

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การศึกษาทฤษฎีจุดตรึงใหม่

STUDY ON A NEW FIXED POINT THEOREM



ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

STUDY ON A NEW FIXED POINT THEOREM



A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2006

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การศึกษาทฤษฎีจุดตรึงใหม่
STUDY QN A NEW FIXED POINT THEOREM

ชื่อนักศึกษา นายวีรพล พราหมณพันธ์ 46050034
นายอาทิตย์ ศิริรูป 46050045

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ
อ.อาทิตย์ แข็งธัญการ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2549

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์
กรรมการ	รศ.ภักคินี ชิตสกุล
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	อ.อาทิตย์ แข็งธัญการ

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การศึกษาทฤษฎีจุดตรึงใหม่
ชื่อนักศึกษา นายวีรพล พราหมณพันธุ์ 46050034
นายอาทิตย์ ศิริรูป 46050045
ปริญญา วิทยาศาสตร์บัณฑิต
ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา 2549
อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ
อ.อาทิตย์ แข็งธัญการ

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับจุดตรึงเพื่อนำมาเรียนรู้ทฤษฎีบทการลู่อเข้าของจุดตรึงของอซิกวาในปริภูมิเมตริกคยอมนวมกซ์

Special Project Title	STUDY ON A NEW FIXED POINT THEOREM	
Students	Mr.Veeraphon parmmanaphan	46050034
	Mr.Artit Siriroop	46050045
Degree	Bachelor of Science	
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science	
Programme	Applied Mathematics	
Academic Year	2006	
Special Project Advisor	Dr.Kanchana Kumnungkit	
	Artit Kangthunkarn	



ABSTRACT

The special project studies some fundamental definitions and fixed point theorems. The main idea learns about "a new convergence theorem of the Ishikawa type iterative sequences with errors for generalized quasi-contractive mapping in convex metric space".

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องทฤษฎีจุดตรึงนี้ สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์กาญจนา คำนึ่งกิจ และ อาจารย์ อาทิตย์ แข็งธัญการ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำ และเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาดังกล่าว รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ และขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ได้ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ในการทำปัญหาพิเศษ รวมทั้งเพื่อนๆที่ให้คำแนะนำแก่คณะผู้จัดทำจนปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลด้วยดี



คณะผู้จัดทำ
กุมภาพันธ์ 2550

สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 รูปประกอบคอนเวกซ์เซต.....	1
2.2 รูปประกอบเซตไม่คอนเวกซ์.....	1
2.3 รูปประกอบทรงกลมเปิด.....	4
2.4 รูปประกอบทรงกลมปิด.....	4
2.5 รูปประกอบความต่อเนื่อง.....	5
2.6 รูปประกอบการลู่เข้าของลำดับ.....	5
2.7 รูปประกอบความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน.....	6
2.8 รูปประกอบความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน.....	7
2.9 รูปประกอบจุดตรึง.....	8
2.10 รูปประกอบจุดตรึง.....	9

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

เนื่องจากทฤษฎีจุดตรึงเป็นหัวข้อหนึ่งที่นักคณิตศาสตร์ให้ความสนใจและในที่นี่เพื่อขยายขอบเขตการศึกษาจากบทเรียนในเรื่องปริภูมิเมตริก ดังนั้นการแก้ปัญหาพิเศษนี้จึงศึกษาทฤษฎีเฉพาะเรื่องที่เกี่ยวข้องกับปริภูมิเมตริก

การดำเนินการ

- 1) ศึกษานิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
- 2) พิสูจน์ทฤษฎีต่างๆ

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำ

เพื่อศึกษาและทำความเข้าใจต่อทฤษฎีจุดตรึง

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ศึกษาปริภูมิเมตริกและทำความเข้าใจต่อทฤษฎีจุดตรึง

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

- 1) มีความรู้ความเข้าใจในการพิสูจน์
- 2) ได้เรียนรู้กระบวนการทางคณิตศาสตร์
- 3) มีความเข้าใจในทฤษฎีจุดตรึง

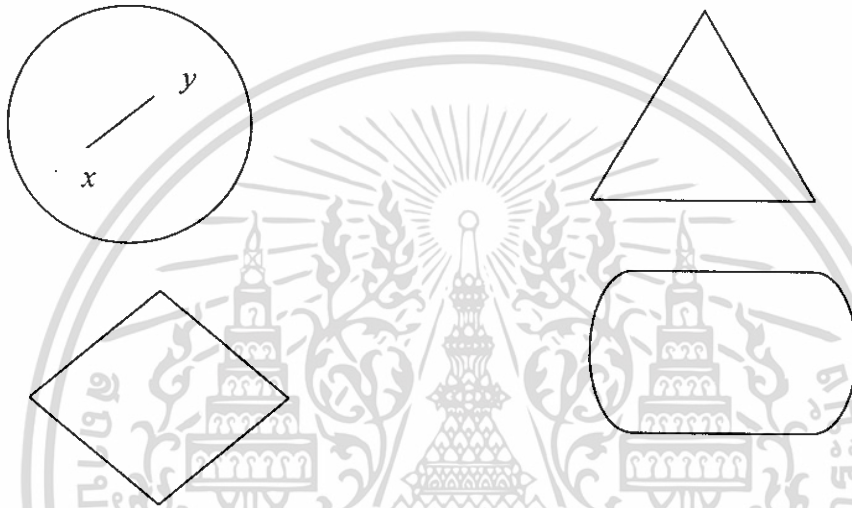
1.5 ขั้นตอนในดำเนินการ

- 1) ศึกษาและทำความเข้าใจทฤษฎีบทพื้นฐาน
- 2) นำความรู้ที่ศึกษาได้มาวิเคราะห์บทพิสูจน์

บทที่ 2 นิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน

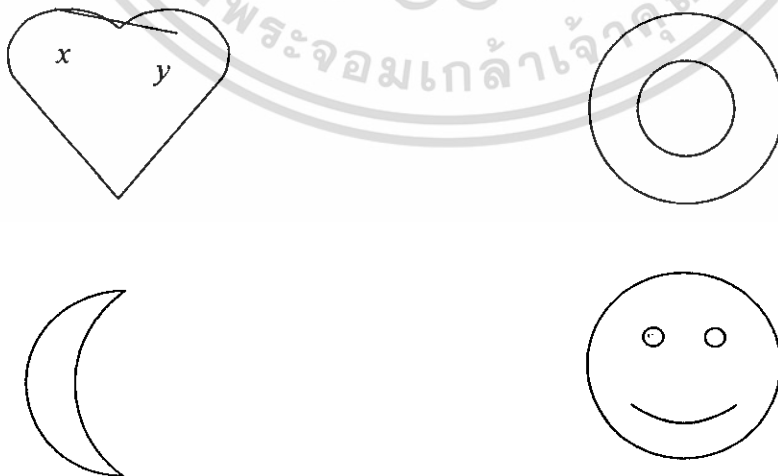
นิยาม 2.1 ให้ A เป็นเซตของปริภูมิเวกเตอร์จะกล่าวว่าเป็น คอนเวกซ์เซต ถ้าทุกสมาชิก $x, y \in A$ แล้ว $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ เมื่อ $\lambda \in [0, 1]$

ตัวอย่าง 2.1



รูปที่ 2.1 ตัวอย่างคอนเวกซ์เซต

เราพบว่ารูปที่เป็นคอนเวกซ์เซตเราสามารถสร้างเส้นตรงจากจุด x, y โดยที่จุดบนเส้นตรงยังคงเป็นสมาชิกของเซตนั้น



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างเซตที่ไม่เป็นคอนเวกซ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราพบว่ารูปที่ไม่เป็นคอนเวกซ์เซตเราไม่สามารถสร้างเส้นตรงจากจุด x, y โดยที่จุดบนเส้นตรงนั้นไม่เป็นสมาชิกของเซต

นิยาม 2.2 กำหนด X เป็นเซตใดๆ โดยที่ X ไม่เป็นเซตว่างและ R เป็นเซตของจำนวนจริง d เป็นฟังก์ชันจาก $X \times X \rightarrow R$ แล้ว d เรียกว่า ปริภูมิเมตริกก็ต่อเมื่อสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- (1) $d(x, y) \geq 0$
- (2) $d(x, y) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$
- (4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดให้ $X = R$ และให้ x, y และ $z \in R$ โดยที่ $d(x, y) = |x - y|$

- (1) $|x - y| \geq 0$
- (2) $|x - y| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- (3) $|x - y| = |y - x|$

พิสูจน์ เราต้องการแสดงว่า $|x - y| = |y - x|$

$$|x - y| = |(-1)(y - x)| = |(-1)||y - x| = |y - x|$$

ดังนั้น $|x - y| = |y - x|$

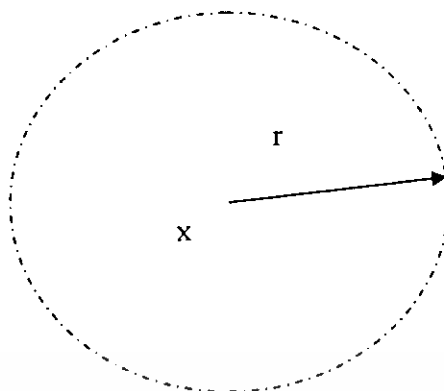
- (4) $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

พิสูจน์ เราต้องการแสดงว่า $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

$$\begin{aligned} |x - z| &= |x - y + y - z| \\ &\leq |x - y| + |y - z| \end{aligned}$$

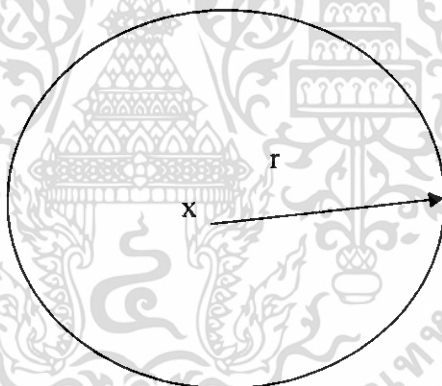
ดังนั้น $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$

นิยาม 2.3 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกทรงกลมเปิดที่มีจุดศูนย์กลางที่ $x \in X$ ที่มีรัศมี $r > 0$ ถูกกำหนดโดย $S(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$



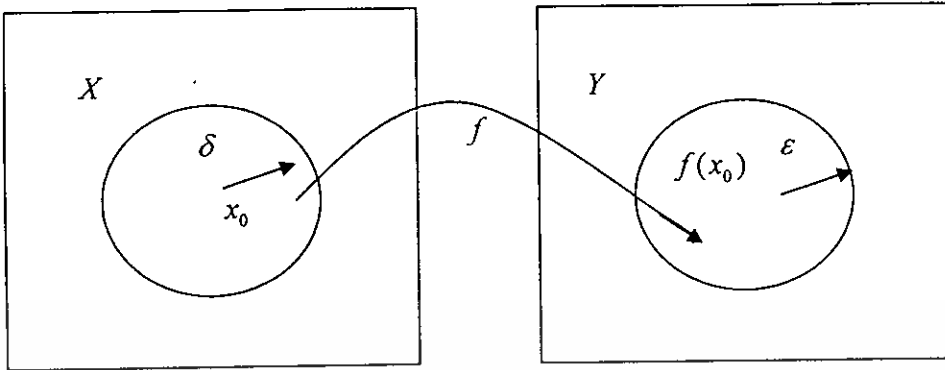
รูปที่ 2.3 ทรงกลมเปิด

นิยาม 2.4 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกทรงกลมปิดที่มีจุดศูนย์กลางที่ $x \in X$ ที่มีรัศมี $r > 0$ ถูกกำหนดโดย $\bar{S}(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$



รูปที่ 2.4 ทรงกลมปิด

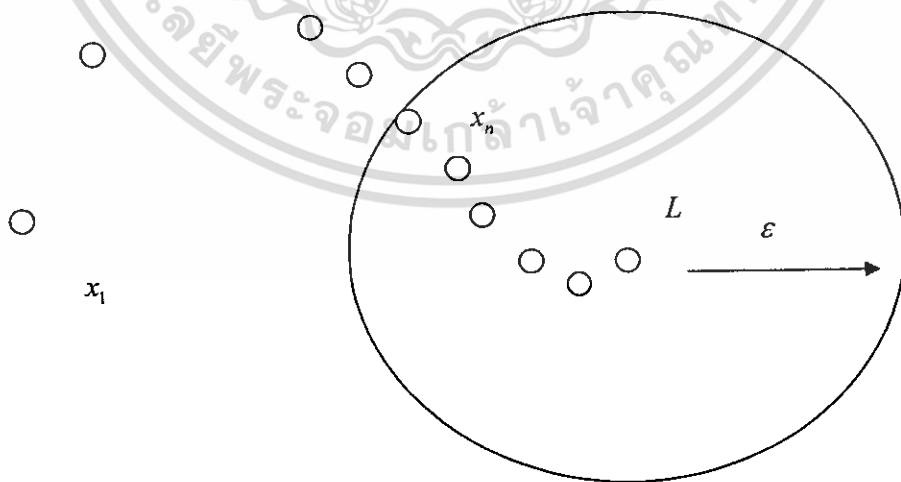
นิยาม 2.5 กำหนด (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริก $f: X \rightarrow Y$ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ ถ้า $d(x, x_0) < \delta$ แล้ว $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$



รูปที่ 2.5 ความต่อเนื่อง

นิยาม 2.6 $\{x_n\}$ เป็นลำดับแล้วจะกล่าวว่า $\{x_n\}$ มีลิมิตเป็น L ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่งทำให้ $d(x_n, L) < \varepsilon$ เมื่อ $n \geq N_0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$

นิยาม 2.7 ถ้าลำดับ $\{x_n\}$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ L เป็นจำนวนจริงแล้วจะเรียกว่าลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และเรียก $\{x_n\}$ นี้ว่าลำดับลู่เข้า



รูปที่ 2.6 การลู่เข้าของลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่าง 2.3

$$(1) \quad 1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, \dots, 1+\frac{1}{n}, \dots$$

ลู่เข้าสู่ 1

$$(2) \quad 1, -2, 3, \dots, n \times (-1)^{n+1}$$

ลู่ออก

นิยาม 2.8 จะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันก็ต่อเมื่อ f เป็นความสัมพันธ์ซึ่งถ้า $(x, y_1) \in f$ และ $(x, y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$

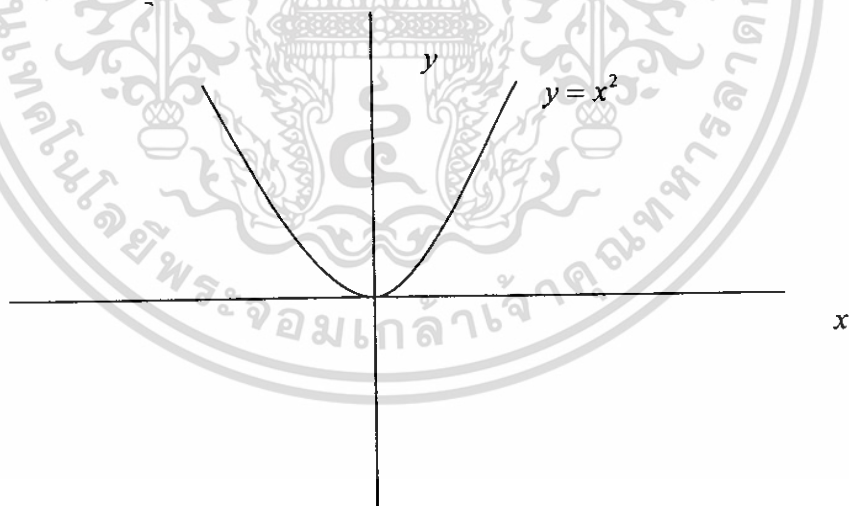
นิยาม 2.9 สำหรับฟังก์ชัน f บน R และ $a \in R$ จะกล่าวว่า f มีลิมิตเป็น L ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้วจะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ โดยที่ $0 < |x - a| < \delta$

ตัวอย่าง 2.4

ความสัมพันธ์ $R_1 = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$ เป็นฟังก์ชัน

ความสัมพันธ์ $R_2 = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4), (3, 1)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

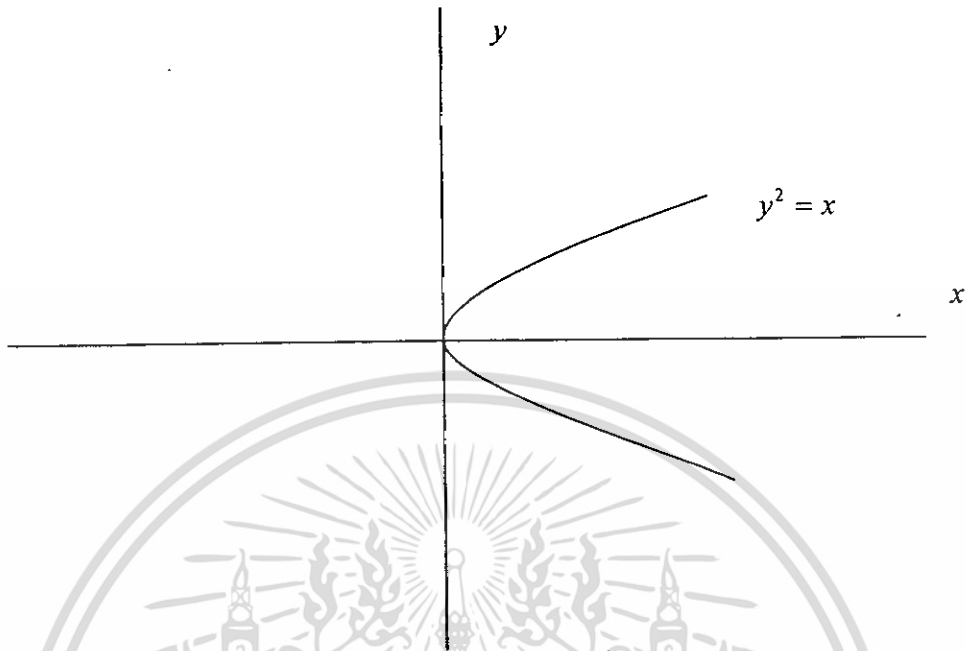
ความสัมพันธ์ $R_3 = \{(x, y) | x \in R \text{ และ } y = x^2\}$ เป็นฟังก์ชันและเราสามารถเขียนรูปได้คือ



รูปที่ 2.6 ตัวอย่างความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความสัมพันธ์ $R_4 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } y^2 = x\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันสามารถเขียนรูปได้คือ



รูปที่ 2.7 ตัวอย่างความสัมพันธ์ที่ไม่เป็นฟังก์ชัน

นิยาม 2.10 $\{x_n\}$ เป็นลำดับใดๆแล้วจะเรียก $\{x_n\}$ ว่าลำดับโคซี (Cauchy Sequence)

ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใดๆจะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่งทำให้ $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ เมื่อ $n \geq n_0$ และ $m \geq n_0$

นิยาม 2.11 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิเมตริกแล้วเรียก (X, d) ว่าเป็นปริภูมิสมบูรณ์ก็ต่อเมื่อ
ทุกๆลำดับโคซีเป็นลำดับลู่อู่เข้าใน X

นิยาม 2.12 สำหรับฟังก์ชัน f บน R และ $a \in R$ จะกล่าวว่า f มีลิมิตทางขวามือที่จุด a เป็น L ก็ต่อเมื่อ ถ้าสำหรับทุก $\varepsilon > 0$ แล้วจะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ โดยที่ $a < x < a + \delta$ เขียนแทนด้วย $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

นิยาม 2.13 ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องทางขวาที่จุด a ก็ต่อเมื่อ f สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

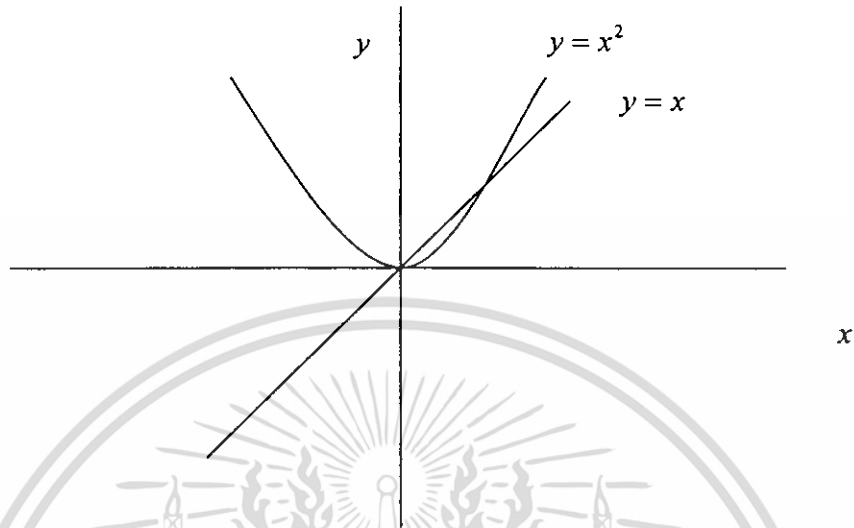
- (1) $f(a)$ หาค่าได้
- (2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ หาค่าได้
- (3) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

นิยาม 2.14 กำหนดให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันแล้วจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ลดก็ต่อเมื่อ

ถ้า $x \leq y$ แล้ว $f(x) \leq f(y)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นิยาม 2.15 กำหนดให้ $f : X \rightarrow X$ เราจะกล่าวว่า $c \in X$ เป็นจุดตรึงของ f ถ้า $f(c) = c$
ตัวอย่าง 2.5



รูปที่ 2.8 ตัวอย่างจุดตรึง

จากกราฟ $y = x^2$ เราสามารถหาจุดตรึงโดยให้ $y = x$

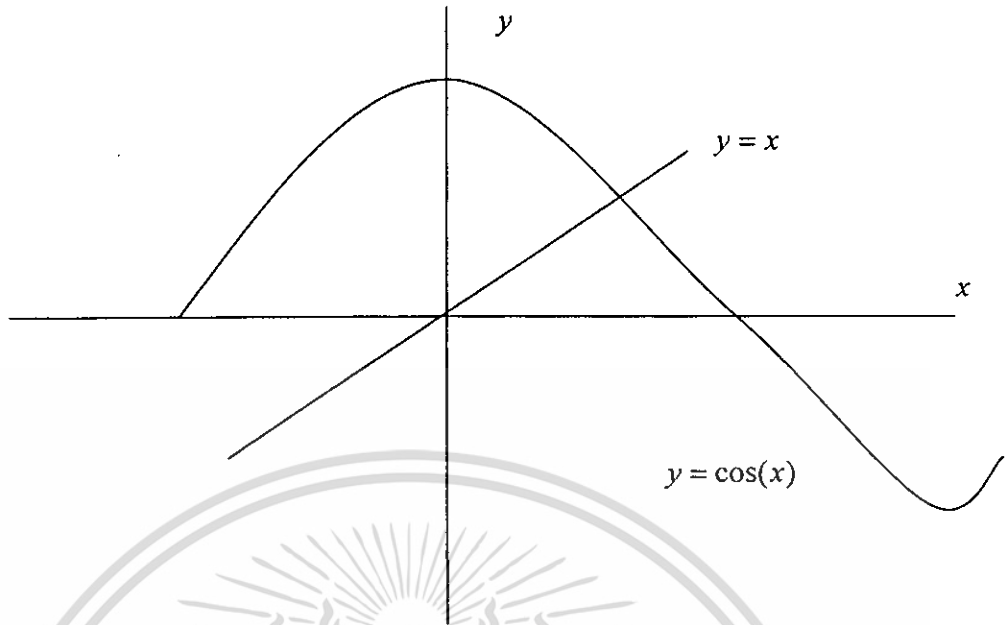
$$x = x^2$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(1 - x) = 0$$

จะได้ $x = 0, 1$

เพราะฉะนั้น จุดตรึง คือ จุดที่ $x = 0, 1$



รูปที่ 2.9 ตัวอย่างจุดตรึง

จากกราฟ $y = \cos(x)$ เราพบว่าจุดตัดที่ $\cos(x) = x$ นั่นคือจุดตรึงนั่นเอง

นิยาม 2.16 กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริกและ $f: X \rightarrow Y$ เราจะกล่าวว่า f เป็นคอนแทรคชันก็ต่อเมื่อมี $\alpha \in (0, 1)$ ซึ่งทำให้ $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท 2.1 [8] กำหนด (X, d) เป็นปริภูมิเมตริก $\{x_n\}$ เป็นลำดับคู่เข้าแล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคซี

ตัวอย่าง 2.5 จงแสดงว่า (R, d) เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์

พิสูจน์ สมมติให้ $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคซีอยู่ในปริภูมิเมตริก (R, d) เราต้องการแสดง

ว่า $d(x_n, x) < \varepsilon$

ถ้า $\{x_m\}$ คู่เข้าคู่ $x \in X$

แล้ว $\{x_m\}$ เป็นลำดับโคซีและ $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ เมื่อ $m \geq m_0$

$\{x_m\}$ เป็นลำดับโคซีแล้ว $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ เมื่อ $n, m \geq n_0$

เลือก $N = \max\{n_0, m_0\}$

ดังนั้นจะต้องมี $n, m \geq N$ ซึ่งทำให้

$d(x_n, x) < d(x_m, x) + d(x_n, x_m) = \varepsilon$ เมื่อ $n, m \geq N$

ดังนั้น $d(x_n, x) < \varepsilon$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทฤษฎีบท 2.2 [8] กำหนดให้ (X, d) และ (Y, d') เป็นปริภูมิเมตริกและ $f : X \rightarrow Y$ แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด x_0 ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ เข้าสู่ x_0 แล้ว $\{f(x_n)\}$ เข้าสู่ $f(x_0)$

ทฤษฎีบท 2.3 [4] กำหนด $f : X \rightarrow X$ เป็นคอนแทรกชันบนปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ (X, d) แล้ว f มีจุดตรึงเพียงจุดเดียว



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3 บทวิเคราะห์

ทฤษฎีบทการลู่เข้าของลำดับการทำของอิซิกาวาพร้อมด้วยค่าผิดพลาดสำหรับการส่งใน
รูปแบบทั่วไปแบบโคซี-คอนแทรคทีฟในปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์

ทฤษฎีบทการลู่เข้าของอิซิกาวาที่อยู่ในรูปแบบการส่งทั่วไปแบบโคซี-คอนแทรคทีฟใน
ปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์สมบูรณ์ ในการศึกษาได้พิสูจน์ทฤษฎีบทการลู่เข้าของอิซิกาวาที่อยู่ในรูปแบบ
การส่งทั่วไปแบบโคซี-คอนแทรคทีฟในปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์สมบูรณ์ซึ่งอยู่ในรูปการส่งไม่เชิง
เส้นแบบโคซี-คอนแทรคทีฟในรูปค่าความคาดเคลื่อนของ T ผลการศึกษาไม่เพียงขยายผล
การศึกษาของผู้อื่นเท่านั้น[5,9-15]แต่หากยังสามารถตอบคำตอบของปัญหาเปิดของRhoades
และ Naimpally-Singh ในปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์

ปัญหาเกี่ยวกับลำดับการทำซ้ำของอิซิกาวา $\{x_n\}$ กำหนดโดย

$$\begin{aligned} x_0 &\in C \\ x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \quad n \geq 0 \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์สู่จุดตรึงของ T หรือผลเฉลยของสมการ $Tx = f$ (ได้รับความสนใจและมีผู้ทำ
งานวิจัยออกมามากมาย ดูตัวอย่างจาก [5,7,13-19] โดยที่ C เป็นเซตคอนเวกซ์ซึ่งปิดที่ไม่ว่างบน
ปริภูมิบานาค E $T: E \rightarrow E$ เป็นการส่งแบบคอนแทรคทีฟเทียมหรือการส่งแบบแอ็คครีทีฟ
และ $\{\alpha_n\}$ และ $\{\beta_n\}$ เป็นลำดับใน $[0,1]$

ทฤษฎีบท 3.1 กำหนดให้ (E, d) เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์ $T: E \rightarrow E$ การส่งแบบโคซี-คอน
แทรคทีฟ ถ้ามี $k \in [0,1)$ ซึ่งทำให้

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \quad \forall x, y \in E \quad (3.2)$$

สำหรับทุก $x, y \in E$ แล้ว T จะมีจุดตรึง x^* ใน E และสำหรับทุก $x_0 \in E$ ลำดับ $T^n x_0$ ลู่เข้าสู่จุด
ตรึง x^*

(พิสูจน์ใน[5])

ในปี 1976 และ 1983 Rhoades และ Naimpally-Singh ได้ตั้งคำถามเปิดตอนท้ายไว้ว่า
เราสามารถที่จะขยายการทำซ้ำของอิซิกาวาสำหรับการส่งไม่เชิงเส้นแบบโคซี-คอนแทรคทีฟใน
ปริภูมิเมตริกได้หรือไม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ข้อความข้างต้นนี้ได้รับการพิสูจน์แล้วในรูปแบบของปริภูมิฮิลเบิร์ตและบานาค

[10,11,15]

จุดประสงค์ของการศึกษานี้เพื่อพิสูจน์ทฤษฎีการลู่เข้าแบบใหม่สำหรับลำดับการทำซ้ำอติกว่าในปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์ ผลการศึกษาในงานวิจัยชิ้นนี้ไม่เพียงขยายและปรับปรุงงานวิจัยชิ้นอื่นแต่หากยังสามารถตอบคำถามของปัญหาเปิดในปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์

นิยาม 3.1 กำหนดให้ (E, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $I = [0, 1]$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ โดยให้ $E^n = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_n$ และ $I^n = \underbrace{I \times I \times \dots \times I}_n$ การส่ง $W : E^n \times I^n \rightarrow E$ เป็นโครงสร้างคอนเวกซ์ของ E ถ้ากำหนด $u, x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I$ โดยที่ $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ และเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

$$(1) W(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = x_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$(2) d(u, W(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i d(u, x_i) \quad (3.3)$$

d และ E เป็นเมตริกและ W เป็นโครงสร้างคอนเวกซ์เรียกว่าปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์และใช้สัญลักษณ์คือ (E, d, W)

ตัวอย่าง 3.1 จงพิสูจน์ว่าทรงกลมเปิดเป็นคอนเวกซ์เซต

พิสูจน์ ให้ $x_1, x_2, x_3 \in S(x, r)$ และ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 1]$ เราต้องการแสดงว่า

$$W(x_1, x_2, x_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in X$$

$$\text{เนื่องจาก } W(x_1, x_2, x_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \leq \alpha_1 d(x_1, x) + \alpha_2 d(x_2, x) + \alpha_3 d(x_3, x)$$

$$< \alpha_1 r + \alpha_2 r + \alpha_3 r = r$$

ดังนั้น $W(x_1, x_2, x_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in X$ ในทำนองเดียวกันเราก็สามารถพิสูจน์ได้

ว่า $\bar{S}(x, r)$ เป็นคอนเวกซ์เซต

นิยาม 3.2 ฟังก์ชัน $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ เป็นไปตามเงื่อนไข (C_ϕ) ถ้าเป็นฟังก์ชันไม่ลดลงและต่อเนื่องทางขวาโดยที่ $\phi(t) < t, \forall t > 0$ และ $\phi(0) = 0$

บทแทรก 3.1 ถ้า $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ เป็นไปตามเงื่อนไข (C_ϕ) และ $t \leq \phi(t), t \in [0, \infty)$ แล้ว $t = 0$

พิสูจน์ ต้องการแสดงว่า $t = 0$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจาก $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ เป็นไปตามเงื่อนไข (C_*)

แล้ว $\phi(t) < t, \forall t > 0$

แต่ $t \leq \phi(t), t \in [0, \infty)$

ดังนั้น $t \leq \phi(t) < t$

เนื่องจาก t ต่อเนื่องทางขวา

ดังนั้น $\lim_{t \rightarrow 0^+} t \leq \phi(t) < \lim_{t \rightarrow 0^+} t$ แล้ว $0 \leq \phi(t) \leq 0$

ดังนั้นเราจึงสรุปได้ว่า $\phi(t) = 0$

นั่นคือ $t = 0$

นิยาม 3.3 กำหนดให้ (E, d) เป็นปริภูมิเมตริกและ $T : E \rightarrow E$ ถ้ามีฟังก์ชัน

$\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ เป็นไปตามเงื่อนไข (C_*) ซึ่งทำให้

$$d(Tx, Ty) \leq \phi \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \forall x, y \in E \quad (3.4)$$

แล้ว T เรียกว่าการส่งรูปแบบทั่วไปของเคอไซน์-คอนแทรคทีฟ

หมายเหตุ ถ้า $\phi(t) = kt, k \in [0, 1)$ แล้ว (3.4) สมมูลกับ (3.2) ตัวอย่างเช่น T เป็นการส่งแบบเคอไซน์-คอนแทรคทีฟ

พิสูจน์

(วิธีคิด) เนื่องจากการต้องพิสูจน์การสมมูลดังนั้นต้องคิด 2 ทางคือ $\rightarrow (I)$ และ $\leftarrow (II)$

(I) กำหนดให้ $k \in [0, 1)$

เราต้องการแสดงว่า

$$k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

$$= \phi \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

$$d(Tx, Ty) \leq k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

เนื่องจาก $d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx) > 0$

และจากการกำหนดให้ $k \in [0, 1)$ แล้ว $kt < t$

จากเงื่อนไขที่ให้ $kt = \phi(t)$

ดังนั้น

$$k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

$$= \phi \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

(II) กำหนดให้ $\phi(t) < t$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราต้องการแสดงว่า

$$k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \\ = \phi \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

เพราะว่า $\phi(t) < t$

ดังนั้นจะต้องมี $k \in [0, 1)$ ที่ทำให้ $k = \phi(t)$

$$\text{เลือก } t = \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

แล้วเราจะได้ว่า

$$k \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\} \\ = \phi \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

ดังนั้นจาก (I) และ (II) เราจึงสรุปได้ว่า (3.2) และ (3.4) สมมูลกัน

ถ้า E เป็นปริภูมินอร์มเชิงเส้น แล้ว E เป็นปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์ในโครงสร้างคอนเวกซ์ $W(x, y; 1 - \lambda, \lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y, \forall x, y \in E, \lambda \in I$ เพราะฉะนั้นลำดับอธิกาวาใน (3.1) คือกรณีเฉพาะของ (3.5) โดยที่ $\gamma_n = 0, \delta_n = 0$ และ $u_n = v_n = 0, \forall n \geq 0$

นิยาม 3.4 กำหนดให้ (E, d, W) เป็นปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์และในโครงสร้างคอนเวกซ์ W โดยที่ $W : E^3 \times I^3 \rightarrow E$ เป็นไปตามเงื่อนไข (3.3) และเมื่อกำหนด $T : E \rightarrow E$ เป็นการส่งรูปแบบทั่วไปแบบเวกซ์-คอนแทรกทีฟ $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\xi_n\}, \{\eta_n\}$ และ $\{\delta_n\}$ เป็นลำดับใน $[0, 1]$ โดยที่ $\{\alpha_n\} + \{\beta_n\} + \{\gamma_n\} = 1, \{\xi_n\} + \{\eta_n\} + \{\delta_n\} = 1, n = 0, 1, 2, \dots$, และ $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$ สำหรับ $x_0 \in E$ โดยเรานิยามลำดับ $\{x_n\}$ ดังต่อไปนี้

$$x_{n+1} = W(x_n, Ty_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \\ y_n = W(x_n, Tx_n, v_n; \xi_n, \eta_n, \delta_n) \quad (3.5)$$

เมื่อ $\{u_n\}$ และ $\{v_n\}$ เป็นลำดับภายใน E และเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

สำหรับ $n, m \geq 0$ และ $0 \leq n < m$ ถ้า $\delta(A_{n,m}) > 0$ แล้ว

$$\max_{n \leq i, j \leq m} \{d(x, y) : x \in \{u_i, v_i\}, y \in \{x_i, y_i, Tx_i, Ty_i, u_i, v_i\}\} < \delta(A_{n,m}) \quad (3.6)$$

เมื่อ

$$A_{n,m} = \{x_i, y_i, Tx_i, Ty_i, u_i, v_i : n \leq i \leq m\}$$

และ

$$\delta(A_{n,m}) = \sup_{x, y \in A_{n,m}} d(x, y)$$

แล้ว $\{x_n\}$ เรียกว่าลำดับการทำซ้ำอธิกาวาที่ประกอบด้วยความคลาดเคลื่อนของ T

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $\eta_n = 0, \delta_n = 0, \forall n \geq 0$ ที่เป็นไปตามเงื่อนไข(3.3)ซึ่ง $y_n = x_n$ ดังนั้นจาก(3.5)เราจะได้ว่า

$$x_{n+1} = W(x_n, Tx_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \quad (3.7)$$

ซึ่งเรียกว่าลำดับการทำซ้ำชนิดมันน์ที่ประกอบด้วยความคลาดเคลื่อนของ T

ทฤษฎีบท 3.2 (E, d, W) เป็นปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์สมบูรณ์และโครงสร้างคอนเวกซ์ $W : E^3 \times I^3 \rightarrow E$ ของ E และ T เป็นการส่งรูปแบบทั่วไปแบบควาซี-คอนแทรกทีฟสอดคล้องกับเงื่อนไข (3.4) และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับการทำซ้ำของอริทิมิตาที่ประกอบด้วยความคลาดเคลื่อนของ T ที่กำหนดโดย(3.5)แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่จุดตรึง p ของ T ใน E เพียงจุดเดียว

พิสูจน์ ให้ N เป็นเซตของจำนวนเต็มที่มีมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ สำหรับ $n, m \in N, 0 \leq n < m$ เรากำหนด

$$A_{n,m} = \{x_i, y_i, Tx_i, Ty_i, u_i, v_i : n \leq i \leq m\}$$

และ

$$\delta(A_{n,m}) = \sup_{x,y \in A_{n,m}} d(x,y)$$

แล้วเราจะมี

$$\delta(A_{n,m}) = \max\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$$

เมื่อ

$$D_1 = \max\{d(x_n, Tx_n), d(x_n, Ty_n) : n \leq i \leq m\}$$

$$D_2 = \max\{d(Tx_i, Tx_j), d(Tx_i, Ty_j), d(Ty_i, Ty_j) : n \leq i, j \leq m\}$$

$$D_3 = \max\{d(x_i, Tx_j), d(x_i, Ty_j) : n < i \leq m, n \leq j \leq m\}$$

$$D_4 = \max\{d(y_i, Tx_j), d(y_i, Ty_j) : n \leq i, j \leq m\}$$

$$D_5 = \max\{d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}$$

$$D_6 = \max\{d(x, y) : x \in \{u_i, v_i\}, y \in \{x_j, y_j, Tx_j, Ty_j, u_j, v_j\} : n \leq i, j \leq m\}$$

ขั้นแรก เราต้องแสดงว่า $\delta(A_{n,m}) = D_1$ (3.8)

นั่นคือต้องพิสูจน์ 2 ส่วนคือ ต้องแสดงว่า (ก) $\delta(A_{n,m}) \leq D_1$ และ (ข) $D_1 \leq \delta(A_{n,m})$

(ก) เราต้องการแสดงว่า $\delta(A_{n,m}) \leq D_1$

เราทำทั้งหมด 4 ขั้นตอน

(I) จากสมการ(3.4)เราจะได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$D_2 \leq \phi(\delta(A_{n,m})) \quad (3.9)$$

(II) จากสมการ(3.3)และ(3.5)ถ้า $n < i \leq m, n < j \leq m$ แล้วเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(x_i, Tx_j) &\leq d(W(x_{i-1}, Ty_{i-1}, u_{i-1}; \alpha_{i-1}, \beta_{i-1}, \gamma_{i-1}), Tx_j) \\ &\leq \alpha_{i-1}d(x_{i-1}, Tx_j) + \beta_{i-1}d(Ty_{i-1}, Tx_i) + \gamma_{i-1}d(u_{i-1}, Tx_j) \\ &\leq \max\{d(x_{i-1}, Tx_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\} \end{aligned}$$

ถ้า $i-1 > n$ แล้วในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$d(x_{i-1}, Tx_j) \leq \max\{d(x_{i-2}, Tx_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์สำหรับ $n < i \leq m, n < j \leq m$

$$\begin{aligned} d(Tx_i, Tx_j) &\leq \max\{d(x_{i-1}, Tx_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\} \\ &\leq \max\{d(x_{i-2}, Tx_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\} \end{aligned}$$

$$\leq \max\{d(x_n, Tx_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับ $n < i \leq m, n < j \leq m$

$$d(x_i, Tx_j) \leq \max\{d(x_n, Tx_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}$$

แล้ว $D_3 = \max\{d(x_i, Tx_j), d(x_i, Ty_j) : n < i \leq m, n \leq j \leq m\}$ (3.10)

$$\leq \max\{d(x_n, Tx_j), d(x_n, Ty_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6 : n \leq j \leq m\}$$

$$= \max\{D_1, \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}$$

(III) สำหรับ $n \leq i, j \leq m$ โดย

$$\begin{aligned} d(y_i, Tx_j) &= d(W(x_i, Tx_i, v_i; \xi_i, \eta_i, \delta_i), Tx_j) \\ &\leq \xi_i d(x_i, Tx_j) + \eta_i d(Tx_i, Tx_j) + \delta_i d(v_i, Tx_j) \\ &\leq \max\{d(x_i, Tx_j), \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\} \\ &\leq \max(D_1, \phi(\delta(A_{n,m})), D_6) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$d(y_i, Ty_j) \leq \max\{D_1, \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$D_4 = \max\{d(y_i, Tx_j), d(y_i, Ty_j) : n \leq i, j \leq m\} \quad (3.11)$$

$$\leq \{D_1, \phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตำหนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

(IV) เนื่องจาก

$$D_5 = \max\{d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}$$

(a) เรามาค่าสูงสุดสำหรับ $\max\{d(x_i, x_j) : n \leq i, j \leq m\}$

กำหนดให้

$$A_1 = \max\{d(x_i, x_j) : n \leq i, j \leq m\}$$

แล้วจะต้องมี $k, l : n \leq l < k \leq m$ ที่ทำให้ $A_1 = d(x_k, x_l)$ และ

$$d(x_k, x_{l-1}) < d(x_k, x_l) = A_1 \quad (3.12)$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 &= d(x_k, x_l) \\ &= d(x_k, W(x_{l-1}, Ty_{l-1}, u_{l-1}; \alpha_{l-1}, \beta_{l-1}, \gamma_{l-1})) \\ &\leq \alpha_{l-1}d(x_k, x_{l-1}) + \beta_{l-1}d(x_k, Ty_{l-1}) + \gamma_{l-1}d(x_k, u_{l-1}) \\ &\leq \alpha_{l-1}d(x_k, x_{l-1}) + \beta_{l-1}D_1 + \gamma_{l-1}D_6 \end{aligned} \quad (3.13)$$

ถ้า $\alpha_{l-1} = 0$ และจาก(3.13)เราจะได้ว่า $A_1 \leq \max\{D_1, D_6\}$ ถ้า $\alpha_{l-1} \neq 0$ จากสมการ (3.12) และ (3.13) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_1 &< \alpha_{l-1}d(x_k, x_l) + \beta_{l-1}D_1 + \gamma_{l-1}D_6 \\ &\leq \max\{A_1, D_1, D_6\} \\ &= \max\{D_1, D_6\} \end{aligned}$$

(b) เรามาค่าสูงสุดสำหรับ $\max\{d(x_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}$

กำหนดให้

$$A_2 = \max\{d(x_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\} \quad (3.14)$$

เนื่องจาก $y_j = W(x_j, Tx_j, v_j; \xi_j, \eta_j, \delta_j)$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_2 &= \max\{d(x_i, W(x_j, Tx_j, v_j; \xi_j, \eta_j, \delta_j)) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{\xi_j d(x_i, x_j) + \eta_j d(x_i, Tx_j) + \delta_j d(x_i, v_j) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{D_1, D_6, \phi(\delta(A_{n,m}))\} \end{aligned} \quad (3.15)$$

(c) ในลำดับสุดท้ายเรามาค่าสูงสุดสำหรับ $\max\{d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}$

กำหนดให้ $A_3 = \max\{d(y_i, W(x_j, Tx_j, v_j; \xi_j, \eta_j, \delta_j)) : n \leq i, j \leq m\}$

และจาก(3.15)และ(3.11)เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} A_3 &= \max\{d(y_i, W(x_j, Tx_j, v_j; \xi_j, \eta_j, \delta_j)) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{\xi_j d(y_i, x_j) + \eta_j d(y_i, Tx_j) + \delta_j d(y_i, v_j) : n \leq i, j \leq m\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลง 73343 อย่างไม่ถูกต้องถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\leq \max\{d(y_i, x_j), d(y_i, Tx_j), d(y_i, v_j) : n \leq i, j \leq m\}$$

$$\leq \max\{D_1, D_6, \phi(\delta(A_{n,m}))\}$$

จาก (3.14) และ (3.16) จะได้ว่า

$$D_5 = \max\{d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\} \quad (3.17)$$

$$\leq \max\{D_1, D_6, \phi(\delta(A_{n,m}))\}$$

$$\delta(A_{n,m}) = \max\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$$

$$\leq \max\{D_1, D_6, \phi(\delta(A_{n,m}))\} \quad (3.18)$$

แทนค่า(3.9)-(3.11)ใน(3.17)จะได้

$$\delta(A_{n,m}) \leq \max\{D_1, D_6, \phi(\delta(A_{n,m}))\}$$

แล้วเราต้องการแสดงว่า $D_1 \geq \phi(\delta(A_{n,m}))$ และ $D_1 \geq D_6$

(โดยวิธีขัดแย้ง)

สมมติให้ $D_1 < \phi(\delta(A_{n,m}))$ หรือ $D_1 < D_6$

กรณีที่ 1 $D_1 < \phi(\delta(A_{n,m}))$

เนื่องจาก ϕ เป็นไปตามเงื่อนไข (C_ϕ) และ $\delta(A_{n,m}) > 0$

ดังนั้น $D_1 < \phi(\delta(A_{n,m})) < \delta(A_{n,m})$

แต่เนื่องจาก $\delta(A_{n,m}) \leq \max\{D_1, D_6, \phi(\delta(A_{n,m}))\}$

ดังนั้น $\delta(A_{n,m}) < \delta(A_{n,m})$ เกิดข้อขัดแย้ง

กรณีที่ 2 $D_1 < D_6$

เนื่องจาก $D_6 < \delta(A_{n,m})$

ดังนั้น $D_1 < D_6 < \delta(A_{n,m})$

แต่เนื่องจาก $\delta(A_{n,m}) \leq \max\{D_1, D_6, \phi(\delta(A_{n,m}))\}$

ดังนั้น $\delta(A_{n,m}) < \delta(A_{n,m})$ เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้นเราสรุปได้ว่า $D_1 \geq \phi(\delta(A_{n,m}))$ และ $D_1 \geq D_6$

นั่นคือ $\delta(A_{n,m}) = \max\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\}$

$$\leq D_1$$

(ข) เราต้องการแสดงว่า $D_1 \leq \delta(A_{n,m})$

เนื่องจาก $D_1 = \max\{d(x_n, Tx_i), d(x_n, Ty_i) : n \leq i \leq m\}$

ดังนั้น $D_1 \leq \delta(A_{n,m})$

เราจึงสรุปได้ว่า $D_1 = \delta(A_{n,m})$

ขั้นที่2 เราต้องแสดงว่า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคซี

นั่นคือเราต้องแสดงว่า ϕ เป็นไปตามเงื่อนไข (C_ϕ) และ $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \infty$ แล้ว $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \delta(A_{n,m}) = 0$

เนื่องจาก $\delta(A_{0,m}) = \max\{d(x_0, Tx_j), d(x_0, Ty_j) : n \leq j \leq m\}$

จากคุณสมบัติสามเหลี่ยมของปริภูมิเมตริก

$$\begin{aligned} \delta(A_{0,m}) &\leq d(x_0, Tx_0) + \max\{d(x_0, Tx_j), d(x_0, Ty_j) : n \leq j \leq m\} \\ &\leq d(x_0, Tx_0) + \phi(\delta(A_{n,m})) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \delta(A_{0,m}) \leq (I - \phi)^{-1}(d(x_0, Tx_0)) \forall m \geq 0 \quad (3.19)$$

แล้วเราจะสรุปได้ว่า $\{\delta(A_{0,m})\}$ มีขอบเขตบน

สำหรับ $n, m : 1 \leq n < m$ และจาก(3.8)นั่นคือ

$$\begin{aligned} \delta(A_{n,m}) &= \max\{d(x_n, Tx_j), d(x_n, Ty_j) : n \leq j \leq m\} \\ &= \max_{n \leq j \leq m} \{d(W(x_{n-1}, Ty_{n-1}, u_{n-1}; \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}), Tx_j), \\ &\quad d(W(x_{n-1}, Ty_{n-1}, u_{n-1}; \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}), Ty_j)\} \\ &\leq \max_{n \leq j \leq m} \{\alpha_{n-1}d(x_{n-1}, Tx_j) + \beta_{n-1}d(Ty_{n-1}, Tx_j) + \gamma_{n-1}d(u_{n-1}, Tx_j), \\ &\quad \alpha_{n-1}d(x_{n-1}, Ty_j) + \beta_{n-1}d(Ty_{n-1}, Ty_j) + \gamma_{n-1}d(u_{n-1}, Ty_j)\} \\ &\leq \alpha_{n-1}\delta(A_{n-1,m}) + \beta_{n-1}\phi(\delta(A_{n-1,m})) + \gamma_{n-1}\delta(A_{n-1,m}) \\ &= (1 - \beta_{n-1})\delta(A_{n-1,m}) + \beta_{n-1}\phi(\delta(A_{n-1,m})) \\ &= (I - \beta_{n-1}(I - \phi))(\delta(A_{n-1,m})) \end{aligned}$$

โดยอาศัยการอุปนัยเราสามารถพิสูจน์ว่า

$$\begin{aligned} \delta(A_{n,m}) &\leq \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I - \phi))\delta(A_{j,m}) \\ &\leq \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I - \phi))\delta(A_{0,m}) \\ &\leq \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I - \phi))(t_0) \end{aligned}$$

เมื่อ $t_0 = (I - \phi)^{-1}d(x_0, Tx_0)$

เนื่องจาก $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข C_ϕ

ดังนั้นเราจะได้ว่า $\phi(t) < t$ เมื่อ $t > 0$

$\phi(t) < t$ ก็ต่อเมื่อ $-\phi(t) > -t$

ดังนั้นถ้าเราบวก t ทั้งสองข้างของ $-\phi(t) > -t$ แล้วเราจะได้ว่า

$$(I - \phi)(t) > 0, \forall t > 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และเนื่องจาก $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \infty$

แล้ว $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$ ไม่เป็นลำดับโคซี

ดังนั้นจะต้องมี $\varepsilon > 0$ ที่ทำให้ทุก $n, m \geq N$ แล้ว $d(\sum_{i=1}^m \beta_i, \sum_{i=1}^n \beta_i) \geq \varepsilon$

นั่นคือ $\beta_j > 0, j \geq N$

แล้ว $\beta_j(I-\phi)(t) > 0, \forall t > 0$

$-\beta_j(I-\phi)(t) < 0, \forall t > 0$

$t - \beta_j(I-\phi)(t) < t, \forall t > 0$

ดังนั้น $(I - \beta_j(I-\phi))(t) < t, \forall t > 0$

ให้ $t = \prod_{j=0}^n (I - \beta_j(I-\phi))(t_0)$

เนื่องจาก $(I - \beta_j(I-\phi))(t) < t, \forall t > 0$

ดังนั้น $(I - \beta_{n+1}(I-\phi))(\prod_{j=0}^n (I - \beta_j(I-\phi))(t_0)) < \prod_{j=0}^n (I - \beta_j(I-\phi))(t_0)$

ดังนั้นถ้าเราเลือก $\varepsilon = \prod_{j=0}^N (I - \beta_j(I-\phi))(t_0)$

ดังนั้นจะต้องมี N ซึ่งทำให้ทุก $n > N$ แล้ว

$0 \leq \prod_{j=0}^n (I - \beta_j(I-\phi))(t_0) < \prod_{j=0}^N (I - \beta_j(I-\phi))(t_0)$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $\prod_{j=0}^{\infty} (I - \beta_j(I-\phi))(t_0) = 0$

เพราะว่า $\prod_{j=0}^{\infty} (I - \beta_j(I-\phi))(t_0) = 0$ และ $\delta(A_{n,m}) \leq \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I-\phi))(t_0)$

แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(A_{n,m}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I-\phi))(t_0) = 0$

ดังนั้น $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \delta(A_{n,m}) = 0$

แล้ว $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคซีใน E และ $d(x_n, Tx_n) = 0$

เนื่องจาก E เป็นปริภูมิเมตริกสมบูรณ์

แล้วจะต้องมี $p \in E$ ซึ่งทำให้ $x_n \rightarrow p$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = p$ และจากสมการ(3.4)จะได้

แล้ว $d(Tx_n, Tp) \leq \phi(\max\{d(x_n, p), d(x_n, Tx_n), d(p, Tp), d(x_n, Tp), d(p, Tx_n)\})$

ดังนั้น

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, Tp) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\max\{d(x_n, p), d(x_n, Tx_n), d(p, Tp), d(x_n, Tp), d(p, Tx_n)\})$$

$$\text{แล้ว } d(p, Tp) \leq \phi(\max\{d(p, p), d(p, p), d(p, Tp), d(x_n, Tp), d(p, p)\})$$

$$d(p, Tp) \leq \phi(\max\{0, 0, d(p, Tp), d(p, Tp), 0\})$$

$$d(p, Tp) \leq \phi(d(p, Tp))$$

ดังนั้น $d(p, Tp) = 0$

เพราะฉะนั้น p เป็นจุดตรึงของ T ใน E

ขั้นที่ 3 แสดงให้เห็นว่า p เป็นจุดตรึงเพียงจุดเดียวเพียงจุดเดียวของ T ใน E

พิสูจน์สมมติว่า p, q เป็นจุดตรึงของ T ภายใน E

เราต้องการแสดงว่า $p = q$

สมมติว่า $x_m \rightarrow q$ และ $x_n \rightarrow p$

$$d(Tx_n, Tx_m) \leq \phi(\max\{d(x_n, x_m), d(x_n, Tx_n), d(x_m, Tx_m), d(x_n, Tx_m), d(x_m, Tx_n)\})$$

$$\text{แล้ว } d(Tp, Tq) \leq \phi(\max\{d(p, q), d(p, Tp), d(q, Tq), d(p, Tq), d(q, Tp)\})$$

เพราะว่า p, q เป็นจุดตรึงของ T ภายใน E

$$\text{ดังนั้น } d(p, q) \leq \phi(\max\{d(p, q), d(p, p), d(q, q), d(p, q), d(q, p)\})$$

$$\text{แล้ว } d(p, q) \leq \phi(\max\{d(p, q)\})$$

$$\text{ดังนั้น } d(p, q) = 0$$

เพราะฉะนั้น $p = q$ เราจึงสรุปได้ว่ามีจุดตรึงเพียงจุดเดียวภายใน E

ทฤษฎีบท 3.3 (E, d, W) เป็นปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์สมบูรณ์และโครงสร้างคอนเวกซ์

$W : E^3 \times I^3 \rightarrow E$ ของ E และ T เป็นการส่งรูปแบบทั่วไปแบบควาไซ-คอนแทรกทีฟสอดคล้องกับเงื่อนไข(3.2)และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับการทำซ้ำของอิชิกาวาที่อยู่ในรูปความคลาดเคลื่อนของ T ที่กำหนดโดย(3.5)แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่จุดตรึง p ของ T ใน E เพียงจุดเดียว

พิสูจน์ เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 3.3

ทฤษฎีบท 3.4 (E, d, W) เป็นปริภูมิเมตริกคอนเวกซ์สมบูรณ์และโครงสร้างคอนเวกซ์

$W : E^3 \times I^3 \rightarrow E$ ของ E และ T เป็นการส่งรูปแบบทั่วไปแบบควาไซ-คอนแทรกทีฟสอดคล้องกับเงื่อนไข(3.4)และ $\{x_n\}$ เป็นลำดับการทำซ้ำชนิดมันน์เรียกว่าลำดับการทำซ้ำอิชิกาวาที่

ประกอบด้วยความคลาดเคลื่อนของ T ที่กำหนดโดย (3.7) แล้วลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้าสู่จุดตรึง p ของ T ใน E เพียงจุดเดียว

พิสูจน์ เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 3.3



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

สรุปผลและเสนอแนะ

4.1 สรุปผล

จากการศึกษาพบว่าลำดับการทำซ้ำของอิซิกาวาเรียกว่าลำดับการทำซ้ำอิซิกาวาที่ประกอบด้วยความคลาดเคลื่อนของ T ในปริภูมิเมตริกซ์คอนเวกซ์ลู่เข้าสู่จุดตรึงเพียงจุดเดียวเท่านั้น สำหรับการวิเคราะห์นี้ได้ใช้ความรู้ในวิชาวิเคราะห์จำนวนจริงมาใช้ในหลายๆหัวข้อ เช่น ปริภูมิเมตริกซ์ ลำดับในปริภูมิ ความต่อเนื่อง การลู่เข้าของลำดับและฟังก์ชัน เป็นต้น

การวิเคราะห์ผลวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยไม่สามารถขยายผลของงานวิจัยได้กว้างขวางมากเนื่องด้วยระยะเวลาที่มีจำกัดและในการพิสูจน์บางทฤษฎีต้องใช้เวลาพอสมควร

4.2 ข้อเสนอแนะ

1. ควรมีการขยายผลการศึกษาโดยเปลี่ยนลำดับ x_n
2. ควรมีความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องพอสมควร
3. ควรมีความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีที่เกี่ยวข้องพอสมควร



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



Convergence Theorems of the Ishikawa Type Iterative Sequences with Errors for Generalized Quasi-Contractive Mappings in Convex Metric Spaces

SHIH-SEN CHANG

Department of Mathematics, Sichuan University
Chengdu, Sichuan 610064, P.R. China

JONG KYU KIM*

Department of Mathematics, Kyungnam University
Masan, Kyungnam 631-701, Korea
jongkyuk@kyungnam.ac.kr*(Received February 2002; accepted March 2002)*

Communicated by R. P. Agarwal

Abstract—In this paper, some convergence theorems of Ishikawa type iterative sequence with errors for nonlinear generalized quasi-contractive mapping in convex metric spaces are proved. The results presented in this paper not only extend and improve the main results in [1–8] but also give an affirmative answer to the open question of Rhoades-Naimpally-Singh in convex metric spaces.
© 2003 Elsevier Science Ltd. All rights reserved.

Keywords—Convex metric space, Fixed point, Generalized Ishikawa (Mann) iterative sequence with errors, Generalized quasi-contractive mapping.

1. INTRODUCTION AND PRELIMINARIES

Recently concerning the problem of the Ishikawa iterative sequence $\{x_n\}$ defined by

$$\begin{aligned} x_0 &\in C, \\ x_{n+1} &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \quad n \geq 0, \\ y_n &= (1 - \beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

converging strongly to a fixed point of T or to a solution of the equation $Tx = f$ has been considered by many authors (see, for example, [1,2,6,8–12]), where C is a nonempty closed convex subset of a Banach space E , $T : C \rightarrow C$ is a nonlinear pseudocontractive mapping or accretive mapping, and $\{\alpha_n\}$ and $\{\beta_n\}$ are two sequences in $[0,1]$.

*Author to whom all correspondence should be sent. Author was supported by the Kyungnam University Research Fund. 2002.

On the other hand, in 1974, Ćirić [1] proved the following theorem.

THEOREM. (See [1].) Let (E, d) be a complete metric space, $T : E \rightarrow E$ be a quasi-contractive mapping, i.e., there exists a constant $k \in [0, 1)$ such that

$$d(Tx, Ty) \leq k \max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}, \quad (1.2)$$

for all $x, y \in E$. Then T has a fixed point x^* in E and for any given $x_0 \in E$, the Picard iterative sequence $\{T^n x_0\}$ converges to this fixed point x^* .

In 1976 and 1983, Rhoades [7] and Naimpally-Singh [5] suggest the following open question.

OPEN QUESTION. Can the Ishikawa iterative procedure be extended to nonlinear quasi-contractive mapping in a metric space?

This question is in fact solved in the affirmative (see [3,4,8]) for the Hilbert or Banach space setting.

The purpose of this paper is to prove some new convergence theorems for Ishikawa type iterative sequence with errors in a convex metric space. The results presented in this paper not only extend and improve the main results in [1-8], but also give an affirmative answer to the open question mentioned above in convex metric spaces.

For the purpose of this paper, we first give some definitions and notations.

DEFINITION 1.1. Let (E, d) be a metric space and $I = [0, 1]$. For any positive integer $n \geq 2$, denote by $E^n = \underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_n$, $I^n = \underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_n$. A mapping $W : E^n \times I^n \rightarrow E$ is said to be a convex structure of E , if it satisfies the following conditions: for any $u, x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ and for any $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I$ with $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$; that is,

$$\begin{aligned} (1) \quad & W(x_1, x_2, \dots, x_n; 0, 0, \dots, \alpha_i, 0, \dots, 0) = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \\ (2) \quad & d(u, W(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i d(u, x_i). \end{aligned} \quad (1.3)$$

E together with a metric d and a convex structure W is called a convex metric space and is denoted by (E, d, W) .

It should be pointed out that each linear normed space is a special example of convex metric space, but there exist some convex metric spaces which cannot be embedded into any normed space (see [13]).

DEFINITION 1.2. A function $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is said to satisfy the condition (C_Φ) , if it is nondecreasing, continuous from right, $\Phi(t) < t, \forall t > 0$, and $\Phi(0) = 0$.

It is easy to prove the following proposition.

PROPOSITION 1.1. If function $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ satisfies the condition (C_Φ) and $t \leq \Phi(t)$, $t \in [0, \infty)$, then $t = 0$.

DEFINITION 1.3. Let (E, d) be a metric space and $T : E \rightarrow E$ be a mapping. If there exists a function $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ satisfying the condition (C_Φ) such that

$$d(Tx, Ty) \leq \Phi(\max \{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}), \quad \forall x, y \in E, \quad (1.4)$$

then T is said to be a generalized quasi-contractive mapping.

If $\Phi(t) = kt, k \in [0, 1)$, then (1.4) is equivalent to (1.2), i.e., T is a quasi-contractive mapping.

DEFINITION 1.4. Let (E, d, W) be a convex metric space with a convex structure $W : E^3 \times I^3 \rightarrow E$ satisfying condition (1.3) for $n = 3$. Let $T : E \rightarrow E$ be a generalized quasi-contractive mapping, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\xi_n\}, \{\eta_n\}$, and $\{\delta_n\}$ be six sequences in $[0, 1]$ with $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1, \xi_n + \eta_n + \delta_n = 1, n = 0, 1, 2, \dots$, and $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$. For any given $x_0 \in E$, define a sequence $\{x_n\}$ as follows:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= W(x_n, Ty_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n), \\ y_n &= W(x_n, Tx_n, v_n; \xi_n, \eta_n, \delta_n), \quad n \geq 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

where $\{u_n\}, \{v_n\}$ are two sequences in E satisfying the following conditions.

For any nonnegative integers n, m with $0 \leq n < m$, if $\delta(A_{n,m}) > 0$, then

$$\max_{n \leq i, j \leq m} \{d(x, y) : x \in \{u_i, v_i\}, y \in \{x_j, y_j, Tx_j, Ty_j, u_j, v_j\}\} < \delta(A_{n,m}), \tag{1.6}$$

where

$$A_{n,m} = \{x_i, y_i, Tx_i, Ty_i, u_i, v_i : n \leq i \leq m\}$$

and

$$\delta(A_{n,m}) = \sup_{x, y \in A_{n,m}} d(x, y).$$

Then $\{x_n\}$ is called the Ishikawa type iterative sequence with errors of T .

Especially, if $\eta_n = 0, \delta_n = 0, \forall n \geq 0$, it follows, from (1.3), that $y_n = x_n$. Hence, from (1.5), we have

$$x_{n+1} = W(x_n, Tx_n, u_n; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n). \tag{1.7}$$

The sequence defined by (1.7) is called the Mann type iterative sequence with errors of T .

It should be pointed out that if E is a linear normed space, then E is a convex metric space with a convex structure $W(x, y; 1 - \lambda, \lambda) = (1 - \lambda)x + \lambda y, \forall x, y \in E, \lambda \in I$. Therefore, the Ishikawa iterative sequence (1.1) is a special case of (1.5) with $\gamma_n = 0, \delta_n = 0$, and $u_n = v_n = 0, \forall n \geq 0$.

2. MAIN RESULTS

We are now in a position to prove the main results of this paper.

THEOREM 2.1. Let (E, d, W) be a complete convex metric space with a convex structure $W : E^3 \times I^3 \rightarrow E$ of E, T a generalized quasi-contractive mapping satisfying condition (1.4), and $\{x_n\}$ the Ishikawa type iterative sequence with errors of T defined by (1.5). Then the sequence $\{x_n\}$ converges to a unique fixed point p of T in E .

PROOF. Let N be the set of all nonnegative integers. For any $n, m \in N, 0 \leq n < m$, we denote

$$A_{n,m} = \{x_i, y_i, Tx_i, Ty_i, u_i, v_i : n \leq i \leq m\}$$

and

$$\delta(A_{n,m}) = \sup_{x, y \in A_{n,m}} d(x, y).$$

Then we have

$$\delta(A_{n,m}) = \max \{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\},$$

where

$$\begin{aligned} D_1 &= \max \{d(x_n, Tx_i), d(x_n, Ty_i) : n \leq i \leq m\}, \\ D_2 &= \max \{d(Tx_i, Tx_j), d(Tx_i, Ty_j), d(Ty_i, Ty_j) : n \leq i, j \leq m\}, \\ D_3 &= \max \{d(x_i, Tx_j), d(x_i, Ty_j) : n < i \leq m, n \leq j \leq m\}, \\ D_4 &= \max \{d(y_i, Tx_j), d(y_i, Ty_j) : n \leq i, j \leq m\}, \\ D_5 &= \max \{d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}, \\ D_6 &= \max \{d(x, y) : x \in \{u_i, v_i\}, y \in \{x_j, y_j, Tx_j, Ty_j, u_j, v_j\} : n \leq i, j \leq m\}. \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นลิขสิทธิ์ของมหาวิทยาลัยราชภัฏวชิราวุธวิทยาลัย
 ไม่ควรกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

First, we prove that

$$\delta(A_{n,m}) = D_1. \quad (2.1)$$

For this purpose, we consider the following four steps.

(I) It follows from (1.4) that

$$D_2 \leq \Phi(\delta(A_{n,m})). \quad (2.2)$$

(II) It follows from (1.5) and (1.3) that, if $n < i \leq m$, $n \leq j \leq m$, then we have

$$\begin{aligned} d(x_i, Tx_j) &= d(W(x_{i-1}, Ty_{i-1}, u_{i-1}; \alpha_{i-1}, \beta_{i-1}, \gamma_{i-1}), Tx_j) \\ &\leq \alpha_{i-1}d(x_{i-1}, Tx_j) + \beta_{i-1}d(Ty_{i-1}, Tx_j) + \gamma_{i-1}d(u_{i-1}, Tx_j) \\ &\leq \max\{d(x_{i-1}, Tx_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}. \end{aligned}$$

If $i-1 > n$, then in the same way, we can prove that

$$d(x_{i-1}, Tx_j) \leq \max\{d(x_{i-2}, Tx_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}.$$

By induction, for $n < i \leq m$, $n \leq j \leq m$, we can prove that

$$\begin{aligned} d(x_i, Tx_j) &\leq \max\{d(x_{i-1}, Tx_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\} \\ &\leq \max\{d(x_{i-2}, Tx_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\} \\ &\vdots \\ &\leq \max\{d(x_n, Tx_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}. \end{aligned}$$

Similarly, for $n < i \leq m$, $n \leq j \leq m$, we can also prove that

$$d(x_i, Ty_j) \leq \max\{d(x_n, Ty_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}.$$

This implies that

$$\begin{aligned} D_3 &= \max\{d(x_i, Tx_j), d(x_i, Ty_j) : n < i \leq m, n \leq j \leq m\} \\ &\leq \max\{d(x_n, Tx_j), d(x_n, Ty_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6 : n \leq j \leq m\} \\ &= \max\{D_1, \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

(III) For $n \leq i, j \leq m$, by (2.2) and (2.3), we have

$$\begin{aligned} d(y_i, Tx_j) &= d(W(x_i, Tx_i, v_i; \xi_i, \eta_i, \delta_i), Tx_j) \\ &\leq \xi_i d(x_i, Tx_j) + \eta_i d(Tx_i, Tx_j) + \delta_i d(v_i, Tx_j) \\ &\leq \max\{d(x_i, Tx_j), \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\} \\ &\leq \max\{D_1, \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}. \end{aligned}$$

Similarly, we can prove that

$$d(y_i, Ty_j) \leq \max\{D_1, \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}.$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} D_4 &= \max\{d(y_i, Tx_j), d(y_i, Ty_j) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{D_1, \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

(IV) Since

$$D_5 = \max\{d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์การเขียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

(a) We first make an estimation for $\max\{d(x_i, x_j) : n \leq i, j \leq m\}$.

Let

$$A_1 = \max\{d(x_i, x_j) : n \leq i, j \leq m\}.$$

Then there exist $k, l : n \leq k < l \leq m$ such that $A_1 = d(x_k, x_l)$ and

$$d(x_k, x_{l-1}) < d(x_k, x_l) = A_1. \tag{2.5}$$

Hence, we have

$$\begin{aligned} A_1 &= d(x_k, x_l) \\ &= d(x_k, W(x_{l-1}, Ty_{l-1}, u_{l-1}; \alpha_{l-1}, \beta_{l-1}, \gamma_{l-1})) \\ &\leq \alpha_{l-1}d(x_k, x_{l-1}) + \beta_{l-1}d(x_k, Ty_{l-1}) + \gamma_{l-1}d(x_k, u_{l-1}) \\ &\leq \alpha_{l-1}d(x_k, x_{l-1}) + \beta_{l-1}D_1 + \gamma_{l-1}D_6. \end{aligned} \tag{2.6}$$

If $\alpha_{l-1} = 0$, from (2.6), we have $A_1 \leq \max\{D_1, D_6\}$. If $\alpha_{l-1} \neq 0$, from (2.5) and (2.6), we have

$$\begin{aligned} A_1 &< \alpha_{l-1}d(x_k, x_l) + \beta_{l-1}D_1 + \gamma_{l-1}D_6 \\ &\leq \max\{A_1, D_1, D_6\} \\ &= \max\{D_1, D_6\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

(b) Next, we make an estimation for $\max\{d(x_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}$.

Let

$$A_2 = \max\{d(x_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}.$$

Since $y_j = W(x_j, Tx_j, v_j; \xi_j, \eta_j, \delta_j)$, using (2.7) and (2.3), we have

$$\begin{aligned} A_2 &= \max\{d(x_i, W(x_j, Tx_j, v_j; \xi_j, \eta_j, \delta_j)) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{\xi_j d(x_i, x_j) + \eta_j d(x_i, Tx_j) + \delta_j d(x_i, v_j) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{D_1, D_6, \Phi(\delta(A_{n,m}))\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

(c) Finally, we make an estimation for $\max\{d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}$.

Let

$$A_3 = \max\{d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\}.$$

By using (2.8) and (2.4), we have

$$\begin{aligned} A_3 &= \max\{d(y_i, W(x_j, Tx_j, v_j; \xi_j, \eta_j, \delta_j)) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{\xi_j d(y_i, x_j) + \eta_j d(y_i, Tx_j) + \delta_j d(y_i, v_j) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{d(y_i, x_j), d(y_i, Tx_j), d(y_i, v_j) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{D_1, \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

It follows, from (2.7)–(2.9), that

$$\begin{aligned} D_5 &= \max\{d(x_i, x_j), d(x_i, y_j), d(y_i, y_j) : n \leq i, j \leq m\} \\ &\leq \max\{D_1, \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Combining (2.2)–(2.4) with (2.10), we have

$$\delta(A_{n,m}) = \max\{D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6\} \tag{2.11}$$

$$\leq \max\{D_1, \Phi(\delta(A_{n,m})), D_6\}.$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับศึกษาค้นคว้าเท่านั้น อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

If $D_1 < \Phi(\delta(A_{n,m}))$ or $D_1 < D_6$, then $\delta(A_{n,m}) > 0$. Since Φ satisfies the condition (C_Φ) , by using (1.6), we have that

$$D_1 < \Phi(\delta(A_{n,m})) < \delta(A_{n,m}),$$

and

$$D_1 < D_6 < \delta(A_{n,m}).$$

Therefore, from (2.11), we have

$$\delta(A_{n,m}) < \delta(A_{n,m}),$$

which is a contradiction. Thus, we have $D_1 \geq \Phi(\delta(A_{n,m}))$ and $D_1 \geq D_6$. Hence, from (2.11), we have

$$\delta(A_{n,m}) \leq D_1.$$

However, it is obvious that

$$D_1 \leq \delta(A_{n,m}).$$

Therefore, we have

$$D_1 = \delta(A_{n,m}).$$

Taking $n = 0$ in (2.1), we have

$$\begin{aligned} \delta(A_{0,m}) &= \max \{d(x_0, Tx_j), d(x_0, Ty_j) : 0 \leq j \leq m\} \\ &\leq d(x_0, Tx_0) + \max \{d(Tx_0, Tx_j), d(Tx_0, Ty_j) : 0 \leq j \leq m\} \\ &\leq d(x_0, Tx_0) + \Phi(\delta(A_{0,m})), \end{aligned}$$

and so we have

$$\delta(A_{0,m}) \leq (I - \Phi)^{-1}(d(x_0, Tx_0)), \quad \forall m \geq 0. \tag{2.12}$$

This implies that the sequence $\{\delta(A_{0,m})\}$ is bounded.

On the other hand, for any positive integers $n, m : 1 \leq n < m$, it follows, from (2.1), that

$$\begin{aligned} \delta(A_{n,m}) &= \max \{d(x_n, Tx_j), d(x_n, Ty_j) : n \leq j \leq m\} \\ &= \max_{n \leq j \leq m} \{d(W(x_{n-1}, Ty_{n-1}, u_{n-1}; \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}), Tx_j), \\ &\quad d(W(x_{n-1}, Ty_{n-1}, u_{n-1}; \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \gamma_{n-1}), Ty_j)\} \\ &\leq \max_{n \leq j \leq m} \{\alpha_{n-1}d(x_{n-1}, Tx_j) + \beta_{n-1}d(Ty_{n-1}, Tx_j) \\ &\quad + \gamma_{n-1}d(u_{n-1}, Tx_j), \alpha_{n-1}d(x_{n-1}, Ty_j) + \beta_{n-1}d(Ty_{n-1}, Ty_j) + \gamma_{n-1}d(u_{n-1}, Ty_j)\} \\ &\leq \alpha_{n-1}\delta(A_{n-1,m}) + \beta_{n-1}\Phi(\delta(A_{n-1,m})) + \gamma_{n-1}\delta(A_{n-1,m}) \\ &= (1 - \beta_{n-1})\delta(A_{n-1,m}) + \beta_{n-1}\Phi(\delta(A_{n-1,m})) \\ &= (I - \beta_{n-1}(I - \Phi))(\delta(A_{n-1,m})). \end{aligned}$$

By induction and using (2.12), we can prove that

$$\begin{aligned} \delta(A_{n,m}) &\leq \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I - \Phi))(\delta(A_{j,m})) \\ &\leq \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I - \Phi))(\delta(A_{0,m})) \\ &\leq \prod_{j=0}^{n-1} (I - \beta_j(I - \Phi))(t_0), \end{aligned}$$

where $t_0 = (I - \Phi)^{-1}(d(x_0, Tx_0))$.
 เอกสารฉบับนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ในการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Since the function $\Phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ satisfies the condition (C_Φ) , for any $t > 0$, $\Phi(t) < t$, i.e., $(I - \Phi)(t) > 0, \forall t > 0$. Again, since $\sum_{j=0}^\infty \beta_j = \infty$. Therefore, we have that

$$\prod_{j=0}^\infty (I - \beta_j (I - \Phi))(t_0) = 0.$$

Hence, we have

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \delta(A_{n,m}) = 0.$$

This implies that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence in E and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0.$$

Since E is complete, there exists a $p \in E$ such that $x_n \rightarrow p$. Hence, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = p.$$

It follows, from (1.4), that

$$d(Tx_n, Tp) \leq \Phi(\max\{d(x_n, p), d(x_n, Tx_n), d(p, Tp), d(x_n, Tp), d(p, Tx_n)\}).$$

Letting $n \rightarrow \infty$ on the both sides of the above expression and taking the right limit, we have

$$\begin{aligned} d(p, Tp) &\leq \Phi(\max\{0, 0, d(p, Tp), d(p, Tp), 0\}) \\ &\leq \Phi(d(p, Tp)). \end{aligned}$$

Therefore, it follows, from Proposition 1.1, that $d(p, Tp) = 0$; i.e., p is a fixed point of T in E .

Finally, we prove that p is a unique fixed point of T in E . Suppose the contrary. Let q also be a fixed point of T in E . Then we have

$$\begin{aligned} d(p, q) &= d(Tp, Tq) \\ &\leq \Phi(\max\{d(p, q), d(p, Tp), d(q, Tq), d(p, Tq), d(q, Tp)\}) \\ &= \Phi(d(p, q)). \end{aligned}$$

Hence, $d(p, q) = 0$, i.e., $p = q$, and so p is the unique fixed point of T in E . This completes the proof of Theorem 2.1.

Taking $\Phi(t) = kt$ in Theorem 2.1, where $k \in [0, 1)$ is a constant and $t \in [0, \infty)$, we can obtain the following result immediately.

THEOREM 2.2. *Let (E, d, W) be the same as in Theorem 2.1, T a quasi-contractive mapping satisfying condition (1.2), and $\{x_n\}$ the Ishikawa type iterative sequence with errors of T defined by (1.5). Then the sequence $\{x_n\}$ converges to a unique fixed point p of T in E .*

REMARK. Theorems 2.1 and 2.2 are two new convergence theorems of the Ishikawa type sequences with errors for the generalized pseudocontractive mappings in convex metric spaces. These two theorems not only provide an affirmative answer to the open question of Rhoades and Naimpally-Singh in the setting of convex metric spaces, but also improve and extend the corresponding results in [1-8].

For the Mann type iterative sequence $\{x_n\}$ with errors, we also have the following result from Theorem 2.1.

THEOREM 2.3. *Let (E, d, W) be the same as in Theorem 2.1, T a generalized quasi-contractive mapping satisfying condition (1.4), and $\{x_n\}$ the Mann type iterative sequence with errors of T defined by (1.7). Then the sequence $\{x_n\}$ converges to a unique fixed point p of T in E .*

REFERENCES

1. L.B. Ćirić, A generalization of Banach's contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45**, 267–273, (1974).
2. X.P. Ding, Iterative processes for nonlinear mappings in convex metric spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **132**, 114–122, (1988).
3. Q.H. Liu, On Naimpally and Singh's open questions, *J. Math. Anal. Appl.* **124**, 157–164, (1987).
4. Q.H. Liu, A convergence theorem of the sequence of Ishikawa iterates for quasi contractive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* **146**, 301–305, (1990).
5. S.A. Naimpally and K.L. Singh, Extensions of some fixed point theorems of Rhoades, *J. Math. Anal. Appl.* **96**, 437–446, (1983).
6. B.E. Rhoades, Convergence of an Ishikawa type iteration scheme for a generalized contraction, *J. Math. Anal. Appl.* **185**, 350–355, (1994).
7. B.E. Rhoades, Comments on two fixed point iteration methods, *J. Math. Anal. Appl.* **56**, 741–750, (1976).
8. H.K. Xu, A note on the Ishikawa iteration scheme, *J. Math. Anal. Appl.* **167**, 582–587, (1992).
9. S.S. Chang, Some results for asymptotically pseudo-contractive mappings and asymptotically nonexpansive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (3), 845–853, (2001).
10. S.S. Chang, Y.J. Cho, J.S. Jung and S.M. Kang, Iterative approximations of fixed points and solutions for strongly accretive and strongly pseudo-contractive mappings in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **224**, 149–165, (1998).
11. C.E. Chidume, Convergence theorems for strongly pseudo-contractive and strongly accretive mappings, *J. Math. Anal. Appl.* **228**, 254–264, (1998).
12. C.E. Chidume, Global iterative schemes for strongly pseudo-contractive maps, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126**, 2641–2649, (1998).
13. W. Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive mappings I, *Kodai Math. Sem. Rep.* **22**, 142–149, (1970).
14. S.S. Chang, On Chidume's open questions and approximate solutions of multivalued strongly accretive mapping equations in Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **216**, 94–111, (1997).

บรรณานุกรม

- [1] W.A. Kirk. Handbook of Metric Fixed Point Theory 1st edition (June 30, 2001). Springer
- [2] Mohamed A. Khamsi. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory 1st edition (March 6, 2001). Wiley-Interscience
- [3] Kazimierz Goebel. Topics in Metric Fixed Point Theory (October 26, 2002). Cambridge University Press
- [4] Halsey Royden. Real Analysis 3rd edition (March 6, 2001). Prentice Hall
- [5] L.B. Ćirić. A generalization of Banach's contraction principle. Proc Amer. Soc. 45, 267-273, (1974)
- [6] S.S. Chang. Convergence Theorems of the Ishikawa Type Iterative Sequence with errors for Generalized Quasi-contractive Mapping in Convex Metric spaces. Applied Mathematics Letters 16(2003) 535-542
- [7] Wataru Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive mapping, I, Kodai Math 22(1970), 142-149
- [8] Kreyszig, Erwin, Introductory functional analysis with applications 1st edition (February 23, 1989). Wiley
- [9] X.P. Ding, Iterative process for nonlinear mapping in convex metric space. J. Math. Anal. Appl. 132, 114-122, (1998)
- [10] Q.H. Liu, On naimpally and Singh's open question, J. Math. Anal. Appl. 124, 157-164 (1987)
- [11] Q.H. Liu, A convergence theorem of the sequence of Ishikawa Iterative for quasi contractive mapping, J. Math. Anal. Appl. 146, 301-305, (1980)
- [12] S.A. Naimpally and K.L. Singh, Extension of some fixed point theorems of Rhoades, J. Math. Anal. Appl. 96, 437-446 (1983)
- [13] B.E. Rhoades, convergence of an Ishikawa type iteration scheme for generalized contraction, J. Math. Anal. Appl. 185, 350-355, (1994)
- [14] B.E. Rhoades, comment on two fixed point iteration method, J. Math. Anal. Appl. 56, 741-750 (1976).

- [15] H.K. Xu, A note on the Ishikawa Iteration scheme, *J math .Anal .Appl.*167,582-587(1992).
- [16] S.S.Chang ,some results for asymptotically pseudo-contractive mapping and asymptotically nonexpansive mapping.*Proc.Amer.math.soc.*129(3),845-853,(2003)
- [17] S.S.Chang ,Y.J .Cho,J.S Jung and S.M. Kang,Iterative approximation of fixed points and solution for strongly accretive and strongly pseudo—contractive mapping in banach spaces,*J math .Anal .Appl.*224,149-165(1998).
- [18] C.E. Chidume,Convergence theorems for strongly pseudo—contractive and strongly accretive mapping,*J math .Anal .Appl.*228,254-264(1998).
- [19] C.E. Chidume,Global Iterative schemes for strongly pseudo-contractive maps,*Proc Amer.Math.Soc.*126,2641-2649,(1998),
- [20] S.S.Chang,On,Chume,s open problem questions and approximate solution of mutivalued strongly accretive mapping equation mapping in Banach spaces, *J math. Anal .Appl.*216,94-111(1997).

