

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การประยุกต์ใช้รูปแบบเกาส์-เลอจองด์กับวิธีรุงเง-คูตตา

APPLICATION OF GAUSS-LEGENDRE FORMULA IN  
RUNGE-KUTTA METHOD



ณัฐธิดา สายยาโน  
วโรทัย สายทินกร

๑๗

๑๖ 3 ๒ 9 ๗

๑๕๔๙

เลขานุ.....  
เลขทะเบียน..... 73335  
วัน,เดือน,ปี..... 12 ก.ค. 2550

b. 11790 222  
i. ....

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**APPLICATION OF GAUSS-LEGENDRE FORMULA IN  
RUNGE-KUTTA METHOD**



**NATTHIDA SAIYANO  
WAROTHAI SAITHINAKORN**

**A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE  
FACULTY OF SCIENCE  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
ACADEMIC YEAR 2006**



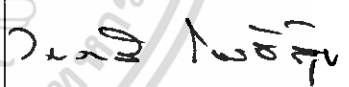
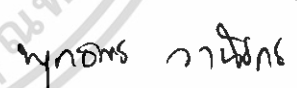
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ      การประยุกต์ใช้รูปแบบเกาส์-เลอจองด์กับระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา  
 APPLICATION OF GAUSS-LEGENDRE FORMULA IN  
 RUNGE-KUTTA METHOD

ชื่อนักศึกษา      นางสาวณัฐริดา สาขาโน      46050011  
                                  นางสาวโรทัย สาขาทินกร      46050030

ภาควิชา      คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์  
 สาขาวิชา      คณิตศาสตร์ประยุกต์  
 อาจารย์ที่ปรึกษา      รศ.ดร.ไมตรี โปธิ์สุข  
                                  อ.พุทธรพ วานิชกร

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นำปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2549

คณะกรรมการสอบ	ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ ดร.กาญจนา คำนึ่งกิจ	
กรรมการ อ.พรชัย ชัยสนธิ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ไมตรี โปธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา อ.พุทธรพ วานิชกร	

๖ >

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์  
 สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การประยุกต์ใช้รูปแบบเกาส์-เลอจองด์กับระเบียบวิธีรุงง-คุดตา	
นักศึกษา	นางสาวณัฐธิดา สายชาโน	46050011
	นางสาววโรทัย สายทินกร	46050030
ปริญญา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต	
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์	
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์	
ปีการศึกษา	2549	
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โปธิ์สุข	
	อ. พุทธพร วานิชกร	

### บทคัดย่อ

เนื้อหาของปัญหาพิเศษเล่มนี้ จะนำเสนอระเบียบวิธีที่พัฒนารูปแบบมาจากระเบียบวิธีรุงง-คุดตา โดยการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเป็นรูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต ให้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณระหว่างจุดถ่วงกับค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ มาใช้ในการกำหนดจุดของรูปแบบและจุดถ่วงในระเบียบวิธีรุงง-คุดตา จากนั้นจึงนำรูปแบบใหม่ที่ได้ไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ แล้วเปรียบเทียบผลที่ให้กับผลที่ได้จากรูปแบบรุงง-คุดตาที่นิยมใช้ อีกทั้งมีการสร้าง โมเดลทางคณิตศาสตร์ของปัญหาในชีวิตประจำวัน แล้วตรวจสอบ โมเดลที่ได้ด้วยรูปแบบเชิงตัวเลขที่หาได้ใหม่

<b>Special Project Title</b>	APPLICATION OF GAUSS-LEGENDRE FORMULA IN RUNGE-KUTTA METHOD	
<b>Students</b>	Miss Natthida Saiyano	46050011
	Miss Warothai Saithinakorn	46050030
<b>Degree</b>	Bachelor of Science	
<b>Department</b>	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science	
<b>Programme</b>	Applied Mathematics	
<b>Academic Year</b>	2006	
<b>Special Project Advisor</b>	Assoc. Prof. Dr. Maitree Podisuk Buddhaporn Vanishkorn	

### ABSTRACT

The Gauss-Legendre quadrature formulas approximate the integral of the complicated functions by replacing the integral by the sum of the product of value of the function at the nodal points and its weights. In this research , the points and weights from the Gauss-Legendre quadrature formulas will be used as the points and weights in the Runge-Kutta formulas. Not Only some examples are illustrated but also the real mathematical models are constructed and check by these new formulas.

## กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องการประยุกต์ใช้รูปแบบเกาส์-เลอจองด์กับวิธีรุงเง-คุดตา สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข และ อ.พุทธพร วณิชกร อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่คอยช่วยเหลือและให้คำปรึกษาปัญหาต่างๆเป็นอย่างดี รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อและคุณแม่ที่คอยเป็นกำลังใจแก่คณะผู้จัดทำอยู่ตลอดเวลา และขอขอบคุณพี่ๆ เพื่อนๆ ทุกคนของคณะผู้จัดทำที่มีส่วนช่วยเหลือในปัญหาพิเศษนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติ แก่คณะผู้จัดทำและเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการและอำนวยความสะดวกในการเก็บอุปกรณ์ต่างๆ ที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ จนปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

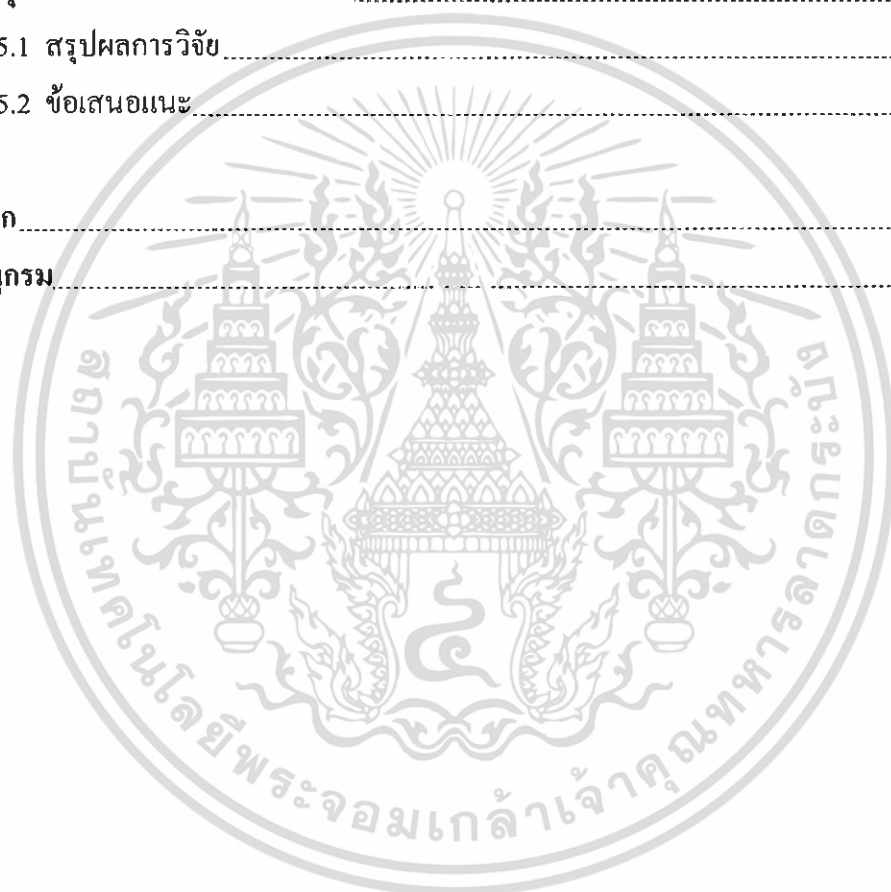
คณะผู้จัดทำ  
มีนาคม 2550

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญตาราง.....	VI
<b>บทที่ 1 บทนำ</b> .....	<b>1</b>
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	1
1.3 ขอบเขตของปัญหา.....	2
1.4 ขั้นตอนของการศึกษา.....	2
1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในการศึกษา.....	2
<b>บทที่ 2 ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง</b> .....	<b>4</b>
2.1 รูปแบบเกาส์-เลอจองด์.....	4
2.2 ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา.....	8
2.3 การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร.....	11
<b>บทที่ 3 วิธีการดำเนินการ</b> .....	<b>12</b>
3.1 การประยุกต์ใช้รูปแบบเกาส์-เลอจองด์สำหรับสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา.....	13
3.2 รูปแบบของระเบียบรุงเง-คุดตา.....	14
3.2.1 RKN2.....	14
3.2.2 RKN3.....	17
3.2.3 RKN4.....	20
3.2.4 RKN5.....	22
3.2.5 RKN6.....	24

## สารบัญ(ต่อ)

	หน้า
บทที่ 4 ผลของงานวิจัย.....	27
4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข.....	27
4.2 บทสรุป.....	47
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ.....	48
5.1 สรุปผลการวิจัย.....	48
5.2 ข้อเสนอแนะ.....	48
ภาคผนวก.....	49
บรรณานุกรม.....	57





## สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่	หน้า
4.18 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 5.....	46



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ปัญหาต่างๆที่อยู่ในงานวิจัย ทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ และสาขาวิชาอื่นๆ สามารถอธิบายได้ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ใช้อธิบายปัญหาต่างๆ มักจะมีการกำหนดเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นให้กับสมการที่สร้างขึ้น และเรียกสมการในลักษณะนี้ว่า ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (Initial value problem) โดยมีรูปแบบทั่วไปของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง คือ

$$y' = f(x, y)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0$$

โดยทั่วไปจะใช้คณิตศาสตร์เชิงวิเคราะห์ เพื่อหาผลเฉลยแท้จริง แต่ในบางปัญหาการหาผลเฉลยด้วยวิธีดังกล่าวมีความยุ่งยากและใช้เวลานาน หรือในบางปัญหาก็ไม่สามารถหาผลเฉลยที่แท้จริงได้ ดังนั้นการประมาณค่าด้วยคณิตศาสตร์เชิงตัวเลขจึงมีความสำคัญต่อการแก้ปัญหาดังกล่าว โดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นนี้ คือ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา

ในปัญหาพิเศษนี้จึงได้ศึกษานำเอาระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา มาดัดแปลงโดยที่จะนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ซึ่งเป็นวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต โดยจะทำให้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณของจุดถ่วงกับค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ ซึ่งเป็นรากของพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ มาปรับปรุงใช้เป็นจุดถ่วงและจุดของรูปแบบในระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา เพื่อเพิ่มความถูกต้องของผลเฉลยจากการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

### 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1. เพื่อศึกษาระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา รูปแบบต่างๆ และการสร้างรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา

1.2.2. เพื่อศึกษารูปแบบเกาส์-เลอจองด์ และการหาจุดถ่วงและจุดจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์

1.2.3. เพื่อศึกษารูปแบบระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา ซึ่งได้นำเอาจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งและ โมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้จริงในชีวิตประจำวัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 1.3 ขอบเขตของการศึกษา

ปัญหาพิเศษนี้ได้ศึกษาการนำจุดของรูปแบบและจุดด่างจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ที่นำมาประยุกต์ใช้กับการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สองถึงอันดับที่หก เพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x, y)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y(x_0) = y_0$$

และปัญหาโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้จริงในชีวิตประจำวัน

### 1.4 ขั้นตอนของการศึกษา

ขั้นตอนที่ 1 : ศึกษาความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เพื่อใช้เป็นแนวทางในการศึกษา

ขั้นตอนที่ 2 : ทำการศึกษาระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่สองถึงหก จากการนำรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์มาใช้ในการกำหนดค่าจุดด่างและจุดของรูปแบบ

ขั้นตอนที่ 3 : สร้างโมเดลทางคณิตศาสตร์ของปัญหาในชีวิตประจำวัน เพื่อใช้ในการเพิ่มประสิทธิภาพในการตรวจสอบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้จากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้

ขั้นตอนที่ 4 : เขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์ เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้จากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้

ขั้นตอนที่ 5 : สรุปผลของการศึกษา

### 1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในการศึกษา

“ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ” ที่ใช้ในปัญหาพิเศษนี้ เป็นระเบียบวิธีชัดเจนแบบขั้นเดียว ( Explicit Single Step Method ) ซึ่งหมายถึง ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ( Numerical Method ) ที่ใช้ข้อมูลเฉพาะที่จุด  $y_n$  เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด  $y_{n+1}$  และยังเป็นระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่ปรับปรุงมาจากระเบียบวิธีของออยเลอร์ ซึ่งมีรูปแบบเป็น

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

รูปแบบข้างต้นใช้ความชันที่จุด  $(x_n, y_n)$  แต่สำหรับรุงเง-คุตตา จะอยู่ในรูป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s a_i k_i$$

โดยที่  $k_1 = f(x_n, y_n)$

$$k_2 = f(x_n + h\alpha_1, y_n + h\beta_{11}k_1)$$

$$k_3 = f(x_n + h\alpha_2, y_n + h\beta_{21}k_1 + h\beta_{22}k_2)$$

⋮

$$k_s = f(x_n + h\alpha_{s-1}, y_n + h\beta_{s-1,1}k_1 + h\beta_{s-1,2}k_2 + \dots + h\beta_{s-1,s-1}k_{s-1})$$

จากรูปแบบข้างต้น  $k_i$  เป็นความชันที่จุดต่างๆ และค่า  $a_i$  เป็นค่าถ่วง ซึ่งเหมือนกับว่าใช้ค่าเฉลี่ยของความชันที่  $s$  จุดเพื่อหาค่า  $y_{n+1}$



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

### ความรู้พื้นฐานและทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 รูปแบบเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre quadrature formulas)

ในปี ค.ศ. 1805 นักคณิตศาสตร์ชื่อ เกาส์ (C.F. Gauss) และ เลอจองด์ (A.M. Legendre) ได้สร้างรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเป็นรูปแบบที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตฟังก์ชัน ให้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณระหว่างจุดถ่วง  $w_i$  กับค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ  $z_i$  ที่สอดคล้องกับ  $n$  จุดของเกาส์ รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์แสดงได้ดังสมการ 2.1

$$\int_{-1}^1 f(z) dz \cong \sum_{i=1}^n w_i f(z_i) \quad (2.1)$$

เมื่อจุดของรูปแบบ  $z_i$  ;  $i=1,2,\dots,n$  เป็นจุดใดๆในช่วงปิด  $[-1,1]$  ซึ่งเป็นรากของพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ (Legendre orthogonal polynomials)  $p_n(z)$  [4] ซึ่ง

$$p_n(z) = \begin{cases} 1 & ; n=0 \\ z & ; n=1 \\ \frac{1}{n} [(2n-1)z p_{n-1}(z) - (n-1)p_{n-2}(z)] & ; n > 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

และ 
$$w_i = \frac{1}{p_n'(z_i)} \int_{-1}^1 \frac{p_n(z)}{(z-z_i)} dz \quad (2.3)$$

การหาจุด  $z_i$  และจุดถ่วง  $w_i$  เป็นไปตามที่ได้ศึกษามาแล้วซึ่งจะแสดงให้ดูสักรูปแบบหนึ่ง ดังตัวอย่าง

-ใช้รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์ เมื่อ  $n=3$

วิธีทำ จากพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ ได้  $p_3(z) = z^3 - \frac{3}{5}z$

$$\therefore p_3(z) = z(z^2 - \frac{3}{5}) = z(z - \sqrt{\frac{3}{5}})(z + \sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\therefore z_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}} = -0.774596669, z_2 = 0, z_3 = \sqrt{\frac{3}{5}} = 0.774596669$$

และ  $p_3'(z) = 3z^2 - \frac{3}{5}$  และจาก

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{3z_1^2 - \frac{3}{5}} \int_{-1}^1 \frac{z^3 - \frac{3}{5}z}{z - z_1} dz = \frac{1}{3\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5}} \int_{-1}^1 \frac{z^3 - \frac{3}{5}z}{\left(z + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} dz \\ &= \frac{5}{6} \int_{-1}^1 \left( z^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}z \right) dz = \frac{5}{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} \right) = \frac{5}{9} = 0.555555556 \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{1}{-\frac{3}{5}} \int_{-1}^1 \frac{z^3 - \frac{3}{5}z}{z - 0} dz = \frac{-5}{3} \int_{-1}^1 \left( z^2 - \frac{3}{5} \right) dz = \frac{8}{9} = 0.888888889$$

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{1}{3z_3^2 - \frac{3}{5}} \int_{-1}^1 \frac{z^3 - \frac{3}{5}z}{z - z_3} dz = \frac{1}{3\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{3}{5}} \int_{-1}^1 \frac{z^3 - \frac{3}{5}z}{\left(z - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} dz \\ &= \frac{5}{9} = 0.555555556 \end{aligned}$$

สำหรับค่าจุดของรูปแบบ  $z_i$  และค่าจุดถ่วง  $w_i$  ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ สามารถแสดง  
ได้ดังตาราง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าจุดของรูปแบบ  $z_i$  และค่าจุดถ่วง  $w_i$  ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ [2]

$\int_{-1}^1 f(z) dz \cong \sum_{i=1}^n w_i f(z_i)$		
$n$	$z_i$	$w_i$
2	-0.577350269189626 0.577350269189626	1.0 1.0
3	-0.774596669241483 0.0 0.774596669241483	0.555555555555556 0.888888888888889 0.555555555555556
4	-0.861136311594053 -0.339981043584856 0.339981043584856 0.861136311594053	0.347854845137454 0.652145154862546 0.652145154862546 0.347854845137454
5	-0.906179845938664 -0.535469310105683 0.0 0.535469310105683 0.906179845938664	0.236926885056189 0.478628670499366 0.568888888888889 0.478628670499366 0.236926885056189
6	-0.932409514203152 -0.661209386466265 -0.238619186083197 0.238619186083197 0.661209386466265 0.932409514203152	0.171324492379170 0.360761573048139 0.467913934572691 0.467913934572691 0.360761573048139 0.171324492379170

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปแบบทั่วไปของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์จะเห็นได้ว่ารูปแบบดังกล่าว เป็นการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตในแกนพิกัด  $z$  จากลิมิต  $-1$  ถึง  $1$  ซึ่งสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตในพิกัด  $x$  จากลิมิต  $a$  ถึง  $b$  ใดๆ จะมีรูปแบบเกาส์-เลอจองด์เป็นไปตามทฤษฎีบทที่ 2.1 [5]

**ทฤษฎีบทที่ 2.1** (The Gauss-Legendre Translation) กำหนดจุดของรูปแบบ  $z_i$  และจุดถ่วง  $w_i$  เมื่อ  $i=1,2,\dots,n$  ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ  $n$  จุด สำหรับประมาณค่าปริพันธ์ในแกนพิกัด  $z$  จากลิมิต  $-1$  ถึง  $1$  แล้วจะได้ว่า รูปแบบเกาส์-เลอจองด์สำหรับช่วงการหาปริพันธ์  $a$  ถึง  $b$  มีรูปแบบคือ

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z_i\right)$$

### พิสูจน์

ให้  $z_i$  และ  $w_i$  ;  $i=1,2,\dots,n$  เป็นค่าจุดของรูปแบบและค่าจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ  $n$  จุด ในการประมาณค่าปริพันธ์ในแกนพิกัด  $z$  จากลิมิต  $-1$  ถึง  $1$

ซึ่งสำหรับการประมาณค่าปริพันธ์ในแกนพิกัด  $x$  จาก  $a$  ถึง  $b$  จะได้ว่า

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z$$

เพราะฉะนั้น

$$dx = \frac{b-a}{2} dz$$

ทำให้ได้ว่า รูปแบบเกาส์-เลอจองด์สำหรับช่วงการหาปริพันธ์  $a$  ถึง  $b$  มีรูปแบบคือ

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z\right) \frac{b-a}{2} dz \\ &= \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z\right) dz \\ &= \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z_i\right) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 กำหนดให้  $x_1, x_2, \dots, x_n$  เป็นรากของพหุนามตั้งฉาก  $p_n(x)$  ในช่วงเปิด  $[a, b]$  ตามฟังก์ชันถ่วง  $w(x)$  สมมติว่าสามารถหาค่า  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ได้และการหาปริพันธ์

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + E[f] \quad (2.4)$$

ไม่มีความคลาดเคลื่อน สำหรับ  $f(x)$  ที่เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน  $n-1$  แล้วรูปแบบ (2.4) จะไม่มีค่าความคลาดเคลื่อนเลย ถ้า  $f(x)$  เป็นพหุนามที่มีกำลังไม่เกิน  $2n-1$

พิสูจน์ ดูเอกสารอ้างอิง [5]

## 2.2 ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta Method)

ปี ค.ศ. 1895 นักคณิตศาสตร์ชื่อ รุงเง (C. Runge) ได้สร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญขึ้น ต่อมาในปี ค.ศ. 1901 นักคณิตศาสตร์ชื่อ คุดตา (W.Kutta) ได้ปรับปรุงวิธีการของรุงเง และให้ชื่อระเบียบวิธีใหม่นี้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา (Runge-Kutta Method) [5] ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันมากในการประมาณค่าคำตอบของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (2.5)$$

ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา เป็นระเบียบวิธีชัดแจ้งแบบขั้นเดียว โดยรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุดตาอันดับที่  $s$  คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Increment function)  $\phi(x_m, y_m; h)$  คือความชันเฉลี่ยตลอดขนาดขั้น  $h$  ซึ่งกำหนดให้มีรูปแบบโดยทั่วไป ดังนี้

$$\phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^s a_i k_i \quad (2.7)$$

$$\text{เมื่อ} \quad k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; i=1 \\ f(x_m + hc_i, y_m + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j) & ; i=2, \dots, s \end{cases} \quad (2.8)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และ 
$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (2.9)$$

โดยที่  $a_i$ ,  $c_i$  และ  $b_{ij}$  เป็นสัมประสิทธิ์ระเบียบวิธีรุงเง-คุดตา และ  $h$  เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้นมีค่าเท่ากับ  $x_{m+1} - x_m$  และ  $s$  เป็นอันดับของระเบียบวิธี

วิธีรุงเง-คุดตา(Runge-Kutta Method) เป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่นิยมใช้กันมาก ซึ่งเป็นวิธีที่ปรับปรุงมาจากวิธีของออยเลอร์ แต่สำหรับวิธีของรุงเง-คุดตาจะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด  $(x_m, y_m)$  และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่หลายจุด เช่นในกรณีที่ใช้ความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่สองจุด จะได้รูปแบบ

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \quad (2.10)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

นั่นคือวิธีนี้ใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด  $(x_m, y_m)$  และจะมีค่าความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของ  $f(x_m, y_m)$  และ  $f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$  รูปแบบของสมการที่ (2.10) เรียกว่าวิธีของรุงเง-คุดตาอันดับที่สอง (Runge-Kutta method of second order) ซึ่งจะต้องหาค่า  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\alpha$  และ  $\beta$  ซึ่งวิธีการหาค่าเหล่านี้จะกระทำโดยใช้ความรู้ของการขยายของเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ส่วนวิธีของรุงเง-คุดตาอันดับที่สาม (Runge-Kutta method of third order) จะมีรูปแบบเป็น

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3) \quad (2.11)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_1 h k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 h k_1 + \lambda_1 h k_2)$$

ในทำนองเดียวกันกับวิธีรุงเง-คุดตาอันดับที่สองและอันดับที่สาม อาจจะหาวิธีของรุงเง-คุดตาอันดับที่สูงขึ้นเรื่อยๆ ได้ แต่ทั้งในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ วิธีของรุงเง-คุดตาอันดับที่สูงเกินกว่าสี่ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จะไม่ทำให้การหาผลเฉลยได้ผลดีขึ้น ดังนั้นโดยทั่วไปจึงใช้วิธีของรุงเง-คูตดาอันดับที่สี่ที่นิยมใช้จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.12)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

ในช่วงต่อมา ได้มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านทำการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่มีความถูกต้องเพิ่มมากยิ่งขึ้น ดังเช่น

ระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา-ไฟล์เบิร์ก [6] เสนอไว้เมื่อปี ค.ศ.1969 โดยนักวิจัยชื่อ ไฟล์เบิร์ก (E.Fehlberg) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการหนึ่งที่เป็นที่ยอมรับ โดยระเบียบวิธีดังกล่าวเป็นระเบียบวิธีที่ปรับปรุงรูปแบบมาจากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา (สมการ 2.6-2.9) กรณี  $s = 5$  โดยการตัดเทอม  $k_2 = 0$  ออกจากฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (สมการ 2.7) เมื่อทำการหาสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีแล้ว จะได้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา-ไฟล์เบิร์ก มีรูปแบบคือ

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (2.13)$$

โดยที่

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right) = 0$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k_4 = hf \left( x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3 \right)$$

$$k_5 = hf \left( x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4 \right)$$

โดยทั่วไปจะเขียน RK2, RK3, RK4 และ RK5 แทนวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง อันดับที่สาม อันดับี่สี่ และอันดับที่ห้า ตามลำดับ

### 2.3 การกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร [1]

ถ้า  $f$  และทุกอนุพันธ์ย่อยของ  $f$  ที่มีอันดับน้อยกว่าหรือเท่ากับ  $n$  มีความต่อเนื่องบน  $D = \{(x, y); a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  และ  $(x, y)$  กับ  $(x+h, y+k)$  อยู่ใน  $D$  ทั้งคู่แล้ว

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \left[ h \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right] \\ &+ \left[ \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right] + \dots + \\ &+ \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} h^{n-j} k^j \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j} \partial y^j} + \dots \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### บทที่ 3

### วิธีการดำเนินการวิจัย

วิธีการต่างๆที่ใช้ในปัจจุบันจะเป็นรูปแบบออยเลอร์, เทย์เลอร์, รุงเง-คุตตา แต่ในแนวคิดใหม่นี้จะเป็นการปรับปรุงรูปแบบวิธีของรุงเง-คุตตาโดยใช้จุด  $z$ , และ  $w$  เป็นจุดและจุดว่างของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์

ในปี ค.ศ. 2006, รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข, นางสาวสิริรัตน์ ชันติติลวงษา และนายวิชาญ รัตนเมธาวิ ได้ทำการวิจัยเรื่อง Gauss Legendre Formulas in Runge-Kutta Method จากงานวิจัยได้แนะนำสมการซึ่งได้ผลเป็นที่น่าพึงพอใจทั้ง 3 สมการดังต่อไปนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (3.1)$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{780}{3691}h, y_m + \frac{780}{3691}hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{780}{989}h, y_m + \frac{780}{989}hk_1\right)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3) \quad (3.2)$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{63}{559}h, y_m + \frac{63}{559}hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{496}{559}h, y_m - \frac{74}{433}hk_1 + \frac{2491}{2354}hk_2\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(572k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_4) \quad (3.3)$$

โดยที่  $k_1 = f(x_m + \frac{77}{1109}h, y_m + \frac{77}{1109}hf(x_m, y_m))$

$$k_2 = f(x_m + \frac{364}{1103}h, y_m + \frac{364}{1103}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m - \frac{362}{1175}hk_1 + \frac{803}{821}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m + \frac{1379}{1602}hk_1 - \frac{1249}{1742}hk_2 + \frac{1664}{2115}hk_3)$$

### 3.1 การประยุกต์ใช้รูปแบบเกาส์-เลอจองด์สำหรับสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา

ในหัวข้อนี้จะแสดงการสร้างระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คูตดาโดยการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ โดยจะใช้สัญลักษณ์ RKN แทนระเบียบวิธีรุงเง-คูตดาที่มาจาก การนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาใช้ในการปรับปรุง

สำหรับการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาใช้ในการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คูตดา อันดับ  $s$  ที่มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \quad ; \quad m = 1, 2, \dots$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม  $\phi(x_m, y_m; h)$  เป็นค่าความชันเฉลี่ยที่แต่ละจุดของรูปแบบที่นำมาจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ โดยกำหนดให้มีรูปแบบทั่วไปดังสมการ (3.4)

$$\phi(x, y; h) = \sum_{i=1}^s a_i k_i \quad (3.4)$$

โดยที่

$$k_i = \begin{cases} f(x_m + h\alpha_i, y_m + h\beta_{i1}f(x_m, y_m)) & ; \quad i = 1 \\ f(x_m + h\alpha_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}k_j) & ; \quad i = 2, \dots, s \end{cases}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ  $\beta_i$  เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา,  $h$  เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้น และค่า  $a_i, \alpha_i$  จะถูกกำหนดโดยรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ ซึ่งเกิดจากการแปลงจุดของรูปแบบ  $z_i \in [-1, 1]$  และจุดถ่วง  $w_i; i=1, 2, \dots, s$  ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ  $s$  จุด เป็นจุดของรูปแบบ  $\psi_i \in [x_m, x_{m+1}]$  และจุดถ่วง  $a_i; i=1, 2, \dots, s$  สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่  $s$  ซึ่งมีความสัมพันธ์สำหรับการแปลงจุดของรูปแบบ คือ

$$\psi_i = x_m + \frac{h}{2}(z_i + 1) \quad ; \quad i=1, 2, \dots, s \quad (3.5)$$

### 3.2 รูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

นำค่าจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์จากตารางที่ 2.1 มาใส่ในจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

#### 3.2.1 RKN2

รูปแบบทั่วไปของ RKN2 ซึ่งกำหนดให้  $s=2$  จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \quad (3.6)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} h f(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1)$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ค่าคงที่  $a_1, a_2, \alpha_1$  และ  $\alpha_2$  ของระเบียบวิธี (3.6) ถูกกำหนดจากการปรับปรุงใช้จุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 2 จุดในระเบียบวิธี ซึ่งค่าจุดของรูปแบบและจุดถ่วงสำหรับ RKN2 แสดงดังตารางที่ 3.1 เมื่อ  $h = x_{m+1} - x_m$

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับ RKN2

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		RKN2	
	จุดของรูปแบบ	จุดถ่วง	จุดของรูปแบบ	จุดถ่วง
$i$	$z_i$	$w_i$	$\psi_i$	$a_i$
1	$\frac{-2131}{3691}$	1	$x_m + \frac{780}{3691}h$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{2131}{3691}$	1	$x_m + \frac{780}{989}h$	$\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (3.7)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} h f(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1)$$

เมื่อ

$$\alpha_1 = \frac{780}{3691} \quad \text{และ} \quad \alpha_2 = \frac{780}{989}$$

จากสมการ (3.7) ทำการหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าที่เหลือ คือ  $\beta_{11}$  และ  $\beta_{21}$  ซึ่งสามารถทำได้โดยการนำ  $k_1$  และ  $k_2$  มากระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์สองตัวแปรได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} h f) \\ &= f + h[\alpha_1 f_x + \beta_{11} f f_y] + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1) \\ &= f + h[\alpha_2 f_x + \beta_{21} f f_y] + O(h^2) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจะได้รูปแบบของระเบียบวิธี (3.7) ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์สองตัวแปร คือ เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2} [(\alpha_1 + \alpha_2)f_x + (\beta_{11} + \beta_{21})ff_y] + O(h^3) \quad (3.8)$$

ถ้า  $y(x_{m+1})$  เป็นผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \quad (3.9)$$

ซึ่งสามารถเขียนในรูปอนุกรมเทย์เลอร์สองตัวแปรได้ดังสมการ (3.10)

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2} (f_x + ff_y) + O(h^3) \quad (3.10)$$

จากสมการ (3.8) และ (3.10) นำมาเทียบสัมประสิทธิ์ของ  $h$  จะได้เงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี (3.7) คือ

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 &= 1 \\ \beta_{11} + \beta_{21} &= 1 \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าว ถ้ากำหนดให้  $\beta_{11} = \alpha_1$  จะได้ว่า  $\beta_{21} = \alpha_2$  ดังนั้น รูปแบบ RKN2 คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2} (k_1 + k_2) \quad (3.11)$$

โดยที่ 
$$k_1 = f\left(x_m + \frac{780}{3691}h, y_m + \frac{780}{3691}hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{780}{989}h, y_m + \frac{780}{989}hk_1\right)$$

จากกระบวนการสร้าง RKN2 ดังกล่าว จะเป็นพื้นฐานในการสร้างระเบียบวิธี RKN ในอันดับสูงขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

### 3.2.2 RKN3

สำหรับ RKN3 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 3 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีรูปแบบทั่วไป และมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่

3.2 เมื่อ  $h = x_{m+1} - x_m$

รูปแบบทั่วไป RKN3 ซึ่งกำหนดให้  $s = 3$  จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3) \quad (3.12)$$

โดยที่  $k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} h f(x_m, y_m))$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2)$$

ตารางที่ 3.2 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับ RKN3

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		RKN3	
	จุดของรูปแบบ	จุดถ่วง	จุดของรูปแบบ	จุดถ่วง
$i$	$z_i$	$w_i$	$\psi_i$	$a_i$
1	$\frac{-3409}{4401}$	$\frac{5}{9}$	$x_m + \frac{63}{559} h$	$\frac{5}{18}$
2	0	$\frac{8}{9}$	$x_m + \frac{1}{2} h$	$\frac{8}{18}$
3	$\frac{3409}{4401}$	$\frac{5}{9}$	$x_m + \frac{496}{559} h$	$\frac{5}{18}$

## 73335

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3) \quad (3.13)$$

โดยที่  $k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} h f(x_m, y_m))$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2)$$

เมื่อ  $\alpha_1 = \frac{63}{559}, \alpha_2 = \frac{1}{2}, \alpha_3 = \frac{496}{559}$

สร้างเงื่อนไขของระเบียบวิธี เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบ โดยการกระจาย  $k_1, k_2$  และ  $k_3$  ให้อยู่ในรูปของอนุกรมเทย์เลอร์สองตัวแปรซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} h f(x_m, y_m)) \\ &= f + h[\alpha_1 f_x + \beta_{11} f f_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_1^2 f_{xx} + 2\alpha_1 \beta_{11} f f_{xy} + \beta_{11}^2 f^2 f_{yy}] + O(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} h k_1) \\ &= f + h[\alpha_2 f_x + \beta_{21} f f_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_2^2 f_{xx} + 2\alpha_2 \beta_{21} f f_{xy} + 2\alpha_2 \beta_{21} f_x f_y + \beta_{21}^2 f^2 f_{yy} + 2\beta_{11} \beta_{21} f f_y^2] \\ &\quad + O(h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3 &= f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} h k_1 + \beta_{32} h k_2) \\ &= f + h[\alpha_3 f_x + (\beta_{31} + \beta_{32}) f f_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_3^2 f_{xx} + 2\alpha_3 (\beta_{31} + \beta_{32}) f f_{xy} \\ &\quad + 2(\alpha_3 \beta_{31} + \alpha_3 \beta_{32}) f_x f_y + (\beta_{31} + \beta_{32})^2 f^2 f_{yy} + 2(\beta_{11} \beta_{31} + \beta_{21} \beta_{32}) f f_y^2] + O(h^3) \end{aligned}$$

แทนค่า  $k_1, k_2$  และ  $k_3$  ที่ได้จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์สองตัวแปรในสมการ (3.13) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y_{m+1} = & y_m + \left[ \frac{5}{18} + \frac{8}{18} + \frac{5}{18} \right] hf + h^2 \left[ \left( \frac{5}{18} \alpha_1 + \frac{8}{18} \alpha_2 + \frac{5}{18} \alpha_3 \right) f_x + \left( \frac{5}{18} \beta_{11} + \frac{8}{18} \beta_{21} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{5}{18} (\beta_{31} + \beta_{32}) \right) ff_y \right] + h^3 \left[ \left( \frac{5}{36} \alpha_1^2 + \frac{8}{36} \alpha_2^2 + \frac{5}{36} \alpha_3^2 \right) f_{xx} + \left( \frac{5}{18} \alpha_1 \beta_{11} + \frac{8}{18} \alpha_2 \beta_{21} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{5}{18} \alpha_3 (\beta_{31} + \beta_{32}) \right) ff_{xy} + \left( \frac{5}{18} (\alpha_1 \beta_{31} + \alpha_2 \beta_{32}) + \frac{8}{18} \alpha_1 \beta_{21} \right) f_x f_y + \left( \frac{5}{36} \beta_{11}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{8}{36} \beta_{21}^2 + \frac{5}{36} (\beta_{31} + \beta_{32})^2 \right) f^2 f_{yy} + \left( \frac{8}{18} \beta_{11} \beta_{21} + \frac{5}{18} (\beta_{11} \beta_{31} + \beta_{21} \beta_{32}) \right) ff_y^2 \right] + O(h^4)
\end{aligned}
\tag{3.14}$$

จากสมการ (3.9)

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf + \frac{h^2}{2} [f_x + ff_y] + \frac{h^3}{6} [f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2] + O(h^4)
\tag{3.15}$$

เมื่อนำสมการ (3.14) และ (3.15) นำมาเทียบสัมประสิทธิ์ของ  $h$  จะได้เงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี (3.13) คือ

$$\frac{5}{18} \beta_{11} + \frac{8}{18} \beta_{21} + \frac{5}{18} (\beta_{31} + \beta_{32}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{18} \alpha_1 \beta_{11} + \frac{8}{18} \alpha_2 \beta_{21} + \frac{5}{18} \alpha_3 (\beta_{31} + \beta_{32}) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{18} (\alpha_1 \beta_{31} + \alpha_2 \beta_{32}) + \frac{8}{18} \alpha_1 \beta_{21} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{36} \beta_{11}^2 + \frac{8}{36} \beta_{21}^2 + \frac{5}{36} (\beta_{31} + \beta_{32})^2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{18} \beta_{11} \beta_{21} + \frac{5}{18} (\beta_{11} \beta_{31} + \beta_{21} \beta_{32}) = \frac{1}{6}$$

คำนวณหาค่าของ  $\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}$  และ  $\beta_{32}$  จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าวจะได้ว่า

$$\beta_{11} = \frac{63}{559}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = -\frac{74}{433}, \beta_{32} = \frac{2491}{2354}$$

เพราะฉะนั้น RKN3 มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3) \quad (3.16)$$

โดยที่  $k_1 = f\left(x_m + \frac{63}{559}h, y_m + \frac{63}{559}hf(x_m, y_m)\right)$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{496}{559}h, y_m - \frac{74}{433}hk_1 + \frac{2491}{2354}hk_2\right)$$

### 3.2.3 RKN4

สำหรับ RKN4 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 4 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีรูปแบบทั่วไป และมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่

3.3 เมื่อ  $h = x_{m+1} - x_m$

รูปแบบทั่วไป RKN4 ซึ่งกำหนดให้  $s = 4$  จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4) \quad (3.17)$$

โดยที่  $k_1 = f(x_m + \alpha_1h, y_m + \beta_{11}hf(x_m, y_m))$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2h, y_m + \beta_{21}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3h, y_m + \beta_{31}hk_1 + \beta_{32}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4h, y_m + \beta_{41}hk_1 + \beta_{42}hk_2 + \beta_{43}hk_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 3.3 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับ RKN4

$i$	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		RKN4	
	จุดของรูปแบบ $z_i$	จุดถ่วง $w_i$	จุดของรูปแบบ $\psi_i$	จุดถ่วง $a_i$
1	$\frac{-955}{1109}$	$\frac{527}{1515}$	$x_m + \frac{77}{1109}h$	$\frac{527}{3030}$
2	$\frac{-375}{1103}$	$\frac{988}{1515}$	$x_m + \frac{364}{1103}h$	$\frac{988}{3030}$
3	$\frac{375}{1103}$	$\frac{988}{1515}$	$x_m + \frac{739}{1103}h$	$\frac{988}{3030}$
4	$\frac{955}{1109}$	$\frac{527}{1515}$	$x_m + \frac{1032}{1109}h$	$\frac{527}{3030}$

$$\text{จะได้ } \alpha_1 = \frac{77}{1109}, \alpha_2 = \frac{364}{1103}, \alpha_3 = \frac{739}{1103}, \alpha_4 = \frac{1032}{1109}$$

จากการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่เหลือได้ดังต่อไปนี้

$$\beta_{11} = \frac{77}{1109}, \beta_{21} = \frac{364}{1103}, \beta_{31} = -\frac{362}{1175}, \beta_{32} = \frac{803}{821}, \beta_{41} = \frac{1379}{1602}, \beta_{42} = -\frac{1249}{1742}, \beta_{43} = \frac{1664}{2115}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ RKN4 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030} (527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_4) \quad (3.18)$$

$$\text{โดยที่ } k_i = f\left(x_m + \frac{77}{1109}h, y_m + \frac{77}{1109}hf(x_m, y_m)\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{364}{1103}h, y_m + \frac{364}{1103}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m - \frac{362}{1175}hk_1 + \frac{803}{821}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m + \frac{1379}{1602}hk_1 - \frac{1249}{1742}hk_2 + \frac{1664}{2115}hk_3\right)$$

### 3.2.4 RKN5

สำหรับ RKN5 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 5 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีรูปแบบทั่วไป และมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่

3.4 เมื่อ  $h = x_{m+1} - x_m$

รูปแบบทั่วไป RKN5 ซึ่งกำหนดให้  $s = 5$  จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4 + a_5k_5) \quad (3.19)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1h, y_m + \beta_{11}hf(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2h, y_m + \beta_{21}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3h, y_m + \beta_{31}hk_1 + \beta_{32}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4h, y_m + \beta_{41}hk_1 + \beta_{42}hk_2 + \beta_{43}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \alpha_5h, y_m + \beta_{51}hk_1 + \beta_{52}hk_2 + \beta_{53}hk_3 + \beta_{54}hk_4)$$

ตารางที่ 3.4 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับ RKN5

$i$	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		RKN5	
	จุดของรูปแบบ $z_i$	จุดถ่วง $w_i$	จุดของรูปแบบ $\psi_i$	จุดถ่วง $a_i$
1	$\frac{-1613}{1780}$	$\frac{589}{2486}$	$x_m + \frac{230}{4903}h$	$\frac{589}{4972}$
2	$\frac{-5333}{9904}$	$\frac{1075}{2246}$	$x_m + \frac{4568}{19795}h$	$\frac{1075}{4492}$
3	0	$\frac{512}{900}$	$x_m + \frac{1}{2}h$	$\frac{512}{1800}$
4	$\frac{5333}{9904}$	$\frac{1075}{2246}$	$x_m + \frac{15227}{19795}h$	$\frac{1075}{4492}$
5	$\frac{1613}{1780}$	$\frac{589}{2486}$	$x_m + \frac{1280}{1343}h$	$\frac{589}{4972}$

จะได้  $\alpha_1 = \frac{230}{4903}, \alpha_2 = \frac{4568}{19795}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = \frac{15227}{19795}, \alpha_5 = \frac{1280}{1343}$

จากการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่เหลือได้ดังต่อไปนี้

$$\beta_{11} = \frac{63}{1343}, \beta_{21} = \frac{4568}{19795}, \beta_{31} = -\frac{1163}{3926}, \beta_{32} = \frac{676}{849},$$

$$\beta_{41} = \frac{1578}{1513}, \beta_{42} = -\frac{2989}{2531}, \beta_{43} = \frac{265}{293}, \beta_{51} = -\frac{701}{684},$$

$$\beta_{52} = \frac{5338}{2441}, \beta_{53} = -\frac{1675}{833}, \beta_{54} = \frac{412}{685}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพราะฉะนั้นจะได้ RKN5 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h \left( \frac{589}{4972} k_1 + \frac{1075}{4492} k_2 + \frac{512}{1800} k_3 + \frac{1075}{4492} k_4 + \frac{589}{4972} k_5 \right) \quad (3.20)$$

โดยที่  $k_1 = f\left(x_m + \frac{63}{1343} h, y_m + \frac{63}{1343} hf(x_m, y_m)\right)$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{4568}{19795} h, y_m + \frac{4568}{19795} hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{1}{2} h, y_m - \frac{1163}{3926} hk_1 + \frac{676}{849} hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + \frac{15227}{19795} h, y_m + \frac{1578}{1513} hk_1 - \frac{2989}{2531} hk_2 + \frac{265}{293} hk_3\right)$$

$$k_5 = f\left(x_m + \frac{1280}{1343} h, y_m - \frac{701}{684} hk_1 + \frac{5338}{2441} hk_2 - \frac{1675}{833} hk_3 + \frac{412}{685} hk_4\right)$$

### 3.2.5 RKN6

สำหรับ RKN6 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 6 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีรูปแบบทั่วไป และมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่

3.5 เมื่อ  $h = x_{m+1} - x_m$

รูปแบบทั่วไป RKN6 ซึ่งกำหนดให้  $s = 6$  จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + a_4 k_4 + a_5 k_5 + a_6 k_6) \quad (3.21)$$

โดยที่  $k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf(x_m, y_m))$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} hk_1 + \beta_{32} hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41} hk_1 + \beta_{42} hk_2 + \beta_{43} hk_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น เมื่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k_5 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{51} h k_1 + \beta_{52} h k_2 + \beta_{53} h k_3 + \beta_{54} h k_4)$$

$$k_6 = f(x_m + \alpha_6 h, y_m + \beta_{61} h k_1 + \beta_{62} h k_2 + \beta_{63} h k_3 + \beta_{64} h k_4 + \beta_{65} h k_5)$$

ตารางที่ 3.5 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับ RKN6

$i$	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		RKN6	
	จุดของรูปแบบ $z_i$	จุดถ่วง $w_i$	จุดของรูปแบบ $\psi_i$	จุดถ่วง $a_i$
1	$\frac{-1367}{1466}$	$\frac{141}{823}$	$x_m + \frac{13}{385} h$	$\frac{141}{1646}$
2	$\frac{-525}{794}$	$\frac{1118}{3099}$	$x_m + \frac{269}{1588} h$	$\frac{559}{3099}$
3	$\frac{-629}{2636}$	$\frac{2501}{5345}$	$x_m + \frac{761}{1999} h$	$\frac{2501}{10690}$
4	$\frac{629}{2636}$	$\frac{2501}{5345}$	$x_m + \frac{1238}{1999} h$	$\frac{2501}{10690}$
5	$\frac{525}{794}$	$\frac{1118}{3099}$	$x_m + \frac{1319}{1588} h$	$\frac{559}{3099}$
6	$\frac{1367}{1466}$	$\frac{141}{823}$	$x_m + \frac{372}{385} h$	$\frac{141}{1646}$

จะได้  $\alpha_1 = \frac{13}{385}, \alpha_2 = \frac{269}{1588}, \alpha_3 = \frac{761}{1999}, \alpha_4 = \frac{1238}{1999}, \alpha_5 = \frac{1319}{1588}, \alpha_6 = \frac{372}{385}$

จากการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ไม่ทราบค่าที่เหลือได้ดังต่อไปนี้

$$\beta_{11} = \frac{13}{385}, \beta_{21} = \frac{269}{1588}, \beta_{31} = -\frac{217}{853}, \beta_{32} = \frac{1763}{2776},$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\beta_{41} = \frac{587}{573}, \beta_{42} = -\frac{248}{197}, \beta_{43} = \frac{829}{971}, \beta_{51} = -\frac{2333}{1339},$$

$$\beta_{52} = \frac{2153}{639}, \beta_{53} = -\frac{688}{431}, \beta_{54} = \frac{1743}{2179}, \beta_{61} = \frac{1033}{742},$$

$$\beta_{62} = -\frac{850}{487}, \beta_{63} = \frac{734}{1017}, \beta_{64} = \frac{1499}{3150}, \beta_{65} = \frac{317}{2602},$$

เพราะฉะนั้นจะได้ RNK6 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h \left( \frac{141}{1646} k_1 + \frac{559}{3099} k_2 + \frac{2501}{10690} k_3 + \frac{2501}{10690} k_4 + \frac{559}{3099} k_5 + \frac{141}{1646} k_6 \right) \quad (3.22)$$

โดยที่

$$k_1 = f \left( x_m + \frac{13}{385} h, y_m + \frac{13}{385} h f(x_m, y_m) \right)$$

$$k_2 = f \left( x_m + \frac{269}{1588} h, y_m + \frac{269}{1588} h k_1 \right)$$

$$k_3 = f \left( x_m + \frac{761}{1999} h, y_m - \frac{217}{853} h k_1 + \frac{1763}{2776} h k_2 \right)$$

$$k_4 = f \left( x_m + \frac{1238}{1999} h, y_m + \frac{587}{573} h k_1 - \frac{248}{197} h k_2 + \frac{829}{971} h k_3 \right)$$

$$k_5 = f \left( x_m + \frac{1319}{1588} h, y_m - \frac{2333}{1339} h k_1 + \frac{2153}{639} h k_2 - \frac{688}{431} h k_3 + \frac{1743}{2179} h k_4 \right)$$

$$k_6 = f \left( x_m + \frac{372}{385} h, y_m + \frac{1033}{742} h k_1 - \frac{850}{487} h k_2 - \frac{734}{1017} h k_3 + \frac{1499}{3150} h k_4 + \frac{317}{2602} h k_5 \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4

### ผลของงานวิจัย

ในบทนี้จะแสดงการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา จากการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ (RKN) ซึ่งได้แสดงการสร้างไว้ในหัวข้อ 3.2 โดยในการทดสอบจะนำระเบียบวิธีดังกล่าว มาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง และแสดงการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา (RK) พร้อมทั้งแสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธี RKN กับปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่เกิดขึ้นในทางวิทยาศาสตร์

#### 4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในส่วนนี้จะแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นที่มีรูปแบบ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

โดยในส่วนแรกจะแสดงการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ที่ได้จากระเบียบวิธี RKN กับระเบียบวิธีรุงเง-คุตดา โดยที่รูปแบบทั้งหมดของระเบียบวิธีที่นำมาใช้สำหรับการเปรียบเทียบ สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

##### 1. RK2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (4.1)$$

โดยที่  $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + h k_1)$$

##### 2. RK3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \quad (4.2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f(x_m + h, y_m - hk_1 + 2hk_2)$$

### 3. RK4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4.3)$$

โดยที่  $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

### 4. RKN2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \quad (4.4)$$

โดยที่  $k_1 = f\left(x_m + \frac{780}{3691}h, y_m + \frac{780}{3691}hf(x_m, y_m)\right)$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{780}{989}h, y_m + \frac{780}{989}hk_1\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5. RKN3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3) \quad (4.5)$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{63}{559}h, y_m + \frac{63}{559}hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{496}{559}h, y_m - \frac{74}{433}hk_1 + \frac{2491}{2354}hk_2\right)$$

## 6. RKN4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_4) \quad (4.6)$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{77}{1109}h, y_m + \frac{77}{1109}hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{364}{1103}h, y_m + \frac{364}{1103}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m - \frac{362}{1175}hk_1 + \frac{803}{821}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m + \frac{1379}{1602}hk_1 - \frac{1249}{1742}hk_2 + \frac{1664}{2115}hk_3\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 7. RKNS

$$y_{m+1} = y_m + h \left( \frac{589}{4972} k_1 + \frac{1075}{4492} k_2 + \frac{512}{1800} k_3 + \frac{1075}{4492} k_4 + \frac{589}{4972} k_5 \right) \quad (4.7)$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{63}{1343} h, y_m + \frac{63}{1343} hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{4568}{19795} h, y_m + \frac{4568}{19795} hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{1}{2} h, y_m - \frac{1163}{3926} hk_1 + \frac{676}{849} hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + \frac{15227}{19795} h, y_m + \frac{1578}{1513} hk_1 - \frac{2989}{2531} hk_2 + \frac{265}{293} hk_3\right)$$

$$k_5 = f\left(x_m + \frac{1280}{1343} h, y_m - \frac{701}{684} hk_1 + \frac{5338}{2441} hk_2 - \frac{1675}{833} hk_3 + \frac{412}{685} hk_4\right)$$

## 8. RKN6

$$y_{m+1} = y_m + h \left( \frac{141}{1646} k_1 + \frac{559}{3099} k_2 + \frac{2501}{10690} k_3 + \frac{2501}{10690} k_4 + \frac{559}{3099} k_5 + \frac{141}{1646} k_6 \right) \quad (4.8)$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m + \frac{13}{385} h, y_m + \frac{13}{385} hf(x_m, y_m)\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{269}{1588} h, y_m + \frac{269}{1588} hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{761}{1999} h, y_m - \frac{217}{853} hk_1 + \frac{1763}{2776} hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + \frac{1238}{1999} h, y_m + \frac{587}{573} hk_1 - \frac{248}{197} hk_2 + \frac{829}{971} hk_3\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k_5 = f\left(x_m + \frac{1319}{1588}h, y_m - \frac{2333}{1339}hk_1 + \frac{2153}{639}hk_2 - \frac{688}{431}hk_3 + \frac{1743}{2179}hk_4\right)$$

$$k_6 = f\left(x_m + \frac{372}{385}h, y_m + \frac{1033}{742}hk_1 - \frac{850}{487}hk_2 - \frac{734}{1017}hk_3 + \frac{1499}{3150}hk_4 + \frac{317}{2602}hk_5\right)$$

จากรูปแบบของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของการคำนวณดังกล่าว นำมาเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์โดยใช้ภาษา java เพื่อคำนวณหาผลเฉลยพร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนของปัญหาดังต่อไปนี้

**ปัญหาพิเศษ 1 :** พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = (x+2)e^{2x} \quad \text{เมื่อ} \quad y(0) = 0$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ 
$$y = \frac{(x+2)}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{3}{4}$$

ตารางที่ 4.1 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้ 1

$x = 0.1, h = 0.1$		
ค่าผลเฉลยจริง $y = 0.22712220652813597$		
	ค่า $y(x)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	0.22824728960681784	$1.12508307868187 \times 10^{-3}$
RK3	0.22712245533927777	$2.48811141800864 \times 10^{-7}$
RK4	0.22712245533927777	$2.48811141800864 \times 10^{-7}$
RKN2	0.22712204902464050	$1.57503495468170 \times 10^{-7}$
RKN3	0.22712220771057300	$1.18243703717269 \times 10^{-9}$
RKN4	0.22712220692652100	$3.98385019417902 \times 10^{-10}$
RKN5	0.22712218573081720	$2.07973187837940 \times 10^{-8}$
RKN6	0.22712218180320260	$2.47249333784616 \times 10^{-8}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 1

	$x = 0.1, h = 0.0001$ ค่าผลเฉลยจริง $y = 0.22712220652813597$	
	ค่า $y(x)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	0.22712220765421473	$1.12607875801807 \times 10^{-9}$
RK3	0.22712220652813610	$1.38777878078145 \times 10^{-16}$
RK4	0.22712220652813610	$1.38777878078145 \times 10^{-16}$
RKN2	0.22712220653587495	$7.73897612660335 \times 10^{-12}$
RKN3	0.22712220652813755	$1.58206781009085 \times 10^{-15}$
RKN4	0.22712220652813664	$6.66133814775094 \times 10^{-16}$
RKN5	0.22712218555689231	$2.09712436582965 \times 10^{-8}$
RKN6	0.22712218315332192	$2.33748140565648 \times 10^{-8}$

ปัญหาพิเศษ 2 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = 1 + y^2 \quad \text{เมื่อ } y(0) = 0$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ  $y = \tan x$

ตารางที่ 4.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 2

	$x = 0.1, h = 0.1$ ค่าผลเฉลยจริง $y = 0.10033467208545055$	
	ค่า $y(x)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	0.10049999999999999	$1.65327914549443 \times 10^{-4}$
RK3	0.10033500416666666	$3.32081216108948 \times 10^{-7}$
RK4	0.10033458907816414	$8.30072864055342 \times 10^{-8}$
RKN2	0.10033361140157418	$1.06068387636937 \times 10^{-6}$
RKN3	0.10033465705255463	$1.50328959142021 \times 10^{-8}$
RKN4	0.10033470478702008	$3.27015695356092 \times 10^{-8}$
RKN5	0.10023268693474163	$1.01985150708916 \times 10^{-4}$
RKN6	0.10033466118249855	$1.09029519995696 \times 10^{-8}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารทสงานไวสำหรับกรใช้งานเพอการศกษาเท่านั้น ไมอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 2

	$x = 0.1, h = 0.00001$	
	ค่าผลเฉลยจริง $y = 0.10033467208545055$	
	ค่า $y(x)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	0.10034477276771622	$1.01006822656735 \times 10^{-5}$
RK3	0.10034477276604961	$1.01006805990622 \times 10^{-5}$
RK4	0.10034477276604961	$1.01006805990622 \times 10^{-5}$
RKN2	0.10034477276605215	$1.01006806016019 \times 10^{-5}$
RKN3	0.10034477276603160	$1.01006805810488 \times 10^{-5}$
RKN4	0.10034477276603569	$1.01006805851428 \times 10^{-5}$
RKN5	0.10034474898012626	$1.00768946757063 \times 10^{-5}$
RKN6	0.10034476236961072	$1.00902841601719 \times 10^{-5}$

ปัญหาพิเศษ 3 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = \frac{2x}{y+x^2} \text{ เมื่อ } y(0) = -2$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ  $y = -\left[2\ln(1+x^2) + 4\right]^{\frac{1}{2}}$

ตารางที่ 4.5 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 3

	$x = 0.1, h = 0.1$	
	ค่าผลเฉลยจริง $y = -2.00496899270446$	
	ค่า $y(x)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	-2.00495049504950500	$1.84976549548743 \times 10^{-5}$
RK3	-2.00496699639333300	$1.99631112662857 \times 10^{-6}$
RK4	-2.00496901563493500	$2.29304752963344 \times 10^{-8}$
RKN2	-2.00497189151708100	$2.89881262105496 \times 10^{-6}$
RKN3	-2.00496834082723200	$6.51877227753062 \times 10^{-7}$
RKN4	-2.00496899154529500	$1.15916476417510 \times 10^{-9}$
RKN5	-2.00497233819903050	$3.34549457070565 \times 10^{-6}$
RKN6	-2.00496899127967640	$1.42478340237062 \times 10^{-9}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4-6 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 3

$x = 0.1, h = 0.001$ ค่าผลเฉลยจริง $y = -2.00496899270446$		
	ค่า $y(x)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	-2.00496899025772550	$2.44673437066467 \times 10^{-9}$
RK3	-2.00496899270243260	$2.02726724296554 \times 10^{-12}$
RK4	-2.00496899270446000	0
RKN2	-2.00496899292154660	$2.17086792986265 \times 10^{-10}$
RKN3	-2.00496899270383940	$6.20392626160538 \times 10^{-13}$
RKN4	-2.00496899270448000	$1.99840144432528 \times 10^{-14}$
RKN5	-2.00496901580616000	$2.31017001084410 \times 10^{-8}$
RKN6	-2.00496899219376120	$5.10698594524683 \times 10^{-10}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในปัญหาพิเศษต่อไปจะทำการสร้างโมเดลใหม่ขึ้นมาโดยดัดแปลงมาจากโมเดลของ Newton Cooling Law ซึ่งอยู่ในรูป

$$T'(t) = k(T(t) - S) \quad (4.9)$$

เป็นโมเดลใหม่ซึ่งอยู่ในรูปปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เกี่ยวกับอุณหภูมิ ซึ่งโมเดลของ Newton Cooling Law สามารถหารูปแบบทั่วไปได้โดย

จาก  $T' = k(T - S)$

$$\frac{T'}{T - S} = k$$

ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int \frac{dT}{T - S} = \int k dt$$

จะได้  $\ln(T - S) = kt + c$

$$T - S = Ae^{kt} \quad ; A = e^c$$

จาก  $T(0) = T_0$

จะได้  $T_0 - S = Ae^{(0)k}$

$$\therefore A = T_0 - S \quad (4.10)$$

จาก  $T(t) = T_t = S + Ae^{kt}$

$$Ae^{kt} = T_t - S$$

$$kt = \ln\left(\frac{T_t - S}{A}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$k = \frac{\ln\left(\frac{T_t - S}{A}\right)}{t} = \frac{\ln\left(\frac{T_t - S}{T_0 - S}\right)}{t} \quad (4.11)$$

$$\therefore T = S + (T_0 - S)e^{\ln\left(\frac{T_t - S}{T_0 - S}\right)} \quad (4.12)$$

ดังนั้นจะได้รูปแบบทั่วไปคือ

$$T' = \frac{\ln\left(\frac{T_t - S}{T_0 - S}\right)}{t} (T - S) \quad (4.13)$$

โมเดลใหม่ในรูปปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่เกี่ยวกับอุณหภูมิมีรูปแบบดังนี้

$$T'(t) = k'(t)T(t) \quad (4.14)$$

กำหนดให้  $k(0) = 0$  และ  $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = a$  (โดยเขียนแทนด้วย  $k(\infty)$ )

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k'(t)$$

ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int \frac{dT}{T} = \int k'(t) dt$$

จะได้  $\ln(T) = k(t) + c$

$$T = Ae^{k(t)} \quad ; A = e^c$$

จาก  $T(0) = T_0$

จะได้  $T_0 = Ae^{k(0)} = A$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมมติให้  $k(t) = \frac{at}{b+t}$  (4.15)

และเนื่องจากอุณหภูมิสุดท้ายของวัตถุจะเท่ากับอุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

จะได้  $S = T(\infty) = T_0 e^{k(\infty)} = T_0 e^a$

$$e^a = \frac{S}{T_0}$$

$$\therefore a = \ln\left(\frac{S}{T_0}\right) \quad (4.16)$$

จาก (4.15) จะได้

$$k'(t) = \frac{a(b+t) - at}{(b+t)^2} = \frac{ab}{(b+t)^2} \quad (4.17)$$

และ

$$T' = \frac{ab}{(b+t)^2} T \quad (4.18)$$

$$\frac{T'}{T} = \frac{ab}{(b+t)^2}$$

ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int \frac{dT}{T} = \int \frac{ab}{(b+t)^2} dt$$

$$T = Ae^{\frac{-ab}{b+t}} \quad ; A = e^c$$

จาก  $T(0) = T_0 = Ae^{-a}$

$$A = T_0 e^a$$

จะได้  $T = T_0 e^a e^{\frac{-ab}{b+t}}$  (4.19)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก  $T(t) = T_i = T_0 e^a e^{\frac{ab}{b+t}}$

จะได้  $e^{\frac{ab}{b+t}} = \frac{T_0 e^a}{T_i}$

$$\frac{ab}{b+t} = \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_i}\right)$$

$$ab = b \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_i}\right) + t \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_i}\right)$$

$$b\left(a - \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_i}\right)\right) = t \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_i}\right)$$

$$\therefore b = \frac{t \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_i}\right)}{\left(a - \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_i}\right)\right)} \quad (4.20)$$

- โดยที่  $T(t)$  คือ อุณหภูมิของวัตถุ ณ เวลา  $t$   
 $T'(t)$  คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุ  
 $k(t)$  คือ ฟังก์ชันที่เราสมมุติขึ้น  
 $k'(t)$  คือ อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $k(t)$   
 $S$  คือ อุณหภูมิของสิ่งแวดล้อม

**ปัญหาพิเศษ 4** : ค่าอุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุมีค่าเท่ากับ 82.3 อุณหภูมิของสภาวะแวดล้อมมีค่าเท่ากับ 24 และค่าอุณหภูมิ ณ เวลาที่ 5 มีค่าเท่ากับ 70.8

**วิธีทำ** จากโจทย์  $T(0) = 82.3, S = 24, T(5) = 70.8$

จาก(4.16)  $a = \ln\left(\frac{S}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{24}{82.3}\right) = -1.23231727733508$

จาก(4.20)

$$b = \frac{t \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_t}\right)}{\left(a - \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_t}\right)\right)}$$

$$b = \frac{5 \ln\left(\frac{82.3e^{-1.23231727733508}}{70.8}\right)}{-1.23231727733508 - \ln\left(\frac{82.3e^{-1.23231727733508}}{70.8}\right)}$$

$$b = \frac{-5.40902585175865}{-0.15051210698335} = 35.93748011485222$$

จาก(4.18)

$$T' = \frac{ab}{(b+t)^2} T = \frac{-1.23231727733508(35.93748011485222)}{(35.93748011485222+t)^2} T$$

$$T' = \frac{-44.28637764941826}{(35.93748011485222+t)^2} T \quad \text{เมื่อ } T(0) = 82.3$$

ตารางที่ 4.7 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาค่าเฉพาะที่ 4

		$t = 5, h = 0.1$	
		ค่าผลเฉลยจริง $T(5) = 70.8$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน	
RK2	70.79997987307577	$2.01269242268153 \times 10^{-5}$	
RK3	70.80000002452283	$2.45228335415959 \times 10^{-8}$	
RK4	70.79999999998681	$1.31876731757074 \times 10^{-11}$	
RKN2	70.80002231303223	$2.23130322325459 \times 10^{-5}$	
RKN3	70.7999999833079	$1.66920983701857 \times 10^{-8}$	
RKN4	70.79999999883951	$1.16048681775282 \times 10^{-9}$	
RKN5	70.79539574032762	0.004604259672376543	
RKN6	70.80000107562316	$1.07562316031817 \times 10^{-6}$	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.8 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 4

$t = 5, h = 0.01$		
ค่าผลเฉลยจริง $T(5) = 70.8$		
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	70.79999979939198	$2.006080137562094 \times 10^{-7}$
RK3	70.80000000002437	$2.437161583657143 \times 10^{-11}$
RK4	70.79999999999984	$1.563194018672220 \times 10^{-13}$
RKN2	70.80000022394424	$2.239442409290859 \times 10^{-7}$
RKN3	70.79999999942362	$5.763780563938781 \times 10^{-10}$
RKN4	70.79999999955882	$4.411759846334462 \times 10^{-10}$
RKN5	70.79954009540056	$4.599045994382322 \times 10^{-4}$
RKN6	70.80000109551555	$1.095515557381077 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 4.9 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 4

$t = 5, h = 0.001$		
ค่าผลเฉลยจริง $T(5) = 70.8$		
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	70.7999999979947	$2.005293708862154 \times 10^{-9}$
RK3	70.80000000000041	$4.121147867408581 \times 10^{-13}$
RK4	70.80000000000037	$3.694822225952521 \times 10^{-13}$
RKN2	70.80000000234807	$2.348073735447542 \times 10^{-9}$
RKN3	70.7999999994318	$5.681499715137761 \times 10^{-11}$
RKN4	70.7999999995587	$4.412470389070222 \times 10^{-11}$
RKN5	70.79995489146043	$4.510853956674054 \times 10^{-5}$
RKN6	70.80000109659494	$1.096594942850970 \times 10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าใช้โมเดลของ Newton Cooling Law จะได้สมการดังนี้

วิธีทำ จากโจทย์  $T(0) = 82.3, S = 24, T(5) = 70.8$

จาก(4.13) จะได้ 
$$T' = \frac{\ln\left(\frac{T_i - S}{T_0 - S}\right)}{t} (T - S)$$

$$T' = \frac{\ln\left(\frac{70.8 - 24}{82.3 - 24}\right)}{5} (T - 24)$$

$$T' = -0.4394377808657(T - 24)$$

$$= 1.05465067407769 - 0.04394377808657T, T(0) = 82.3$$

ตารางที่ 4.10 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาค่าที่ 4

$t = 5, h = 0.1$		
ค่าผลเฉลยจริง $T(5) = 70.8$		
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	70.80003320384913	$3.320384912797181 \times 10^{-5}$
RK3	70.79999996351425	$3.648574420367367 \times 10^{-8}$
RK4	70.80000000003187	$3.187494712619809 \times 10^{-11}$
RKN2	70.80001658989075	$1.658989074826422 \times 10^{-5}$
RKN3	70.79999997010535	$2.989465031077998 \times 10^{-8}$
RKN4	70.7999999731898	$2.681019850570010 \times 10^{-9}$
RKN5	70.79353085786171	$6.469142138286088 \times 10^{-3}$
RKN6	70.80000103172894	$1.031728942280096 \times 10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.11 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 4

	$t = 5, h = 0.01$ ค่าผลเฉลยจริง $T(5) = 70.8$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	70.80000033105459	$3.310545935164555 \times 10^{-7}$
RK3	70.79999999996332	$3.667821601993637 \times 10^{-11}$
RK4	70.79999999999999	$9.947598300641403 \times 10^{-14}$
RKN2	70.80000016612819	$1.661281885390053 \times 10^{-7}$
RKN3	70.79999999918691	$8.130882633849978 \times 10^{-10}$
RKN4	70.79999999938096	$6.190390422489145 \times 10^{-10}$
RKN5	70.7993551796179	$6.448203820923482 \times 10^{-4}$
RKN6	70.8000010566067	$1.056606706129059 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 4.12 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 4

	$t = 5, h = 0.001$ ค่าผลเฉลยจริง $T(5) = 70.8$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	70.80000000330944	$3.309438056930958 \times 10^{-9}$
RK3	70.79999999999939	$6.110667527536862 \times 10^{-13}$
RK4	70.7999999999994	$5.968558980384842 \times 10^{-13}$
RKN2	70.80000000171624	$1.716244923954946 \times 10^{-9}$
RKN3	70.79999999992066	$7.933920187497279 \times 10^{-11}$
RKN4	70.79999999993792	$6.207301339600235 \times 10^{-11}$
RKN5	70.79993638484335	$6.361515664821127 \times 10^{-5}$
RKN6	70.80000105811607	$1.058116069430070 \times 10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

**ปัญหาพิเศษ 5 :** ค่าอุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุมีค่าเท่ากับ 38 อุณหภูมิของสภาวะแวดล้อมมีค่าเท่ากับ 81 และค่าอุณหภูมิ ณ เวลาที่ 1 มีค่าเท่ากับ 67

**วิธีทำ** จากโจทย์  $T(0) = 38, S = 81, T(1) = 67$

จาก(4.16)  $a = \ln\left(\frac{S}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{81}{38}\right) = 0.75686299494605$

จาก(4.20) 
$$b = \frac{t \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_t}\right)}{\left(a - \ln\left(\frac{T_0 e^a}{T_t}\right)\right)} = \frac{\ln\left(\frac{38 e^{0.75686299494605}}{67}\right)}{0.75686299494605 - \ln\left(\frac{38 e^{0.75686299494605}}{67}\right)}$$

$$b = \frac{0.18975653528147}{0.56710641417903} = 0.33460478548191$$

จาก(4.18) 
$$T' = \frac{ab}{(b+t)^2} T = \frac{0.75686299494605(0.33460478548191)}{(0.33460478548191+t)^2} T$$

$$T' = \frac{0.25324998006312}{(0.33460478548191+t)^2} T \quad \text{เมื่อ } T(0) = 38$$

**ตารางที่ 4.13** แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 5

	$t = 1, h = 0.1$ ค่าผลเฉลยจริง $T(1) = 67.0$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	67.56957449673959	0.569574496739591
RK3	67.02621961584356	$2.62196158435585 \times 10^{-2}$
RK4	67.00260648638798	$2.60648638797533 \times 10^{-3}$
RKN2	67.08682919611041	$8.68291961104148 \times 10^{-2}$
RKN3	67.0079737963809	$7.97379638089523 \times 10^{-3}$
RKN4	67.0001836183098	$1.83618309804956 \times 10^{-4}$
RKN5	66.59900991172921	0.4009900882707882
RKN6	67.00162163741723	$1.62163741723020 \times 10^{-3}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.14 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 5

	$t = 1, h = 0.01$ ค่าผลเฉลยจริง $T(1) = 67.0$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	67.00647433925838	$6.474339258375 \times 10^{-3}$
RK3	67.00003038445602	$3.038445602498996 \times 10^{-5}$
RK4	67.00000040440649	$4.044064922936741 \times 10^{-7}$
RKN2	67.00097956102589	$9.795610258862553 \times 10^{-4}$
RKN3	67.00000902518207	$9.025182066579873 \times 10^{-6}$
RKN4	66.99999942970581	$5.702941905383341 \times 10^{-7}$
RKN5	66.94771050537749	$5.228949462251364 \times 10^{-2}$
RKN6	66.99999796946037	$2.030539633324224 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 4.15 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 5

	$t = 1, h = 0.001$ ค่าผลเฉลยจริง $T(1) = 67.0$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	67.00006565157196	$6.56515719583694 \times 10^{-5}$
RK3	67.00000011582408	$1.15824079216508 \times 10^{-7}$
RK4	67.00000008526371	$8.52637072057405 \times 10^{-8}$
RKN2	67.00000996713852	$9.96713852430275 \times 10^{-6}$
RKN3	67.00000008776189	$8.77618901995447 \times 10^{-8}$
RKN4	67.00000007937146	$7.93714605151763 \times 10^{-8}$
RKN5	66.9946345878119	$5.36541218809816 \times 10^{-3}$
RKN6	66.99999616278859	$3.83721140906345 \times 10^{-6}$

ถ้าใช้โมเดลของ Newton Cooling Law จะได้สมการดังนี้

วิธีทำ จากโจทย์  $T(0) = 38, S = 81, T(5) = 67$

จาก(4.13) จะได้ 
$$T' = \frac{\ln\left(\frac{T_t - S}{T_0 - S}\right)}{t} (T - S)$$

$$T' = \frac{\ln\left(\frac{67 - 81}{38 - 81}\right)}{1} (T - 81)$$

$$T' = 1.1221427860783(T - 81)$$

$$= -1.1221427860783T + 90.89356567234231, T(0) = 38$$

ตารางที่ 4.16 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 5

$t = 1, h = 0.1$		
ค่าผลเฉลยจริง $T(1) = 67.0$		
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	66.96408512088564	$3.5914879114358 \times 10^{-2}$
RK3	67.00101194017392	$1.0119401739245 \times 10^{-3}$
RK4	66.99997720427888	$2.2795721122293 \times 10^{-5}$
RKN2	66.982559208928	$1.7440791072005 \times 10^{-2}$
RKN3	67.0006009310644	$6.0093106439751 \times 10^{-4}$
RKN4	66.99988605103586	$1.1394896414174 \times 10^{-4}$
RKN5	67.26437651608619	0.2643765160861875
RKN6	67.00029391227942	$2.9391227941744 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 4.17 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 5

	$t = 1, h = 0.01$ ค่าผลเฉลยจริง $T(1) = 67.0$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	66.99966750713182	$3.324928681820438 \times 10^{-4}$
RK3	67.000000933273	$9.332730002142853 \times 10^{-7}$
RK4	66.9999999790462	$2.095376316901820 \times 10^{-9}$
RKN2	66.9998341968115	$1.658031884943511 \times 10^{-4}$
RKN3	67.00000059245885	$5.924588464267799 \times 10^{-7}$
RKN4	66.99999993266684	$6.733316126883437 \times 10^{-8}$
RKN5	67.02530607337742	$2.530607337742197 \times 10^{-2}$
RKN6	66.99999870206344	$1.297936563560142 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 4.18 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาพิเศษที่ 5

	$t = 1, h = 0.001$ ค่าผลเฉลยจริง $T(1) = 67.0$	
	ค่า $T(t)$ ที่คำนวณได้	ความคลาดเคลื่อน
RK2	66.99999670020681	$3.299793192468314 \times 10^{-10}$
RK3	67.0000000092577	$9.257661304218345 \times 10^{-10}$
RK4	66.9999999999997	$2.984279490192421 \times 10^{-13}$
RKN2	66.9999983481493	$1.651850695338907 \times 10^{-6}$
RKN3	67.00000000364483	$3.644828439064440 \times 10^{-9}$
RKN4	67.00000000233831	$2.338310878258198 \times 10^{-9}$
RKN5	67.00251856723295	$2.518567232954183 \times 10^{-3}$
RKN6	66.99999838992083	$1.610079166880496 \times 10^{-6}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 4.2 บทสรุป

เมื่อพิจารณาความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการประมาณค่า  $y$  ของแต่ละปัญหาพิเศษ ซึ่งจะแสดงถึงประสิทธิภาพของระเบียบวิธี RKN จะเห็นได้ว่า ผลเฉลยจากการคำนวณโดยระเบียบวิธี RKN อันดับ 2, 3 และ 4 มีผลเฉลยออกมาเป็นที่น่าพอใจ คือมีความคลาดเคลื่อนลดลงหรือเทียบเท่าเมื่อเทียบกับระเบียบวิธี RK อันดับ 2, 3 และ 4 ตามลำดับ และสำหรับอันดับของระเบียบวิธีที่สูงขึ้นจะทำให้เกิดความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยน้อยลง โดยเฉพาะระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ซึ่งมีค่าผลเฉลยใกล้เคียงกับผลเฉลยจริงในระดับสูง แต่ในอันดับระเบียบวิธีที่สูงกว่า RKN อันดับ 4 คือ อันดับ 5 และอันดับ 6 จะพบว่าความคลาดเคลื่อนมีมากกว่าอันดับ 4



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 5

### สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

ในบทนี้จะทำการสรุปผลของการสร้างระเบียบวิธี ที่พัฒนาจากระเบียบวิธีรุงง-กุดตาโดยการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาใช้ในการกำหนดจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงง-กุดตา พร้อมทั้งข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบของระเบียบวิธีรุงง-กุดตา สำหรับผู้ที่สนใจจะศึกษา ดังต่อไปนี้

#### 5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธี RKN อันดับ 2-6 กับปัญหา 1, 2, 3, 4 และ 5 ดังกล่าวในหัวข้อ 4.1 แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธี RKN สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่อยู่ในรูปแบบ  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  ได้จริง ซึ่งให้ผลเฉลยออกมาเป็นที่น่าพอใจและมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าหรือเทียบเท่าระเบียบวิธีรุงง-กุดตาที่นิยมใช้ ซึ่งผู้ศึกษาแนะนำให้ใช้ระเบียบวิธี RKN อันดับ 2, 3 และ 4 ซึ่งได้ผลเฉลยที่ดีกว่าในอันดับ 5 และ 6 และจากการเปรียบเทียบผลของงานวิจัยทำให้ทราบว่าอันดับที่สูงขึ้นไปกว่านี้ ค่าผลเฉลยที่ได้ก็จะไม่ได้ดีกว่าอันดับที่ 4

#### 5.2 ข้อเสนอแนะ

แม้ว่าการคำนวณโดยวิธี RKN ในปัญหาพิเศษนี้จะมีผลเฉลยที่ค่อนข้างเป็นที่น่าพอใจแต่หากมีการศึกษาวิจัยที่มากขึ้นอาจจะทำให้มีความแม่นยำของผลเฉลยที่ดีขึ้น ผู้ศึกษาจึงได้เสนอแนวทางในการศึกษาวิจัยเพื่อเพิ่มประสิทธิภาพของการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้

1. กำหนดขนาดของ  $h$  ที่เหมาะสมในการคำนวณสำหรับระเบียบวิธี RKN ซึ่งจะให้ความแม่นยำของผลเฉลยที่ดีขึ้น
2. เปลี่ยนแปลงลักษณะการวางจุดของรูปแบบบนช่วง  $(x_m, x_{m+1})$  เป็นลักษณะอื่นที่แตกต่างจากระเบียบวิธี RKN เช่น อาจจะนำลักษณะการวางจุดแบบ Newton Cotes มาประยุกต์ใช้เป็นต้น

อย่างไรก็ตามผู้ศึกษาหวังว่าระเบียบวิธี RKN ในงานวิจัยนี้ จะเป็นระเบียบวิธีที่สามารถพัฒนาไปสู่ระเบียบวิธีที่เหมาะสมในการนำไปประยุกต์ใช้ต่อไป

## บรรณานุกรม

- [1] คณาจารย์ของภาควิชาคณิตศาสตร์. **ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- [2] ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**. กรุงเทพฯ : โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.2529.
- [3] สิริรัตน์ ชันติคิลกวงษา. **การนำรูปแบบเกาส์-เลอจองต์ไปใช้ปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา**. สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2547.
- [4] สุวรรณ ถังมณี. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. 2531.
- [5] สุวรรณ ถังมณี. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลข 2**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์. 2531.
- [6] E. Hairar, S.P. Norsett and G. Wanner. **Solving Ordinary Differential Equations**. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag. 1993.
- [7] Maitree Podisuk, Sirirat Khuntidilokwongsa, Wichaya Rattanametawee. **Quadrature Formula in Runge-Kutta Method**. Proc. of the 8th WSEAS Int. Conf. on Mathematical Methods and Computational Techniques in Electrical Engineering. Bucharest. October 16-17. 2006.

## ภาคผนวก

codeของโปรแกรมภาษา java ที่ใช้ในการคำนวณปัญหาพิเศษ

```
import java.lang.*;
```

```
import java.io.*;
```

```
class appGinRK
```

```
{
```

```
    public static void main(String[] args)throws IOException
```

```
    {
```

```
        double X0,Y0,X1,H;
```

```
        double rk2=0.0,rk3=0.0,rk4=0.0,rkn2=0.0,rkn3=0.0,rkn4=0.0,rkn5=0.0,rkn6=0.0;
```

```
        double erk2=0.0,erk3=0.0,erk4=0.0,erkn2=0.0,erkn3=0.0,
```

```
            erkn4=0.0,erkn5=0.0,erkn6=0.0;
```

```
//=====INPUT CONDITION OF EQUATION=====//
```

```
X0 = INPUT VALUE OF  $x_0$  ;
```

```
Y0 = INPUT VALUE OF  $x_1$  ;
```

```
X1 = INPUT VALUE OF  $y_0$  ;
```

```
H = INPUT VALUE OF  $h$  ;
```

```
System.out.println("\n-----");
```

```
System.out.println("Solve equation INPUT EQUATION when  $y("+X0+") = "+Y0$ ;
```

```
System.out.println("-----");
```

```
rk2 =RK2(X0,Y0,X1,H);
```

```
erk2=Math.abs(ExactValue(X1) - rk2);
```

```
rk3 =RK3(X0,Y0,X1,H);
```

```
erk3=Math.abs(ExactValue(X1) - rk3);
```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

rk4      =RK4(X0,Y0,X1,H);
erk4=Math.abs(ExactValue(X1) - rk4);

rkn2=RKN2(X0,Y0,X1,H);
erkn2=Math.abs(ExactValue(X1) - rkn2);

rkn3=RKN3(X0,Y0,X1,H);
erkn3=Math.abs(ExactValue(X1) - rkn3);

rkn4=RKN4(X0,Y0,X1,H);
erkn4=Math.abs(ExactValue(X1) - rkn4);

rkn5=RKN5(X0,Y0,X1,H);
erkn5=Math.abs(ExactValue(X1) - rkn5);

rkn6=RKN6(X0,Y0,X1,H);
erkn6=Math.abs(ExactValue(X1) - rkn6);

System.out.println("\nExact Value      : "+ExactValue(X1));
System.out.println("-----");
System.out.println("RK2          : "+rk2+"\terror : "+erk2);
System.out.println("RK3          : "+rk3+"\terror : "+erk3);
System.out.println("RK4          : "+rk4+"\terror : "+erk4);
System.out.println("-----");
System.out.println("RKN2          : "+rkn2+"\terror : "+erkn2);
System.out.println("RKN3          : "+rkn3+"\terror : "+erkn3);
System.out.println("RKN4          : "+rkn4+"\terror : "+erkn4);
System.out.println("RKN5          : "+rkn5+"\terror : "+erkn5);
System.out.println("RKN6          : "+rkn6+"\terror : "+erkn6+"\n");
}

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

static double RK2(double x0, double y0, double x1, double h )
{
    double k1 = 0, k2 = 0;
    while(x0 < x1)
    {
        k1 = Function(x0, y0);
        k2 = Function(x0+h, y0+(h*k1));

        y0 = y0 + ((h*0.5)*(k1+k2));
        x0 = x0+h;
    }
    return(y0);
}

```

```

static double RK3(double x0, double y0, double x1, double h )
{
    double k1=0, k2=0, k3=0;
    while(x0 < x1)
    {
        k1 = Function(x0, y0);
        k2 = Function(x0+(h*0.5), y0+(0.5*h*k1));
        k3 = Function(x0+h, y0-(h*k1)+(2*h*k2));

        y0 = y0 + ((h/6.0)*(k1+(4*k2)+k3));
        x0 = x0+h;
    }
    return(y0);
}

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

static double RK4(double x0, double y0, double x1, double h )
{
    double k1=0,k2=0,k3=0,k4=0;
    while(x0<x1)
        {
            k1=Function(x0,y0);
            k2=Function(x0+(h*0.5),y0+((h*0.5)*k1));
            k3=Function(x0+(h*0.5),y0+((h*0.5)*k2));
            k4=Function(x0+h,y0+(h*k3));

            y0=y0+(((1/6.0)*(k1+(2*k2)+(2*k3)+k4))*h);
            x0=x0+h;
        }
    return(y0);
}

static double RKN2(double x0, double y0, double x1, double h )
{
    double k1=0,k2=0;
    while(x0<x1)
        {
            k1=Function(x0+((780/3691.0)*h),y0+((780/3691.0)*h*
                (Function(x0,y0))));
            k2=Function(x0+((780/989.0)*h),y0+((780/989.0)*h*k1));

            y0=y0+((h*0.5)*(k1+k2));
            x0=x0+h;
        }
    return(y0);
}

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

static double RKN3(double x0, double y0, double x1, double h )
{
    double k1=0,k2=0,k3=0;
    while(x0<x1)
    {
        k1=Function(x0+((63/559.0)*h),y0+((63/559.0)*h*(Function(x0,y0))));
        k2=Function(x0+(h*0.5),y0+(0.5*h*k1));
        k3=Function(x0+((496/559.0)*h),y0+((74/433.0)*h*k1
            +((2491/2354.0)*h*k2));
        y0=y0+((h/18.0)*((5*k1)+(8*k2)+(5*k3)));
        x0=x0+h;
    }
    return(y0);
}

static double RKN4(double x0, double y0, double x1, double h )
{
    double k1=0,k2=0,k3=0,k4=0;
    while(x0<x1)
    {
        k1=Function(x0+((77/1109.0)*h),y0+((77/1109.0)*h*
(Function(x0,y0))));
        k2=Function(x0+((364/1103.0)*h),y0+((364/1103.0)*h*k1));
        k3=Function(x0+((739/1103.0)*h),y0-
((362/1175.0)*h*k1)+((803/821.0)*h*k2));

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

        k4=Function(x0+((1032/1109.0)*h),y0+((1379/1602.0)*h*k1)-
        ((1249/1742.0)*h*k2)+((1664/2115.0)*h*k3));

        y0=y0+((h/3030.0)*((527*k1)+(988*k2)+(988*k3)+(527*k4)));
        x0=x0+h;
    }
return(y0);
}
static double RKN5(double x0, double y0, double x1,double h )
{
    double k1=0,k2=0,k3=0,k4=0,k5=0;
    while(x0<x1)
    {
        k1=Function(x0+((63/1343.0)*h),y0+((63/1343.0)*h*
(Function(x0,y0))));
        k2=Function(x0+((4568/19795.0)*h),y0+((4568/19795.0)*h*k1));
        k3=Function(x0+(0.5*h),y0-
((1163/3926.0)*h*k1)+((676/849.0)*h*k2));
        k4=Function(x0+((15227/19795.0)*h),y0+((1578/1513.0)*h*k1)-
((2989/2531.0)*h*k2)+((265/293.0)*h*k3));
        k5=Function(x0+((1280/1343.0)*h),y0-
((701/684.0)*h*k1)+((5338/2441.0)*h*k2)-((1675/833.0)*h*k3)+((412/685.0)*h*k4));

        y0=y0+(h*(((589/4972.0)*k1)+((1075/4492.0)*k2)+
((512/1800.0)*k3)+((1075/4492.0)*k4)+((589/4972.0)*k5)));
        x0=x0+h;
    }
return(y0);
}

```

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

```

static double RKN6(double x0, double y0, double x1, double h )
{
    double k1=0,k2=0,k3=0,k4=0,k5=0,k6=0;
    while(x0<x1)
    {
        k1=Function(x0+((13/385.0)*h),y0+((13/385.0)*h*(Function(x0,y0))));
        k2=Function(x0+((269/1588.0)*h),y0+((269/1588.0)*h*k1));
        k3=Function(x0+((761/1999.0)*h),y0-
((217/853.0)*h*k1)+((1763/2776.0)*h*k2));
        k4=Function(x0+((1238/1999.0)*h),y0+((587/573.0)*h*k1)-
((248/197.0)*h*k2)+((829/971.0)*h*k3));
        k5=Function(x0+((1319/1588.0)*h),y0-
((2333/1339.0)*h*k1)+((2153/639.0)*h*k2)-((688/431.0)*h*k3)+((1743/2179.0)*h*k4));
        k6=Function(x0+((372/385.0)*h),y0+((1033/742.0)*h*k1)-
((850/487.0)*h*k2)+((734/1017.0)*h*k3)+((1499/3150.0)*h*k4)+((317/2602.0)*h*k5));
        y0=y0+(h*(((141/1646.0)*k1)+((559/3099.0)*k2)+((2501/10690.0)*k3)
+((2501/10690.0)*k4)+((559/3099.0)*k5)+((141/1646.0)*k6)));
        x0=x0+h;
    }
    return(y0);
}

```

```
static double ExactValue(double x1)
{
    double ext = 0.0;

    ext=INPUT EQUATION OF EXACT VALUE;
    return(ext);
}
```

```
static double Function(double x, double y)
{
    double yy = 0.0;

    yy=INPUT FUNCTION THAT YOU NEED TO FIND;
    return(yy);
}
}
```



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้