

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การจำลองการทำงานเชิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ของอะคูสติกทรานสดิวเซอร์  
ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

(Finite Element Simulation of An Electromagnetic Acoustic Transducer)



รฟ.  
ว/35ก  
2549

เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน..... 72839  
วัน,เดือน,ปี... 2.3. ส.ย. 2550

b. 11773157  
i. ....

ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต  
สาขาวิชาอิเล็กทรอนิกส์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การจำลองการทำงานเชิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ของอะคูสติกทรานส์ดีวเซอร์  
ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์  
(Finite Element Simulation of An Electromagnetic Acoustic Transducer)



ปริญญานิพนธ์ฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต  
สาขาวิชาอิเล็กทรอนิกส์  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญาานิพนธ์ปีการศึกษา 2549

ภาควิชา อิเล็กทรอนิกส์

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปริญญาานิพนธ์เรื่อง

การจำลองการทำงานเชิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของอะคูสติกทรานสดิวเซอร์ด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

(Finite Element Simulation of An Electromagnetic Acoustic Transducer)

จัดทำโดย นายปฏิพล สินวัฒนกุล รหัสนักศึกษา 46010400

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.ศิริเดช บุญแสง

รายงานฉบับนี้ผ่านการตรวจสอบโดยอาจารย์ที่ปรึกษาแล้ว

ลงชื่อ.....อาจารย์ที่ปรึกษา

(ดร.ศิริเดช บุญแสง)

วันที่...../...../.....

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# การจำลองการทำงานเชิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ของอะคูสติกทรานส์ดิวเซอร์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

นายปฏิพล สินวัฒนกุล 46010400

ดร.ศิริเดช บุญแสง อาจารย์ที่ปรึกษา

ปีการศึกษา 2549

## บทคัดย่อ

โครงงานนี้เป็นการศึกษาการใช้โปรแกรม COMSOL Multi physics ซึ่งเป็น โปรแกรม  
รุ่นพัฒนาของโปรแกรม FEMLAB เพื่อใช้ในการจำลองการทำงาน (Simulation) โดยวิธีการศึกษา  
จะมุ่งเน้นไปที่ลักษณะการทำงานของทรานส์ดิวเซอร์ ที่เรียกว่า อิเล็กโตรแมกเนติก อะคูสติก  
ทรานส์ดิวเซอร์ (Electromagnetic Acoustic Transducer) ซึ่งเป็นทรานส์ดิวเซอร์ ที่อาศัยหลักการ  
ของสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้า เพื่อเทียบเปรียบค่าของความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่ได้  
กับค่าที่ได้จากการวัดค่าจริง ประยุกต์การใช้งาน โปรแกรมดังกล่าวในเชิงของเวลา รวมไปถึงการใช้  
หลักการเดียวกันนี้ในการจำลอง เพื่อสร้างโมเดลในลักษณะใหม่อีกด้วย

# **Finite Element Simulation of An Electromagnetic Acoustic Transducer**

Mr. Patipon Sinwattanakul 46010400

Dr. Siridech Boonseang Advisor.

Education Year 2006

## **Abstract**

This report is about how to use COMSOL Multi physics program. Simulate the detection of transducer called “Electromagnetic Acoustic Transducer” (EMAT). This detection process of transducer is based on an Electric and Magnetic field theory. Calculating the magnetic flux density in an EMAT was compared with real measurement, Apply by using time dependent solver And use EMAT process to design the new model.

## กิตติกรรมประกาศ

โครงการงานจำลองการทำงานเชิงคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของอะคูสติกทรานสดิวเซอร์ด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ (Finite Element Simulation of An Electromagnetic Acoustic Transducer) นี้เป็นโครงการที่มุ่งเน้นที่ศึกษาการทำงานของโปรแกรม COMSOL Multi physics จะสำเร็จไปไม่ได้โดยหากขาดอาจารย์ที่ปรึกษา ดร.ศิริเดช บุญแสง ซึ่งได้ให้คำปรึกษา และการช่วยเหลือทั้งในเรื่องของโปรแกรม และความเข้าใจในหลักการการทำงานของทรานสดิวเซอร์ (Transducer) รวมไปถึงในเรื่องของหลักการทางด้านคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (Electromagnetic) และขอบคุณรุ่นพี่นักศึกษาปริญญาโทที่ได้ให้คำแนะนำ และช่วยเหลือด้วยเช่นกัน และขอบคุณอาจารย์ทุกท่านที่เคยได้ให้ความรู้ผมนจนสามารถทำออกมาในรูปแบบโครงการนี้ได้สำเร็จ

นายปฏิพล สิววัฒนกุล 46010400



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อ	ก
<b>Abstract</b>	ข
สารบัญ	ค
สารบัญภาพ	จ
สารบัญตาราง	ช
กิตติกรรมประกาศ	ณ
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 วัตถุประสงค์	1
1.2 โปรแกรมCOMSOL Multi physics	1
บทที่ 2 ทฤษฎีทางแม่เหล็กไฟฟ้า และการใช้งานโปรแกรมCOMSOL Multi physics	3
2.1 ทฤษฎีทางแม่เหล็กไฟฟ้า	3
2.1.1 สมการของบิวส์ซอง และสมการของลาปลาซ	3
2.1.2 ทฤษฎีความเป็นหนึ่ง	4
2.1.3 การแก้สมการทางคาร์ทีเซียนตัวแปรตัวเดียว	5
2.1.4 การใช้สมการลาปลาซหาค่าศักดาไฟฟ้า $V$ ที่เปลี่ยนค่าตามค่า $x$ และ $y$	7
2.1.5 สนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไฟฟ้าตรง	8
2.1.6 กฎของไบโอท์ซาวาร์ท(Biot-Savart Law) ซึ่งเกิดจากสนามแม่เหล็กที่เกิดจากไฟฟ้ากระแสตรงไหลผ่านเส้นลวดไฟฟ้า	8
2.1.7 กฎวงจรของแอมแปร์	13
2.1.8 การหาสนามแม่เหล็กในสายโคแอกเซียลเคเบิล	14
2.1.9 สนามแม่เหล็กเนื่องจากกระแสในระนาบอนันต์	15
2.1.10 เคิร์ล	16
2.1.11 ทฤษฎีของสโตค	18
2.1.12 ฟลักซ์แม่เหล็ก และความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก	19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.1.13	ศักย์แม่เหล็กชนิดสเกลาร์ และศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์	21
2.1.14	แรงในสนามแม่เหล็ก สารแม่เหล็ก และความเหนี่ยวนำ	22
2.1.15	แรงระหว่างกระแสย่อย	23
2.1.16	แรงบิด	24
2.1.17	สารแม่เหล็ก	26
2.1.18	แมกเนโตเซชัน และเฟอร์รียูบิลิตี	28
2.1.19	เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามแม่เหล็ก	31
2.2	การใช้งานโปรแกรมCOMSOL Mult physics	33
บทที่ 3	การออกแบบ	40
3.1	การทำาทดลอง	42
บทที่ 4	ผลการทดลอง	46
บทที่ 5	สรุปผลการทดลอง	59
บรรณานุกรม		๗



รูปที่ 4.6 แสดงผลที่เวลา $1.6\mu s$ แสดงความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นซึ่งจะทำให้ ค่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กขึ้นโดยรอบ	50
รูปที่ 4.7 แสดงรูปสัญญาณของความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำที่อินทิเกรตได้ ซึ่งเกิดจากความเร็วจลื่น ที่เป็นลักษณะของคลื่นรูปไซน์	50
รูปที่ 4.8 กราฟแสดงค่าความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำแบบยอดถึงยอด (Peak to Peak) ตามระยะห่างที่เพิ่มขึ้น จากสัญญาณที่มีลักษณะของรูปไซน์	52
รูปที่ 4.9 แสดงรูปสัญญาณของความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำที่อินทิเกรตได้ ซึ่งเกิดจาก ความเร็วของคลื่น ที่เป็นลักษณะของคลื่นอัลตราโซนิก	52
รูปที่ 4.10 กราฟแสดงค่าความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำแบบยอดถึงยอด (Peak to Peak) ตามระยะห่างที่เพิ่มขึ้นจากสัญญาณที่มีลักษณะของคลื่นอัลตราโซนิก	54
รูปที่ 4.11 แสดงถึงแท่งแม่เหล็กได้มีปล่อยสนามแม่เหล็กออกมาโดยรอบ และแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของสนามแม่เหล็ก	54
รูปที่ 4.12 สนามแม่เหล็กที่ปล่อยออกมาจากตัวแม่เหล็กนั้นได้ มีการกระทำกับ ความเร็วของคลื่นแนวแกน $y$ เกิดค่าความหนาแน่นของกระแสขึ้น	55
รูปที่ 4.13 แสดงให้เห็นถึงสนามแม่เหล็กซึ่งมีแหล่งกำเนิดมาจาก ค่าความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นตามหลักของลอเรนซ์	55
รูปที่ 4.14 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0 มิลลิเมตร	56
รูปที่ 4.15 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.1 มิลลิเมตร	56
รูปที่ 4.16 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.2 มิลลิเมตร	57
รูปที่ 4.17 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.3 มิลลิเมตร	57
รูปที่ 4.18 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.4 มิลลิเมตร	58
รูปที่ 4.19 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.5 มิลลิเมตร	58

# สารบัญภาพ

	หน้า
รูปที่ 1.1 โปรแกรม COMSOL Multi physics ใช้งานได้หลากหลายสาขาในทางวิศวกรรม	1
รูปที่ 2.1 แผ่นตัวนำขนานกันสองแผ่นซึ่งมีแรงดันไฟฟ้าตกคร่อม 100 โวลต์	6
รูปที่ 2.2 แสดงการหาความเข้มสนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไฟฟ้าตรง I ตามกฎของไบโอทซาวาร์ท	9
รูปที่ 2.3 จำนวนกระแสไฟฟ้าตรง I ไหลผ่านผิวนอกของวัสดุสื่อำไฟฟ้า ที่มีควมกว้าง b เมตร	10
รูปที่ 2.4 กระแสไฟฟ้า I ไหลในเส้นลวดไฟฟ้าที่ยาวมาต้องการหาสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ณ จุด $P(r, \phi, z)$	11
รูปที่ 2.5 แสดงเส้นกราฟของสนามแม่เหล็ก $\vec{H}$ ซึ่งเกิดขึ้นรอบเส้นลวดไฟฟ้า ที่มีกระแสไฟฟ้าผ่าน	13
รูปที่ 2.6 เส้นลวดตัวนำเส้นหนึ่งนำกระแส I อินทิกรัลเชิงเส้นของสนามแม่เหล็กรอบเส้นวงปิด	13
รูปที่ 2.7 สายโคแอกเชียลเคเบิล	14
รูปที่ 2.8 ค่าของสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี	15
รูปที่ 2.9 กระแสในระนาบอนันต์	16
รูปที่ 2.10 เส้นวงปิดของสนามแม่เหล็ก	16
รูปที่ 2.11 เคิร์ล	18
รูปที่ 2.12 เคิร์ลในส่วนย่อยของพื้นผิว	18
รูปที่ 2.13 แสดงแรงระหว่างกระแสย่อย 2 อัน	24
รูปที่ 2.14 เวกเตอร์แรง กระทำกับเวกเตอร์แขนของคานทำให้เกิดแรงบิด	25
รูปที่ 2.15 แสดงแรงบิดที่กระทำต่อบ่วงกระแส	25
รูปที่ 2.16 ไดโพลโมเมนต์ $\vec{m}$ ทำมุม $\theta$ กับ $d\vec{L}$ เมื่อพิจารณา ปริมาตรรูปทรงกระบอก ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดล้อมรอบไดโพลได้พอดี และมีความยาว $d\vec{L}$	29
รูปที่ 2.17 แสดงรอยต่อในวัตถุทำให้เกิดเงื่อนไขขอบเขต	31
รูปที่ 2.18 แสดงหน้าต่างของโปรแกรม	33
รูปที่ 2.19 แสดงหน้าต่างของการตั้งค่า Axe และ Grid	33

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

รูปที่ 2.20 แสดงหน้าต่างของดั่งค่าคงที่	34
รูปที่ 2.21 แสดงการวาดรูปสี่เหลี่ยมลงในโปรแกรม	34
รูปที่ 2.22 แสดงการตั้งค่าในส่วนของ Subdomain	35
รูปที่ 2.23 แสดงการตั้งค่าในส่วนของ Boundary	35
รูปที่ 2.24 แสดง Element ภายในเงื่อนไขขอบเขตการ Simulation	36
รูปที่ 2.25 แสดงหน้าต่างของส่วน Solver สำหรับการประมวลผล	36
รูปที่ 2.26 แสดงโปรแกรมขณะทำการ Solve	37
รูปที่ 2.27 แสดงโปรแกรมหลังจากทำการ Solve เสร็จสิ้น	37
รูปที่ 2.28 แสดงหน้าต่างของส่วน Plot Parameters	38
รูปที่ 2.29 แสดงโมเดลหลังจากได้ทำการกำหนด Parameter ที่แสดงใหม่	39
รูปที่ 2.30 แสดงหน้าต่างในส่วนของการ Integration เพื่อหาค่า Parameters ในส่วนของ Subdomain ที่ต้องการ	39
รูปที่ 3.1 แสดงโมเดลของ Electromagnetic Aconstic Transducer	41
รูปที่ 3.2 แสดงรูปสัญลักษณ์ของความเร็วคลื่นอัลตราโซนิกที่กำหนดให้เคลื่อนที่ในตัวดู	42
รูปที่ 3.3 แสดงลักษณะของขดลวดที่จำลองในโมเดลใหม่	43
รูปที่ 3.4 แสดงลักษณะของโมเดลใหม่	43
รูปที่ 3.5 แสดงการหาค่าของความเร็วที่ใช้โดยโปรแกรม Matlab	44
รูปที่ 3.6 แสดงลักษณะสัญลักษณ์ของความเร็วคลื่นที่กำหนดให้เคลื่อนที่ในโมเดลใหม่	44
รูปที่ 3.7 แสดงผังการวัดค่าจริงของทรานซ์ดิวเซอร์	45
รูปที่ 4.1 แสดงความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่แม่เหล็กทั้ง 2 นั้นได้ปล่อยสนามแม่เหล็กออกมาโดยรอบในที่นี้ยังไม่ได้มีการแสดงผลถึงค่าพารามิเตอร์อื่นๆ	46
รูปที่ 4.2 เมื่อความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กนั้นไปเหนี่ยวนำให้ความเร็วของประจุให้ทางแกน y ของอคูมิเนี่ยมนั้นมีค่าความหนาแน่นกระแสเกิดขึ้น	47
รูปที่ 4.3 เป็นการแสดงผลแบบ Arrow ของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากค่าความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นในตัวอคูมิเนี่ยมจากการเหนี่ยวนำของความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่ทำกับความเร็วของประจุในตัวอคูมิเนี่ยม	47
รูปที่ 4.4 กราฟแสดงการจำลองค่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่ระยะห่างค่าต่างๆ	49
รูปที่ 4.5 แสดงผลที่เวลา $1.6\mu s$ แสดงความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่เหนี่ยวนำกับค่าความเร็วคลื่นทำให้เกิดค่าความหนาแน่นของกระแสขึ้น	49

## สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางผลการทดลองที่ 4.1 แสดงค่าของความหนาแน่นสนามแม่เหล็กที่อินทิเกรตได้ ตามระยะห่างที่ต่างกันออกไป	48
ตารางผลการทดลองที่ 4.2 แสดงการหาค่ากระแสเหนี่ยวนำยอดถึงยอด (Peak to Peak) จากสัญญาณที่วัดได้ ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปสัญญาณไซน์	51
ตารางผลการทดลองที่ 4.3 แสดงการหาค่ากระแสเหนี่ยวนำยอดถึงยอด (Peak to Peak) จากสัญญาณที่วัดได้ ซึ่งมีลักษณะของสัญญาณรูปคลื่นอัลตราโซนิก	53



# บทที่ 1

## บทนำ

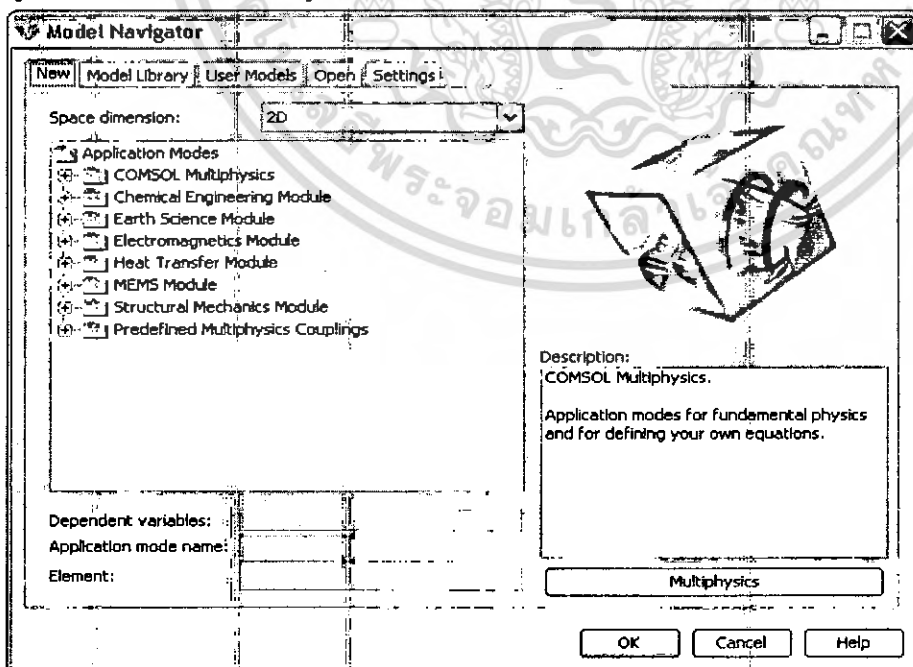
### 1.1 วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาการใช้งาน COMSOL Multi physics ซึ่งเป็น โปรแกรมจำลองการทำงานด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ (Finite Element Simulation)
2. เพื่อใช้โปรแกรมในการ โมเดลการทำงานของอัลตราโซนิคทรานสดิวเซอร์ (Ultra Sonic Transducer)
3. เพื่อนำผลที่ได้จากการ Simulate มาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้ตัววัดจริง

### 1.2 โปรแกรม COMSOL Multi physics

โปรแกรม COMSOL Multi physics เป็นโปรแกรมที่พัฒนามาจากโปรแกรม FEMLab ซึ่งอาศัยหลักการวิเคราะห์ โดยใช้หลักการของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ (Finite Element Method) การจำกัดขอบเขตโดยใช้หลักการของวัสดุศาสตร์ ซึ่งเราสามารถที่จะสร้างวัตถุขึ้นมา และกำหนดค่าต่างๆ ของตัววัสดุนั้น ให้เป็นค่าดังที่เราต้องการ และทำการวิเคราะห์หาค่าที่เราต้องการได้

โปรแกรม COMSOL Multi physics ใช้ได้ในหลายประเภท การใช้งาน โดยขึ้นอยู่กับผู้ใช้ว่าต้องการใช้ในด้านใด สาขาใดเพื่อจำลองชิ้นงานให้เสมือนจริง โดยเรื่องที่ COMSOL Multi physics ถูกใช้งานจะจำแนกไว้ ให้ผู้ใช้งานเลือกลักษณะการทำงานที่เหมาะสมตามชิ้นงานที่ต้องการจำลอง



รูปที่ 1.1 โปรแกรม COMSOL Multi physics ใช้งานได้หลากหลายสาขาในทางวิศวกรรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งโปรแกรมนี้จะ เป็นประโยชน์ และช่วยลดต้นทุนทั้งทางด้านเงินทุน ทรัพยากร รวมทั้ง เวลา ในการจำลองผลที่จะเกิดขึ้นแก่อุปกรณ์ที่ต้องการจะทดสอบ

โดยหลักการของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method) นี้จะใช้หลักการของ Numerical ซึ่งค่อนข้างที่จะสลับซับซ้อนในการทำงานในแต่ละชิ้นงาน ซึ่งโปรแกรม COMSOL Multiphysics มีระบบคำนวณทางด้านนี้ให้ตามค่าที่ตั้งกับวัสดุต่างๆ ดังนั้นจึงง่ายที่จะในโปรแกรมไปใช้ และศึกษาเพื่อเป็นประโยชน์ต่อไป

สำหรับงานที่นำมาใช้ในการจำลองการทำงานในที่นี้ก็คือ ตัววัดคลื่นอัลตราโซนิก(Ultrasonic) ซึ่งมีหลักการทำงานโดยอาศัยสมการแรงของลอเรนซ์(Lorentz force) ด้วยวิธีส่ง สนามแม่เหล็กโดยที่ไม่ต้องสัมผัสกับวัตถุที่นำมาใช้ในการทดสอบ โดยวัตถุที่นำมาใช้ในการทดสอบนั้นจะได้รับค่าสนามแม่เหล็กจากแม่เหล็กซึ่งอยู่ในอุปกรณ์วัด 2 ตัว โดยแม่เหล็กทั้งสองจะหันขั้วที่ตรงกันข้ามเข้าหาวัตถุ โดยจะมีขดลวดที่ใช้สำหรับเป็นตัววัดอยู่ระหว่างแม่เหล็กทั้งสองรวมกันเป็นส่วนของอุปกรณ์วัด เมื่อได้รับค่าสนามแม่เหล็กจากแม่เหล็ก ค่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็ก  $B$  จะเหนี่ยวนำ กับอนุภาคหรือคลื่นที่เคลื่อนที่ในวัตถุด้วยความเร็ว  $v$  โดยจะทำให้เกิดค่าของความหนาแน่นของกระแส  $J$  เกิดขึ้นที่วัตถุตามสมการแรงของลอเรนซ์(Lorentz force)

$$J = \sigma(v \times B)$$

โดยที่  $\sigma$  คือ ค่าสัมประสิทธิ์การนำไฟฟ้าของวัตถุ

และเมื่อมีค่าความหนาแน่นของกระแส  $J$  เกิดขึ้นจะมีค่าของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากค่าดังกล่าวนี้เกิดขึ้นด้วย เราจึงได้ศึกษาผลที่เกิดขึ้นนี้ โดยการโปรแกรมดังกล่าว

## บทที่ 2

### ทฤษฎีทางแม่เหล็กไฟฟ้า และ การใช้งานโปรแกรม COMSOL Multi physics

#### 2.1 ทฤษฎีทางแม่เหล็กไฟฟ้า

##### 2.1.1 สมการของปัวส์ซอง และสมการของลาปลาซ (Poisson's and Laplace's Equation)

จากกฎของเกาส์

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

แต่เนื่องจาก

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

และ

$$\vec{E} = -\nabla V$$

เราจะได้ว่า

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = -\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = \rho$$

หรือ

$$\nabla \cdot \nabla V = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (1)$$

สมการ(1)คือ “สมการของปัวส์ซอง” ซึ่ง Double  $\nabla$  จะต้องกระจายออก เช่น ในคาร์ทีเซียนโคออร์ดิเนต

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} a_x + \frac{\partial V}{\partial y} a_y + \frac{\partial V}{\partial z} a_z$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla V &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{aligned}$$

สามารถเขียน  $\nabla \cdot \nabla V$  ในรูป  $\nabla^2 V$  เรียกว่า “Del squared” นั่นคือ

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในระบบคาร์ทีเซียนหรือระบบเวกเตอร์สามทิศทางที่ใช้กับวัตถุรูปทรงสี่เหลี่ยม ถ้า  $\rho = 0$  ซึ่งก็คือไม่มีความหนาแน่นประจุไฟฟ้าต่อหน่วยลูกบาศก์เมตรบริเวณนั้น อาจมีเฉพาะประจุไฟฟ้าอิสระ, Line charge ( $\rho_L$ ) หรือ Surface charge density ( $\rho_s$ ) นั้นหมายความว่าแหล่งที่ทำให้เกิดสนามไฟฟ้าสถิต เช่น แรงดันไฟฟ้า  $V$ , ความเข้มสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$ , ฯลฯ อาจเป็นประจุไฟฟ้าอิสระ  $a$ , หรือ  $P_2$  หรือ  $P_3$  อย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้นสมการ(2) เมื่อ  $P = 0$  จะได้สมการของลาปลาซ คือ

$$\nabla^2 V = 0$$

เรียก  $\nabla^2$  ว่า "Laplacian of V" สมการลาปลาซ สำหรับระบบคาร์ทีเซียนคือ

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

สามารถหาสมการลาปลาซ ที่ใช้กับระบบเวกเตอร์สามทิศทางที่ใช้กับประจุไฟฟ้าที่อยู่บนวัตถุทรงกระบอก และทรงกลม ได้ดังสมการ(3) และ (4)ตามลำดับ

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \rho \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (3)$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (4)$$

### 2.1.2 ทฤษฎีความเป็นหนึ่ง (Uniqueness Theorem)

สมมุติว่ามีศักดาไฟฟ้า  $V_1, V_2$  และ  $V_1 - V_2 = 0$  บริเวณดังกล่าวมี  $\rho = 0$  ดังนั้นเมื่อใช้หลักลาปลาซ ถ้าพบว่า  $\nabla^2 V_1 = 0$  และ  $\nabla^2 V_2 = 0$  แล้ว

$$\nabla^2 (V_1 - V_2) = 0 \quad (5)$$

จากทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์ คือ

$$\nabla \cdot (V \vec{D}) \equiv V (\nabla \cdot \vec{D}) + \vec{D} \cdot (\nabla V)$$

เมื่อ  $V$  เป็นปริมาณสเกลาร์

$\vec{D}$  เป็นปริมาณเวกเตอร์

ถ้าเลือก  $V_1 - V_2$  เป็นปริมาณสเกลาร์ และ  $\nabla(V_1 - V_2)$  เป็นปริมาณเวกเตอร์ ก็จะได้ว่า

$$\nabla \cdot [(V_1 - V_2) \nabla(V_1 - V_2)] \equiv (V_1 - V_2) [\nabla \cdot \nabla(V_1 - V_2)] + \nabla(V_1 - V_2) \cdot \nabla(V_1 - V_2)$$

เนื่องจากสมการข้างบนขึ้นอยู่กับปริมาตร ฉะนั้นเมื่อทำการอินทิเกรต สมการด้านบน

ดังกล่าวจะได้

สมการใหม่ดังนี้

$$\int_{vol} \nabla \cdot [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)] dV \equiv \int_{vol} (V_1 - V_2) [\nabla^2 (V_1 - V_2)] dV + \int_{vol} [\nabla (V_1 - V_2)]^2 dV$$
 ตามหลักไทดเวอ์เรน สามารถแทนเทอม  $\int_{vol} \nabla \cdot [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)] dV$  ด้วยการอินทิเกรตพื้นที่ผิวปิด คือ  $\oint_S [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)] \cdot \bar{S}$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{vol} (V_1 - V_2) [\nabla^2 (V_1 - V_2)] dV + \int_{vol} [\nabla (V_1 - V_2)]^2 dV \equiv \oint_S [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)] \cdot \bar{S}$$

ดังนั้น

$$\int_{vol} (V_1 - V_2) [\nabla^2 (V_1 - V_2)] dV = 0 \quad \text{ตามสมการ(5)}$$

และ

$$\oint_S [(V_1 - V_2) \nabla (V_1 - V_2)] \cdot \bar{S} = 0 \quad \text{ด้วย}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{vol} [\nabla (V_1 - V_2)]^2 dV = 0$$

เพราะว่า  $\nabla (V_1 - V_2)$  เป็นค่าจริงที่อาจเป็นบวก หรือศูนย์เฉพาะการอินทิเกรตเท่านั้นทำให้มันเป็นศูนย์

ฉะนั้น  $[\nabla (V_1 - V_2)]^2$  จึงไม่เป็นค่าลบ

เพราะฉะนั้น

$$\nabla (V_1 - V_2) = 0$$

นั่นคือ

$$\nabla (V_1 - V_2) = 0$$

เนื่องจาก

$$V_1 - V_2 = 0 \text{ ทั่วบริเวณ ดังนั้น } V_1 - V_2 = \text{คงที่}$$

นั่นคือ  $V_1 = V_2$  แสดงว่าศักดาไฟฟ้า  $V_1, V_2$  มีลักษณะเหมือนกัน (Identical potential

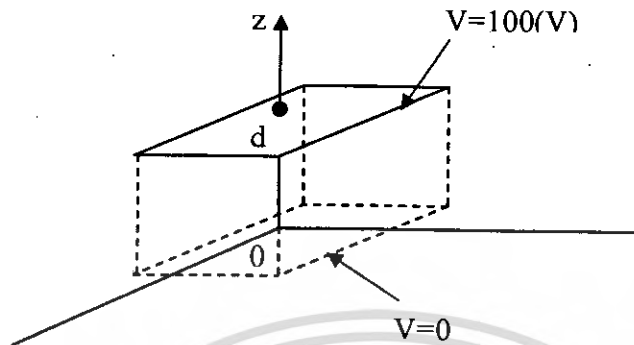
distributions)

ทฤษฎีความเป็นหนึ่งนี้ สามารถใช้กับสมการของปัวส์ซองได้ นั่นคือกำหนดว่า

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{และ} \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad \text{แล้วจะได้ว่า} \quad \nabla^2 (V_1 - V_2) = 0$$

### 2.1.3 การแก้สมการทางคาร์ทีเซียนในกรณีตัวแปรตัวเดียว

พิจารณาแผ่นตัวนำขนานสองแผ่นในรูปที่ 2.1 เมื่อ  $V=0$  ที่  $z=0$  และ  $V=100$  (V) ที่  $z=d$  สมมติว่าบริเวณระหว่างแผ่นตัวนำทั้งสองไม่มีประจุอยู่ (charge-free)



รูปที่ 2.1 แผ่นตัวนำขนานกันสองแผ่นซึ่งมีแรงดันไฟฟ้าตกคร่อม 100 โวลต์

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

เมื่อไม่คิดบริเวณขอบรอบนอก การเปลี่ยนแปลงของศักย์จะมีเฉพาะตามแกน z เท่านั้น

ดังนั้น

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

อินทิเกรตได้

$$V = Az + B$$

Boundary condition  $V = 0$  ที่  $z = 0$  จะได้ว่า  $B = 0$  เมื่อ  $V = 100$  ที่  $z = d$  จะได้  $A = \frac{100}{d}$

ดังนั้น

$$V = 100 \left( \frac{z}{d} \right) \quad (\text{V})$$

ค่าความเข้มสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  สามารถหาได้จาก

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla V = -\left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{a}_z \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( 100 \frac{z}{d} \right) \vec{a}_z = -\frac{100}{d} \vec{a}_z \quad (\text{V/m}) \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\vec{D} = -100 \frac{\epsilon}{d} \vec{a}_z \quad (\text{C/m}^2)$$

ที่แผ่นตัวนำ

$$\rho_s = D_n = \pm 100 \frac{\epsilon}{d} \quad (\text{C/m}^2)$$

ในที่นี้ เครื่องหมายบวกคือที่  $z = d$  และ เครื่องหมายลบคือที่  $z = 0$

## 2.1.4 การใช้สมการลาปลาซหาค่าศักดาไฟฟ้า $V$ ที่เปลี่ยนค่าตามค่า $x$ และ $y$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงปรากฏการณ์ของศักดาไฟฟ้าที่เปลี่ยนค่าตาม  $x$  และ  $y$  โดยแกน  $x$  และ  $y$  นั้นตั้งฉากซึ่งกันและกันเสมอ จากสมการลาปลาซจะได้ว่า

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

เนื่องจากศักดาไฟฟ้า  $V$  เปลี่ยนค่าตาม  $x$  และ  $y$  สมมติ  $V$  มีค่าเท่ากับผลคูณระหว่างฟังก์ชันของ  $x$  และ  $y$  สมมติให้ฟังก์ชันของ  $x$  คือ  $X$  และ  $y$  คือ  $Y$  ดังนั้น  $V = XY$  เมื่อแทนค่า  $V = XY$  ในสมการ(6) จะได้ว่า

$$\nabla^2 V = Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

เนื่องจาก  $Y$  ไม่เกี่ยวข้องกับ  $x$  และ  $X$  ไม่เกี่ยวข้องกับ  $y$  ให้เปลี่ยนสมการข้างบนจาก Partial derivative เป็น Derivative ธรรมดา ซึ่งจะได้ดังนี้

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} = 0$$

จัดรูปสมการใหม่จะได้ 
$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}$$

จากสมการข้างบนจะเห็นว่า เทอมซ้ายมือไม่เกี่ยวข้องกับ  $y$  และเทอมขวามือก็ไม่เกี่ยวข้องกับ  $x$  นอกจากนี้ทั้งสองเทอมดังกล่าวยังมีขนาดเท่ากันอีกด้วย สมมติให้  $a^2$  เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = a^2$$

และ 
$$-\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = a^2$$

จะได้สมการทั่วไปสำหรับ  $X$  คือ

$$X = A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax}$$

หรืออีกรูปแบบหนึ่งคือ  $X = A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax$

และสมการทั่วไปสำหรับ  $Y$  คือ

$$Y = B_1 e^{jay} + B_2 e^{-jay}$$

หรืออีกรูปแบบหนึ่งคือ  $Y = B_3 \cos ay + B_4 \sin ay$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันของศักดาในเทอมของตัวแปร  $x$  และ  $y$  สามารถเขียนได้เป็น

$$V = (A_1 e^{ax} + A_2 e^{-ax})(B_1 e^{jcy} + B_2 e^{-jcy})$$

หรืออีกรูปแบบหนึ่งคือ

$$V = (A_3 \cosh ax + A_4 \sinh ax)(B_3 \cos ay + B_4 \sin ay)$$

### 2.1.5 สนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไฟฟ้าตรง

ในที่นี้จะกล่าวถึงสนามแม่เหล็กอันเกิดจากกระแสไฟฟ้าตรงเป็นหลัก คำว่า “สนามแม่เหล็ก” ซึ่งมีความหมายทางไฟฟ้าที่กว้างพอสมควร เพราะอาจจะหมายถึงพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น ความเข้มสนามแม่เหล็ก (Magnetic field intensity,  $\vec{H}$ ) ความหนาแน่นสนามแม่เหล็ก (Magnetic flux density,  $\vec{B}$ ) และเส้นแรงแม่เหล็ก (Magnetic flux,  $\phi$ ) เป็นต้น ดังจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ต่างๆต่อไป

### 2.1.6 กฎของไบโอท์ซาวาร์ต(Biot-Savart Law) ซึ่งเกี่ยวกับสนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไฟฟ้ากระแสตรงไหลผ่านเส้นลวดไฟฟ้า

แหล่งสำคัญๆ ที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก อาทิ จากแม่เหล็กถาวร จากสนามไฟฟ้า(Electric field)ที่เปลี่ยนแปลงตามช่วงเวลา และสนามแม่เหล็กจากกระแสไฟฟ้า เป็นต้น ต่อไปนี้จะเป็นการกล่าวถึงสนามแม่เหล็กอันเกิดมาจากกระแสไฟฟ้าตรง

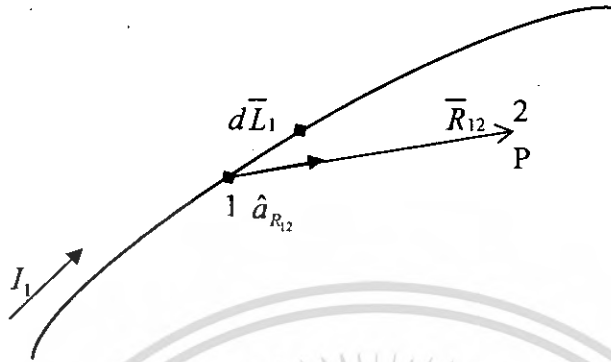
สมมุติกระแสไฟฟ้าตรงไหลไปตามวัสดุสื่อำไฟฟ้าที่มีพื้นที่หน้าตัดเล็กมาก หรือ เส้นลวดไฟฟ้า(Filamentary conductor) คำว่าเส้นลวดไฟฟ้า โดยทั่วไปแล้วก็คือวัสดุสื่อำไฟฟ้ารูปทรงกระบอกตันที่ยาวมาก ฉะนั้นเมื่อเทียบกับความยาวของมันแล้ว พื้นที่หน้าตัดจึงมีขนาดเล็กมาก

สมมุติมีกระแสไฟฟ้าตรง  $I$  ไหลในเส้นลวดไฟฟ้าที่ยาวมาก ย่อมเกิดสนามแม่เหล็กรอบๆ บริเวณ ที่เส้นลวดไฟฟ้าวางอยู่ ความเข้มสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้น ไบโอท์ซาวาร์ต บอกว่ามันจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับผลคูณของกระแสไฟฟ้า กับระยะทางที่กระแสไฟฟ้า  $I$  ไหลผ่าน และเป็นสัดส่วนผกผันกับระยะทางยกกำลังสองระหว่างจุดที่ต้องการหาสนามแม่เหล็กกับจุดที่กระแสไฟฟ้า  $I$  ที่ผ่าน นั่นคือ

$$d\vec{H} = \frac{Id\vec{L} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} \quad (7)$$

- เมื่อ  $d\vec{H}$  หมายถึงความเข้มสนามแม่เหล็ก เป็นเวกเตอร์มีหน่วยเป็น (A/m)  
 $\hat{a}_R$  หมายถึงเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเริ่มจากจุดที่กระแสไฟฟ้า  $I$  ไหลผ่านไปยังจุดที่ต้องการหาค่าสนามแม่เหล็ก  
 $d\vec{L}$  หมายถึงระยะทาง และทิศทางกระแสไฟฟ้า  $I$  ไหล  
 $R$  หมายถึงระยะทางจากจุดที่  $Id\vec{L}$  ผ่านกับจุดที่ต้องการหาค่า  $d\vec{H}$

รูปที่ 2.2 ข้างล่างแสดงจุดที่  $Id\bar{L}$  ผ่าน (จุด 1 และจุดที่ต้องการหาค่า  $d\bar{H}$  ที่จุด 2)



รูปที่ 2.2 แสดงการหาความเข้มสนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสไฟฟ้าตรง  $I$  ตามกฎของไบโอท์ซาวาร์ท ทิศทางของ  $d\bar{H}_2$  จะพุ่งเข้าไปในกระดาษ และทำมุม 90 องศากับกระดาษอีกด้วย

จากรูปที่ 2.2 อาศัยหลักของไบโอท์ซาวาร์ท จะได้ว่า

$$d\bar{H}_2 = \frac{Id\bar{L}_1 \times \hat{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2} \quad (8)$$

เมื่อค่า  $d\bar{H}_2$  คือความเข้มสนามแม่เหล็กที่ 2 ซึ่งเกิดจาก  $Id\bar{L}_1$  ที่จุดที่ 1  
 $\hat{a}_{R_{12}}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเริ่มจากจุดที่ 1 พุ่งไปที่จุดที่ 2  
 $R_{12}$  คือระยะห่าง (distance) ระหว่างจุดที่ 1 กับจุดที่ 2

จะเห็นว่ากฎของไบโอท์ซาวาร์ท ก็คือ กฎของแอมแปร์สำหรับกระแสส่วนย่อย (Ampere's Law for the current element) นั่นเอง ข้าว่าไม่ใช่กฎวงจรของแอมแปร์ (Ampere's circuital law)

เมื่อพูดถึงกฎของไบโอท์ซาวาร์ท หรือ กฎของแอมแปร์สำหรับ  $Id\bar{L}_1$  (Current elements) มีลักษณะคล้ายความสัมพันธ์ในกฎของคูลอมบ์ที่เกี่ยวข้องกับประจุไฟฟ้าขึ้นมากล่าวคือ จากรูปที่ 2.2 ที่จุดที่ 1 มีประจุไฟฟ้า  $dQ_1$  แทน  $Id\bar{L}_1$  ย่อมได้ความเข้มสนามไฟฟ้า ณ ที่จุด 2.2 ว่า

$$d\bar{E}_2 = \frac{dQ_1 \times \hat{a}_{R_{12}}}{4\pi\epsilon R_{12}^2} \quad (\text{V/m})$$

จะเห็นว่าทั้งกฎของไบโอท์ซาวาร์ท และกฎของคูลอมบ์ คล้ายคลึงกันคือ นอกจากจะใช้หลักของ inverse square law ทั้งคู่แล้ว เอมซำบมือสุดยังเป็นฟังก์ชันของแหล่ง คือ  $Id\bar{L}_1$   $dQ_1$  เหมือนกัน ที่แตกต่างกันก็เห็นจะเป็นทิศทางของ  $d\bar{H}_2$  และ  $d\bar{E}_2$

พิจารณาสมการ (7) และ(8) พบว่า เนื่องจากแหล่งที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก คือ กระแสไฟฟ้าตรง I ดังนั้นค่าความหนาแน่นประจุไฟฟ้าที่เกิดจากกระแสไฟฟ้าตรงจึงไม่ขึ้นกับเวลา ฉะนั้นจากสมการ  $\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{dp}{df}$  เมื่อนำมาใช้กับส่วนนี้จึงมีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$  ทั้งนี้

เพราะว่า  $\frac{dp}{dt} = 0$  นั่นเอง

นอกจากนี้ จะเห็นชัดว่าตามทฤษฎีของไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ เจน ข้อสมการ  $I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S}$  มีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่ากระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นที่ผิวปิดมีค่าเป็นศูนย์เสมอ

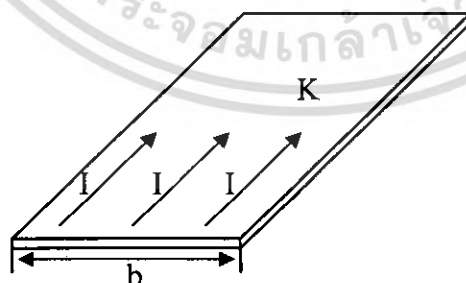
แต่ตามกฎของไบโอทซาวาร์ต ต้องทำให้กระแสไฟฟ้าไหลแบบครบวงจรถือแบบ Closed path หรือ วงจรปิด (Closed circuit) ดังนั้นจากสมการ (8) จะได้ว่า

$$\vec{H}_2 = \oint_{\text{Closed Path}} \frac{Id\vec{L}_1 \times \hat{a}_{R_{12}}}{4\pi R_{12}^2} \quad (9)$$

หรือเขียนเป็นสมการทั่วไปจะได้ดังนี้

$$\vec{H} = \oint_{\text{Closed Path}} \frac{Id\vec{L} \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}$$

นอกจากกระแสไฟฟ้าเป็นแหล่งกำเนิด ทำให้เกิดสนามแม่เหล็กดังกล่าวแล้ว ยังมีแหล่งกำเนิดอื่นๆอีกได้แก่ ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้า ( $\vec{J}$ ) ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าไหลผ่านพื้นที่ผิว (Surface current density) เป็นต้น ความหนาแน่นกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นที่ผิวของวัสดุต่างๆ (ใช้สัญลักษณ์ว่า  $\vec{K}$  เป็นเวกเตอร์มีหน่วยเป็น  $A/m$ ) ซึ่งหมายถึงกระแสไฟฟ้าไหลผ่านพื้นที่ผิว (ไม่คิดความหนา) ของวัสดุที่นำไฟฟ้า สมมุติให้  $b$  เป็นความกว้างของพื้นที่ผิวดังกล่าว และมีกระแสไฟฟ้า  $I$  ไหลผ่านดังรูปที่ 3 ซึ่งจะได้ว่า  $I = |K|b$  อนึ่งความกว้าง  $b$  จะตั้งฉากกับทิศทางการไหลของกระแสไฟฟ้าเสมอ



รูปที่ 2.3 จำนวนกระแสไฟฟ้าตรง  $I$  ไหลผ่านผิวนอกของวัสดุที่นำไฟฟ้าที่มีความกว้าง  $b$  เมตรจะได้ว่า  $I = |K|b$  สมมุติ มีค่าเท่ากันตลอดบนทุกจุดของพื้นที่ผิวดังกล่าว

จากรูปที่ 2.3 ข้างบน ถ้า  $K$  มีค่าเท่ากันบนทุกจุดของพื้นที่ผิวนอกของวัสดุที่นำไฟฟ้าย่อมได้กระแสไฟฟ้าไหลมีค่าดังนี้

$$I = |K|b$$

แต่ถ้า  $|K|$  ของแต่ละจุดมีค่าไม่เท่ากัน จะได้สมการของกระแสว่า

$$I = \int K dn$$

ค่า  $dn$  หมายถึง Differential path ที่ตั้งฉากกับกระแสไฟฟ้าที่ไหลผ่านพื้นที่ผิว

อนึ่งค่า  $I d\bar{L}$  จะเท่ากับ  $\bar{K} dS$  และเท่ากับ  $\bar{J} dV$  ด้วย นั่นคือ

$$I d\bar{L} = \bar{K} dS = \bar{J} dV$$

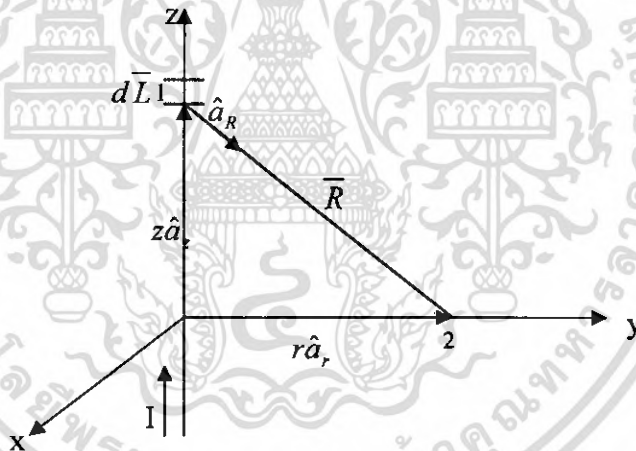
ดังนั้นจากสมการ(9) จะกลายเป็นดังสมการข้างล่าง

$$\bar{H} = \int \frac{\bar{K} \times \hat{a}_R dS}{4\pi R^2} = \int \frac{\bar{K} dS \times \hat{a}_R}{4\pi R^2}$$

หรือ

$$\bar{H} = \int_{vol} \frac{\bar{J} dV \times \hat{a}_R}{4\pi R^2} = \int_{vol} \frac{\bar{J} \times \hat{a}_R dV}{4\pi R^2}$$

ต่อไปนี้จะนำกฎไบโอทซาวาร์ท ไปใช้กับกระแสไฟฟ้าตรงไหลผ่านเส้นลวดไฟฟ้าที่ยาวมาก (infinitely straight filament) ถูกวางอยู่ในแนวของแกน  $z$  ดังรูปที่ 4 จุดประสงค์คือต้องการหาสนามแม่เหล็ก  $\bar{H}$  ณ จุด  $(r, \phi, z)$



รูปที่ 2.4 กระแสไฟฟ้า  $I$  ไหลในเส้นลวดไฟฟ้าที่ยาวมาต้องการหาสนามแม่เหล็ก  $\bar{H}$  ณ จุด  $P(r, \phi, z)$

จะเห็นว่ารูปที่ 2.4 มีลักษณะคล้ายกับ รูปแสดงการหาความเข้มสนามไฟฟ้าที่เกิดจากอำนาจประจุไฟฟ้าที่อยู่บนเส้นลวดขนาดเล็กแต่ยาวมากที่ทุกจุดมีความหนาแน่นของความจุไฟฟ้า  $\rho_L$  (C/m) ดังนั้นอาศัยเกณฑ์เดียวกัน คือการเปลี่ยนแปลงค่ามุม  $\phi$  และระยะ  $z$  มิได้ทำให้ความเข้มของสนามแม่เหล็ก ณ จุดหนึ่งจุดใดรอบๆ แกน  $z$  เปลี่ยนไป หมายความว่าค่า  $\bar{H}$  ไม่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรได้แก่มุม  $\phi$  และ  $z$  แต่อย่างใด แต่ค่า  $\bar{H}$  ดังกล่าวจะเปลี่ยนแปลงตามฟังก์ชันของตัวแปรอีกอีกตัวหนึ่งคือรัศมี  $r$  เสมอ พิสูจน์ข้อเท็จจริงให้เห็นต่อไปนี้

จากรูปที่ 2.4 เพราะว่า  $\bar{R} = r\hat{a}_r - z\hat{a}_z$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่ สงวนลิขสิทธิ์ไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา บุคคลต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้น

$$\hat{a}_R = \frac{\bar{R}}{|R|} = \frac{r\hat{a}_r - z\hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

และเพราะว่า

$$d\bar{L} = \partial z \hat{a}_z$$

จากสมการ(8)

$$d\bar{H} = \frac{I d_z \hat{a}_z \times (r\hat{a}_r - z\hat{a}_z)}{\sqrt{4\pi(r^2 + z^2)^3}}$$

เพราะว่ากระแสไฟฟ้าไหลจาก  $-\infty$  ถึง  $+\infty$  ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}\bar{H}_{(r,\phi,z)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I d_z \hat{a}_z \times (r\hat{a}_r - z\hat{a}_z)}{4\pi(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Ir}{5\pi r^2} \hat{a}_\phi \cdot \frac{3}{\sqrt{r^2 + z^2}}\end{aligned}$$

เพราะว่าค่า  $r$  และเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\hat{a}_\phi$  มีค่าคงที่ ดังนั้นจะพบว่า

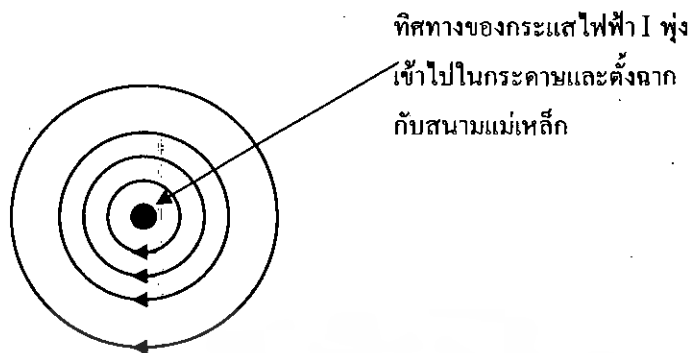
$$\begin{aligned}\bar{H}_{(r,\phi,z)} &= \frac{Ir\hat{a}_\phi}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Ir\hat{a}_\phi}{4\pi r} \left. \frac{z}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right|_{-\infty}^{\infty}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\bar{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

แสดงให้เห็นว่าความเข้มของสนามไฟฟ้า  $\bar{H}$  ณ จุดใดๆ รอบๆ เส้นลวดไฟฟ้าตรง(อยู่ในแนวแกน  $z$  ดังรูปที่ 4) ที่มีกระแสไฟฟ้าตรง  $I$  ไหลผ่านจะมีทิศทางไปทางเวกเตอร์หนึ่งหน่วย  $\hat{a}_\phi$  เสมอ ดังนั้นทิศทางของสนามแม่เหล็ก  $\bar{H}$  จะเป็นวงกลมรอบแกน  $z$  ขนาดของ  $|\bar{H}|$  ขึ้นอยู่กับกระแสไฟฟ้า  $I$  และระยะทางระหว่างจุดที่มีกระแสไฟฟ้าผ่าน กับจุดที่ต้องการหาสนามแม่เหล็ก

ลักษณะเส้นกราฟ (Stream lines) ของสนามแม่เหล็ก  $\bar{H}$  เป็นดังเช่นรูปข้างล่าง จุดต่างๆตรงกลางคือ กระแสไฟฟ้า  $I$  นั่นเอง โดยมีทิศทางการไหลของ  $I$  พุ่งเข้าไปในกระดาษ วงกลมรอบๆ จุดดำดังกล่าวคือเส้นกราฟของสนามแม่เหล็ก ที่ซึ่งรัศมี  $r$  มีค่าต่างๆ กัน ถ้าใช้กฎมือขวาช่วยจะทำให้จดจำทิศทางได้ง่ายยิ่งขึ้น โดยยึดนิ้วหัวแม่มือเป็นทิศทางการไหลของกระแส



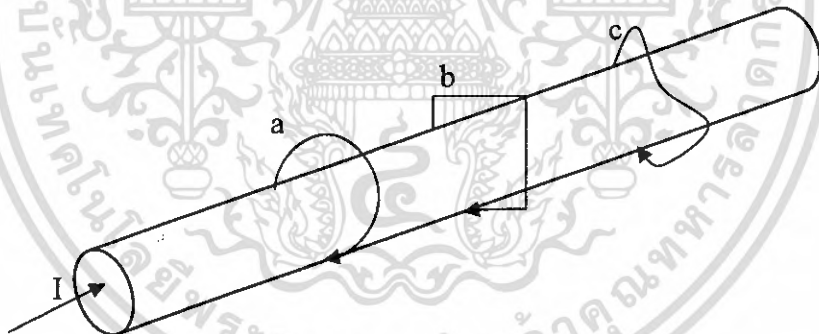
รูปที่ 2.5 แสดงเส้นกราฟของสนามแม่เหล็ก  $\vec{H}$  ซึ่งเกิดขึ้นรอบเส้นลวดไฟฟ้าที่มีกระแสไฟฟ้าผ่าน

### 2.1.7 กฎวงจรของแอมแปร์ (Ampere's circuital law)

กฎวงจรของแอมแปร์ กล่าวว่า อินทิกรัลเชิงเส้นของความเข้มสนามแม่เหล็กรอบเส้นวงปิดใดๆ จะเท่ากับกระแสที่ถูกล้อมรอบโดยเส้นวงปิด เมื่อเขียนเป็นสูตรจะได้

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I_{enclosed}$$

โดย  $I$  เป็นบวกจะเป็นตามกฎมือขวา



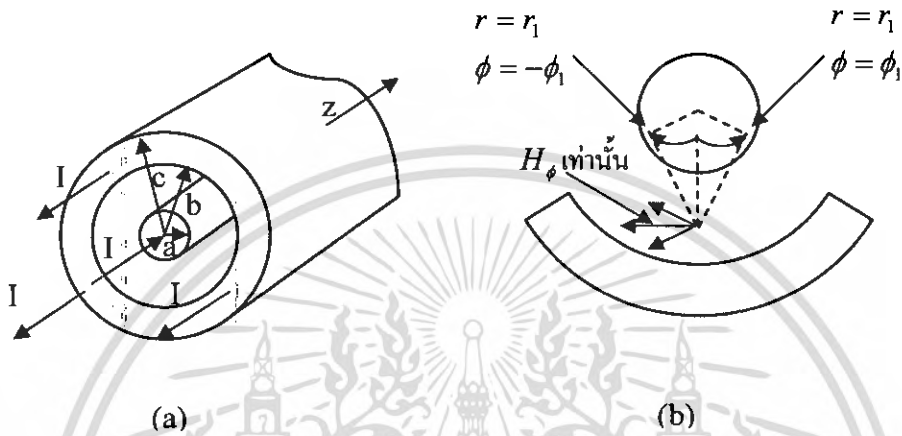
รูปที่ 2.6 เส้นลวดตัวนำเส้นหนึ่งนำกระแส  $I$  อินทิกรัลเชิงเส้นของสนามแม่เหล็กรอบเส้นวงปิดที่เขียนอักษร a และ b จะได้เท่ากับกระแส  $I$  แต่เส้นวงปิดที่เขียนอักษร c จะได้ค่าน้อยกว่า  $I$

ถ้าเราลองมาหาความเข้มสนามแม่เหล็กที่สร้างขึ้นโดยเส้นลวดตัวนำที่ยาวอนันต์ มีกระแส  $I$  ไหล เส้นลวดตัวนำวางอยู่ตามแนวแกน  $z$  และกระแสไหลในทิศทาง  $\hat{z}$  (รูปที่ 4) จากสมการสมมาตร (symmetry) สนามจะไม่เปลี่ยนแปลงตาม  $z$  และ  $\phi$  ต่อไปพิจารณา  $\vec{H}$  โดยใช้กฎไบโอท์ซาวาร์ท เรากล่าวได้ว่าทิศทางของ  $d\vec{H}$  ตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วย  $d\vec{L}$  และ  $\vec{R}$  จึงอยู่ในทิศทาง  $\hat{\phi}$  ฉะนั้นสนามแม่เหล็กจะมีค่า  $\vec{H}_\phi$  เป็นฟังก์ชันของรัศมี  $r$  เท่านั้น

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

### 2.1.8 การหาสนามแม่เหล็กในสายโคแอกเซียลเคเบิล

สายโคแอกเซียลเคเบิล นำกระแส  $I$  ที่ตัวนำกลาง และ  $-I$  ที่ตัวนำนอกตามรูปที่ 2.7 รัศมีตัวนำอันในเท่ากับ  $a$  รัศมีด้านในของตัวนำอันนอกเท่ากับ  $b$  รัศมีด้านนอกของตัวนำอันนอกเท่ากับ  $c$  ให้ความหนาแน่นกระแสที่ผ่านพื้นที่หน้าตัดขวางเฉลี่ยเท่ากับตลอด ในตัวนำแต่ละตัว



รูปที่ 2.7 สายโคแอกเซียลเคเบิล

สนามแม่เหล็ก  $\vec{H}$  ไม่ได้เป็นฟังก์ชันของ  $\phi$  และ  $z$  เราจะหาแต่เพียง  $H_\phi$  ซึ่งเปลี่ยนแปลงตามรัศมี  $r$

1) สนามแม่เหล็กภายในเนื้อตัวนำอันใน ( $r < a$ )

$$\begin{aligned} \text{ความหนาแน่นกระแสภายในตัวนำอันใน } J_1 &= \frac{I}{\pi a^2} \\ \text{กระแสที่ถูกปิดล้อมโดยวงกลมรัศมี } r &= J_1 \pi r^2 \\ &= \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi r^2 = I \left( \frac{r}{a} \right)^2 \end{aligned}$$

ใช้กฎวงจรของแอมแปร์

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = H_\phi (2\pi r) = I_{\text{enclosed}} = I \left( \frac{r}{a} \right)^2$$

$$H_\phi = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

2) สนามแม่เหล็กกระหว่างตัวนำอันในอันนอก ( $a < r < b$ )

กระแสที่ถูกปิดล้อม =  $+I$

ใช้กฎวงจรของแอมแปร์

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = H_\phi (2\pi r) = I$$

เพราะฉะนั้น

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3) สนามแม่เหล็กในเนื้อตัวนำอันนอก ( $b < r < c$ )

ความหนาแน่นกระแสในตัวนำอันนอก  $J_2 = \frac{-I}{\pi(c^2 - b^2)}$

กระแสที่ถูกปิดล้อม = กระแสในตัวนำอันใน + กระแสในตัวนำอันนอกส่วนหนึ่ง  

$$= +I + \frac{-I(r^2 - b^2)}{(c^2 - b^2)} = \frac{I(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)}$$

ใช้กฎวงจรของแอมแปร์

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = H_\phi \cdot 2\pi r = I_{enclosed} = \frac{I(c^2 - r^2)}{(c^2 - b^2)}$$

เพราะฉะนั้น  $H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \cdot \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$

4) สนามแม่เหล็กภายนอกสายโคแอกเซียลเคเบิล ( $r > c$ )

กระแสที่ถูกปิดล้อม =  $+I + (-I) = 0$

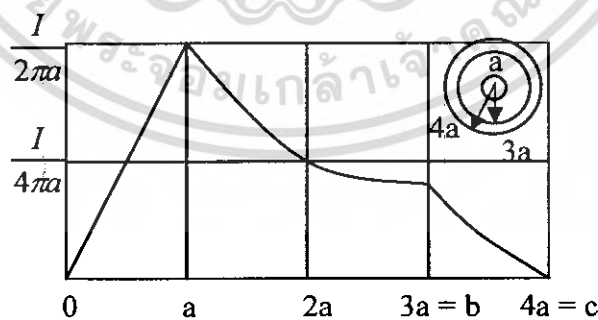
ใช้กฎวงจรของแอมแปร์

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = H_\phi \cdot 2\pi r = 0$$

เพราะฉะนั้น  $H_\phi = 0$

แสดงว่าไม่มีสนามแม่เหล็กออกไปภายนอกสายโคแอกเซียล ดังนั้นสายโคแอกเซียลจึงเปรียบเสมือนมีการชิลด์ อยู่ในตัวของมันเอง

สำหรับสายโคแอกเซียล ซึ่งมี  $b = 3a$ ,  $c = 4a$  ค่าของสนามแม่เหล็ก จะเปลี่ยนแปลงตามรัศมีดังในรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ค่าของสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามระยะรัศมี

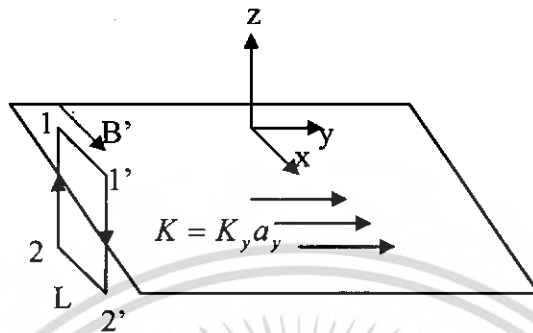
### 2.1.9 สนามแม่เหล็กเนื่องจากกระแสในระนาบขนาน

โดยการใชกฎไบโอทซาวาร์ต เราสามารถหาสูตรสำหรับความเข้มสนามแม่เหล็ก เนื่องจากกระแสในระนาบขนานตามรูปที่ 2.9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{K} \times \hat{a}_n)$$

เมื่อ  $\hat{a}_n$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากกับแผ่นกระแส

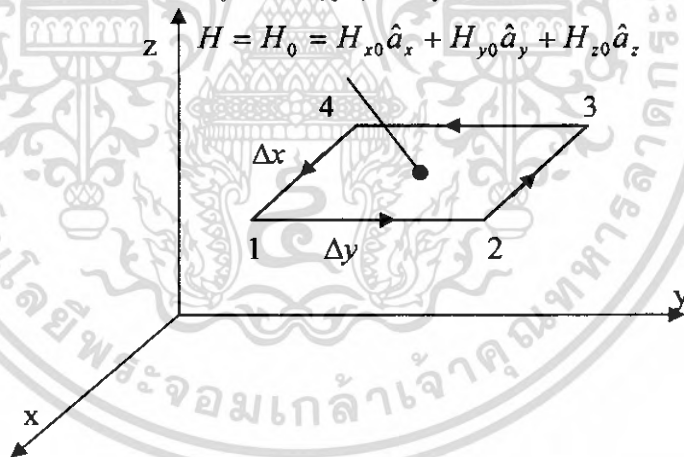


รูปที่ 2.9 กระแสในระนาบอนันต์

### 2.1.10 เคิร์ล (Curl)

ในคาร์ทีเซียน โคออร์ดิเนต ค่าของสนามแม่เหล็กที่กึ่งกลางสี่เหลี่ยมเล็กๆ คือ

$$\bar{H}_0 = H_{x_0} \hat{a}_x + H_{y_0} \hat{a}_y + H_{z_0} \hat{a}_z$$



รูปที่ 2.10 เส้นวงปิดของสนามแม่เหล็ก

อินทิกรัลแบบเส้นวงปิดของสนามแม่เหล็ก  $\bar{H}$  รอบเส้นทาง อนุโลมว่าเท่ากับผลบวกทั้ง 4 ค่าของ  $\bar{H} \cdot \bar{L}$  ในแต่ละด้าน เลือกเส้นทาง 1-2-3-4-1

$$(\bar{H} \cdot \Delta L)_{1-2} = H_{y,1-2} \Delta y$$

$$H_{y,1-2} = H_{y_0} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \Delta x \right)$$

ดังนั้น

$$(\bar{H} \cdot \Delta L)_{1-2} = \left( H_{y_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y$$

## สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

$$(\bar{H} \cdot \Delta L)_{2-3} = H_{x,2-3}(-x) = -\left(H_{x_0} + \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta y\right) \Delta x$$

หาอีกสองด้านที่เหลือ แล้วรวมทั้ง 4 ด้านจะได้

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y$$

โดยใช้กฎของจอร์จของแอมแปร์ ผลอันนี้ต้องเท่ากับกระแสที่คลุมด้วยเส้นวงปิด หรือกระแสผ่านพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยเส้นวงปิด ถ้าความหนาแน่นกระแสคือ  $\bar{J}$  ดังนั้นกระแสที่ถูกปิดล้อมจะเป็น  $\Delta I = J_z \Delta x \Delta y$  และจะได้ว่า

$$\oint \bar{H} \cdot d\bar{L} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \Delta x \Delta y = J_z \Delta x \Delta y$$

$$\oint \frac{\bar{H} \cdot d\bar{L}}{\Delta x \Delta y} = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = J_z$$

เมื่อเส้นวงปิดเล็กลง ใกล้เคียงค่าศูนย์ สมการข้างบนจะได้ค่าใกล้เคียงขึ้น ถ้าใช้ limit เราจะได้

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}}{\Delta x \Delta y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\lim_{\Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}}{\Delta y \Delta z} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

$$\lim_{\Delta z, \Delta x \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}}{\Delta z \Delta x} = \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial H_x}{\partial x} = J_y$$

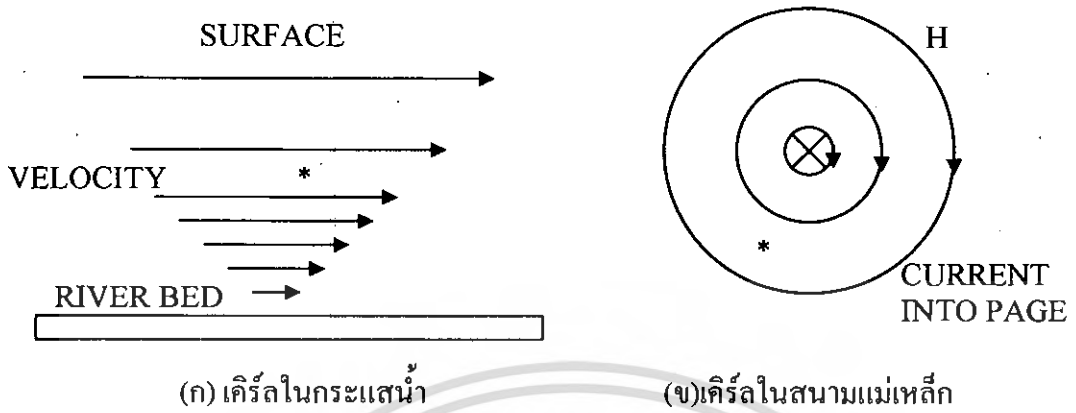
เคิร์ล ของสนามเวกเตอร์ เป็นเวกเตอร์ และส่วนประกอบอันหนึ่งอันใดของเคิร์ล กำหนดโดย limit ของอินทิกรัลเส้นวงปิดของเวกเตอร์รอบเส้นวงปิดเล็กๆ ซึ่งอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศทางของส่วนประกอบนั้น คิดต่อหน่วยพื้นที่ภายในเส้นวงปิด เมื่อขนาดเล็กลงสู่ค่าศูนย์ เขียนเป็นสูตรได้ดังนี้

$$(\text{curl } \bar{H}) = \lim_{\Delta S_n \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} \cdot d\bar{L}}{\Delta S_n}$$

เมื่อ  $\Delta S_n$  คือพื้นที่ที่เกิดจากการล้อมของอินทิกรัลเส้นวงปิด

$$\text{curl } \bar{H} = \nabla \times \bar{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) \hat{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \hat{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) \hat{a}_z$$

เคิร์ล คือการหมุน ถ้าไม่มีการหมุนจะไม่เกิดเคิร์ลขึ้น ดังคำกล่าวที่ว่า No rotation means no curl ; larger angular velocities mean greater values of the curl รูปที่ 2.11 แสดงตัวอย่างของเคิร์ล



(ก) เติร์ลในกระแสน้ำ

(ข) เติร์ลในสนามแม่เหล็ก

รูปที่ 2.11 เติร์ล

$$\nabla \times \vec{H} = \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \hat{a}_x + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \hat{a}_y + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \hat{a}_z = \vec{J}$$

รูปแบบจุดของกฎวงจรของแอมแปร์

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

สมการนี้เป็นสมการที่สองของสมการแมกซ์เวลล์ ซึ่งมีอยู่สี่สมการด้วยกัน สำหรับสมการที่

สามเขียนได้เป็น

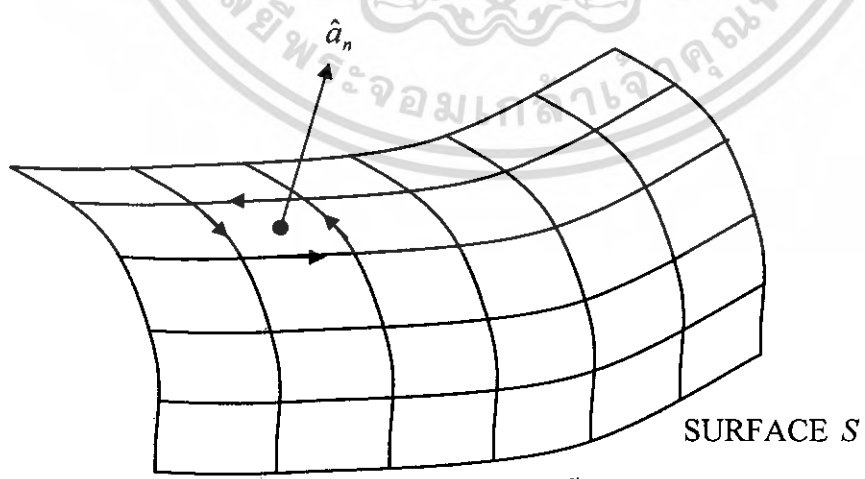
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

หรือ

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

สนามไฟฟ้าสถิตไม่มีเติร์ลเกิดขึ้น ส่วนสมการที่สี่จะได้กล่าวถึงต่อไป

**2.1.11 ทฤษฎีของสโตค (Stoke 's theorem)**



รูปที่ 2.12 เติร์ลในส่วนย่อยของพื้นผิว

ในรูปที่ 2.12 พื้นผิว S ถูกแบ่งเป็น  $\Delta S$  เล็กๆ ใช้คำจำกัดความของเติร์ลต่อพื้นผิว  $\Delta S$

อันหนึ่งจะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta S} = (\nabla \times \vec{H})_n$$

ซึ่งอาจเขียนได้เป็น

$$\frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{L}}{\Delta s} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{a}_n$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = (\nabla \times \vec{H}) \cdot \hat{a}_n \Delta S = (\nabla \times \vec{H}) \cdot \Delta \vec{S}$$

ต่อไปพิจารณาจากพื้นที่ผิว S ทั้งหมด ซึ่งประกอบด้วยหลายๆ  $\Delta S$  รวมกัน เราหาค่าอินทิกรัลเส้นวงปิดสำหรับแต่ละ  $\Delta S$  ซึ่งบางอันจะหักล้างซึ่งกันและกัน เพราะทุกๆ ผนังของ  $\Delta S$  ซึ่งอยู่ด้านบนจะถูก อินทิกรัลคลุมหนึ่งครั้ง ในแต่ละทิศทาง จะเหลือแต่เพียงด้านบนสุดเท่านั้นที่ไม่ถูกหักล้าง นั่นก็คือเส้นที่ปิดพื้นที่ผิว S นั่นเอง ดังนั้น

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = \int (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{S}$$

ซึ่ง  $d\vec{L}$  เป็นเส้นทางโดยรอบพื้นที่ S

สมการข้างบนนี้เป็น identity สำหรับเวกเตอร์ใดๆ ซึ่งเรียกว่าทฤษฎีของสต็อค

ทฤษฎีของสต็อค ใช้เปลี่ยนระหว่างอินทิกรัลเส้นวงปิด ส่วนทฤษฎีไดเวอร์เจน ใช้เปลี่ยน

ระหว่างอินทิกรัลเชิงปริมาตรกับอินทิกรัลพื้นผิวปิด

## 2.1.12 ฟลักซ์แม่เหล็ก และความหนาแน่นฟลักซ์แม่เหล็ก

ความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็กในตัวกลางใดๆ หาได้โดย

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{ใน free space})$$

เมื่อ  $\vec{B}$  ความหนาแน่นสนามแม่เหล็กมีหน่วยเป็น  $\text{Wb}/\text{m}^2$  หรือเทสลา(T) ใน

ระบบหน่วย IS

$\mu_0$  ค่าสัมประสิทธิ์ permeability of free space =  $4\pi \times 10^{-7}$  H/m

$\vec{H}$  ความเข้มสนามแม่เหล็กมีหน่วยเป็น A/m

ฟลักซ์แม่เหล็ก  $\phi$  ที่ผ่านพื้นที่ใดๆ ที่กำหนดคือ

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad \text{wb}$$

ส่วนกรณีของฟลักซ์ไฟฟ้า ตามกฎของเกาส์ ฟลักซ์ไฟฟ้าทั้งหมดที่ผ่านพื้นที่ผิวปิดใดๆ จะเท่ากับประจุที่อยู่ภายในพื้นที่ผิวปิดนั้น

$$\psi = \int \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad \text{คูลอมบ์}$$

ประจุ Q เป็นแหล่งกำเนิดของเส้นฟลักซ์ไฟฟ้า และฟลักซ์ไฟฟ้าเหล่านี้เริ่มต้น และสิ้นสุดลงที่ประจุบวกและลบตามลำดับ

แต่เราจะไม่พบแหล่งกำเนิดแบบนี้ในกรณีของฟลักซ์แม่เหล็ก ตัวอย่างเช่น กระแส  $I$  ไหลในเส้นลวดตัวนำยาวอนันต์ สนามแม่เหล็ก  $\vec{H}$  จะเกิดขึ้นเป็นวงกลมรอบเส้นลวดตัวนำ ในเมื่อ  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  ดังนั้น  $\vec{B}$  ก็จะเป็นวงกลมอยู่ในรูปเดียวกัน เส้นฟลักซ์แม่เหล็กถูกปิด และไม่ได้เชื่อมโยงที่ Magnetic Charge เนื่องจากเหตุผลอันนี้ ดังนั้น กฎของเกาส์ในกรณีของสนามแม่เหล็ก จะได้เป็น

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ใช้ทฤษฎีไดเวอร์เจน และให้ปริมาตรเล็กลงสู่ค่าศูนย์ จะได้

$$\int_{vol} (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (10)$$

สมการ (10) นี้เป็นสมการที่สี่ของสมการแมกซ์เวลล์ สำหรับสนามไฟฟ้าสถิต และสนามแม่เหล็กสถิต รวบรวมสมการแมกซ์เวลล์ไว้ในที่นี้จะได้

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

ซึ่งใน free space  $\vec{D}$  กับ  $\vec{E}$  และ  $\vec{B}$  กับ  $\vec{H}$  สัมพันธ์กัน ดังนี้

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

โดยสมการของแมกซ์เวลล์ทั้งสี่ ถ้าเขียนในรูปแบบอินทิกรัล จะได้

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q = \int_{vol} \rho dV$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{L} = 0$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ตัวอย่างการใช้ประโยชน์ของฟลักซ์ ความสะดวกหาแน่นฟลักซ์ในสนามแม่เหล็ก เช่นหาฟลักซ์ระหว่างตัวนำของสายโคแอดเซียลตามรูปที่ 7 ความเข้มสนามแม่เหล็ก คือ

$$H_\phi = \frac{I}{2\pi r} \quad (a < r < b)$$

ดังนั้น

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

ฟลักซ์แม่เหล็กที่มีอยู่ระหว่างตัวนำอินใน และตัวนำอินนอกซึ่งมีความยาว  $L$  คือฟลักซ์ซึ่งผ่านระนาบรัศมี ระหว่าง  $r = a$  ถึง  $r = b$  และจาก  $z = 0$  ถึง  $z = L$

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^L \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi \cdot dr dz \hat{a}_\phi$$

$$\phi = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

### 2.1.13 ศักย์แม่เหล็กชนิดสเกลาร์ และศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์

ในสนามไฟฟ้าสถิต (Electrostatics) เราสามารถหาสนามไฟฟ้า  $\vec{E}$  ได้จากศักย์สนามไฟฟ้าสถิตชนิด สเกลาร์ (Scalar electrostatic potential  $V$ ) ตามสมการ

$$\vec{E} = -\nabla V$$

สำหรับในสนามแม่เหล็กสถิต เราก็อาจสมมุติว่ามี ศักย์แม่เหล็กชนิดสเกลาร์ (Scalar magnetic potential  $V_m$ ) เพื่อช่วยในการหาสนามแม่เหล็ก  $\vec{H}$  โดยใช้สูตร

$$\vec{H} = -\nabla V_m$$

ซึ่ง  $V_m$  นี้เรียกว่า ศักย์แม่เหล็กชนิดสเกลาร์ มีหน่วยเป็นแอมแปร์ (A)

จากกฎวงจรของแอมแปร์  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  เมื่อเราแทน  $\vec{H}$  ด้วย  $-\nabla V_m$  จะได้

$$[\nabla \times \vec{H} = \nabla \times (-\nabla V_m) = -\nabla \times (\nabla V_m)] = \vec{J} \quad (11)$$

แต่  $\nabla \times (\nabla T) = 0$  สำหรับสเกลาร์  $T$  ใดๆ ดังนั้นสมการ (11) จะได้

$$[\nabla \times \vec{H} = -\nabla \times (\nabla V_m) = 0] = \vec{J}$$

ทำให้ได้

$$\vec{J} = 0$$

ดังนั้นความหนาแน่นกระแส  $\vec{J}$  จะต้องเป็นศูนย์ในบริเวณ ที่เรากำหนดว่า มีศักย์แม่เหล็กสเกลาร์  $V_m$  อยู่

การหา  $V_m$

จาก  $\nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \mu_0 \vec{H} = 0$

แทนค่า  $\vec{H} = -\nabla V_m$

ได้  $\nabla \cdot (-\mu_0 \nabla V_m) = 0$  หรือ  $-\mu_0 \nabla \cdot (\nabla V_m) = 0$

เนื่องจาก

$$\nabla \cdot (\nabla V_m) = \nabla^2 V_m = \frac{\partial^2 V_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial z^2}$$

จะได้

$$-\mu_0 \nabla^2 V_m = 0 \text{ และ } \nabla^2 V_m = 0 \quad (12)$$

สมการ (12) เป็นสมการลาปลาซที่ฟังก์ชันไม่ทราบค่าเป็น  $V_m$  แสดงว่าศักย์แม่เหล็กชนิด  
สเกลาร์  $V_m$  เป็นตัวตอบสนองสมการลาปลาซ

สำหรับศักย์แม่เหล็กชนิดเวกเตอร์ พิจารณาจากลักษณะเวกเตอร์  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$  โดยที่  $\vec{A}$   
เป็นเวกเตอร์ใดๆ และจาก

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ; (\vec{B} = \mu_0 \vec{H})$$

จะเห็นว่า เราอาจเทียบให้  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$       $\vec{H} = \frac{\nabla \times \vec{A}}{\mu_0}$

โดยในที่นี้  $\vec{A}$  มีความหมายเกี่ยวข้องกับสนามแม่เหล็ก เราจึงเรียก  $\vec{A}$  ว่า ศักย์แม่เหล็กชนิด  
เวกเตอร์มีหน่วยเป็น  $Wb/m$

สำหรับสนามแม่เหล็กสถิต เราสามารถกำหนดให้  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$  ได้ และเมื่อใช้สมการนี้ร่วมกับ  
สมการ  $\nabla \times \vec{A} = \vec{B} = \mu \vec{H}$  ซึ่งทำให้

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu (\nabla \times \vec{H}) = \mu \vec{J}$$

เราสามารถหาเทอม  $\vec{A}$  ได้ตั้งสมการ

กรณีของกระแสในเส้นลวดตัวนำขนาดจิ๋ว  $\vec{A} = \oint \frac{\mu I d\vec{L}}{4\pi R} \quad Wb/m$

กรณีของกระแสเชิงผิว  $\vec{A} = \int_s \frac{\mu \vec{K} dS}{4\pi R} \quad Wb/m$

กรณีของกระแสเชิงปริมาตร  $\vec{A} = \int_{vol} \frac{\mu \vec{J} dV}{4\pi R} \quad Wb/m$

### 2.1.14 แรงในสนามแม่เหล็ก สารแม่เหล็ก และความเหนี่ยวนำ

แรงบนประจุที่เคลื่อนที่ในสนามไฟฟ้า คือ

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad N.$$

อนุภาคประจุที่เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็ก ซึ่งมีความหนาแน่นฟลักซ์เป็น  $\vec{B}$  คือแรงซึ่งแปร  
ผันตามประจุ  $Q$  ความเร็ว  $\vec{v}$  ของประจุ ความหนาแน่นฟลักซ์  $\vec{B}$  และ sine ของมุมระหว่างเวกเตอร์  $\vec{v}$   
และ  $\vec{B}$

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad N.$$

สำหรับแรงบนอนุภาคประจุที่กำลังเคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็ก และสนามไฟฟ้ารวมกันคือ

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad N.$$

สมการนี้มีชื่อว่า “สมการแรงลอเรนซ์ (Lorentz force equation)” เช่นใช้สำหรับหาการโคจร  
ของอิเล็กตรอนในหลอดแมกนีตรอน

แรงบนส่วนย่อยๆ ของกระแส

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แรงบนอนุภาคที่เคลื่อนที่ในสนามแม่เหล็กสถิต คือ

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

แรงเนื่องจากส่วนย่อยๆ ของประจุ คือ

$$d\vec{F} = dQ\vec{v} \times \vec{B}$$

แต่ความหนาแน่นกระแสในเทอมของความเร็วของความหนาแน่น ปริมาตรประจุ คือ

$$\vec{J} = \rho\vec{v}$$

และ

$$dQ = \rho dV$$

ดังนั้น

$$d\vec{F} = \rho dV \vec{v} \times \vec{B}$$

เนื่องจาก

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} dV$$

$$\vec{J} dV = \vec{K} dS = Id\vec{L}$$

ดังนั้น สมการลอเรนซ์ใช้กับความหนาแน่นกระแสในรูปแบบต่างๆ ได้เป็น

$$d\vec{F} = \vec{K} \times \vec{B} dS \quad (\text{เชิงผิว})$$

$$d\vec{F} = Id\vec{L} \times \vec{B} \quad (\text{เชิงเส้น})$$

ทำการอินทิเกรต จะได้

$$\vec{F} = \int_{vol} \vec{J} \times \vec{B} dV$$

$$\vec{F} = \int_S \vec{K} \times \vec{B} dS$$

$$\vec{F} = \oint Id\vec{L} \times \vec{B} = -I \oint \vec{B} \times d\vec{L} \quad (13)$$

สมการ (13) เมื่อเป็นตัวนำที่เป็นเส้นตรงในสนามแม่เหล็กเอกรูป

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

### 2.1.15 แรงระหว่างกระแสย่อย

สนามแม่เหล็กที่จุด 2 เนื่องจากส่วนย่อยของกระแสที่จุด 1 หาได้จากสูตร

$$d\vec{H}_2 = \frac{I_1 d\vec{L}_1 \times \hat{a}_{R_{12}}}{4\pi R^2}$$

สำหรับแรงบนกระแสส่วนย่อยๆ

$$d\vec{F} = Id\vec{L} \times \vec{B}$$

ถ้าให้  $\vec{B}$  เป็น  $d\vec{B}_2$  ดังนั้นแรงบน element 2 จะเป็น

$$d(d\vec{F}_2) = I_2 d\vec{L}_2 \times d\vec{B}_2$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

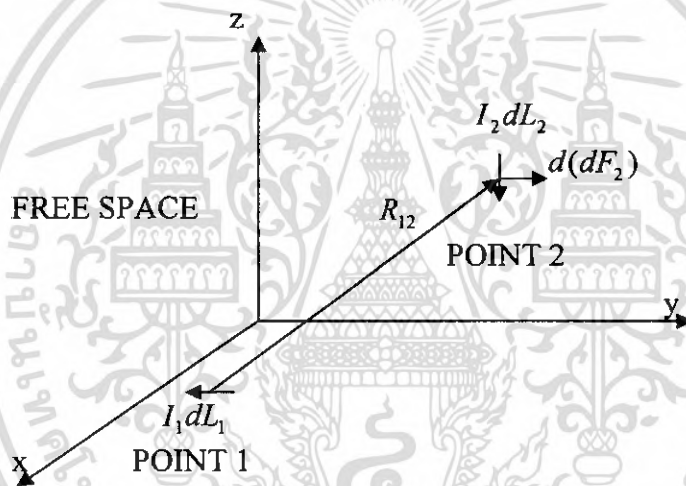
เนื่องจาก  $d\vec{B}_2 = \mu_0 d\vec{H}_2$  ดังนั้นแรงระหว่างส่วนย่อยๆ ของกระแส 2 อัน จะได้เป็น

$$d(d\vec{F}_2) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 d\vec{L}_2}{4\pi R^2} \times (d\vec{L}_1 \times \hat{a}_{R_{12}})$$

แรงรวมเมื่อคิดตลอดความยาวของเส้นลวดทั้งสอง หาได้โดยการอินทิเกรตสองครั้ง

$$\vec{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[ d\vec{L}_2 \times \oint \frac{d\vec{L}_1 \times \hat{a}_{R_{12}}}{R^2} \right]$$

$$\vec{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[ \frac{\hat{a}_R \times d\vec{L}_1}{R^2} \times d\vec{L}_2 \right]$$



รูปที่ 2.13 แสดงแรงระหว่างกระแสย่อย 2 อัน

### 2.1.16 แรงบิด

“แรงบิด” (torque) หรือ “โมเมนต์” ของแรงคือเวกเตอร์ ซึ่งขนาดของมันคือผลคูณของขนาดเวกเตอร์แรง (vector force), เวกเตอร์แขนของคาน (vector lever arm) และ sine ของมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองนี้ โดยมีทิศทางเป็นไปตามกฎมือขวา

$$\vec{T} = R F \sin \theta = \vec{R} \times \vec{F} \quad N \cdot m$$

สมมติว่าแรง  $\vec{F}_1$  และ  $\vec{F}_2$  กับแขนของคาน  $\vec{R}_1$  และ  $\vec{R}_2$  ถูก applied เข้ากับวัตถุที่มีรูปร่างคงตัว จะได้แรงบิดเป็น

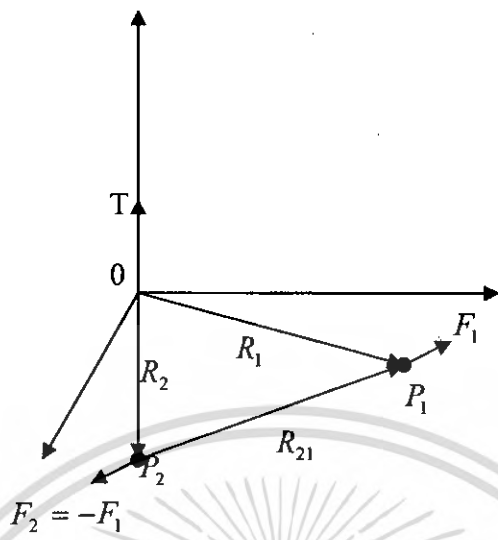
$$\vec{T} = \vec{R}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{R}_2 \times \vec{F}_2$$

ถ้า

$$\text{ถ้า } \vec{F}_2 = -\vec{F}_1 \text{ หรือ } \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

ดังนั้น

$$\vec{T} = (\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{R}_{21} \times \vec{F}_1$$

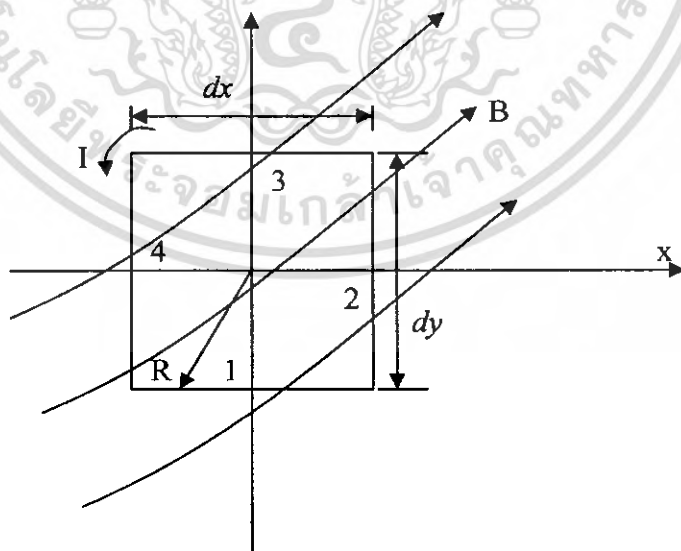


รูปที่ 2.14 เวกเตอร์แรง กระทำกับเวกเตอร์แขนของคานทำให้เกิดแรงบิด

พิจารณาแรงบิดที่กระทำต่อบ่วงกระแสในสนามแม่เหล็ก  $\vec{B}$  บ่วงกระแสวางอยู่ในระนาบ xy ด้านข้างขนานกับแกน x และ y คือ dx และ dy เมื่อบ่วงกระแสมีขนาดเล็กมากค่าของ  $\vec{B}$  ที่จุดใดๆ ในบริเวณบ่วง และที่ขอบจะมีค่าใกล้เคียงกับความหนาแน่นฟลักซ์  $B_0$  ที่จุดศูนย์กลางของบ่วงกระแส และเราเลือกจุด origin เป็นจุดหลักในการหาแขนของคาน เวกเตอร์แรงบนด้าน 1 คือ

$$d\vec{F}_1 = I dx \hat{a}_x \times \vec{B}$$

$$d\vec{F}_1 = I dx (B_{oy} \hat{a}_z - B_{oz} \hat{a}_y)$$



รูปที่ 2.15 แสดงแรงบิดที่กระทำต่อบ่วงกระแส

ที่ด้าน 1 ของบ่วงกระแสนี้ แขนของคานเฉลี่ย  $\bar{R}$  ขยายออกจากจุดเริ่มแกนถึงจุดกึ่งกลางของ  
 ด้าน  $\bar{R}_1 = -\frac{1}{2} dy \hat{a}_y$  และ Contribution torque รวมคือ

$$\begin{aligned} d\bar{T}_1 &= \bar{R}_1 \times d\bar{F}_1 \\ d\bar{T}_1 &= -\frac{1}{2} dy \hat{a}_y \times I dx (B_{oy} \hat{a}_z - B_{oz} \hat{a}_y) \\ d\bar{T}_1 &= -\frac{1}{2} dx dy I B_{oy} \hat{a}_x \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันด้าน 3 ก็หาได้เท่ากัน คือ

$$\begin{aligned} d\bar{T}_3 &= d\bar{T}_1 \\ d\bar{T}_1 + d\bar{T}_3 &= -dx dy I B_{oy} \hat{a}_x \\ d\bar{T}_2 + d\bar{T}_4 &= dx dy I B_{ox} \hat{a}_y \end{aligned}$$

และ  
 แรงบิดรวม

$$\begin{aligned} d\bar{T} &= I dx dy (B_{ox} \hat{a}_y - B_{oy} \hat{a}_x) \\ d\bar{T} &= I dx dy (\hat{a}_z \times \bar{B}_o) \end{aligned}$$

หรือ

$$d\bar{T} = I d\bar{S} \times \bar{B} \quad (14)$$

แรงบิดค่าน้อยๆ บนไดโพลไฟฟ้าในสนามไฟฟ้า  $\bar{E}$  คือ

$$d\bar{T} = d\bar{p} \times \bar{E}$$

ผลคูณของวงรอบของกระแส และพื้นที่เวกเตอร์ของบ่วงกระแสคือ ไดโพล โมเมนต์แม่เหล็ก

" $d\bar{m}$ "

$$d\bar{m} = I d\bar{S}$$

ดังนั้น

$$d\bar{T} = d\bar{m} \times \bar{B} \quad (15)$$

สมการ (14), (15) นี้ให้ได้กับบ่วงเล็กๆ ที่มีรูปร่างใดๆ ก็ได้ไม่เฉพาะแต่บ่วงรูปสี่เหลี่ยม  
 แรงบิดบน "planar loop" ของขนาดใดๆ ในสนามแม่เหล็กเอกรูป กำหนดโดย

$$\bar{T} = I \bar{S} \times \bar{B} = \bar{m} \times \bar{B}$$

### 2.1.17 สารแม่เหล็ก

โมเมนต์ของสารจะมีนิวเคลียสที่จุดศูนย์กลาง มีศักย์เป็นบวก มีอิเล็กตรอนวงโคจรอยู่รอบ  
 นิวเคลียสในวงโคจรต่างๆ ทั้งนิวเคลียสและอิเล็กตรอน ก็มีการหมุนรอบตัวเองด้วย การเคลื่อนที่ของ  
 อิเล็กตรอนในวงโคจรทำให้เกิดมีกระแสซึ่งไหลวนอยู่รอบพื้นที่เล็กๆ ซึ่งจะเกิดแรงบิดกระทำเมื่อมัน  
 อยู่ในสนามแม่เหล็ก แรงบิดนี้จะพยายามทำให้สนามแม่เหล็กที่เกิดจากอิเล็กตรอนเบนเข้าหา

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา

สนามแม่เหล็กภายนอก ซึ่งอาจสรุปได้ว่า วงโคจรของอิเล็กตรอนทุกตัวในเนื้อของสารจะเบนทิศทาง ในลักษณะที่เพิ่มสนามแม่เหล็กที่เกิดจากอิเล็กตรอนรวมกับสนามแม่เหล็กภายนอก เป็นผลให้ สนามแม่เหล็กผลลัพธ์ที่จุดใดๆ ในเนื้อสารนั้นมีค่ามากกว่าสนามแม่เหล็กภายนอก

นอกจากนี้อิเล็กตรอนที่หมุนรอบตัวเอง หรือนิวเคลียสที่หมุนรอบตัวเอง ถือว่ามีการเคลื่อนที่ ของประจุ เมื่อมีการเคลื่อนที่ของประจุก็มีกระแสเกิดขึ้น หรือมีโมเมนต์แม่เหล็กหมุน แต่โมเมนต์ แม่เหล็กนี้มีค่าน้อยมาก

เราสามารถแยกประเภทของสารแม่เหล็กออกได้เป็น 6 ชนิด คือ

### 1. สาร ไดอะแมกเนติก

สนามแม่เหล็กรวมที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในแต่ละวงโคจรมีค่าเกือบเป็นศูนย์ นอกจากนี้โมเมนต์สนามแม่เหล็กที่เกิดก็มีค่าน้อยมากเช่นเดียวกัน เมื่อมีสนามแม่เหล็กภายนอกผ่าน เข้ามา ก็อาจจะไม่ทำให้เกิดกำลังบิดของแต่ละอะตอมได้ ดังนั้นวัสดุจำพวกนี้จึงเป็นแม่เหล็กได้ยาก ตัวอย่างวัสดุจำพวกนี้ได้แก่ บิสมาท ไฮโดรเจน ฮีเลียม พวงก้าซเฉื่อยทั้งหลายนอกจากนี้ก็มีวัสดุอื่นๆ คือ ทองแดง ซิลิกอน เซอร์มาเนียม แกรไฟต์ และกำมะถัน

### 2. พาราแมกเนติก

สนามแม่เหล็กซึ่งเกิดจากการเคลื่อนที่ของอะตอมมีค่ามากกว่าศูนย์ไม่มากนัก อย่างไรก็ตาม ถ้ามีสนามแม่เหล็กจากภายนอกผ่านเข้ามา อาจทำให้เกิดกำลังบิด เกิดสนามแม่เหล็กรวมเพิ่มขึ้น นั่น คือจะมีโมเมนต์สนามแม่เหล็ก ดังนั้นมันจึงสามารถเป็นแม่เหล็กได้ วัสดุจำพวกพาราแมกเนติก ได้แก่ โพแทสเซียม ทังสแตน แมงกานีส โคโรเมียม นอกจากนี้ก็มีพวกวัสดุที่หายาก (Rare earth) เช่น เออร์เบียมคลอไรด์ นีโอดีเนียมออกไซด์ ฯลฯ เป็นต้น

วัสดุอีกสี่ประเภทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นวัสดุที่มีสนามแม่เหล็กที่เกิดจากอะตอมของมันสูง เกิดโมเมนต์สนามแม่เหล็กสูงอีกด้วย

### 3. เฟอร์โรแมกเนติก

เป็นวัสดุที่มีจำนวนอะตอมหนาแน่น แต่ละอะตอม ทำให้เกิด โมเมนต์สนามแม่เหล็กสูง นอกจากนี้สนามแม่เหล็กอันเกิดจาก อะตอมของมันก็มีทิศลี่ยตามกันเป็นส่วนใหญ่ เมื่อมี สนามแม่เหล็กภายนอกเข้ามาจึงช่วยเสริมให้สนามแม่เหล็กทั้งหลายไปในทางเดียวกันมากขึ้น ถึงแม้ว่าจะเอาสนามแม่เหล็กภายนอกออกไปแล้ว ส่วนใหญ่ยังมีสนามแม่เหล็กที่ไปทางเดียวกัน หลงเหลืออยู่ จึงทำให้วัสดุพวกนี้เป็นแม่เหล็กถาวรได้ วัสดุจำพวกเฟอร์โรแมกเนติก ได้แก่ เหล็ก โคบอลต์ นิกเกิล พวกโลหะผสม เช่น อัลนิโก เป็นส่วนผสมของ อลูมิเนียม + นิกเกิล + โคบอลต์ + ทองแดงเล็กน้อย เป็นต้น นอกจากนี้ก็มีวัสดุที่หายาก ซึ่งสามารถเป็นวัสดุพวกเฟอร์โรแมกเนติกที่ อุณหภูมิต่ำ อาทิ กาโดลิเนียม ไตตะโปรเซียม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4. แอนติเฟอร์โรแมกเนติก

เนื่องจากว่าแรงที่เกิดจากอะตอมหนึ่งไปหักล้างแรงที่เกิดจากอะตอมหนึ่ง ทำให้สนามแม่เหล็กที่เกิดจากอะตอมทั้งหลายถูกหักล้างกันเป็นศูนย์ ดังนั้น โมเมนต์สนามแม่เหล็กจึงเป็นศูนย์ไปด้วย ถึงแม้จะมีสนามแม่เหล็กภายนอกเข้ามา ก็ยากที่จะบังคับให้สนามแม่เหล็กของอะตอมเหล่านั้นไปในทางเดียวกันได้ ดังนั้นวัสดุจำพวกแอนติเฟอร์โรแมกเนติก ได้แก่ สารพวกออกไซด์ต่างๆ เช่น นิกเกิลออกไซด์ พวกซัลไฟด์ คือ เฟอร์รัสซัลไฟด์ เป็นต้นนอกจากนี้ก็มีพวกคลอไรด์บางชนิด เช่น โคบอลต์คลอไรด์

#### 5. เฟอร์ริแมกเนติก

เป็นวัสดุที่มีจำนวนอะตอมหนาแน่น แต่ไดโพล โมเมนต์ที่เกิดจากอะตอมทั้งหลายมีทิศทางไม่ไปในทางเดียวกันหมด นอกจากนี้ผลรวมสนามแม่เหล็กที่เกิดจากสนามแม่เหล็กของแต่ละอะตอมที่เคลื่อนไหว ยังต่ำกว่าสนามแม่เหล็กของวัสดุจำพวกเฟอร์โรแมกเนติกดังกล่าวมาแล้ว อย่างไรก็ตามเมื่อมีสนามภายนอกเข้ามาเกี่ยวข้องทำให้ทิศทางของสนามแม่เหล็กส่วนใหญ่ไปในทิศทางเดียวกันมากขึ้น นั่นก็หมายความว่ามันสามารถเป็นแม่เหล็กได้ง่ายเหมือนกัน วัสดุจำพวกเฟอร์ริแมกเนติก เป็นวัสดุประเภทเฟอร์ไรต์ ที่มีสภาพความเป็นสื่อไฟฟ้า (Conductivity) ต่ำกว่าวัสดุจำพวกเฟอร์โรแมกเนติก ดังนั้นวัสดุเฟอร์ริแมกเนติกทั้งหลายจึงมีความต้านทานสูงกว่า ด้วยเหตุผลนี้เองจึงนิยมใช้วัสดุจำพวกเฟอร์ริแมกเนติกทำแกนหม้อแปลงไฟฟ้ากระแสสลับเพราะทำให้กระแสเอ็ดดี ลดลง ตัวอย่างวัสดุจำพวกเฟอร์ริแมกเนติก ได้แก่ เหล็กออกไซด์ นิกเกิลซิงค์เฟอร์ไรต์ และนิเกิลเฟอร์ไรต์ เป็นต้น

#### 6. ซูเปอร์พาราแมกเนติก

เป็นวัสดุจำพวกเฟอร์โรแมกเนติกที่วางอยู่ หรืออาจติดแน่นอยู่บนผิวของวัสดุจำพวก นอกเฟอร์โรแมกเนติก เช่นพลาสติก เป็นต้น วัสดุจำพวกซูเปอร์พาราแมกเนติก ได้แก่ แมกเนติกเทปต่างๆเช่น แมกเนติกเทปที่ใช้เป็นส่วนความจำภายนอกของเครื่องจักรสมองกล เช่น วีดีโอเทป เป็นต้น

### 2.1.18 แมกเนไตเซชัน และเฟอร์มิยลิตี

โดยทั่วไปแล้ว กระแสเกิดจากการเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนอิสระ ดังกฎวงจรของแอมแปร์

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

แต่อย่างไรก็ตาม กระแสอาจเกิดขึ้นจากการเคลื่อนที่ของประจุผูกพัน (Bound charge) เช่น การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนเป็นวงรอบนิวเคลียส การหมุนรอบตัวเองของอิเล็กตรอน และการหมุนรอบตัวเองของนิวเคลียส กระแสที่เกิดจากประจุผูกพัน เรียกว่า กระแสผูกพัน (Bound current) หรือ Amperian current สนามแม่เหล็กที่เกิดจากกระแสผูกพัน นี้เรียกว่า แมกเนไตเซชัน (magnetization  $\vec{M}$ )

จากคำจำกัดความของไดโพลโมเมนต์ " $dm$ " ถ้าให้  $I$  เป็นกระแสที่ไหลวนรอบพื้นที่เล็กๆ  $d\vec{S}$  เราจะได้

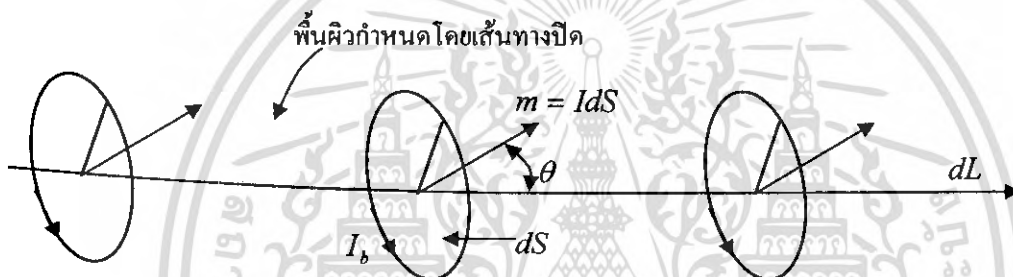
$$d\vec{m} = I d\vec{S}$$

ถ้ามีไดโพล  $n$  ตัวต่อหน่วยปริมาตร ดังนั้น

$$\vec{M} = n I d\vec{S}$$

ถ้าไดโพลแต่ละตัวมีค่าแตกต่างกัน สูตรทั่วไปเขียนเป็น

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n\Delta V} I_i d\vec{S}_i$$



รูปที่ 2.16 ไดโพลโมเมนต์  $\vec{m}$  ทำมุม  $\theta$  กับ  $d\vec{L}$  เมื่อพิจารณา ปริมาตรรูปทรงกระบอก ซึ่งมีพื้นที่หน้าตัดล้อมรอบไดโพลได้พอดี และมีความยาว  $d\vec{L}$

$$\text{พื้นที่ที่ตั้งฉากกับ } d\vec{L} = dS \cos \theta$$

$$\text{ปริมาตรตลอดความยาว } dL = (dS \cos \theta)(dL) = d\vec{S} \cdot d\vec{L}$$

ถ้ามี  $n$  ไดโพลต่อหน่วยปริมาตร ดังนั้นกระแสผูกพัน ที่ถูกล้อมโดยเส้นทางปิดในช่วง  $d\vec{L}$

คือ

$$dI_b = (\text{กระแส } I \text{ ของไดโพลแต่ละตัว})(\text{จำนวนไดโพลในปริมาตร})$$

$$dI_b = (I)(nd\vec{S} \cdot d\vec{L}) = n I d\vec{S} \cdot d\vec{L}$$

$$dI_b = \vec{M} \cdot d\vec{L}$$

เมื่อคิดตลอด contour ปิดทั้งหมด

$$I_b = \oint \vec{M} \cdot d\vec{L} \quad (16)$$

สมการ (16) อาจเขียนในเทอมของความหนาแน่นกระแสผูกพันได้

$$I_b = \oint \vec{M} \cdot d\vec{L} = \int \vec{J}_b \cdot d\vec{S}$$

ใช้ทฤษฎีของสโตก

$$\int (\nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} = \int \vec{J}_b \cdot d\vec{S}$$

เนื่องจากสมการนี้เป็นจริงสำหรับพื้นผิว  $dS$  ใดๆ ดังนั้น

$$\nabla \times \bar{M} = \bar{J}_b$$

เพราะฉะนั้นประจุผูกพัน จึงเป็นตัวสร้างสนามแมกเนติกเวกเตอร์  $\bar{M}$  เหมือนกับการเคลื่อนที่ของประจุอิสระที่ทำให้เกิดสนามแม่เหล็ก  $\bar{H}$  ขึ้นในสุญญากาศ

จากผลอันนี้ ความสัมพันธ์ของ  $\bar{B}$ ,  $\bar{H}$  และ  $\bar{M}$  แสดงไว้ดังนี้

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_T \quad (\text{Free Space})$$

ซึ่ง  $\bar{J}_T$  ในที่นี้ต้องแสดงถึงความหนาแน่นกระแสของแหล่งจ่ายทั้งหมด (Current density source) คือทั้งที่เกิดจาก ประจุอิสระ และ ประจุผูกพัน

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_f + \bar{J}_b \quad (\text{Free Space})$$

ในเทอมของ  $\bar{B}$  เขียนได้เป็น

$$\nabla \times \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{J}_f + \bar{J}_b$$

$$\nabla \times \frac{\bar{B}}{\mu_0} = \bar{J}_f + (\nabla \times \bar{M})$$

$$\nabla \times \left( \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right) = \bar{J}_f$$

หรือ

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}_f \quad (17)$$

ซึ่งในที่นี้  $\bar{H}$  ต้องหมายถึง  $\left( \frac{\bar{B}}{\mu_0} - \bar{M} \right)$  หรือ

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})$$

ดังนั้นสมการ (17) จึงเป็นสมการของแมกซ์เวลล์ ที่ใช้สำหรับสนามแม่เหล็กสถิต เมื่อมีสารแม่เหล็กอยู่ด้วย

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $\bar{M}$  และ  $\bar{H}$  สำหรับ Linear isotropic medium เขียนได้ดังนี้

$$\bar{M} = x_m \bar{H}$$

เมื่อ  $x_m$  เป็นค่าความซึมซาบทางแม่เหล็ก (Magnetic Susceptibility)

ดังนั้น

$$\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + x_m \bar{H})$$

$$\bar{B} = \mu_0 \mu_R \bar{H}$$

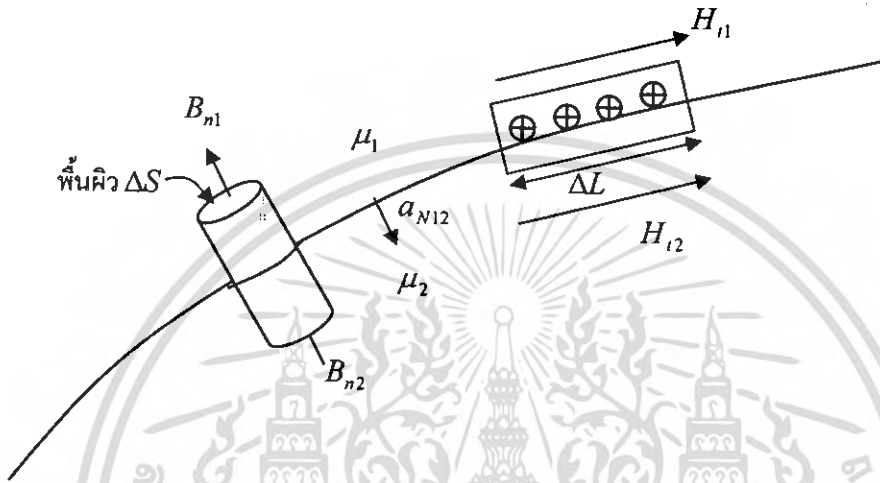
$$\bar{B} = \mu \bar{H}$$

เมื่อ  $\mu$  คือค่าเพอร์เมียบิลิตี

$\mu_0$  คือค่าเพอร์เมียบิลิตีของ Free Space มีค่าเท่ากับ  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$

$\mu_R$  คือค่าเพอร์เมียบิลิตีเฉพาะวัสดุ เมื่อ  $\mu_R = 1 + x_m$

### 2.1.19 เงื่อนไขขอบเขตสำหรับสนามแม่เหล็ก



รูปที่ 2.17 แสดงรอยต่อในวัสดุทำให้เกิดเงื่อนไขขอบเขต

ตามรูปแสดงรอยต่อระหว่างสารแม่เหล็กสองชนิด ซึ่งมีเพอร์เมียบิลิตีเป็น  $\mu_1$  และ  $\mu_2$  เงื่อนไขขอบเขตบนส่วนที่ดั่ง กำหนดโดยการตัดส่วนผิวหน้าของพื้นผิวเกาส์เขียนรูปทรงระบอบแล้วใช้กฎของเกาส์กับสนามแม่เหล็ก

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

เราได้ว่า

$$B_{n1} \Delta S - B_{n2} \Delta S = 0$$

จะได้

$$B_{n1} = B_{n2}$$

และ

$$H_{n2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างส่วนตั้งฉากของ  $\vec{M}$  จะมีค่าแน่นอนค่าหนึ่งเมื่อรู้ค่า  $\vec{B}$  และ  $\vec{H}$  ซึ่งผลอันนี้จะเขียนได้เป็น

$$M_{n2} = \frac{x_{m2} \mu_1}{x_{m1} \mu_2} M_{n1}$$

ใช้กฎวงจรของแอมแปร์กับเส้นวงปิดเล็กๆ ในระนาบที่ตั้งฉากกับพื้นที่ผิวขอบเขต

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{L} = I$$

$$H_{t1} \Delta L - H_{t2} \Delta L = K \Delta L$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่ง  $K$  คือส่วนของกระแสเชิงผิวที่ตั้งฉากกับระนาบของเส้นวงปิด ดังนั้น

$$H_{r1} - H_{r2} = K$$

$$\frac{B_{r1}}{\mu_1} - \frac{B_{r2}}{\mu_2} = K$$

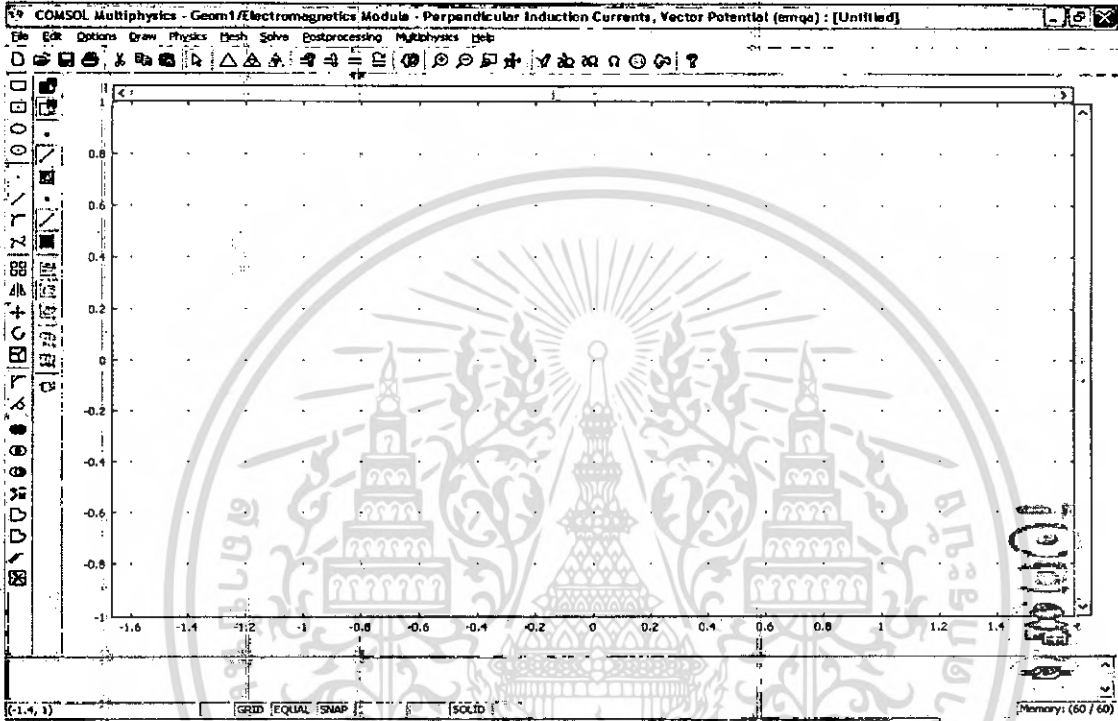
ดังนั้น เงื่อนไขขอบเขตบนส่วนสัมผัสของแมกเนไตเซชัน คือ

$$M_{r2} = \frac{x_{m2}}{x_{m1}} M_{r1} - x_{m2} K$$

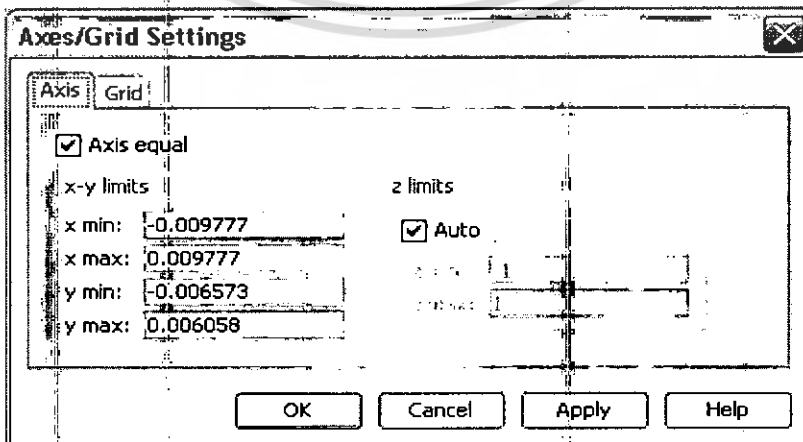


## 2.2 การใช้งานโปรแกรม COMSOL Multi physics

โปรแกรม COMSOL Multi physics เป็นโปรแกรมที่ใช้ในการ Simulation ด้วยหลักการของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ (Finite Element Method) จำกัดขอบเขตของส่วนที่จะทดลองให้เป็น Element บ่อยๆ เพื่อใช้วิเคราะห์ ตามคุณสมบัติที่เราตั้งค่าไว้ของวัสดุอุปกรณ์ตัวนั้นๆ



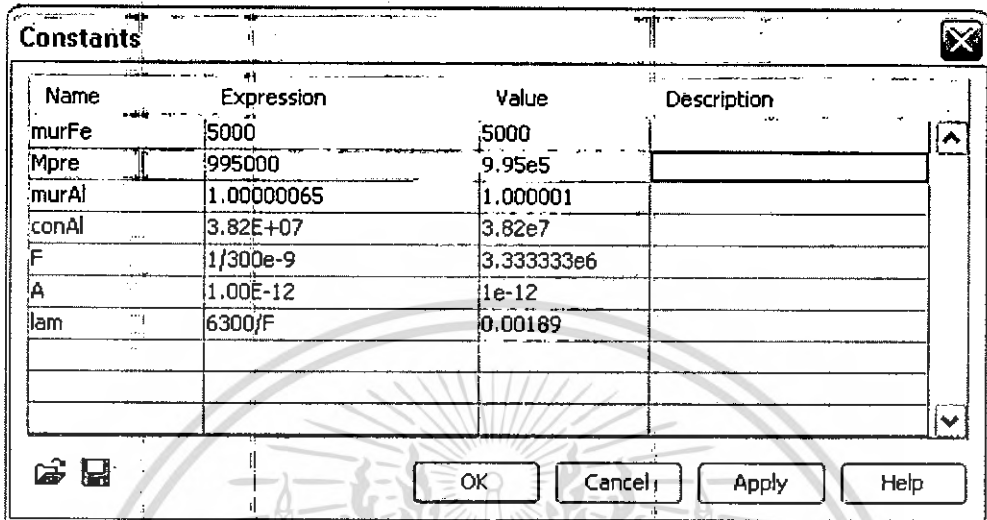
รูปที่ 2.18 แสดงหน้าต่างของ โปรแกรม ฟังก์ชันการทำงานมีที่ใช้กัน โดยทั่วไปหลักๆ ดังนี้ ในส่วนของ Options จะมีที่ใช้ร่วมกันอยู่หลักก็คือ Axis/Grid จะใช้สำหรับการตั้งค่าการแสดงผลที่จอภาพ เพื่อให้มีขนาดที่ใหเห็น อุปกรณ์ที่จะวาดลงไป ได้ถนัด และใช้กำหนดสเกลของความห่างจุด



รูปที่ 2.19 แสดงหน้าต่างของการตั้งค่า Axe และ Grid

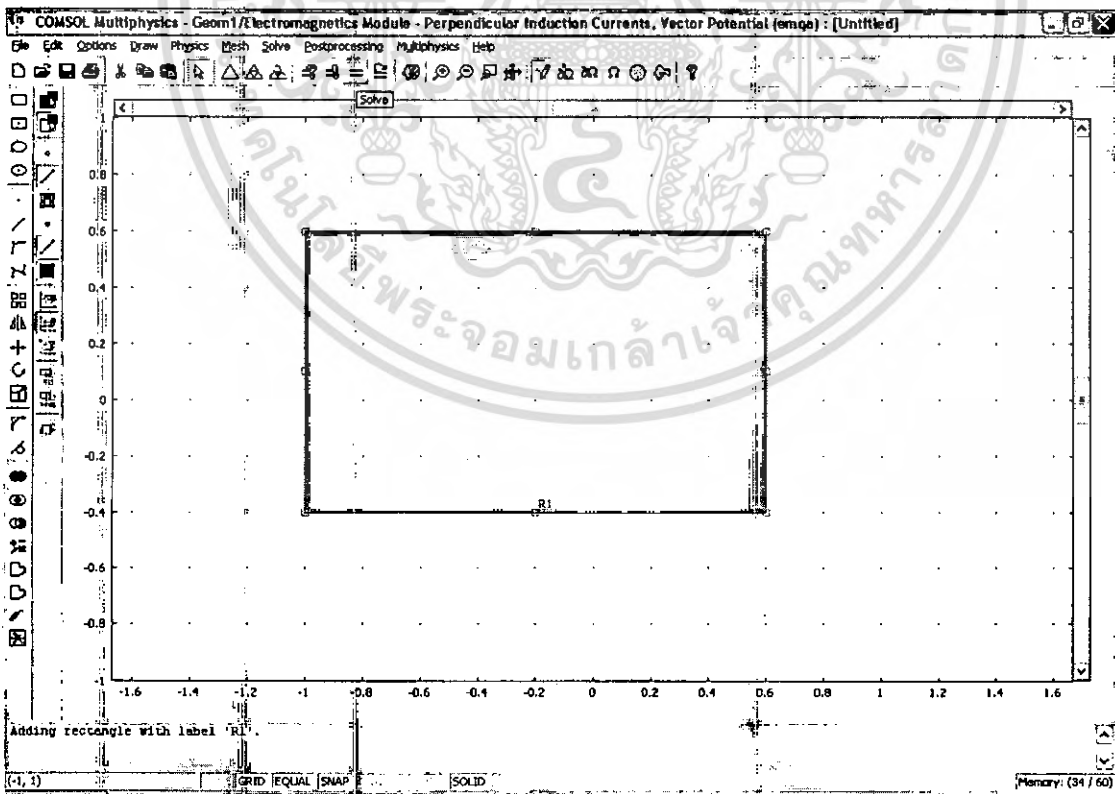
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Constants ใช้สำหรับกำหนดค่าคงที่ต่าง โดย ใช้ตัวแปร และใส่ค่าของตัวแปรนั้น เป็นจำนวนตัวเลขที่ต้องการ



รูปที่ 2.20 แสดงหน้าต่างของตั้งค่าคงที่

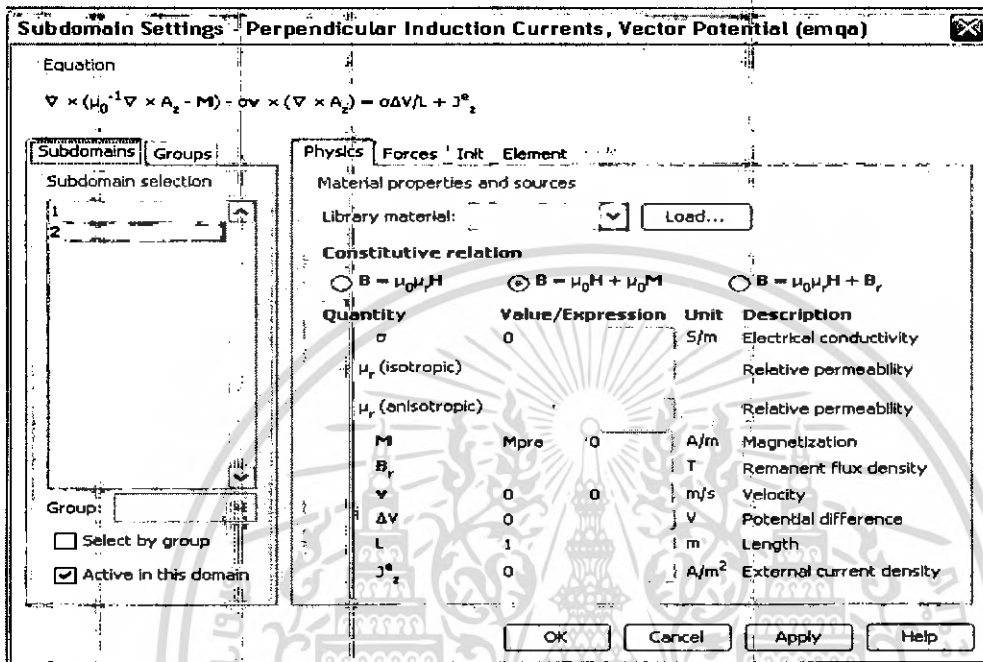
ในส่วนของ Draw จะมีเครื่องมือให้เลือกใช้มากมาย ไว้สำหรับการวาดตัวอุปกรณ์ที่จะทดลองนั้นๆลงไป



รูปที่ 2.21 แสดงการวาดรูปสี่เหลี่ยมลงในโปรแกรม

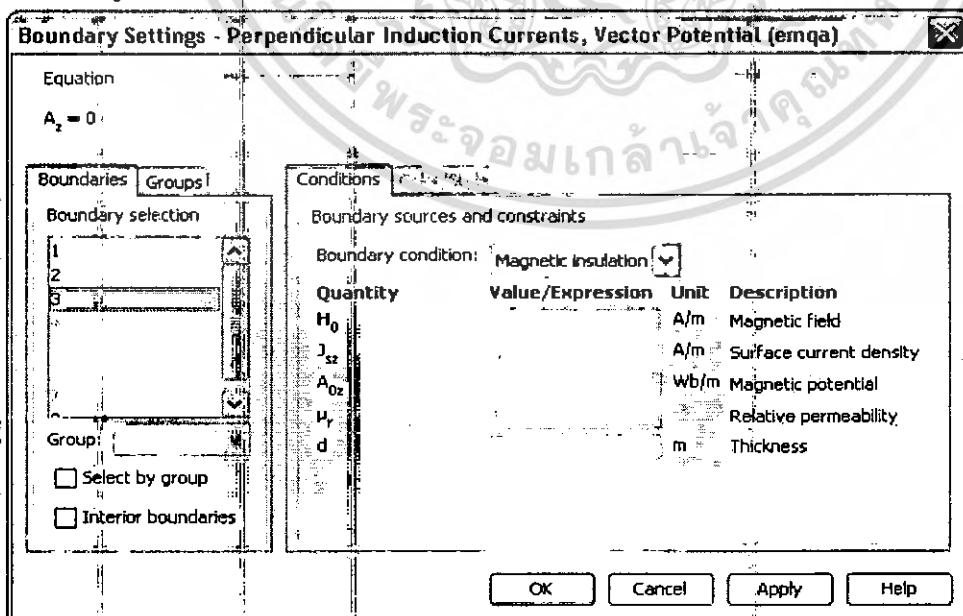
ส่วนต่อไปเป็นส่วนของPhysics ไว้ใช้สำหรับกำหนดตั้งค่าต่างๆของตัวอุปกรณ์ที่จะทดลองจะมีที่ใช้งานบ่อยๆอยู่ 2 ตัวคือ

Subdomain Setting มีไว้สำหรับตั้งค่าของวัสดุตัวลวดทำชิ้น



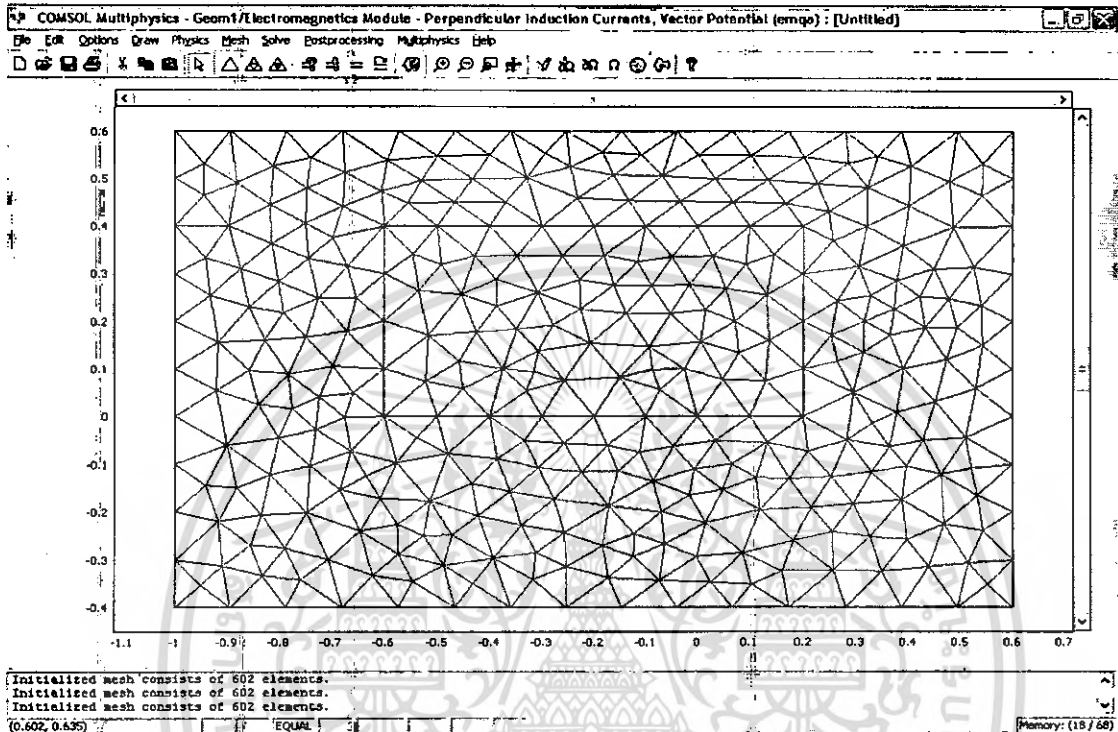
รูปที่ 2.22 แสดงการตั้งค่าในส่วนของ Subdomain

Boundary Setting มีไว้สำหรับตั้งค่าของส่วนย่อยของวัสดุชิ้นนั้นกล่าวคือ หากเป็น 2 มิติ จะเป็นการกำหนดค่าที่เห็นแก่เป็นเส้นของระนาบ Subdomain และหากเป็น 3 มิติจะเป็นด้านๆ หนึ่งของรูปทรงSubdomain



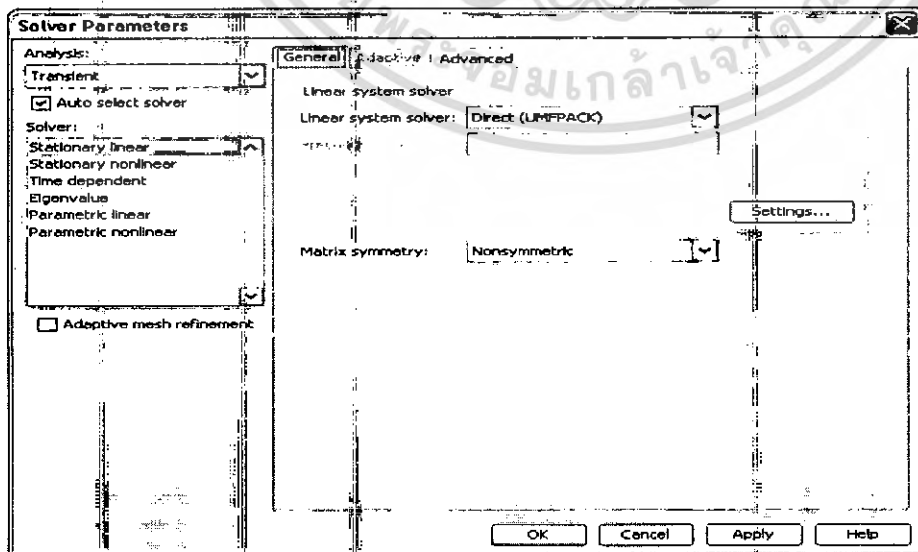
รูปที่ 2.23 แสดงการตั้งค่าในส่วนของ Boundary

ส่วนต่อมาก็คือส่วนของ Mesh ไว้สำหรับเปลี่ยนรูปร่างของอุปกรณ์ให้เป็น Element ช่อกๆ โดยกด Initialize Mesh เพื่อให้รูปร่างที่ตั้งแล้วเปลี่ยนเป็น Element หากต้องการให้ช่อกลงไปอีกเพื่อความละเอียดที่มากขึ้นให้กด Refine Mesh จะทำให้จำนวน Element เพิ่มขึ้น

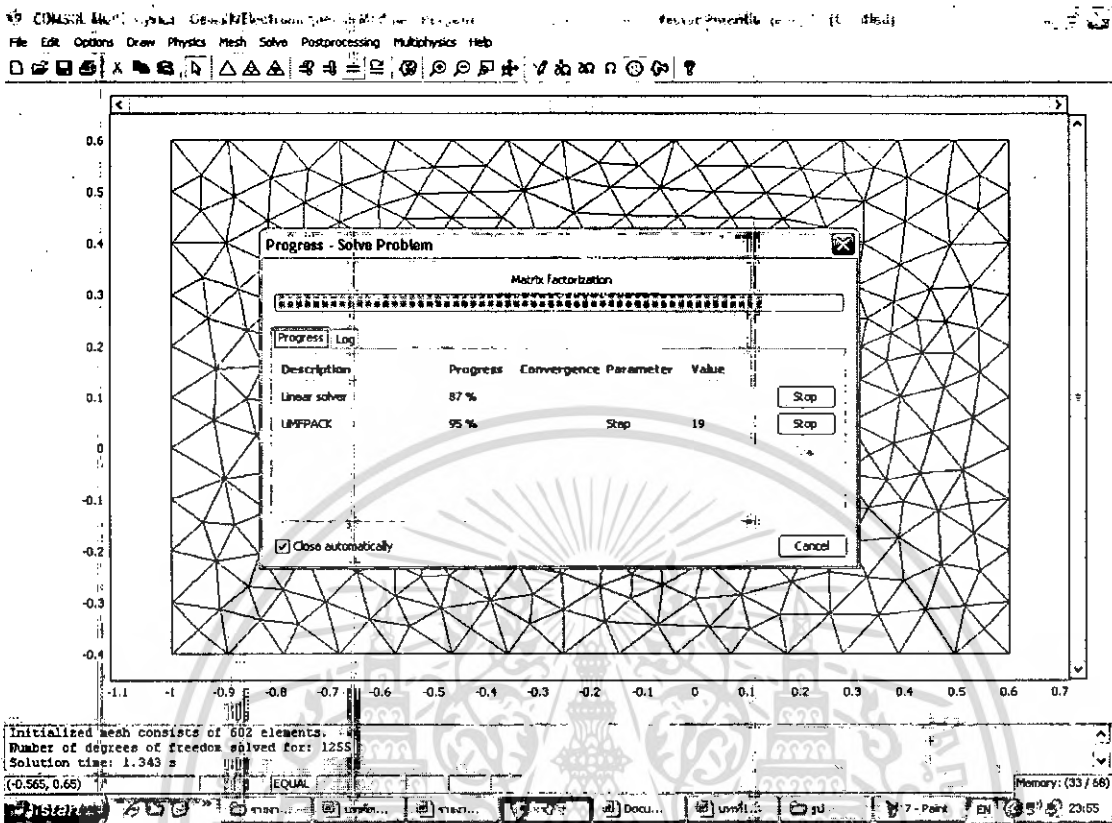


รูปที่ 2.24 แสดง Element ภายในเงื่อนไขขอบเขตการ Simulation

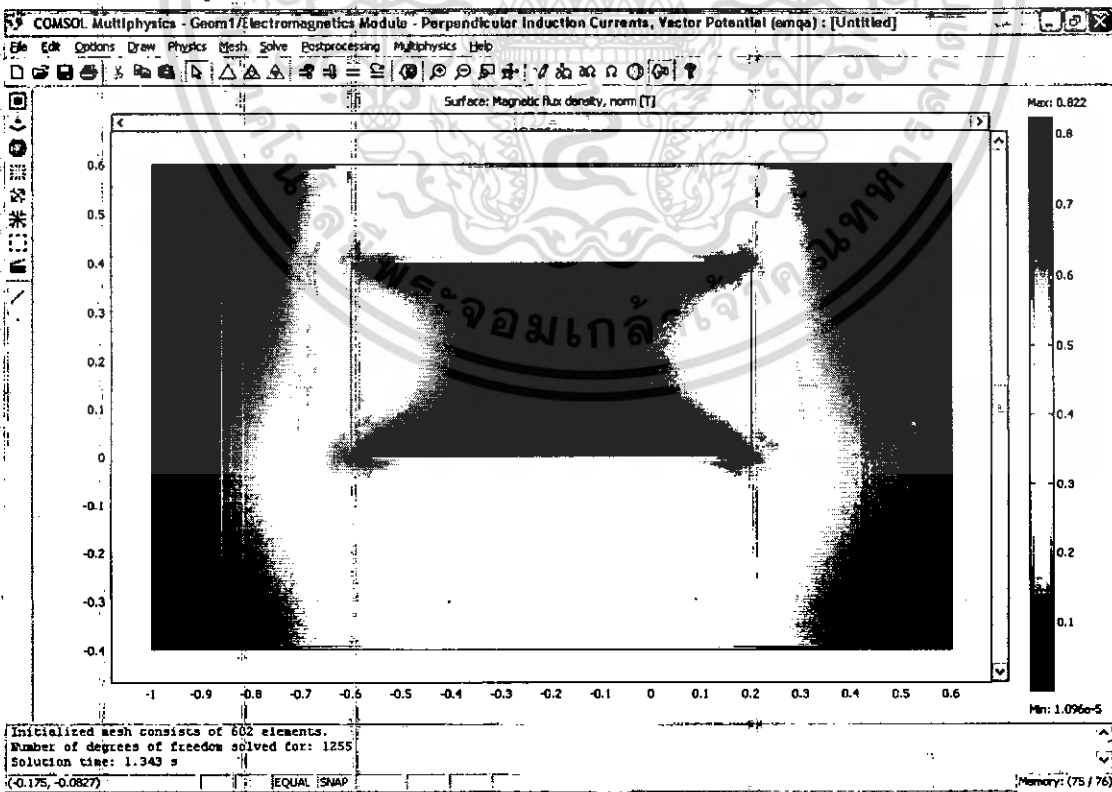
ในส่วนของการ Solve เป็นการทำให้อุปกรณ์นั้นเป็นไปตามค่าที่เรากำหนดไว้จะทำให้กระบวนการเป็นตามที่เรากำหนดค่าให้ แล้วจะได้ผลลัพธ์ของค่าที่เรากำหนดทำได้โดยการเลือก Solve Problem และหากจะต้องการทำการ Solve ในรูปแบบอื่นให้เข้าไปตั้งค่าที่ Solve Parameters



รูปที่ 2.25 แสดงหน้าต่างของส่วน Solver สำหรับการประมวลผล



รูปที่ 2.26 แสดงโปรแกรมขณะทำการ Solve



รูปที่ 2.27 แสดงโปรแกรมหลังจากทำการ Solve เสร็จสิ้น

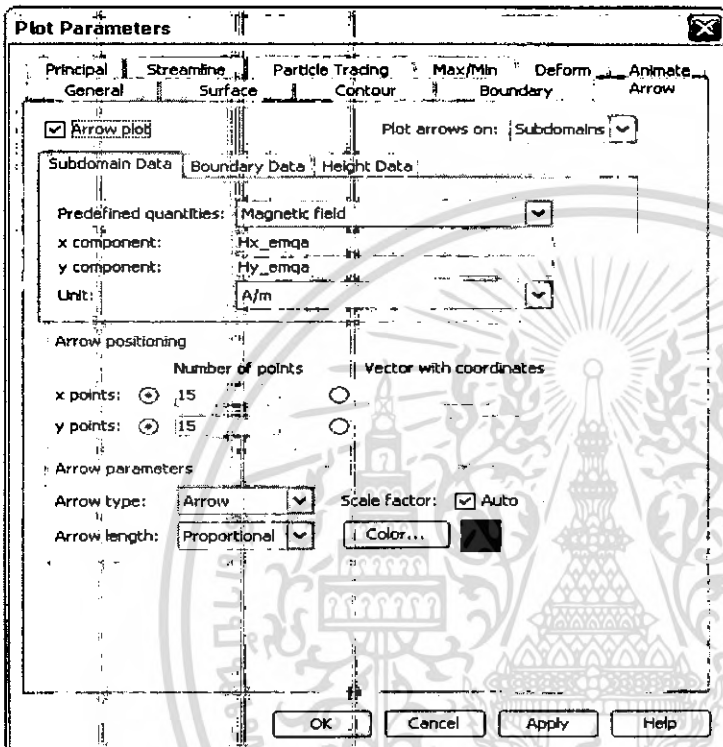
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Post Processing เป็นส่วนที่ใช้หลังการประมวลผลมาแล้ว และได้ผลลัพธ์ออกมาแล้ว

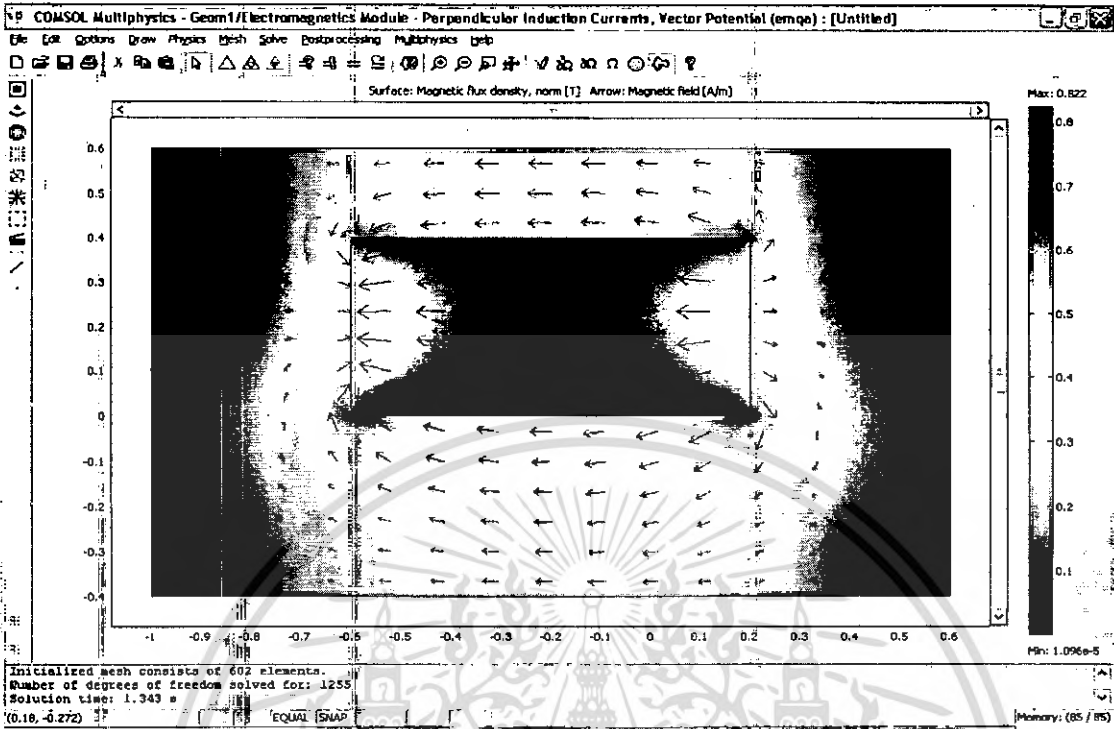
ได้แก่

Plot parameters เป็นการกำหนดพารามิเตอร์ ที่จะให้แสดงผล และรูปแบบที่จะ

แสดงผล

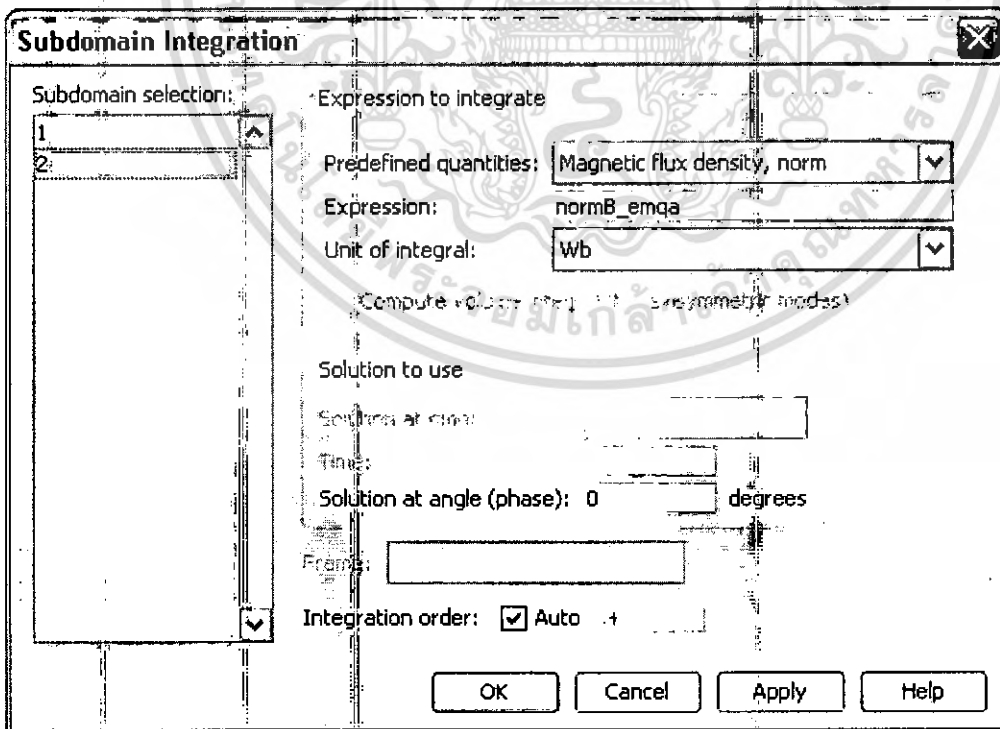


รูปที่ 2.28 แสดงหน้าต่างของส่วน Plot Parameters



รูปที่ 2.29 แสดงโมเดลหลังจากได้ทำการกำหนด Parameter ที่แสดงใหม่

Integration ทั้ง Boundary และ Subdomain ต่างก็เป็นการ Integrate เพื่อเอาค่าที่ได้จากส่วนที่เลือก และพารามิเตอร์ที่ต้องการ



รูปที่ 2.30 แสดงหน้าต่างในส่วนของการ Integration เพื่อหาค่า Parameters ในส่วนของ Subdomain ที่ต้องการ

### บทที่ 3

#### การออกแบบ

สำหรับหลักการของ Electromagnetic Acoustic Transducer ซึ่งเป็นเซนเซอร์ที่ใช้ในการ Simulation โดยใช้ศึกษาโปรแกรม COMSOL Multi physics นั้นมีดังนี้

ตัวที่ใช้ในการ Simulation นี้เป็นเครื่องวัดระบบอัลตราโซนิก ซึ่งจะมีหลักการคือ ตัววัดนี้จะ มีแม่เหล็กสองตัว ซึ่งมีไว้เพื่อใช้สำหรับปล่อยค่าสนามแม่เหล็กออกมาโดยรอบ โดยกำหนดค่าของ แมกเนไตเซชันของตัวแม่เหล็กไว้ที่  $995 \text{ kA/m}$  โดยทั้งสองตัวจะมีขั้วที่ตั้งไว้ต่างทิศหากัน โดย ตั้งค่าไว้ที่แกน  $y$  และทั้งตัวมีขนาด  $3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$  โดยจะให้ค่า ความหนาแน่นของสนามแม่เหล็ก สูงสุดถึง  $0.74$  เทสลา

ซึ่งจะไปส่งกับโลหะอลูมิเนียมที่ได้ตั้งให้ค่าระยะหนึ่งของอลูมิเนียมมีค่าความเร็วของ ประจุตามแนวแกน  $y$  ไว้ โดยมีค่าเป็นลักษณะของคลื่นรูปไซน์ (sine) และตั้งค่าไว้ที่

$$\vec{v}_y = 2\pi f A \cos(\omega t + ky) \quad (18)$$

โดย  $A$  เป็นแอมพลิจูดมีค่าเท่ากับ  $1 \text{ pm}$

$f$  เป็นความถี่มีค่าเท่ากับ  $1 \text{ MHz}$

ซึ่งค่าของความเร็วประจุตามแนวแกน  $y$  นี้มาจาก การจำลองรูปแบบการเคลื่อนที่แพร่ของ คลื่น Acoustic wave โดยให้การแพร่มีทิศทางไปทางแนวแกน  $y$  เท่านั้น และมีสมการการเคลื่อนที่ การแพร่เป็น

$$\vec{d}_y = A \sin(\omega t + ky)$$

ซึ่งเมื่อได้ทำการหาอนุพันธ์ ก็จะได้ค่าสมการความเร็ว (18)

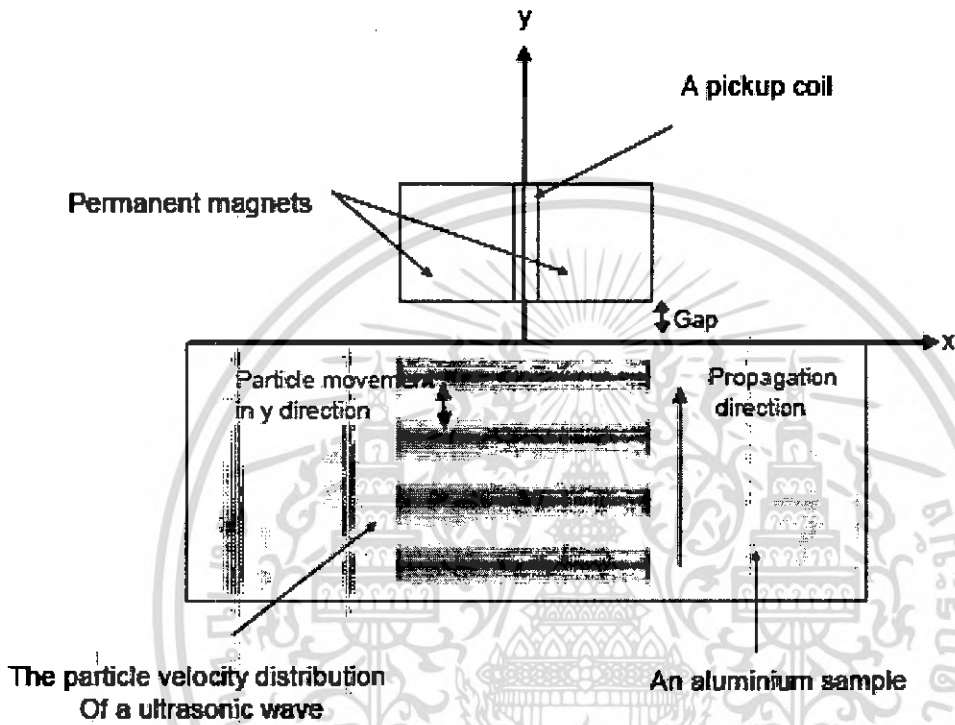
ซึ่งเมื่อแม่เหล็กได้ปล่อยค่าสนามแม่เหล็กออกมาโดยรอบแล้ว จะมีความหนาแน่นแม่เหล็ก ระบาย  $\times \vec{B}_x$  ซึ่งจะไปเหนี่ยวนำความเร็วระบาย  $y$  ในอลูมิเนียม ให้เกิดความหนาแน่นกระแสขึ้น ดังสมการ

$$\vec{J}_z = \sigma(\vec{v}_y \times \vec{B}_x) \quad (19)$$

เมื่อ  $\sigma$  เป็นค่าความนำทางไฟฟ้า (Conductivity) ของวัสดุ ซึ่งในที่นี้คืออลูมิเนียม มีค่าเท่ากับ  $3.82 \times 10^7$

เมื่อได้ค่าความหนาแน่นกระแสที่เกิดขึ้น เพื่อที่วัดจะหาค่าสนามแม่เหล็กที่เกิดจากการที่ ความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นนี้ โดยหัววัดจะอยู่ติดระหว่างแม่เหล็กทั้งสองตัว การวัดจึง จำเป็นต้องตั้งค่าความหนาแน่นของกระแสไว้ที่อลูมิเนียม และปิดการทำงานของแม่เหล็กทั้งสองตัว และวัดค่าความหนาแน่นสนามแม่เหล็กที่ได้

โดยการทดลองจะมีการเลื่อนระยะห่างของอุปกรณ์วัด โดยให้เปลี่ยนค่าความหนาแน่นของกระแสที่เกิดในอลูมิเนียม จากการปล่อยสนามแม่เหล็กของแม่เหล็กทุกครั้งที่มีระยะห่างต่างกันออกไป และวัดค่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่เกิดจากค่าความหนาแน่นกระแสตามระยะห่างนั้นๆ ดังรูป



รูปที่ 3.1 แสดงโมเดลของ Electromagnetic Acoustic Transducer โดยสมการ (19) มีที่มาจากสมการแรงลอเรนซ์ คือจาก

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

เมื่อไม่มีค่าของสนามไฟฟ้าได้

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$$

เมื่อ

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

และ

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}$$

จะได้

$$\frac{\vec{F}}{Q} = \vec{E} = (\vec{v} \times \vec{B})$$

จากนั้นคูณด้วยค่า  $\sigma$

จะได้

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma (\vec{v} \times \vec{B})$$

เป็นค่าของสมการ (19)

### 3.1 การทำการทดลอง

ในส่วนแรกให้ทำการประมวลผลรูปแบบเส้นเชิง (Linear Solver) โดยสมการของความเร็วคลื่นรูปไซน์ (sine) คือ

$$\bar{v}_y = 2\pi f A \cos(ky)$$

เนื่องจากว่าไม่มีค่าในส่วนของเวลาเข้ามาเกี่ยวข้องทำให้ตัดในพจน์ที่มีค่าของเวลาเป็นพารามิเตอร์อยู่ได้ ดูค่าเมื่อตัววัดมีระยะห่างจากวัตถุที่ขนาดต่างๆกัน

ในส่วนที่สองนั้นทำการประมวลผลในเชิงเวลา(Time dependent) โดยกำหนดช่วงเวลาให้ทำการประมวลผลทีละ  $0.01\mu s$  จนถึง  $1.6\mu s$  ซึ่งมีสมการความเร็วคลื่นคือ

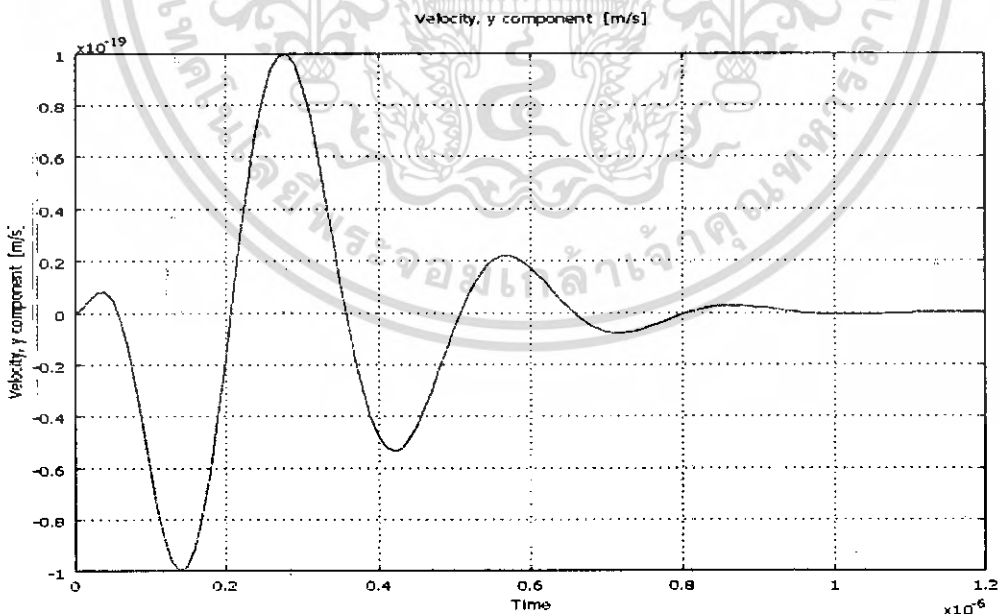
$$\bar{v}_y = 2\pi f A \cos(\omega t + ky)$$

โดยหาค่าของกระแสเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นภายในบริเวณขดลวดตัววัดที่เวลาเปลี่ยนไป โดยหาค่าของสัญญาณให้อยู่ในรูปยอดถึงยอด(Peak to Peak) ในแต่ละระยะห่างของตัววัด

ส่วนที่สามเป็นส่วนที่มีการประมวลผลในเชิงเวลา(Time dependent) โดยในส่วนนี้จะทำการจำลองการเคลื่อนที่ของคลื่นอัลตราโซนิค (Ultra sonic) โดยมีสมการความเร็วคลื่นคือ

$$\bar{v}_y = 2\pi f A t^2 e^{(-t \times 1e7)} \cos(\omega t + ky)$$

โดยให้  $f$  เป็นความถี่มีค่าเท่ากับ  $3.33\text{MHz}$  ซึ่งจะทำให้ได้ลักษณะดังนี้



รูปที่ 3.2 แสดงรูปสัญญาณของความเร็วคลื่นอัลตราโซนิคที่กำหนดให้เคลื่อนที่ในวัตถุ

โดยทำการประมวลผลทีละ  $0.01\mu s$  จนถึง  $1.2\mu s$  แล้วหาค่าของกระแสเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นภายใน บริเวณขดลวดตัววัดที่เวลาเปลี่ยนไป โดยหาค่าของสัญญาณให้อยู่ในรูปยอดถึงยอด(Peak to Peak) ในแต่ละระยะห่างของตัววัด

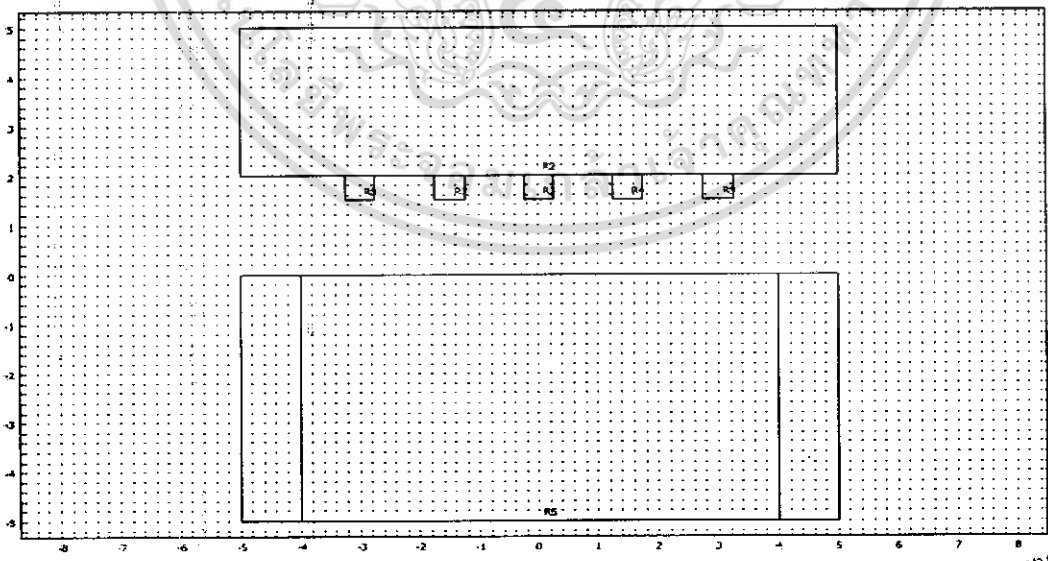
และในส่วนสุดท้ายเป็นการนำหลักการของ Electromagnetic Acoustic Transducer มาสร้าง โมเดลใหม่ ซึ่งมีลักษณะของตัววัดที่เปลี่ยนไปจากเดิมคือมีลักษณะดังรูป

Top view



รูปที่ 3.3 แสดงลักษณะของขดลวดที่จำลองใน โมเดลใหม่

โดยการออกแบบนั้น ได้ออกแบบให้มีแม่เหล็กตัวเดียวทำหน้าที่ปล่อยสนามแม่เหล็ก ออกมา เช่นเดียวกับการทำหน้าที่ของแม่เหล็ก 2 ตัว โดยเราจะกำหนดให้แม่เหล็กมีค่าแมกเนโตเซชันเท่ากันคือ  $995kA/m$  ในแนวแกน x เพื่อให้เกิดสนามแม่เหล็กในแนวแกน x เพื่อทำให้เกิดการไขว้ (Cross) กับค่าความเร็วของคลื่นในแนวแกน y ขึ้นที่วัตถุ เพื่อให้มีค่าของความหนาแน่นของ กระแสเกิดขึ้น โดยเป็นตามสมการแรงของลอเรนซ์ ซึ่งจะได้โมเดลที่มีลักษณะดังรูป

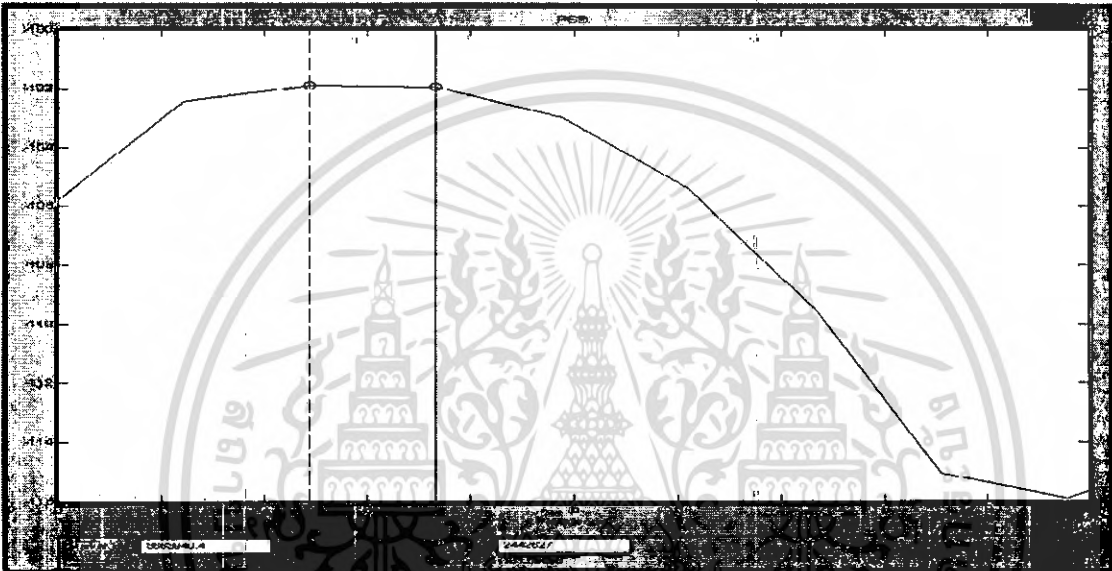


รูปที่ 3.4 แสดงลักษณะของโมเดลใหม่

โดยสัญญาณคลื่นที่ใช้ เป็นสัญญาณคลื่นของคลื่นอัลตราโซนิก (Ultra Sonic) โดยมีสมการความเร็วคือ

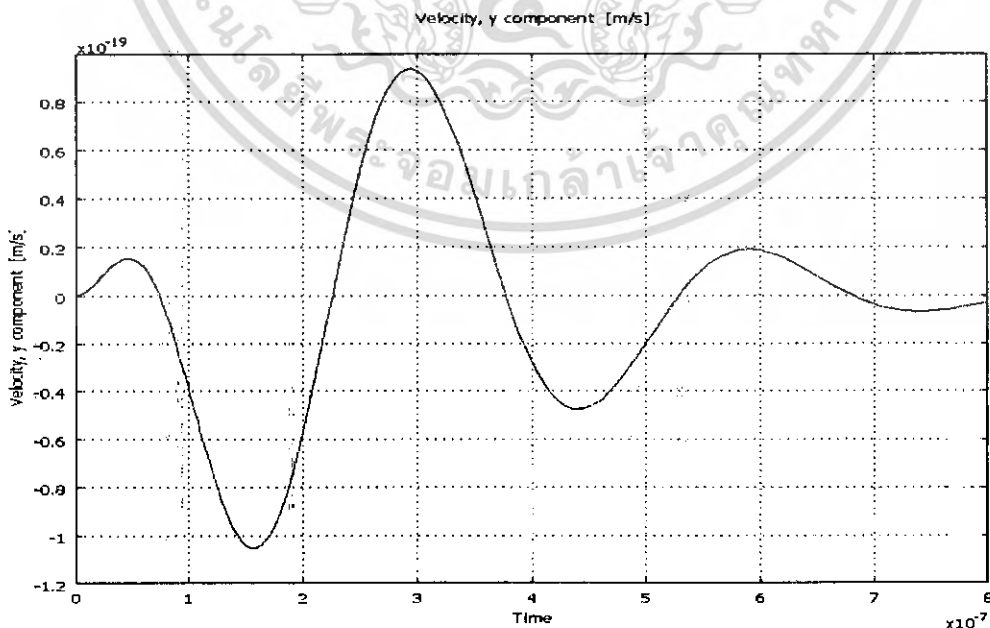
$$\bar{v}_y = 2\pi f A t^2 e^{(-t \times 10^7)} \cos(\omega t + ky)$$

โดยกำหนดให้ใช้ค่าความถี่เท่ากับ 3.30MHz ซึ่งหามาได้จากการประมวลผลเชิงความถี่โดยการใช้โปรแกรม Matlab หาค่าความถี่จากสัญญาณที่วัดจริงของตัววัดเดิม และได้ช่วงความถี่มาดังรูป



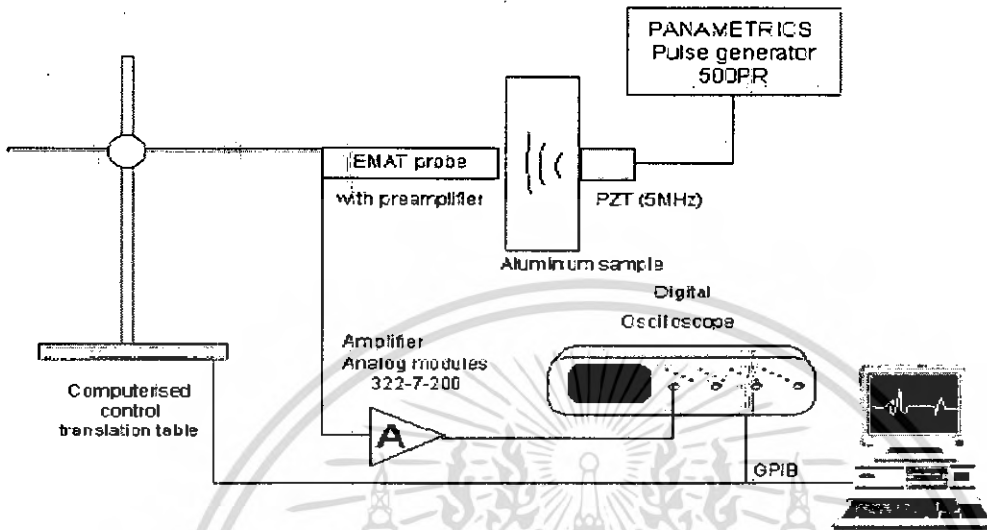
รูปที่ 3.5 แสดงการหาค่าของความถี่ที่ใช้โดยใช้โปรแกรม Matlab

โดยจะได้รูปสัญญาณของความเร็วคลื่นดังรูป



รูปที่ 3.6 แสดงลักษณะสัญญาณของความเร็วคลื่นที่กำหนดให้เคลื่อนที่ใน โมเดลใหม่

ซึ่งการทดลองจะทำได้โดยการเปลี่ยนเลื่อนระยะของห่างของตัววัดออกไปที่ระยะต่างๆ โดยนำรูปสัญญาณที่ได้มาเปรียบเทียบกับ สัญญาณที่วัดได้จริงโดยตัววัดเดิมซึ่งมาจากการทดลองดังรูป



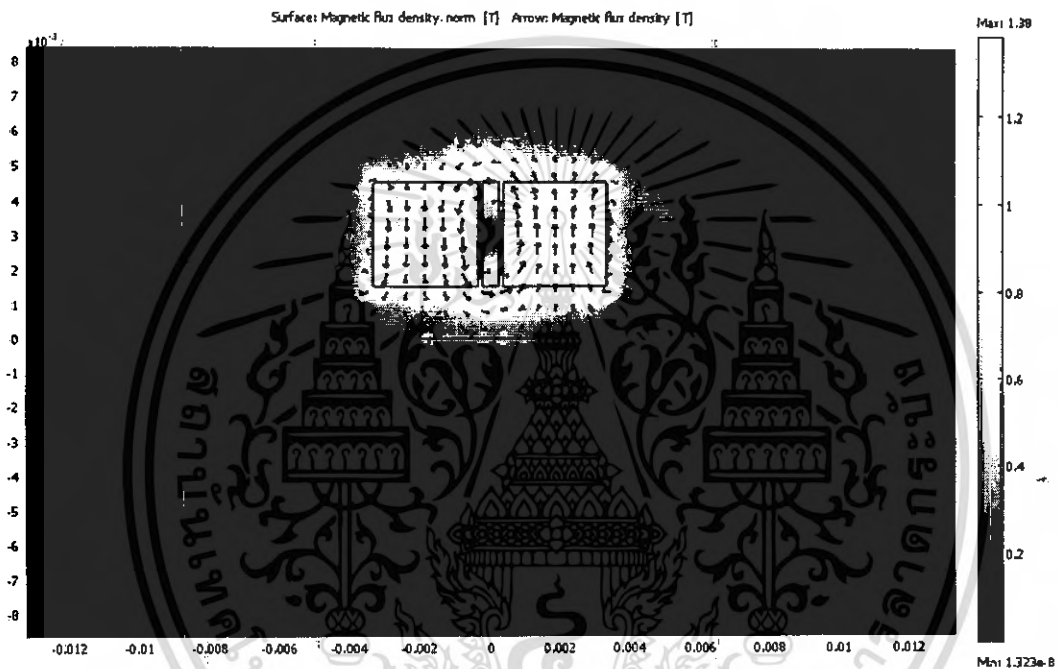
รูปที่ 3.7 แสดงผังการวัดค่าจริงของทรานสดิวเซอร์

โดยในส่วนของ การทดลองจริงนั้นจะเป็นการทดลองเปลี่ยนแปลงระยะทาง ซึ่งจะส่งผลกระทบต่อ การรับสัญญาณ โดยตัววัดสัญญาณจะยึดติดกับแกนของเครื่องเปลี่ยนแปลงระดับ (A computerized control translation table) โดยเครื่องสามารถมีการเปลี่ยนแปลงระยะห่าง ได้น้อยที่สุดเท่ากับ  $\frac{1}{64} \pm 0.05mm$  ต่อหนึ่งครั้ง ซึ่งระยะห่างนี้เป็นระยะของตัววัด กับผิวของอลูมิเนียมทรงกระบอกขนาด  $4cm$  ซึ่งหลังจากรับสัญญาณแล้ว ต้องนำสัญญาณที่ได้มาขยายสัญญาณ และแสดงผลด้วยออสซิลโลสโคป โดยตัวสร้างสัญญาณอัลตราโซนิค (Ultra Sonic) ใช้การกระตุ้นจากเครื่องกำเนิดสัญญาณ (Panametrics 500PR) โดยส่งผ่านหัวส่ง PZT

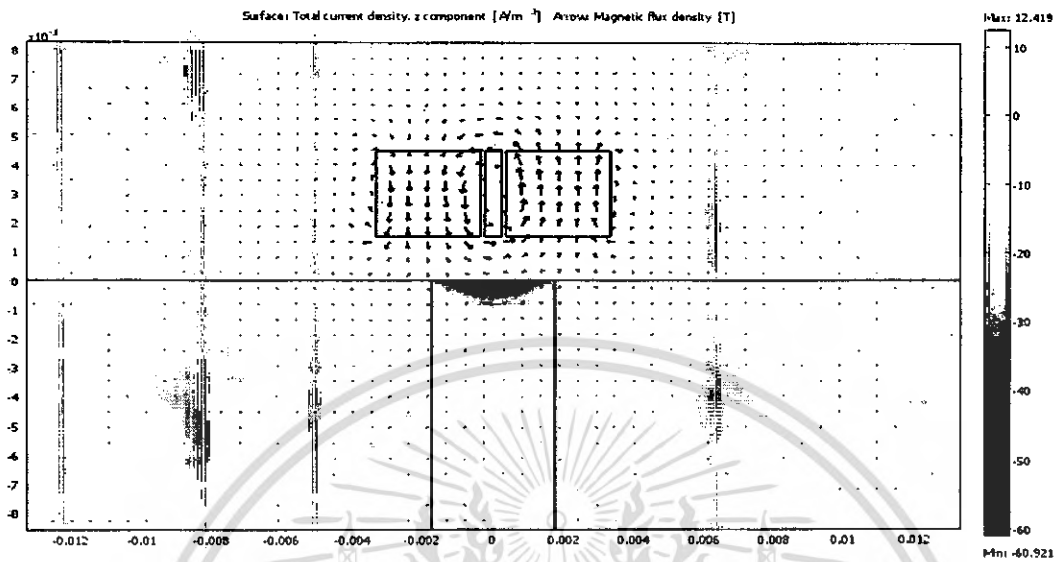
## บทที่ 4

### ผลการทดลอง

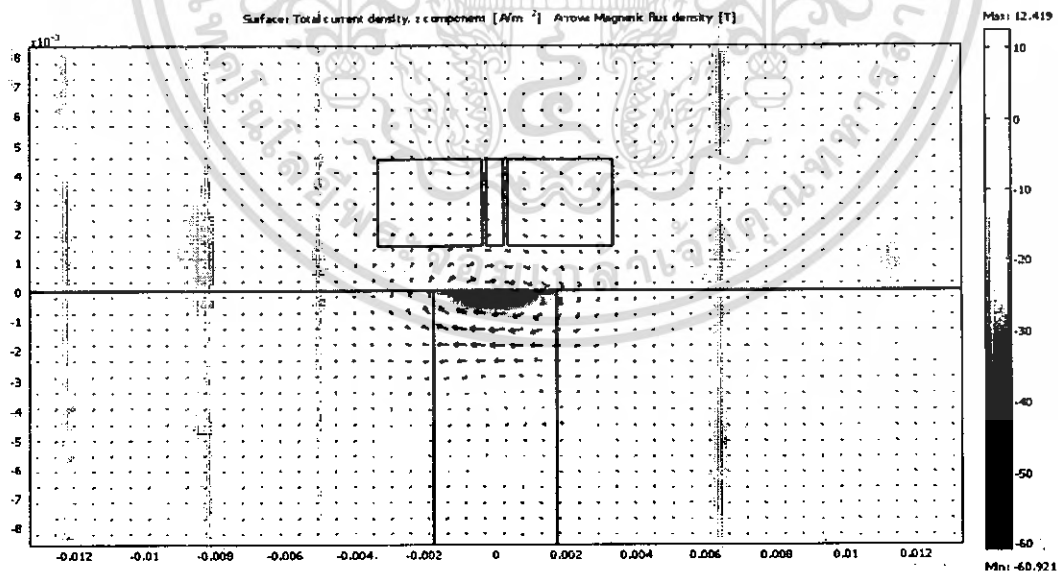
จากหลักการของ Electromagnetic Acoustic Sensors จะทำให้ได้ผลจากการ Simulation ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.1 แสดงความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่แม่เหล็กทั้ง 2 นั้นได้ปล่อยสนามแม่เหล็กออกมาโดยรอบในที่นี้ยังไม่ได้มีการแสดงผลถึงค่าพารามิเตอร์อื่นๆ



รูปที่ 4.2 เมื่อความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กนั้นไปเห็นขวนำให้ความเร็วของประจุให้ทางแกน y ของอลูมิเนียมนั้นมีค่าความหนาแน่นกระแสเกิดขึ้น ดังที่แสดงในรูปที่ 4.2 ในส่วนของพื้นผิว(Surface)



รูปที่ 4.3 เป็นการแสดงผลแบบ Arrow ของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจากค่าความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นในตัวอลูมิเนียมจากการเห็นขวนำของความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่ทำกับความเร็วยของประจุในตัวอลูมิเนียม

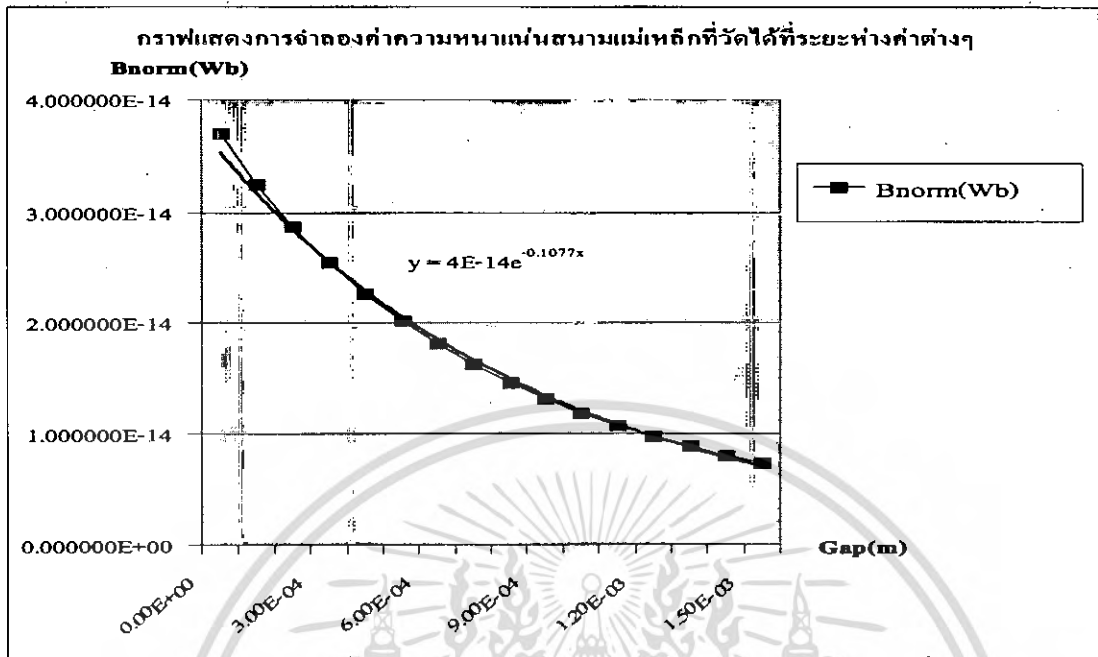
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งเมื่อทำการอินทิเกรตพื้นที่ภายในของขดลวดตัววัด ซึ่งเป็นการหาค่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็ก  $\bar{B}$  ที่ได้รับจากความหนาแน่นของกระแส  $\bar{J}$ , ซึ่งเกิดขึ้นมีค่าของระยะห่างของตัววัดที่ระยะต่างกันออกไป โดยตัววัดนั้นติดอยู่กับแม่เหล็ก จะทำให้ความหนาแน่นของกระแสมีค่าต่างกันไปตามระยะห่างด้วย ดังจะได้ค่าของความหนาแน่นสนามแม่เหล็กที่อินทิเกรตได้ตามระยะห่างที่ต่างกันออกไป ดังนี้

**ตารางผลการทดลองที่ 4.1** แสดงค่าของความหนาแน่นสนามแม่เหล็กที่อินทิเกรตได้ตามระยะห่างที่ต่างกันออกไป

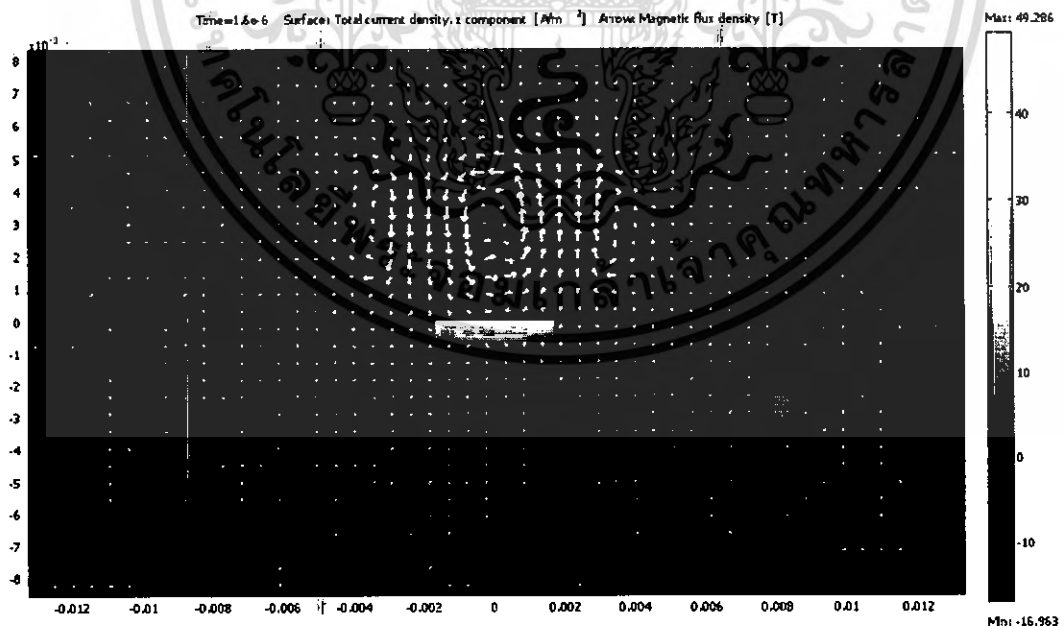
Gap	Bnorm(Wb)
0.00E+00	3.697092E-14
1.00E-04	3.253215E-14
2.00E-04	2.873386E-14
3.00E-04	2.548178E-14
4.00E-04	2.267157E-14
5.00E-04	2.023100E-14
6.00E-04	1.810199E-14
7.00E-04	1.623816E-14
8.00E-04	1.459470E-14
9.00E-04	1.313418E-14
1.00E-03	1.186657E-14
1.10E-03	1.072359E-14
1.20E-03	9.711212E-15
1.30E-03	8.807342E-15
1.40E-03	8.007936E-15
1.50E-03	7.289240E-15

เมื่อนำไปเขียนกราฟ และทำการเปรียบเทียบกับฟังก์ชันมาตรฐานจะได้กราฟ



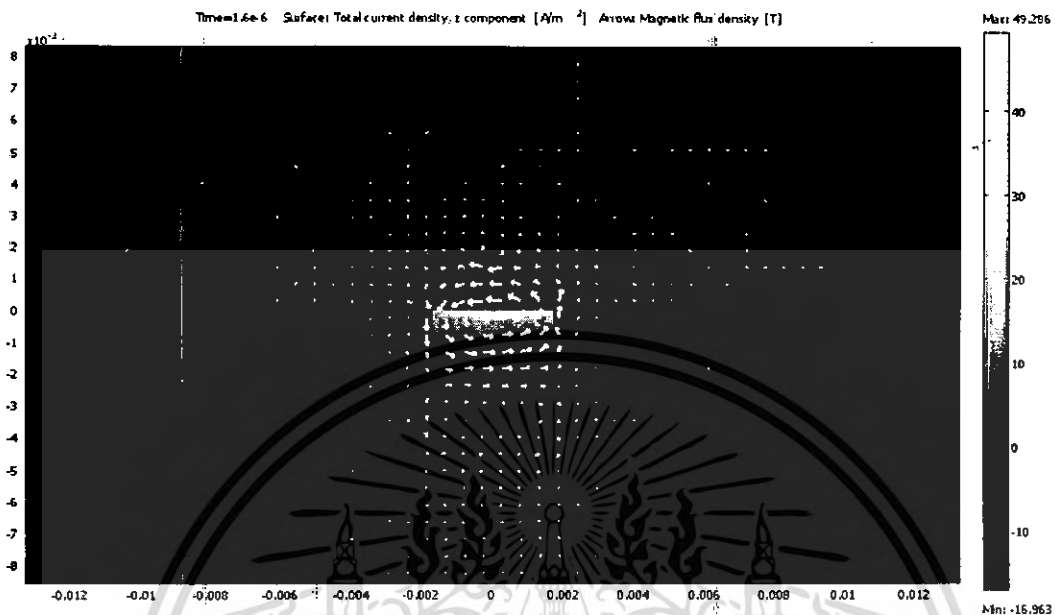
รูปที่ 4.4 กราฟแสดงการจำลองค่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่ระยะห่างค่าต่างๆ

และจะได้ผลที่ได้จากการใช้การประมวลผลเชิงเวลา (Time dependent) จะได้

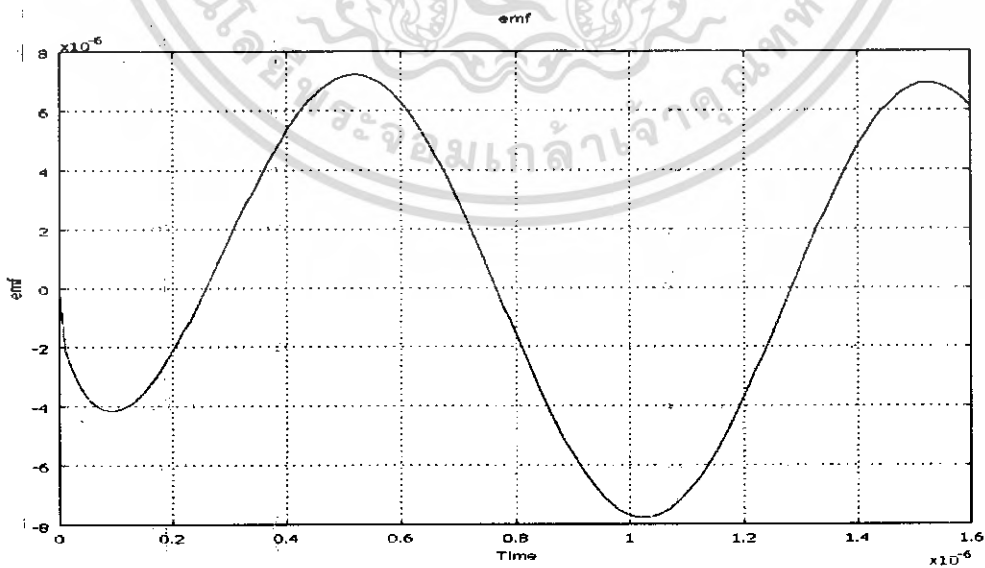


รูปที่ 4.5 แสดงผลที่เวลา  $1.6\mu s$  แสดงความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่เหนี่ยวนำ กับค่าความเร็วคลื่นทำให้เกิดค่าความหนาแน่นของกระแสขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.6 แสดงผลที่เวลา  $1.6 \mu s$  แสดงความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นซึ่งจะทำให้ค่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กขึ้นโดยรอบ ซึ่งจะได้ค่าความหนาแน่นของกระแสที่ขึ้นเกิดจากการเหนี่ยวนำ บริเวณภายในขดลวดตัววัด  $J_{iz}$  โดยการอินทิเกรตค่ากระแสดังกล่าว ในพื้นที่ขดลวดตัววัด จะได้รูปสัญญาณที่มีลักษณะดังนี้



รูปที่ 4.7 แสดงรูปสัญญาณของความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำที่อินทิเกรตได้ ซึ่งเกิดจากความเร็วของคลื่น ที่เป็นลักษณะของคลื่นรูปไซน์

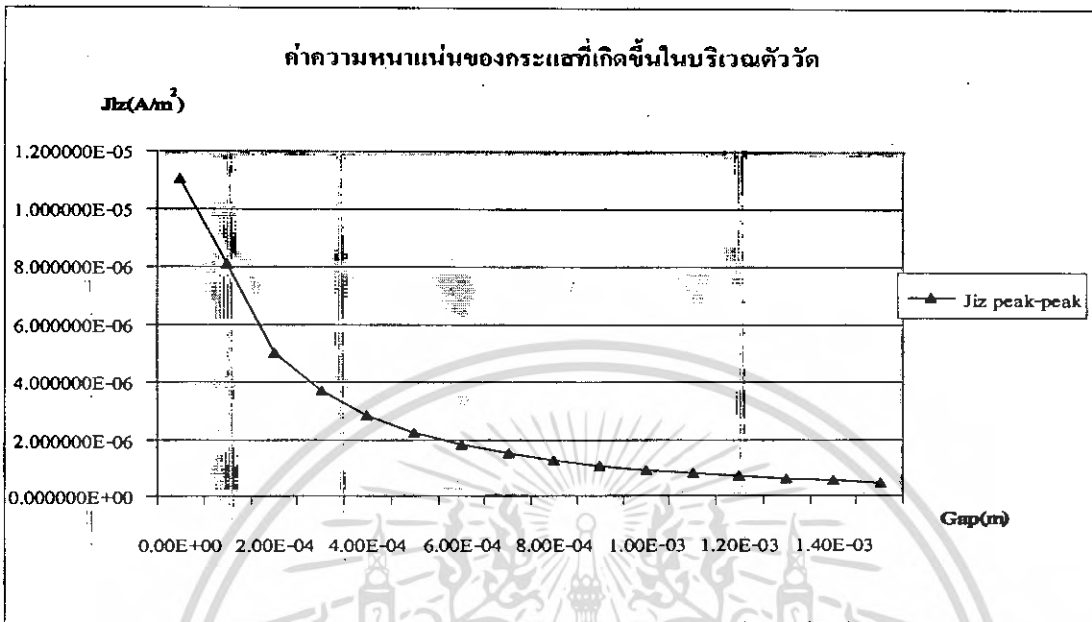
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นหาค่าของกระแสจากยอดถึงยอด(Peak to Peak) โดยคิดที่ระยะห่างต่างๆกัน จะได้  
ค่าดังนี้

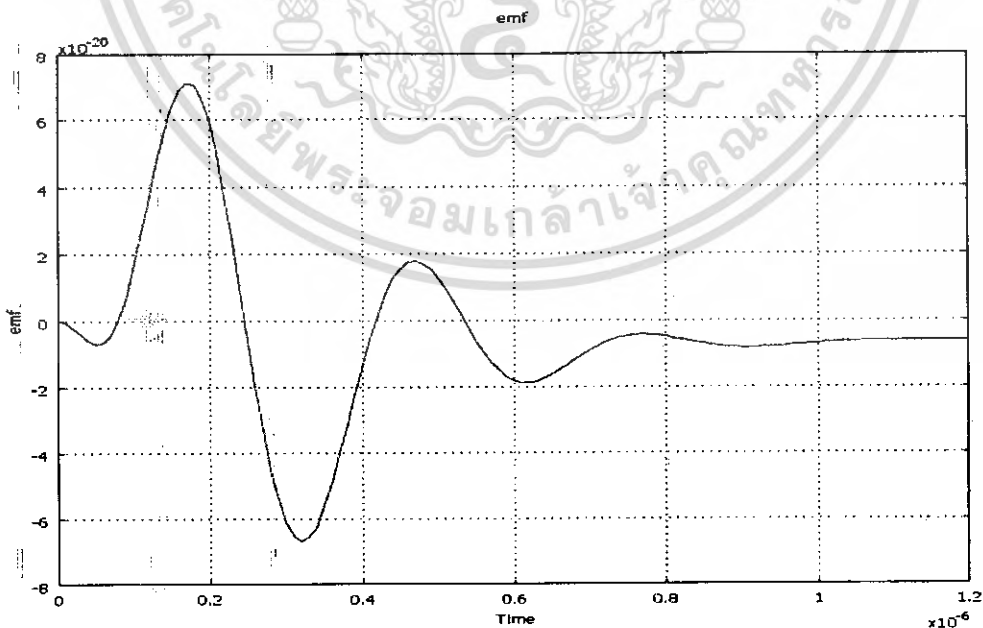
ตารางผลการทดลองที่ 4.2 แสดงการหาค่ากระแสเหนี่ยวนำยอดถึงยอด (Peak to Peak) จาก  
สัญญาณที่วัดได้ ซึ่งมีลักษณะเป็นรูปสัญญาณไซน์

Gap(m)	Jiz max	Jiz min	Jiz peak-peak
0.00E+00	7.212391E-06	-7.771063E-06	1.105083E-05
1.00E-04	4.283519E-06	-3.838435E-06	8.121954E-06
2.00E-04	2.707061E-06	-2.324575E-06	5.031636E-06
3.00E-04	2.017467E-06	-1.691480E-06	3.708947E-06
4.00E-04	1.536703E-06	-1.273547E-06	2.810251E-06
5.00E-04	1.221066E-06	-1.006499E-06	2.227565E-06
6.00E-04	1.002180E-06	-8.204816E-07	1.822662E-06
7.00E-04	8.322231E-07	-6.799550E-07	1.512178E-06
8.00E-04	6.989441E-07	-5.696617E-07	1.268606E-06
9.00E-04	5.875438E-07	-4.772688E-07	1.064813E-06
1.00E-03	5.268360E-07	-4.047776E-07	9.316136E-07
1.10E-03	4.406244E-07	-3.567833E-07	7.974077E-07
1.20E-03	3.935107E-07	-3.040066E-07	6.975173E-07
1.30E-03	3.333615E-07	-2.688141E-07	6.021757E-07
1.40E-03	2.970679E-07	-2.381245E-07	5.351924E-07
1.50E-03	2.602895E-07	-2.069321E-07	4.672216E-07

ซึ่งเมื่อนำค่ากระแสดังกล่าวที่เป็นค่ายอดถึงยอด(Peak to Peak) ที่ได้มาเขียนกราฟจะได้



รูปที่ 4.8 กราฟแสดงค่าความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำแบบยอดถึงยอด (Peak to Peak) ตามระยะห่างที่เพิ่มขึ้น จากสัญญาณที่มีลักษณะของรูปไซน์ เมื่อทำการประมวลผลเชิงเวลา (Time dependent) โดยได้ใช้สมการคลื่นอัลตราโซนิค (Ultra sonic) จะได้ค่าความหนาแน่นของกระแสที่ขึ้นเกิดจากการเหนี่ยวนำ บริเวณภายในขดลวดตัววัด  $J_z$  โดยการอินทิเกรตค่ากระแสดังกล่าว ในพื้นที่ขดลวดตัววัด ที่มีลักษณะสัญญาณดังนี้



รูปที่ 4.9 แสดงรูปสัญญาณของความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำที่อินทิเกรตได้ ซึ่งเกิดจากความเร็วของคลื่น ที่เป็นลักษณะของคลื่นอัลตราโซนิค

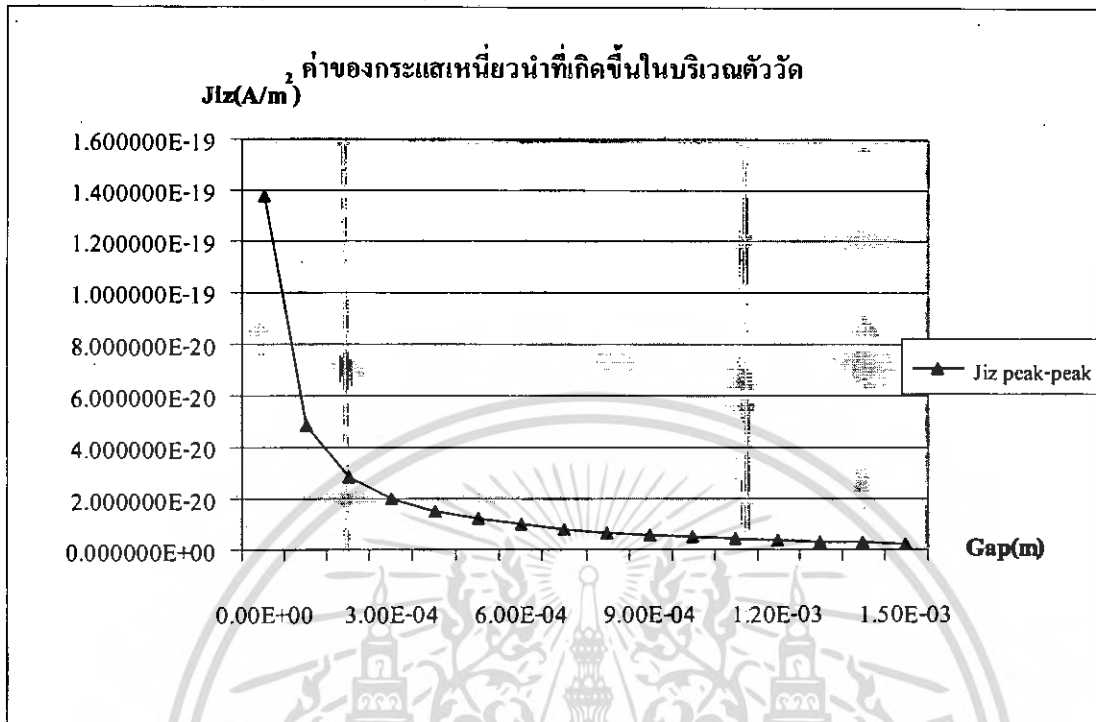
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้คัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นหาค่าของกระแสจากยอดถึงยอด(Peak to Peak) โดยคิดที่ระยะห่างต่างๆกัน จะได้ค่าดังนี้

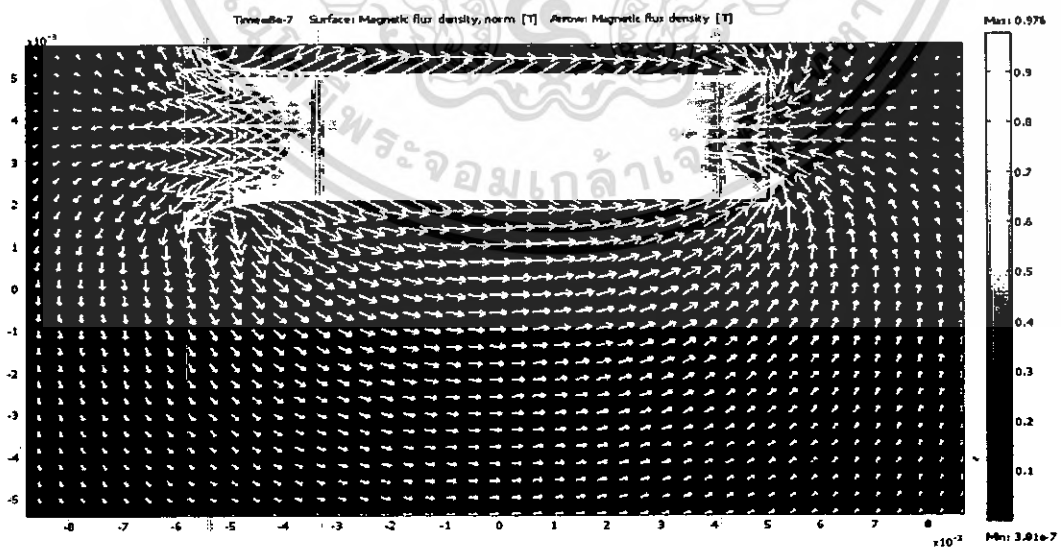
ตารางผลการทดลองที่ 4.3 แสดงการหาค่ากระแสเหนี่ยวนำยอดถึงยอด (Peak to Peak) จากสัญญาณที่วัดได้ ซึ่งมีลักษณะของสัญญาณรูปคลื่นอัลตราโซนิก

Gap	Jiz max	Jiz min	Jiz peak-peak
0.00E+00	7.105414E-20	-6.668630E-20	1.377404E-19
1.00E-04	3.260554E-20	-1.584100E-20	4.844655E-20
2.00E-04	2.069543E-20	-7.605830E-21	2.830126E-20
3.00E-04	1.436643E-20	-5.860469E-21	2.022690E-20
4.00E-04	1.086110E-20	-4.252419E-21	1.511352E-20
5.00E-04	8.642709E-21	-3.372296E-21	1.201500E-20
6.00E-04	7.134556E-21	-2.599328E-21	9.733884E-21
7.00E-04	5.879817E-21	-2.130823E-21	8.010640E-21
8.00E-04	4.925097E-21	-1.762203E-21	6.687299E-21
9.00E-04	4.143143E-21	-1.466166E-21	5.609309E-21
1.00E-03	3.705033E-21	-1.044481E-21	4.749514E-21
1.10E-03	3.090578E-21	-1.071664E-21	4.162243E-21
1.20E-03	2.751611E-21	-7.882632E-22	3.539874E-21
1.30E-03	2.344952E-21	-8.002864E-22	3.145238E-21
1.40E-03	2.080371E-21	-6.814650E-22	2.761836E-21
1.50E-03	1.842155E-21	-5.813750E-22	2.423530E-21

ซึ่งเมื่อนำค่ากระแสดังกล่าวที่เป็นค่ายอดถึงยอด(Peak to Peak) ที่ได้มาเขียนกราฟจะได้

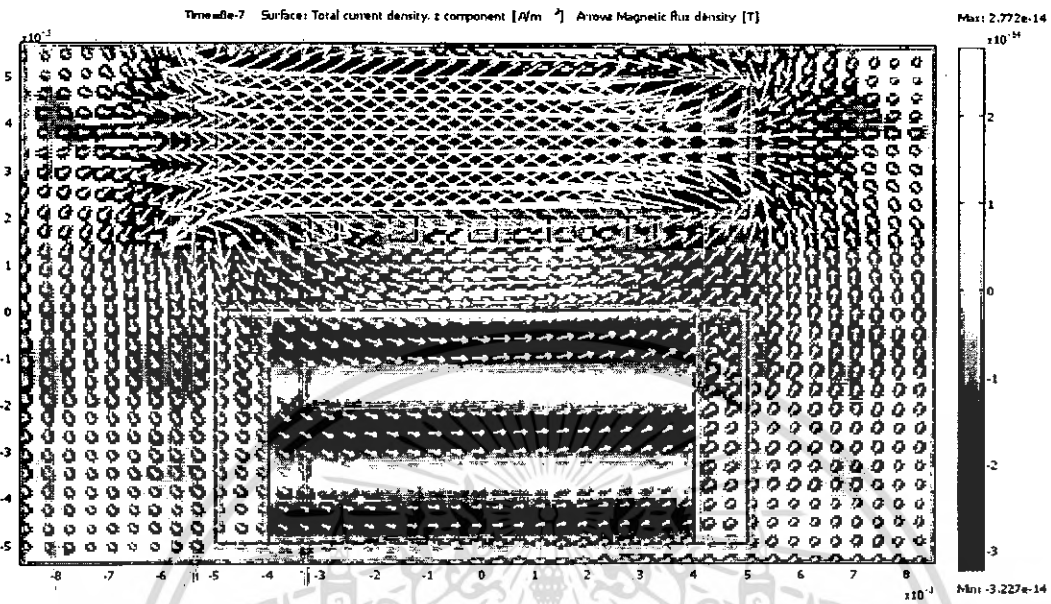


รูปที่ 4.10 กราฟแสดงค่าความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำแบบยอดถึงยอด (Peak to Peak) ตามระยะห่างที่เพิ่มขึ้นจากสัญญาณที่มีลักษณะของคลื่นอัลตราโซนิก และเมื่อได้ทำการสร้างโมเดลใหม่ และประมวลผลจะได้

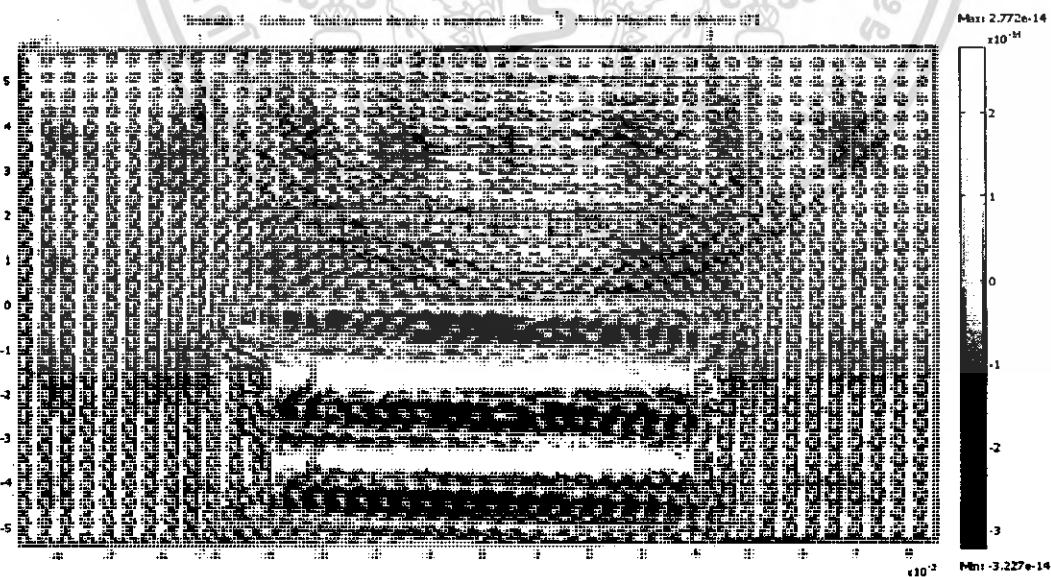


รูปที่ 4.11 แสดงถึงแท่งแม่เหล็กได้มีปล่องสนามแม่เหล็กออกมาโดยรอบ และแสดงทิศทางการเคลื่อนที่ของสนามแม่เหล็ก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



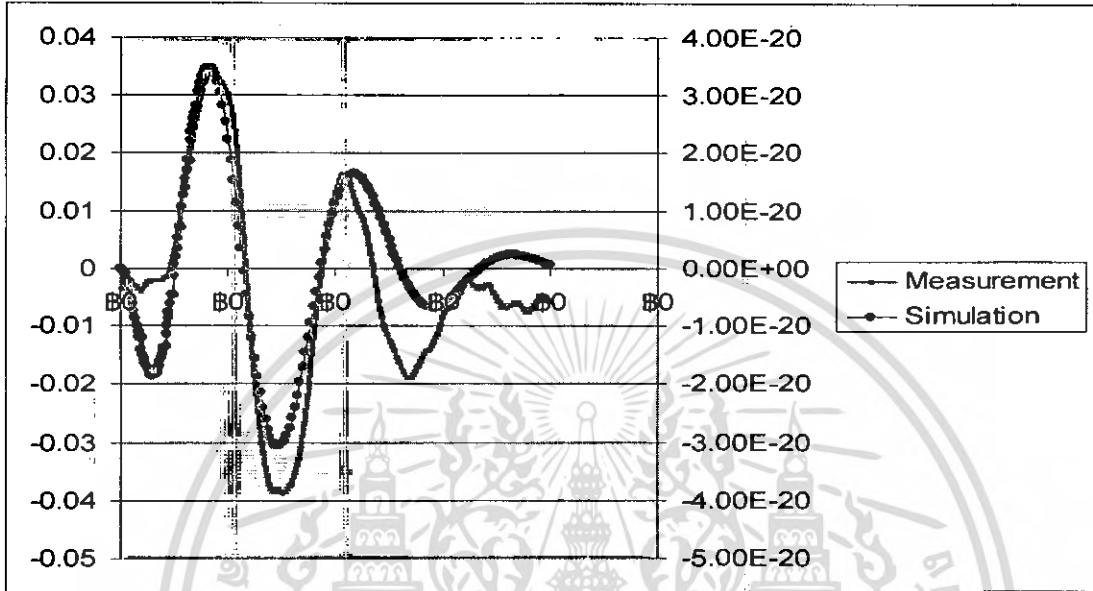
รูปที่ 4.12 สนามแม่เหล็กที่ปล่อยออกมาจากตัวแม่เหล็กนั้นได้ มีการกระทำกับความเร็วของคลื่นแนวแกน y เกิดค่าความหนาแน่นของกระแสขึ้น ตามสมการแรงของลอเรนซ์ (Lorenz 's force)



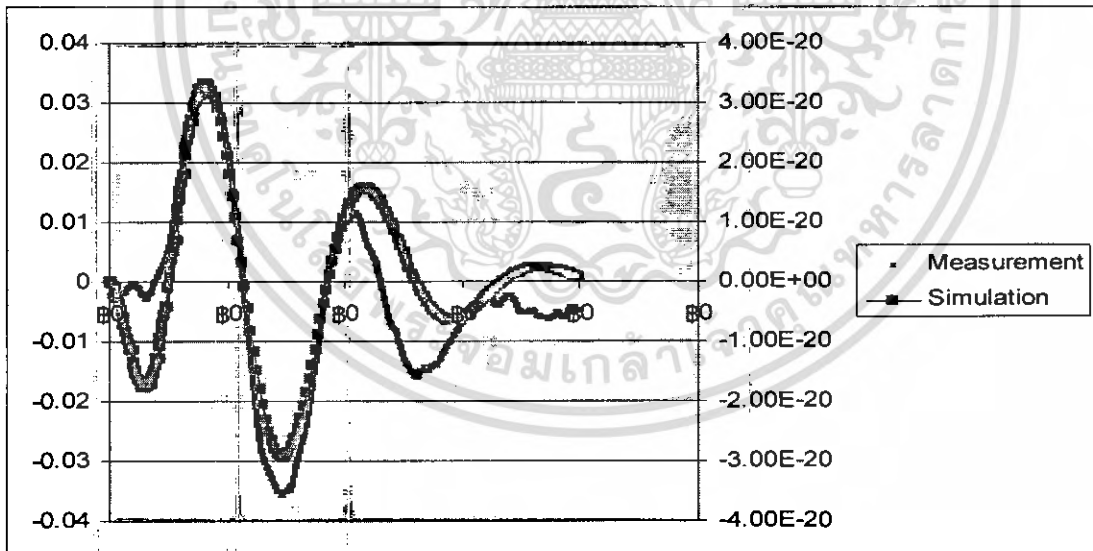
รูปที่ 4.13 แสดงให้เห็นถึงสนามแม่เหล็กซึ่งมีแหล่งกำเนิดมาจากค่าความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นตามหลักของลอเรนซ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

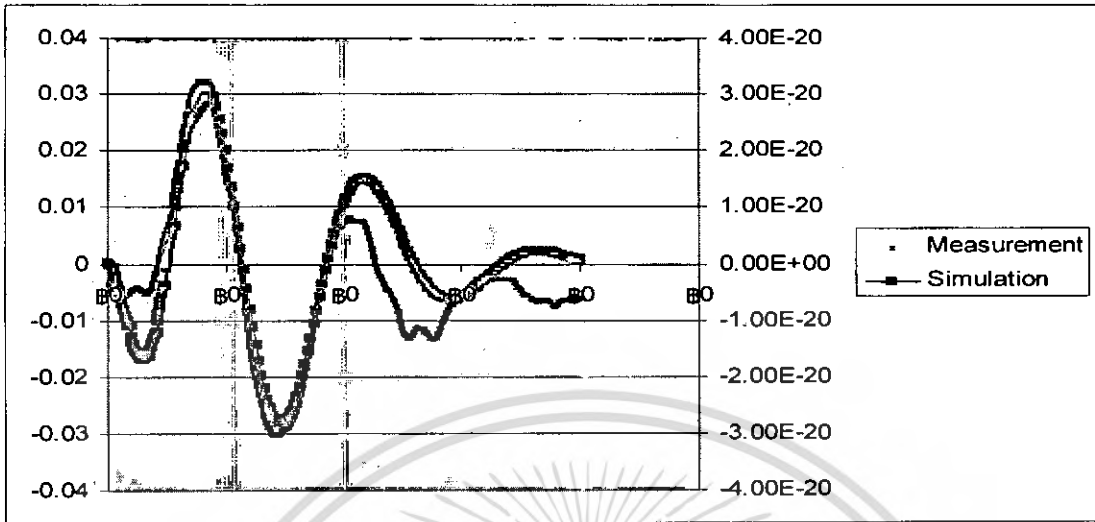
ซึ่งเมื่อนำสัญญาณที่ได้จากการ Simulation ของโมเดลนี้ มาเปรียบเทียบกับสัญญาณที่วัดได้จริงของตัววัดเดิมจะได้รูปสัญญาณที่ระยะห่างต่างๆ ดังนี้



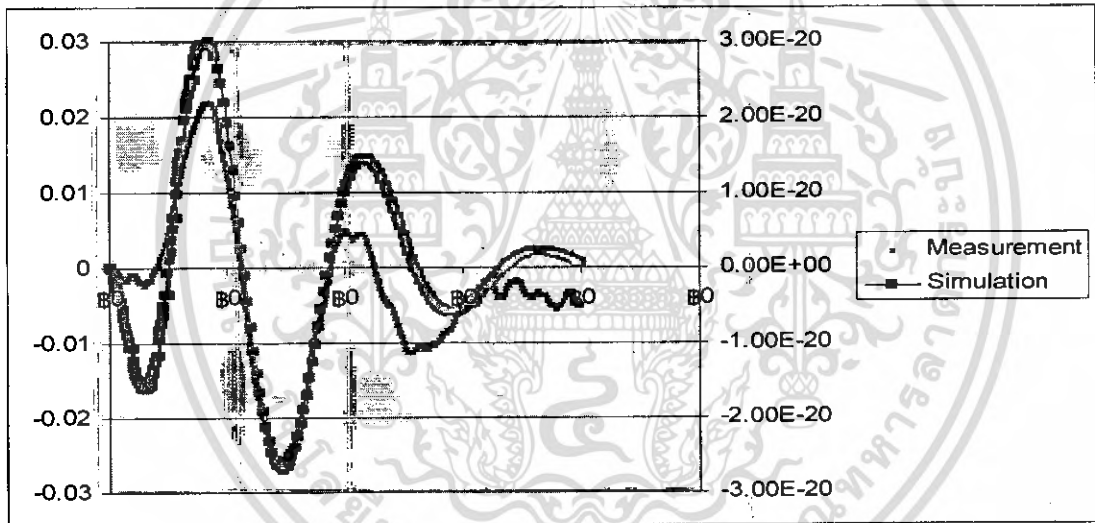
รูปที่ 4.14 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0 มิลลิเมตร



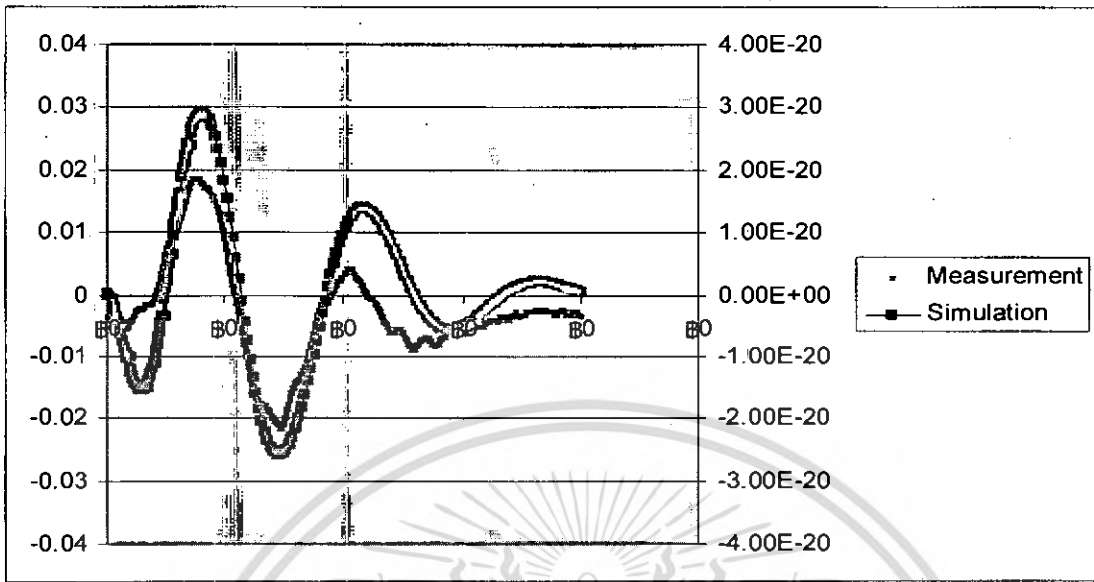
รูปที่ 4.15 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.1 มิลลิเมตร



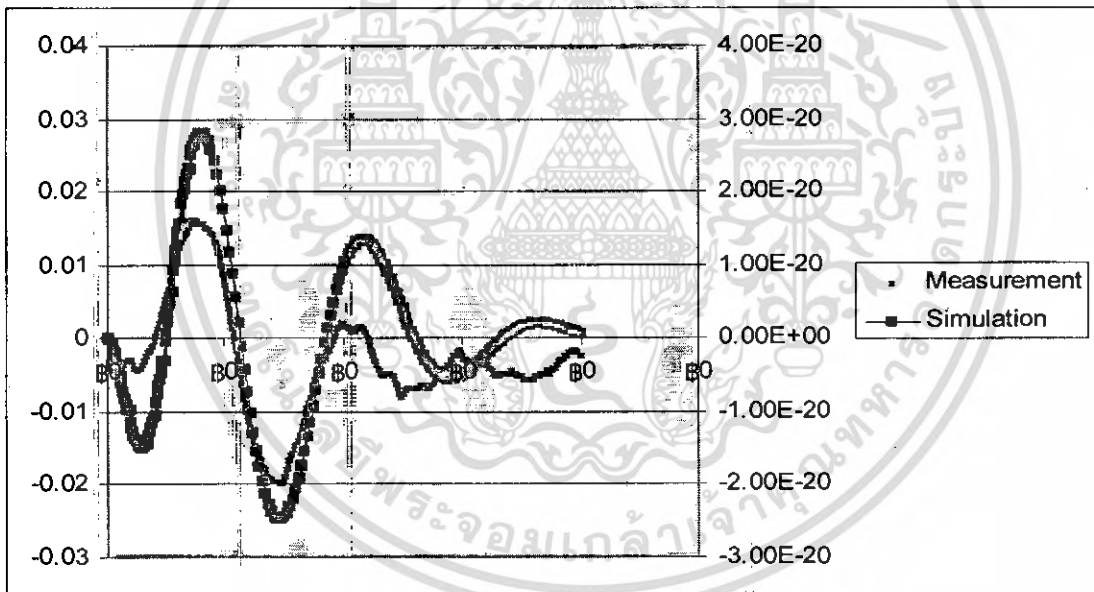
รูปที่ 4.16 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.2 มิลลิเมตร



รูปที่ 4.17 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.3 มิลลิเมตร



รูปที่ 4.18 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.4 มิลลิเมตร



รูปที่ 4.19 เป็นรูปสัญญาณที่เปรียบเทียบกันที่ระยะห่างเดียวกันคือ 0.5 มิลลิเมตร

## บทที่ 5

### สรุปผลการทดลอง

จากการทดลองเห็นว่าความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้น จากความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นจากการเหนี่ยวนำของความหนาแน่นของสนามแม่เหล็กของตัวแม่เหล็ก กระทำกับความเร็วมอเตอร์ในตัวออสซิลเลชัน นั้นเป็นไปตามหลักการของ ทรานส์ดิวเซอร์ ที่เรียกว่า อิเล็กโตรแมกเนติก อะคูสติก ทรานส์ดิวเซอร์ (Electromagnetic Acoustic Transducer) เนื่องจากว่ามีค่าของความหนาแน่นของกระแสที่เกิดขึ้นได้จริง และค่าความหนาแน่นของกระแสนั้นยังทำให้เกิดสนามแม่เหล็กขึ้นรอบๆค่าความหนาแน่นกระแสนั้นอีกด้วย

จากการที่ได้เปลี่ยนค่าระยะห่างของตัววัดนี้ ส่งผลให้ค่าที่ได้นั้นลดลงเป็นแบบ เอกโปเนนเชียล (Exponential) อีกด้วยและค่าเทียบเคียงกับสมการ

$$B = 4 \times 10^{-14} e^{-0.1077(\text{Gap})}$$

จากการประมวลผลเชิงเวลา โดยสัญญาณรูปไซน์จะได้ว่าค่าของความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นบริเวณภายในขดลวด  $J_{iz}$  แบบยอดถึงยอด (Peak to Peak) นั้นจะมีค่าลดลงตามระยะห่างของตัววัดที่มากขึ้น

ซึ่งจากข้อมูลเพิ่มเติมจากการใส่สมการจำลองคลื่นอัลตราโซนิค (Ultra sonic) แล้วทำการประมวลผลในเชิงเวลาจะเห็นได้ว่า ค่าของความหนาแน่นของกระแสเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นบริเวณภายในขดลวด  $J_{iz}$  แบบยอดถึงยอด (Peak to Peak) นั้นจะมีค่าลดลงตามระยะห่างของตัววัดที่มากขึ้นเช่นเดียวกัน ซึ่งบริเวณของตัววัดจะค่าดังกล่าวมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับลักษณะของคลื่นที่เคลื่อนที่ในวัตถุ และจะเห็นได้ชัดเจนว่าสัญญาณที่วัดได้มีลักษณะเหมือนกับลักษณะความเร็วคลื่นที่ส่งมา

และจากโมเดลใหม่เราจะได้ว่า สามารถนำหลักการของ Electromagnetic Acoustic Transducer มาใช้งานได้เหมือนกับการวัดแบบเดิม และจากการเปรียบเทียบค่ากับค่าของการวัดจริงของตัววัดก็จะเห็นได้ว่าสัญญาณที่ได้ที่ลักษณะที่ใกล้เคียงกัน และจะสังเกตได้ว่าการค่าของการวัดจริงของของโมเดลเดิมนั้น สัญญาณมีการลดลงตามระยะห่างที่มากขึ้นมากกว่าการลดลงของสัญญาณตัวโมเดลใหม่ที่ได้จากการ Simulation

## บรรณานุกรม

1. เฉลิมพล น้ำค้าง. “ทฤษฎีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก”. พิมพ์ครั้งที่ 4. ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ,  
2538
2. ณรงค์ เหมกรณ์. “แม่เหล็กไฟฟ้า Electromagnetics”. ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม  
คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง,  
2533
3. ชัยณรงค์ วิเศษศักดิ์วิชัย. “สนามไฟฟ้าและแม่เหล็ก”. สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย-ญี่ปุ่น),  
2545



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้