สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

สี่พหุนามเชิงตั้งฉากใหม่และการประยุกต์

FOUR NEW ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND APPLICATIONS

ฐิติวัฒก์ ทิวากรสกุล
เหมือนฝัน ประเสริฐรัตน์
โอม เอี่ยมคง

สม.
ส 312ส
๒๕๔๙

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 73338
วัน,เดือน,ปี 12 ก.ค. 2550

b 11790143
i.....

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

FOUR NEW ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND APPLICATIONS

Thitiwat Tiwakornsakul

Muanfan Prasertrat

Ohm Eamkhong

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LARDKRABANG

ACADEMIC YEAR 2006

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สี่พหุนามเชิงตั้งฉากใหม่และการประยุกต์		
	FOUR NEW ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND APPLICATIONS		
ชื่อนักศึกษา	นายฐิติวัฒก์	ทิวากรสกุล	46050588
	นางสาวเหมือนฝัน	ประเสริฐรัตน์	46050601
	นายโอม	เอี่ยมคง	46050603
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์		
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข		
	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์		

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษฉบับนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2549

คณะกรรมการ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ	
กรรมการ	รศ.กฤษฎา ไตรสุรัตน์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	

(รองศาสตราจารย์ ดร. วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ	สี่พหุนามเชิงตั้งฉากใหม่และการประยุกต์		
ชื่อนักศึกษา	นายฐิติวัฒก์	ทิวากรสกุล	46050588
	นางสาวเหมือนฝัน	ประเสริฐรัตน์	46050601
	นายโอม	เอี่ยมคง	46050603
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต		
ภาควิชา	ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์		
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์		
ปีการศึกษา	2549		
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข		
	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์		

บทคัดย่อ

ในปัญหาพิเศษฉบับนี้จะกล่าวถึงพหุนามเชิงตั้งฉากและเสนอพหุนามเชิงตั้งฉากที่สร้างขึ้นมาใหม่โดยมีฟังก์ชันถ่วงสี่ฟังก์ชัน พร้อมทั้งนำเสนอการประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากที่สร้างขึ้นมานี้ในการคำนวณเชิงตัวเลขสองแบบ การประยุกต์ใช้สองแบบนี้ ได้แก่ การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข และการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ทั้งมีการยกตัวอย่างประกอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Special Project Title	FOUR NEW ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND APPLICATION	
Student	Mr. Thitiwat Tiwakornsakul	46050588
	Miss Muanfan Prasertrat	46050601
	Mr. Ohm Eamkhong	46050603
Degree	Bachelor of Science	
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science	
Program	Applied Mathematics	
Academic Year	2006	
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk	
	Assoc.Prof.Pongpan Rattanathanawan	

ABSTRACT

The purpose of this special problem is to study some types of orthogonal polynomials. There are two selected types of applications of orthogonal polynomials in numerical computation. These three types of applications are; numerical integration and numerical solution of the ordinary differential equation. Some examples are illustrated.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และ รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ ซึ่งเป็นอาจารย์ที่ปรึกษาเป็นอย่างสูง ที่กรุณาให้แนะนำอันเกิดประโยชน์ในการจัดทำปัญหาพิเศษ รวมทั้งได้กรุณาเสียสละเวลาช่วยตรวจทานแก้ไขปัญหาพิเศษฉบับนี้ให้สำเร็จสมบูรณ์ยิ่งขึ้นทั้งยังดูแลเอาใจใส่การทำงานของคณะผู้จัดทำและให้ความรู้ พร้อมกับประสบการณ์ที่ดีต่างๆ ตลอดมา

ขอกราบขอบพระคุณ รศ.พัชรินทร์ เหมโชติ และ รศ.กฤษฎา ไตรสุรัตน์ ซึ่งทำหน้าที่เป็นกรรมการสอบ พร้อมกับให้คำแนะนำ และถามคำถามที่เกิดประโยชน์แก่คณะผู้ศึกษาเพื่อนำไปปรับปรุงแก้ไข และพัฒนาให้ดีขึ้นทำงานของคณะผู้จัดทำและให้ความรู้ พร้อมกับประสบการณ์ที่ดีต่างๆ ตลอดมา

ขอกราบขอบพระคุณคณาจารย์ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่คอยสั่งสอนและประสิทธิ์ประสาทวิชาองค์ความรู้ต่างๆ ให้แก่ผู้จัดทำโดยตลอดมา รวมถึงเจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาทุกท่านที่ช่วยเหลือในด้านการอำนวยความสะดวกเกี่ยวกับอุปกรณ์ที่จำเป็นต่างๆ

ขอกราบขอบพระคุณพี่ๆสำนักวิจัยและบริการคอมพิวเตอร์ทุกท่านสำหรับโปรแกรมและคำแนะนำต่างๆ

ขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดาที่ได้ให้การสนับสนุนทุกประการทางด้านการศึกษาของผู้จัดทำ และยังให้กำลังใจตลอดมาจนถึงปัจจุบัน

ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆทุกท่านที่สำหรับคำแนะนำที่ดี กำลังใจที่มอบให้

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2550

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย.....I

บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....II

กิตติกรรมประกาศ.....III

สารบัญ.....IV

สารบัญตาราง.....V

บทที่ 1 บทนำ.....1

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ.....1

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ.....1

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ.....2

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ.....2

1.5 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ.....2

บทที่ 2 บทนิยามและทฤษฎีบทของพหุนามเชิงตั้งฉาก.....3

2.1 พหุนามเชิงตั้งฉาก.....3

2.1.1 นิยามที่ 1.....3

2.1.2 นิยามที่ 2.....3

2.1.3 ทฤษฎีบทที่ 1.....3

2.1.4 ทฤษฎีบทที่ 2.....6

2.2 เกาส์-ควอดเดรเจอร์.....6

บทที่ 3 ขั้นตอนการดำเนินงาน.....8

บทที่4 การนำพหุนามเชิงตั้งฉากไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลข.....9

4.1 รูปแบบฟังก์ชั่น.....9

4.1.1 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่หนึ่ง.....9

4.1.2 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่สอง.....11

4.1.3 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่สาม.....13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หน้า

4.1.4 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่สี่.....15
4.2 รูปแบบของเกาส์-ควอดเดรเจอร์.....21
4.3 การปรับปรุงรูปแบบวิธีรุงเง-คุตตา.....25
4.3.1 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $a=0$ และ $b=1$.....30
4.3.2 จาก $w(x)=\sqrt{1+x}$, $a=0$ และ $b=1$.....34
4.3.3 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $a=0$ และ $b=1$.....38
4.3.4 จาก $w(x)=\sqrt{1-x}$, $a=0$ และ $b=1$.....42
4.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์เชิงตัวเลข.....46
4.4.1 ตัวอย่างที่ 1.....46
4.4.2 ตัวอย่างที่ 2.....48
4.4.3 ตัวอย่างที่ 3.....50
4.4.4 ตัวอย่างที่ 4.....52

บทที่5 บทสรุปการดำเนินการปัญหาพิเศษ.....56

ภาคผนวก.....57
คู่มือใช้โปรแกรม.....ก
ตารางศัพท์.....ฉ

บรรณานุกรม.....58

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

1.1 รูปแบบของพหุนามเชิงตั้งฉากที่ได้รับความนิยม.....1

4.1 ค่าราก $p_n(x)$ ของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.....17

4.2 ค่าราก $p_n(x)$ ของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\sqrt{1+x}$.....18

4.3 ค่าราก $p_n(x)$ ของฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.....19

4.4 ค่าราก $p_n(x)$ ของฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\sqrt{1-x}$.....20

4.5 ค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.....21

4.7 ค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.....23

4.8 ค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\sqrt{1-x}$.....24

4.9 ค่าของ $\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-3}dx$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.1 และ 4.5.....46

4.10 ค่าของ $\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-3}dx$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.2 และ 4.6.....46

4.11 ค่าของ $\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-3}dx$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.3 และ 4.7.....47

4.12 ค่าของ $\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-3}dx$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.4 และ 4.8.....47

4.13 ค่าของ $\int_{0}^{0.5}\frac{2x^2}{\sqrt{1+x}dx}$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.1 และ 4.5.....48

4.14 ค่าของ $\int_{0}^{0.5}\frac{2x^2}{\sqrt{1+x}dx}$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.2 และ 4..6.....48

4.15 ค่าของ $\int_{0}^{0.5}\frac{2x^2}{\sqrt{1+x}dx}$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.3 และ 4.7.....49

4.16 ค่าของ $\int_{0}^{0.5}\frac{2x^2}{\sqrt{1+x}dx}$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.4 และ 4.8.....49

4.17 ค่าของ $\int_{0}^{0.5}\sin(x^4)$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.1 และ 4.5.....50

4.18 ค่าของ $\int_{0}^{0.5}\sin(x^4)$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.2 และ 4.6.....50

4.19 ค่าของ $\int_{0}^{0.5}\sin(x^4)$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.3 และ 4.7.....51

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ **หน้า**

4.20 ค่าของ $\int_0^{0.5} \sin(x^4)$ โดยใช้ฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.4 และ 4.8.....51

4.21 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0$ $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 52

4.22 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0$ $w(x)=\sqrt{1+x}$ 52

4.23 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0$ $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 53

4.24 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0$ $w(x)=\sqrt{1-x}$ 53

4.25 $x=0.1,\ h=0.0001,\ y=1.0$ $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 54

4.26 $x=0.1,\ h=0.0001,\ y=1.0$ $w(x)=\sqrt{1+x}$ 54

4.27 $x=0.1,\ h=0.0001,\ y=1.0$ $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 55

4.28 $x=0.1,\ h=0.0001,\ y=1.0$ $w(x)=\sqrt{1-x}$ 55

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

ในปัจจุบันนี้มีผู้สนใจศึกษาเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากเป็นจำนวนมาก อีกทั้งพหุนามเชิงตั้งฉากนั้นมีประโยชน์มากในการนำไปใช้คำนวณด้านต่างๆ จึงได้มีการจัดทำปัญหาพิเศษเรื่องนี้ขึ้นเพื่อสร้างพหุนามเชิงตั้งฉากขึ้นมาใหม่ เพื่อนำไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลข

พหุนามเชิงตั้งฉากเป็นวงศ์ของพหุนาม $\{p_k(x)\}$ นิยามบนพิสัย [a ,b] โดยความสัมพันธ์

$$\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$$

ซึ่ง $w(x)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงและ $q_m(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m ใดๆที่ $0 \le m \le k-1$

ตารางที่ 1.1 รูปแบบของพหุนามเชิงตั้งฉากที่ได้รับความนิยม

ชื่อ	$w(x)$	a	b
Legendre	1	-1	1
Jacobi	$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$	-1	1
Chebyshev	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	-1	1
Chebyshev	$\sqrt{1-x^2}$	-1	1
Laguerre	e^{-x}	0	∞
Hermite	e^{-x^2}	$-\infty$	∞

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

ในปัญหาพิเศษฉบับนี้จะกล่าวถึงพหุนามเชิงตั้งฉากและการสร้างพหุนามเชิงตั้งฉากขึ้นมาใหม่ โดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้

1.2.1 เพื่อศึกษารูปแบบต่างๆของพหุนามเชิงตั้งฉาก

1.2.2 เพื่อสร้างพหุนามเชิงตั้งฉากขึ้นมาใหม่

1.2.3 เพื่อนำพหุนามเชิงตั้งฉากที่สร้างขึ้นมาใหม่ไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขสองแบบ ซึ่งได้แก่ การประมาณค่าปริพันธ์ และการประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.2.4 เพื่อผู้ที่มีความสนใจและต้องการศึกษาหาความรู้เกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากจะได้นำพหุนามเชิงตั้งฉากที่สร้างขึ้นมานี้ไปประยุกต์ใช้งานด้านต่างๆ

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

แสดงวิธีสร้างพหุนามเชิงตั้งฉากนี้ และการนำพหุนามเชิงตั้งฉากเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้ในงานด้านต่างๆ โดยจะสร้างสี่ลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากขึ้นมาใหม่ โดยแบ่งน้ำหนัก $w(x)$ ออกเป็นสี่ส่วน คือ

$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $a=0$ $b=1$

$w(x)=\sqrt{1+x}$ $a=0$ $b=1$

$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ $a=0$ $b=1$

$w(x)=\sqrt{1-x}$ $a=0$ $b=1$

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1.4.1 สามารถนำพหุนามเชิงตั้งฉากที่สร้างขึ้นมาใหม่นี้ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาต่างๆ ทาง คณิตศาสตร์

1.4.2 เป็นแนวทางสำหรับผู้ต้องการศึกษาเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉาก

1.5 อุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ

1.5.1 เครื่องคอมพิวเตอร์

1.5.2 โปรแกรม JAVA

1.5.3 โปรแกรม PHP

1.5.4 โปรแกรม C

1.5.5 Flash Drive

1.5.6 กระดาษ A4

1.5.7 ปากกา ดินสอ ยางลบ และน้ำยาลบคำผิด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่2
บทนิยามและทฤษฎีบทของพหุนามเชิงตั้งฉาก

ในบทนี้เราจะแสดงบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากและเกาส์-ควอดเดรเจอร์

2.1 พหุนามเชิงตั้งฉาก

2.1.1 นิยามที่1 ให้ $p_k(x)$ เป็นพหุนามกำลัง k เรียก $p_k(x)$ ว่าเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด [a,b] ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้า

$$\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$$

เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใดๆที่ $0 \le m \le k-1$

2.1.2 นิยามที่2 ให้ $p_0(x), p_1(x), p_2(x),..., p_k(x),...$ เป็นอันดับของพหุนาม จะเรียกว่าเป็นอันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้าทุกๆพหุนาม $p_i(x)$ เมื่อ $i = 0,1,2,...,k,...$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด$[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ($w(x)$มีค่าเป็นบวกหรือมากกว่าศูนย์ตลอดช่วงเปิด(a,b))

2.1.3 ทฤษฎีบทที่1 พหุนาม $p_k(x)$ ที่ทำให้ $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$ สำหรับทุกพหุนาม $q_m(x)$ ที่ $0 \le m \le k-1$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น (ยกเว้นพหุนามเป็นผลคูณของ $p_k(x)$ กับค่าคงที่ใดๆ)

พิสูจน์ เมื่อ $q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$

และ $$\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0, m \le n-1 \qquad (2.1.3.1)$$

ถ้า (2.1.3.1) เป็นจริงสำหรับ $q_m(x)$ แล้ว (2.1.3.1) จะเป็นจริง

เมื่อ $q_m(x)$ เป็น $1, x, x^2, ..., x^m$ ด้วย

นั่นคือเป็นจริงสำหรับ $q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$ ใดๆ

ดังนั้นสิ่งที่ต้องการคือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)1dx = 0$$

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)xdx = 0$$

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)x^2dx = 0$$

. .

. .

. .

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)x^{k-1}dx = 0$$

ถ้าให้ $c_i = \int_a^b w(x)x^i dx$ เมื่อ $i = 0,1,2,...,2k-1$

$$\begin{aligned} a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + ... + a_{k-1}c_{k-1} &= -c_k \\ a_0c_1 + a_1c_2 + a_2c_3 + ... + a_{k-1}c_k &= -c_{k+1} \\ a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_4 + ... + a_{k-1}c_{k+1} &= -c_{k+2} \end{aligned}$$

. .

. .

. .

$$a_0c_{k-1} + a_1c_k + a_2c_{k+1} + ... + a_{k-1}c_{2k-2} = -c_{2k-1}$$

$\therefore$ มีสมการอยู่ k สมการและมีตัวแปรที่ไม่รู้ค่า k ตัว ตัวแปรที่ไม่รู้ค่า k คือ $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$

ให้ C เป็น $k \times k$ เมตริกซ์โดยที่

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{2k-2} \end{pmatrix}$$

จะต้องพิสูจน์ว่า $|C| \neq 0$

เมื่อ $|C|$ เป็นค่าตัวกำหนด(ดีเทอร์มิแนนต์)ของเมตริกซ์ C

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้า $|C| \neq 0$ แล้วค่า $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ มีจริงและมีเพียงจุดเดียว นั่นคือ
$p_k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{k-1} x^{k-1} + x^k$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

สมมติ $|C| = 0$ จะสามารถหา $b_0, b_1, b_2, ..., b_{k-1}$ ที่ทำให้

$$b_0 c_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2 + ... + b_{k-1} c_{k-1} = 0 \quad ...(1)$$

$$b_0 c_1 + b_1 c_2 + b_2 c_3 + ... + b_{k-1} c_k = 0 \quad ...(2)$$

$$b_0 c_2 + b_1 c_3 + b_2 c_4 + ... + b_{k-1} c_{k+1} = 0 \quad ...(3)$$

$$\vdots$$

$$b_0 c_{k-1} + b_1 c_k + b_2 c_{k+1} + ... + b_{k-1} c_{2k-2} = 0 \quad ...(k)$$

นั่นคือ

$$(1) \times b_0, \int_a^b w(x)(b_0^2 + b_0 b_1 x + b_0 b_2 x^2 + ... + b_0 b_{k-1} x^{k-1}) 1 dx = 0 \quad ...(k+1)$$

$$(2) \times b_1, \int_a^b w(x)(b_0 b_1 + b_1^2 x + b_1 b_2 x^2 + ... + b_1 b_{k-1} x^{k-1}) x dx = 0 \quad ...(k+2)$$

$$(3) \times b_2, \int_a^b w(x)(b_0 b_2 + b_1 b_2 x + b_2^2 x^2 + ... + b_2 b_{k-1} x^{k-1}) x^2 dx = 0 \quad ...(k+3)$$

$$\vdots$$

$$(k) \times b_{k-1}, \int_a^b w(x)(b_0 b_{k-1} + b_1 b_{k-1} x + b_2 b_{k-1} x^2 + ... + b_{k-1}^2 x^{k-1}) x^{k-1} dx = 0 \quad ...(2k)$$

เมื่อนำสมการที่ $(k+1) + (k+2) + (k+3) + ... + (2k)$ จะได้

$$\int_a^b w(x)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{k-1} x^{k-1})^2 dx = 0$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แต่ $$w(x)[\ b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{k-1}\ ]^2 > 0$$

เพราะฉะนั้น $$\int_a^b w(x)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_{k-1}x^{k-1})^2 dx > 0$$

$\therefore$ เกิดการขัดแย้ง ดังนั้นจะได้ว่า $|C| \neq 0$ นั่นคือ $a_0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ มีจริงเพียงชุดเดียวซึ่งทำให้ $p_k(x)$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียว

2.1.4 ทฤษฎีบทที่2 ถ้า $p_k(x)$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ แล้วรากทั้งหมดของ $p_k(x)$ จะเป็นเลขจำนวนจริงและอยู่ในช่วงปิด $[a,b]$

พิสูจน์ ให้ $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$ เป็นรากของ $p_k(x)$ ซึ่งเป็นเลขจำนวนจริงและอยู่ในช่วเปิด (a,b) และรากแต่ละตัวนี้มีผลคูณซ้ำกันเป็นเลขคี่

สมมติว่า $m < k$

ให้ $Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_m)$

ถ้า $m = 0$ แล้ว $p_k(x)$ จะไม่มีรากที่ผลคูณซ้ำกันเป็นจำนวนคี่ ดังนั้น

$\int_a^b w(x)p_k(x)dx \neq 0$ ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นจริง

$\therefore m \neq 0$

และ $Pm(x)$ และ $p_k(x)$ จะเปลี่ยนเครื่องหมาย (จากบวกเป็นลบ หรือจากลบเป็นบวกที่จุดเดียวกัน)

$\therefore Q_m(x)P_k(x)$ จะไม่เปลี่ยนเครื่องหมายในช่วงเปิด (a,b)

นั้นคือ $Q_m(x)P_k(x)$ ไม่เป็นบวกก็เป็นลบเพียงอย่างเดียวในช่วงเปิด (a,b)

$\int_a^b w(x)Q_m(x)p_k(x)dx \neq 0$

ขัดแย้งกับความเป็นจริงของ $p_k(x)$

$\therefore m < k$ และจะได้ $m = k$

$\therefore p_k(x)$ มีรากทั้งหมดอยู่ในช่วงเปิด (a,b) และรากแต่ละตัวมีผลคูณซ้ำเป็นหนึ่ง

2.2 เกาส์-ควอดเดรเจอร์

รูปแบบของเกาส์-ควอดเดรเจอร์ n จุดสำหรับการหาปริพันธ์จำกัดเขตบนช่วงปิด $[a,b]$ คือ

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (2.2.1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

x_k คือค่ารากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ของดีกรี n บนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ และ A_k สามารถหาได้จากสูตรดังนี้

$$A_k = \frac{1}{p_n'(x_k)} \int_a^b \frac{w(x)p_n(x)}{x - x_k} dx \tag{2.2.2}$$

จาก (2.2.1) จะมีมีค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $m \le 2n-1$

รูปแบบของนิวตันโค้ช n จุดสำหรับการหาปริพันธ์จำกัดเขตบนช่วงปิด $[a,b]$ คือ

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{2.2.3}$$

โดยค่า A_k และ x_k หาจากสมการพีชคณิตเชิงเส้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots + A_n &= b-a \\ A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n &= \int_a^b x dx \\ &\vdots \\ A_1x_1^{n-1} + A_2x_2^{n-1} + \cdots + A_nx_n^{n-1} &= \int_a^b x^{n-1} dx \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

จาก (2.2.3) จะมีมีค่าคลาดเคลื่อนเมื่อ $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $m \le n-1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
ขั้นตอนการดำเนินงาน

ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆ ทางอินเทอร์เน็ต วิทยานิพนธ์และงานวิจัยต่างๆ

ขั้นตอนที่ 2 รวบรวม เรียบเรียงและศึกษาทำความเข้าใจพหุนามเชิงตั้งฉากที่ได้มา

ขั้นตอนที่ 3 ทำการสร้างพหุนามเชิงตั้งฉากขึ้นมาใหม่

ขั้นตอนที่ 4 นำพหุนามเชิงตั้งฉากที่สร้างขึ้นมาใหม่ไปใช้ในการคำนวณและลองนำผลลัพธ์ที่ได้ไปเปรียบเทียบกับการหาผลลัพธ์วิธีอื่น

ขั้นตอนที่ 5 ศึกษาภาษาทางคอมพิวเตอร์ในการเขียนโปรแกรม

ขั้นตอนที่ 6 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาให้มีประสิทธิภาพ

ขั้นตอนที่ 7 ปรับแต่งรูปแบบการนำเสนอ

ขั้นตอนที่ 8 สรุปผลและเขียนปัญหาพิเศษ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

การนำพหุนามเชิงตั้งฉากไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลข

4.1 รูปแบบฟังก์ชัน

4.1.1 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่หนึ่ง

$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.8282712246\,1901$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.3905242917\,5127$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.2532659915\,4822$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.1869588208\,1200$$

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.1480688963\,4236$$

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.1225216510\,2933$$

$$\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.1044744086\,4571$$

$$\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.0910522360\,2471$$

$$\int_0^1 \frac{x^8}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.0806817271\,0542$$

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.0724292650\,9736$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.0657067534\,6870$$

$$\int_0^1 \frac{x^{11}}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.0601251542\,8210$$

$$\int_0^1 \frac{x^{12}}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.0513921024\,3646$$

$$\int_0^1 \frac{x^{13}}{\sqrt{1+x}}\,dx = 0.0513921024\,3646$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราใช้ขอบเขตของการหาปริพันธ์ที่ได้นำไปคำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - 0.4711045485$$

$$p_2(x) = x^2 - 0.9764397632\,1x + 0.1546793350\,3$$
$$= [x - 0.1989461051][x - 0.7774936581]$$

$$p_3(x) = x^3 - 1.4769761911\,x^2 + 0.5769334073\,9x - 0.0460990894\,23$$
$$= [x - 0.2042632302][x - 0.5798240091][x - 0.9080161415]$$

$$p_4(x) = x^4 - 1.9769618518\,x^3 + 1.2512119581\,x^2 - 0.2718814473\,5x + 0.0131202699\,04$$
$$= [x - 0.1350003060][x - 0.4074525791][x - 0.7162705667][x - 0.9411242235]$$

$$p_5(x) = x^5 - 2.4768206795\,x^4 + 2.1760008549\,x^3 - 0.8036513919\,7x^2 + 0.1124375697\,0x$$
$$- 0.0036350040\,845$$
$$= [x - 0.0955716029][x - 0.2978335287][x - 0.5547190456][x - 0.7975180625]$$
$$[x - 0.9591489125]$$

$$p_6(x) = x^6 - 2.9766566076\,x^5 + 3.3509423298\,x^4 - 1.7666226663\,x^3 + 0.4352268710\,0x^2$$
$$- 0.0268982101\,2x + 0.0009895088\,1186$$
$$= [x - 0.0710768112][x - 0.2258215399][x - 0.4348406875][x - 0.6674445037]$$
$$[x - 0.8489051729][x - 0.9700198341]$$

$$p_7(x) = x^7 - 3.4763141997\,x^6 + 4.775361994\,x^5 - 3.2851985082\,x^4 + 1.1811015873\,x^3$$
$$- 0.2096188729\,5x^2 + 0.0152494827\,34x - 0.0002658386\,8289$$
$$= [x - 0.0546849180][x - 0.1760572976][x - 0.3465366686][x - 0.5409289198]$$
$$[x - 0.7295537332][x - 0.8829891292][x - 0.977026159]$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.2 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่สอง

$w(x)=\sqrt{1+x}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = 1.2189514164\,9746$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x\,dx = 0.6437902832\,9949$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^2\,dx = 0.4402418737\,5634$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^3\,dx = 0.3350447785\,5048$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^4\,dx = 0.2705905473\,7169$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^5\,dx = 0.2269960596\,7504$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^6\,dx = 0.1955267688\,9278$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^7\,dx = 0.1717340873\,5256$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^8\,dx = 0.1531109922\,0262$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^9\,dx = 0.1381360185\,64115$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^{10}\,dx = 0.1258319077\,4765$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^{11}\,dx = 0.1155420911\,5887$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^{12}\,dx = 0.1068090393\,1694$$

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,x^{13}\,dx = 0.0993041112\,7832$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราใช้ขอบเขตของการหาปริพันธ์ที่ได้นำไปคำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - 0.5277873881$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2 - 1.0223373158\,x + 0.1789034844\,4 \\ &= [x - 0.2241322275\,][x - 0.7982050888\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= x^3 - 1.5211028612\,x^2 + 0.6220457488\,3x - 0.0539935044\,45 \\ &= [x - 0.1184235688\,][x - 0.5117563184\,][x - 0.8909229740\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= x^4 - 2.0205190117\,x^3 + 1.3174668835\,x^2 - 0.2989759986\,2x + 0.0154720745\,67 \\ &= [x - 0.0723475823\,][x - 0.3387227404\,][x - 0.6773793390\,][x - 0.9320693500\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5(x) &= x^5 - 2.5201258044\,2156\,x^4 + 2.2634997887\,x^3 - 0.8607046269\,6x^2 + 0.1253848351\,4x \\ &\quad - 0.0043050312\,156 \\ &= [x - 0.0485688699\,][x - 0.2367409581\,][x - 0.5073960242\,][x - 0.7737413563\,] \\ &\quad [x - 0.9536785960\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6(x) &= x^6 - 3.0198783996\,x^5 + 3.4598689786\,x^4 - 1.8644599402\,x^3 + 0.4724312792\,6x^2 \\ &\quad - 0.0481099459\,56x + 0.0011756233\,879 \\ &= [x - 0.0347942284\,][x - 0.1735215012\,][x - 0.3869239588\,][x - 0.6248520500\,] \\ &\quad [x - 0.8334065116\,][x - 0.9663801496\,] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_7(x) &= x^7 - 3.5214142186\,x^6 + 4.9116340750\,x^5 - 3.4414138058\,x^4 + 1.2653495969\,x^3 \\ &\quad - 0.2309885171\,3x^2 + 0.0174288058\,73x - 0.0003192095\,3445 \\ &= [x - 0.0261921641\,][x - 0.1324197976\,][x - 0.3024813597\,][x - 0.5058434690\,] \\ &\quad [x - 0.7072781820\,][x - 0.8727008303\,][x - 0.9744984160\,] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.3 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่สาม

$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้ง ฉาก

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 1.991980735734150$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx = 1.325309278677250$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}dx = 1.058638304276640$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x}}dx = 0.906253478369996$$

$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x}}dx = 0.804662694114273$$

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x}}dx = 0.730777889335709$$

$$\int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1-x}}dx = 0.673943018201133$$

$$\int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1-x}}dx = 0.628474843367880$$

$$\int_0^1 \frac{x^8}{\sqrt{1-x}}dx = 0.591030274175860$$

$$\int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1-x}}dx = 0.559497877296751$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10}}{\sqrt{1-x}}dx = 0.0.532470024528043$$

$$\int_0^1 \frac{x^{11}}{\sqrt{1-x}}dx = 0.508967491534299$$

$$\int_0^1 \frac{x^{12}}{\sqrt{1-x}}dx = 0.488285233055090$$

$$\int_0^1 \frac{x^{13}}{\sqrt{1-x}}dx = 0.469900990364659$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราใช้ขอบเขตของการหาปริพันธ์ที่ได้นำไปคำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - 0.6666666666\ 66667$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2 - 1.1428571429\ x + 0.2285714285\ 7 \\ &= [x - 0.2584442528\ ][x - 0.8844128901\ ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= x^3 - 1.6363636366\ x^2 + 0.7272727275\ 1x - 0.0692640693\ 17 \\ &= [x - 0.1305006052\ ][x - 0.5628021472\ ][x - 0.9430608842\ ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= x^4 - 2.1333333343\ x^3 + 1.4769230786\ x^2 - 0.3480419589\ 2x + 0.0198912199\ 99 \\ &= [x - 0.0778433918\ ][x - 0.3653225244\ ][x - 0.7238156858\ ][x - 0.9663517323\ ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5(x) &= x^5 - 2.6315788645\ x^4 + 2.4767800066\ x^3 - 0.9907119480\ 1x^2 + 0.1524172107\ 9x \\ &\quad - 0.0055424433\ 613 \\ &= [x - 0.515060664\ ][x - 0.2516653451\ ][x - 0.5384026082\ ][x - 0.8121684159\ ] \\ &\quad [x - 0.9778364290\ ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6(x) &= x^6 - 3.1304319523\ x^5 + 3.7267005049\ x^4 - 2.0921797149\ x^3 + 0.5538112111\ 9x^2 \\ &\quad - 0.0590730362\ 80x + 0.0015146870\ 282 \\ &= [x - 0.0365385445\ ][x - 0.1825713237\ ][x - 0.4072489704\ ][x - 0.6556569000\ ] \\ &\quad [x - 0.8646996657\ ][x - 0.9843165481\ ] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_7(x) &= x^7 - 3.6295789224\ x^6 + 5.2265046236\ x^5 - 3.7872417751\ x^4 + 1.4427195010\ x^3 \\ &\quad - 0.2733474866\ 1x^2 + 0.0214379341\ 70x - 0.0004083105\ 1774 \\ &= [x - 0.0272418051\ ][x - 0.1379991702\ ][x - 0.3157240386\ ][x - 0.5276156286\ ] \\ &\quad [x - 0.7345106011\ ][x - 0.8981639351\ ][x - 0.9883237436\ ] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.1.4 ฟังก์ชันถ่วงตัวที่สี่

$w(x)=\sqrt{1-x}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = 0.666666631656877$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x\,dx = 0.266666631540579$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^2\,dx = 0.152380917332613$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^3\,dx = 0.101587266539093$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^4\,dx = 0.073881638833597$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^5\,dx = 0.056832021784111$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^6\,dx = 0.045465610417831$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^7\,dx = 0.037442261218142$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^8\,dx = 0.031530319702617$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^9\,dx = 0.027025983309867$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^{10}\,dx = 0.023500851480786$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^{11}\,dx = 0.020680744217548$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^{12}\,dx = 0.018382877854934$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,x^{13}\,dx = 0.016481199003138$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ราใช้ขอบเขตของการหาปริพันธ์ที่ได้นำไปคำนวณหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = x - 0.4$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= x^2 - 0.888888888\,9x + 0.126984126\,98 \\ &= [x - 0.1788380868][x - 0.7100508021] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3(x) &= x^3 - 1.3846153846x^2 + 0.503496503\,46x - 0.037296037\,291 \\ &= [x - 0.0991941707][x - 0.4501315007][x - 0.8352897132] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(x) &= x^4 - 1.8823529404x^3 + 1.1294117635x^2 - 0.231674207\,70x + 0.010530645\,789 \\ &= [x - 0.0626657505][x - 0.3010519874][x - 0.6237754848][x - 0.8948597178] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5(x) &= x^5 - 2.3809523655x^4 + 2.00501250x^3 - 0.707651462\,81x^2 + 0.094353526\,787x \\ &\quad - 0.002903185\,3618 \\ &= [x - 0.4306869101][x - 0.2131199395][x - 0.4668780439][x - 0.7305392041] \\ &\quad [x - 0.9273464871] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6(x) &= x^6 - 2.879613946\,619235x^5 + 3.129601118\,0844827x^4 - 1.589427136\,9324309x^3 \\ &\quad + 0.376393202\,2070354x^2 - 0.035432053\,33043543x + 0.000787018\,3773310 \\ &= [x - 0.0313837035][x - 0.1580131383][x - 0.3574725142][x - 0.5873872891] \\ &\quad [x - 0.7988542264][x - 0.9468889612] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_7(x) &= x^7 - 3.3793037757x^6 + 4.5057279963x^5 - 3.0038103386x^4 + 1.0448000352x^3 \\ &\quad - 0.179107806\,17x^2 + 0.012568897\,842x - 0.000211240\,32060 \\ &= [x - 0.0238705697][x - 0.1215176978][x - 0.2805440997][x - 0.4752172889] \\ &\quad [x - 0.6739894390][x - 0.8446439559][x - 0.9595207248] \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

ตารางที่ 4.1 ค่ารากของ $p_n(x)$ ของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

n	x_n
1	0.4711045485
2	0.1989461051 0.7774936581
3	0.2042632302 0.5798240091 0.9080161415
4	0.1350003060 0.4074525791 0.7162705667 0.9411242235
5	0.0955716029 0.2978335287 0.5547190456 0.7975180625 0.9591489125
6	0.0710768112 0.2258215399 0.4348406875 0.6674445037 0.8489051729 0.9700198341
7	0.0546894180 0.1760572976 0.3465366686 0.5409289198 0.7295537332 0.8829891292 0.9770269159

73338

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 ค่าราก $p_n(x)$ ของฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\sqrt{1+x}$

n	x_n
1	0.5277873881
2	0.2241322275 0.7982050888
3	0.1184235688 0.5117563184 0.8909229740
4	0.0723475823 0.3387227404 0.6773793390 0.9320693500
5	0.0485688699 0.2367409581 0.5073960242 0.7737413563 0.9536785960
6	0.0347942284 0.1735215012 0.3869239588 0.6248520500 0.8334065116 0.9663801496
7	0.0261921641 0.1324197979 0.3024813597 0.5058434690 0.7072781820 0.8727008303 0.9744984160

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.3 ค่าราก $p_n(x)$ ของฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

n	x_n
1	0.6666666667
2	0.2584442528 0.8844128901
3	0.1305006052 0.5628021472 0.9430608842
4	0.0778433918 0.3653225244 0.7238156858 0.9663517323
5	0.0515060664 0.2516653451 0.5384026082 0.8121684159 0.9778364290
6	0.0365385445 0.1825713237 0.4072489704 0.6556569000 0.8646996657 0.9843165481
7	0.0272418051 0.1379991702 0.3157240386 0.5276156286 0.7345106011 0.8981639351 0.9883237436

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 ค่ารากของ $p_n(x)$ ของฟังก์ชั่นถ่วงน้ำหนัก $w(x)=\sqrt{1-x}$

n	x_n
1	0.4
2	0.1788380868 0.7100508021
3	0.0991941707 0.4501315007 0.8352897132
4	0.0626657505 0.3010519874 0.6237754848 0.8948597178
5	0.0430686910 0.2131199395 0.4668780439 0.7305392041 0.9273464871
6	0.0313837035 0.1580131383 0.3574725142 0.5873872891 0.7988542264 0.9468889612
7	0.0238705697 0.1215176978 0.2805440997 0.4752172889 0.6739894390 0.8446439559 0.9595207248

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.2 รูปแบบของเกาส์-ควอดเดรเจอร์

เราจะใช้พหุนามเชิงตั้งฉากในส่วน 4.1 ในการหารูปแบบของเกาส์-ควอดเดรเจอร์ เราจะหาค่า A_k โดยใช้สมการเชิงเส้น (2.2.4) แทนลงในสมการที่ (2.2.1)

ในการหา $\int_a^b f(z)dz$ จะใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปร $z=(b-a)x+a$ และ $dz=(b-a)dx$ เมื่อ $f(z)=f[(b-a)x+a]$ และ

$$\int_a^b f(z)dz = (b-a)\int_0^1 f[(b-a)x+a]dx$$

$$\cong (b-a)\sum_{k=1}^{n} A_k f[(b-a)x_k+a]\frac{1}{w(x_k)}$$

ตารางที่ 4.5 ค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

N	A_n
1	0.8284271245
2	0.4387283037
	0.3896988211
3	0.2532837718
	0.3655546621
	0.2095886910
4	0.1622822800
	0.2806057761
	0.2565691935
	0.1289698751
5	0.1121607421
	0.2127526404
	0.2333767179
	0.1832077546
	0.0869292698
6	0.0819118792
	0.1641207608
	0.1986837076
	0.1856145092
	0.1356667546
	0.0624295133

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7	0.0623539322
	0.1294149823
	0.1665991398
	0.1712453148
	0.1479382074
	0.1039205379
	0.0469550103

ตารางที่ 4.6 ค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\sqrt{1+x}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

N	A_n
1	1.2189514165
2	0.5741649654
	0.6447864520
3	0.3060376742
	0.5438439011
	0.3690698413
4	0.1868232043
	0.3811738364
	0.4160510651
	0.2349033107
5	0.1253495504
	0.2703476962
	0.3482420422
	0.3134367503
	0.1615153774
6	0.0896975460
	0.1988953569
	0.2766270470
	0.2958656669
	0.2402585354
	0.1176072643

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7	0.0673006632
	0.1515257681
	0.2195612116
	0.2558893219
	0.2469547427
	0.1887423136
	0.0892953955

ตารางที่ 4.7 ค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

N	A_n
1	0.2
2	0.6957096904
	1.3004290310
3	0.3426489848
	0.7215231465
	0.9358278687
4	0.2024570737
	0.4447620672
	0.6274132938
	0.7253675654
5	0.1333426703
	0.2989026756
	0.4381727212
	0.5385334550
	0.5910484778
6	0.0943502361
	0.2138780900
	0.3201563722
	0.4063350509
	0.4669854980
	0.4982947532

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7	0.0702329353
	0.1603079586
	0.2430326938
	0.3144070640
	0.3710810764
	0.4104034198
	0.4305348522

ตารางที่ 4.8 ค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\sqrt{1-x}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

N	A_n
1	0.6666666667
2	0.3891106684
	0.2775559982
3	0.2332816246
	0.3076023677
	0.1257826743
4	0.1523625355
	0.2525273453
	0.1960962659
	0.0656805200
5	0.1065419861
	0.1976337600
	0.1986308016
	0.1256731557
	0.0381873474
6	0.0784269074
	0.1551301598
	0.1784600916
	0.1470105936
	0.0836026421
	0.0240362722
7	0.0600377689
	0.1236299164
	0.1541921447
	0.1464883995
	0.1084110941
	0.0578425762
	0.0160647669

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3 การปรับปรุงรูปแบบวิธีรุงเง-คุตตา

ในปี ค.ศ. 1895 นักคณิตศาสตร์ชื่อ รุงเง ได้สร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้น ต่อมาในปี ค.ศ. 1901 นักคณิตศาสตร์ชื่อ คุตตา ได้ปรับปรุงวิธีการของรุงเง และให้ชื่อระเบียบวิธีใหม่นี้ว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการที่นิยมใช้กันอย่างมากในการประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.3.1}$$

1.ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่2 ซึ่งเราจะกำหนดโดย RK2 ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \tag{4.3.2}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m, y_m)$$
$$K_2 = f(x_m + h, y_m + hK_1)$$

2.ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่3 ซึ่งเราจะกำหนดโดย RK3ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \tag{4.3.3}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m, y_m),$$
$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1),$$
$$K_3 = f(x_m + h, y_m - hK_1 + 2hK_2),$$

3.ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่4 ซึ่งเราจะกำหนดโดย RK4 ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{4.3.4}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m, y_m),$$
$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1),$$
$$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_2),$$
$$K_4 = f(x_m + h, y_m + hK_3),$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.ระเบียบรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก ซึ่งกำหนดให้เป็น FB อยู่ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + h(\frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2191}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5) \qquad (4.3.5)$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m, y_m),$$
$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}K_1),$$
$$K_3 = f(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}hK_1 + \frac{9}{32}hK_2),$$
$$K_4 = f(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}hK_1 - \frac{7200}{2197}hK_2 + \frac{7296}{2197}K_3),$$
$$K_5 = f(x_m + h, y_m + \frac{439}{216}hK_1 - 8hK_2 + \frac{3680}{513}hK_3 - \frac{854}{4104}hK_4),$$

5.ระเบียบรุงเง-คุตตาของ Goeken และ Johnson ซึ่งกำหนดให้เป็น GJ อยู่ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + h(\frac{5}{48}K_1 + \frac{27}{56}K_2 + \frac{125}{336}K_3 + \frac{1}{24}K_4) \qquad (4.3.6)$$

โดยที่

$$K_1 = hf(y_m),$$
$$K_2 = hf(y_m + \frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{18}hf_yK_1),$$
$$K_3 = hf(y_m - \frac{152}{125}K_1 + \frac{252}{125}K_2 - \frac{44}{125}hf_yK_1),$$
$$K_4 = hf(y_m + \frac{19}{2}K_1 + \frac{22}{7}K_2 + \frac{25}{14}K_3 - \frac{5}{2}hf_yK_1),$$

เราจะปรับปรุงสูตรวิธีรุงเง-คุตตา สำหรับการหาค่าสมการเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 1 RK1

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f) \qquad (4.3.7)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 2 RK2

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2) \qquad (4.3.8)$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 3 RK3

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3) \tag{4.3.9}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$
$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 4 RK4

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4) \tag{4.3.10}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 5 RK5

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5) \tag{4.3.11}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 6 RK6

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6) \tag{4.3.12}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 7 RK7

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7) \tag{4.3.13}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$
$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$
$$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$$

และจากค่าของอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + +hy'_m + \frac{1}{2}h^2 y''_m + \frac{1}{6}h^3 y'''_m + \frac{1}{24}h^4 y''''_m + \frac{1}{120}h^5 y'''''_m + \ldots \\ &= y_m + hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + ff_y) + \frac{1}{6}h^3(f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + ff_y^2 + f^2 f_{yy}) \\ &\quad + \frac{1}{24}h^4(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + f_x f_y^2 + ff_y^3 + f_{xx} f_y + 5ff_{xy} f_y \\ &\quad + 3ff_x f_{yy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy}) + \ldots \end{aligned} \tag{4.3.14}$$

ขั้นตอนวิธีการหาค่าโดยวิธีรุงเง-คุตตา

ขั้นที่1 เราใช้ค่ารากของ $p_1(x)$ มาคำนวณในสมการที่ (4.3.7) และมาเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ กับสมการ (4.3.14) ซึ่งการกระจายอนุกรมของเทเลอร์

ขั้นที่2 เราใช้ค่ารากของ $p_2(x)$ มาคำนวณในสมการที่ (4.3.8) และมาเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ กับสมการ (4.3.14) ซึ่งการกระจายอนุกรมของเทเลอร์และทำการแก้สมการหาค่า $AR_1, AR_2, \beta_1, \beta_2$ ออกมา(ค่า AR_1, AR_2 ในที่นี้คือค่าของ A_1, A_2 ใหม่ที่ได้จากการแก้สมการ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่3 เราใช้ค่ารากของ $p_3(x)$ มาคำนวณในสมการที่ (4.3.9) และมาเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ กับสมการ (4.2.14) ซึ่งการกระจายอนุกรมของเทเลอร์และทำการแก้สมการหาค่า $AR_1, AR_2, AR_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ออกมา (ค่า AR_1, AR_2, AR_3 ในที่นี้คือค่าของ A_1, A_2, A_3 ใหม่ที่ได้จากการแก้สมการ)

ขั้นที่4 เราใช้ค่ารากของ $p_4(x), p_5(x), p_6(x), p_7(x)$ นำมาคำนวณในสมการเพื่อหาค่าของ AR_k ได้เลย (ค่า AR_k ในที่นี้คือค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,4,5,6,7 ใหม่ที่ได้จากการแก้สมการ)

เราจะใช้วิธีการประมาณค่าของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเพื่อใช้ในการหาค่าRK1,RK2,…,RK7 **เมื่อ**

RK1 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 1

RK2 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 2

RK3 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 3

RK4 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4

RK5 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 5

RK6 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 6

RK7 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 7

FB แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาFehlberg

GJ แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาGoeken และ Johnson

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.1 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $a=0$ และ $b=1$

RU1;

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$

$$\alpha_1 = 0.4711045485$$

RU2;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$$

$$A_1 = 0.47963846128306068559242527813440$$

$$A_2 = 0.52036153871693931440757472186560$$

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$

$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$

$$\alpha_1 = 0.1989461051$$

$$\alpha_2 = 0.7774936581$$

RU3;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$$

$$A_1 = 0.43852419294457000135409506096839$$

$$A_2 = 0.30288192258863528448316532120057$$

$$A_3 = 0.25859388446679471416273961783104$$

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$

$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$$

$$\alpha_1 = 0.2042632302$$

$$\alpha_2 = 0.5798240091$$

$$\alpha_3 = 0.9080161415$$

RU4;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$$

$$A_1 = 0.20412487360353195921310975516528$$

$$A_2 = 0.32273979369669993391721719597255$$

$$A_3 = 0.27838776895354000991636899187990$$

$$A_4 = 0.15039553900306817295245585288962$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$\alpha_1 = 0.1350003060$$

$$\alpha_2 = 0.4074525791$$

$$\alpha_3 = 0.7162705667$$

$$\alpha_4 = 0.9411242235$$

RU5;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$$

$$A_1 = 0.12201058639953008578057160462655$$

$$A_2 = 0.27551161350524664592199072827594$$

$$A_3 = 0.23369497289419605337969498479162$$

$$A_4 = 0.22867947535080512096245143744753$$

$$A_5 = 0.98286711239171501412995501374035e-1$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$\alpha_1 = 0.0955716029$$

$$\alpha_2 = 0.2978335287$$

$$\alpha_3 = 0.5547190456$$

$$\alpha_4 = 0.7975180625$$

$$\alpha_5 = 0.9591489125$$

RU6;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$$

$$A_1 = 0.16275096740923097080851795570961$$

$$A_2 = 0.13458478789694381436880696705763$$

$$A_3 = 0.27608358589157628811018783221541$$

$$A_4 = 0.18103787309361891638966374313591$$

$$A_5 = 0.17360776587083848386047488870913$$

$$A_6 = 0.71935019837791526462348613172308e-1$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

$\alpha_1 = 0.0710768112$

$\alpha_2 = 0.2258215399$

$\alpha_3 = 0.4348406875$

$\alpha_4 = 0.6674445037$

$\alpha_5 = 0.8489051729$

$\alpha_6 = 0.9700198341$

RU7;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$$

$A_1 = 0.90295178281747057132350865812237e-1$

$A_2 = 0.14954704634934552164256274789852$

$A_3 = 0.18715307392680442436601382524085$

$A_4 = 0.19660284041067856204498683947988$

$A_5 = 0.17565845605071475000670450949759$

$A_6 = 0.12710425274634867835180552690801$

$A_7 = 0.58489530969607233955882264646745e-1$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

$$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$$

$\alpha_1 = 0.0546849180$

$\alpha_2 = 0.1760572976$

$\alpha_3 = 0.3465366686$

$\alpha_4 = 0.5409289198$

$\alpha_5 = 0.7295537332$

$\alpha_6 = 0.8829891292$

$\alpha_7 = 0.9770269159$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

RU1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ในอันดับที่1

RU2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ในอันดับที่2

RU3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ในอันดับที่3

RU4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ในอันดับที่4

RU5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ในอันดับที่5

RU6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ในอันดับที่6

RU7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ ในอันดับที่7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.2 จาก $w(x)=\sqrt{1+x}$, $a=0$ **และ** $b=1$

RV1;

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$\alpha_1 = 0.5277873881$$

RV2;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$$
$$A_1 = 0.5194551230391005421318285195168 8$$
$$A_2 = 0.4805448769608994578681714804831 2$$
$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$
$$\alpha_1 = 0.2241322275$$
$$\alpha_2 = 0.7982050888$$

RV3;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$$
$$A_1 = 0.2893840595073702486447169833510 5$$
$$A_2 = 0.4414258418671852164464960516400 8$$
$$A_3 = 0.2691900986254445349087869650088 7$$
$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$
$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$$
$$\alpha_1 = 0.1184235688$$
$$\alpha_2 = 0.5117563184$$
$$\alpha_3 = 0.8909229740$$

RV4;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$$
$$A_1 = 0.1803389534658506649568814848245 2$$
$$A_2 = 0.3292940146881377786440103780940 1$$
$$A_3 = 0.3205565017796935602745353150028 6$$
$$A_4 = 0.1698105300663179961245728220786 1$$
$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\alpha_1 = 0.0723475823$

$\alpha_2 = 0.3387227404$

$\alpha_3 = 0.6773793390$

$\alpha_4 = 0.9320693500$

RV5;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$

$A_1 = 0.12237983371107346256293582913431$

$A_2 = 0.24277821521755483478031548775612$

$A_3 = 0.28376684426485504015736588348961$

$A_4 = 0.23460613877509407090197167937539$

$A_5 = 0.11646896803142259159741112024456$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$\alpha_1 = 0.0955716029$

$\alpha_2 = 0.2978335287$

$\alpha_3 = 0.5547190456$

$\alpha_4 = 0.7975180625$

$\alpha_5 = 0.9591489125$

RV6;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$

$A_1 = 0.88101589138431860150801223088032e-1$

$A_2 = 0.18360517999444282787227372489252$

$A_3 = 0.23451678943956335506592291713929$

$A_4 = 0.23231484691287356174902500306287$

$A_5 = 0.17671729047033892807464694932561$

$A_6 = 0.84744304044349467087330182491679e-1$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

$$\alpha_1 = 0.0347942284$$

$$\alpha_2 = 0.1735215012$$

$$\alpha_3 = 0.3869239588$$

$$\alpha_4 = 0.6248520500$$

$$\alpha_5 = 0.8334065116$$

$$\alpha_6 = 0.9663801496$$

RV7;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$$

$$A_1 = 0.665835533205440533775368853240 88e-1$$

$$A_2 = 0.142458590960120994361729852463 36$$

$$A_3 = 0.192552119953119858785767371505 31$$

$$A_4 = 0.208098125349318471231654922852 22$$

$$A_5 = 0.189136221726987389682724314915 85$$

$$A_6 = 0.136839519571858331472902888456 03$$

$$A_7 = 0.643318691180509010876837644831 38e-1$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

$$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$$

$$\alpha_1 = 0.0261921641$$

$$\alpha_2 = 0.1324197976$$

$$\alpha_3 = 0.3024813597$$

$$\alpha_4 = 0.5058434690$$

$$\alpha_5 = 0.7072781820$$

$$\alpha_6 = 0.8727008320$$

$$\alpha_7 = 0.9744984160$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

RV1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1+x}$ ในอันดับที่1

RV2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1+x}$ ในอันดับที่2

RV3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1+x}$ ในอันดับที่3

RV4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1+x}$ ในอันดับที่4

RV5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1+x}$ ในอันดับที่5

RV6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1+x}$ ในอันดับที่6

RV7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1+x}$ ในอันดับที่7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.3 จาก $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $a=0$ และ $b=1$

RT1;

$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$\alpha_1 = 0.6666666667$

RT2;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$

$A_1 = 0.614108866153572707116200436516666$

$A_2 = 0.385891133846427292883799563483334$

$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$

$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$

$\alpha_1 = 0.2584442528$

$\alpha_2 = 0.8844128901$

RT3;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$

$A_1 = 0.316446529075150850555203590842 12$

$A_2 = 0.488953930981246100614320573319 34$

$A_3 = 0.194599539943603048830475835838 55$

$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$

$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$

$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hfK_2)$

$\alpha_1 = 0.1184235688$

$\alpha_2 = 0.5117563184$

$\alpha_3 = 0.8909229740$

RT4;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$

$A_1 = 0.195356271658742936200707673160 95$

$A_2 = 0.350800068951714356494291014162 38$

$A_3 = 0.337825940396488108869169273277 69$

$A_4 = 0.116017718993054598435832039398 99$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$\alpha_1 = 0.0723475823$$

$$\alpha_2 = 0.3387227404$$

$$\alpha_3 = 0.6773793390$$

$$\alpha_4 = 0.9320693500$$

RT5;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$$

$$A_1 = 0.12949623190211637869717153569669$$

$$A_2 = 0.25992038680427257481131909928445$$

$$A_3 = 0.29475375016954360439631849188583$$

$$A_4 = 0.23908478866933293678882682926583$$

$$A_5 = 0.76744842454734505306364043867203e-1$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$\alpha_1 = 0.0485688699$$

$$\alpha_2 = 0.2367409581$$

$$\alpha_3 = 0.5073960242$$

$$\alpha_4 = 0.7737413563$$

$$\alpha_5 = 0.9536785960$$

RT6;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$$

$$A_1 = 0.16275096740923097080851795570961$$

$$A_2 = 0.13458478789694381436880696705763$$

$$A_3 = 0.27608358589157628811018783221541$$

$$A_4 = 0.18103787309361891638966374313591$$

$$A_5 = 0.17360776587083848386047488870913$$

$$A_6 = 0.71935019837791526462348613172308e-1$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

$\alpha_1 = 0.0347942284$

$\alpha_2 = 0.1735215012$

$\alpha_3 = 0.3869239588$

$\alpha_4 = 0.6248520500$

$\alpha_5 = 0.8334065116$

$\alpha_6 = 0.9663801496$

RT7;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$

$A_1 = 0.691828605488779622175376420693 28e-1$

$A_2 = 0.149148894517226665883336374392 85$

$A_3 = 0.200390612475058035416034927070 29$

$A_4 = 0.217222302294284289279588250421 00$

$A_5 = 0.189337488857013229621422802500 56$

$A_6 = 0.134131700762686898745046422718 19$

$A_7 =$ a7 = .405861405448529188370335808277 89e-1

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$

$\alpha_1 = 0.0261921641$

$\alpha_2 = 0.1324197976$

$\alpha_3 = 0.3024813597$

$\alpha_4 = 0.5058434690$

$\alpha_5 = 0.7072781820$

$\alpha_6 = 0.8727008320$

$\alpha_7 = 0.9744984160$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

RT1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ในอันดับที่1

RT2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ในอันดับที่2

RT3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ในอันดับที่3

RT4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ในอันดับที่4

RT5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ในอันดับที่5

RT6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ในอันดับที่6

RT7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ในอันดับที่7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.3.4 จาก $w(x)=\sqrt{1-x}$, $a=0$ และ $b=1$

RS1;

$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$\alpha_1 = 0.4$

RS2;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$

$A_1 = 0.39541749670162686333573913229708$

$A_2 = 0.60458250329837313666426086770292$

$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$

$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$

$\alpha_1 = 0.1788380868$

$\alpha_2 = 0.7100508021$

RS3;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$

$A_1 = 0.25786644722838051736608273692135$

$A_2 = 0.37770289224944832683006248157306$

$A_3 = 0.36443066052217115580385478150559$

$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$

$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$

$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 K_2)$

$\alpha_1 = 0.1305006052$

$\alpha_2 = 0.5628021472$

$\alpha_3 = 0.9430608842$

RS4;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$

$A_1 = 0.15197618516069226498111488213136$

$A_2 = 0.31957343887273934572551262464484$

$A_3 = 0.29002378350370392318204487254383$

$A_4 = 0.23842659246286446611132762067997$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\alpha_1 = 0.0626657505$

$\alpha_2 = 0.3010519874$

$\alpha_3 = 0.6237754848$

$\alpha_4 = 0.8948597178$

RS5;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$

$A_1 = 0.11171041690032946135333420171761$

$A_2 = 0.21347762206973959276421053068896$

$A_3 = 0.28870828260381117683529663855035$

$A_4 = 0.21925513504352488721391745742146$

$A_5 = 0.16684854338259488183324117162162$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$\alpha_1 = 0.0430686910$

$\alpha_2 = 0.2131199395$

$\alpha_3 = 0.4668780439$

$\alpha_4 = 0.7305392041$

$\alpha_5 = 0.9273464871$

RS6;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$

$A_1 = 0.78084578354006994677593015191342e-1$

$A_2 = 0.17448484117291664791164831096072$

$A_3 = 0.21264797542354620177051792088267$

$A_4 = 0.24325116594326690653454041563365$

$A_5 = 0.16866373724717477621538482809041$

$A_6 = 0.12286770185908847289031550924120$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

$$\alpha_1 = 0.0313837035$$

$$\alpha_2 = 0.1580131383$$

$$\alpha_3 = 0.3574725142$$

$$\alpha_4 = 0.5873872891$$

$$\alpha_5 = 0.7988542264$$

$$\alpha_6 = 0.9468889612$$

RS7;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$$

$$A_1 = 0.6180963221862834551770420100156 9e-1$$

$$A_2 = 0.1283490219014943504629899541 1515$$

$$A_3 = 0.1884421154755059926631012336 7095$$

$$A_4 = 0.1923542129930200227160678323 2215$$

$$A_5 = 0.2026207543349679010891517929 0886$$

$$A_6 = 0.1318094369616156506516261553 6487$$

$$A_7 = .9461482611476773689935883061 6454e-1$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$

$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

$$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$$

$$\alpha_1 = 0.0238705697$$

$$\alpha_2 = 0.1215176978$$

$$\alpha_3 = 0.2805440997$$

$$\alpha_4 = 0.4752172889$$

$$\alpha_5 = 0.6739894390$$

$$\alpha_6 = 0.8446439559$$

$$\alpha_7 = 0.959520725$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ

RS1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1-x}$ ในอันดับที่1

RS2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1-x}$ ในอันดับที่2

RS3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1-x}$ ในอันดับที่3

RS4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1-x}$ ในอันดับที่4

RS5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1-x}$ ในอันดับที่5

RS6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1-x}$ ในอันดับที่6

RS7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x)=\sqrt{1-x}$ ในอันดับที่7

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4 ตัวอย่างการวิเคราะห์เชิงตัวเลข

4.4.1 ตัวอย่างที่ 1

หาค่าของ $\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-3}dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.1, 4.5 ลงในตารางที่ 4.9, ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.2, 4.6 ลงในตารางที่ 4.10 ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.3, 4.7 ลงในตารางที่ 4.11 และค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.4, 4.8 ลงในตารางที่ 4.12 โดยค่าของปริพันธ์คือ 0.4675231285636536

ตารางที่ 4.9 ค่าของ $\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-3}dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.1 และ 4.5

n	Calculated value	error
1	0.4722465372235457	0.0047234086598921
2	0.4678614868798868	0.0003383583162332
3	0.4678616171219588	0.0003384885583053
4	0.3666057695398078	0.1900175390238457
5	0.4678409055416575	0.0003177769780039
6	0.4678205683648278	0.0002974398011742
7	0.4675266014370796	0.0000034728734260

ตารางที่ 4.10 ค่าของ $\int_{-2}^{0}\frac{x}{x-3}dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.2 และ 4.6

n	Calculated value	error
1	0.4722465372235457	0.0047234086598921
2	0.4678614868798868	0.0003383583162332
3	0.4678616171219588	0.0003384885583053
4	0.3666057695398078	0.1009173590238457
5	0.4678409055416575	0.0003177769780039
6	0.4678409055416575	0.0002974398011742
7	0.4675266014370796	0.00000034728734260

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.11 ค่าของ $\int_{-2}^{0} \frac{x}{x-3} dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.3 และ 4.7

n	Calculated value	error
1	0.0419891104864629	0.4255340180771907
2	0.4598423191045664	0.0076808094590872
3	0.4661637952591027	0.0013593333045509
4	0.4671103391799213	0.0004127893837322
5	0.4121133192484812	0.0554098093151724
6	0.4054647383971015	0.0620583901665521
7	0.4674785166743026	0.0000446118893510

ตารางที่ 4.12 ค่าของ $\int_{-2}^{0} \frac{x}{x-3} dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.4 และ 4.8

n	Calculated value	error
1	0.4918074090424576	0.0242842804788040
2	0.4708110167148040	0.0032878881511504
3	0.7677917111291196	0.3002685825654660
4	0.4678138619413743	0.0002907333777207
5	0.4676547156525677	0.0001315870889141
6	0.4675928236111430	0.0000696950474894
7	0.4675618325479081	0.0000387039842545

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4.2 ตัวอย่างที่ 2

หาค่าของ $\int_0^{0.5} \frac{2x^2}{\sqrt{1+x}} dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.1, 4.5 ลงในตารางที่ 4.13, ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.2, 4.6 ลงในตารางที่ 4.14 , ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.3, 4.7 ลงในตารางที่ 4.15 และ ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.4, 4.8 ลงในตารางที่ 4.16 โดยค่าของปริพันธ์คือ 0.0712073758805625

ตารางที่ 4.13 ค่าของ $\int_0^{0.5} \frac{2x^2}{\sqrt{1+x}} dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.1 และ 4.5

n	Calculated value	error
1	0.0501556797314736	0.0210516961490889
2	0.1161734754244649	0.0449660995439024
3	0.0862574729734202	0.0150500970928577
4	0.0831589597475681	0.0119515838670056
5	0.0811132869828907	0.0099059111023282
6	0.0803722343034437	0.0091648584228812
7	0.0698575943952327	0.0013497814853298

ตารางที่ 4.14 ค่าของ $\int_0^{0.5} \frac{2x^2}{\sqrt{1+x}} dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.2 และ 4.6

n	Calculated value	error
1	0.0610882505046425	0.0101191253759200
2	0.0709303573465381	0.0002770185340244
3	0.0711262807549581	0.0000810951256044
4	0.0962902702874169	0.0250828944068544
5	0.0711272335579174	0.0000801423226451
6	0.0711400281100183	0.0000673477705442
7	0.0711960721893999	0.0000113036911626

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.15 ค่าของ $\int_0^{0.5} \frac{2x^2}{\sqrt{1+x}} dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.3 และ 4.7

N	Calculated value	error
1	0.0111111111111160	0.0600962647694465
2	0.0816189003352046	0.0104115244546421
3	0.0756207292153842	0.0044133533348217
4	0.0736728261354740	0.0024654502549115
5	0.0781960667419078	0.0069886908613453
6	0.0737571842653011	0.0025498083847386
7	0.0720218312995388	0.0008144554189763

ตารางที่ 4.16 ค่าของ $\int_0^{0.5} \frac{2x^2}{\sqrt{1+x}} dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.4 และ 4.8

N	Calculated value	error
1	0.0314269680527512	0.0397804078278113
2	0.0591023616113546	0.0121050142692079
3	0.0905245764963811	0.0193172006158186
4	0.0673899254679302	0.0038174504126323
5	0.0686242072084922	0.0025831686720703
6	0.0693419951858070	0.0018653806947555
7	0.0697966533251819	0.0014107225553806

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4.3 ตัวอย่างที่ 3

หาค่าของ $\int_0^{0.5} \sin(x^4)\,dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.1, 4.5 ลงในตารางที่ 4.17, ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.2, 4.6 ลงในตารางที่ 4.18 , ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.3, 4.7 ลงในตารางที่ 4.19 และ ค่าฟังก์ชันถ่วง ในตารางที่ 4.4, 4.8 ลงในตารางที่ 4.20โดยค่าของปริพันธ์คือ 0.0062483626161648

ตารางที่ 4.17 ค่าของ $\int_0^{0.5} \sin(x^4)\,dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.1 และ 4.5

N	Calculated value	error
1	0.0015466591118805	0.0047017035042842
2	0.0098464397306495	0.0035980771144849
3	0.0077875687840030	0.0015392061678384
4	0.0074564534195760	0.0012080908034113
5	0.0072423924852020	0.0009940298690374
6	0.0071835136449288	0.0009351510287642
7	0.0063633887998057	0.0001150261836411

ตารางที่ 4.18 ค่าของ $\int_0^{0.5} \sin(x^4)\,dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.2 และ 4.6

n	Calculated value	error
1	0.0023913287659506	0.0038570338502140
2	0.0061399118437858	0.0001084507723788
3	0.0062327081989696	0.0000156544171950
4	0.0122451047379515	0.0059967421217869
5	0.0062328547519008	0.0000155078642638
6	0.0062347380049108	0.0000136246112538
7	0.0062415450011865	0.0000068176149781

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.19 ค่าของ $\int_0^{0.5} \sin(x^4)\,dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.3 และ 4.7

N	Calculated value	error
1	0.0007127600038099	0.0055356026123548
2	0.0085595731511563	0.0023112105349916
3	0.0070160334497941	0.0007676708336295
4	0.0066497685763699	0.0004014059602053
5	0.0067040022241470	0.0004556396079823
6	0.0076321778654622	0.0013838152492975
7	0.0063753963299309	0.0001270337137662

ตารางที่ 4.20 ค่าของ $\int_0^{0.5} \sin(x^4)\,dx$ โดยใช้ค่าฟังก์ชันถ่วงในตารางที่ 4.4 และ 4.8

N	Calculated value	error
1	0.0006885300788865	0.0055598325372781
2	0.0041080208939522	0.0021403417222125
3	0.0059630960543858	0.0002852665617789
4	0.0056480762963697	0.0006002863197949
5	0.0058461065619811	0.0004022560541836
6	0.0059594247821732	0.0002889378339914
7	0.0060305636441821	0.0002177989719826

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4.4.4 ตัวอย่างที่ 4

จงหาผลเฉลยของสมการ $y'=\frac{xy}{y^2-x^2}, x=[0,5]$ เมื่อ $y(0)=1$ ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}$ ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 4.21, 4.22, 4.23 และ4.24

ตารางที่ 4.21 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0\quad w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

N	Calculated value	error
1	1.5526411157538	0.0011328582762298
2	1.5543245021947	0.0005505281646603
3	1.5537108291983	0.0000631448317672
4	1.5535456833985	0.0002282906315576
5	1.5534072163759	0.0003667576541013
6	1.5533144758988	0.0004594981312032
7	1.5566493416915	0.0028753676614486

ตารางที่ 4.22 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0\quad w(x)=\sqrt{1+x}$

N	Calculated value	error
1	1.5566436885983	0.0028697145683090
2	1.5542830811888	0.0005091071587664
3	1.5538566112191	0.0000826371890164
4	1.5536122050973	0.0001617689327333
5	1.5534565821917	0.0003173918383732
6	1.5533497700966	0.0004242039334104
7	1.5532721196059	0.0005018544241457

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.23 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0 \qquad w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

N	Calculated value	error
1	1.5566436885983	0.0028697145683090
2	1.5542830811888	0.0005091071587664
3	1.5538566112191	0.0000826371890164
4	1.5536122050973	0.0001617689327333
5	1.5534565821917	0.0003173918383732
6	1.5533497700966	0.0004242039334104
7	1.5532721196059	0.0005018544241457

ตารางที่ 4.24 $x=0.1,\ h=0.1,\ y=1.0 \qquad w(x)=\sqrt{1-x}$

N	Calculated value	error
1	1.5476594842898	0.0061144897402212
2	1.5543177628223	0.0005437887922455
3	1.5538309041391	0.0000569301090856
4	1.5535828572835	0.0001911167465771
5	1.5534351372987	0.0003388367312935
6	1.5533338470735	0.0004401269565868
7	1.5532618366906	0.0005121373393904

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.25 $x = 0.1,\ h = 0.0001,\ y = 1.0 \quad w(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

N	Calculated value	error
1	1.5537721145797	0.0000018594503306
2	1.553773974526	0.0000000004959968
3	1.5537739739992	0.0000000000308802
4	1.553773973839	0.0000000001910250
5	1.5537739737035	0.0000000003265064
6	1.5537739736115	0.0000000004185379
7	1.5537773182623	0.0000033442322687

ตารางที่ 4.26 $x = 0.1,\ h = 0.0001,\ y = 1.0 \quad w(x) = \sqrt{1+x}$

N	Calculated value	error
1	1.5537757638017	0.0000017897716746
2	1.5537739744924	0.0000000004624023
3	1.5537739741288	0.0000000000987448
4	1.5537739739025	0.0000000001275831
5	1.5537739737524	0.0000000002776821
6	1.5537739736467	0.0000000003833616
7	1.5537739735685	0.0000000004615222

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.27 $x = 0.1$, $h = 0.0001$, $y = 1.0$ $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

N	Calculated value	error
	1.5537739899803	0.0000000159503053
2	1.5537739739022	0.0000000001278144
3	1.5537739739025	0.0000000001275831
4	1.5537739733446	0.0000000006854630
5	1.5537739739025	0.0000000001275831
6	1.5537739739024	0.0000000001276139
7	1.5537739739999	0.0000000000301339

ตารางที่ 4.28 $x = 0.1$, $h = 0.0001$, $y = 1.0$ $w(x) = \sqrt{1-x}$

N	Calculated value	error
1	1.5537675369253	0.0000064371047281
2	1.5537739745215	0.0000000004914986
3	1.5537793741035	0.0000054000734311
4	1.5537739738751	0.0000000001548939
5	1.5537739735904	0.0000000004395886
6	1.5537739736142	0.0000000004158596
7	1.5537739754656	0.0000000014355126

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
บทสรุปการดำเนินการปัญหาพิเศษ

วิธีการเชิงตัวเลขได้ถูกนำมาใช้เพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ไม่สามารถหาคำตอบโดยตรงได้ และได้มีการนำวิธีการเชิงตัวเลขมาใช้เพื่อประมาณค่าคำตอบของผลเฉลยของปัญหาที่ไม่สามารถปรับลดรูปให้อยู่ในรูปอย่างง่ายได้ เช่น ผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปสมการปริพันธ์ เป็นต้น นอกจากนี้วิธีการเชิงตัวเลขยังได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อช่วยในการหาคำตอบทางคอมพิวเตอร์อีกทางหนึ่งซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง สำหรับการหาคำตอบที่ไม่สามารถหาได้ด้วยวิธีการเดิมและรวดเร็วอีกด้วย ในบทนี้จะทำการสรุปวิธีการและแนวคิดในหัวข้อต่างๆที่ได้ทำการศึกษา ดังนี้

5.1 การหาค่าปริพันธ์

ผลลัพธ์ที่หามาได้จากการปริพันธ์และค่าที่ได้จากการหาผลบวกของการแทนค่ารากและค่า A_k จะมีค่าใกล้เคียงกันมากและยิ่งถ้าค่า n มากขึ้นเรื่อยๆก็จะได้ค่าที่ใกล้เคียงกันมากขึ้นอีกตามลำดับ

5.2 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

การคำนวณของวิธีการของรุงเง-คุตตามีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากเมื่ออันดับสูงขึ้น ดังตัวอย่างที่ได้แสดงมาเราได้แสดงวิธีการหาค่าของรุงเง-คุตตาในรูปแบบโจทย์ต่างๆและฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่แตกต่างกันด้วย จึงทำให้ผู้ที่สนใจสามารถมาศึกษาและนำไปใช้ได้

ผู้ที่สนใจต้องการค้นคว้าศึกษาเพิ่มเติม ขอแนะนำว่า ลองนำฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักแต่ละตัวมาเปรียบเทียบกันโดยใช้โจทย์ปัญหาเดียวกัน เพื่อที่จะได้ทราบว่าฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักตัวไหนให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด และเหมาะสมกับการนำไปใช้ได้ดีที่สุด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

[1]ไมตรี โพธิ์สุข. 2529. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**. กรุงเทพฯ : โครงการตำรา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[2] Brice Carnahan, H.A. LUTHER and James O.Wilkes. **Applied Numerical Methods.** The United States of America.1969.

[3] Eric W.Weisstein. 1999. **Orthogonal Polynomials.** [Online] Available : http://www.mathwold.wolfram.com/Orthogonal Polynomials.html.

[4] Walter Gautschi . 2004. **Computing polynomials orthogonal with respect to densely oscillating and exponentially decaying weight functions and related integrals.** [Online] Available : http://www.elsevier.com/locate/cam.

[5] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun. **Handbook of mathematical function with formulas graphs and mathematical tables.** New York.1965.

[6] Maitree Podisuk, Pongpan Rattanathanawan and Phimpraphai Phutthiwat. "**Sequences of Orthogomal Polynomials and Applications.**" Department of Mathematics and Computer Science. King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

[7] Maitree Podisuk, Witchaya Rattanametawee and Decha Samana, "**Applications of Orthogonal Polynomials.**", Department of Mathematics and Computer Science. King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

[8] Maitree Podisuk ,Sirikul Bunditsaovapak, "**Some Orthogonal Polynomials.**", Department of Mathematics and Computer Science. King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

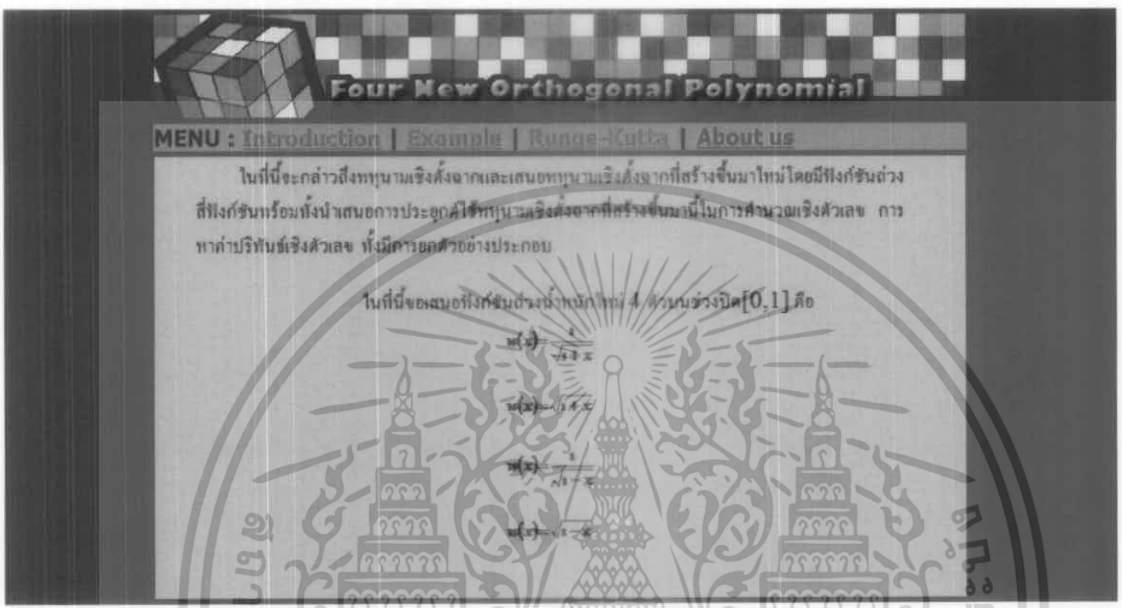
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

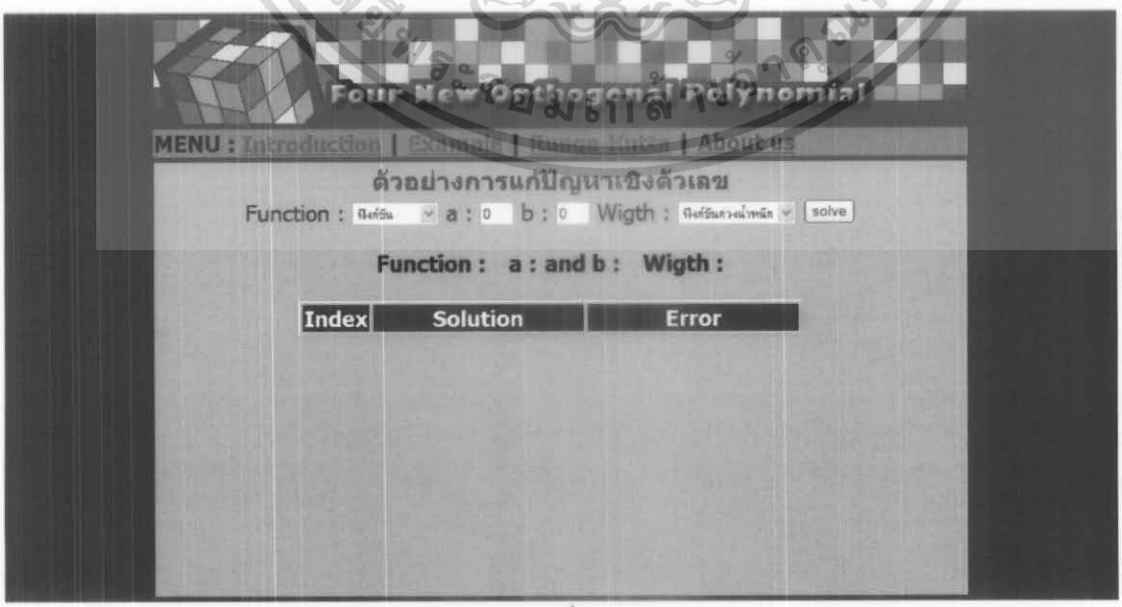
คู่มือการใช้โปรแกรม

1.เมื่อเข้าสู่โปรแกรมจะปรากฏหน้า Introduction โดยในหน้านี้จะกล่าวถึงขอบเขตของโปรแกรม ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

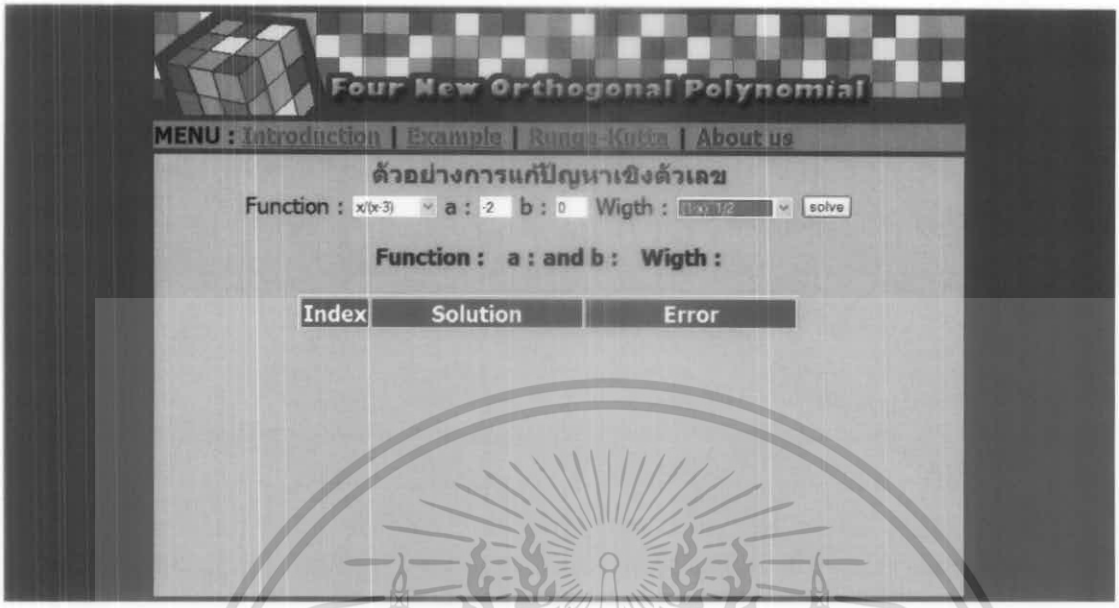
2. เมื่อกดตรง Example จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

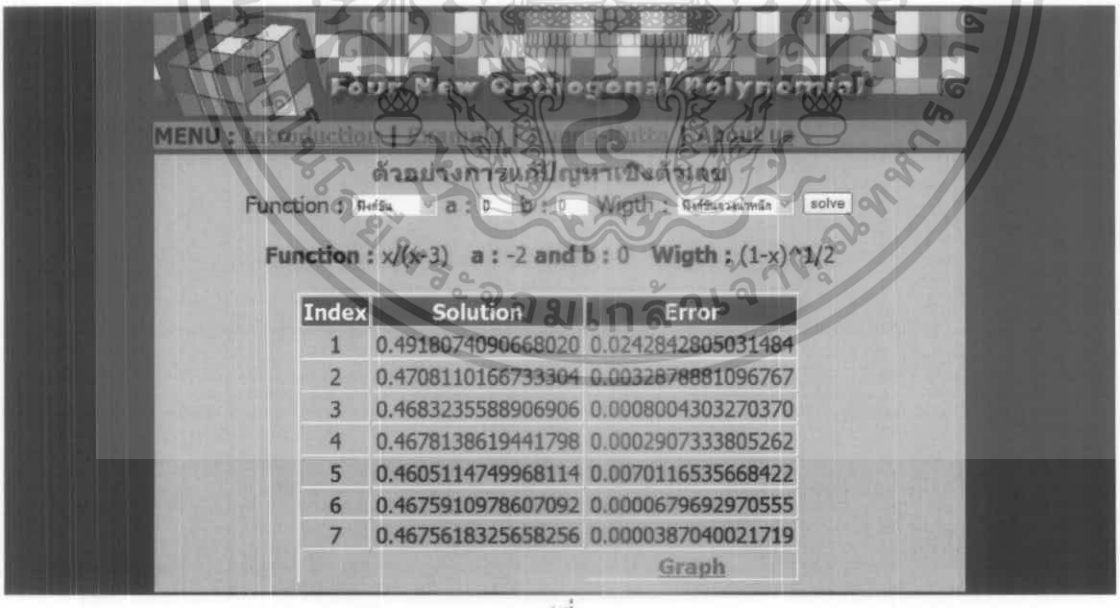
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. ให้เลือกฟังก์ชัน และฟังก์ชันถ่วงที่ต้องการ พร้อมทั้งระบุขอบเขต แล้วกดปุ่ม solve



รูปที่ 3

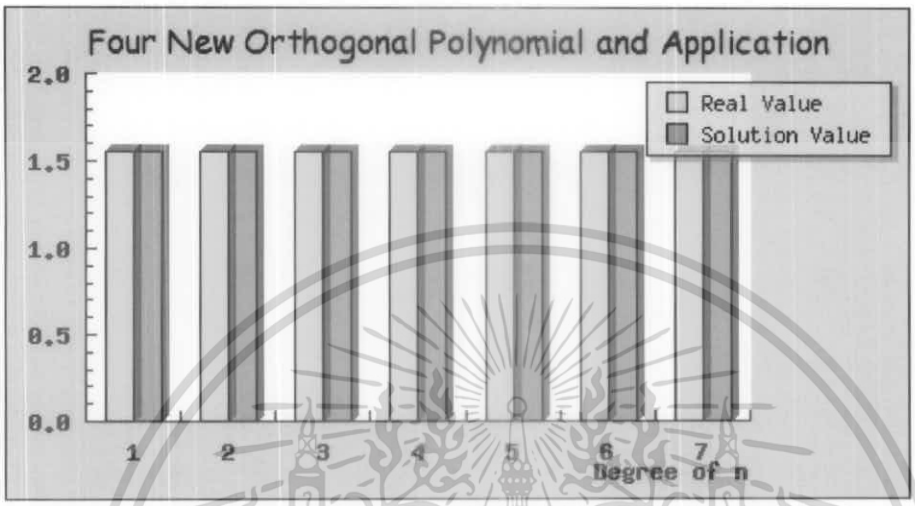
4. จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 4 ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบระหว่างค่าจริงและค่าที่คำนวณ โดยแสดงตั้งแต่ degree 1- degree 7



รูปที่ 4

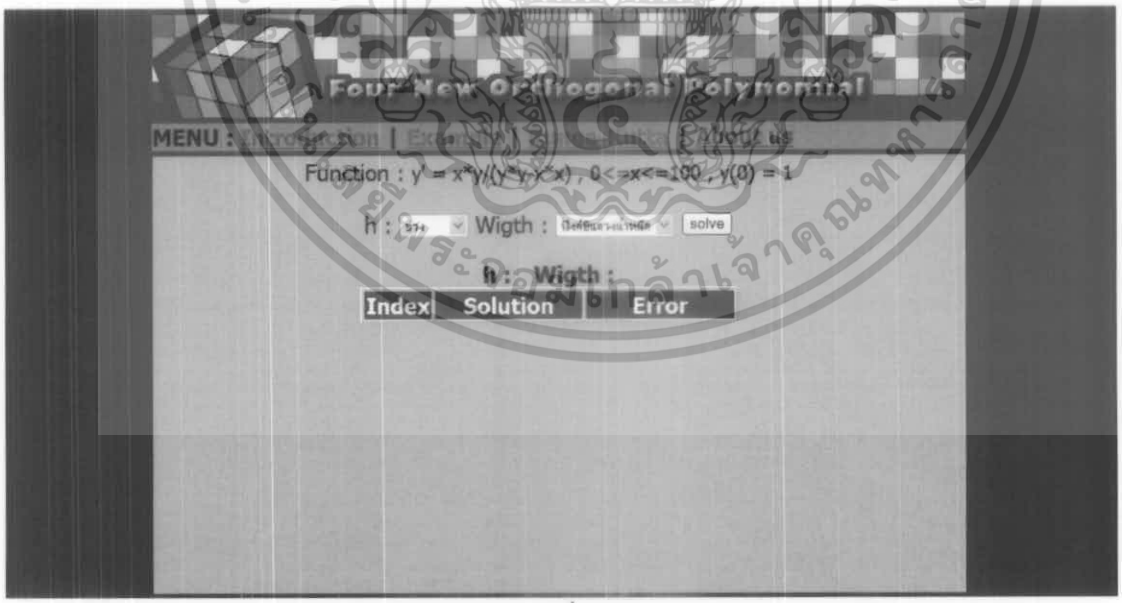
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5. จากรูปที่ 4 เมื่อกดตรง Graph จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 5 ซึ่งเป็นแผนภูมิแท่งเปรียบเทียบระหว่างค่าจริงและค่าที่คำนวณได้ โดยแกนตั้งแทนค่าคำตอบ และแกนนอนแทน degree



รูปที่ 5

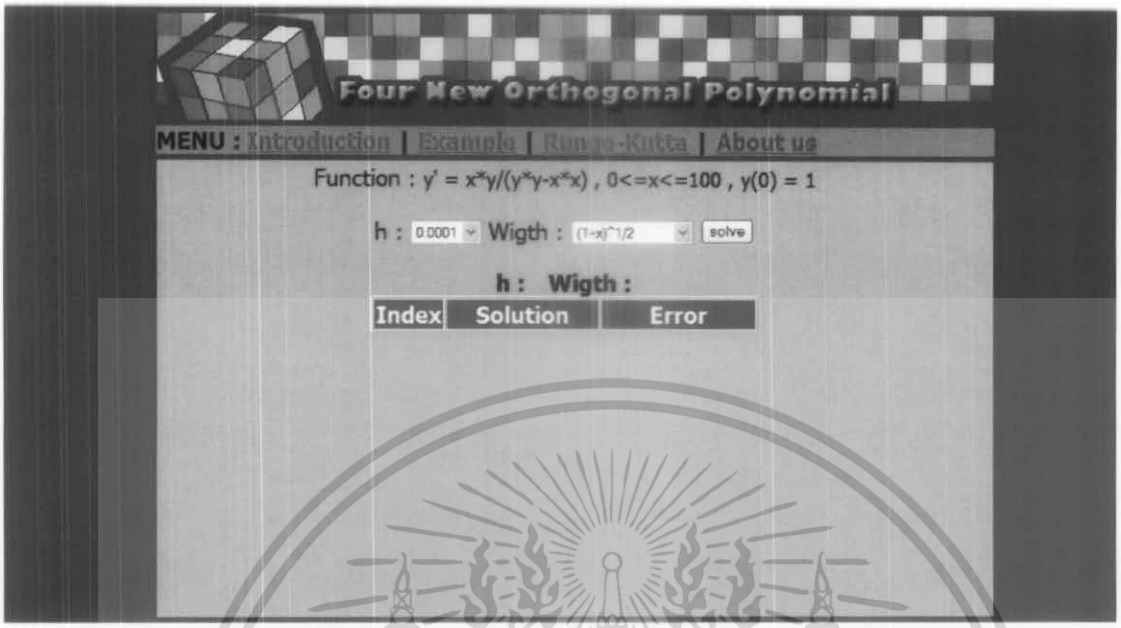
6. เมื่อกดตรง Runge-Kutta จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 6



รูปที่ 6

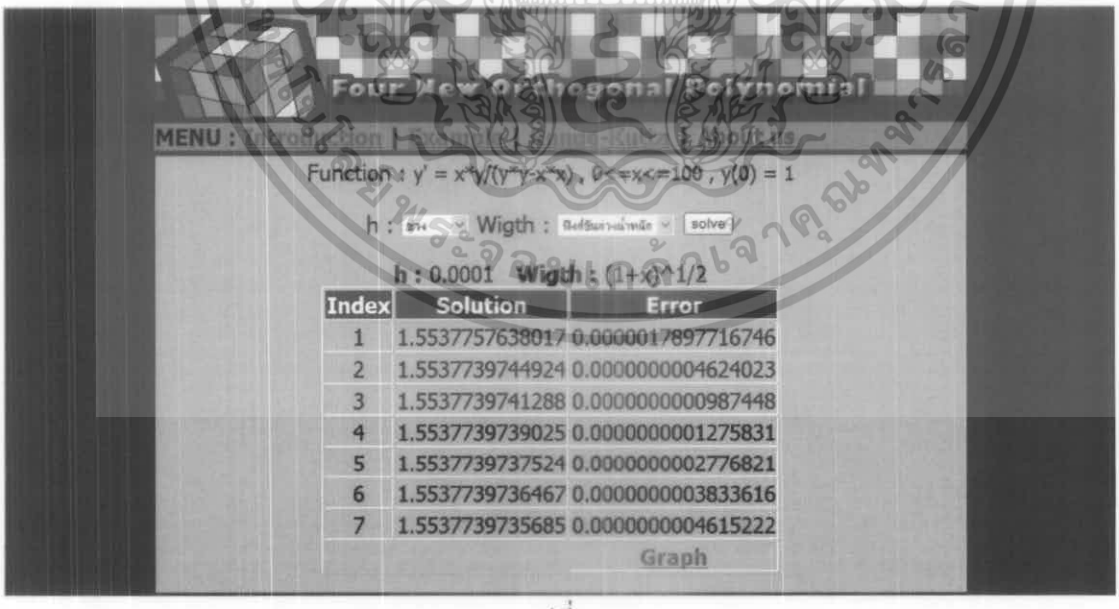
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

7. ให้เลือกช่วง(h)ที่ต้องการแบ่ง และฟังก์ชันถ่วงที่ต้องการ แล้วกดปุ่ม solve



รูปที่ 7

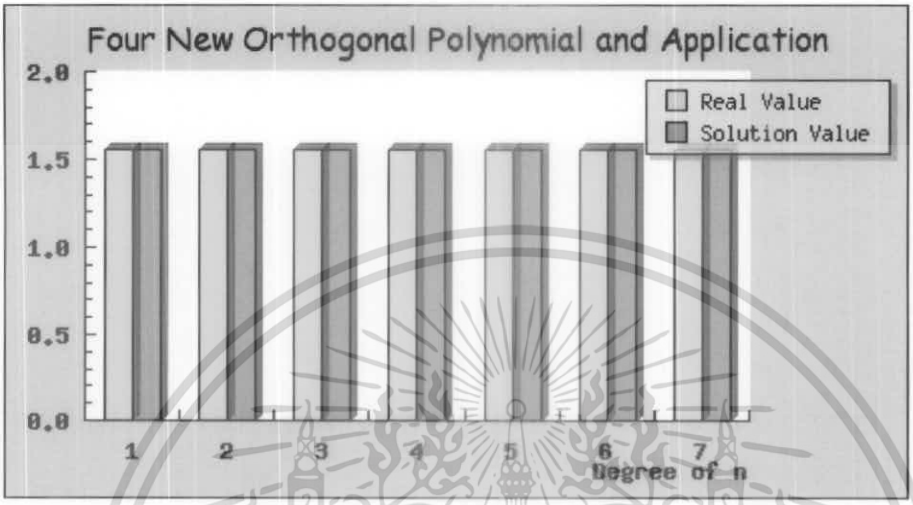
8. จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 8 ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบระหว่างค่าจริงและค่าที่คำนวณ โดยแสดงตั้งแต่ degree 1- degree 7



รูปที่ 8

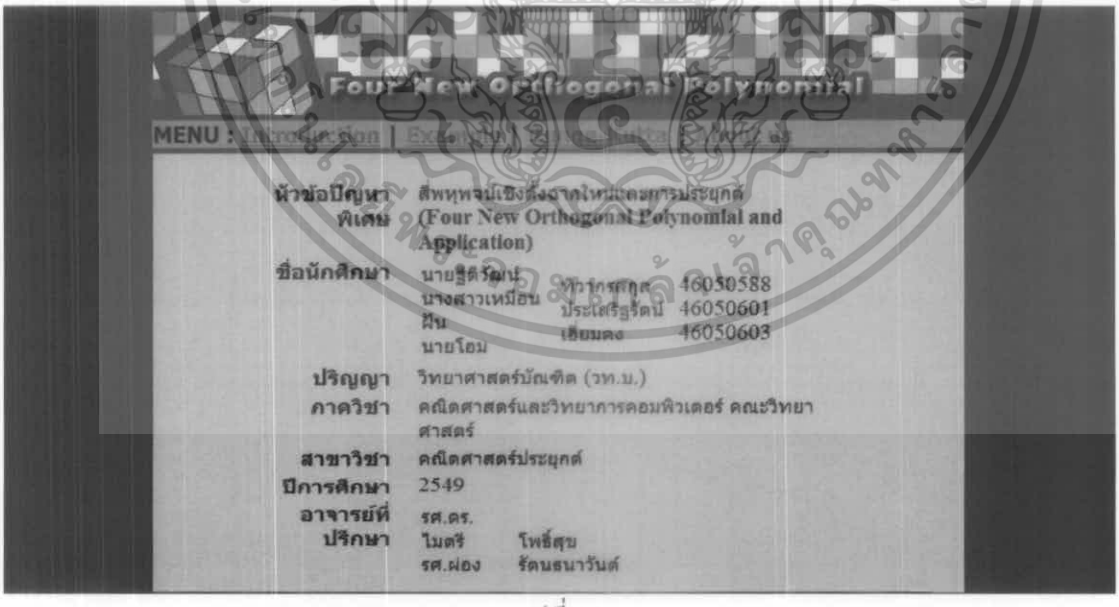
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

9. จากรูปที่ 8 เมื่อกดตรง Graph จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 10 ซึ่งเป็นแผนภูมิแท่งเปรียบเทียบระหว่างค่าจริงและค่าที่คำนวณได้ โดยแกนตั้งแทนค่าคำตอบ และแกนนอนแทน degree



รูปที่ 10

6. เมื่อกดตรง About us จะปรากฏหน้าจอดังรูปที่ 11 ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดเกี่ยวกับผู้จัดทำ



รูปที่ 11

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางศัพท์

คำศัพท์		หน้า
พหุนามเลอจองด์	Legendre	1
พหุนามจาโคเบียล	Jacobi	1
พหุนามเชฟบีเชพอันดับที่หนึ่ง	Chebyshev	1
พหุนามเชฟบีเชพอันดับที่สอง	Chebyshev	1
พหุนามลาแกร์	Laguerre	1
พหุนามเฮอร์มิท	Hermite	1
เกาส์-ควอดเดรเจอร์	Gaussian Quadrature	6
นิวตันโค้ช	Newton Code	7
เกาส์-ควอดเดรเจอร์	Gaussian Quadrature	21
ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา	Runge-Kutta Methods	25

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้