่รอบที่ k โหนดที่ i และ โหนดที่ j

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} \right]$

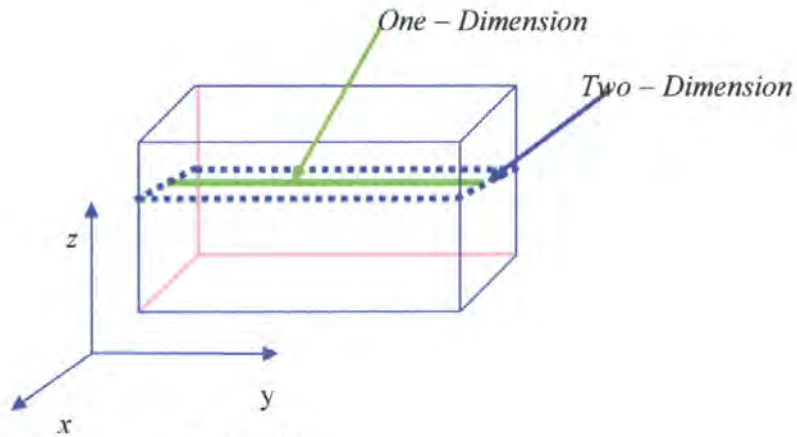
เมื่อนำ a_{ii} คูณตลอดทั้งสองข้าง และจัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$a_{ii}x_i^{(k)} + \omega \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} = (1-\omega)a_{ii}x_i^{(k-1)} - \omega \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k-1)} + \omega b_i \quad (3.61)$$

3.9 ปัญหาการสมการความร้อน

จากปัญหาเราศึกษาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในห้องเมื่อความร้อนผ่านกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยจะพิจารณาขอบเขตและโดเมนของปัญหาความร้อนคั่งรูปที่ 3.21 ต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.21 แสดงแบบจำลองของห้องใน 3 มิติ

3.9.1 ปัญหาสมการความร้อนใน 1 มิติ

สมการ $\frac{\partial T^2}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial T}{\partial t}$; c^2 ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน m^2/s

การเปลี่ยนแปลงของ $T(x,t)$ ขึ้นอยู่กับเวลา

การของปัญหา เราศึกษาใน 2 กรณี คือ

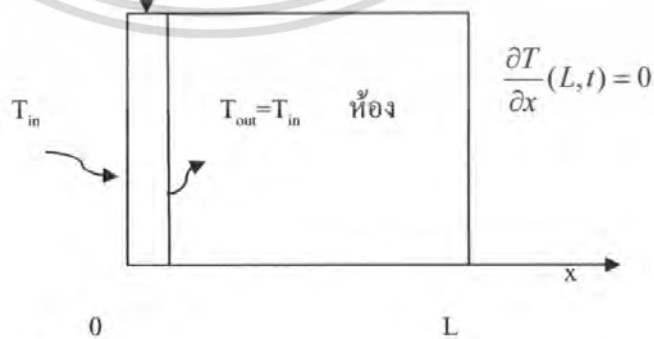
1) กระจกใสมีค่า $c^2 = 4.27 \times 10^{-5} \text{ m}^2/s$

2) ฟิล์มกรองแสงมีค่า $c^2 = 1.218 \times 10^{-4} \text{ m}^2/s$

เนื่องจากปัญหาเราศึกษาการกระจายของ T เมื่อผ่านกระจกและกระจกติดฟิล์มกรองแสง ปัญหาความร้อน และการกำหนดของเขตของปัญหาซึ่งจะพิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

- 1) อุณหภูมิเริ่มต้นของการกระจายอุณหภูมิภายในห้อง ที่ติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง จะเป็นอุณหภูมิที่ผ่านกระจกที่มีความหนา L เมตร
- 2) อุณหภูมิที่ $x = L$ (กระจกและฟิล์ม จะเป็นเงื่อนไขเริ่มต้นของการหาอุณหภูมิภายในห้อง)

ความหนากระจก $T(x,t) = 25 \text{ C}$



รูปที่ 3.22 แสดงการนำความร้อนผ่านกระจก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการความร้อน

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial T}{\partial t} \quad 0 < x < L$$

$$T(0,t) = T(L,t) = 0 \quad , t > 0$$

$$T(x,0) = T_0 \sin \frac{\pi x}{2L}$$

ใช้วิธีการแยกตัวแปร

$$T(x,t) = X(x)T(t)$$

ดังนั้น

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha T} = -\lambda^2 \quad , -\lambda^2$$

จะได้สมการ

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

จะได้ผลเฉลย

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

และ

$$T' + \lambda^2 c^2 T = 0$$

$$T(t) = c_3 e^{-\lambda^2 c^2 t}$$

จากเงื่อนไขขอบเขต

$$T(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

$$T(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

และจาก

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

แทนค่าขอบเขต

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(L) = c_2 \sin \lambda L = 0$$

ดังนั้นได้ว่า

$$c_2 \neq 0$$

$$\sin \lambda L = 0$$

$$\lambda L = n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$$

สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

ดังนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$T(t) = c_3 e^{-c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

ผลเฉลยคือ

$$T(x,t) = B_n e^{-c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ได้

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-c^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = T_0 \sin \frac{\pi x}{2L}$$

จากอนุกรมฟูเรียร์

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0 \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{2L} dx$$

ดังนั้นได้

$$T(x, t) = T_0 e^{-\frac{c^2 \pi^2 t}{4L^2}} \sin \frac{\pi x}{2L} \quad \text{เป็นผลเฉลยของสมการความร้อน 1 มิติ}$$

3.9.1.1 พิจารณากรณีของปัญหาความร้อนผ่านกระจก

กำหนดให้กระจกใสมีความหนาเท่ากับ 0.005 เมตร และค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน $c^2 = 4.27 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$ เมื่ออุณหภูมิ $T_0 = 33.92 \text{ } ^\circ\text{C}$ และ ช่วงเวลา $0.1 \leq t \leq 0.5$ วินาทีจะได้ค่าของอุณหภูมิดังตาราง

ตารางที่ 3.1 แสดงอุณหภูมิ ณ t ใดๆเมื่อความร้อนผ่านกระจก

เวลา t ใดๆ หน่วยเป็น วินาที	อุณหภูมิ ณ t ใดๆ
0.1	33.9192
0.2	33.9185
0.3	33.9178
0.4	33.9171
0.5	33.9164

3.9.1.2 พิจารณากรณีของปัญหาความร้อนผ่านกระจกติดฟิล์มกรองแสง

กระจกติดฟิล์มกรองแสงที่นำมาศึกษาเป็น กระจกติดฟิล์มกรองแสงที่ใช้พิจารณาเป็นฟิล์มกรองแสงประเภท ฟิล์มเคลือบอนุภาคโลหะ (Metal Sputtering Film) ที่มีชื่อว่า โพลีเอสเตอร์ ซึ่งมีเปอร์เซ็นต์การกรองแสงได้ถึง 80% และมีค่าการนำความร้อน $c^2 = 12.18 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$

$$\text{จากสมการความร้อน} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial T}{\partial t}$$

เมื่อ c^2 เป็นค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของฟิล์มกรองแสง

กำหนดให้ฟิล์มกรองแสงมีความหนา 0.002 เมตร

$$\text{ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต} \quad T(0, t) = 0 \quad , T(1, t) = 0 \quad , 0 < x < 2 \quad 5 \leq t \leq 10$$

$$\text{และเงื่อนไขเริ่มต้น} \quad T(x, 0) = 33.92 \text{ } ^\circ\text{C}$$

ผลเฉลยของสมการ โดยวิธีแยกตัวแปร $T(x,t) = T_0 \sin \frac{\pi x}{2L} e^{-\frac{c^2 \pi^2 t}{4L^2}}$

จากเงื่อนไขจะได้สมการใหม่ดังนี้ $T(L,t) = 33.92 \sin \frac{\pi x}{2L} e^{-\frac{c^2 \pi^2 t}{4L^2}}$

จากสมการหาอุณหภูมิ ณ $5 \leq t \leq 10$ นาที แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.2 แสดงอุณหภูมิ ณ เวลา t ใดๆ เมื่อความร้อนผ่านกระจกติดฟิล์มกรองแสง

เวลา ณ t ใดๆ หน่วยเป็น วินาที	อุณหภูมิ ณ t ใดๆ
100	32.9158
200	31.9413
300	30.9956
400	30.0780
500	28.3275
600	28.3234

3.9.2 ปัญหาสมการความร้อนใน 2 มิติ ในสถานะคงตัว

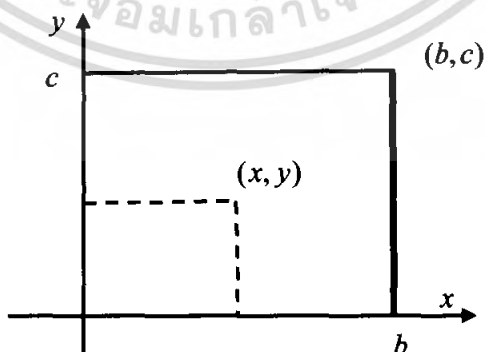
จากสมการการไหลของความร้อนใน 1 มิติ เราได้สมการเป็น $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ในการ

พิจารณาการไหลของความร้อนใน 2 มิติ เราพิจารณาการไหลของความร้อนในวัสดุนำความร้อนที่เป็นแผ่นบางๆ โดยกำหนดให้

$u(t, x, y)$ เป็นอุณหภูมิตั้งที่ตำแหน่ง (x, y) ในระนาบ xy เมื่อเวลา t ดังรูปที่ 1

ในการหาความสัมพันธ์ของสมการทำนองเดียวกับการไหลของความร้อนใน 1 มิติ จะได้สมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.61)$$



รูปที่ 3.23 แสดงการไหลของความร้อนใน 2 มิติ

สมมติว่าเราต้องการหาอุณหภูมิของวัตถุแผ่นบางๆ กำหนดโดย $u(x, y)$ ในระนาบของ (x, y) ดังรูปที่ 1 จากสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติของวัตถุแผ่นบางๆ (1) ถ้าเรากำหนดด้านข้างของแผ่นวัสดุทุกด้านทำให้อุณหภูมิตลอดไป จะได้ว่าอุณหภูมิในแผ่นวัสดุมีสถานะคงตัว นั่นคือ การไหลของความร้อนไม่ขึ้นกับเวลา

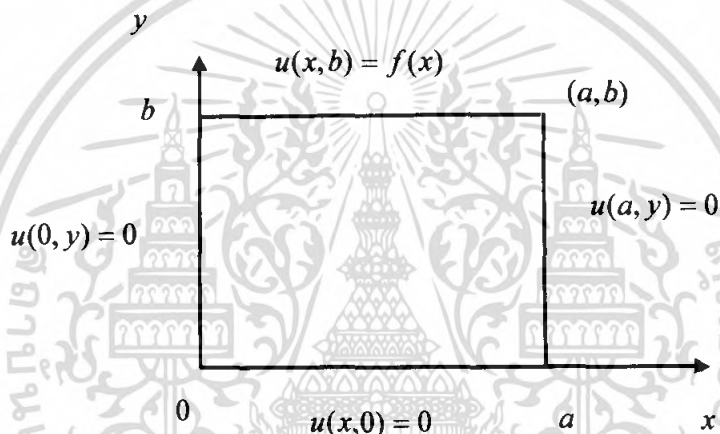
$$\text{เพราะนั้น } \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ ผลที่ตามมาคือ } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

เราเรียกฟังก์ชัน $u(x, t)$ เป็นสภาพการไหลของความร้อนที่อุณหภูมิตลอดไปไม่ขึ้นกับเวลา เรียกว่าการไหลในสภาวะคงตัว (Steady State Heat Flow)

$$\text{สมการ } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ เรียกว่า สมการลาปลาซ (Laplace's Equation) ใน 2 มิติ}$$

พิจารณาอุณหภูมิในสถานะคงตัวของแผ่นวัสดุนำความร้อนดังรูปที่ 3.23

เมื่อ $0 < x < a$, $0 < y < b$ และ $|z| < h$ เมื่อ h มีค่าน้อยมากๆ ได้ดังนี้



รูปที่ 3.24 แสดงการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัว

จากปัญหาข้างต้นเขียนเป็นสมการและเงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

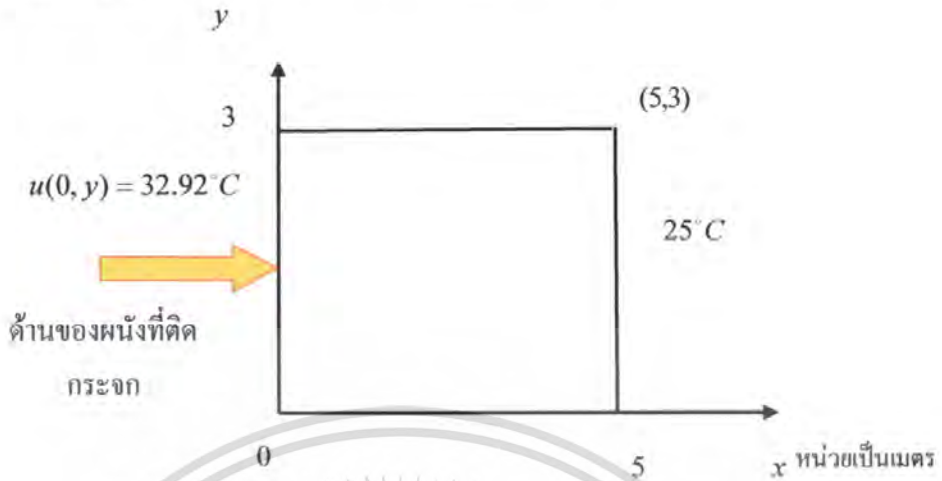
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b \quad (3.62)$$

$$\text{ภายใต้เงื่อนไข } u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a$$

ปัญหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัว นำมาพิจารณาแยกเป็นกรณีที่ใช้ศึกษาเกี่ยวกับปัญหาการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิภายในห้องเมื่อติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับและระเบียบวิธีซึ้นประกอบอันดับเปรียบเทียบผลเฉลยของการกระจายอุณหภูมิภายในห้อง แยกพิจารณาได้ 2 กรณีดังนี้

3.9.2.1 กรณีที่ผิวด้านข้างของผนังห้องติดกระจกใส
แสดงดังรูปที่ 3.25 ได้ดังนี้



รูปที่ 3.25 แสดงผิวด้านข้างของผนังที่ติดกระจก

จากรูปที่ 3.25 กำหนดให้ผนังของห้องมีความกว้าง 3 เมตรและความยาว 5 เมตร มีอุณหภูมิที่แกน $x=5, y=3$ และ $x=0$ ที่ 25°C เป็นเงื่อนไขขอบเขตของสมการ และอุณหภูมิที่ผ่านกระจกเข้าสู่ห้องมีค่าเท่ากับ 33.92°C เขียนเป็นสมการ และเงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 5, \quad 0 < y < 3 \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \text{ภายใต้เงื่อนไข} \quad & u(0, y) = 32.92, \quad u(3, y) = 25, \quad 0 \leq y \leq 3 \\ & u_y = 0, \quad u_y = 0, \quad 0 \leq x \leq 5 \end{aligned}$$

3.9.2.1.1. การแก้ปัญหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัวโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ

จากสมการที่(3) และเงื่อนไขค่าขอบเขตสร้างเป็นวิธีผลต่างอันดับได้ดังนี้

$$\text{จาก} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{เขียนใหม่ได้เป็น} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.64)$$

$$\text{โดยที่} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\text{และ} \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)$$

โดยที่ $O(h^2)$ และ $O(k^2)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation error) ซึ่งเป็นสัดส่วนกับ h^2 และ k^2 แทนค่าในสมการที่ (3.64) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) = 0$$

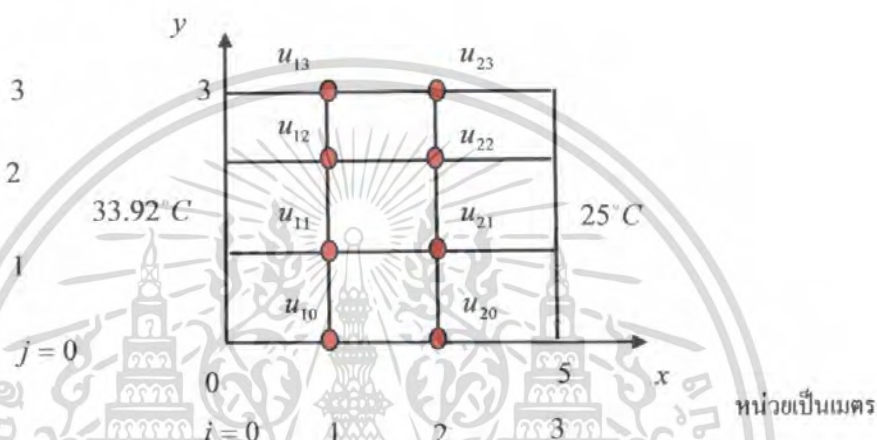
ให้ $h = k$ และ $O(h^2) \rightarrow 0$, $O(k^2) \rightarrow 0$ จะได้สมการใหม่ดังต่อไปนี้

$$[u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}] = 0$$

เขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j} = 0$$

จากปัญหาการกระจายความร้อนของอุณหภูมิผ่านกระจกเข้าภายในห้อง แสดงการกระจายอุณหภูมิภายใต้เงื่อนไขได้ดังรูปที่ 3.26.



รูปที่ 3.26 แสดงการแบ่งขอบเขตของปัญหาโดยวิธีผลต่างอันดับ

ดังนั้นจากรูปที่ 3.26. แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Node กับ Coordinate ได้ดังนี้

ตารางที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Node กับ Coordinate ของปัญหาความร้อนใน 2 มิติ

จำนวน Node	Coordinate (x, y)
N1	(0,0)
N2	(0,1)
N3	(0,2)
N4	(0,3)
N5	(1,0)
N6	(1,1)
N7	(1,2)
N8	(1,3)
N9	(2,0)
N10	(2,1)
N11	(2,2)
N12	(2,3)
N13	(3,0)
N14	(3,1)
N15	(3,2)
N16	(3,3)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปต้องหาอนุกรมของ โหนดที่ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

โดยที่ $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2, 3$

$$\text{สมการ } u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 5 โคออร์ดิเนตที่ (1,0) จะได้

$$-4u_{10} + u_{00} + u_{20} + u_{11} + u_{11} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 6 โคออร์ดิเนตที่ (1,1) จะได้

$$-4u_{11} + u_{10} + u_{01} + u_{21} + u_{12} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 7 โคออร์ดิเนตที่ (1,2) จะได้

$$-4u_{12} + u_{02} + u_{22} + u_{11} + u_{13} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 8 โคออร์ดิเนตที่ (1,3) จะได้

$$-4u_{13} + u_{03} + u_{23} + u_{12} + u_{12} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 9 โคออร์ดิเนตที่ (2,0) จะได้

$$-4u_{20} + u_{10} + u_{30} + u_{21} + u_{21} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 10 โคออร์ดิเนตที่ (2,1) จะได้

$$-4u_{21} + u_{22} + u_{11} + u_{31} + u_{20} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 11 โคออร์ดิเนตที่ (2,2) จะได้

$$-4u_{22} + u_{21} + u_{12} + u_{32} + u_{23} = 0$$

พิจารณา โหนดที่ 11 โคออร์ดิเนตที่ (2,3) จะได้

$$-4u_{23} + u_{22} + u_{33} + u_{13} + u_{22} = 0$$

เขียนเป็นระบบสมการจะได้

$$-4u_{10} + u_{20} + 2u_{11} = -33.92$$

$$-4u_{11} + u_{10} + u_{21} + u_{12} = -33.92$$

$$-4u_{12} + u_{22} + u_{11} + u_{13} = -33.92$$

$$-4u_{13} + u_{23} + 2u_{12} = -33.92$$

$$-4u_{20} + u_{10} + 2u_{21} = -25$$

$$-4u_{21} + u_{11} + u_{22} + u_{20} = -25$$

$$-4u_{22} + u_{12} + u_{21} + u_{23} = -25$$

$$-4u_{23} + 2u_{22} + u_{13} = -33.92$$

เขียนเป็นเมตริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{20} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -33.92 \\ -33.92 \\ -33.92 \\ -33.92 \\ -25 \\ -25 \\ -25 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

แก้สมการหาผลเฉลยโดยวิธีการทำซ้ำแกว่งจะได้

$$u_{10} = 30.9467^{\circ}C$$

$$u_{11} = 30.9467^{\circ}C$$

$$u_{12} = 30.9467^{\circ}C$$

$$u_{13} = 30.9467^{\circ}C$$

$$u_{20} = 27.9733^{\circ}C$$

$$u_{21} = 27.9733^{\circ}C$$

$$u_{22} = 27.9733^{\circ}C$$

$$u_{23} = 27.9733^{\circ}C$$

ดังนั้นจะได้อุณหภูมิที่กระจายในแต่ละ โหนดภายในห้องดังตารางที่ 3.7 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3.4 แสดงอุณหภูมิในแต่ละ โหนดของปัญหาความร้อนใน 2 มิติ

จำนวน Node	Coordinate (x, y)	อุณหภูมิ T (°C)
N1	(0,0)	33.9200
N2	(0,1)	33.9200
N3	(0,2)	33.9200
N4	(0,3)	33.9200
N5	(1,0)	30.9467
N6	(1,1)	30.9467
N7	(1,2)	30.9467
N8	(1,3)	30.9467
N9	(2,0)	27.9733
N10	(2,1)	27.9733
N11	(2,2)	27.9733
N12	(2,3)	27.9733
N13	(3,0)	25.0000
N14	(3,1)	25.0000
N15	(3,2)	25.0000
N16	(3,3)	25.0000

3.9.2.1.2. การแก้ปัญหасการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัวโดย

ใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Easy Finite Element Method

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การแก้ปัญหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัวโดยใช้ระเบียบวิธีขั้นประกอบอันดับ Finite Element เป็นการแก้ปัญหาค่าการถ่ายเทความร้อน โดยใช้ซอฟต์แวร์ EasyFEM โดยการสร้างโดเมนเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมและการกำหนดภาวะอุณหภูมิภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเดียวกันกับกระจก กำหนดให้ผนังของห้องมีความกว้างและความยาว 1 เมตร และมีเงื่อนไขขอบเขตของสมการเป็น 25°C และอุณหภูมิที่ผ่านกระจกเข้าสู่ห้องมีค่าเท่ากับ 33.92°C แสดงผลในรูปแบบโปรแกรมได้ดังนี้

ขั้นตอนแรก เลือกปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน (Thermal Analysis) และใส่ค่าสัมประสิทธิ์ของการนำความร้อน k มีค่าเท่ากับ $1.990049 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$ เป็นค่าการนำความร้อนของอากาศและความหนาของขอบเขตเท่ากับ 5 เมตร ดังรูปที่ 3.27



รูปที่ 3.27 แสดงการเลือกปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน

ขั้นที่สอง สร้างขอบเขตและโดเมนของปัญหาเป็นรูปสี่เหลี่ยม โดยในรูปจะมีหมายเลขกำกับอยู่ที่จุดและเส้นขอบของรูปสี่เหลี่ยม พร้อมทั้งการแบ่งขอบเขตของปัญหารูปสี่เหลี่ยมเป็น เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม และกำหนดเงื่อนไขขอบเขตและเงื่อนไขเริ่มต้นดังรูปที่ 3.28



รูปที่ 3.28 แสดงการแบ่งขอบเขตเป็นเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 3.28 เป็นการแสดงการแบ่งขอบเขตเป็นเอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

โดยที่ E_i แทนจำนวน Element ที่แบ่งภายในขอบเขต โดย $i = 1,2,3,\dots,18$

N_i เป็นจำนวน โหนดของขอบเขต โดยที่ $i = 1,2,3,\dots,16$

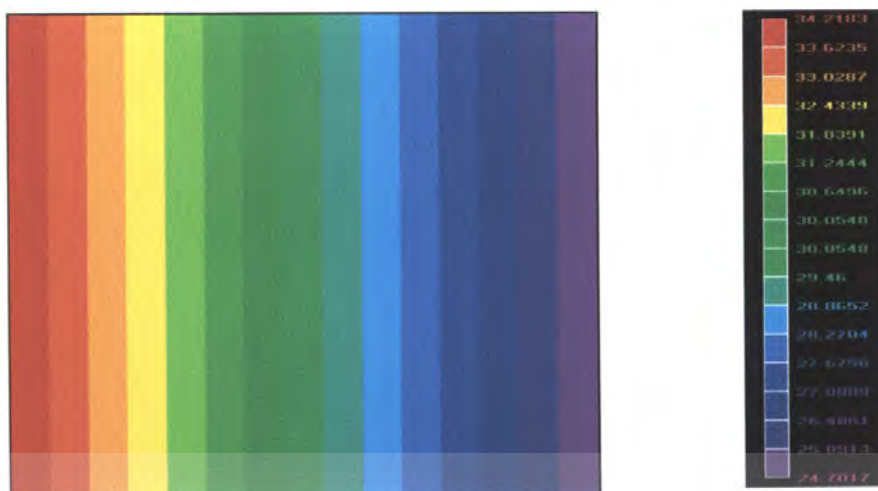
L_i แทนเส้นกำหนดขอบเขต โดยที่ $i = 1,2,3,4$

ดังนั้นแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Element กับ Node ได้ดังนี้

ตารางที่ 3.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Element กับ Node ของปัญหาโดยโปรแกรม Easy FEM

Element (E_i)	จำนวน Node (N_i)
E1	N1,N2,N12
E2	N2,N12,N13
E3	N2,N3,N13
E4	N3,N13,N14
E5	N3,N4,N14
E6	N4,N5,N14
E7	N12,N13,N11
E8	N13,N11,N15
E9	N13,N14,N15
E10	N14,N15,N16
E11	N14,N5,N16
E12	N5,N6,N16
E13	N11,N15,N10
E14	N15,N9,10
E15	N15,N16,N9
E16	N16,N8,N9
E17	N16,N6,N8
E18	N6,N7,N8

ขั้นที่สาม กำหนดขอบเขตของปัญหาโดยที่กำหนดให้ด้านทั้งสามด้านของขอบเขตมีอุณหภูมิเป็น $25^{\circ}C$ ส่วนด้านที่มีความร้อนผ่านเข้ามากำหนดให้มีอุณหภูมิเป็น $33.92^{\circ}C$ เมื่อรันโปรแกรมจะได้ผลดังรูปที่ 3.29 ต่อไปนี้



รูปที่ 3.29 แสดงการกระจายของอุณหภูมิ

จากรูปที่ 3.29 อธิบายอุณหภูมิของแต่ละ Node ได้ตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3.5 แสดงอุณหภูมิของแต่ละ Node ในปัญหาความร้อน 2 มิติ

จำนวน Node (N_i)	อุณหภูมิในแต่ละ Node
N1	33.9200
N2	33.9200
N3	33.9200
N4	33.9200
N5	30.9470
N6	30.9470
N7	30.9470
N8	30.9470
N9	27.9730
N10	27.9730
N11	27.9730
N12	27.9730
N13	25.0000
N14	25.0000
N15	25.0000
N16	25.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.9.2.1.3. แสดงผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะและโปรแกรม

สำเร็จรูป Easy Finite Element Method

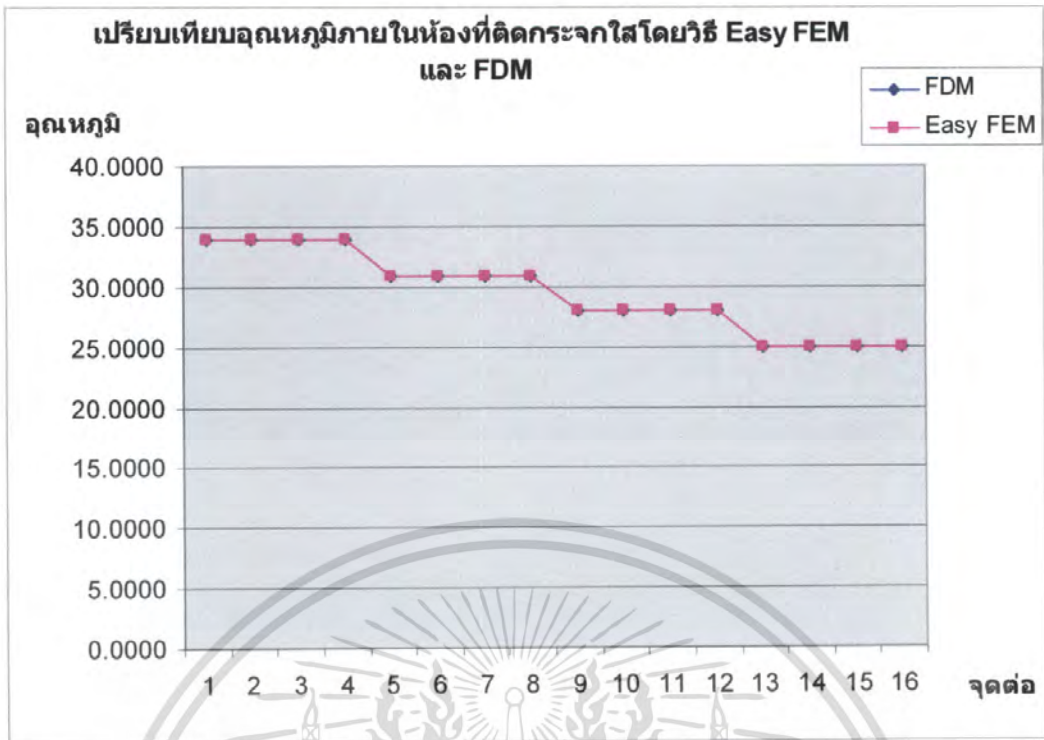
ผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะ Finite difference method และระเบียบวิธีจันประกอบอันตะ Finite Element ของปัญหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัว ได้ดังตารางที่ 3.10 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3.6 แสดงผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะและใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Easy Finite Element Method ของปัญหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัว

จำนวน Node	ผลเฉลยของอุณหภูมิ "C"		ค่าความคลาดเคลื่อน
	Easy FEM	Finite Difference	
N1	33.9200	33.9200	0
N2	33.9200	33.9200	0
N3	33.9200	33.9200	0
N4	33.9200	33.9200	0
N5	30.9470	30.9467	0.0003
N6	30.9470	30.9467	0.0003
N7	30.9470	30.9467	0.0003
N8	30.9470	30.9467	0.0003
N9	27.9730	27.9733	0.0003
N10	27.9730	27.9733	0.0003
N11	27.9730	27.9733	0.0003
N12	27.9730	27.9733	0.0003
N13	25.0000	25.0000	0
N14	25.0000	25.0000	0
N15	25.0000	25.0000	0
N16	25.0000	25.0000	0

ค่าคลาดเคลื่อนข้างต้นคำนวณได้จาก $\left(\frac{FEM - FDM}{FEM}\right) \times 100\%$

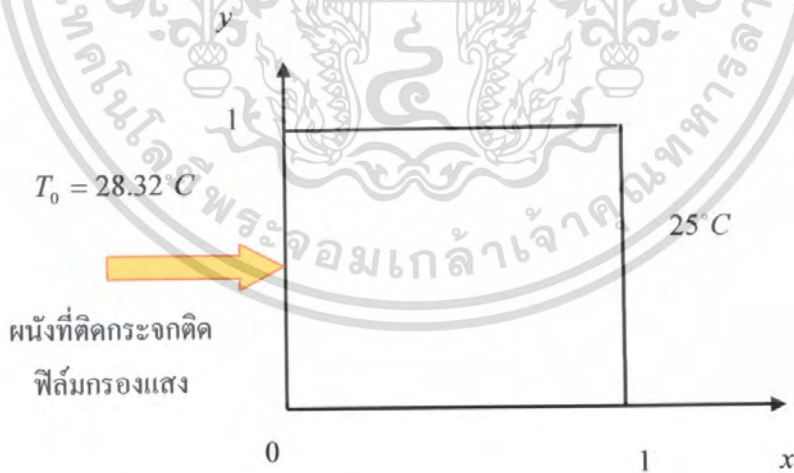
เขียนเป็นกราฟแสดงผลเฉลยได้ดังรูปที่ 3.30



รูปที่ 3.30 แสดงผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันดับ และระเบียบวิธีขั้นประกอบอันดับเมื่อความร้อนผ่านกระจกใส

3.9.2.2 กรณีที่ผิวด้านข้างของผนังห้องติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

แสดงดังรูปที่ 3.31 ได้ดังนี้



รูปที่ 3.31 แสดงผิวด้านข้างของผนังที่ติดกระจก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 3.31 กำหนดให้ผนังของห้องมีความกว้างและความยาว 1 เมตร มีอุณหภูมิที่แกน $x=1, y=1$ และ $x=0$ ที่ 25°C เป็นเงื่อนไขขอบเขตของสมการ และอุณหภูมิที่ผ่านกระจกเข้าสู่ห้องมีค่าเท่ากับ 20°C เขียนเป็นสมการ และเงื่อนไขขอบเขตได้ดังนี้

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \text{ภายใต้เงื่อนไข} \quad u(0, y) = 28.32 \quad , u(1, y) = 25 \quad , 0 \leq y \leq 1 \\ u_x = 0 \quad , u_y = 0 \quad , 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

3.9.2.2.1 การแก้ปัญหามหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัวโดย

ใช้ระเบียบวิธีผลต่างอันดับ

จากสมการที่(3) และเงื่อนไขค่าขอบเขตสร้างเป็นสมการระเบียบวิธีผลต่างอันดับได้ดังนี้

$$\text{จาก} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\text{เขียนใหม่ได้เป็น} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (3.68)$$

$$\text{โดยที่} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\text{และ} \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2)$$

โดยที่ $O(h^2)$ และ $O(k^2)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation error) ซึ่งเป็นสัดส่วนกับ h^2 และ k^2 แทนค่าในสมการที่ (4) จะได้

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2) + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + O(k^2) = 0$$

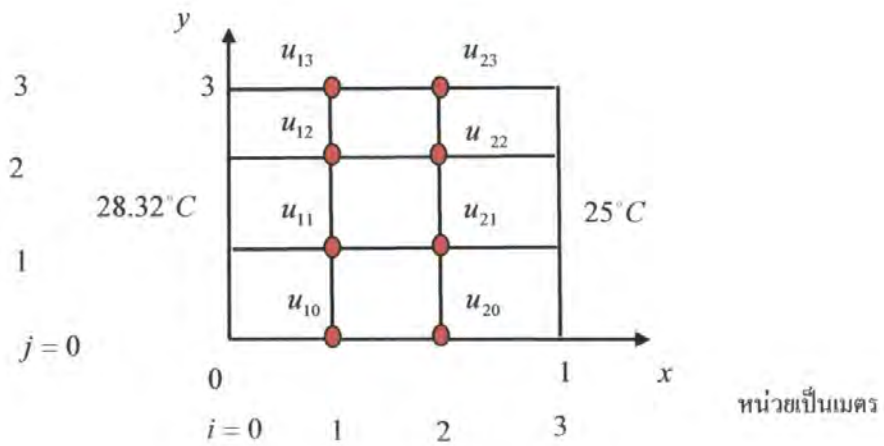
ให้ $h = k$ และ $O(h^2) \rightarrow 0$, $O(k^2) \rightarrow 0$ จะได้สมการใหม่ดังต่อไปนี้

$$[u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}] = 0$$

เขียนเป็นเมตริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j} = 0$$

จากปัญหาการกระจายความร้อนของอุณหภูมิผ่านกระจกเข้าภายในห้อง แสดงการกระจายอุณหภูมิภายใต้เงื่อนไขได้ดังรูปที่ 3.32



รูปที่ 3.32 แสดงการแบ่งขอบเขตของปัญหาโดยระเบียบวิธีผลต่างอันดับ

ดังนั้นจากรูปที่ 3.32 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Node กับ Coordinate ได้ดังนี้

ตารางที่ 3.7 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง Node กับ Coordinate ของปัญหาความร้อนใน 2 มิติ

จำนวน Node	Coordinate (x, y)
N1	(0,0)
N2	(0,1)
N3	(0,2)
N4	(0,3)
N5	(1,0)
N6	(1,1)
N7	(1,2)
N8	(1,3)
N9	(2,0)
N10	(2,1)
N11	(2,2)
N12	(2,3)
N13	(3,0)
N14	(3,1)
N15	(3,2)
N16	(3,3)

จากรูปต้องหาอุณหภูมิของโนดที่ 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่ $i = 1, 2$, $j = 0, 1, 2, 3$

$$\text{สมการ } u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 5 โคออร์ดิเนตที่ (1,0) จะได้

$$-4u_{10} + u_{00} + u_{20} + u_{11} + u_{11} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 6 โคออร์ดิเนตที่ (1,1) จะได้

$$-4u_{11} + u_{10} + u_{01} + u_{21} + u_{12} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 7 โคออร์ดิเนตที่ (1,2) จะได้

$$-4u_{12} + u_{02} + u_{22} + u_{11} + u_{13} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 8 โคออร์ดิเนตที่ (1,3) จะได้

$$-4u_{13} + u_{03} + u_{23} + u_{12} + u_{12} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 9 โคออร์ดิเนตที่ (2,0) จะได้

$$-4u_{20} + u_{10} + u_{30} + u_{21} + u_{21} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 10 โคออร์ดิเนตที่ (2,1) จะได้

$$-4u_{21} + u_{22} + u_{11} + u_{31} + u_{20} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 11 โคออร์ดิเนตที่ (2,2) จะได้

$$-4u_{22} + u_{21} + u_{12} + u_{32} + u_{23} = 0$$

พิจารณาโนดที่ 11 โคออร์ดิเนตที่ (2,3) จะได้

$$-4u_{23} + u_{22} + u_{33} + u_{13} + u_{22} = 0$$

เขียนเป็นระบบสมการจะได้

$$-4u_{10} + u_{20} + 2u_{11} = -28.32$$

$$-4u_{11} + u_{10} + u_{21} + u_{12} = -28.32$$

$$-4u_{12} + u_{22} + u_{11} + u_{13} = -28.32$$

$$-4u_{13} + u_{23} + 2u_{12} = -28.32$$

$$-4u_{20} + u_{10} + 2u_{21} = -25$$

$$-4u_{21} + u_{11} + u_{22} + u_{20} = -25$$

$$-4u_{22} + u_{12} + u_{21} + u_{23} = -25$$

$$-4u_{23} + 2u_{22} + u_{13} = -25$$

เขียนเป็นเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \\ u_{20} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -28.32 \\ -28.32 \\ -28.32 \\ -28.32 \\ -25 \\ -25 \\ -25 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

แก้สมการหาผลเฉลยโดยวิธีการทำซ้ำเกาส์จะได้

$$\begin{aligned} u_{10} &= 27.2133^{\circ}C & u_{20} &= 26.1067^{\circ}C \\ u_{11} &= 27.2133^{\circ}C & u_{21} &= 26.1067^{\circ}C \\ u_{12} &= 27.2133^{\circ}C & u_{22} &= 26.1067^{\circ}C \\ u_{13} &= 27.2133^{\circ}C & u_{23} &= 26.1067^{\circ}C \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้อุณหภูมิที่กระจายในแต่ละโนดภายในห้องดังตารางที่ 3.12 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3.8 แสดงอุณหภูมิในแต่ละ โนดของปัญหาความร้อนใน 2 มิติ

จำนวน Node	Coordinate (x, y)	อุณหภูมิ $T(^{\circ}C)$
N1	(0,0)	28.3200
N2	(0,1)	28.3200
N3	(0,2)	28.3200
N4	(0,3)	28.3200
N5	(1,0)	27.2133
N6	(1,1)	27.2133
N7	(1,2)	27.2133
N8	(1,3)	27.2133
N9	(2,0)	26.1067
N10	(2,1)	26.1067
N11	(2,2)	26.1067
N12	(2,3)	26.1067
N13	(3,0)	25.0000
N14	(3,1)	25.0000
N15	(3,2)	25.0000
N16	(3,3)	25.0000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.9.2.2.2 การแก้ปัญหасการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัวโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Easy Finite Element Method

การแก้ปัญหасการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัวโดยใช้ระเบียบวิธีชั้นประกอบอันตะ เป็นการแก้ปัญหการถ่ายเทความร้อน โดยใช้ซอฟต์แวร์ EasyFEM โดยการสร้างโดเมนเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมและการกำหนดภาวะอุณหภูมิภายใต้เงื่อนไขขอบเขตเดียวกันกับกระจก

กำหนดให้ผนังของห้องมีความกว้างและความยาว 1 เมตร และมีเงื่อนไขขอบเขตของสมการเป็น 25°C และอุณหภูมิที่ผ่านกระจกเข้าสู่ห้องมีค่าเท่ากับ 100°C แสดงผลเฉลยของอุณหภูมิในแต่ละ โหนดได้ดังนี้

ตารางที่ 3.9 แสดงอุณหภูมิของแต่ละ โหนดในปัญหาความร้อน 2 มิติ

จำนวน <i>Node</i> (N_i)	อุณหภูมิในแต่ละ <i>Node</i>
N1	28.3200
N2	28.3200
N3	28.3200
N4	28.3200
N5	27.2130
N6	27.2130
N7	27.2130
N8	27.2130
N9	26.1070
N10	26.1070
N11	26.1070
N12	26.1070
N13	25.0000
N14	25.0000
N15	25.0000
N16	25.0000

3.9.2.2.3. แสดงผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะและใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Easy Finite Element Method

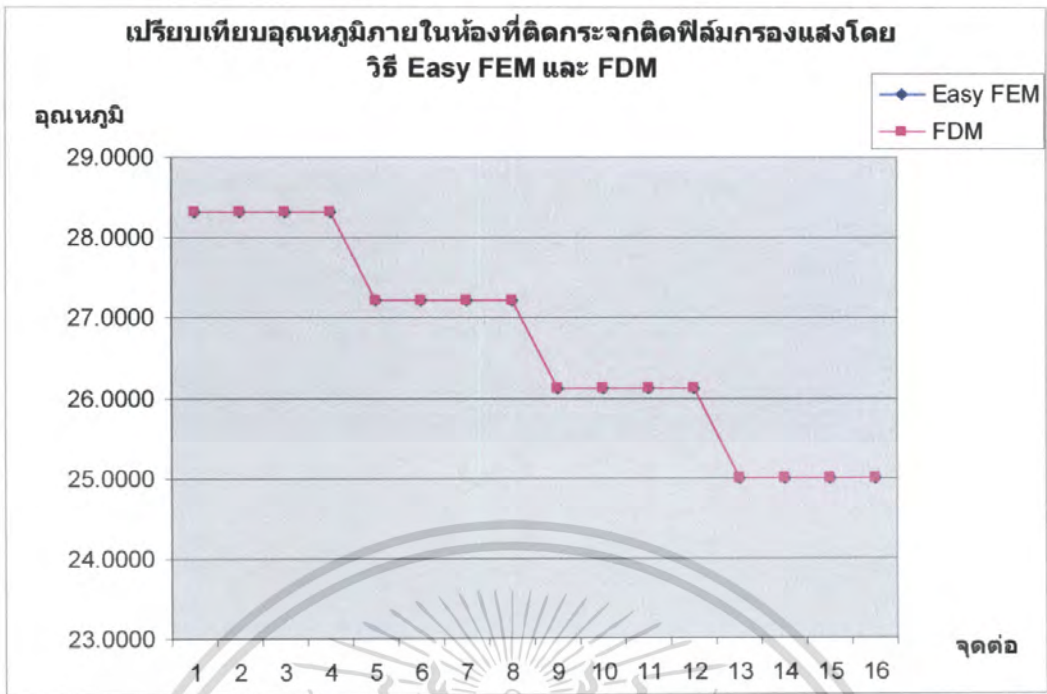
ผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันตะ Finite difference method และระเบียบวิธีชั้นประกอบอันตะ Finite Element ของปัญหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัว ได้ดังตารางที่ 3.14 ต่อไปนี้

ตารางที่ 3.10 แสดงผลเฉลยเปรียบเทียบระหว่างระเบียบวิธีผลต่างอันดับ และใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM ของปัญหาสมการการไหลของความร้อนใน 2 มิติในสภาวะคงตัว

จำนวน <i>Node</i>	ผลเฉลยของอุณหภูมิ °C		ค่าความคลาด เคลื่อน
	Easy FEM	Finite Difference	
N1	28.3200	28.3200	0
N2	28.3200	28.3200	0
N3	28.3200	28.3200	0
N4	28.3200	28.3200	0
N5	27.2130	27.2133	0.0003
N6	27.2130	27.2133	0.0003
N7	27.2130	27.2133	0.0003
N8	27.2130	27.2133	0.0003
N9	26.1070	26.1067	0.0003
N10	26.1070	26.1067	0.0003
N11	26.1070	26.1067	0.0003
N12	26.1070	26.1067	0.0003
N13	25.0000	25.0000	0
N14	25.0000	25.0000	0
N15	25.0000	25.0000	0
N16	25.0000	25.0000	0

ค่าคลาดเคลื่อนข้างต้นคำนวณได้จาก $\left(\frac{FEM - FDM}{FEM}\right) \times 100\%$

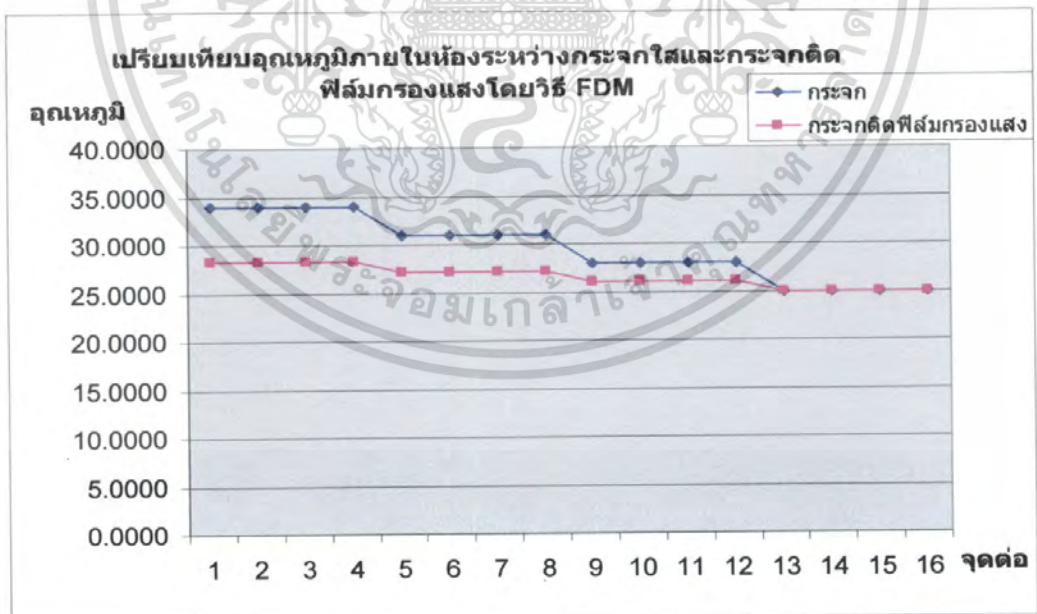
เขียนเป็นกราฟแสดงผลเฉลยได้ดังรูปที่ 3.33



รูปที่ 3.33 กราฟเปรียบเทียบอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงโดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะกับระเบียบวิธีอื่นประกอบอันตะ

3.9.3 เปรียบเทียบการกระจายของอุณหภูมิเมื่อผ่านกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง

3.9.3.1 โดยระเบียบวิธีผลต่างอันตะ



รูปที่ 3.34 อุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงโดยระเบียบวิธีผลต่าง อันตะ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.9.3.2 โดยโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM



รูปที่ 3.35 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM

ผลการทดลองเปรียบเทียบการนำความร้อนผ่านกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงในรูปแบบของสมการทางคณิตศาสตร์โดยใช้ระเบียบวิธี Finite Difference เปรียบเทียบกับโปรแกรมสำเร็จรูป (Easy Finite Element) พบว่าผลเฉลยของอุณหภูมิต่างกันไม่มากนัก ซึ่งสามารถคำนวณค่า Mean-Squared Error (MSE) ได้เป็น 0.000000045 นอกจากนี้กลุ่มของเราได้สังเกตเห็นความสำคัญของการพัฒนาซอฟต์แวร์เพื่อนำมาใช้ในการแก้ปัญหาสมการความร้อนใน 1 และ 2 มิติ และเพื่อสามารถนำไปใช้งานในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และลดความผิดพลาดในการคำนวณในด้านต่างๆ และเพื่อสนับสนุนการพัฒนาเทคโนโลยีให้รวดเร็วยิ่งขึ้นและมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นไป และจะนำไปพัฒนาต่อไป

บทที่ 4

ขั้นตอนและผลการพัฒนาโปรแกรม

จากการศึกษาปัญหาที่ผ่านมา ได้ทำการพัฒนาโปรแกรมจากกระบวนการคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วยระเบียบวิธีผลต่างจึ้นประกอบอันตะเพื่อแก้ปัญหาสมการความร้อน ซึ่งได้โปรแกรมขึ้นมาตัวหนึ่ง และนำค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้มาเปรียบเทียบกับ โปรแกรมสำเร็จรูป EASY FINITE ELEMENT METHOD ซึ่งเป็น โปรแกรมที่ยอมรับอย่างกว้างขวางนั้น ปรากฏว่ามีค่าใกล้เคียงกันอย่างมาก จึงอาจกล่าวได้ว่าโปรแกรมที่พัฒนาขึ้นมาให้ผลลัพธ์ที่สามารถเชื่อถือได้ แต่การคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นการประมาณค่าซึ่งแต่ละขั้นตอนของการคำนวณจะได้ค่าออกมาเป็นค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยจริง และเมื่อนำค่านั้นไปคำนวณต่อ ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นจะเป็นความคลาดเคลื่อนแบบสะสม

4.1 ขั้นตอนการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ โดยหลักการของ Taylor-Galerkin

สมการความร้อนในสองมิติ

$$\frac{\partial T}{\partial t} = C^2 \nabla^2 T \quad \text{ใน} \quad \Omega = \{(x, y) : 0 < (x, y) < 1\}$$

เงื่อนไขขอบเขต สำหรับ $t \geq 0$

$$T = 25 \quad \text{บน} \quad \Gamma_1 = \{\text{line } y = 0 \text{ and } y = 1\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{บน} \quad \Gamma_2 = \{\text{line } x = 0 \text{ and } x = 1\}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น โดยที่ $(x, y) \in \Omega$

$$T = 33.92 \quad ; \quad t = 0$$

โดยพิจารณาแบบ Triangular element (6 โหนด) โดยใช้หลักการของ Galerkin approach

พิจารณา ปัญหานำพาความร้อน ใน 2 มิติ

$$U = \sum_{i=1}^n N_i u_i \quad ; \quad n = \text{จำนวน โหนดใน element}$$

โดยที่ N_i เป็น Element shape function

$$X = \sum_{i=1}^n N_i x_i$$

$$Y = \sum_{i=1}^n N_i y_i$$

ในที่นี้ $U = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ จากกฏลูกโซ่

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$$

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$ โดยที่ $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$ เป็น Jacobian ของ transformation

ดังนั้นเราสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

ผลที่ได้ตามมาที่ต้องการคือ ความสัมพันธ์

$$dx dy = \det J d\xi d\eta$$

จาก $X = \sum_{i=1}^n x_i N_i$ และ $Y = \sum_{i=1}^n y_i N_i$

และ $U = \sum_{i=1}^n u_i N_i$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

และ $\det J = J_{11} \times J_{22} - J_{21} \times J_{12}$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

พิจารณา $N(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ โดยกฎลูกโซ่

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เขียนในรูปของเมตริกซ์ได้เป็น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จากโจทย์สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{\partial T}{\partial t} - C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (4.1)$$

จาก Galerkin approach เราจะได้

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \phi \left(\frac{\partial T}{\partial t} - C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - C^2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dA &= 0 \\ \iint_{\Omega} \phi \left[\frac{\partial T}{\partial t} - C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) - C^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dA &= 0 \end{aligned}$$

จาก

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \phi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$\phi \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

และ

$$\phi \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

จะได้

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left[\phi \frac{\partial T}{\partial t} - C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} - C^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dA &= 0 \\ \iint_{\Omega} \left[\phi \frac{\partial T}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dA - \iint_{\Omega} \left[C^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + C^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] dA &= 0 \end{aligned}$$

จาก Divergence theorem จะได้ว่า

$$\iint_{\Omega} \left[\phi \frac{\partial T}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dA - C^2 \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds = 0$$

$$\iint_{\Omega} \left[\phi \frac{\partial T}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dA - C^2 \int_{\Gamma_1} \phi \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds - C^2 \int_{\Gamma_2} \phi \left(\frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) ds = 0$$

จากเงื่อนไขขอบเขต

$$T = 25 \quad \text{บน} \quad \Gamma_1 = \{ \text{line } y=0 \text{ and } y=1 \}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{บน} \quad \Gamma_2 = \{ \text{line } x=0 \text{ and } x=1 \}$$

และจากคุณสมบัติของ Weight residual จะได้ว่า $\phi = 0$ ที่ Γ_1 ดังนั้น

$$\iint_{\Omega} \left[\phi \frac{\partial T}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + C^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right] dA = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{จาก } \phi = \sum_{i=1}^n N_i \Psi = \Psi \sum_{i=1}^n N_i$$

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Psi \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Psi \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

และจาก

$$T = \sum_{j=1}^n N_j T_j$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial N_j}{\partial x}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \quad \text{และ} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{j=1}^n N_j \frac{\partial T_j}{\partial t}$$

แทนค่าต่างลงใน (4.2) จะได้

$$\iint_{\Omega} \left[\Psi \sum_{i=1}^n N_i \sum_{j=1}^n N_j \frac{\partial T_j}{\partial t} + C^2 \Psi \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + C^2 \Psi \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^n T_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dA = 0$$

$$\because \Psi = \text{constant}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\iint_{\Omega} \left[(N_i N_j) \frac{\partial T_j}{\partial t} + C^2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) T_j + C^2 \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) T_j \right] dA \right) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\iint_{\Omega} N_i N_j dA \right) \frac{\partial T_j}{\partial t} + C^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dA \right) T_j = 0$$

หรือเขียนเป็น

$$[A] \frac{\partial T_j}{\partial t} + C^2 [B] T_j = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{โดยที่ } A_{ij} = \iint_{\Omega} N_i N_j dA$$

$$B_{ij} = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dA$$

เป็น Know matrices และ T_j เป็น column matrix ของ undetermined parameters

เราจะ Introduce a θ family of approximation which approximates a weighted

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Average of the time derivative of a dependent variable at two consecutive times

Linear by approximation of the value of the variable at the two time step:

$$\theta \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^{n+1} + (1-\theta) \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^n = \frac{(T_j)^{n+1} - (T_j)^n}{\Delta t^{n+1}} \quad (4.4)$$

โดยในที่นี้จะใช้วิธีการของ Crank-Nicolson scheme

$$\text{ให้ } \theta = \frac{1}{2}$$

จาก (4.4) คูณด้วย Δt^{n+1} ทั้ง 2 ข้าง

$$\theta \Delta t^{n+1} \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^{n+1} + (1-\theta) \Delta t^{n+1} \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^n = (T_j)^{n+1} - (T_j)^n$$

ย้ายข้าง

$$(T_j)^{n+1} = (T_j)^n + \theta \Delta t^{n+1} \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^{n+1} + (1-\theta) \Delta t^{n+1} \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^n$$

นำ [A] คูณตลอดจะได้

$$[A](T_j)^{n+1} = [A](T_j)^n + \theta \Delta t^{n+1} [A] \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^{n+1} + (1-\theta) \Delta t^{n+1} [A] \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right)^n$$

จากสมการที่ (4.3) จะได้ $[A] \left(\frac{\partial T_j}{\partial t} \right) = -C^2 [B](T_j)$ ดังนั้น

$$[A](T_j)^{n+1} = [A](T_j)^n + \theta \Delta t^{n+1} (-C^2 [B](T_j)^{n+1}) + (1-\theta) \Delta t^{n+1} (-C^2 [B](T_j)^n)$$

จัดเทอมเพื่อที่จะเขียนเทอม $(T_j)^{n+1}$ ในเทอมของ $(T_j)^n$ จะได้

$$([A] + \theta \Delta t^{n+1} C^2 [B])(T_j)^{n+1} = ([A] - (1-\theta) \Delta t^{n+1} C^2 [B])(T_j)^n \quad (4.5)$$

โดยเราจะจัด A_{ij}^e, B_{ij}^e ในรูปของ ξ, η ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \iint_{\Omega} N_i N_j dA \\ &= \iint_{\Omega} N_i N_j dx dy \\ &= \iint_{\Omega} N_i N_j |J| d\xi d\eta \\ B_{ij} &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dA \\ &= \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \iint_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] |J| d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$= \iint_A \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} &= J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \\ \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จาก (4.6) จะได้

$$\begin{aligned} B_{ij}^e &= \iint_{\Omega} \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) & \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \\ \left(-J_{21} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} d\xi d\eta \\ &= \iint_{\Omega} \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \left(J_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \cdot \left(J_{22} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} - J_{12} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \\ \left(-J_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \cdot \left(-J_{21} \frac{\partial N_j}{\partial \xi} + J_{11} \frac{\partial N_j}{\partial \eta} \right) \end{bmatrix} d\xi d\eta \end{aligned}$$

ซึ่งเราจะประมาณค่าอินทิเกรตโดยวิธีการทาง Numerical Gaussian quadrature 4 pt. ใน 2 มิติ
ในรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีรูปแบบดังนี้
โดยที่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\xi_1 = \frac{1}{3}$	$\eta_1 = \frac{1}{3}$	$w_1 = \frac{27}{48}$
$\xi_2 = \frac{2}{15}$	$\eta_2 = \frac{2}{15}$	$w_2 = \frac{25}{48}$
$\xi_3 = \frac{11}{15}$	$\eta_3 = \frac{2}{15}$	$w_3 = \frac{25}{48}$
$\xi_4 = \frac{2}{15}$	$\eta_4 = \frac{11}{15}$	$w_4 = \frac{25}{48}$

และ Shape function เป็นดังต่อไปนี้

Quadratic triangle elements (6 nodes)

$$N_1(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) / 4$$

$$N_2(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 - \eta) / 4$$

$$N_3(\xi, \eta) = (1 + \xi)(1 + \eta) / 4$$

$$N_4(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 + \eta) / 4$$

และอนุพันธ์ของ Shape function เทียบกับ ξ และ η จะได้ดังนี้

$\frac{\partial}{\partial \xi} N_1(\xi, \eta) = -(1 - \eta) / 4$	$\frac{\partial}{\partial \eta} N_1(\xi, \eta) = -(1 - \xi) / 4$
$\frac{\partial}{\partial \xi} N_2(\xi, \eta) = (1 - \eta) / 4$	$\frac{\partial}{\partial \eta} N_2(\xi, \eta) = -(1 + \xi) / 4$
$\frac{\partial}{\partial \xi} N_3(\xi, \eta) = (1 + \eta) / 4$	$\frac{\partial}{\partial \eta} N_3(\xi, \eta) = (1 + \xi) / 4$
$\frac{\partial}{\partial \xi} N_4(\xi, \eta) = -(1 + \eta) / 4$	$\frac{\partial}{\partial \eta} N_4(\xi, \eta) = (1 - \xi) / 4$

ดังนั้นเราก็จะสามารถหาค่า A_{ij}^e , B_{ij}^e ได้แล้ว ซึ่งก็จะนำเอาค่าต่างๆ แทนลงในสมการที่ (4.5) โดย $t = 0$ จะมีค่า $T = 25$ จาก initial condition ดังนั้นจะได้ solution ที่ $t = \Delta t$

เนื่องจากวิธีการของ Crank-Nicolson เป็น unconditional stable จึงสามารถเลือกค่า Δt ใดๆ ได้ แต่อย่างไรก็ตาม สำหรับ Δt มากๆ solution ที่ได้อาจให้ค่าที่ไม่แม่นยำเท่าที่ควร โดยในที่นี้จะเลือก $\Delta t = 0.0001$ สำหรับการคำนวณหาอุณหภูมิภายในกระบอกสูบ และเลือก $\Delta t = 0.000001$ สำหรับการคำนวณหาอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสง และเลือก $\Delta t = 5$ สำหรับการคำนวณหาอุณหภูมิภายในห้อง จาก (4.5) เราสามารถเขียนได้ในรูปของ

$$[A](T_j)^{n+1} = [B](T_j)^n$$

หรือ

$$Ax = b$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อจากนั้นเราจะใช้วิธีการ Penalty Approach โดยให้

$$C = \max |A_{ij}^*| \times 10^5 \quad ; \quad 1 \leq i \leq n \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

แล้วนำค่า C ไปปรับสมการ $Ax = b$ ใหม่เพื่อให้ง่ายต่อการดำเนินการ ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งยังคงรักษาคุณสมบัติเดิมไว้

ต่อจากนั้นเราจะแก้ระบบสมการเชิงเส้น Solve หาค่า $(T_j)^{n+1}$ ได้เนื่องจากเรารู้ $(T_j)^n$ โดยเราจะใช้วิธีการทาง Numerical ซึ่งมีหลายวิธีด้วยกัน เช่น

- Direct Techniques ซึ่งจะได้อัตราที่แม่นยำแต่จะใช้เมื่อที่หน่วยความจำเยอะ เช่น วิธี Gaussian Elimination ,LU, LDE เป็นต้น
- Indirect Techniques หรือ Iterative Method ซึ่งจะทำได้ค่าที่ใกล้เคียงกับค่าจริงมากและประหยัดเนื้อที่

หน่วยความจำพร้อมประหยัดเวลาที่ใช้ในการคำนวณด้วย ซึ่งเหมาะที่จะใช้กับปัญหาใหญ่ๆ (หลาย element) มากกว่าวิธีการแบบ Direct Techniques เช่น วิธี Jacobi, Gauss-Seidel and SOR เป็นต้น

ซึ่งในที่นี้เราจะใช้วิธี Gauss-Seidel iterative method ซึ่งมีหลักการดังนี้

วิธีการ Gauss-Seidel iterative method จะประมาณด้วยการ solve สมการหาค่า x_i ของสมการ $Ax = b$ ในครั้งที่ i ซึ่ง

$$x_i^{(k)} = \frac{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad , \quad k \geq 1$$

จะวนลูปทำไปเรื่อยๆจนกว่าจะได้ค่าที่เราพอใจ แล้วเราก็จะได้ค่า T ซึ่งก็คือค่าอุณหภูมิที่ node ต่างๆที่เรากำหนดขึ้นมา (vertex & midside nodes) ที่ step time ที่ $n+1$ แล้วเราก็จะเก็บค่า $(T_j)^{n+1}$ ไว้มาเปรียบเทียบกับค่า error จาก $(T_j)^n$ โดย

$$\text{Error} = \|(T_j)^{n+1} - (T_j)^n\|$$

ต่อจากนั้นค่า $(T_j)^{n+1}$ ก็จะถูกเปลี่ยนมาเป็น $(T_j)^n$ (Initial) ในครั้งต่อไป ซึ่งจะทำไปเช่นนี้เรื่อยๆจนกว่าจะได้ $\text{error} \leq \text{TOL}$ ที่เราต้องการ หรือ ครบ max time step ที่เราต้องการ

ต่อจากนั้นถ้าเราต้องการที่จะประมาณค่า T ที่จุด (x,y) ใดๆ เราจะใช้วิธีหาelement ที่จุด (interp x , interp y) นั้นอยู่และคำนวณหาโดยการเฉลี่ยจุดข้างเคียง

$$\text{จาก} \quad T = \sum_{i=1}^n T_i N_i$$

ดังนั้นค่า T ที่ได้ของ Node นั้นๆ จะหาได้จาก $T = N_1 T_1 + N_2 T_2 + N_3 T_3 + N_4 T_4$ แล้วนำมาเปรียบเทียบกับ Exact และดูความแตกต่าง (error)

จากการแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ นำมาเขียนเป็นขั้นตอนการทำงานโดยระบบคอมพิวเตอร์ได้ดังนี้

4.2 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

การทำงานของโปรแกรมที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหасวมการความร้อนในสองมิติ ได้แสดงการทำงานของโปรแกรมดังขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมการ Gengrid อธิบายได้ดังนี้

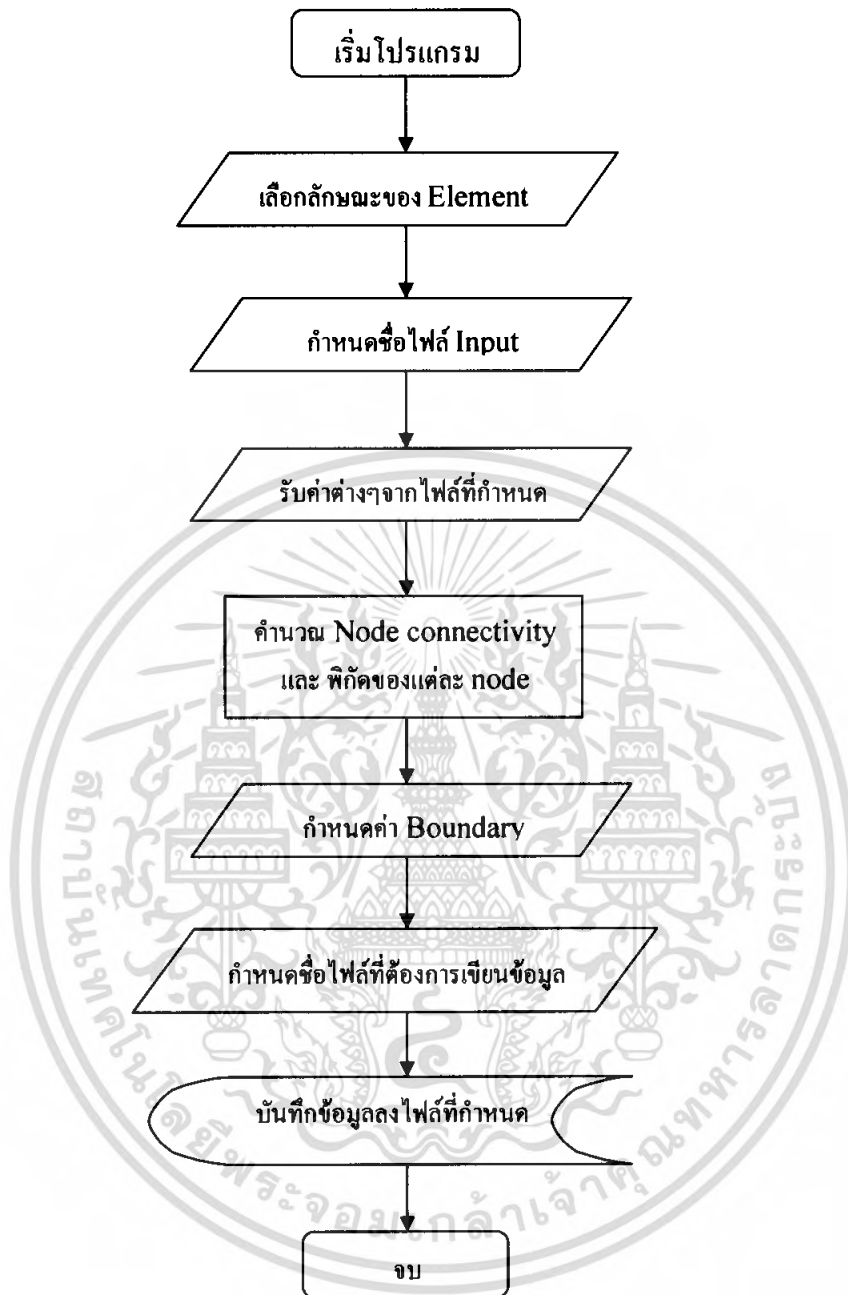
1. เมื่อเริ่มเข้าสู่โปรแกรม จะต้องทำการเลือกรูปร่างและลักษณะของ element ที่ต้องการสร้าง
2. กำหนดชื่อไฟล์ซึ่งเป็นไฟล์ข้อมูลซึ่งได้สร้างไว้ก่อนหน้าแล้ว
3. โปรแกรมจะทำการอ่านค่าต่างๆจากไฟล์ข้อมูลมาเก็บในตัวแปรต่างๆ เพื่อใช้ในการคำนวณต่อไป
4. คำนวณหา node connectivity และพิกัดของแต่ละ node
5. กำหนดว่า node ใด เป็น boundary node และจะทำการกำหนดค่าให้ node ที่เป็น boundary node ด้วย
6. กำหนดชื่อไฟล์ ที่ใช้เก็บข้อมูลที่คำนวณได้จากโปรแกรมนี้ เพื่อนำไปเป็นไฟล์ข้อมูลเข้า ในโปรแกรมถัดไป
7. บันทึกข้อมูลต่างๆที่มีลงในไฟล์ที่กำหนดข้างต้น
8. เสร็จสิ้นการทำงานของโปรแกรม

ซึ่งแสดงขั้นตอนการเขียนโปรแกรมเป็น Flowchart ได้ดังรูปที่ 4.2

หลังจากที่ทำการ Gengrid หรือการแบ่งขอบเขตโดเมนของปัญหาแล้ว เราจะได้ไฟล์ข้อมูลที่ขอบเขตเงื่อนไขของปัญหасวมการความร้อน จากนั้นจะนำไฟล์ข้อมูลที่ได้อมาเป็น Input ของโปรแกรมการคำนวณอุณหภูมิ ณ จุดต่างๆ อธิบายได้ดังขั้นตอนต่อไปนี้

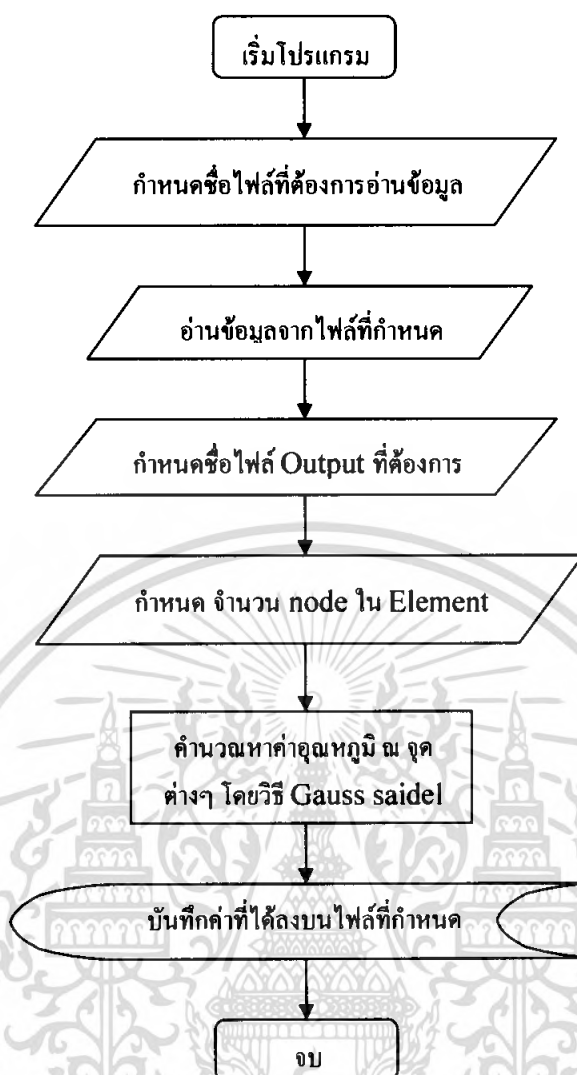
1. เมื่อเริ่มเข้าสู่โปรแกรม จะต้องกำหนดชื่อไฟล์ที่จะนำมาข้อมูลมาใช้ในโปรแกรม ซึ่งไฟล์ดังกล่าวก็คือไฟล์ที่ได้จากโปรแกรม Gengrid
2. จากนั้นโปรแกรมจะทำการอ่านไฟล์ดังกล่าวและทำการเก็บค่าไว้ในตัวแปรต่างๆ
3. จะต้องทำการตั้งชื่อไฟล์ที่จะเป็นไฟล์เก็บค่าที่คำนวณได้จากโปรแกรมนี้
4. จากนั้นต้องทำการใส่จำนวน node ของ element
5. โปรแกรมจะทำการคำนวณตามกระบวนการที่ได้โปรแกรมไว้ และคำนวณหาค่า อุณหภูมิ ณ ตำแหน่งต่างๆ ด้วยวิธี Gauss Saidel
6. ทำการบันทึกค่าต่างๆที่ได้ลงในไฟล์ที่ได้กำหนดไว้ข้างต้น
7. เสร็จสิ้นการทำงานของโปรแกรม

ซึ่งแสดงขั้นตอนการเขียนโปรแกรมเป็น Flowchart ได้ดังรูปที่ 4.3



รูปที่ 4.1 Flowchart ของโปรแกรมการ Gengrid

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.2 Flowchart ของโปรแกรมคำนวณหาอุณหภูมิ ณ จุดต่างๆ

อธิบายขั้นตอนการใช้งานของโปรแกรมภาษาซีได้ดังนี้

1. สร้างไฟล์ข้อมูลเพื่อเป็นข้อมูลเข้าเพื่อใช้ในการคำนวณของโปรแกรม สามารถทำการได้ดังนี้

```

DATA.TXT - Notepad
File Edit Format View Help
number_of_line_comment
5
*****
#acbiashor_1_top-bottom_or_2_bottom-top_same_value_allsection
#acbiasver_1_left-right_or_2_right-left
#order_of_node_topleft-botleft-topright-botright
*****
numsec
1
acbhhor
1
section1
numhor numver
3 5
biash biasv
0.5 0.5
acbver
1
coordinate
0 3.0
0 0
0.005 3.0
0.005 0
Ln 1, Col 1

```

โดยสามารถทำการกำหนดความกว้างและความยาวของวัตถุได้โดยการกำหนดเป็น Coordinate และกำหนดได้ว่าจะแบ่งช่วงเป็นเท่าใด โดยการกำหนดการแบ่งในแนวแกน y ที่ numhor และแนวแกน x ที่ numver

2. เปิดโปรแกรมแรกเพื่อการคำนวณและการสร้าง Element โดยมีขั้นตอนการใช้งาน โปรแกรมดังนี้

2.1 เลือกรูปแบบของเอลิเมนต์ที่ต้องการสร้างเอลิเมนต์แบบใด

```

G:\input 32\งานได้ค่าจ้ง\Dim 3x5\Debug\gengrid.exe
***** Generate grid partition *****
Choose type of elements
1) Linear triangle (3 Node elements)
2) Quadratic triangle (6 Node elements)
3) Linear rectangle (4 Node elements)
4) Quadratic rectangle (8 Node elements)
Your choice < 1 - 2 - 3 or 4 > is : 1

```

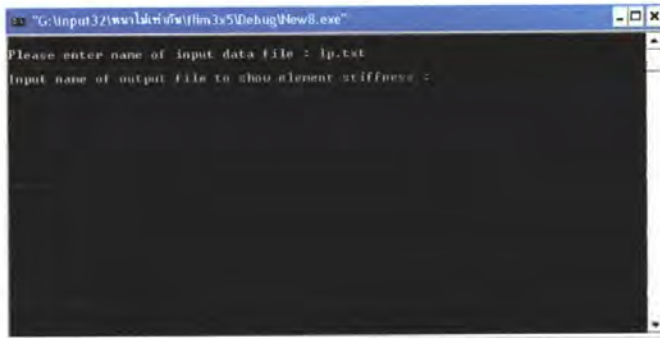
2.2 ทำการเลือกว่าจะให้โปรแกรมอ่านข้อมูลจากไฟล์หรือจะทำการ Input ข้อมูลด้วยตนเอง

```

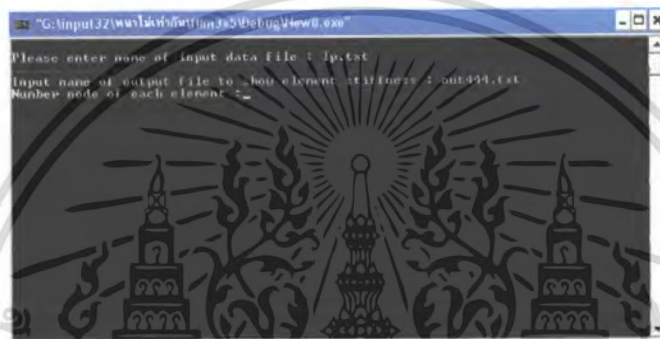
G:\input 32\งานได้ค่าจ้ง\Dim 3x5\Debug\gengrid.exe
***** Generate grid partition *****
Choose type of elements
1) Linear triangle (3 Node elements)
2) Quadratic triangle (6 Node elements)
3) Linear rectangle (4 Node elements)
4) Quadratic rectangle (8 Node elements)
Your choice < 1 - 2 - 3 or 4 > is : 1
Choose method for input data
1) Read File
2) By key board
Your choice < 1 or 2 > is : 1

```

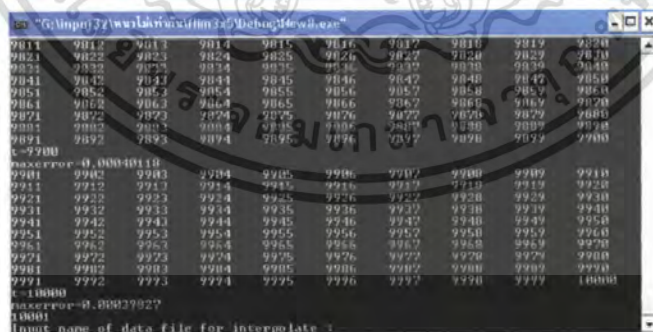
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



3.3 Input จำนวน node ในเอลิเมนต์ ดังรูป

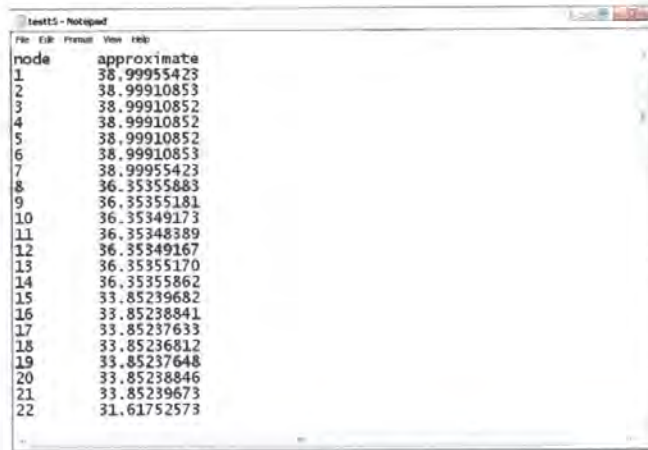


3.4 โปรแกรมจะคำนวณจนถึง วินาทีที่ 10000 หรือ เมื่อคำนวณ ได้ค่าผิดพลาดน้อยกว่าที่กำหนด และให้ใส่ชื่อไฟล์ที่จะทำการ Interpolate (ชื่อเดียวกับ ไฟล์ Output ที่ตั้งไว้) เป็นอันเสร็จสิ้นการทำงานของโปรแกรมภาษาซี ดังรูป



เมื่อเสร็จสิ้นการทำงานข้างต้นจะได้ไฟล์ Output ซึ่งบันทึกค่าอุณหภูมิที่คำนวณไว้ ซึ่งมีลักษณะดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



node	approximate
1	38.99955423
2	38.99910853
3	38.99910852
4	38.99910852
5	38.99910852
6	38.99910853
7	38.99955423
8	36.35355883
9	36.35355181
10	36.35349173
11	36.35348389
12	36.35349167
13	36.35355170
14	36.35355862
15	33.85239682
16	33.85238841
17	33.85237633
18	33.85236812
19	33.85237648
20	33.85238846
21	33.85239673
22	31.61752573

รูปที่ 4.4 ขั้นตอนการทำงานของ โปรแกรมภาษาซี

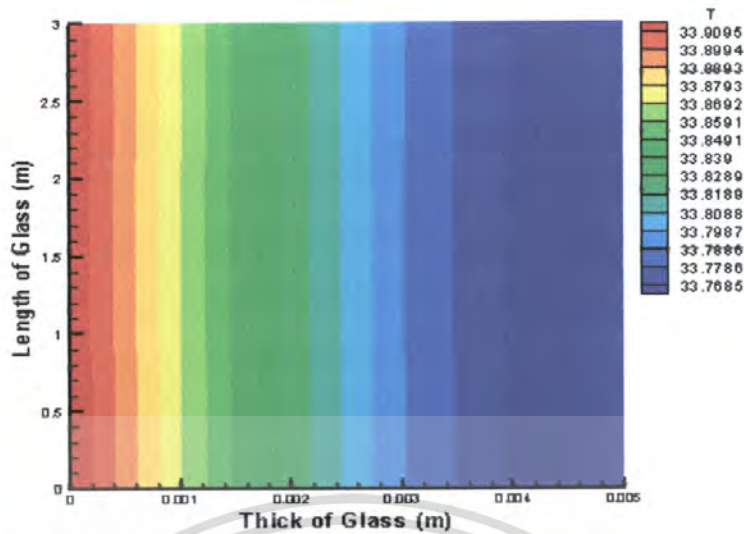
4.3 ผลการคำนวณการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของโปรแกรมภาษาซี

ผลการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ โดยพิจารณาการแบ่งขอบเขตของปัญหาที่แตกต่างกันเพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในของกระจกใส กระจกติดฟิล์มกรองแสง ห้องที่ติดกระจกใส และห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

4.3.1 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใส

4.3.1.1 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

ผลการกระจายอุณหภูมิภายในกระจกใสซึ่งมีความหนา 0.005 มิลลิเมตร เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาปัญหาเป็นขนาด 3x5 ด้วยโปรแกรมภาษาซี โดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างชั้นประกอบอันดับ พบว่าผลที่ได้ จะมีการกระจายอุณหภูมิทั่วทั้งระนาบในกระจกใส ซึ่งกระจกจะมีอุณหภูมิมากที่สุด ณ ผิวที่สัมผัสกับอากาศภายนอกและจะมีการกระจายอุณหภูมิผ่านเข้ามาภายในกระจกและจะมีค่าน้อยลงเรื่อยๆ จนกระทั่งอุณหภูมิที่ผิวอีกด้านหนึ่งของกระจกจะมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งเท่ากับ 33.75884 องศาเซลเซียส สำหรับกรณีที่คำนวณจาก โปรแกรมภาษาซี แสดงดังรูป 4.5

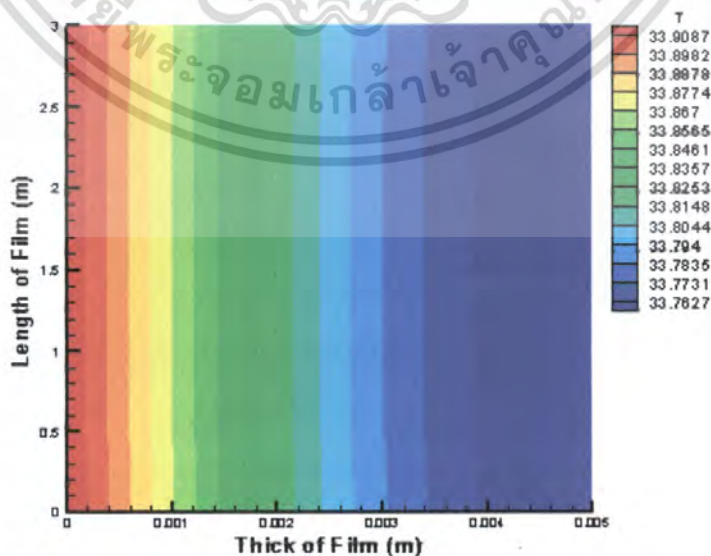


รูปที่ 4.5 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกใสที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

นอกจากนี้ยังพบว่าความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิที่ผิวทั้งสองข้างมีค่าน้อย ซึ่งแสดงให้เห็นว่ากระจกใสมีการแพร่กระจายของความร้อนผ่านได้ประมาณ 99.5 % และสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ตอนต้น

4.3.1.2 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาของปัญหาให้มีความละเอียดยิ่งขึ้นเป็นขนาด 6x10 ดังรูปที่ 4.6 ผลที่ได้จากทั้งโปรแกรมภาษาซีมีค่าใกล้เคียงกับกรณีที่แบ่งบริเวณขนาด 3x5 โดยอุณหภูมิที่ผ่านกระจกใสในกรณีที่คำนวณจาก โปรแกรมภาษาซีมีค่าเท่ากับ 33.75312 องศาเซลเซียส นอกจากนี้ผลการแพร่กระจายของความร้อนมีค่าใกล้เคียงกับกรณีที่แบ่งบริเวณขนาด 3x5 ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

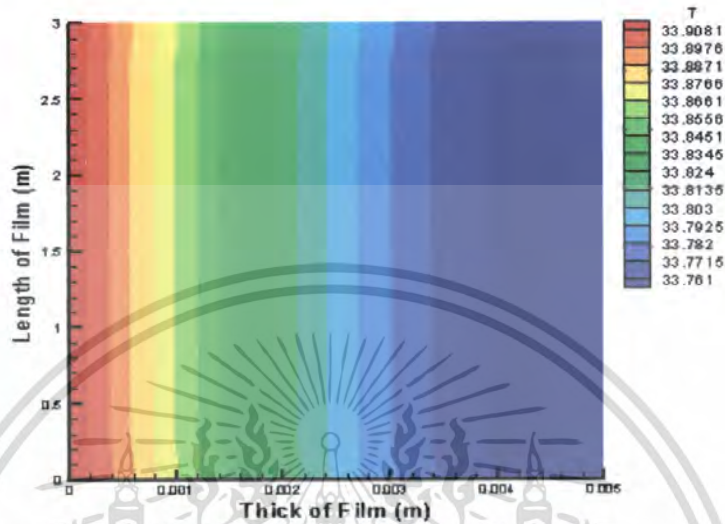


รูปที่ 4.6 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกใสที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.1.3 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15

อุณหภูมิภายในกระจกใสที่มีขนาดของ Element เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาให้ละเอียดยิ่งขึ้น เป็น 12x15 แสดงได้ดังรูป 4.7



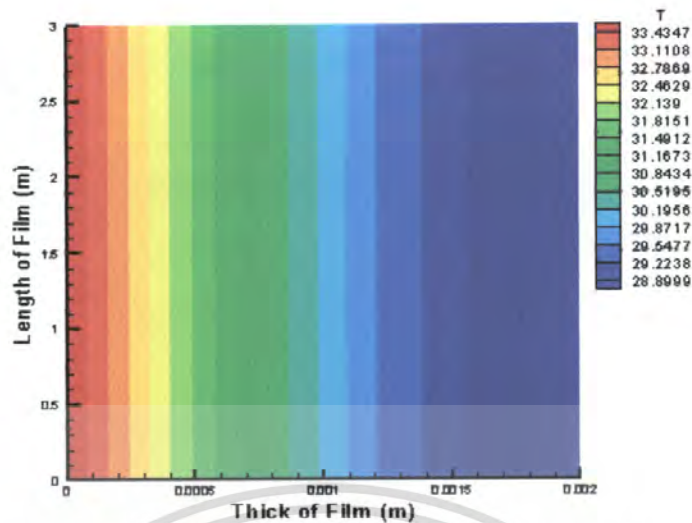
รูปที่ 4.7 แสดงอุณหภูมิภายในกระจกใสที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15

จากรูปจะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากโปรแกรมภาษาซี มีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้น คือมีค่าความแตกต่างความคลาดเคลื่อนเพียง 0.00028 องศาเซลเซียส และส่งผลให้กระจกใสมีการแพร่กระจายของความร้อนเป็น 99.5% อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

4.3.2 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสง

4.3.2.1 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

ผลการกระจายอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสงซึ่งมีความหนา 0.002 มิลลิเมตร เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาปัญหาเป็นขนาด 3x5 ด้วยโปรแกรมภาษาซีโดยใช้ระเบียบวิธีผลต่างจั้นประกอบอันตะพบว่าผลที่ได้มีการกระจายอุณหภูมิทั่วทั้งระนาบในกระจกติดฟิล์มกรองแสง ซึ่งกระจกติดฟิล์มกรองแสงจะมีอุณหภูมิมากที่สุด ณ ผิวที่สัมผัสกับอากาศภายนอกและมีการกระจายอุณหภูมิจากเข้ามาภายในมีค่าน้อยลงเรื่อยๆ จนกระทั่งอุณหภูมิต่ำสุดที่ผิวอีกด้านหนึ่งของกระจกติดฟิล์มกรองแสงจะมีค่าน้อยที่สุด ซึ่งเท่ากับ 28.57632 องศาเซลเซียส สำหรับกรณีที่คำนวณจากโปรแกรมภาษาซี แสดงดังรูป 4.8

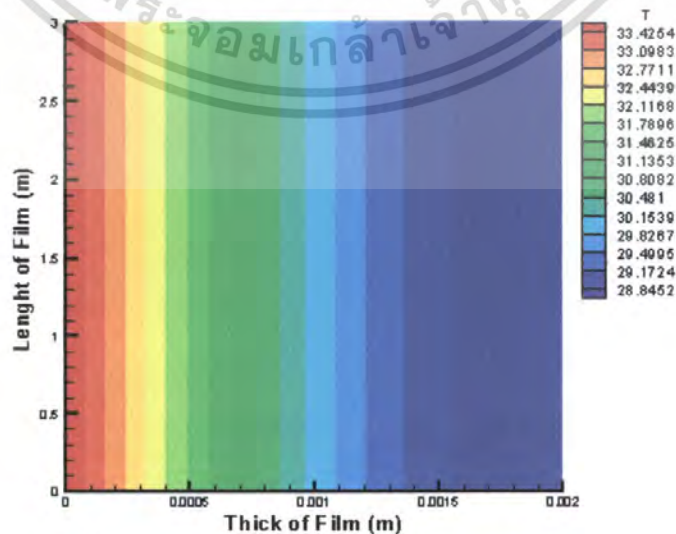


รูปที่ 4.8 แสดงอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

นอกจากนี้ยังพบว่าความแตกต่างระหว่างอุณหภูมิที่ผิวทั้งสองข้างมีค่าน้อย ซึ่งแสดงให้เห็นว่าฟิล์มกรองแสงมีการแพร่กระจายของความร้อนผ่านได้ประมาณ 84.24% และสอดคล้องกับสมมติฐานที่ตั้งไว้ตอนต้น

4.3.2.2 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาของปัญหาให้มีความละเอียดยิ่งขึ้นเป็นขนาด 6x10 ดังรูปที่ 4.9 ผลที่ได้จากทั้งโปรแกรมภาษาซีมีค่าใกล้เคียงกับกรณีที่แบ่งบริเวณขนาด 3x5 โดยอุณหภูมิที่ผ่านฟิล์มกรองแสงในกรณีที่คำนวณจากโปรแกรมภาษาซีมีค่าเท่ากับ 28.51855 องศาเซลเซียส นอกจากนี้ผลการแพร่กระจายของความร้อนมีค่าใกล้เคียงกับกรณีที่แบ่งบริเวณขนาด 3x5 ซึ่งสามารถแสดงได้ดังรูปต่อไปนี้

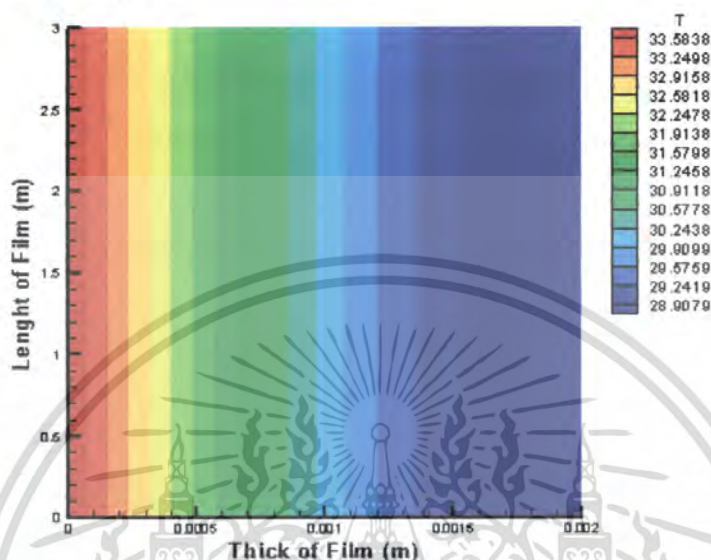


รูปที่ 4.9 แสดงอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.2.3 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15

อุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาให้ละเอียดยิ่งขึ้นเป็น 12x15 แสดงได้ดังรูป 4.10



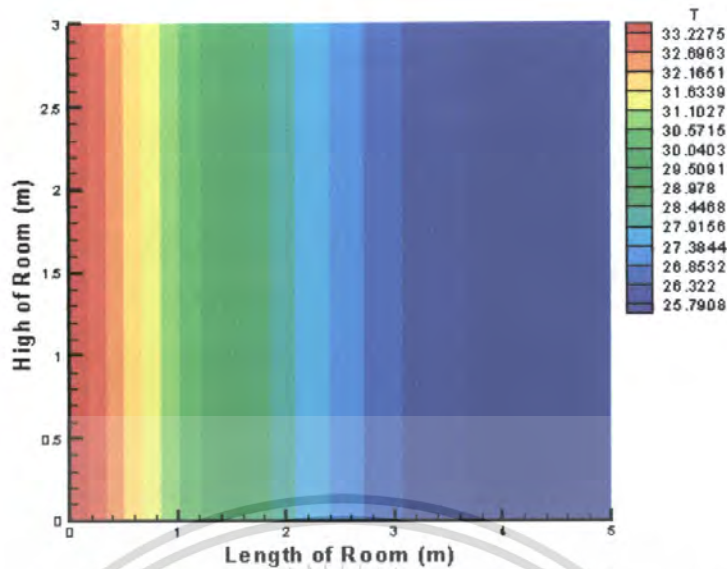
รูปที่ 4.10 แสดงอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15

จากรูปจะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากโปรแกรมภาษาซี มีค่าความแตกต่างของค่าคลาดเคลื่อนใกล้เคียงกันมากขึ้น คือมีค่าต่างกันเพียง 0.00462 องศาเซลเซียส และส่งผลให้กระจกใสมีการแพร่กระจายของความร้อนเป็น 84.24% อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

4.3.3 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส

4.3.3.1 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

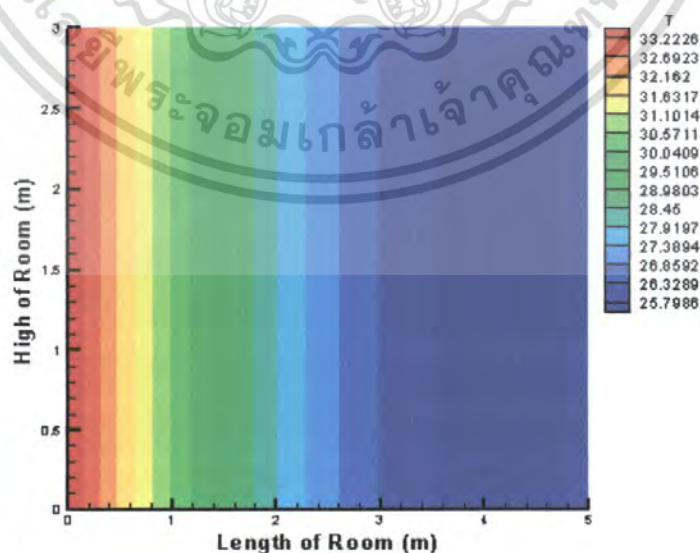
ผลการกระจายอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสซึ่งห้องมีขนาด 3x5 เมตร เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาปัญหาเป็นขนาด 3x5 ด้วยโปรแกรมภาษาซีโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าอุณหภูมิที่ผ่านกระจกใสเข้าไปภายในห้องมีค่าเป็น 33.75884 องศาเซลเซียสในกรณีที่คำนวณจากโปรแกรมภาษาซี อุณหภูมิจะมีค่าลดลงเรื่อยๆจนเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสที่ระยะห่างจากกระจก 3.65 เมตรแสดงดังรูป 4.11



รูปที่ 4.11 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

4.3.3.2 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

ผลการกระจายอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาปัญหาให้มีความละเอียดขึ้นเป็นขนาด 6x10 ด้วยโปรแกรมภาษาซีโดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าอุณหภูมิที่ผ่านกระจกใสเข้าภายในห้องมีค่าเป็น 33.75884 องศาเซลเซียสในกรณีที่คำนวณจากโปรแกรมภาษาซี อุณหภูมิจะมีค่าลดลงเรื่อยๆเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสที่ระยะห่างจากกระจก 3.45 เมตร และยิ่งแบ่งขนาดของปัญหาให้มีความละเอียดมากเท่าใดอุณหภูมิก็จะเข้าสู่อุณหภูมิห้องในระยะที่น้อยลงเป็นระยะ 0.20 เมตรแสดงดังรูป 4.12

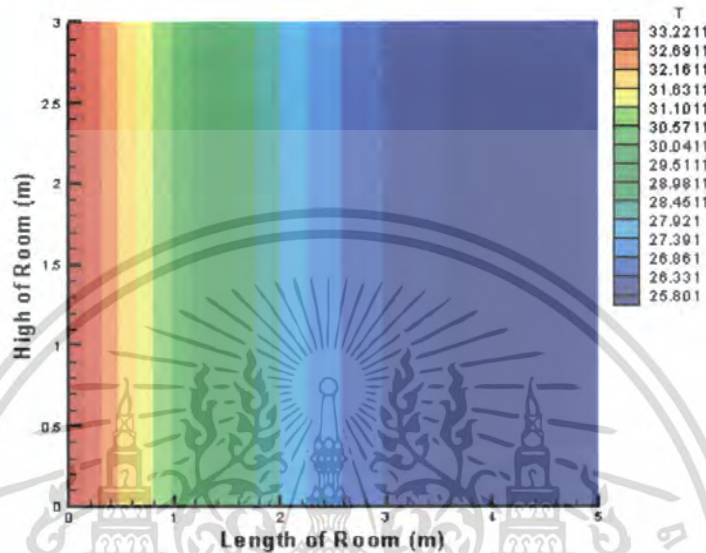


รูปที่ 4.12 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.3.3 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20

ผลการกระจายอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาปัญหาให้มีความละเอียดขึ้นเป็นขนาด 12x20 ด้วยโปรแกรมภาษาซี อุณหภูมิจะมีค่าลดลงเรื่อยๆจนเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสที่ระยะห่างจากกระจก 3.45 เมตรแสดงดังรูป 4.13



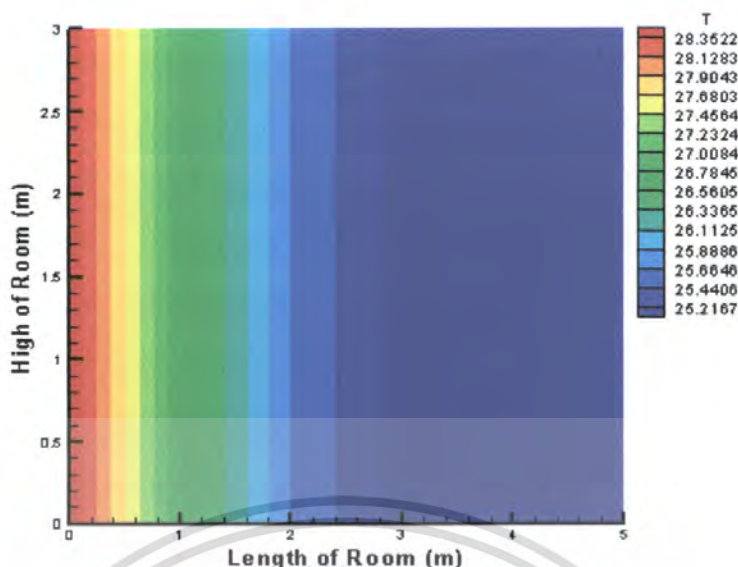
รูปที่ 4.13 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20

จากรูปจะเห็นได้ว่าผลที่ได้จากโปรแกรมภาษาซีและผลจากโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM มีค่าใกล้เคียงกันมากขึ้นและมีระยะห่างที่อุณหภูมิมีค่าลดลงเรื่อยๆจนเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสคือ 3.45 เมตรอย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

4.3.4 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

4.3.4.1 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

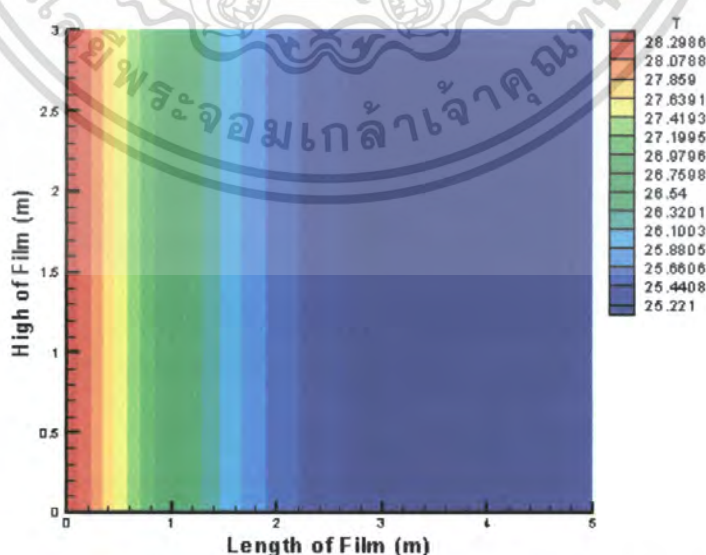
ผลการกระจายอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่ห้องมีขนาด 3x5 เมตร เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาปัญหาเป็นขนาด 3x5 ด้วยโปรแกรมภาษาซี พบว่าอุณหภูมิที่ผ่านกระจกใสเข้าภายในห้องมีค่าเป็น 28.5762 องศาเซลเซียสในกรณีที่คำนวณจากโปรแกรมภาษาซี อุณหภูมิจะมีค่าลดลงเรื่อยๆจนเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสที่ระยะห่างจากกระจก 2.81 เมตรและต่างจากอุณหภูมิของกระจกใสที่มีขนาดเคียวตันเป็น 0.84 เมตรแสดงดังรูป 4.14



รูปที่ 4.14 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 3x5

4.3.4.2 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

ผลการกระจายอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณาปัญหาให้มีความละเอียดขึ้นเป็นขนาด 6x10 ด้วยโปรแกรมภาษาซี โดยใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พบว่าอุณหภูมิที่ผ่านกระจกใสเข้าภายในห้องมีค่าเป็น 28.5762 องศาเซลเซียสในกรณีที่คำนวณจากโปรแกรมภาษาซี อุณหภูมิจะมีค่าลดลงเรื่อยๆจนเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสที่ระยะห่างจากกระจก 2.75 เมตรและต่างจากอุณหภูมิของกระจกใสที่มีขนาดเดียวกันเป็น 0.7 เมตร ซึ่งแบ่งขนาดของปัญหาให้มีความละเอียดมากเท่าใดอุณหภูมิก็จะเข้าสู่ภาวะอุณหภูมิห้องที่เร็วขึ้นแสดงดังรูป 4.15

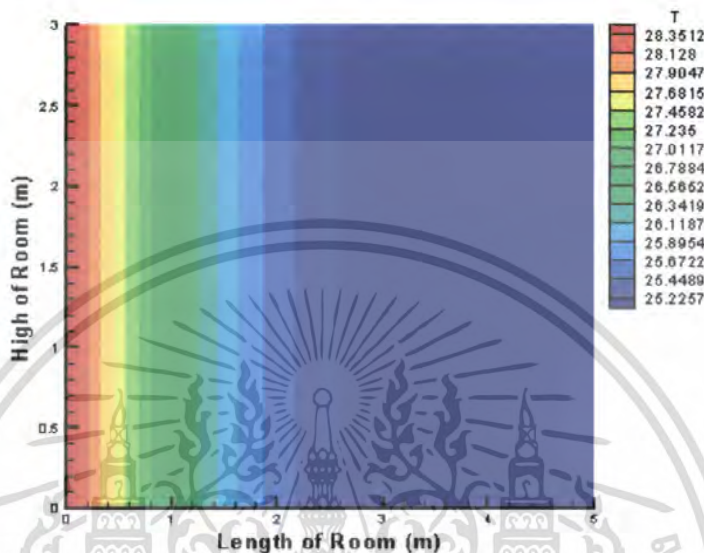


รูปที่ 4.15 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 6x10

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.4.3 แบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20

ผลการกระจายอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง เมื่อแบ่งบริเวณที่พิจารณา ปัญหาให้มีความละเอียดขึ้นเป็นขนาด 12x20 ด้วยโปรแกรมภาษาซี อุณหภูมิจะมีค่าลดลงเรื่อยๆจนเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสที่ระยะห่างจากกระจก 2.60 เมตรแสดงดังรูป 4.16



รูปที่ 4.16 แสดงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20

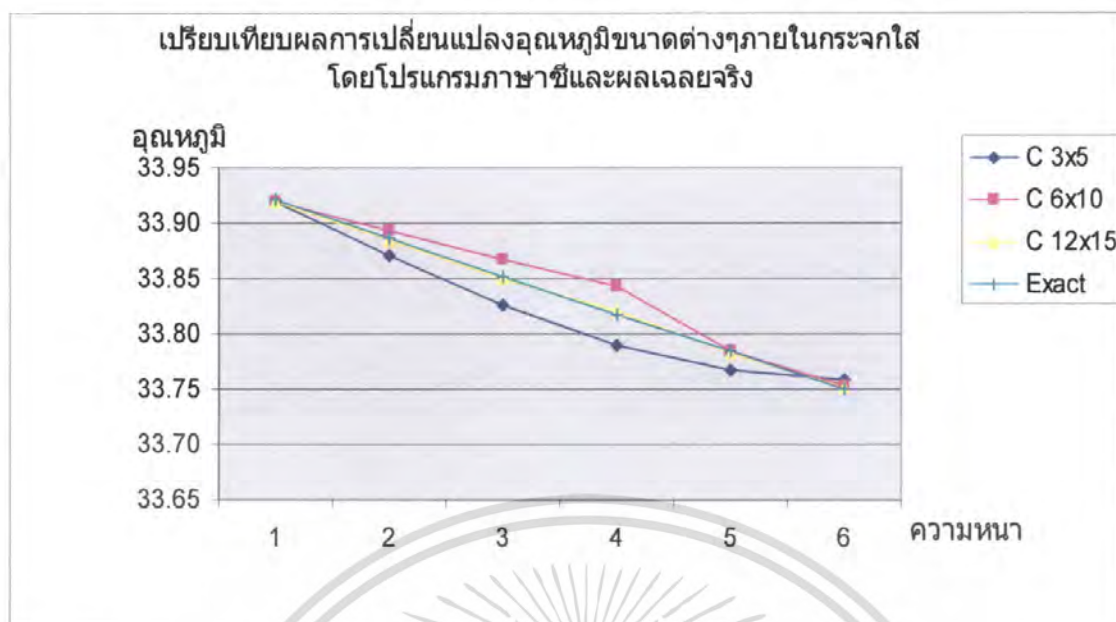
จากรูปผลจากโปรแกรมภาษาซีและผลจากโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM ของอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงพบว่าการกระจายอุณหภูมิภายในห้องมีอุณหภูมิที่ผ่านเข้าสู่ อุณหภูมิห้องที่ 25 องศาเซลเซียสเป็นระยะ 2.60 เมตร และมีระยะที่ต่างจากอุณหภูมิของกระจกใสที่มี ขนาดเดียวกันเป็น 0.85 เมตรมากยิ่งขึ้น

4.4 การเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของโปรแกรมภาษาซีกับผลเฉลยจริง

ตารางที่ 4.1 เปรียบเทียบผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในกระจกใส

ลำดับ	โปรแกรมภาษาซี			Exact
	3x5	6x10	12x15	
1	33.919557	33.919082	33.918641	33.9200
2	33.869894	33.893121	33.883937	33.8860
3	33.825092	33.867798	33.850749	33.8520
4	33.789537	33.843738	33.820527	33.8180
5	33.766708	33.784817	33.783597	33.7840
6	33.758843	33.753121	33.751717	33.7500

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



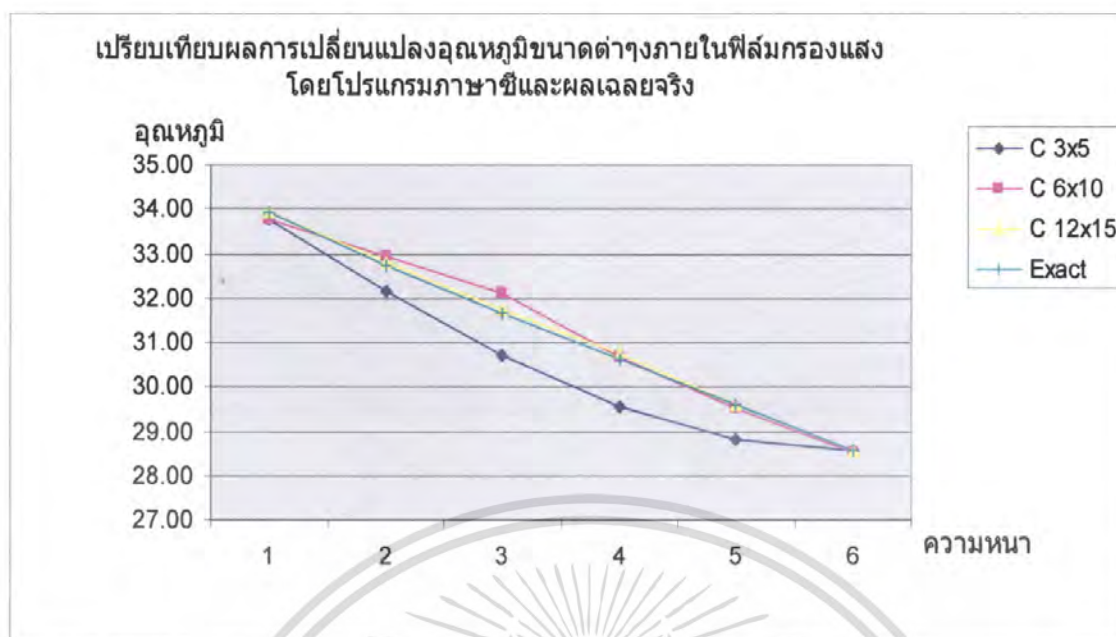
รูปที่ 4.17 ผลการเปรียบเทียบอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในกระจกใสโดยโปรแกรมภาษาซีและผลเฉลยจริง

จากรูปพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใสที่มีขนาด 12x15 จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากกว่าขนาดแบบต่างๆ

ตารางที่ 4.2 แสดงการเปรียบเทียบผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในฟิล์มกรองแสง

ลำดับ	โปรแกรมภาษาซี			Exact
	3x5	6x10	12x15	
1	33.758584	33.752563	33.917770	33.920000
2	32.154504	32.931532	32.803618	32.714000
3	30.708827	32.131035	31.738999	31.678000
4	29.563323	30.670396	30.770872	30.642000
5	28.829011	29.514019	29.590509	29.606000
6	28.576231	28.518549	28.574623	28.570000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



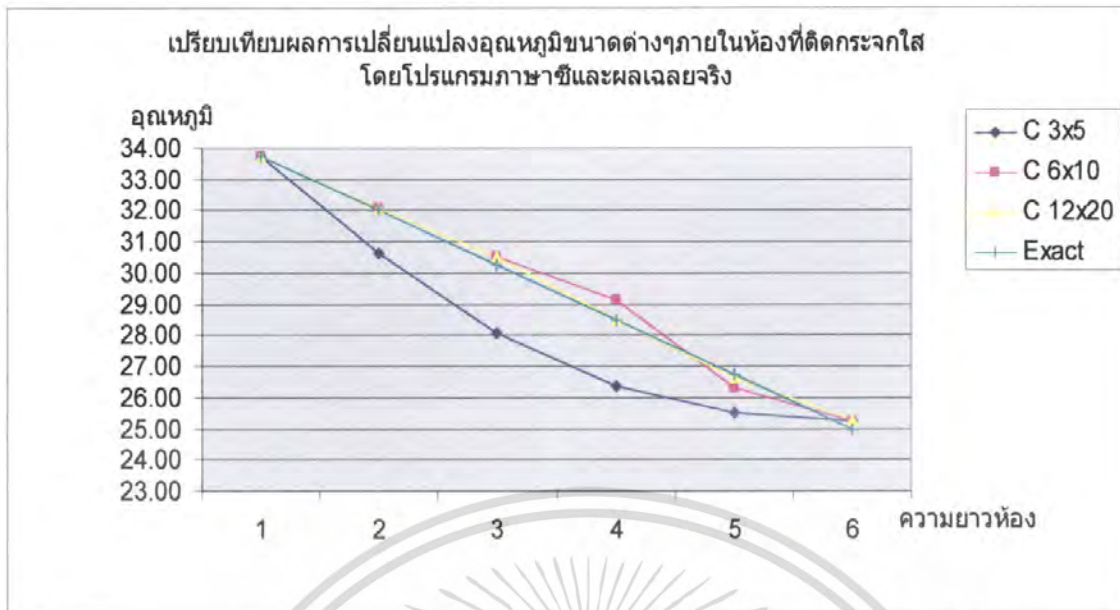
รูปที่ 4.18 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในฟิล์มกรองแสง โดยโปรแกรมภาษาซีและผลเฉลยจริง

จากรูปพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในฟิล์มกรองแสงที่มีขนาด 12x15 จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากกว่าขนาดแบบต่างๆ

ตารางที่ 4.3 แสดงการเปรียบเทียบผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในห้องที่ติดกระจกใส

ลำดับ	โปรแกรมภาษาซี			Exact
	3x5	6x10	12x15	
1	33.758722	33.752842	33.751120	33.750000
2	30.630714	32.098004	32.081840	32.000000
3	28.077248	30.534301	30.507529	30.250000
4	26.388540	29.137102	28.485656	28.500000
5	25.516019	26.313084	26.614881	26.750000
6	25.259576	25.268317	25.271011	25.000000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



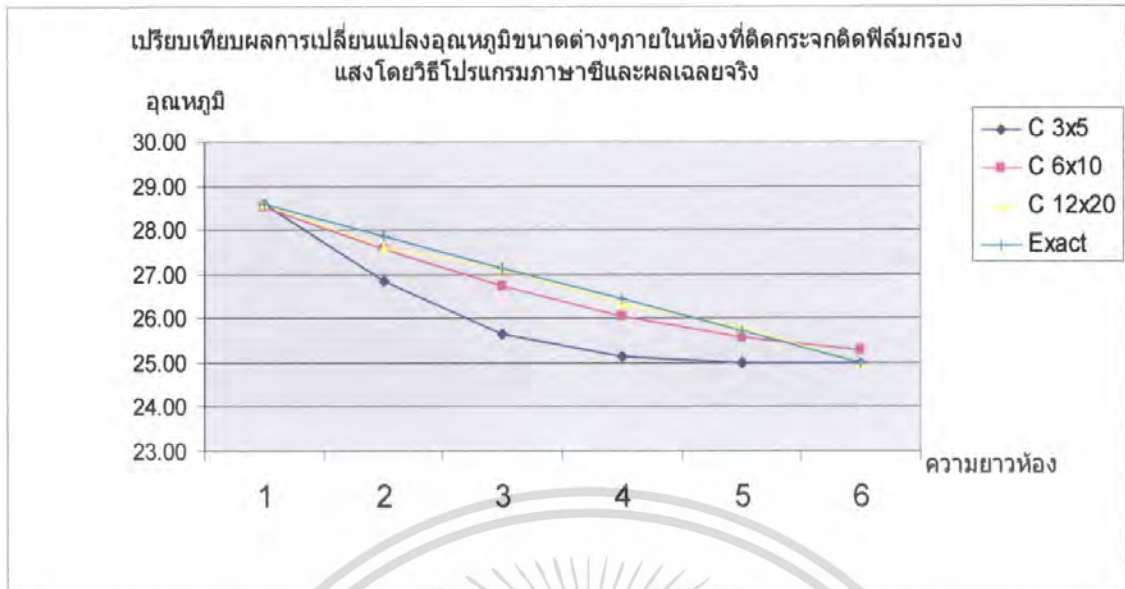
รูปที่ 4.19 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในห้องที่ติดกระจกใส โดย โปรแกรมภาษาซี และผลเฉลยจริง

จากรูปพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสที่มีขนาด 12x20 จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากกว่าขนาดแบบต่างๆ

ตารางที่ 4.4 แสดงการเปรียบเทียบผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

ลำดับ	โปรแกรมภาษาซี			Exact
	3x5	6x10	12x15	
1	28.576201	28.518477	28.574461	28.570000
2	26.836997	27.566114	28.074313	27.856000
3	25.656753	26.718014	27.589886	27.142000
4	25.135658	26.045837	27.134337	26.428000
5	25.004782	25.573187	26.718923	25.714000
6	24.992702	25.279666	26.351613	25.000000

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



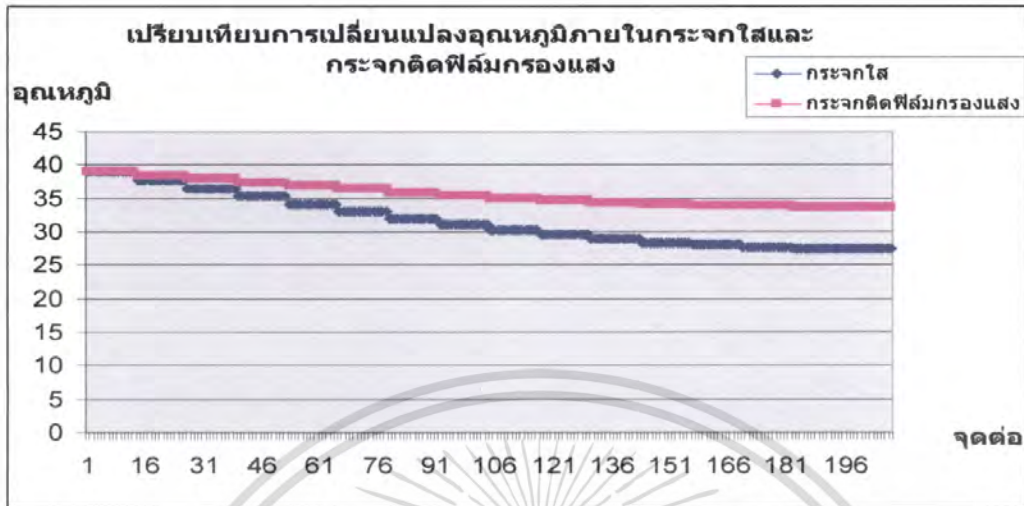
รูปที่ 4.20 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิขนาดแบบต่างๆภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงโดยโปรแกรมภาษาซีและผลเฉลยจริง

จากรูปพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงที่มีขนาด 12x20 จะมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงมากกว่าขนาดแบบต่างๆ

4.5 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจากโปรแกรมภาษาซี

กราฟเปรียบเทียบผลการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ โดยพิจารณาการแบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15 เพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใส และกระจกติดฟิล์มกรองแสง และพิจารณาการแบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20 เพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส และห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

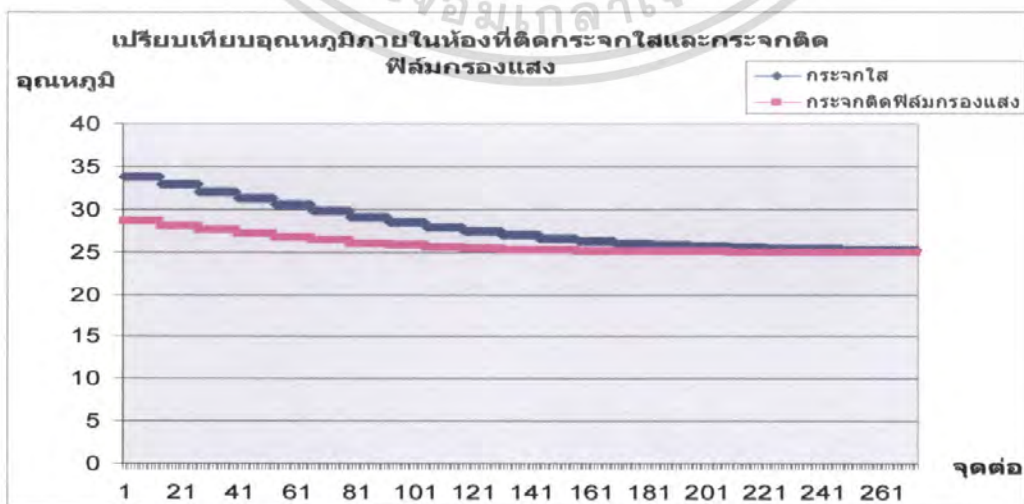
4.5.1 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใสและฟิล์มกรองแสง



รูปที่ 4.21 อุณหภูมิภายในกระจกใสและฟิล์มกรองแสง โดยโปรแกรมภาษาซี

จากรูปเมื่อเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง จะเห็นว่าอุณหภูมิ ณ จุดต่างๆ และอุณหภูมิที่ผิวด้านในของกระจกใสมีค่าสูงกว่าอุณหภูมิในกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่บริเวณจุดต่อที่ 118-130 มีค่าอุณหภูมิต่างกัน 5.16227 องศาเซลเซียส และเริ่มมีระยะห่างที่คงที่ที่จุดต่อ 196-208 มีค่าอุณหภูมิต่างกัน 6.203873 องศาเซลเซียส ทำให้เราทราบว่ากระจกใสมีการนำความร้อนที่ดีกว่ากระจกติดฟิล์มกรองแสง

4.5.2 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องติดกระจกใสและห้องติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง



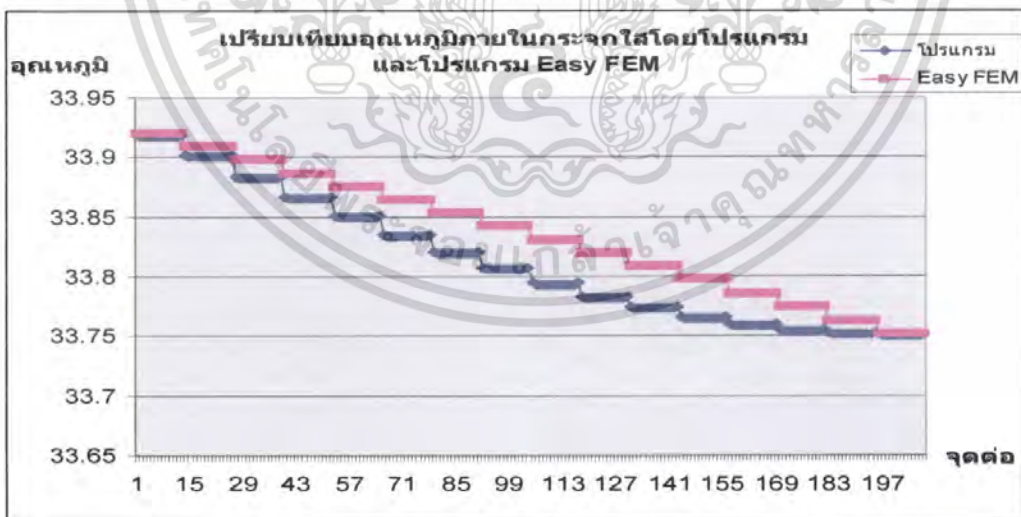
รูปที่ 4.22 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปเมื่อเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสและห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง จะเห็นว่าอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสมีการลู่เข้าสู่ค่าอุณหภูมิที่ 25 องศาเซลเซียสช้ากว่าห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยกระจกใสมีอุณหภูมิเริ่มเข้าสู่อุณหภูมิที่ 25 องศาเซลเซียสเมื่อมีตำแหน่งภายในห้องที่ห่างจากกระจกใสเป็นระยะ 4 เมตร กระจกติดฟิล์มกรองแสงเริ่มมีเข้าสู่อุณหภูมิที่ 25 องศาเซลเซียสเมื่อมีตำแหน่งภายในห้องที่ห่างจากกระจกใสเป็นระยะ 3 เมตรทำให้เราทราบว่าอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสมีอุณหภูมิที่สูงกว่าอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

4.6 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิจากโปรแกรมภาษาซี กับ โปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM

กราฟเปรียบเทียบผลการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ โดยพิจารณาการแบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x15 เพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใส และกระจกติดฟิล์มกรองแสง และพิจารณาการแบ่งขนาดของ Element เป็นขนาด 12x20 เพื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส และห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

4.6.1 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใส

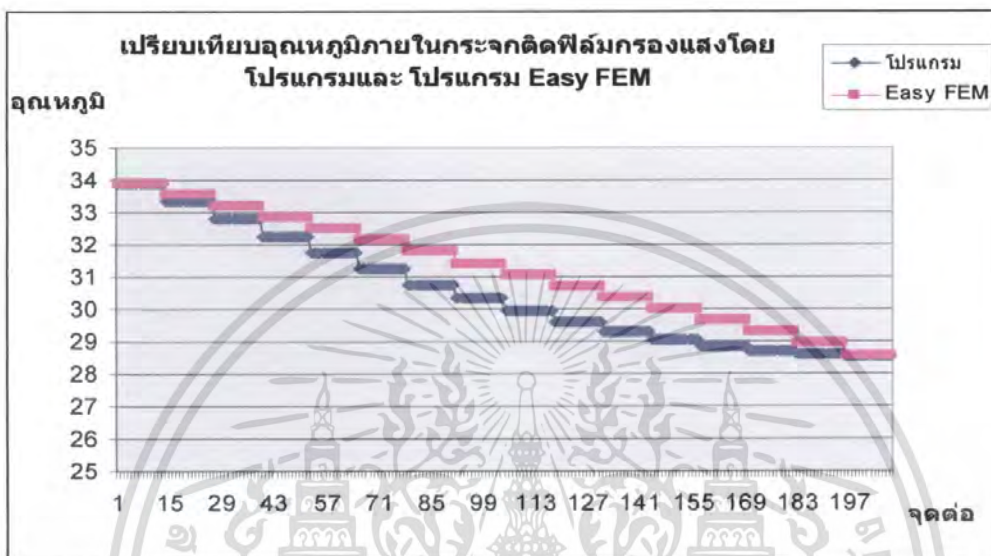


รูปที่ 4.23 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใส

จากรูปพบว่า การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใสโดยโปรแกรมภาษาซีจะลดลงในอัตราช่วงที่คงที่คล้ายการเปลี่ยนแปลงแบบเส้นตรง ซึ่งอุณหภูมิที่อัตราลดลงที่คงที่เฉลี่ยเป็น 0.023207 องศาเซลเซียส และโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM อุณหภูมิมีอัตราลดลงเป็นเส้นคล้ายฟังก์ชันเอ็ก เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โพเนนเชียล ช่วงค่าความแตกต่างที่มากที่สุดของอุณหภูมิทั้งสองโปรแกรมคือ 0.036693 องศาเซลเซียส และอุณหภูมิที่ผ่านผิวอีกด้านหนึ่งของกระจกใสมีค่าเท่ากับ 33.75 องศาเซลเซียส

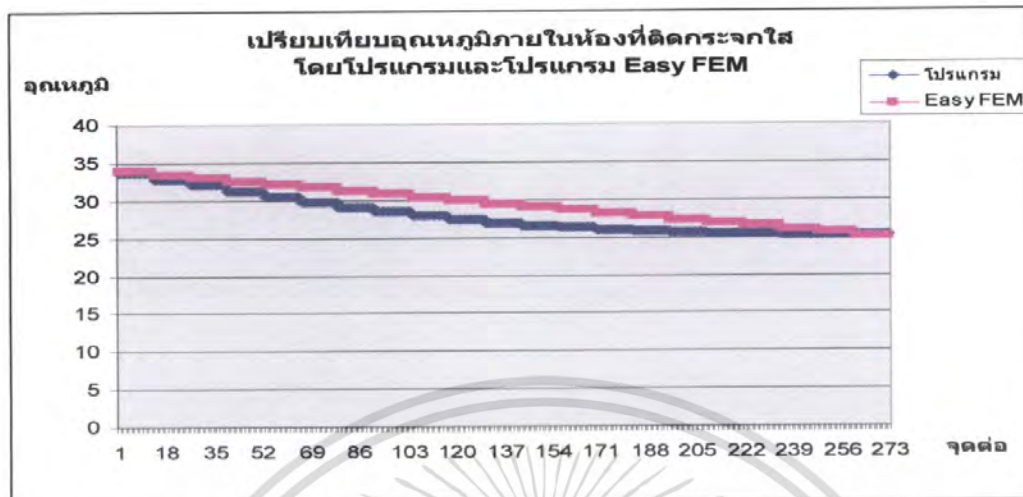
4.6.2 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกติดฟิล์มกรองแสง



รูปที่ 4.24 กราฟแสดงเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกติดฟิล์มกรอง

จากรูปพบว่า การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกติดฟิล์มกรองแสงโดยโปรแกรมภาษาซี และโดยโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM จะเหมือนกรณีของกระจกใส แต่อัตราการกระจายภายในโดยเฉลี่ยของกระจกติดฟิล์มกรองแสงสูงกว่ากระจกใส 0.66185 องศาเซลเซียส ส่งผลให้อุณหภูมิที่ผ่านกระจกติดฟิล์มกรองแสงมีค่าเป็น 28.57 องศาเซลเซียส ซึ่งอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิของกระจกใส แสดงว่ากระจกใสนำความร้อนได้ดีกว่ากระจกติดฟิล์มกรองแสง

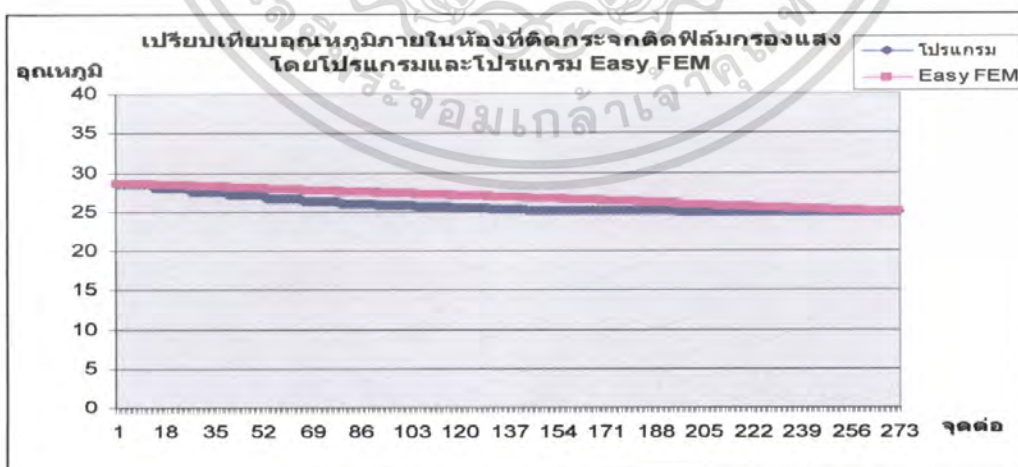
4.6.3 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส



รูปที่ 4.25 กราฟเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส

จากรูปพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใส โดย โปรแกรม Easy FEM มีค่าสูงกว่า โปรแกรมภาษาซี โดยช่วงที่มากที่สุดคือช่วงอุณหภูมิ 2.507251 องศาเซลเซียสและอุณหภูมิภายในห้องของทั้งสอง โปรแกรมเริ่มเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ห่างจากกระจกใสเท่ากับ 4.25 เมตรตรงจุดต่อที่ 261

4.6.4 ผลการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง



รูปที่ 4.26 กราฟแสดงการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปพบว่า การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยโปรแกรม Easy FEM มีค่าสูงกว่าโปรแกรมภาษาซีเพียงเล็กน้อย 1.580643 องศาเซลเซียส และอุณหภูมิภายในห้องของทั้งสองโปรแกรมเริ่มเข้าสู่อุณหภูมิห้องที่ห่างจากกระจกติดฟิล์มกรองแสงเท่ากับ 4 เมตรตรงจุดต่อที่ 222

จากกราฟแสดงการเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระจกใส กระจกติดฟิล์มกรองแสง และห้องติดกระจกใส เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิระหว่างโปรแกรมภาษาซีกับโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM ทำให้เราทราบว่า การหาค่าอุณหภูมิ ณ จุดต่อต่างๆ จากโปรแกรมภาษาซีมีความละเอียดกว่าค่าที่ได้จากโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM แต่ค่าที่ได้ยังคงเป็นค่าที่ใกล้เคียงกันมาก เว้นแต่ห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิจากโปรแกรมภาษาซี ที่ให้ค่าอุณหภูมิลดลงเร็วกว่าค่าจากโปรแกรม Easy FEM เนื่องจากโปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM ไม่สามารถกำหนดขอบเขตให้กับค่าทางขวามือของกราฟให้มีค่าเป็น 25 องศาเซลเซียส ตลอดเวลาได้ จึงส่งผลให้ค่าอุณหภูมิจากโปรแกรมภาษาซีเข้าใกล้ 25 องศาเซลเซียสเร็วกว่า แต่ที่การเปรียบเทียบอุณหภูมิภายในกระจกใส กระจกติดฟิล์มกรองแสง และห้องติดกระจกใสยังคงให้ค่าใกล้เคียงกัน เนื่องจากอุณหภูมิที่ได้รับมีค่า 33.92 องศาเซลเซียสซึ่งค่าสูงกว่า 25 องศาเซลเซียสมากกว่าค่าที่ได้รับเมื่อผ่านฟิล์มซึ่งมีค่าประมาณ 28-29 องศาเซลเซียส จึงทำให้เราสังเกตเห็นความแตกต่างระหว่างโปรแกรมทั้งสองได้อย่างชัดเจนได้ไม่ชัดเจน

4.7 การคำนวณค่าใช้จ่ายภายในห้องที่ความร้อนผ่านกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง

ในการคำนวณค่าใช้จ่ายภายในห้องที่ความร้อนผ่านกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงได้นำผลการทดลองจากโปรแกรมที่ได้สร้างขึ้นมาโดยใช้ภาษา Visual C ที่นำมาใช้แก้ปัญหาสมการความร้อน และนำผลที่ได้มาทำการคำนวณค่าใช้จ่าย ในการศึกษาการคำนวณค่าใช้จ่ายได้นำโปรแกรมที่ช่วยในการคำนวณค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคาร (OTTV) และการถ่ายเทความร้อนของหลังคา (RTTV) ตามพระราชบัญญัติการส่งเสริมการอนุรักษ์พลังงาน พ.ศ. 2535 และประเมินการใช้พลังงานโดยรวมของอาคาร ออกแบบโดยสถาบันวิจัยจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการนโยบายพลังงานแห่งชาติ เผยแพร่โดยกรมส่งเสริมพลังงาน กระทรวงวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและสิ่งแวดล้อม หรือที่เรียกว่าโปรแกรม OTTVEE Version 1.0a โปรแกรม OTTVEE Version 1.0a เป็นโปรแกรมที่คำนวณค่า OTTV/ RTTV ตามพระราชบัญญัติการส่งเสริมการอนุรักษ์พลังงาน พ.ศ. 2535 สามารถประเมินภาระของระบบปรับ

อากาศโดยรวมของอาคารด้วยมาตรฐาน ASHRAE 1997 ประเมินการใช้พลังงานโดยรวมของอาคาร ประเมินค่าไฟฟ้าในแต่ละเดือนและตลอดปี ฯลฯ

4.7.1 การคำนวณค่าใช้จ่ายของกระจกใส

จากผลการทดลองพบว่าอุณหภูมิที่ผ่านกระจกใส่นั้น สามารถผ่านกระจกใสได้ 100% เมื่อนำผลที่ได้มาคำนวณต้นทุนการผลิตและค่าใช้จ่ายแสดงขั้นตอนได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ใส่ชื่อโครงการ ชื่อบริเวณ ชนิดบริเวณ และที่ตั้งโครงการ การตั้งชื่อไม่มีผลต่อการคำนวณ ขนาดของที่ปรับอากาศเป็น 15 ตารางเมตร เพราะปัญหาที่เราศึกษา เราศึกษาปัญหาการกระจายของอุณหภูมิภายในห้องซึ่งพื้นที่ดังกล่าวเป็นขนาดของห้องที่ศึกษา ที่มีความสูง 3 เมตรแสดงได้ดังรูปที่ 4.24 แล้วกดตกลงเพื่อป้อนข้อมูลต่อไป

ชื่อโครงการ	Office
ชื่อบริเวณ	room
ชนิดบริเวณ	อาคารสำนักงานราชการ
ที่ตั้งโครงการ	กรุงเทพมหานคร
ขนาดพื้นที่ปรับอากาศ	15 ตารางเมตร
ความสูงของบริเวณ (FL to FL)	3 เมตร

ตกลง

รูปที่ 4.27 แสดงการป้อนค่าข้อมูลของห้อง

ขั้นตอนที่ 2 ป้อนวัสดุอุปกรณ์ภายในห้อง ซึ่งจากสมมติฐานที่เราตั้งไว้ตอนต้น ที่ว่าจะกำหนดให้ผนังห้องในด้านเป็นฉนวนไม่นำความร้อน แต่จะมีการถ่ายเทความร้อนจากผนังด้านที่ติดกระจกใสเท่านั้น จากรูปที่ 4.25 จะเห็นว่ามีกำหนดทิศทางของผนังแต่ละด้าน พิจารณาด้านที่ติดกระจกใสหรือกระจกธรรมดา ชนิดของผนังกระจกจะเป็นผนังโปร่งแสง และจะมีค่า u ของผนังเป็น 2.8 ($W/sq.m.^{\circ}C$) แสดงข้อมูลได้ดังรูปที่ 4.25 จากนั้นทำการเลือก ป้อนข้อมูลภายในอาคาร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รายการที่	ทิศ	ชนิดผนัง	ชื่อ	U	พื้นที่
1	N	ผนังทึบ	ผนังอาคารมีฉนวน	0.1	15.0
2	E	ผนังโปร่งแสง	กระจกธรรมดา	2.8	15.0
3	S	ผนังทึบ	ผนังอาคารมีฉนวน	0.1	15.0
4	W	ผนังทึบ	ผนังอาคารมีฉนวน	0.1	15.0
5					
6					
7					
8					
9					

รูปที่ 4.28 แสดงการป้อนข้อมูลของผนังห้องด้านต่างๆ

ขั้นตอนที่ 3 ในส่วนของการป้อนข้อมูลอาคาร เลือกป้อนอุณหภูมิที่ต้องการในการออกแบบ เป็นอุณหภูมิที่กำหนดภายในห้องที่ 25°C ความชื้นที่ต้องการในการออกแบบ ตามปกติความชื้นโดยทั่วๆ ไปที่ใช้ในการออกแบบประมาณ 30% ข้อมูลภูมิอากาศเป็นข้อมูลภายในกรุงเทพมหานคร เนื่องจากงานวิจัยชิ้นนี้ได้เก็บรวบรวมข้อมูลภูมิอากาศภายในกรุงเทพมหานคร และเลือกวันเริ่มต้นของปี 2551 คือวันอังคารที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2551 แสดงการป้อนข้อมูลได้ดังรูปที่ 4.26 แล้วเลือก การคำนวณพลังงาน

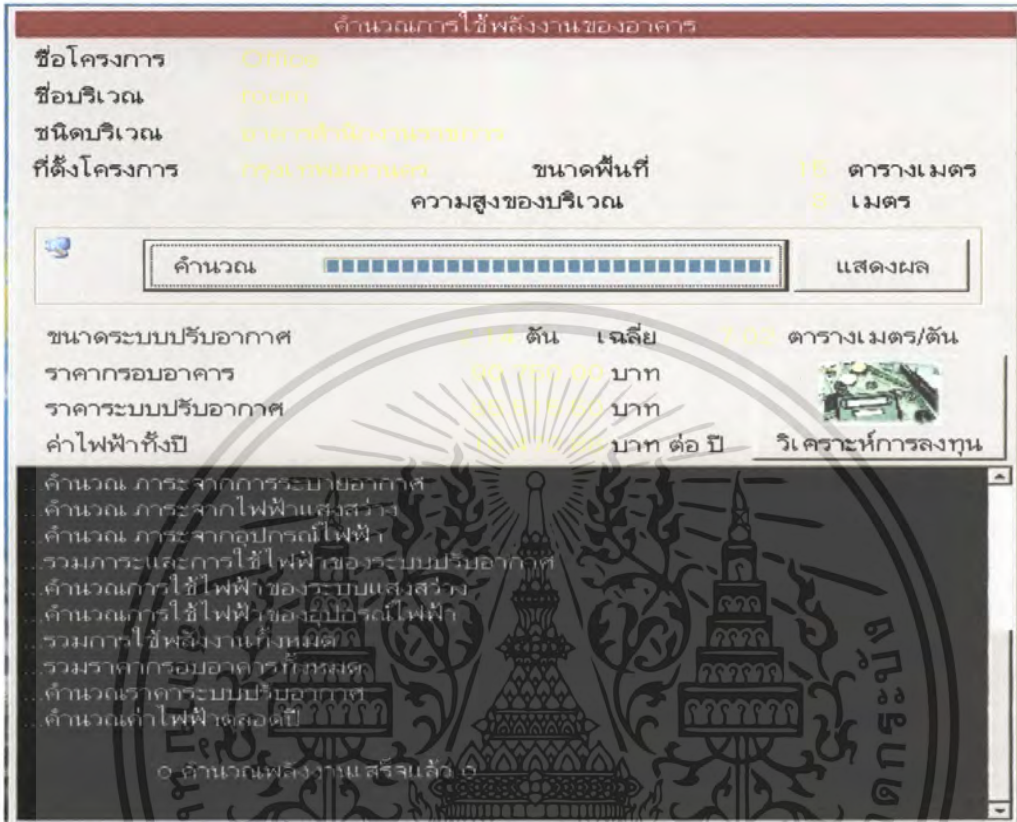
ป้อนข้อมูลภายในอาคาร	ชื่อโครงการ	Office	ขนาดพื้นที่	15 ตารางเมตร
ป้อนกรอบอาคาร	ชื่อบริเวณ	7.1	ความสูงของบริเวณ	3 เมตร
คำนวณพลังงาน	ชนิดบริเวณ	อาคารสำนักงาน		
	ที่ตั้งโครงการ	กรุงเทพมหานคร		

ภาวะการออกแบบระบบปรับอากาศ	
อุณหภูมิที่ต้องการในการออกแบบ	25 °C
ความชื้นที่ต้องการในการออกแบบ	30 %
เลือกข้อมูลภูมิอากาศ	กรุงเทพมหานคร เฉลี่ย 10 ปี
วันเริ่มต้นของปี : วันที่ 1 ม.ค. คือ วัน	อังคาร

รูปที่ 4.29 แสดงการป้อนอุณหภูมิภายในห้อง

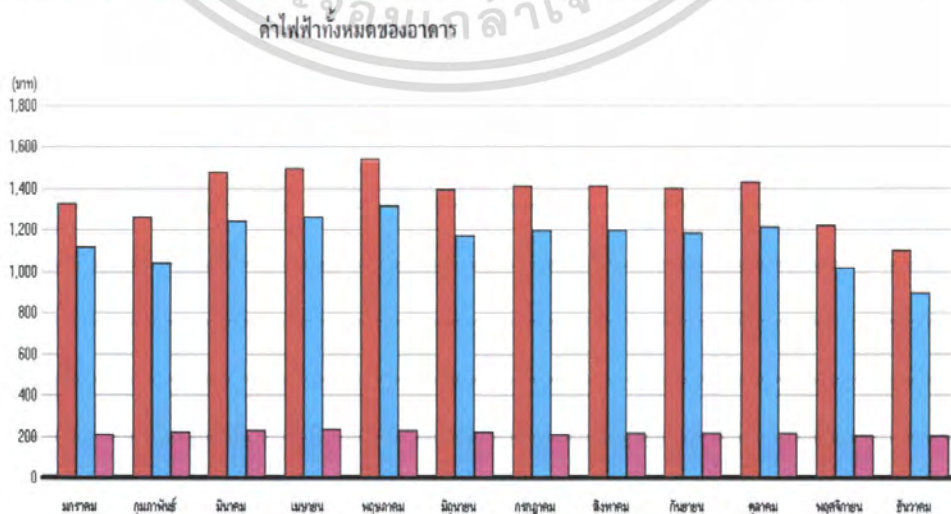
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนที่ 4 เมื่อเลือกการคำนวณพลังงาน โปรแกรมก็จะทำการคำนวณการใช้พลังงานของอาคาร โดยระบุขนาดระบบปรับอากาศ ราคาหออาคาร ราคาระบบอากาศ และราคาค่าไฟฟ้าทั้งปี แสดงได้ดังรูปที่ 4.2 จากนั้นเลือกการแสดงผล



รูปที่ 4.30 แสดงการการคำนวณการใช้พลังงานของอาคาร

ขั้นตอนที่ 5 การแสดงผลค่าไฟฟ้าทั้งหมดภายในอาคาร เนื่องจากปัญหางานวิจัยในครั้งนี้ ศึกษาในกรณีภายในห้อง ดังนั้นความหมายของอาคารจึงหมายถึงห้อง แสดงค่าไฟฟ้าได้ดังรูปที่ 4.28



รูปที่ 4.31 แสดงค่าไฟฟ้าภายในห้องที่ผ่านกระจกใสตลอดระยะเวลา 1 ปี เื่อเลือกการคำนวณค่าไฟฟ้า โปรแกรมก็จะนำค่าที่คำนวณได้ไปใช้ประโยชน์ด้านการคำนวณค่าไฟฟ้าในแต่ละเดือน ซึ่งค่าที่คำนวณได้จะแตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับเงื่อนไขการคำนวณ ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากข้อมูลค่าใช้จ่ายในแต่ละเดือนของกระจกใสภายในอาคาร เขียนเป็นตารางข้อมูลได้ดังนี้
ตารางที่ 4.5 แสดงค่าใช้จ่ายในแต่ละเดือนของกระจกใส

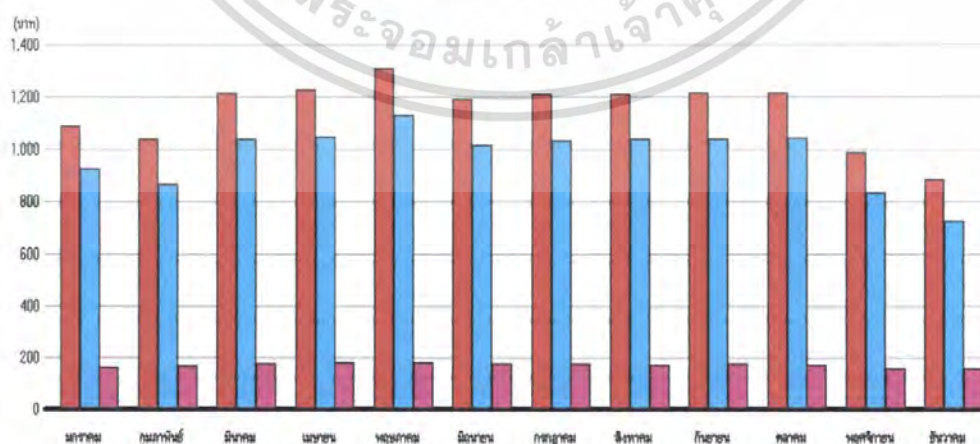
เดือน	ค่าไฟฟ้า (บาท)
มกราคม	1,300.00
กุมภาพันธ์	1,250.00
มีนาคม	1,450.00
เมษายน	1,450.00
พฤษภาคม	1,500.00
มิถุนายน	1,390.00
กรกฎาคม	1,400.00
สิงหาคม	1,400.00
กันยายน	1,395.00
ตุลาคม	1,420.00
พฤศจิกายน	1,250.00
ธันวาคม	1,100.00

การคำนวณค่าใช้จ่ายของกระจกติดฟิล์มกรองแสง

ในกรณีของกระจกติดฟิล์มกรองแสงจะแตกต่างจากกระจกใสที่ความแตกต่างของอุณหภูมิและค่าการนำความร้อนของกระจกติดฟิล์มที่กล่าวไว้ตอนต้น ดังนั้นเมื่อคำนวณโดยใช้โปรแกรม OTTVEE

Version 1.0a จะแสดงข้อมูลค่าใช้จ่ายได้ดังรูปที่ 4.32 ดังต่อไปนี้

ค่าไฟฟ้าทั้งหมดของอาคาร



รูปที่ 4.32 แสดงค่าไฟฟ้าภายในห้องที่ผ่านกระจกติดฟิล์มกรองแสงตลอดระยะเวลา 1 ปี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากข้อมูลค่าใช้จ่ายในแต่ละเดือนของกระจกติดฟิล์มกรองแสงภายในอาคาร เขียนเป็นตารางข้อมูลได้ดังนี้

ตารางที่ 4.6 แสดงค่าใช้จ่ายในแต่ละเดือนของกระจกติดฟิล์มกรองแสง

เดือน	ค่าไฟฟ้า (บาท)
มกราคม	1,100.00
กุมภาพันธ์	1,047.00
มีนาคม	1,250.00
เมษายน	1,250.00
พฤษภาคม	1,350.00
มิถุนายน	1,250.00
กรกฎาคม	1,250.00
สิงหาคม	1,250.00
กันยายน	1,250.00
ตุลาคม	1,250.00
พฤศจิกายน	1,050.00
ธันวาคม	900.00

เปรียบเทียบค่าใช้จ่ายรายเดือนระหว่างกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง

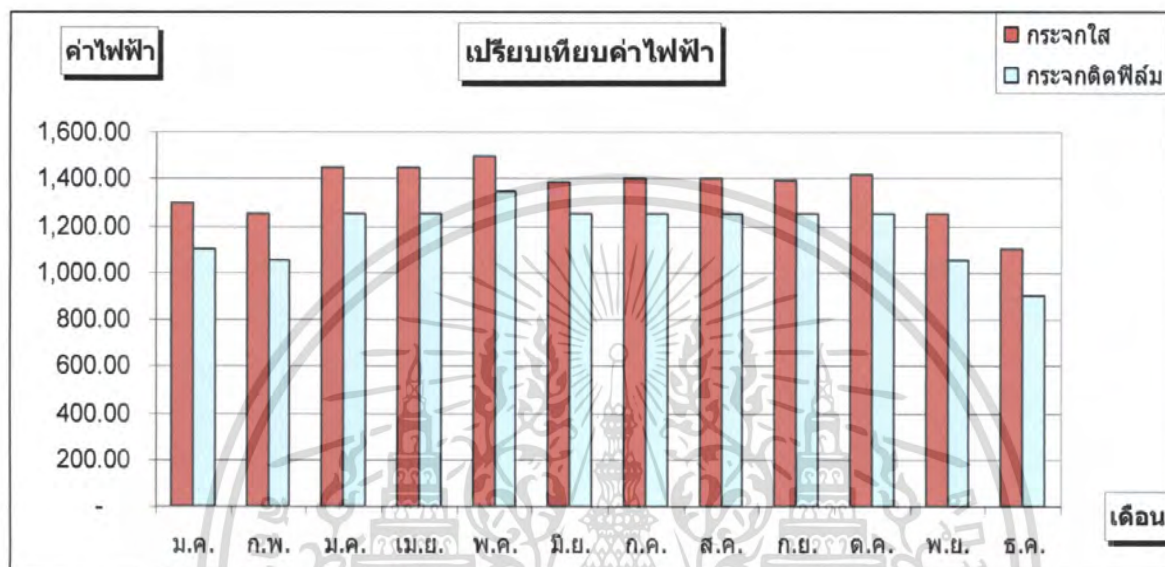
จากผลการคำนวณค่าใช้จ่ายรายเดือนระหว่างกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยใช้โปรแกรม OTTVEE Version 1.0a นำข้อมูลของกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงมาเปรียบเทียบค่าใช้จ่าย แสดงได้ดังตารางที่ 4.7 และรูปที่ 4.33 ดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.7 แสดงค่าใช้จ่ายรายเดือนระหว่างกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง

เดือน	ค่าไฟฟ้าของกระจกใส (บาท)	ค่าไฟฟ้าของกระจกติดฟิล์มกรองแสง (บาท)
มกราคม	1,300.00	1,100.00
กุมภาพันธ์	1,250.00	1,047.00
มีนาคม	1,450.00	1,250.00
เมษายน	1,450.00	1,250.00
พฤษภาคม	1,500.00	1,350.00
มิถุนายน	1,390.00	1,250.00
กรกฎาคม	1,400.00	1,250.00

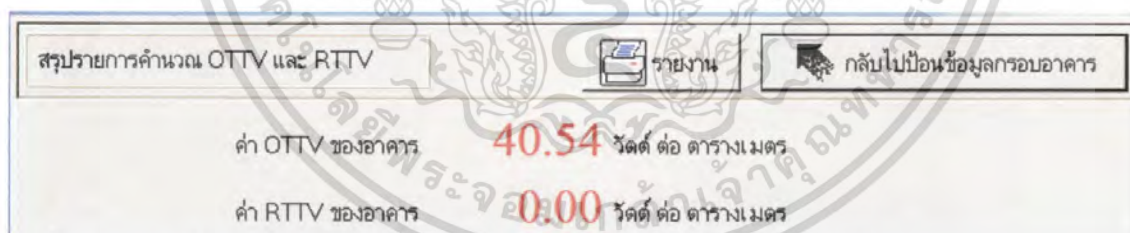
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สิงหาคม	1,400.00	1,250.00
กันยายน	1,395.00	1,250.00
ตุลาคม	1,420.00	1,250.00
พฤศจิกายน	1,250.00	1,050.00
ธันวาคม	1,100.00	900.00



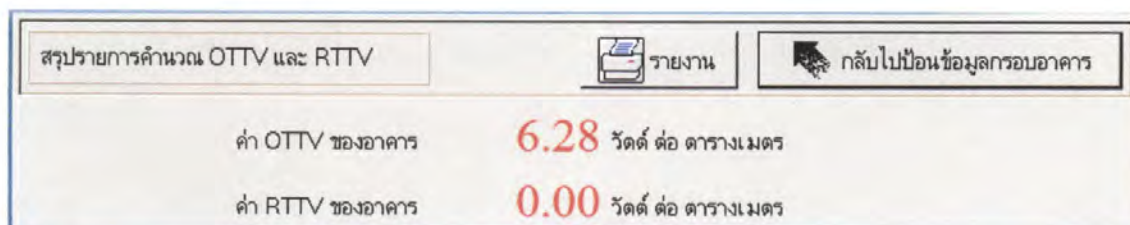
รูปที่ 4.33 แสดงการเปรียบเทียบค่าใช้จ่ายรายเดือนระหว่างกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง

แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารของกระจกใสได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.34 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารของกระจกใส

แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารของกระจกติดฟิล์มกรองแสงได้ดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.35 แสดงค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารของกระจกติดฟิล์มกรองแสง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 4.33 รูปที่ 4.34 และรูปที่ 4.35 พบว่าค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารของกระจกใสมีค่าเท่ากับ 40.54 วัตต์ต่อตารางเมตร และค่าการถ่ายเทความร้อนของผนังอาคารด้านที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงมีค่าเท่ากับ 6.28 วัตต์ต่อตารางเมตร แสดงว่าผนังด้านที่ติดกระจกใสมีการถ่ายเทความร้อนได้ดีกว่าผนังด้านที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง นั่นคืออุณหภูมิจะผ่านกระจกใสได้มากกว่ากระจกติดฟิล์มกรองแสง และผลการคำนวณค่าไฟฟ้าจากกราฟรูปที่ 4.31 พบว่าช่วงเดือนมีนาคมถึงเดือนพฤษภาคม แนวโน้มของค่าใช้จ่ายค่าไฟฟ้าของกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงมีแนวโน้มที่เพิ่มสูงขึ้น เพราะช่วงเดือนมีนาคมถึงเดือนพฤษภาคมเป็นช่วงฤดูร้อนของประเทศไทย ส่งผลให้มีการใช้ไฟฟ้ามามากขึ้น และค่าไฟฟ้าของกระจกใสมีอัตราค่าไฟฟ้าที่สูงกว่ากระจกติดฟิล์มกรองแสงเล็กน้อย เมื่อพิจารณาในรอบ 1 ปีพบว่าผลต่างอัตราค่าไฟฟ้าโดยเฉลี่ยต่อเดือนของกระจกติดฟิล์มกรองแสงประหยัดกว่ากระจกใสประมาณเดือนละ 175.42 บาท และประหยัดกว่าปีละ 2,105.00 บาท เมื่อพิจารณาถึงต้นทุนของการติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงเท่ากับ 1,250 บาท และ 2,500 บาทตามลำดับ เมื่อพิจารณาถึงการใช้งานในช่วงระยะเวลาประมาณ 1-2 ปีการติดกระจกใสจะคุ้มและประหยัดกว่ากระจกติดฟิล์มกรองแสง ดังนั้นเมื่อพิจารณาถึงความประหยัดพลังงานและประหยัดเงินในการจ่ายค่าไฟ การติดกระจกติดฟิล์มจะประหยัดกว่าในช่วงระยะเวลาที่ยาวนาน แต่ในความเป็นจริงแล้ว ถ้าเราจะพิจารณาในเรื่องของการประหยัดเงินเราต้องพิจารณาองค์ประกอบอื่นๆอีกมากมายเช่น ราคาต้นทุนการติดตั้ง อายุการใช้งาน ประสิทธิภาพของวัสดุ เป็นต้น

4.8 ประโยชน์ต่อผู้บริโภครและผู้ประกอบการ

จากข้อมูลทั้งหมดที่ได้ทำการวิจัยเราสามารถแบ่งประโยชน์จากการทำวิจัยครั้งนี้ต่อกลุ่มบุคคลออกเป็น 3 กลุ่มคือ

1. ประโยชน์ต่อกลุ่มผู้ทำวิจัย

- 1.1 ทำให้กลุ่มผู้วิจัยได้รับความรู้เพิ่มเติมจากการศึกษาปัญหาดังกล่าว
- 1.2 ทำให้กลุ่มผู้วิจัยสามารถนำความรู้ที่ได้ศึกษาไปใช้ในชีวิตประจำวันได้
- 1.3 กลุ่มผู้วิจัยสามารถนำแบบจำลองดังกล่าวมาพัฒนาเป็นแบบจำลองที่ซับซ้อนในงานวิจัยระดับสูงได้

2. ประโยชน์ต่อผู้บริโภคร

2.1 เป็นแนวทางช่วยให้ผู้บริโภครตัดสินใจเลือกกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงให้เหมาะสมกับความต้องการของผู้บริโภคร

2.2 ทำให้ผู้บริโภครเลือกผลิตภัณฑ์ที่เหมาะสมในด้านการใช้งานและค่าใช้จ่าย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 ทำให้ผู้บริโภครู้เห็นความสำคัญในการนำความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีมาใช้พัฒนาผลิตภัณฑ์

3.ประโยชน์ต่อผู้ประกอบการ คือ

3.1 เป็นแนวทางช่วยให้ผู้ประกอบการตัดสินใจเลือกผลิตภัณฑ์หรือกระเจกคิดฟิล์มกรองแสงให้เหมาะสมกับความต้องการของผู้บริโภคที่ต้องการมากที่สุด

3.2 ทำให้ผู้ประกอบการเห็นความสำคัญในการนำความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีมาใช้พัฒนาผลิตภัณฑ์



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5

สรุปและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

จากการศึกษาระเบียบวิธีผลต่างอันดับ การแก้ปัญหาค้าวระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์โดยหลักการของ Taylor-Galerkin ที่นำมาใช้เขียน โปรแกรมภาษาซี ใช้ในการแก้ปัญหาค้าวความร้อนภายในกระจกใสและฟิล์มกรองแสง รวมถึงการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องที่ติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสง พบว่าอากาศที่เป็นตัวนำความร้อนภายในห้องมีค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่ต่ำมาก จนแทบไม่นำความร้อนเลย ดังนั้น เมื่อมีความร้อนผ่านกระจกใสหรือกระจกใสซึ่งติดฟิล์มกรองแสงเข้ามาภายในห้องซึ่งอุณหภูมิภายในห้องแทบจะไม่มีเปลี่ยนแปลงเลย เว้นแต่ ณ บริเวณที่อยู่ใกล้เคียงกับกระจกใสอาจมีอุณหภูมิที่สูงกว่าบริเวณอื่น จากนั้นนำผลที่ได้จาก โปรแกรมภาษาซีที่พัฒนาเปรียบเทียบกับ โปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM พบว่าจะให้ค่าที่มีความใกล้เคียงกับ โปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM รวมทั้งยังได้ทำการคำนวณค่าใช้จ่ายที่แตกต่างกันระหว่างการติดกระจกใสเทียบกับการติดกระจกติดฟิล์มกรองแสง โดยคำนวณจาก โปรแกรม OTTVEE Version 1.0a จะเห็นได้ว่าห้องที่ติดกระจกติดฟิล์มกรองแสงช่วยประหยัดค่าไฟฟ้าได้มากกว่า แต่การติดกระจกใสจะคุ้มทุนกว่าเมื่อพิจารณาช่วงระยะเวลาใช้งานสั้นๆ เนื่องจากมีต้นทุนการผลิตต่ำกว่า

การจัดทำปัญหาพิเศษในครั้งนี้เพื่อให้บุคคลที่สนใจหรือมีความจำเป็นต้องใช้สมการความร้อนในการแก้ปัญหาค้าวต่างๆ สามารถนำโครงการไปศึกษาและพัฒนาเป็นงานวิจัยระดับที่สูงขึ้นไปได้

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการศึกษาปัญหาทำให้ทราบว่าในสถานะที่อากาศหุคหนึ่งไม่มีการเคลื่อนที่ อากาศจะทำหน้าที่เสมือนฉนวนกันความร้อน นั่นคือ ความร้อนไม่สามารถผ่านบริเวณที่อากาศหุคหนึ่งได้นั่นเอง ดังนั้นผู้ที่สนใจต้องการศึกษาปัญหา ควรลดสมมติฐาน และเพิ่มปัจจัยที่เกี่ยวข้องของปัญหา รวมทั้งการคำนึงถึงการลดค่าไฟฟ้า และค่าใช้จ่ายในการติดตั้งกระจกแบบต่างๆ นั้น ควรเลือกการติดกระจกซึ่งเป็นกระจกสองชั้น ซึ่งภายในเป็นอากาศที่หุคหนึ่ง นั่นคืออากาศเป็นฉนวนกันความร้อนนั่นเอง แต่อย่างไรก็ตามก็ยังมีค่าใช้จ่ายที่สูง ดังนั้นการลดอุณหภูมิภายในห้องและใช้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดนั่นคือการสร้างกันสาดเพื่อบังแดดที่จะส่องเข้ามาในห้อง ซึ่งเป็นวิธีที่ประหยัดค่าใช้จ่ายมากที่สุด

รายการอ้างอิง

- [1] J.N. Reddy, " *An Introduction to the Finite Element Method* ", McGraw-Hall, 1984.
- [2] T.R. Chandrupatla and A.D. Belegundu, " *Introduction to Finite Element in Engineering* " ,Prentice Hall, 1991.
- [3] S. Bunditsaovapak and V. Ngamarmvaranggul, " *Element Stretching For a Newtonian Fluid* " ,Kmitl Science Journal, Vol.5, no.1, pp339-352, 2005.
- [4] ผศ.ศรีบุตร แววจริญ และ ผศ.ดร.ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, " *คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ สมการเชิงอนุพันธ์ 1* ", บริษัท วงตะวัน จำกัด, 2543.
- [5] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, สุทธิศักดิ์ พงษ์ชนาพานิช, " *ไฟไนต์เอลิเมนต์อย่างง่ายพร้อม ซอฟต์แวร์ Easy Finite Element with Software* ", สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2548.
- [6] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, " *ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อการคำนวณพลศาสตร์ของไหล Finite Element Method for Computer Fluid Dynamics* ", สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546.
- [7] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, " *ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในงานวิศวกรรม* ", สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549.
- [8] มนตรี พิรุณเกษตร, " *การถ่ายเทความร้อน* ", สำนักพิมพ์วิทย์พัฒนา จำกัด.2548
- [9] สุพันธ์ ศรีฉนิษฐ์, " *การถ่ายเทความร้อน Heat Transfer* ", ภาควิชาวิศวกรรมศาสตร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า ธนบุรี, 2530.
- [10] สมศรี จรุงเรือง, " *ระเบียบวิธีวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อน* ", สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.
- [11] จ่านงค์ ฉายเชิด, " *ทัศนศาสตร์ฟิล์มบาง Thin Film Opton* ", สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยศิลปากร, 2549.
- [12] สมชาติ ฉันทศิริวรรณ, " *วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์เบื้องต้น Introduction to Boundary Element Method* ", สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2546.
- [13] George R. Buchanan. แปลและเรียบเรียงโดย สงวน วงษ์ชวลิตกุล, พیمان ชาญวานิชอุบริการ. " *ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์การวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ Theory and Problem of Finite Element analysis* ", แมคกรอ-ฮิล อินเตอร์เนชันแนล อินเทอร์เน็ต อิงค์, 2541.
- [14] สถาบันวิจัยจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สนับสนุนโดยสำนักงานคณะกรรมการนโยบายพลังงานแห่งชาติ เผยแพร่โดยกรมส่งเสริมพลังงาน กระทรวงวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและ สิ่งแวดล้อม, " *คู่มือการใช้โปรแกรม OTVEE Version 1.0a* ", พฤศจิกายน, 2542.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในกระบอกและกระบอกติดฟิล์มของโปรแกรมภาษาซี กับ

โปรแกรมสำเร็จรูป Easy FEM

ก) กรณีแบ่งเป็นขนาดของเอลิเมนต์เป็นขนาด 3x5

Node	โปรแกรม ภาษาซี (กระบอกใส)	โปรแกรม Easy FEM (กระบอกใส)	ค่าความคลาด เคลื่อน (กระบอกใส)	โปรแกรม ภาษาซี (กระบอกติดฟิล์ม)	โปรแกรม Easy FEM (กระบอกติดฟิล์ม)	ค่าความคลาด เคลื่อน (กระบอกติดฟิล์ม)
1	33.91956	33.9200	0.000443	33.75858	33.9200	0.161416
2	33.91911	33.9200	0.000886	33.75791	33.9200	0.162086
3	33.91911	33.9200	0.000886	33.75791	33.9200	0.162086
4	33.91956	33.9200	0.000443	33.75858	33.9200	0.161416
5	33.86989	33.8860	0.016106	32.1545	32.8500	0.695496
6	33.86946	33.8860	0.016539	32.15398	32.8500	0.696016
7	33.86946	33.8860	0.016539	32.15398	32.8500	0.696015
8	33.86989	33.8860	0.016106	32.1545	32.8500	0.695496
9	33.82509	33.8520	0.026908	30.70883	31.7800	1.071173
10	33.82467	33.8520	0.027331	30.70844	31.7800	1.071564
11	33.82467	33.8520	0.027332	30.70843	31.7800	1.071566
12	33.82509	33.8520	0.026908	30.70883	31.7800	1.071171
13	33.78954	33.8180	0.028463	29.56332	30.7100	1.146677
14	33.78912	33.8180	0.02888	29.56302	30.7100	1.146977
15	33.78912	33.8180	0.02888	29.56302	30.7100	1.146977
16	33.78954	33.8180	0.028463	29.56332	30.7100	1.146677
17	33.76671	33.7840	0.017292	28.82901	29.6400	0.810989
18	33.7663	33.7840	0.017703	28.82877	29.6400	0.811228
19	33.7663	33.7840	0.017704	28.82877	29.6400	0.81123
20	33.76671	33.7840	0.017291	28.82901	29.6400	0.810987
21	33.75884	33.7500	0.008843	28.57623	28.5700	0.006231
22	33.75843	33.7500	0.008432	28.57601	28.5700	0.00601
23	33.75843	33.7500	0.008432	28.57601	28.5700	0.006009
24	33.75884	33.7500	0.008843	28.57623	28.5700	0.006232

ข) กรณีแบ่งเป็นขนาดของเอลิเมนต์เป็นขนาด 6x10

Node	โปรแกรม ภาษาซี (กระบอกใส)	โปรแกรม Easy FEM (กระบอกใส)	ค่าความคลาด เคลื่อน (กระบอกใส)	โปรแกรม ภาษาซี (กระบอกติดฟิล์ม)	โปรแกรม Easy FEM (กระบอกติดฟิล์ม)	ค่า ความคลาด เคลื่อน (กระบอกติด ฟิล์ม)
1	33.91908	33.9200	0.000918	33.75256	33.9200	0.167437
2	33.91816	33.9200	0.001836	33.75115	33.9200	0.168848
3	33.91816	33.9200	0.001835	33.75115	33.9200	0.168848
4	33.91816	33.9200	0.001835	33.75115	33.9200	0.168848
5	33.91816	33.9200	0.001835	33.75115	33.9200	0.168848
6	33.91816	33.9200	0.001836	33.75115	33.9200	0.168848
7	33.91908	33.9200	0.000918	33.75256	33.9200	0.167437
8	33.89312	33.9030	0.009879	32.93153	33.3850	0.453468
9	33.89221	33.9030	0.010786	32.93028	33.3850	0.454715
10	33.89221	33.9030	0.010786	32.93028	33.3850	0.454715
11	33.89221	33.9030	0.010786	32.93028	33.3850	0.454715
12	33.89221	33.9030	0.010786	32.93028	33.3850	0.454715

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

13	33.89221	33.9030	0.010786	32.93028	33.3850	0.454715
14	33.89312	33.9030	0.009879	32.93153	33.3850	0.453469
15	33.8678	33.8860	0.018202	32.13104	32.8500	0.718965
16	33.8669	33.8860	0.019099	32.12994	32.8500	0.720058
17	33.8669	33.8860	0.019099	32.12994	32.8500	0.720058
18	33.8669	33.8860	0.019099	32.12994	32.8500	0.720059
19	33.8669	33.8860	0.019099	32.12994	32.8500	0.720058
20	33.8669	33.8860	0.019099	32.12994	32.8500	0.720058
21	33.8678	33.8860	0.018202	32.13104	32.8500	0.718965
22	33.84374	33.8700	0.026262	31.37104	32.3150	0.943958
23	33.84285	33.8700	0.027149	31.37009	32.3150	0.944912
24	33.84285	33.8700	0.027149	31.37009	32.3150	0.944911
25	33.84285	33.8700	0.027149	31.37009	32.3150	0.944912
26	33.84285	33.8700	0.027149	31.37009	32.3150	0.944912
27	33.84285	33.8700	0.027149	31.37009	32.3150	0.944912
28	33.84374	33.8700	0.026262	31.37104	32.3150	0.943958
29	33.82153	33.8530	0.031466	30.6704	31.7800	1.109604
30	33.82065	33.8530	0.032345	30.66957	31.7800	1.110433
31	33.82065	33.8530	0.032345	30.66957	31.7800	1.110433
32	33.82065	33.8530	0.032345	30.66957	31.7800	1.110434
33	33.82065	33.8530	0.032345	30.66957	31.7800	1.110433
34	33.82065	33.8530	0.032345	30.66957	31.7800	1.110434
35	33.82153	33.8530	0.031466	30.6704	31.7800	1.109604
36	33.80173	33.8360	0.034269	30.04632	31.2450	1.198676
37	33.80086	33.8360	0.03514	30.0456	31.2450	1.199398
38	33.80086	33.8360	0.03514	30.0456	31.2450	1.199398
39	33.80086	33.8360	0.03514	30.0456	31.2450	1.199398
40	33.80086	33.8360	0.03514	30.0456	31.2450	1.199398
41	33.80086	33.8360	0.03514	30.0456	31.2450	1.199398
42	33.80173	33.8360	0.034269	30.04632	31.2450	1.198676
43	33.78482	33.8190	0.034183	29.51402	30.7100	1.195981
44	33.78395	33.8190	0.035047	29.51339	30.7100	1.196614
45	33.78395	33.8190	0.035047	29.51339	30.7100	1.196613
46	33.78395	33.8190	0.035047	29.51339	30.7100	1.196614
47	33.78395	33.8190	0.035047	29.51339	30.7100	1.196613
48	33.78395	33.8190	0.035047	29.51339	30.7100	1.196613
49	33.78482	33.8190	0.034182	29.51402	30.7100	1.195981
50	33.77121	33.8020	0.03079	29.0863	30.1750	1.088697
51	33.77035	33.8020	0.031649	29.08574	30.1750	1.089258
52	33.77035	33.8020	0.031649	29.08574	30.1750	1.089258
53	33.77035	33.8020	0.03165	29.08574	30.1750	1.089259
54	33.77035	33.8020	0.031649	29.08574	30.1750	1.089258
55	33.77035	33.8020	0.031649	29.08574	30.1750	1.089259
56	33.77121	33.8020	0.03079	29.0863	30.1750	1.088697
57	33.76124	33.7860	0.024756	28.77338	29.6400	0.866625
58	33.76039	33.7860	0.025612	28.77286	29.6400	0.867135
59	33.76039	33.7860	0.025612	28.77286	29.6400	0.867135
60	33.76039	33.7860	0.025612	28.77286	29.6400	0.867136
61	33.76039	33.7860	0.025612	28.77286	29.6400	0.867135
62	33.76039	33.7860	0.025612	28.77286	29.6400	0.867135
63	33.76124	33.7860	0.024756	28.77338	29.6400	0.866625
64	33.75516	33.7690	0.013835	28.58263	29.1050	0.52237
65	33.75431	33.7690	0.014689	28.58215	29.1050	0.522849
66	33.75431	33.7690	0.014689	28.58215	29.1050	0.522848
67	33.75431	33.7690	0.014689	28.58215	29.1050	0.52285
68	33.75431	33.7690	0.014689	28.58215	29.1050	0.522848
69	33.75431	33.7690	0.014689	28.58215	29.1050	0.522849
70	33.75516	33.7690	0.013835	28.58263	29.1050	0.522369

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

71	33.75312	33.7520	0.001121	28.51855	28.5700	0.051451
72	33.75227	33.7520	0.000268	28.51808	28.5700	0.05192
73	33.75227	33.7520	0.000268	28.51808	28.5700	0.051919
74	33.75227	33.7520	0.000268	28.51808	28.5700	0.051921
75	33.75227	33.7520	0.000268	28.51808	28.5700	0.051919
76	33.75227	33.7520	0.000268	28.51808	28.5700	0.05192
77	33.75312	33.7520	0.001121	28.51855	28.5700	0.051451

ก) กรณีแบ่งเป็นขนาดของเอลิเมนต์เป็นขนาด 12x15

Node	โปรแกรม ภาษาซี (กระงกไต)	โปรแกรม Easy FEM (กระงกไต)	ค่า คลาดเคลื่อน (กระงกไต)	โปรแกรม ภาษาซี (กระงกคิตฟิล์ม)	โปรแกรม Easy FEM (กระงกคิตฟิล์ม)	ค่าคลาดเคลื่อน (กระงกคิตฟิล์ม)
1	33.91864	33.9200	0.001359	33.91777	33.9200	0.00223
2	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
3	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
4	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
5	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
6	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
7	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
8	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
9	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
10	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
11	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
12	33.91728	33.9200	0.002717	33.91554	33.9200	0.00446
13	33.91864	33.9200	0.001359	33.91777	33.9200	0.00223
14	33.90119	33.9090	0.007806	33.35759	33.5630	0.205406
15	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207462
16	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
17	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
18	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
19	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
20	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
21	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
22	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
23	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
24	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
25	33.89985	33.9090	0.009154	33.35554	33.5630	0.207461
26	33.90119	33.9090	0.007806	33.35759	33.5630	0.205406
27	33.88394	33.8980	0.014063	32.80362	33.2070	0.403382
28	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.40527
29	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.40527
30	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.40527
31	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.40527
32	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.405269
33	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.405269
34	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.405269
35	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.405269
36	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.405269
37	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.405269
38	33.8826	33.8980	0.015401	32.80173	33.2070	0.405269
39	33.88394	33.8980	0.014063	32.80362	33.2070	0.403381
40	33.86706	33.8860	0.01894	32.2621	32.8500	0.587903
41	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
42	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

43	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
44	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
45	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
46	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
47	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
48	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
49	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
50	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
51	33.86573	33.8860	0.020267	32.26037	32.8500	0.589633
52	33.86706	33.8860	0.01894	32.2621	32.8500	0.587903
53	33.85075	33.8750	0.024251	31.739	32.4930	0.754001
54	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755582
55	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755582
56	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755582
57	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755581
58	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755581
59	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755581
60	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755581
61	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755581
62	33.84943	33.8750	0.02557	31.73742	32.4930	0.755581
63	33.84943	33.8750	0.02557	31.73742	32.4930	0.755581
64	33.84943	33.8750	0.025569	31.73742	32.4930	0.755581
65	33.85075	33.8750	0.024252	31.739	32.4930	0.754
66	33.83518	33.8640	0.028819	31.24007	32.1370	0.896929
67	33.83387	33.8640	0.030128	31.23863	32.1370	0.898371
68	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.898371
69	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.898371
70	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
71	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
72	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
73	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
74	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
75	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
76	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
77	33.83387	33.8640	0.030129	31.23863	32.1370	0.89837
78	33.83518	33.8640	0.02882	31.24007	32.1370	0.896928
79	33.82053	33.8530	0.032473	30.77087	31.7800	1.009128
80	33.81923	33.8530	0.033773	30.76956	31.7800	1.010442
81	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
82	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
83	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
84	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
85	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
86	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
87	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010441
88	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
89	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010441
90	33.81923	33.8530	0.033774	30.76956	31.7800	1.010442
91	33.82053	33.8530	0.032473	30.77087	31.7800	1.009127
92	33.80695	33.8420	0.035052	30.33649	31.4230	1.086513
93	33.80566	33.8420	0.036344	30.33529	31.4230	1.087711
94	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.087711
95	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771
96	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771
97	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771
98	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771
99	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771
100	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

101	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771
102	33.80566	33.8420	0.036345	30.33529	31.4230	1.08771
103	33.80566	33.8420	0.036344	30.33529	31.4230	1.08771
104	33.80695	33.8420	0.035052	30.33649	31.4230	1.086513
105	33.79459	33.8300	0.035407	29.9416	31.0670	1.125403
106	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126497
107	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126497
108	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
109	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
110	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
111	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
112	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
113	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
114	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
115	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
116	33.79331	33.8300	0.036693	29.9405	31.0670	1.126496
117	33.79459	33.8300	0.035407	29.9416	31.0670	1.125403
118	33.7836	33.8190	0.035403	29.59051	30.7100	1.119491
119	33.78232	33.8190	0.036682	29.58951	30.7100	1.120493
120	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
121	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
122	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
123	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
124	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
125	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
126	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
127	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
128	33.78232	33.8190	0.036683	29.58951	30.7100	1.120493
129	33.78232	33.8190	0.036682	29.58951	30.7100	1.120493
130	33.7836	33.8190	0.035403	29.59051	30.7100	1.11949
131	33.77408	33.8080	0.033919	29.28694	30.3530	1.06606
132	33.77281	33.8080	0.035193	29.28602	30.3530	1.066985
133	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066985
134	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066985
135	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066985
136	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066985
137	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066985
138	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066985
139	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066984
140	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066985
141	33.77281	33.8080	0.035194	29.28602	30.3530	1.066984
142	33.77281	33.8080	0.035193	29.28602	30.3530	1.066985
143	33.77408	33.8080	0.033919	29.28694	30.3530	1.06606
144	33.76615	33.7970	0.030852	29.03409	29.9970	0.962912
145	33.76488	33.7970	0.032121	29.03323	29.9970	0.963773
146	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
147	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
148	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
149	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
150	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
151	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
152	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
153	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
154	33.76488	33.7970	0.032122	29.03323	29.9970	0.963772
155	33.76488	33.7970	0.032121	29.03323	29.9970	0.963772
156	33.76615	33.7970	0.030852	29.03409	29.9970	0.962912
157	33.75989	33.7860	0.026113	28.83465	29.6400	0.805349
158	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806159

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

159	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806159
160	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806159
161	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806159
162	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806158
163	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806158
164	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806159
165	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806158
166	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806159
167	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806158
168	33.75862	33.7860	0.02738	28.83384	29.6400	0.806159
169	33.75989	33.7860	0.026113	28.83465	29.6400	0.805348
170	33.75536	33.7740	0.018636	28.6907	29.2830	0.592305
171	33.7541	33.7740	0.019899	28.68992	29.2830	0.593078
172	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
173	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
174	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
175	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
176	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
177	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
178	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
179	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
180	33.7541	33.7740	0.0199	28.68992	29.2830	0.593078
181	33.7541	33.7740	0.019899	28.68992	29.2830	0.593078
182	33.75536	33.7740	0.018635	28.6907	29.2830	0.592304
183	33.75263	33.7630	0.010369	28.60371	28.9270	0.323286
184	33.75137	33.7630	0.011631	28.60296	28.9270	0.324038
185	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
186	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
187	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
188	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
189	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
190	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
191	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
192	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
193	33.75137	33.7630	0.011632	28.60296	28.9270	0.324038
194	33.75137	33.7630	0.011631	28.60296	28.9270	0.324038
195	33.75263	33.7630	0.010369	28.60371	28.9270	0.323285
196	33.75172	33.7520	0.000283	28.57462	28.5700	0.004623
197	33.75045	33.7520	0.001545	28.57388	28.5700	0.003878
198	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
199	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
200	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
201	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
202	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
203	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
204	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
205	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
206	33.75045	33.7520	0.001546	28.57388	28.5700	0.003878
207	33.75045	33.7520	0.001545	28.57388	28.5700	0.003878
208	33.75172	33.7520	0.000283	28.57462	28.5700	0.004623

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิภายในห้องติดกระจกใสและกระจกติดฟิล์มกรองแสงของโปรแกรม

ภาษาซี กับโปรแกรม Easy FEM

ก) กรณีแบ่งเป็นขนาดของเอลิเมนต์เป็นขนาด 3x5

Node	โปรแกรม ภาษาซี (กระจกใส)	โปรแกรม Easy FEM (กระจกใส)	ค่า คลาดเคลื่อน (กระจกใส)	โปรแกรม ภาษาซี (กระจกติดฟิล์ม)	โปรแกรม Easy FEM (กระจกติดฟิล์ม)	ค่า คลาดเคลื่อน (กระจกติดฟิล์ม)
1	33.75872	33.8270	0.068278	28.5762	28.5750	0.0012
2	33.75819	33.8270	0.068809	28.57595	28.5750	0.0010
3	33.75819	33.8270	0.06881	28.57595	28.5750	0.0009
4	33.75872	33.8270	0.068278	28.5762	28.5750	0.0012
5	30.63071	32.1140	1.483286	26.837	27.8970	1.0600
6	30.63071	32.1140	1.483286	26.837	27.8970	1.0600
7	30.63072	32.1140	1.483284	26.837	27.8970	1.0600
8	30.63071	32.1140	1.483286	26.837	27.8970	1.0600
9	28.07725	30.4000	2.322752	25.65675	27.2180	1.5612
10	28.07725	30.4000	2.322749	25.65675	27.2180	1.5612
11	28.07725	30.4000	2.322751	25.65675	27.2180	1.5612
12	28.07725	30.4000	2.32275	25.65675	27.2180	1.5612
13	26.38854	28.6860	2.29746	25.13566	26.5400	1.4043
14	26.38854	28.6860	2.297464	25.13566	26.5400	1.4043
15	26.38854	28.6860	2.297462	25.13566	26.5400	1.4043
16	26.38854	28.6860	2.297463	25.13566	26.5400	1.4043
17	25.51602	26.9720	1.455981	25.00478	25.8620	0.8572
18	25.51602	26.9720	1.455977	25.00478	25.8620	0.8572
19	25.51602	26.9720	1.455979	25.00478	25.8620	0.8572
20	25.51602	26.9720	1.455978	25.00478	25.8620	0.8572
21	25.25958	25.2590	0.000576	24.9927	25.1840	0.1913
22	25.25957	25.2590	0.000573	24.9927	25.1840	0.1913
23	25.25957	25.2590	0.000575	24.9927	25.1840	0.1913
24	25.25957	25.2590	0.000574	24.9927	25.1840	0.1913

ข) กรณีแบ่งขนาดของเอลิเมนต์เป็นขนาด 6x10

Node	โปรแกรม ภาษาซี (กระจกใส)	โปรแกรม Easy FEM (กระจกใส)	ค่า คลาดเคลื่อน (กระจกใส)	โปรแกรม ภาษาซี (กระจกติดฟิล์ม)	โปรแกรม Easy FEM (กระจกติดฟิล์ม)	ค่า คลาดเคลื่อน (กระจกติดฟิล์ม)
1	33.75284	33.8270	0.074158	28.51848	28.5750	0.056523
2	33.75171	33.8270	0.075289	28.51794	28.5750	0.057063
3	33.75171	33.8270	0.075289	28.51794	28.5750	0.057062
4	33.75171	33.8270	0.075289	28.51794	28.5750	0.057064
5	33.75171	33.8270	0.075289	28.51794	28.5750	0.057062
6	33.75171	33.8270	0.075289	28.51794	28.5750	0.057063
7	33.75284	33.8270	0.074157	28.51848	28.5750	0.056522
8	32.098	32.9710	0.872996	27.56611	28.2170	0.650886
9	32.09798	32.9710	0.873016	27.5661	28.2170	0.650896
10	32.09783	32.9710	0.873172	27.56603	28.2170	0.65097
11	32.09781	32.9710	0.873193	27.56602	28.2170	0.65098
12	32.09783	32.9710	0.873172	27.56603	28.2170	0.65097
13	32.09798	32.9710	0.873016	27.5661	28.2170	0.650896
14	32.098	32.9710	0.872996	27.56611	28.2170	0.650886
15	30.5343	32.1140	1.579699	26.71801	27.8600	1.141986

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

16	30.53428	32.1140	1.579721	26.718	27.8600	1.141997
17	30.53425	32.1140	1.579753	26.71799	27.8600	1.142012
18	30.53422	32.1140	1.579775	26.71798	27.8600	1.142023
19	30.53425	32.1140	1.579753	26.71799	27.8600	1.142012
20	30.53428	32.1140	1.57972	26.718	27.8600	1.141997
21	30.5343	32.1140	1.579698	26.71801	27.8600	1.141986
22	29.1371	31.2580	2.120898	26.04584	27.5030	1.457163
23	29.1371	31.2580	2.120904	26.04583	27.5030	1.457166
24	29.13708	31.2580	2.120915	26.04583	27.5030	1.457171
25	29.13708	31.2580	2.12092	26.04583	27.5030	1.457174
26	29.13708	31.2580	2.120915	26.04583	27.5030	1.457171
27	29.1371	31.2580	2.120904	26.04583	27.5030	1.457166
28	29.1371	31.2580	2.120898	26.04584	27.5030	1.457163
29	27.95767	30.4020	2.444328	25.57319	27.1460	1.572813
30	27.95767	30.4020	2.444329	25.57319	27.1460	1.572814
31	27.95767	30.4020	2.444333	25.57318	27.1460	1.572815
32	27.95767	30.4020	2.444335	25.57318	27.1460	1.572816
33	27.95767	30.4020	2.444333	25.57318	27.1460	1.572815
34	27.95767	30.4020	2.444329	25.57319	27.1460	1.572814
35	27.95767	30.4020	2.444328	25.57319	27.1460	1.572813
36	27.01801	29.5450	2.526985	25.27967	26.7880	1.508334
37	27.01801	29.5450	2.526986	25.27967	26.7880	1.508334
38	27.01801	29.5450	2.526987	25.27967	26.7880	1.508334
39	27.01801	29.5450	2.526987	25.27967	26.7880	1.508334
40	27.01801	29.5450	2.526987	25.27967	26.7880	1.508334
41	27.01801	29.5450	2.526986	25.27967	26.7880	1.508334
42	27.01801	29.5450	2.526985	25.27967	26.7880	1.508334
43	26.31308	28.6890	2.375916	25.11979	26.4310	1.311212
44	26.31308	28.6890	2.375916	25.11979	26.4310	1.311212
45	26.31308	28.6890	2.375917	25.11979	26.4310	1.311212
46	26.31308	28.6890	2.375917	25.11979	26.4310	1.311212
47	26.31308	28.6890	2.375917	25.11979	26.4310	1.311212
48	26.31308	28.6890	2.375916	25.11979	26.4310	1.311212
49	26.31308	28.6890	2.375916	25.11979	26.4310	1.311212
50	25.81825	27.8320	2.013751	25.04418	26.0740	1.029818
51	25.81825	27.8320	2.013751	25.04418	26.0740	1.029818
52	25.81825	27.8320	2.013751	25.04418	26.0740	1.029818
53	25.81825	27.8320	2.013751	25.04418	26.0740	1.029818
54	25.81825	27.8320	2.013751	25.04418	26.0740	1.029818
55	25.81825	27.8320	2.013751	25.04418	26.0740	1.029818
56	25.81825	27.8320	2.013751	25.04418	26.0740	1.029818
57	25.49954	26.9760	1.476463	25.01362	25.7170	0.703383
58	25.49954	26.9760	1.476464	25.01362	25.7170	0.703383
59	25.49954	26.9760	1.476464	25.01362	25.7170	0.703383
60	25.49954	26.9760	1.476463	25.01362	25.7170	0.703383
61	25.49954	26.9760	1.476464	25.01362	25.7170	0.703383
62	25.49954	26.9760	1.476463	25.01362	25.7170	0.703383
63	25.49954	26.9760	1.476464	25.01362	25.7170	0.703383
64	25.32402	26.1200	0.795981	25.00337	25.3600	0.356627
65	25.32402	26.1200	0.795981	25.00337	25.3600	0.356627
66	25.32402	26.1200	0.79598	25.00337	25.3600	0.356627
67	25.32402	26.1200	0.795981	25.00337	25.3600	0.356627
68	25.32402	26.1200	0.79598	25.00337	25.3600	0.356627
69	25.32402	26.1200	0.795981	25.00337	25.3600	0.356627
70	25.32402	26.1200	0.795981	25.00337	25.3600	0.356627
71	25.26832	25.2630	0.005317	25.00114	25.0020	0.000856
72	25.26832	25.2630	0.005317	25.00114	25.0020	0.000856
73	25.26832	25.2630	0.005317	25.00114	25.0020	0.000856

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

74	25.26832	25.2630	0.005317	25.00114	25.0020	0.000856
75	25.26832	25.2630	0.005317	25.00114	25.0020	0.000856
76	25.26832	25.2630	0.005317	25.00114	25.0020	0.000856
77	25.26832	25.2630	0.005317	25.00114	25.0020	0.000856

ก) กรณีแบ่งขนาดของเอลิเมนต์เป็นขนาด 12x20

จุดต่อ	โปรแกรม ภาษาซี (กระจกไต)	โปรแกรม Easy FEM (กระจกไต)	ค่า คลาดเคลื่อน (กระจกไต)	โปรแกรม ภาษาซี (กระจกคิดฟิล์ม)	โปรแกรม Easy FEM (กระจกคิดฟิล์ม)	ค่า คลาดเคลื่อน (กระจกคิดฟิล์ม)
1	33.75112	33.8270	0.07588	28.57446	28.5750	0.000539
2	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
3	33.74926	33.8270	0.077738	28.57356	28.5750	0.001445
4	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
5	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
6	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
7	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
8	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
9	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001444
10	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
11	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001444
12	33.74926	33.8270	0.077737	28.57356	28.5750	0.001445
13	33.75112	33.8270	0.07588	28.57446	28.5750	0.000538
14	32.9098	33.3940	0.484197	28.07431	28.3960	0.321687
15	32.90977	33.3940	0.484233	28.0743	28.3960	0.321704
16	32.9095	33.3940	0.484499	28.07417	28.3960	0.321834
17	32.90944	33.3940	0.484556	28.07414	28.3960	0.321861
18	32.90942	33.3940	0.484578	28.07413	28.3960	0.321872
19	32.90941	33.3940	0.484587	28.07412	28.3960	0.321876
20	32.90941	33.3940	0.484589	28.07412	28.3960	0.321877
21	32.90941	33.3940	0.484587	28.07412	28.3960	0.321876
22	32.90942	33.3940	0.484578	28.07413	28.3960	0.321871
23	32.90944	33.3940	0.484556	28.07414	28.3960	0.321861
24	32.9095	33.3940	0.484499	28.07417	28.3960	0.321833
25	32.90977	33.3940	0.484234	28.0743	28.3960	0.321704
26	32.9098	33.3940	0.484197	28.07431	28.3960	0.321686
27	32.08184	32.9620	0.88016	27.58989	28.2170	0.627114
28	32.0818	32.9620	0.880201	27.58987	28.2170	0.627133
29	32.08173	32.9620	0.880269	27.58983	28.2170	0.627167
30	32.08166	32.9620	0.880336	27.5898	28.2170	0.627199
31	32.08163	32.9620	0.880366	27.58979	28.2170	0.627213
32	32.08162	32.9620	0.88038	27.58978	28.2170	0.62722
33	32.08162	32.9620	0.880384	27.58978	28.2170	0.627222
34	32.08162	32.9620	0.88038	27.58978	28.2170	0.62722
35	32.08163	32.9620	0.880367	27.58979	28.2170	0.627213
36	32.08166	32.9620	0.880337	27.5898	28.2170	0.627198
37	32.08173	32.9620	0.88027	27.58983	28.2170	0.627166
38	32.0818	32.9620	0.880202	27.58987	28.2170	0.627133
39	32.08184	32.9620	0.880161	27.58989	28.2170	0.627113
40	31.27756	32.5290	1.251436	27.13434	28.0390	0.904663
41	31.27755	32.5290	1.251449	27.13433	28.0390	0.904669
42	31.27752	32.5290	1.251482	27.13431	28.0390	0.904685
43	31.27748	32.5290	1.251516	27.1343	28.0390	0.904702
44	31.27746	32.5290	1.251542	27.13429	28.0390	0.904714
45	31.27744	32.5290	1.251556	27.13428	28.0390	0.90472
46	31.27744	32.5290	1.25156	27.13428	28.0390	0.904722

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

47	31.27744	32.5290	1.251556	27.13428	28.0390	0.90472
48	31.27746	32.5290	1.251543	27.13429	28.0390	0.904714
49	31.27748	32.5290	1.251517	27.1343	28.0390	0.904701
50	31.27752	32.5290	1.251483	27.13432	28.0390	0.904685
51	31.27755	32.5290	1.25145	27.13433	28.0390	0.904669
52	31.27756	32.5290	1.251437	27.13434	28.0390	0.904662
53	30.50753	32.0960	1.588471	26.71892	27.8600	1.141077
54	30.50752	32.0960	1.588477	26.71892	27.8600	1.14108
55	30.50751	32.0960	1.588494	26.71891	27.8600	1.141088
56	30.50749	32.0960	1.588513	26.7189	27.8600	1.141097
57	30.50747	32.0960	1.588529	26.7189	27.8600	1.141105
58	30.50746	32.0960	1.58854	26.71889	27.8600	1.141109
59	30.50746	32.0960	1.588543	26.71889	27.8600	1.141111
60	30.50746	32.0960	1.58854	26.71889	27.8600	1.141109
61	30.50747	32.0960	1.58853	26.7189	27.8600	1.141104
62	30.50749	32.0960	1.588514	26.7189	27.8600	1.141096
63	30.50751	32.0960	1.588494	26.71891	27.8600	1.141087
64	30.50752	32.0960	1.588478	26.71892	27.8600	1.141079
65	30.50753	32.0960	1.588472	26.71892	27.8600	1.141076
66	29.78088	31.6630	1.882118	26.35161	27.6810	1.329387
67	29.78088	31.6630	1.882121	26.35161	27.6810	1.329389
68	29.78087	31.6630	1.88213	26.35161	27.6810	1.329393
69	29.78086	31.6630	1.882141	26.3516	27.6810	1.329398
70	29.78085	31.6630	1.882151	26.3516	27.6810	1.329402
71	29.78084	31.6630	1.882158	26.35159	27.6810	1.329406
72	29.78084	31.6630	1.88216	26.35159	27.6810	1.329407
73	29.78084	31.6630	1.882158	26.35159	27.6810	1.329405
74	29.78085	31.6630	1.882151	26.3516	27.6810	1.329402
75	29.78086	31.6630	1.882142	26.3516	27.6810	1.329397
76	29.78087	31.6630	1.882131	26.35161	27.6810	1.329392
77	29.78088	31.6630	1.882122	26.35161	27.6810	1.329388
78	29.78088	31.6630	1.882119	26.35161	27.6810	1.329387
79	29.10508	31.2300	2.124925	26.03674	27.5020	1.46526
80	29.10507	31.2300	2.124926	26.03674	27.5020	1.46526
81	29.10507	31.2300	2.124931	26.03674	27.5020	1.465263
82	29.10506	31.2300	2.124937	26.03673	27.5020	1.465266
83	29.10506	31.2300	2.124943	26.03673	27.5020	1.465268
84	29.10505	31.2300	2.124948	26.03673	27.5020	1.46527
85	29.10505	31.2300	2.124949	26.03673	27.5020	1.465271
86	29.10505	31.2300	2.124948	26.03673	27.5020	1.46527
87	29.10506	31.2300	2.124944	26.03673	27.5020	1.465268
88	29.10506	31.2300	2.124938	26.03673	27.5020	1.465265
89	29.10507	31.2300	2.124932	26.03674	27.5020	1.465262
90	29.10507	31.2300	2.124927	26.03674	27.5020	1.46526
91	29.10507	31.2300	2.124926	26.03674	27.5020	1.465259
92	28.48566	30.7980	2.312344	25.77509	27.3240	1.548911
93	28.48565	30.7980	2.312345	25.77509	27.3240	1.548912
94	28.48565	30.7980	2.312348	25.77509	27.3240	1.548913
95	28.48565	30.7980	2.312352	25.77509	27.3240	1.548914
96	28.48564	30.7980	2.312355	25.77508	27.3240	1.548916
97	28.48564	30.7980	2.312358	25.77508	27.3240	1.548917
98	28.48564	30.7980	2.312359	25.77508	27.3240	1.548918
99	28.48564	30.7980	2.312358	25.77508	27.3240	1.548917
100	28.48564	30.7980	2.312356	25.77508	27.3240	1.548916
101	28.48565	30.7980	2.312352	25.77509	27.3240	1.548914
102	28.48565	30.7980	2.312349	25.77509	27.3240	1.548913
103	28.48565	30.7980	2.312346	25.77509	27.3240	1.548911
104	28.48565	30.7980	2.312345	25.77509	27.3240	1.548911

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

105	27.92618	30.3650	2.438817	25.56436	27.1450	1.580639
106	27.92618	30.3650	2.438817	25.56436	27.1450	1.580639
107	27.92618	30.3650	2.438819	25.56436	27.1450	1.58064
108	27.92618	30.3650	2.438821	25.56436	27.1450	1.580641
109	27.92618	30.3650	2.438823	25.56436	27.1450	1.580642
110	27.92618	30.3650	2.438825	25.56436	27.1450	1.580642
111	27.92617	30.3650	2.438825	25.56436	27.1450	1.580643
112	27.92618	30.3650	2.438825	25.56436	27.1450	1.580642
113	27.92618	30.3650	2.438824	25.56436	27.1450	1.580642
114	27.92618	30.3650	2.438822	25.56436	27.1450	1.580641
115	27.92618	30.3650	2.43882	25.56436	27.1450	1.58064
116	27.92618	30.3650	2.438818	25.56436	27.1450	1.580639
117	27.92618	30.3650	2.438818	25.56436	27.1450	1.580639
118	27.42827	29.9320	2.503725	25.39991	26.9660	1.566092
119	27.42827	29.9320	2.503726	25.39991	26.9660	1.566092
120	27.42827	29.9320	2.503726	25.39991	26.9660	1.566092
121	27.42827	29.9320	2.503728	25.39991	26.9660	1.566093
122	27.42827	29.9320	2.503729	25.39991	26.9660	1.566094
123	27.42827	29.9320	2.50373	25.39991	26.9660	1.566094
124	27.42827	29.9320	2.50373	25.39991	26.9660	1.566094
125	27.42827	29.9320	2.50373	25.39991	26.9660	1.566094
126	27.42827	29.9320	2.503729	25.39991	26.9660	1.566093
127	27.42827	29.9320	2.503728	25.39991	26.9660	1.566093
128	27.42827	29.9320	2.503727	25.39991	26.9660	1.566092
129	27.42827	29.9320	2.503726	25.39991	26.9660	1.566092
130	27.42827	29.9320	2.503726	25.39991	26.9660	1.566092
131	26.99175	29.4990	2.507248	25.27558	26.7870	1.511422
132	26.99175	29.4990	2.507248	25.27558	26.7870	1.511422
133	26.99175	29.4990	2.507248	25.27558	26.7870	1.511423
134	26.99175	29.4990	2.507249	25.27558	26.7870	1.511423
135	26.99175	29.4990	2.50725	25.27558	26.7870	1.511423
136	26.99175	29.4990	2.50725	25.27558	26.7870	1.511423
137	26.99175	29.4990	2.507251	25.27558	26.7870	1.511423
138	26.99175	29.4990	2.507251	25.27558	26.7870	1.511423
139	26.99175	29.4990	2.50725	25.27558	26.7870	1.511423
140	26.99175	29.4990	2.507249	25.27558	26.7870	1.511423
141	26.99175	29.4990	2.507249	25.27558	26.7870	1.511423
142	26.99175	29.4990	2.507248	25.27558	26.7870	1.511422
143	26.99175	29.4990	2.507248	25.27558	26.7870	1.511422
144	26.61488	29.0660	2.451119	25.18454	26.6090	1.424457
145	26.61488	29.0660	2.45112	25.18454	26.6090	1.424457
146	26.61488	29.0660	2.45112	25.18454	26.6090	1.424457
147	26.61488	29.0660	2.45112	25.18454	26.6090	1.424458
148	26.61488	29.0660	2.451121	25.18454	26.6090	1.424458
149	26.61488	29.0660	2.451121	25.18454	26.6090	1.424458
150	26.61488	29.0660	2.451121	25.18454	26.6090	1.424458
151	26.61488	29.0660	2.451121	25.18454	26.6090	1.424458
152	26.61488	29.0660	2.451121	25.18454	26.6090	1.424458
153	26.61488	29.0660	2.45112	25.18454	26.6090	1.424458
154	26.61488	29.0660	2.45112	25.18454	26.6090	1.424457
155	26.61488	29.0660	2.45112	25.18454	26.6090	1.424457
156	26.61488	29.0660	2.45112	25.18454	26.6090	1.424457
157	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
158	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
159	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
160	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
161	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
162	26.29467	28.6340	2.339331	25.12001	26.4300	1.309992

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

163	26.29467	28.6340	2.339331	25.12001	26.4300	1.309992
164	26.29467	28.6340	2.339331	25.12001	26.4300	1.309992
165	26.29467	28.6340	2.339331	25.12001	26.4300	1.309992
166	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
167	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
168	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
169	26.29467	28.6340	2.33933	25.12001	26.4300	1.309992
170	26.02722	28.2010	2.173778	25.07573	26.2510	1.175269
171	26.02722	28.2010	2.173778	25.07573	26.2510	1.175269
172	26.02722	28.2010	2.173778	25.07573	26.2510	1.175269
173	26.02722	28.2010	2.173779	25.07573	26.2510	1.175269
174	26.02722	28.2010	2.173779	25.07573	26.2510	1.175269
175	26.02722	28.2010	2.173779	25.07573	26.2510	1.175269
176	26.02722	28.2010	2.173779	25.07573	26.2510	1.175269
177	26.02722	28.2010	2.173779	25.07573	26.2510	1.175269
178	26.02722	28.2010	2.173779	25.07573	26.2510	1.175269
179	26.02722	28.2010	2.173779	25.07573	26.2510	1.175269
180	26.02722	28.2010	2.173778	25.07573	26.2510	1.175269
181	26.02722	28.2010	2.173778	25.07573	26.2510	1.175269
182	26.02722	28.2010	2.173778	25.07573	26.2510	1.175269
183	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
184	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
185	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
186	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
187	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
188	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
189	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
190	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
191	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
192	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
193	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
194	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
195	25.80808	27.7680	1.959917	25.04635	26.0730	1.026654
196	25.6326	27.3350	1.702397	25.02749	25.8940	0.866507
197	25.6326	27.3350	1.702397	25.02749	25.8940	0.866507
198	25.6326	27.3350	1.702397	25.02749	25.8940	0.866507
199	25.6326	27.3350	1.702397	25.02749	25.8940	0.866507
200	25.6326	27.3350	1.702398	25.02749	25.8940	0.866507
201	25.6326	27.3350	1.702398	25.02749	25.8940	0.866507
202	25.6326	27.3350	1.702398	25.02749	25.8940	0.866507
203	25.6326	27.3350	1.702398	25.02749	25.8940	0.866507
204	25.6326	27.3350	1.702398	25.02749	25.8940	0.866507
205	25.6326	27.3350	1.702398	25.02749	25.8940	0.866507
206	25.6326	27.3350	1.702397	25.02749	25.8940	0.866507
207	25.6326	27.3350	1.702397	25.02749	25.8940	0.866507
208	25.6326	27.3350	1.702397	25.02749	25.8940	0.866507
209	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
210	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
211	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
212	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
213	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
214	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
215	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
216	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
217	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
218	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
219	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
220	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

221	25.49626	26.9020	1.405745	25.01582	25.7150	0.69918
222	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
223	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
224	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
225	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
226	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
227	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
228	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
229	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
230	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
231	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
232	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
233	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
234	25.39493	26.4690	1.074066	25.00888	25.5360	0.527124
235	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
236	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
237	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
238	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
239	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
240	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
241	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
242	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
243	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
244	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
245	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
246	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
247	25.32519	26.0370	0.711812	25.00497	25.3580	0.353031
248	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
249	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
250	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
251	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
252	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
253	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
254	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
255	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
256	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
257	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
258	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
259	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
260	25.28442	25.6040	0.319581	25.00302	25.1790	0.175981
261	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
262	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
263	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
264	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
265	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
266	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
267	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
268	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
269	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
270	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
271	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
272	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432
273	25.27101	25.1710	0.100011	25.00243	25.0000	0.002432

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

AB112082 CACACCGCCCGTCACGTCACGAAAGTCGGCAACACCCGAAAGCCCGTGGCCCAACCAGCTT
M27245 CACACCGCCCGTCACGTCACGAAAGTCGGTAAACACCCGAAAGCCCGTGGCCCAACCC-CTT

D85494 G--GGGGG-AGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
AB028654 G--GGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
AB028653 GCTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
AB062382 GTGGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
D85495 GCTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
AB062381 G--GGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
AB028655 G--GGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
D85491 T---GGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
D85485 G-TGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
AB188150 GCTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
AB025318 GTGGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGT-----
D85496 GCTGGGGG-AGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
U48989 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
U48990 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
RB20-4 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGT-----
AB369119 TGTGGGGGAGC-----
U48988 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
KB2 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGTGGAAC-----
AB018046 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGCG-----
U48986 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
U48984 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
U48987 TTTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
U48985 TGTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
U48974 TCCGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
U48996 TGGGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAG-----
X89940 G--AGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTA-----
AB112082 GCTGGGGGAGCGGTTCGAAGGTGGGGCTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
M27245 GTGGGAGGAGCTGTTCGAAGGTGGGACTGGCGATTGGAGAAGTCGTAACAAGGTAGCC
* * * * *

D85494 GTACCGGAAGGTGC-----
AB028654 -----
AB028653 -----
AB062382 -----
D85495 GTACCGGAAGGTGC-----
AB062381 -----
AB028655 -----
D85491 GTACCGGAAGGTGC-----
D85485 GTACCGGAAGGTGC-----
AB188150 GTACCGGAAGGTGC-----
AB025318 -----
D85496 GTACCGGAAGGTGC-----
U48989 -----
U48990 -----
RB20-4 -----
AB369119 -----
U48988 -----
KB2 -----
AB018046 -----
U48986 -----
U48984 -----
U48987 -----
U48985 -----
U48974 -----
U48996 -----
X89940 -----
AB112082 GTACCGGAAGGTGC-----
M27245 GTACCGGAAGGTGCGGCTGGATCACCTCCTTCT

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้