สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยพหุนาม

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY POLYNOMIALS

ดิลก ราตรี
นันทชัย วุฒิกรวิภาค
อานนท์ ธนทวีธรรม

วพ.
ด561ก
2550

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน.....73345
วัน,เดือน,ปี.....12 ก.ค. 2550

b.....11290026
i.....

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY POLYNOMIALS

DILOK RATREE
NUNTHACHAI WUTTIGORNVIPAK
ARNON TANATWETHAM

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2006

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยพหุนาม
SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY POLYNOMIALS

ชื่อนักศึกษา นายดิลก ราตรี 46050014
นายนันทชัย วุฒิกรวิภาค 46050018
นายอานนท์ ธนทวีธรรม 46050046

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา อ.พรชัย ชัยสนิท
อ.จินดา ไชยช่วย

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการ อ.เทอดขวัญ ช้างเผือก	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา อ.พรชัย ชัยสนิท	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา อ.จินดา ไชยช่วย	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยพหุนาม	
ชื่อนักศึกษา	นายดิลก ราตรี	46050014
	นายนันทชัย วุฒิกรวิภาค	46050018
	นายอานนท์ ธนทวีธรรม	46050046
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2549	
อาจารย์ที่ปรึกษา	อ.พรชัย ชัยสนิท	
	อ.จินดา ไชยช่วย	

บทคัดย่อ

ปัญหาค่าขอบเขตเป็นรูปแบบที่มีความสำคัญ ทั้งในงานทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และอีกในหลายสาขาวิชา จึงมีผู้หาวิธีในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขตมากมาย ในปัญหาพิเศษนี้จะนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของปัญหานี้ โดยการนำพหุนามกำลังสิบมาประมาณค่าผลเฉลยของปัญหาค่าขอบเขตแล้วนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริง เพื่อตรวจสอบประสิทธิภาพของวิธีการใหม่ที่ได้เสนอในปัญหาพิเศษนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY POLYNOMIALS		
Student	Mr. Dilok	Ratree	46050014
	Mr. Nunthachai	Wuttigornvipak	46050018
	Mr. Arnon	Tanatwetham	46050046
Degree	Bachelor of Science		
Department	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science		
Program	Applied Mathematics		
Academics Year	2006		
Special Project Advisor	Pornchai Chaisanit		
	Chinda Chaichuay		

ABSTRACT

The boundary value problem is important to works in areas of science, engineering, economics and other fields. Many efficient approaches were proposed to find the solution of this problem. In this special problem, the new approach was proposed. For this proposed approach, the polynomial degree 10 was applied with it to approximate the numerical solutions. Then these solutions were compared with the analytic solutions to validate efficiency of the new proposed approach.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์พรชัย ชัยสนิท และ อาจารย์จินดา ไชยช่วย อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษที่กรุณาคอยให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจทานแก้ไขปัญหาในการทำปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ต่างๆ ให้แก่ผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษสำเร็จด้วยดีทุกประการ รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาทุกท่าน ที่ช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ

ขอขอบพระคุณบิดา-มารดาที่ได้ให้การสนับสนุนทุกประการทางด้านการศึกษา และยังให้กำลังใจตลอดมาจนถึงปัจจุบัน และต้องขอขอบคุณเพื่อนๆ นักศึกษาทุกท่านที่ช่วยเหลือให้คำแนะนำ และให้กำลังใจมาโดยตลอด

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2550

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....I

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....II

กิตติกรรมประกาศ.....III

สารบัญ.....IV

สารบัญรูป.....VII

สารบัญตาราง.....VIII

บทที่ 1 บทนำ.....1

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....1

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา.....1

1.3 ขอบเขตของปัญหา.....1

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....1

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน.....2

บทที่ 2 นิยาม และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง.....3

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์.....3

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.....3

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย.....3

2.2 ปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.....4

2.3 ผลเฉลยของสมการเชิงเส้น.....4

2.3.1 วิธีการหาผลเฉลยเติมเต็ม.....5

2.3.1.1 รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน.....6

2.3.1.2 รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงแต่ซ้ำกัน.....6

2.3.1.3 รากสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน.....7

2.3.2 วิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ.....8

2.4 วิธีลดตัวแปรของเกาส์.....11

2.5 การประมาณค่าโดยพหุนาม.....13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 3 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมและวิธีการคำนวณ.....18

3.1 ขั้นตอนการทำงานทั้งหมด.....18

3.2 Flow chart การทำงานทั้งหมดของโปรแกรม.....19

บทที่ 4 การเปรียบเทียบผลเฉลย.....22

4.1 ตัวอย่างที่ 1.....22

4.2 ตัวอย่างที่ 2.....23

4.3 ตัวอย่างที่ 3.....24

4.4 ตัวอย่างที่ 4.....25

4.5 ตัวอย่างที่ 5.....26

4.6 ตัวอย่างที่ 6.....27

4.7 ตัวอย่างที่ 7.....28

4.8 ตัวอย่างที่ 8.....29

4.9 ตัวอย่างที่ 9.....30

4.10 ตัวอย่างที่ 10.....31

4.11 ตัวอย่างที่ 11.....32

4.12 ตัวอย่างที่ 12.....33

4.13 ตัวอย่างที่ 13.....34

4.14 ตัวอย่างที่ 14.....35

4.15 ตัวอย่างที่ 15.....36

4.16 ตัวอย่างที่ 16.....37

4.17 ตัวอย่างที่ 17.....38

4.18 ตัวอย่างที่ 18.....39

4.19 ตัวอย่างที่ 19.....40

4.20 ตัวอย่างที่ 20.....41

4.21 ตัวอย่างที่ 21.....42

4.22 ตัวอย่างที่ 22.....43

4.23 ตัวอย่างที่ 23.....44

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

4.24 ตัวอย่างที่ 24.....45
4.25 ตัวอย่างที่ 25.....46
4.26 ตัวอย่างที่ 26.....47
4.27 ตัวอย่างที่ 27.....48

บทที่ 5 สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ.....49
5.1 สรุปผล.....49
5.2 ข้อเสนอแนะ.....49

บรรณานุกรม.....50

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

3.1 Flow chart การทำงานทั้งหมดของโปรแกรม.....19
3.2 Flow chart การทำงานทั้งหมดของโปรแกรม (ต่อ).....20
3.3 Flow chart วิธีลดตัวแปรของเกาส์.....21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1....22
4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2....23
4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3....24
4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4....25
4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5....26
4.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6....27
4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 7....28
4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 8....29
4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 9....30
4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 10....31
4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 11....32
4.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 12....33
4.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 13....34
4.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 14....35
4.15 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 15....36
4.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 16....37
4.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 17....38
4.18 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 18....39
4.19 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 19....40
4.20 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 20....41
4.21 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 21....42
4.22 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 22....43
4.23 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 23....44
4.24 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 24....45
4.25 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 25....46
4.26 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 26....47
4.27 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 27....48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาพิเศษนี้จะนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สองด้วยระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนาม โดยการนำคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการแก้หาผลเฉลย และจะนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีนี้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงของปัญหาค่าขอบเขตนั้น

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1. นำระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามไปประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
2. เปรียบเทียบผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีประมาณค่าโดยพหุนามกับผลเฉลยจริงของปัญหาค่าขอบเขต เพื่อหาค่าความคลาดเคลื่อน

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ศึกษาและนำระเบียบวิธีประมาณค่าโดยพหุนามไปหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง แล้วนำค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากการประมาณค่าโดยพหุนามที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงของปัญหาค่าขอบเขตนั้นเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

สามารถนำระเบียบวิธีประมาณค่าโดยพหุนามไปหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยที่จะสามารถนำระเบียบวิธีประมาณค่าโดยพหุนาม ไปประมาณหาค่าของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $y(x)$ ที่ไม่ทราบค่าได้ในช่วง $[a, b]$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

1. ศึกษาระเบียบวิธีประมาณค่าโดยพหุนาม
2. นำระเบียบวิธีประมาณค่าโดยพหุนามไปหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีฟังก์ชันในรูปแบบต่างๆ
3. นำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากวิธีประมาณค่าโดยพหุนามไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนั้น เพื่อหาค่าความคลาดเคลื่อน
4. สรุปค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
นิยาม และทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ หรือ เชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเดียว หรือ หลายฟังก์ชัน ซึ่งอาจเขียนในรูปเชิงอนุพันธ์ก็ได้

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ประกอบด้วยฟังก์ชันของตัวแปรเดียวและอนุพันธ์เทียบกับตัวแปรนั้น เช่น

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

$$(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$$

2.1.2 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ประกอบด้วยฟังก์ชันสองตัวแปรหรือมากกว่าและบางอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันนั้น

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{x\partial f}{\partial x} + \frac{y\partial f}{\partial y} = nf$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 ปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เขียนได้ในรูปแบบ

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=r(x)\ for\ x\in[a,b]$$

โดยมีเงื่อนไขขอบเขต

$$y(a)=y_a \text{ และ } y(b)=y_b$$

2.3 ผลเฉลยของสมการเชิงเส้น

ให้ $y_1,y_2,...,y_n$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันของสมการเชิงเส้นที่เป็นเอกพันธ์

$$a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

แล้ว $y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$ จะเป็นผลเฉลยของสมการนี้เมื่อ $c_1,c_2,...,c_n$ เป็นค่าคงที่ เราเรียกผลเฉลยนี้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการแบบเอกพันธ์ ส่วนสมการแบบไม่เอกพันธ์จะใช้ y_c แทน y ดังนั้น

$$y_c=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n$$

ให้ y_p เป็นผลเฉลยของสมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์

$$a_0(x)y^n+a_1(x)y^{n-1}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=g(x)$$

เราเรียก y_p ว่าผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ แล้ว $y=y_c+y_p$ จะเป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.1 วิธีการหาผลเฉลยเติมเต็ม (y_c) จากสมการเชิงเส้นอันดับ n แบบเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงที่

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

หรือเขียนในรูปของตัวดำเนินการคือ

$$f(D)y = 0$$

เมื่อ $$f(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n$$

เราสามารถหาผลเฉลยสมการ (1) ได้โดยการทดลองคำตอบให้

$$y = e^{mx} \qquad (2)$$

แทนค่าในสมการ (1)

$$f(D)y = f(D)e^{mx} = f(m)e^{mx} = 0$$

แต่ $e^{mx} \neq 0$ ดังนั้น

$$f(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \ldots + a_{n-1} m + a_n = 0 \qquad (3)$$

ซึ่งเราสามารถแก้สมการ (3) หาค่า m ได้ n รากจากนั้นแทนค่า m ที่ได้ในสมการ (2) ก็จะได้ผลเฉลยของสมการ (1) เราเรียกสมการ (3) นี้ว่า "สมการช่วย"

เนื่องจาก $f(m)$ ในสมการช่วย เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี n ทำให้สมการช่วยมีรากได้ n ราก ซึ่งอาจจะเป็นรากที่เป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อน หรืออาจจะมีรากบางรากมีค่าซ้ำกันก็ได้ ซึ่งจะพิจารณาเป็นกรณีๆไปดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.1.1 **รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงที่ไม่ซ้ำกัน**

ให้รากสมการช่วย (3) เป็น $m_1, m_2, ..., m_n$ โดยที่แต่ละรากมีค่าต่างกัน ดังนั้น $y_1 = e^{m_1 x}, y_2 = e^{m_2 x}, ..., y_n = e^{m_n x}$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการ (1) และเนื่องจากฟังก์ชันเหล่านี้เป็นอิสระเชิงเส้นกันเพราะฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) คือ

$$y_c = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + ... + c_n e^{m_n x} \qquad (4)$$

2.3.1.2 **รากสมการช่วยเป็นจำนวนจริงแต่ซ้ำกัน**

จากสมการ $f(D)y = 0$ (5)

เมื่อสมการช่วยมีรากซ้ำกัน สมมติว่ารากเป็น a ซ้ำกัน n ราก

ดังนั้น $f(m) = (m-a)^n$

นั่นคือ $f(D) = (D-a)^n$

ทำให้สมการ (1) เขียนได้เป็น $(D-a)^n y = 0$ (6)

จาก $(D-m)^n (e^{mx} y) = e^{mx} D^n y$

หรือ $(D-a)^n (e^{ax} y) = e^{ax} D^n y$

ถ้าให้ $y = x^k$ จะพบว่า

$$(D-a)^n (e^{ax} x^k) = e^{ax} D^n x^k$$

ซึ่งขวามือของสมการจะเป็นศูนย์เมื่อ $k = 0,1,2,...,n-1$

นั่นคือ $(D-a)^n (e^{ax} x^k) = 0;\ k = 0,1,2,...,n-1$

แสดงว่า ผลเฉลยของสมการ (2) คือ

$$e^{ax} x^k;\ k = 0,1,2,...,n-1$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ $$y_1 = e^{ax}, y_2 = xe^{ax}, ..., y_n = x^{n-1}e^{ax}$$

ฉะนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2) คือ

$$y_c = c_1e^{ax} + c_2xe^{ax} + ... + c_nx^{n-1}e^{ax}$$

หรือ $$y_c = (c_1 + c_2x + ... + c_nx^{n-1})e^{ax} \quad (7)$$

2.3.1.3 **รากสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน**

ถ้าสมการช่วย $f(m) = 0$ ให้รากเป็นจำนวนเชิงซ้อนคือ $a + ib$ จะพบว่าเราได้รากอีกรากหนึ่งคือ $a - ib$ ด้วยนั่นคือรากเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะอยู่ในรูป

$$m = a \pm ib$$

ดังนั้น $$y_c = c_1e^{(a+ib)x} + c_2e^{(a-ib)x}$$

$$= c_1e^{ax}e^{ibx} + c_2e^{ax}e^{-ibx} \quad (8)$$

จากสูตรของออยเลอร์ สมการ (1) จึงเขียนได้เป็น

$$y_c = c_1e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + c_2e^{ax}(\cos bx - i\sin bx)$$

$$= (c_1 + c_2)e^{ax}\cos bx + i(c_1 - c_2)e^{ax}\sin bx$$

ให้ $$c_1 + c_2 = c_3 \text{ และ } i(c_1 - c_2) = c_4$$

เพราะฉะนั้น $$y_c = c_3e^{ax}\cos bx + c_4e^{ax}\sin bx$$

หรือ $$y_c = e^{ax}(c_3\cos bx + c_4\sin bx) \quad (9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3.2 วิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ (y_p)

การหาผลเฉลยเฉพาะมีหลายวิธีแต่ที่จะกล่าวถึงคือวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

วิธีการเทียบสัมประสิทธิ์

จากสมการ $$f(D)y = g(x) \tag{10}$$

ให้รากของสมการช่วย $f(m) = 0$ คือ $m = m_1, m_2, ..., m_n$ (11)

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (10) คือ

$$y = y_c + y_p \tag{12}$$

สมมติว่าฟังก์ชันขวามือ $g(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธ์

$$f_1(D)g(x) = 0 \tag{13}$$

ซึ่งสมการ (13) มีรากของสมการช่วยเป็น $M = M_1, M_2, ..., M_k$

พิจารณาสมการ $$f_1(D)f(D)y = 0 \tag{14}$$

จะพบว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (14) นี้จะประกอบด้วย y_c ของสมการ (12) ด้วย สมมติให้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (14) คือ

$$y = y_c + y_r$$

และผลเฉลยเฉพาะ (y_p) ของสมการ (10) ต้องสอดคล้องสมการ (14) ด้วย เพราะว่า

$$f_1(D)f(D)y_p = f_1(D)g(x) = 0$$

เนื่องจาก $$f(D)y_p = g(x)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และถ้า $f(D)(y_c + y_r) = g(x)$ แล้ว $f(D)y_r = g(x)$

เนื่องจาก $f(D)y_c = 0$

ดังนั้นแสดงว่า $y_r = y_p$ เมื่อกำหนดสัมประสิทธิ์ใน y_r ซึ่งการกำหนดสัมประสิทธิ์ดังกล่าวทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^{-x} - 2 \qquad (15)$$

วิธีทำ $m^2 - 4m + 3 = 0$

$(m-1)(m-3) = 0$

รากสมการช่วยของสมการ (15) คือ $m = 1,3$

จะได้ $y_c = c_1e^x + c_2e^{3x}$

เนื่องจากฟังก์ชันทางขวามือของสมการ (15) คือ $g(x) = 2e^{-x} - 2$ มาจาก $m = -1,0$

เป็นผลเฉลยของสมการ $D(D+1)y = 0$

พิจารณาสมการ $D(D+1)(D^2 - 4D + 3)y = 0$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^x + c_2e^{3x} + c_3 + c_4e^{-x}$

โดยที่ 2 พจน์แรกคือ y_c ดังนั้น $y_r = c_3 + c_4e^{-x}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพื่อที่จะหาสัมประสิทธิ์ c_3 และ c_4 เรากำหนด

$$y_p = y_r = c_3 + c_4 e^{-x}$$

ให้สอดคล้องสมการ (15)

$$Dy_p = -c_4 e^{-x}$$
$$D^2 y_p = c_4 e^{-x}$$

แทนค่าในสมการ (10) จะได้

$$c_4 e^{-x} + 4c_4 e^{-x} + 3(c_3 + c_4 e^{-x}) = 2e^{-x} - 2$$
$$8c_4 e^{-x} + 3c_3 = 2e^{-x} - 2 \qquad (16)$$

เนื่องจากสมการ (16) เป็นเอกลักษณ์และฟังก์ชัน e^{-x} ,1 เป็นอิสระเชิงเส้นกัน เราสามารถเทียบสัมประสิทธิ์ได้

$$8c_4 = 2 \quad \text{และ} \quad 3c_3 = -2$$

นั่นคือ $$c_4 = \frac{1}{4} \text{ และ } c_3 = -\frac{2}{3}$$

ฉะนั้น $$y_p = -\frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-x}$$

ผลเฉลยทั่วไปคือ $$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}e^{-x}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.4 วิธีลดตัวแปรของเกาส์ (Gauss Elimination Method)

วิธีการลดตัวแปรของเกาส์เป็นวิธีการที่เปลี่ยนรูปจากจากระบบสมการ $AX = B$ เป็นเมตริกซ์เส้นทแยงบน $BX = C$ จากระบบสมการ $BX = C$ นี้จะสามารถหาค่า x_n ได้ทันที ต่อจากนั้นจึงใช้ค่า x_n แทนค่าในสมการถัดขึ้นไปได้ค่า x_{n-1} และนำเอาค่าที่ได้แทนในสมการถัดขึ้นไปเรื่อยๆจนได้ค่าของ $x_k s$ ทุกค่า วิธีการแทนค่าในสมการถัดขึ้นไปนี้เรียกว่า การแทนค่าย้อนกลับด้วยเหตุนี้จึงมีผู้เรียกวิธีนี้ว่า การลดตัวแปรของเกาส์และแทนค่าย้อนกลับ

วิธีการลดตัวแปรของเกาส์นำไปเขียนเป็นขั้นตอน เพื่อใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ โดยแบ่งออกเป็นสองตอน คือขั้นตอนลดตัวแปร และขั้นตอนแทนค่าย้อนกลับ ดังนี้

ขั้นตอนลดตัวแปร

{ สำหรับ i จาก 1 ถึง $n-1$

ให้ $k = i+1$

{ สำหรับ j จาก k ถึง n

ให้ $c = \dfrac{a_{ji}}{a_{ii}}$

{ สำหรับ d จาก k ถึง n

$a_{jd} = a_{jd} - ca_{id}$

} กลับไปที่ค่า d ตัวถัดไป

$b_j = b_j - cb_i$

} กลับไปที่ค่า j ตัวถัดไป

} กลับไปที่ค่า i ตัวถัดไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นตอนแทนค่าย้อนกลับ

$$x(n) = \frac{b_m}{a_m}$$

{ สำหรับ i จาก 1 ถึง $n-1$

ให้ $m = n - i$

$k = n - i + 1$

{สำหรับ j จาก k ถึง n

$b_m = b_m - x_j a_{mj}$

} กลับไปที่ค่า j ตัวถัดไป

$$x_m = \frac{b_m}{a_{mm}}$$

} กลับไปที่ค่า i ตัวถัดไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.5 การประมาณค่าโดยพหุนาม (Polynomial Approximation Method)

เราจะใช้สมการพหุนาม

$$p_{10}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$$

ในการประมาณค่า โดยสามารถหาอนุพันธ์ของพหุนามได้

$$p'_{10}(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + 9a_9x^8 + 10a_{10}x^9$$

$$p''_{10}(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + 90a_{10}x^8$$

แทนค่าลงในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$

จะได้

$$\begin{aligned}&[2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + 90a_{10}x^8]\\ &+ p(x)[a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + 9a_9x^8 + 10a_{10}x^9]\\ &+ q(x)[a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10}] = r(x)\end{aligned}$$

จัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}&a_0q(x) + a_1(xq(x) + p(x)) + a_2\left(x^2q(x) + 2xp(x) + 2\right)\\ &+ a_3x\left(x^2q(x) + 3xp(x) + 6\right) + a_4x^2\left(x^2q(x) + 4xp(x) + 12\right)\\ &+ a_5x^3\left(x^2q(x) + 5xp(x) + 20\right) + a_6x^4\left(x^2q(x) + 6xp(x) + 30\right)\\ &+ a_7x^5\left(x^2q(x) + 7xp(x) + 42\right) + a_8x^6\left(x^2q(x) + 8xp(x) + 56\right)\\ &+ a_9x^7\left(x^2q(x) + 9xp(x) + 72\right) + a_{10}x^8\left(x^2q(x) + 10xp(x) + 90\right) = r(x)\end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า x ด้วยช่วงที่กำหนดแล้ว นำสมการที่ได้ ไปใช้วิธีลดตัวแปรของเกาส์เพื่อแก้หาค่า a ทั้งหมดจะได้

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10}$$

ซึ่งเรียกวิธีทั้งหมดนี้ว่าการประมาณค่าโดยพหุนามหรือเรียกย่อๆ ว่า PA

ตัวอย่าง การประมาณค่าผลเฉลยโดยพหุนามของสมการ

$$y'' + y' + y = 3e^x \qquad ,x \in [0,2] \qquad (1)$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1$ และ $y(2) = e^2$

มีผลเฉลยจริงเป็น $y = e^x$

จาก

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} \qquad (2)$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + 9a_9x^8 + 10a_{10}x^9 \qquad (3)$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + 90a_{10}x^8 \qquad (4)$$

นำสมการ (2),(3) และ (4) ไปแทนในสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned}&[2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + 42a_7x^5 + 56a_8x^6 + 72a_9x^7 + 90a_{10}x^8] \\ &+ [a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + 7a_7x^6 + 8a_8x^7 + 9a_9x^8 + 10a_{10}x^9] \\ &+ [a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10}] = 3e^x \end{aligned} \qquad (5)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการ (5) จัดรูปใหม่ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(x+1) + a_2(x^2+2x+2) + a_3x(x^2+3x+6) \\ + a_4x^2(x^2+4x+12) + a_5x^3(x^2+5x+20) \\ + a_6x^4(x^2+6x+30) + a_7x^5(x^2+7x+42) \\ + a_8x^6(x^2+8x+56) + a_9x^7(x^2+9x+72) \\ + a_{10}x^8(x^2+10x+90) = 3e^x \end{aligned} \tag{6}$$

จากเงื่อนไข $y(0)=1$ นำไปแทนในสมการ (2) จะได้

$$a_0 = 1 \tag{7}$$

และจากเงื่อนไข $y(2)=e^2$ นำไปแทนในสมการ (2) จะได้

$$e^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 + 64a_6 + 128a_7 + 256a_8 + 512a_9 + 1024a_{10} \tag{8}$$

จากนั้นนำ $a_0 = 1$ ไปแทนในสมการ (8) จะได้

$$2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 + 32a_5 + 64a_6 + 128a_7 + 256a_8 + 512a_9 + 1024a_{10} = e^2 - 1 \tag{9}$$

เพื่อที่จะหาค่า $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$ จำเป็นต้องมีอีก 9 สมการโดยสร้างจุด x บนช่วง[0,2]จำนวน 9 จุด ซึ่งมีช่วงเท่าๆ กัน คือ $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8$ นำ x ทั้ง 9 ค่าและ $a_0 = 1$ ไปแทนในสมการ (6)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $x = 0.2$

$$1.2a_1 + 2.44a_2 + 1.318a_3 + 0.5136a_4 + 0.16832a_5 + 0.049984a_6 + 0.0139008a_7 + 0.00368896a_8 + 0.000945142a_9 + 0.0002356224a_{10} = 3e^{0.2} - 1 \quad (10)$$

แทนค่า $x = 0.4$

$$1.4a_1 + 2.96a_2 + 2.944a_3 + 2.2016a_4 + 1.41824a_5 + 0.833536a_6 + 0.4603904a_7 + 0.24313856a_8 + 0.124125184a_9 + 0.0617086976a_{10} = 3e^{0.4} - 1 \quad (11)$$

แทนค่า $x = 0.6$

$$1.6a_1 + 3.56a_2 + 4.896a_3 + 5.3136a_4 + 5.04576a_5 + 4.401216a_6 + 3.6205056a_7 + 2.85348096a_8 + 2.176782336a_9 + 1.618477978a_{10} = 3e^{0.6} - 1 \quad (12)$$

แทนค่า $x = 0.8$

$$1.8a_1 + 4.24a_2 + 7.232a_3 + 10.1376a_4 + 12.61568a_5 + 14.516224a_6 + 15.8072832a_7 + 16.52555776a_8 + 16.743366157a_9 + 16.54904586a_{10} = 3e^{0.8} - 1 \quad (13)$$

แทนค่า $x = 1.0$

$$2a_1 + 5a_2 + 10a_3 + 17a_4 + 26a_5 + 37a_6 + 50a_7 + 65a_8 + 82a_9 + 101a_{10} = 3e - 1 \quad (14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แทนค่า $x = 1.2$

$$2.2a_1 + 5.84a_2 + 13.248a_3 + 26.2656a_4 + 47.41632a_5 + 80.123904a_6 + 128.9945088a_7 + 200.1803674a_8 + 301.8471506a_9 + 444.7730663a_{10} = 3e^{1.2} - 1 \quad (15)$$

แทนค่า $x = 1.4$

$$2.4a_1 + 6.76a_2 + 17.024a_3 + 38.3376a_4 + 79.46624a_5 + 155.046976a_6 + 289.1341824a_7 + 520.7427098a_8 + 912.4592906a_9 + 1563.746084a_{10} = 3e^{1.4} - 1 \quad (16)$$

แทนค่า $x = 1.6$

$$2.6a_1 + 7.76a_2 + 21.376a_3 + 53.6576a_4 + 125.17376a_5 + 276.29776a_6 + 584.6859776a_7 + 1197.222134a_8 + 2388.001817a_9 + 4662.616496a_{10} = 3e^{1.6} - 1 \quad (17)$$

แทนค่า $x = 1.8$

$$2.8a_1 + 8.84a_2 + 26.352a_3 + 72.7056a_4 + 188.02368a_5 + 462.314304a_6 + 1092.926131a_7 + 2504.660175a_8 + 5598.139973a_9 + 12258.60414a_{10} = 3e^{1.8} - 1 \quad (18)$$

73345
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำสมการ (9) ถึงสมการ (18) ทั้งหมด 10 สมการ ไปใช้วิธีลดตัวแปรของเกาส์เพื่อแก้หาค่า a ทั้งหมดจะได้ค่าดังนี้

$$a_0 = 0.9999999423907596$$
$$a_2 = 0.5000006061841282$$
$$a_3 = 0.16666378737992296$$
$$a_4 = 0.04167486202293864$$
$$a_5 = 0.008318284111570682$$
$$a_6 = 0.0014072895193587337$$
$$a_7 = 1.8333909761699077 \times 10^{-4}$$
$$a_8 = 3.2914349890214726 \times 10^{-5}$$
$$a_9 = 5.045717705440034 \times 10^{-8}$$
$$a_{10} = 7.566064994869466 \times 10^{-7}$$

นำ a ทั้งหมดที่ได้ไปแทนในสมการ (2) จะได้สมการการประมาณค่าโดยพหุนามคือ

$$\begin{aligned} y(x) = 1 &+ (0.9999999423907596)x + (0.5000006061841282)x^2 \\ &+ (0.16666378737992296)x^3 + (0.04167486202293864)x^4 \\ &+ (0.008318284111570682)x^5 + (0.0014072895193587337)x^6 \\ &+ (0.00018333909761699077)x^7 + (0.00003291434989021 4726)x^8 \\ &+ (0.00000050457177054400 34)x^9 + (0.00000075660649948694 66)x^{10} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรมและวิธีการคำนวณ

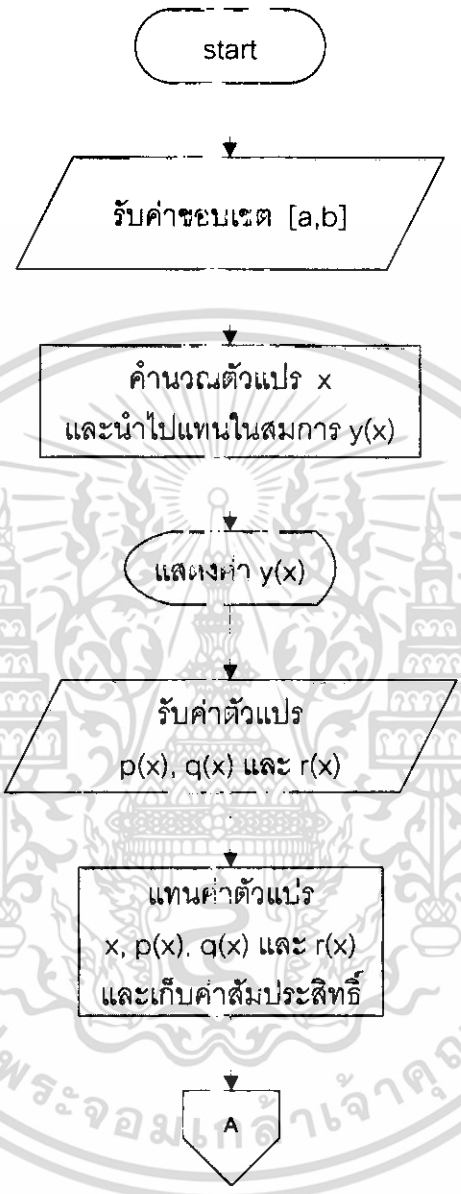
3.1 ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม

1. รับค่าขอบเขตของสมการ $[a,b]$
2. นำค่าขอบเขตของสมการไปคำนวณหาค่าตัวแปร x ในช่วงที่เท่าๆกัน ช่วง h หาจาก
$$h=\frac{b-a}{10}$$
3. นำค่าตัวแปร x ทั้งหมดไปคำนวณในสมการผลเฉลยจริง $y(x)$ และแสดงค่าผลเฉลยจริง $y(x)$
4. รับค่า $p(x),q(x)$ และ $r(x)$
5. นำค่าตัวแปร x ที่เป็นขอบ 2 ค่าไปแทนในสมการ
$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8+a_9x^9+a_{10}x^{10}$
จะได้สมการออกมา 2 สมการ
6. นำค่าตัวแปร x ที่เหลือไปแทนในสมการ
$$\begin{aligned}&a_0q(x)+a_1(xq(x)+p(x))+a_2\left(x^2q(x)+2xp(x)+2\right)\\&+a_3x\left(x^2q(x)+3xp(x)+6\right)+a_4x^2\left(x^2q(x)+4xp(x)+12\right)\\&+a_5x^3\left(x^2q(x)+5xp(x)+20\right)+a_6x^4\left(x^2q(x)+6xp(x)+30\right)\\&+a_7x^5\left(x^2q(x)+7xp(x)+42\right)+a_8x^6\left(x^2q(x)+8xp(x)+56\right)\\&+a_9x^7\left(x^2q(x)+9xp(x)+72\right)+a_{10}x^8\left(x^2q(x)+10xp(x)+90\right)=r(x)\end{aligned}$$
จะได้สมการออกมา 9 สมการ
7. เก็บค่า สัมประสิทธิ์ของทุกสมการ แล้วนำไปคำนวณโดยวิธีลดตัวแปรของเกาส์เพื่อหาค่า $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10}$
8. นำค่า a,x ทั้งหมดไปแทนค่าในสมการ
$y(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8+a_9x^9+a_{10}x^{10}$
จะได้ค่า $y(x)$ ที่ได้จากการคำนวณออกมาหรือ $y_{PA}(x)$
9. คำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนได้จาก $\left|y(x)-y_{PA}(x)\right|$
10. แสดงค่าความคลาดเคลื่อนของสมการ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

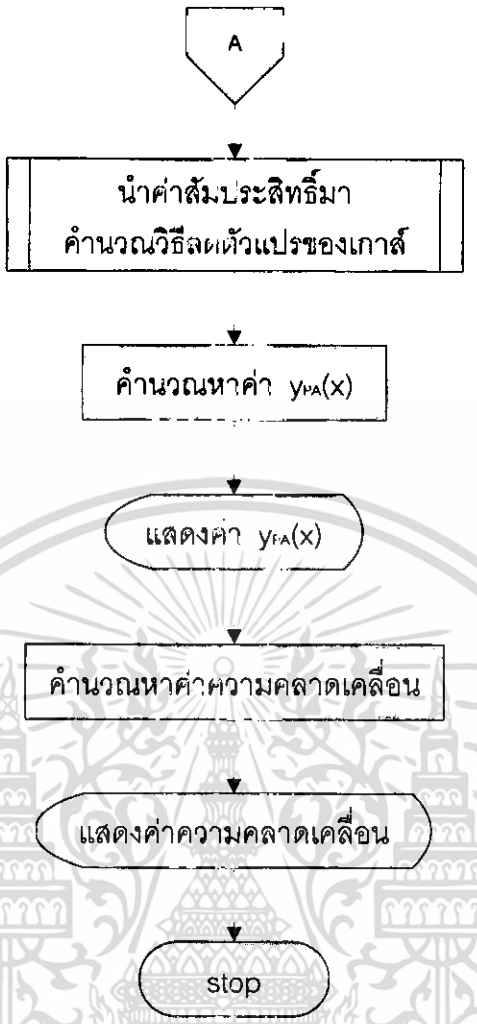
3.2 Flow chart การทำงานทั้งหมดของโปรแกรม

สามารถเขียน Flow chart แสดงการทำงานทั้งหมดของโปรแกรมได้ดังนี้



รูปที่ 3.1 Flow chart การทำงานทั้งหมดของโปรแกรม

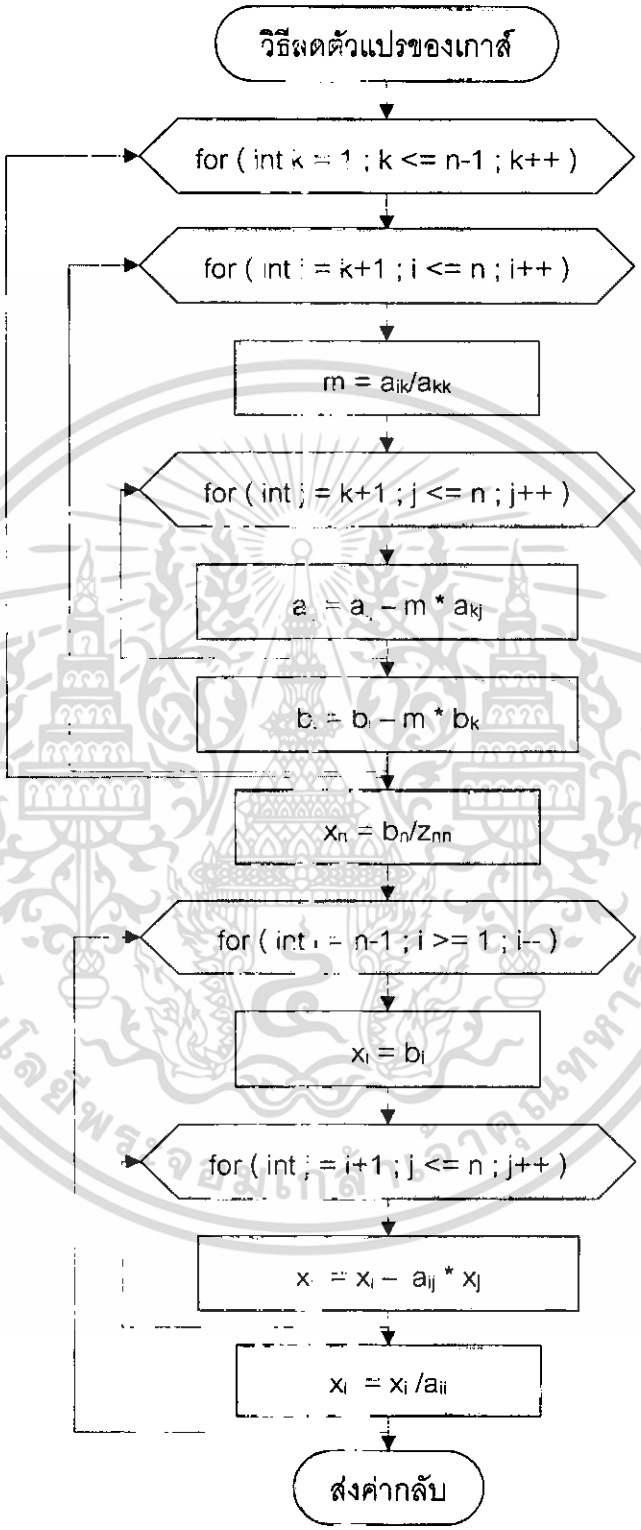
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 3.2 Flow chart การทำงานทั้งหมดของโปรแกรม (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Flow chart วิธีลดตัวแปรของเกาส์เป็นดังนี้



รูปที่ 3.3 Flow chart **วิธีลดตัวแปรของเกาส์**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขต ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยพหุนาม

ในบทนี้จะนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง ด้วยระเบียบวิธีประมาณค่าโดยพหุนาม ไปประมาณค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยการนำคอมพิวเตอร์มาประยุกต์ใช้ในการแก้หาผลเฉลยเชิงตัวเลข และนำผลเฉลยเชิงตัวเลขที่ได้จากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยจริงของปัญหาค่าขอบเขต เพื่อหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

4.1 ตัวอย่างที่ 1

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ $y'' + y' + y = 3e^x \quad , x \in [0,2]$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = e^2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	1.2214027571523425	1.2214027571523425	$1.0078273771085833\times10^{-9}$
0.4	1.4918246983391290	1.4918246983391290	$6.9785865974836270\times10^{-10}$
0.6	1.8221188023647614	1.8221188023647614	$1.9742523171828452\times10^{-9}$
0.8	2.2255409314543610	2.2255409314543610	$2.9618929531238790\times10^{-9}$
1.0	2.7182818321198625	2.7182818321198625	$3.6608169828866720\times10^{-9}$
1.2	3.3201169268363320	3.3201169268363320	$4.0997840677903240\times10^{-9}$
1.4	4.0551999711612600	4.0551999711612600	$4.3165844232362360\times10^{-9}$
1.6	4.9530324287106495	4.9530324287106495	$4.3155345963441505\times10^{-9}$
1.8	6.0496474687218210	6.0496474687218210	$4.3088741463748190\times10^{-9}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 ตัวอย่างที่ 2

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + y' \sin 2x - 2y \cos 2x = -4 \cos 2x - 2 \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = \cos 4$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \cos 2x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.9210609940028851	0.92105981078010800	$1.1832227770902648 \times 10^{-6}$
0.4	0.6967067093471654	0.69670651412171400	$1.9522545136041458 \times 10^{-7}$
0.6	0.3623577544766734	0.36235832976955323	$5.7529287983415500 \times 10^{-7}$
0.8	-0.029199522301288	-0.02919828379049168	$1.2385107972072429 \times 10^{-6}$
1.0	-0.41614836547142	-0.41614506160022613	$1.7749469162775533 \times 10^{-6}$
1.2	-0.737393715541245	-0.73739154924554060	$2.1662957051526988 \times 10^{-6}$
1.4	-0.942222340668658	-0.94221994904320430	$2.3916254540123916 \times 10^{-6}$
1.6	-0.998294775794753	-0.998292359607326 0	$2.4161874271344530 \times 10^{-6}$
1.8	-0.896758416334147	-0.8967560872569611	$2.3290771858919257 \times 10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 ตัวอย่างที่ 3

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$2y'' + 5\pi y' + \pi y = (2\pi + 1)\pi \cos \pi x + 5\pi^2 \sin \pi x \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(1) = -\cos \pi$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = -\cos \pi x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากกระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.3 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	-0.95105651629515350	-0.95105688694191700	$7.2399038208992300 \times 10^{-8}$
0.2	-0.80901699437494750	-0.809017161728637200	$1.6735368979503562 \times 10^{-7}$
0.3	-0.58778525229247300	-0.587785458728385200	$2.0643591214231094 \times 10^{-7}$
0.4	-0.30901699437494745	-0.309017216677497200	$2.2230254975719177 \times 10^{-7}$
0.5	-6.1232339957367E-17	-2.271286212242925E-7	$2.2712862116306017 \times 10^{-7}$
0.6	0.30901699437494756 0	0.309016767648215230 0	$2.2672673233303797 \times 10^{-7}$
0.7	0.58778525229247300 0	0.587785027849463500 0	$2.2444300951107720 \times 10^{-7}$
0.8	0.80901699437494730 0	0.809016774697539300 0	$2.1967740804207380 \times 10^{-7}$
0.9	0.95105651629515350 0	0.951056293070643700 0	$2.2322450987655174 \times 10^{-7}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4 ตัวอย่างที่ 4

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - 2y' + 4y = 4e^{2x}\cos 2x \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = e^2 \sin 2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^{2x}\sin 2x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากกระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.4 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.24265526859492295	0.24265529050248277	$2.1907559821787714\times10^{-8}$
0.2	0.58094390077056720	0.58094391963887450	$1.8868307249952920\times10^{-8}$
0.3	1.02884566627209200	1.02884568178805800	$1.5515966067525255\times10^{-8}$
0.4	1.59650534060025120	1.59650535113911190	$1.0538860673037220\times10^{-8}$
0.5	2.28735528717884270	2.28735529122324100	$4.0443981497162440\times10^{-9}$
0.6	3.09447874197169260	3.09447873790357960	$4.0681129576114470\times10^{-9}$
0.7	3.99619571237629860	3.99619569852512900	$1.3851169544665254\times10^{-8}$
0.8	4.95092046643402650	4.95092044150916700	$2.4924859509667385\times10^{-8}$
0.9	5.89143485086682800	5.89143481160778600	$3.9259042239336850\times10^{-8}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.5 ตัวอย่างที่ 5

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$9y'' - 12y' + 14y = 10e^{\frac{2}{3}x} \quad , x \in [0,3]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(3) = e^2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^{\frac{2}{3}x}$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.5 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.3	1.2214027581601699	1.2214028103620145	$5.2201844624732985\times10^{-8}$
0.6	1.4918246976412703	1.4918248243465702	$1.2670529980773892\times10^{-7}$
0.9	1.8221188003905089	1.8221190164798484	$2.1608933953309872\times10^{-7}$
1.2	2.2255409284924674	2.2255412411924453	$3.1269997791127935\times10^{-7}$
1.5	2.7182818284590455	2.7182822320724287	$4.0361338315975104\times10^{-7}$
1.8	3.3201169227365472	3.320117393306094	$4.7056954688429187\times10^{-7}$
2.1	4.055199966844675	4.05520045723875	$4.903940746814328\times10^{-7}$
2.4	4.953032424395114	4.953032860908181	$4.3651306658176736\times10^{-7}$
2.7	6.049647464412945	6.0496477464022576	$2.8198931278922146\times10^{-7}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.6 ตัวอย่างที่ 6

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - 2y' + 4y = -5\sin 3x - 6\cos 3x \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = \sin 3$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \sin 3x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.6 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.2955202066613396	0.29552023286098733	$2.619964772909711 \times 10^{-8}$
0.2	0.5646424733950355	0.56464250167321120	$2.8278175689955276 \times 10^{-8}$
0.3	0.7833269096274835	0.78332694012307880	$3.0495595271240460 \times 10^{-8}$
0.4	0.9320390859672264	0.93203911770004170	$3.1732815264362560 \times 10^{-8}$
0.5	0.9974949866040544	0.99749501847722500	$3.1873170547314090 \times 10^{-8}$
0.6	0.9738476308781951	0.97384766150602840	$3.0627833269569750 \times 10^{-8}$
0.7	0.8632093666488737	0.86320939440991720	$2.7761043464025192 \times 10^{-8}$
0.8	0.6754631805511506	0.67546320356762830	$2.3016477723736273 \times 10^{-8}$
0.9	0.4273798802338298	0.42737989662462100	$1.6390791224285550 \times 10^{-8}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.7 ตัวอย่างที่ 7

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - y' - 2y = -2xe^x + e^x \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = e^2 + e$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^{2x} + xe^x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.7 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 7

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	1.7361052492733045	1.7360908511017639	$1.4398171540586091\times10^{-5}$
0.4	2.8222708075489760	2.8222599954047345	$1.0812144241700850\times10^{-5}$
0.6	4.4133882029708540	4.4133799432968120	$8.2596740416107650\times10^{-6}$
0.8	6.7334651671890890	6.7334594246320730	$5.7425570156866000\times10^{-6}$
1.0	10.107337927389697	10.107334713446644	$3.2139430530264690\times10^{-6}$
1.2	15.007316687925464	15.007316279995324	$4.0793013944551150\times10^{-7}$
1.4	22.121926724679600	22.121929732088020	$3.0074084200748530\times10^{-6}$
1.6	32.457382076141535	32.457389400612070	$7.3244705376396270\times10^{-6}$
1.8	47.487599879621290	47.487613988991086	$1.4109369793402493\times10^{-5}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.8 ตัวอย่างที่ 8

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + y' + xy = \frac{x}{(1+x)^2} + x\ln(x+1) \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(2) = \ln 3$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \ln(x+1)$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.8 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 8

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.18232155679395460	0.18231590732097622	$5.6494729783751470\times10^{-6}$
0.4	0.33647223662121284	0.33646763599307340	$4.6006281394506130\times10^{-6}$
0.6	0.47000362924573560	0.46999992821577236	$3.7010299632211920\times10^{-6}$
0.8	0.58778666490211910	0.58778392055339200	$2.7443487270462086\times10^{-6}$
1.0	0.69314718055994530	0.69314539063095990	$1.7899289853628986\times10^{-6}$
1.2	0.78845736036427030	0.78845650218381680	$8.5818045347796360\times10^{-7}$
1.4	0.87546873735390010	0.87546876589974380	$2.8545843688831950\times10^{-8}$
1.6	0.95551144502743650	0.95551227362094090	$8.2859350447606060\times10^{-7}$
1.8	1.02961941718115810	1.02962104642768340	$1.6292465252476518\times10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.9 ตัวอย่างที่ 9

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - 2y' + 4y = 12x^2 - 28x + 18 \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = 5$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = 3x^2 - 4x + 1$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.9 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 9

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.31999999999999995	0.3200000000000004500	$4.996003610813204\times10^{-16}$
0.4	-0.1200000000000001	-0.11999999999996190	$3.913536161803677\times10^{-15}$
0.6	-0.3200000000000000	-0.31999999999992570	$7.494005416219807\times10^{-15}$
0.8	-0.2799999999999998	-0.31999999999992570	$1.210143096841420\times10^{-14}$
1.0	0.00000000000000000	1.582003041908578E-14	$1.582003041908578\times10^{-14}$
1.2	0.52000000000000050	0.5200000000000187000	$1.820765760385256\times10^{-14}$
1.4	1.28000000000000020	1.2800000000000191000	$1.887379141862766\times10^{-14}$
1.6	2.28000000000000100	2.2800000000000176000	$1.643130076445231\times10^{-14}$
1.8	3.52000000000000050	3.5200000000000090000	$8.437694987151190\times10^{-15}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.10 ตัวอย่างที่ 10

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + e^x y' + y = x^2 + 2xe^x + 3 \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = 5$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = x^2 + 1$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.10 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 10

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	1.0400000000000000	1.0399999999999998	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
0.4	1.1600000000000001	1.1600000000000004	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
0.6	1.3600000000000000	1.3600000000000003	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
0.8	1.6400000000000001	1.6400000000000003	$2.220446049250313 \times 10^{-16}$
1.0	2.0000000000000000	2.0000000000000000	0.0000000000000000000
1.2	2.4400000000000004	2.4400000000000010	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$
1.4	2.9600000000000004	2.9600000000000004	0.0000000000000000000
1.6	3.5600000000000005	3.5600000000000010	$4.440892098500626 \times 10^{-16}$
1.8	4.2400000000000000	4.2399999999999990	$8.881784197001252 \times 10^{-16}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.11 ตัวอย่างที่ 11

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - 4y' + 16y = 8\sin^2 2x - 8\cos^2 2x \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = \sin 2 \cos 2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \sin 2x \cos 2x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.11 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 11

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.1947091711543252300	0.194709082810796190	$8.834352904774079\times10^{-8}$
0.2	0.3586780454497614000	0.358678374335844760	$3.288860833672302\times10^{-7}$
0.3	0.4660195429836132600	0.466020408356311900	$8.653726986662669\times10^{-7}$
0.4	0.4997868015207525500	0.499788302997868030	$1.501477115473104\times10^{-6}$
0.5	0.4546487134128409000	0.454650871333507400	$2.157920666490120\times10^{-6}$
0.6	0.3377315902755753000	0.337734308803521100	$2.718527945810844\times10^{-6}$
0.7	0.1674940750779523600	0.167497102734185330	$3.027656232973408\times10^{-6}$
0.8	-0.029187071713790043	-0.02918417381347918	$2.897900310862289\times10^{-6}$
0.9	-0.221260221647426230	-0.22125805662202797	$2.165025398265241\times10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.12 ตัวอย่างที่ 12

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + y' - 12y = \frac{-16e^{-4x} - 14xe^{-4x}}{(1+x)^2} \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = 2e^{-4} \ln 2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = 2e^{-4x} \ln(x+1)$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากกระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.12 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 12

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.12777664822820030	0.12776898405557072 0	$7.6641726295956230\times10^{-6}$
0.2	0.16384471250093360	0.16384012297404077 0	$4.5895268928342060\times10^{-6}$
0.3	0.15804519574042103	0.15804248076508330 0	$2.7149753377420094\times10^{-6}$
0.4	0.13586514595139330	0.13586386717361150 0	$1.2787777817768742\times10^{-6}$
0.5	0.10974747049676443	0.10974733239449837 0	$1.3810226606736364\times10^{-7}$
0.6	0.08527553456753795	0.08527641280722499 0	$8.7823968704381360\times10^{-7}$
0.7	0.06453507435560092	0.06453698325706379 0	$1.9089014628714818\times10^{-6}$
0.8	0.04791895986100752	0.04792198029082661 6	$3.0204298190963930\times10^{-6}$
0.9	0.03507567487498125	0.03508031045071766 0	$4.6355757364127670\times10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.13 ตัวอย่างที่ 13

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + y = \frac{-3x^4 + 6x}{(x^3+1)^2} + \ln(x^3+1) \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(2) = \ln 9$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \ln(x^3+1)$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.13 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 13

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.00796816964917688 1	0.0060563864714859176	0.0019117831776909637
0.4	0.062035390919452700	0.0605462964564674540	0.0014890944629852437
0.6	0.195566783543975410	0.1944404912517306600	0.0011262922922447571
0.8	0.413433277757341230	0.4127374847654300000	$6.9579299191124820\times10^{-4}$
1.0	0.693147180559945300	0.6929032843979255000	$2.4389616201980768\times10^{-4}$
1.2	1.003568739981215900	1.0037876396222540000	$2.1889964103816162\times10^{-4}$
1.4	1.320154558615345800	1.3208303733876197000	$6.7581477227385280\times10^{-4}$
1.6	1.628455918269862400	1.6295480933394106000	0.0010921750695482846
1.8	1.921617456486269000	1.9231652025851620000	0.0015477460988930770

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.14 ตัวอย่างที่ 14

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - y' - 2y = 9x^2e^{2x} + 6xe^{2x} \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(2) = 8e^4$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = x^3e^{2x}$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากกระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.14 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 14

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.011934597581130166	0.008773231861270514	0.0031613657198596520
0.4	0.142434619423517980	0.140071073092992300	0.0023635463305256843
0.6	0.717145255311094600	0.715354107665514800	0.0017911476455798603
0.8	2.535952601290299300	2.534731170733436000	0.0012214305568631900
1.0	7.389056098930650000	7.388414089659333000	$6.4200927131707890\times10^{-4}$
1.2	19.04804878574870000	19.04805806426069400	$9.2785119925054000\times10^{-6}$
1.4	45.12411073989033400	45.12492215982845000	$8.1141993811684190\times10^{-4}$
1.6	100.4852436873599300	100.4870780527763700	0.0018343654164425516
1.8	213.4409032755300500	213.4443564483198400	0.0034531727897899600

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.15 ตัวอย่างที่ 15

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - 2xy' + 4y = \frac{-2x^4 - 2x^2 + 4 + 4(x^2+1)^2 \ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = \ln 2 + 1$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \ln(x^2+1) + x^2$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.15 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 15

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.019950330853168094	0.019949093037942414	$1.2378152256797836\times10^{-6}$
0.2	0.079220713153281330	0.079219513229375630	$1.1999239056953437\times10^{-6}$
0.3	0.176177696241052420	0.176176535845952910	$1.1603950995087153\times10^{-6}$
0.4	0.308420005118273440	0.308418942162824100	$1.0629554493268856\times10^{-6}$
0.5	0.473143551314209760	0.473142636314040600	$9.1500016918821810\times10^{-7}$
0.6	0.667484699747960900	0.667483987096033800	$7.1265192702618660\times10^{-7}$
0.7	0.888776119957368000	0.888775666728032000	$4.5322933606151140\times10^{-7}$
0.8	1.134696241836107300	1.134696101913467400	$1.3992263991902120\times10^{-7}$
0.9	1.403326845277734300	1.403327109038267000	$2.6376053274823620\times10^{-7}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.16 ตัวอย่างที่ 16

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + y' + 16y = 16e^{-x} - 8\sin 4x \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 3, y(2) = e^{-2} + 2\cos 8$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^{-x} + 2\cos 4x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.16 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 16

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	2.21214417177231270	2.19998377242791630	0.0121603993443963890
0.4	0.61192100143306170	0.59345808494328190	0.0184629164897798240
0.6	-0.9259757949884652	-0.9393239677293241	0.0133481727408589770
0.8	-1.5472605874722847	-1.5491014319423353	0.0018408444700506177
1.0	-0.9394078005557815	-0.9308117419893293	0.0085960585664522910
1.2	0.47619217879109654	0.48860953338475730	0.0124173545936607790
1.4	1.79772872096210670	1.80643678182132380	0.0087080608592171600
1.6	2.18826635551104070	2.18919444574166280	0.0009280902306221 25
1.8	1.38200151728609550	1.37574539951286570	0.0062561177732298745

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.17 ตัวอย่างที่ 17

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + \frac{y'}{x+1} + 4y = \frac{4(x+1)\ln(x+1) - 2\sin 2x}{x+1} \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = \cos 4 + \ln 3$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \cos 2x + \ln(x+1)$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.17 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 17

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	1.103382550796839800	1.103374323815310400	$8.2269815293578570\times10^{-6}$
0.4	1.033178945968378200	1.033172572080072800	$6.3738883053776620\times10^{-6}$
0.6	0.832361383722409000	0.832357301330390700	$4.0823920183230555\times10^{-6}$
0.8	0.558587142600830200	0.558585723833058900	$1.4187677712662605\times10^{-6}$
1.0	0.277000344012802900	0.277001512898609250	$1.1688858063685360\times10^{-6}$
1.2	0.051063644823024500	0.051066978799600750	$3.3339765762516183\times10^{-6}$
1.4	-0.06675360331475821	-0.06674879034626945	$4.8129684887682210\times10^{-6}$
1.6	-0.04278333076731666	-0.04277791374574884	$5.4170215678245315\times10^{-6}$
1.8	0.132861000847011130	0.132866324070915200	$5.3232239040634790\times10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.18 ตัวอย่างที่ 18

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + \frac{y'}{x+1} = 0 \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = \ln 2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \ln(x+1)$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.18 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 18

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.09531017980432493	0.09531014397186574	$3.583245919425160 \times 10^{-8}$
0.2	0.18232155679395460	0.18232153062822196	$2.616573263614086 \times 10^{-8}$
0.3	0.26236426446749106	0.26236424573820360	$1.872928745427771 \times 10^{-8}$
0.4	0.33647223662121284	0.33647222498139134	$1.163982149554598 \times 10^{-8}$
0.5	0.40546510810816440	0.40546510302407730	$5.084087095763579 \times 10^{-9}$
0.6	0.47000362924573560	0.47000363029636600	$1.050630415999620 \times 10^{-9}$
0.7	0.53062825106217050	0.53062825790903490	$6.846864408771580 \times 10^{-9}$
0.8	0.58778666490211910	0.58778667706791100	$1.216579192941935 \times 10^{-8}$
0.9	0.64185388617239470	0.64185390430087350	$1.812847882920465 \times 10^{-8}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.19 ตัวอย่างที่ 19

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - 2y' - y = 4x^2 e^{x^2+x} \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $x \in [0,1], y(0) = 1, y(1) = e^2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^{x^2+x}$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.19 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 19

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	1.1162780704588713	1.1162724304965403	$5.6399623309388860\times10^{-6}$
0.2	1.2712491503214047	1.2712444607228077	$4.6895985970074605\times10^{-6}$
0.3	1.4769807938826427	1.4769769074858772	$3.8863967655178300\times10^{-6}$
0.4	1.7506725002961010	1.7506696002303976	$2.9000657033595445\times10^{-6}$
0.5	2.1170000166126750	2.1169982771134888	$1.7394991860264497\times10^{-6}$
0.6	2.6116964734231183	2.6116961333450140	$3.4007810434388830\times10^{-7}$
0.7	3.2870812073831190	3.2870825826065158	$1.3752233969377414\times10^{-6}$
0.8	4.2206958169965530	4.2206992534776520	$3.4364810987952410\times10^{-6}$
0.9	5.5289614776240040	5.5289678204870340	$6.3428630294737330\times10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.20 ตัวอย่างที่ 20

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' - 2y' + y = \frac{-e^x}{(x+1)^2} \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = e \ln 2$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^x \ln(x+1)$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.20 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 20

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.10533403891630085	0.10533402360044003	$1.5315860815712234 \times 10^{-8}$
0.2	0.22268805234019220	0.22268803809432866	$1.4245863544370962 \times 10^{-8}$
0.3	0.35415471318464264	0.35415469974583214	$1.3438810508858978 \times 10^{-8}$
0.4	0.50195759266212280	0.50195758045117330	$1.2210949473789867 \times 10^{-8}$
0.5	0.66849894826465760	0.66849893766616630	$1.0598491306801350 \times 10^{-8}$
0.6	0.85640244910042530	0.85640244059334400	$8.5070812616550030 \times 10^{-9}$
0.7	1.06855407723676970	1.06855407138556640	$5.8512032996560490 \times 10^{-9}$
0.8	1.30814327996175320	1.30814327737822930	$2.5835238393057125 \times 10^{-9}$
0.9	1.57870581533780060	1.57870581704702180	$1.7092212090119574 \times 10^{-9}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.21 ตัวอย่างที่ 21

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + y' - y = \cosh x \quad , x \in [0,1]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(1) = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \sinh x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.21 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 21

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.1	0.10016675001984410	0.10016675001939226	$4.518330154468231 \times 10^{-13}$
0.2	0.20133600254109402	0.20133600254084302	$2.509936702921322 \times 10^{-13}$
0.3	0.30452029344714270	0.30452029344704790	$9.481304630298837 \times 10^{-14}$
0.4	0.41075232580281550	0.41075232580286470	$4.918287999089443 \times 10^{-13}$
0.5	0.52109530549374740	0.52109530549392640	$1.789679515695752 \times 10^{-13}$
0.6	0.63665358214824130	0.63665358214853930	$2.979838598093920 \times 10^{-13}$
0.7	0.75858370183953360	0.75858370183994350	$4.098943406916078 \times 10^{-13}$
0.8	0.88810598218762320	0.88810598218813360	$5.104805467226470 \times 10^{-13}$
0.9	1.02651672570817530	1.02651672570881000	$6.346034808757395 \times 10^{-13}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.22 ตัวอย่างที่ 22

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + 2y' + y = \cosh 2x + 4e^{2x} \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = \frac{e^8 + 1}{2e^4}$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \cosh 2x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.22 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 22

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	1.0810723718384550	1.0810750825580170	$2.7107195621489666\times10^{-6}$
0.4	1.3374349463048447	1.3374442736920775	$9.3273872328047960\times10^{-6}$
0.6	1.8106555673243752	1.8106688337399810	$1.3266415605839299\times10^{-5}$
0.8	2.5774644711948853	2.5774799690091930	$1.5497814307874336\times10^{-5}$
1.0	3.7621956910836314	3.7622121718369810	$1.6480753349590316\times10^{-5}$
1.2	5.5569471669655090	5.5569637599802250	$1.6593014716015375\times10^{-5}$
1.4	8.2527284168611370	8.2527445583780580	$1.6141516921308607\times10^{-5}$
1.6	12.286646200543860	12.286661437098001	$1.5236554141040415\times10^{-5}$
1.8	18.312779083062640	18.312793693345600	$1.4610282960347831\cdot10^{-5}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.23 ตัวอย่างที่ 23

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + 5y' + 4y = 10\cos 2x \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(2) = \sin 4$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \sin 2x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.23 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 23

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.38941834230865050	0.38942300411842990	$4.6618097793715840\times10^{-6}$
0.4	0.71735609089952280	0.71736214138095470	$6.0504814318740330\times10^{-6}$
0.6	0.93203908596722640	0.93204503752138260	$5.9515541561694360\times10^{-6}$
0.8	0.99957360304150510	0.99957892464398180	$5.3216024766822300\times10^{-6}$
1.0	0.90929742682568170	0.90930198585627850	$4.5590305968179480\times10^{-6}$
1.2	0.67546318055115060	0.67546700296881550	$3.8224176648338215\times10^{-6}$
1.4	0.33498815015590466	0.33499132257266670	$3.1724167620650334\times10^{-6}$
1.6	-0.0583741434275800	-0.05837153606827838	$2.6073593017011953\times10^{-6}$
1.8	-0.4425204432948524	-0.4425182422253704	$2.2010694820662202\times10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.24 ตัวอย่างที่ 24

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + 5y' + 4y = -10\sin 2x \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(2) = \cos 4$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = \cos 2x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.24 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 24

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.92106099400288510 0	0.92106751087226020 0	$6.5168693751394000\times10^{-6}$
0.4	0.69670670934716540 0	0.69671562570929000 0	$8.9163621246335370\times10^{-6}$
0.6	0.36235775447667340 0	0.36236663931483615 0	$8.8848381627482100\times10^{-6}$
0.8	-0.02919952230128881	-0.02919153341005855	$7.9888912302636400\times10^{-6}$
1.0	-0.41614683654714240	-0.41613997418603540	$6.8623611070295350\times10^{-6}$
1.2	-0.73739371554124580	-0.73738795455182240	$5.7609894233978665\times10^{-6}$
1.4	-0.94222234066865830	-0.94221755510642700	$4.7855622312686920\times10^{-6}$
1.6	-0.99829477579475310	-0.99829084318591930	$3.9326088338009770\times10^{-6}$
1.8	-0.89675841633414700	-0.89675508840435710	$3.3279297898536340\times10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.25 ตัวอย่างที่ 25

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + 5y' + 4y = 28e^{3x} \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 1, y(2) = e^6$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = e^{3x}$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.25 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 25

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	1.8221188003905090	1.8441025004326752	0.021983700042166100
0.4	3.3201169227365480	3.3490024172196136	0.028885494483065433
0.6	6.0496474644129470	6.0781500148929080	0.028502550479960753
0.8	11.023176380641605	11.048696690020096	0.025520309378491035
1.0	20.085536923187668	20.107414244833947	0.021877321646279313
1.2	36.598234443678010	36.616583146644324	0.018348702966314080
1.4	66.686331040925150	66.701561970180880	0.015230929255722003
1.6	121.51041751873497	121.52293766776796	0.012520149032994254
1.8	221.40641620418717	221.41698135654502	0.010565152357855823

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.26 ตัวอย่างที่ 26

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$y'' + 5y' + 4y = 4x^2 + 22x + 17 \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(2) = 10$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = x^2 + 3x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.26 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 26

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	0.6400000000000001	0.6400000000000097	$9.547918011776346\times10^{-15}$
0.4	1.3600000000000003	1.3600000000000120	$1.176836406102666\times10^{-14}$
0.6	2.1600000000000000	2.1600000000000120	$1.199040866595169\times10^{-14}$
0.8	3.0400000000000005	3.0400000000000102	$9.769962616701378\times10^{-15}$
1.0	4.0000000000000000	4.0000000000000090	$8.881784197001252\times10^{-15}$
1.2	5.0400000000000010	5.0400000000000100	$8.881784197001252\times10^{-15}$
1.4	6.1600000000000000	6.1600000000000070	$7.105427357601002\times10^{-15}$
1.6	7.3600000000000010	7.3600000000000065	$5.329070518200751\times10^{-15}$
1.8	8.6400000000000000	8.6400000000000080	$7.105427357601002\times10^{-15}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.27 ตัวอย่างที่ 27

การหาผลเฉลยปัญหาค่าขอบเขตของสมการ

$$7y'' - 2y' + 12y = 12x^2 - 28x + 18 \quad , x \in [0,2]$$

โดยมีเงื่อนไข $y(0) = 0, y(2) = 0$

ผลเฉลยจริงของสมการนี้คือ $y = x^2 - 2x$

โดยสามารถหาผลเฉลยจริงและผลเฉลยเชิงตัวเลขจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามเพื่อนำไปหาค่าความคลาดเคลื่อน ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 4.27 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 27

x	$y(x)$	ค่า y ที่คำนวณด้วย PA	ค่าคลาดเคลื่อน
0.2	-0.360000000000000	-0.3599999999999951	$4.8849813083506890 \times 10^{-15}$
0.4	-0.640000000000000	-0.6399999999999929	$7.1054273576010020 \times 10^{-15}$
0.6	-0.840000000000000	-0.8399999999999910	$9.1038288019262840 \times 10^{-15}$
0.8	-0.960000000000000	-0.9599999999999894	$1.0547118733938987 \times 10^{-14}$
1.0	-1.000000000000000	-0.9999999999999890	$1.0991207943789050 \times 10^{-14}$
1.2	-0.960000000000000	-0.9599999999999896	$1.0325074129013956 \times 10^{-14}$
1.4	-0.839999999999999	-0.8399999999999908	$9.1038288019262840 \times 10^{-15}$
1.6	-0.639999999999999	-0.6399999999999922	$7.4384942649885490 \times 10^{-15}$
1.8	-0.359999999999999	-0.3599999999999966	$3.2196467714129540 \times 10^{-15}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

1. การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ด้วยระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามนั้นสามารถใช้ได้ดีกับปัญหาค่าขอบเขตที่มีผลเฉลยเป็นฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอกซ์โปแนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค และ รูปแบบผลบวกหรือผลคูณของฟังก์ชันเหล่านี้ ซึ่งจากตัวอย่างจะพบว่า ผลเฉลยที่เกิดจากการคำนวณด้วยระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามถูกต้องและแม่นยำ ซึ่งดูได้จากค่าความคลาดเคลื่อนมีค่าที่ยอมรับได้โดยเฉพาะสมการที่มีผลเฉลยในรูปของฟังก์ชันพหุนาม
2. ระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามนี้สามารถหาผลเฉลยได้ในทุกค่า $x \in [a,b]$ เช่น จากตัวอย่างในหน้า 14 สามารถหาค่า $y(1.01)$ ได้โดยการแทนค่า 1.01 ลงในสมการการประมาณค่าโดยพหุนามคือ

$$\begin{aligned} y(1.01) &= 1 + 0.9999999423907596(1.01) + 0.5000006061841282(1.01)^2 \\ &\quad + 0.1666637873799 2296(1.01)^3 + 0.0416748620229 3864(1.01)^4 \\ &\quad + 0.0083182841115 70682(1.01)^5 + 0.0014072895193587337(1.01)^6 \\ &\quad + 0.0001833390976 1699077(1.01)^7 + 0.0000329143498 90214726(1.01)^8 \\ &\quad + 0.0000000504571770 5440034(1.01)^9 + 0.0000007566064994869466(1.01)^{10} \\ &= 2.7456010187060813 \end{aligned}$$

5.2 ข้อเสนอแนะ

1. การเพิ่มดีกรีของพหุนามให้มากขึ้น จะมีผลทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยลง ในปัญหาพิเศษนี้มีได้จัดรูปพหุนามให้อยู่ในดีกรี 10 ถ้าต้องการคำตอบจากระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนาม ที่มีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยลง ก็สามารถเพิ่มดีกรีพหุนามให้มากกว่า 10 ได้
2. ระเบียบวิธีการประมาณค่าโดยพหุนามนี้สามารถใช้แก้ปัญหาค่าขอบเขตของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีอันดับมากกว่า 2 ได้ โดยการหาอนุพันธ์ของพหุนามตามอันดับของปัญหาค่าขอบเขตนั้นๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

[1] M. Podisuk and P. Chaisanit. **Solving Boundary Value Problem of OdinaryDifferential Equations by Polynomials**. Bangkok : KMITL. 2005

[2] ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง และ ศรีบุตร แววเจริญ. **อนุพันธ์และการประยุกต์**. กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์วงตะวัน. 2545

[3] ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**. กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้