สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การพิสูจน์จัตุรัสกลแบบ IENR ขนาดไม่เกิน 3×3 และโปรแกรมหาผลเฉลยจัตุรัสกลแบบ IENR ไม่เกิน 4×4

PROOF AT MOST 3×3 IENR MAGIC SQUARE AND PROGRAM FOR SOLVING AT MOST 4×4 IENR MAGIC SQUARE

จิรวดี วิเศษเจริญ
เปรมจิต รัตนมาลัย
สาวิณี เลิศสงวนสินชัย

เลขหมู่.....
เลขทะเบียน 73337
วัน,เดือน,ปี 12 ก.ค. 2550

b 11290180
i.....

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2549

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

PROOF AT MOST 3×3 IENR MAGIC SQUARE AND PROGRAM FOR SOLVING AT MOST 4×4 IENR MAGIC SQUARE

JIRAWADI WISETCHAROEN
PRAMJIT RUTTANAMALAYA
SAVINEE LERTSANGUANSINCHAI

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2006

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การพิสูจน์ จัตุรัสกล IENR ขนาดไม่เกิน 3×3 และโปรแกรมหาผลเฉลยจัตุรัสกล IENR ไม่เกิน 4×4

PROOF AT MOST 3×3 IENR MAGIC SQUARE AND PROGRAM FOR SOLVING AT MOST 4×4 IENR MAGIC SQUARE

ชื่อนักศึกษา นางสาวจิรวดี วิเศษเจริญ 46050005

นางสาวเปรมจิต รัตนมาลัย 46050024

นางสาวสาวิณี เลิศสงวนสินชัย 46050036

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2549

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	อ.ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์	
กรรมการ	ผศ.ดร.ฉัฐไชย์ ลีนาวงศ์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

ลิขสิทธิ์ของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อปัญหาพิเศษ การพิสูจน์ จัตุรัสกล IENR ขนาดไม่เกิน 3×3 และโปรแกรมหาผลเฉลยจัตุรัสกล IENR ไม่เกิน 4×4

ชื่อนักศึกษา นางสาวจิรวดี วิเศษเจริญ 46050005
นางสาวเปรมจิต รัตนมาลัย 46050024
นางสาวสาวิณี เลิศสงวนสินชัย 46050036

ปริญญา วิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

ปีการศึกษา 2549

อาจารย์ที่ปรึกษา ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์

บทคัดย่อ

ในอดีต จัตุรัสกลที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายนั้นให้ความสนใจกับผลรวมของสมาชิกในแถว, สดมภ์ และแนวทแยง ที่มีค่าเท่ากันเท่านั้น เพื่อลดข้อจำกัดของจัตุรัสกลในแบบเดิม จึงได้มีการจัดทำปัญหาพิเศษนี้ขึ้นโดยความพิเศษของจัตุรัสกลแบบ IENR นี้คือ จัตุรัสกลที่มีคุณสมบัติ ไม่จำกัดค่าคงตัวกล (I – Infinite sum), ผลรวมของแต่ละแถว และผลรวมของแต่ละสดมภ์มีค่าเท่ากัน (E – Row sum and column sum are equal), จำนวนที่ใช้เป็นจำนวนเต็มบวก (N – Nonnegative integer) และ ในจัตุรัสกลมีเลขซ้ำได้ (R – Repetition of element in rows and columns) ซึ่งมีสมบัติต่างกับจัตุรัสกลที่รู้จักกัน

โดยปัญหาพิเศษนี้จะเป็นการพิสูจน์ จัตุรัสกลแบบ IENR ขอบเขตไม่เกิน 3×3 โดยจะใช้วิธีการวิเคราะห์เชิงการจัด (Combinatorial analysis) สำหรับเมทริกซ์ขนาด 4×4 นั้น เราใช้การสังเกตค่าที่เป็นไปไดทั้งหมด ซึ่งได้จากการวิเคราะห์และยืนยันผลที่ได้ด้วยการตรวจสอบจากโปรแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

In the past, widely-known magic squares were restricted to the equality of the

Special Project Title	PROOF AT MOST 3×3 IENR MAGIC SQUARE AND PROGRAM FOR SOLVING AT MOST 4×4 IENR MAGIC SQUARE	
Students	Miss Jirawadi Wisedcharoen	46050005
	Miss Pramjit Ruttanamalaya	46050024
	Miss Savinee Lertsanguansinchai	46050036
Degree	Bachelor of Science	
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science	
Programme	Applied Mathematics	
Academic Year	2006	
Special Project Advisor	Dr.Puntani Pongsumpun	

ABSTRACT

In the past, widely-known magic squares were restricted to the equality of the element in each row, column and diagonal. This special problem is studied to reduce old restrictions. We define the new special magic square, as IENR – I (Infinite sum), E (Rows sum and columns sum are equal), N (Nonnegative integer) and R (Repetition of element in rows and columns). The properties of this magic square are different from the well-known magic square.

In this study, the formulas for solving at most 3×3 IENR magic square are obtained by using combinatorial analysis. For 4×4 IENR magic square, we observe and analyze all possible values. These are confirmed by computer output.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กิตติกรรมประกาศ

ปัญหาพิเศษเรื่องการพิสูจน์จัตุรัสกล IENR ขนาดไม่เกิน 3×3 และโปรแกรมหาผลเฉลยจัตุรัสกล IENR ไม่เกิน 4×4 ประสบความสำเร็จไปได้ด้วยดีนั้น ทางคณะผู้จัดทำต้องขอกราบขอบพระคุณ ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์ อาจารย์ที่ปรึกษาของปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่คอยให้ความใส่ใจให้คำปรึกษาช่วยแก้ปัญหาต่างๆ และเป็นผู้ที่คอยตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้อยู่ตลอดมา

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำ ขอขอบพระคุณ คุณพ่อ คุณแม่ที่คอยเป็นกำลังใจ ที่ให้การสนับสนุนในการจัดทำปัญหาพิเศษนี้ และขอขอบคุณพี่ เพื่อน และน้อง ทุกๆคนที่มีส่วนช่วยเหลือคณะผู้จัดทำเสมอมา

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธ์ประสาทวิชาความรู้ให้แก่คณะผู้จัดทำและขอขอบคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่อำนวยความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติ การคอมพิวเตอร์

ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณทุกๆท่านที่อีกครั้งหนึ่ง ที่ช่วยเหลือ และให้กำลังใจ จนปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดี

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2550

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ II
กิตติกรรมประกาศ III
สารบัญ IV
สารบัญตาราง VII
สารบัญรูป VIII

บทที่ 1 บทนำ 1
1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา 1
1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา 1
1.3 ขอบเขตของปัญหา 1
1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 1
1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ 1

บทที่ 2 ความสำคัญและที่มาของปัญหา 3
2.1 จัตุรัสกลอักษร 3
2.1.1 จัตุรัสกลคำ 3
2.1.2 จัตุรัสกลละติน 3
2.2 จัตุรัสกลเลข 4
2.2.1 การจัดจำแนกจัตุรัสกล 4
2.3 ตัวคงค่ากล 5
2.4 ประวัติ ย่อ 7
2.5 จัตุรัสกลลู่ชู 8
2.6 จัตุรัสกลซี่โลกตะวันตก 9
2.7 จัตุรัสกล 4×4 ของดุเลอร์ 10
2.8 สมบัติของจัตุรัสกล 14
2.9 วิธีสร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยพีชคณิต 16
2.10 การเปลี่ยนจัตุรัสกลที่มีอยู่เป็นจัตุรัสกลอื่น 17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

2.11 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 18
2.12 วิธีสยาม (วิธีขั้นบันได) 18
2.13 วิธีทแยงมุม; วิธีจัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ลงตัว 21
2.14 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยพีชคณิต 21
2.15 วิธีพีระมิดสำหรับสร้างจัตุรัสกลอันดับคี่ 23
2.16 วิธีลักซ์; วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว 24
2.17 จัตุรัสกล 10×10 27
2.18 จัตุรัสกล 8×8 29
2.19 ปฏิจัตุรัสกล; ผลบวก 2 ช่องติดกันในแถว-สดมภ์มีค่าต่างกัน 29
2.20 ปฏิจัตุรัสกล; ผลบวกในแถว-สดมภ์-ทแยงมุมเป็นอนุกรม 30
2.21 จัตุรัสกล 5×5; ผลบวก 2 ช่องที่สมมาตรกับช่องศูนย์กลาง=26 31
2.22 จัตุรัสกล 6×6 32
2.23 จัตุรัสจีน 6×6 43
2.24 จัตุรัสกล 7×7 จัตุรัสตัดขอบ 33
2.25 จัตุรัสกล 5×5 34
2.26 จัตุรัสกลของเบนจามิน แฟรงคลิน 34
2.27 จัตุรัสกลของเรออนฮาร์ท ออยเลอร์ 39
2.28 จัตุรัสกล"พิเศษ" 41
2.29 เส้นกล 42
2.30 จัตุรัสละติน 43
2.31 จัตุรัสละติน 9×9 45
2.32 จัตุรัสละติน “กรณีเฉพาะ” 45

บทที่ 3 การพิสูจน์หาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR ขนาด 1×1, 2×2 และ 3×3 48
3.1 คุณสมบัติของจัตุรัสกลแบบ IENR 48
3.2 พิจารณาจำนวนเมตริกซ์ที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกล IENR 48
3.2.1 จัตุรัสกลแบบพิเศษ 1×1 48
3.2.2 จัตุรัสกลแบบพิเศษ 2×2 48

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญ(ต่อ)

หน้า

3.2.3 จัตุรัสกลแบบพิเศษ 3×3 48

บทที่ 4 การหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR ขนาด 4×4 59

4.1 เมทริกซ์ที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลแบบ "IENR" ขนาด 4×4 59

บทที่ 5 โปรแกรมและเกมส์หาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR 92

5.1 โปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR 92

5.1.1 ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR 92

5.1.2 คู่มือการใช้งานโปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR 92

5.1.3 ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม 96

5.2 เกมส์จัตุรัสกล IENR 101

5.2.1 วิธีการเล่นเกมส์ 101

บทที่ 6 สรุปผลการทำงาน 110

บรรณานุกรม 111

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

4.1 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อ $r = 1$ 64
4.2 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อ $r = 2$ 65
4.3 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อ $r = 3$ 73
4.4 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อ $r = 4$ 76

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

2.1 จัตุรัสกลคำ 3
2.2 จัตุรัสละติน 3
2.3 จัตุรัสละตินเลข 3×3 4
2.4 จัตุรัสละตินสัญลักษณ์ 4×4 4
2.5 จัตุรัสกลอันดับ 3 4
2.6 จัตุรัสกลอันดับ 4 4
2.7 ผลรวมของจัตุรัสกลอันดับ 3 5
2.8 จัตุรัสกล 4×4 5
2.9 จัตุรัสกล 5×5 6
2.10 จัตุรัสกล 6×6 6
2.11 จัตุรัสกล 7×7 6
2.12 จัตุรัสกล 4×4: *M*(4; 47, 6) 6
2.13 จัตุรัสกล ลู่ชู 7
2.14 จัตุรัสกลลู่ชูบนกระดองเต่า 8
2.15 จัตุรัสกลลู่ชู เงื่อน 9
2.16 จัตุรัสกลลู่ชู ปม 9
2.17 เยเว (Yehweh) ของชาวฮีบรู 9
2.18 เครื่องรางของชาวอิสลาม 10
2.19 จัตุรัสกล 4×4 จากภาพเขียนของดุเรอร์ 10
2.20 จัตุรัสกล 4×4 เลือกตัวเลขช่องกลาง 2 ช่องในแถวสุดท้าย 10
2.21 ผลบวกในแนวนอน แนวยืน และแนวทแยงมุม = 34 11
2.22 ภาพเขียนของ อัลเบิร์ด ดุเรอร์ (Albrecht Dürer) 11
2.23 จัตุรัสกล 4×4 ที่ผลบวกของเลข 4 จำนวนที่มุมทั้งสี่ = 34 11
2.24 จัตุรัสกล 4×4 ที่ผลบวกของเลข 4 จำนวนตรงกลาง = 34 12
2.25 จัตุรัสกล 4×4 ที่ผลบวกของเลข 4 จำนวนในแต่ละเสี้ยว = 34 12
2.26 จัตุรัสกล 4×4 ที่เลข 2 จำนวนที่ตรงกลางแถวบนกับแถวล่างบวกกันได้ 34 12
2.27 จัตุรัสกล 4×4 ที่เลข 2 จำนวนที่ตรงกลางสดมภ์แรกกับสดมภ์สุดท้ายบวกกันได้ 34 12
2.28 จัตุรัสกล 4×4 ที่นำจำนวนในด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมเส้นประมาบวกกันได้ 34 13

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

2.29 จัตุรัสกล 4×4 ที่ยกกำลังสองแต่ละจำนวน 13
2.30 ปฏิจัตุรัสกล 14
2.31 สมบัติของจัตุรัสกลอันดับ 3 15
2.32 สมบัติกลและกำลังสองของจัตุรัสกล 3×3 15
2.33 จัตุรัสกล 3×3 เลขโดดในแต่ละช่องมากกว่า 1 ตัว 16
2.34 สร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต(1) 16
2.35 สร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต(2) 16
2.36 สร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต(3) 17
2.37 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต 17
2.38 หนึ่งในสี่เสี้ยวของจัตุรัสกล 17
2.39 ตัวอย่างการเปลี่ยนจัตุรัสกลที่มีอยู่เป็นจัตุรัสกลอื่น 18
2.40 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล 4×4 18
2.41 แผนภาพแสดงวิธีสยามสำหรับจัตุรัสกล 3×3 20
2.42 แผนภาพแสดงวิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ลงตัว 21
2.43 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิต 21
2.44 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 2 22
2.45 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 3 22
2.46 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 4 22
2.47 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 4 23
2.48 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิต 23
2.49 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล สร้างจัตุรัสกล 3×3 วิธีพีระมิด 23
2.50 จัตุรัสกลอันดับคี่ 5×5 24
2.51 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 2 25
2.52 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 3 25
2.53 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 5 26
2.54 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 6 26
2.55 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 7 26
2.56 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 8 27

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

2.57 จัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ สมบูรณ์ 27
2.58 จัตุรัสกล 5×5 ตามวิธีสยาม 28
2.59 ตาราง L U X 28
2.60 จัตุรัสกล10×10 วิธีลักซ์ 28
2.61 จัตุรัสกล 8×8 ก 29
2.62 จัตุรัสกล 8×8 ข 29
2.63 ปฏิจัตุรัสกลผลบวกของสดมภ์ของเลข 2 ช่องติดกัน 30
2.64 ปฏิจัตุรัสกล 3×3 30
2.65 ปฏิจัตุรัสกล 4×4 30
2.66 ปฏิจัตุรัสกล 5×5 31
2.67 ปฏิจัตุรัสกล 6×6 31
2.68 ปฏิจัตุรัสกล 5×5 ผลบวก 2 ช่องที่สมมาตรกับช่องศูนย์กลาง 31
2.69 จัตุรัสกล 5×5 ผลบวกเท่ากับ 26 32
2.70 จัตุรัสกล 6×6 ผลบวกเท่ากับ 111 32
2.71 จัตุรัสกลจีน 33
2.72 จัตุรัสกล 7×7 มีตัวคงค่ากลเท่ากับ175 33
2.73 จัตุรัสกล 7×7 ตัดขอบ 33
2.74 จัตุรัสกล 5×5 ผลบวกเท่ากับ = 125 34
2.75 ตัวอย่างจัตุรัสกล 5×5 ตัดขอบ 34
2.76 จัตุรัสกลของเบนจามิน แฟรงคลิน 34
2.77 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = ผลบวกครึ่งแถวขวา 35
2.78 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง 35
2.79 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง 36
2.80 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่ของจัตุรัสกล 8×8 36
2.81 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่และที่ศูนย์กลาง 37
2.82 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่ของเสี้ยวผลบวก 37
2.83 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของ 16 จำนวนในเสี้ยวจัตุรัส 4×4 37
2.84 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของเลข 4 จำนวนในจัตุรัส 2×2 37

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

2.85 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของ 2 ช่องกลางแนวขอบแบบต่างๆ 38
2.86 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวก4 ช่องแบบ C คว่ำ แบบต่างๆ 38
2.87 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวก 4 ช่องแบบ C หงาย แบบต่างๆ 39
2.88 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ 39
2.89 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = ผลบวกครึ่งแถวขวา = 130 40
2.90 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง = 130 40
2.91 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกของ 16 จำนวนในเสี้ยวจัตุรัส 4×4 เท่ากับ 520 40
2.92 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกของเลข 4 จำนวนในจัตุรัส 2×2 เท่ากับ 130 41
2.93 จัตุรัสกลพิเศษ 3×3 43
2.94 จัตุรัสกลพิเศษ 3×3 ใหม่ 41
2.95 เส้นกลสำหรับ ลู่ ชู (Lo-Shu) 42
2.96 เส้นกลสำหรับจัตุรัสกลแบบต่างๆ 42
2.97 เส้นกลของจัตุรัสกล เบนจามิน แฟรงคลิน 42
2.98 เส้นกลของจัตุรัสกลกล เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ 43
2.99 จัตุรัสละติน 2×2 43
2.100 จัตุรัสละติน 3×3 43
2.101 จัตุรัสละติน 4×4 44
2.102 จัตุรัสละตินเชิงตั้งฉาก 44
2.103 จัตุรัสละติน 5×5 44
2.104 จัตุรัสละติน 6×6 44
2.105 จัตุรัสละติน 9×9 45
2.106 จัตุรัสละติน กรณีเฉพาะ 3×3 45
2.107 ตัวอย่างจัตุรัสละติน กรณีเฉพาะ 9×9 46
2.108 จัตุรัสละติน กรณีเฉพาะ 9×9 46
2.109 จัตุรัสละติน 12×12 47
2.110 จัตุรัสละติน 16×16 47
3.1 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 2×2 48
3.2 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 3×3 49

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สารบัญรูป(ต่อ)

รูปที่ **หน้า**

4.1 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 4×4 59
5.1 หน้าจอเริ่มต้นโปรแกรม 92
5.2 หน้าจอแสดงรายละเอียดผู้จัดทำ 92
5.3 หน้าจอแสดงการคำนวณ 93
5.4 หน้าจอแสดงข้อความเมื่อใส่ค่าผิด 93
5.5 หน้าจอคู่มือการใช้งานโปรแกรม 94
5.6 หน้าจอเพิ่มเติม (1) 95
5.7 หน้าจอเพิ่มเติม (2) 95
5.8 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 1 96
5.9 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 2 97
5.10 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 3 98
5.11 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 4 99
5.12 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่5 100
5.13 หน้าจอเมนูหลัก 101
5.14 หน้าจอกรอกชื่อ 102
5.15 หน้าจอประตู Classic 102
5.16 หน้าจอเกมส์ level 1 103
5.17 หน้าจอเกมส์ level 2 104
5.18 หน้าจอเกมส์ level 3 104
5.19 หน้าจอเกมส์ level 4 105
5.20 หน้าจอ Password 105
5.21 หน้าจอหลัก (Hero Modeถูกปลดล็อค) 106
5.22 หน้าจอกรอก Password 106
5.23 หน้าจอประตู HERO 107
5.24 หน้าจอ HERO 107
5.25 หน้าจอเกมส์ level 1(Hero Mode) 108
5.26 หน้าจอเกมส์ level 3 (Hero Mode) 109
5.27 หน้าจอ GAME OVER 109

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

เนื่องจากในปัจจุบันการพิสูจน์จัตุรัสกลเป็นการพิสูจน์แบบเก่า และมีข้อจำกัดในการหาผลเฉลยอยู่หลายอย่าง และยังไม่มีโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณหาคำตอบที่เป็นไปได้ในทุกๆกรณีของจัตุรัสกลขนาด 1×1, 2×2 , 3×3 และ 4×4 ดังนั้นจึงสนใจที่จะศึกษาการพิสูจน์จัตุรัสกลแบบใหม่ของจัตุรัสกลขนาดไม่เกิน 4×4 ที่สามารถหาผลเฉลยได้กว้างกว่าแบบที่มีอยู่ในปัจจุบันและโปรแกรม เพื่อความสะดวกในการคำนวณหาค่าคำตอบที่เป็นไปได้

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 พิสูจน์การหาคำตอบที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลขนาด1×1, 2×2, 3×3 และ 4×4 แบบIENR ที่มีผลรวมไม่จำกัด

1.2.2 สร้างโปรแกรมในการคำนวณหาคำตอบที่เป็นไปได้ในทุกกรณีของจัตุรัสกลขนาด 1×1, 2×2, 3×3 และ 4×4

1.2.3 เพื่อความสะดวกต่อการคำนวณหาคำตอบ และเป็นคำตอบที่มีความถูกต้องแม่นยำ

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการพิสูจน์และโปรแกรมหาผลเฉลยที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกล

1.3.1 พิสูจน์และสร้างโปรแกรมคำนวณหาคำตอบในทุกๆกรณีที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลแบบ IENR ขนาดไม่เกิน 1×1, 2×2 และ 3×3

1.3.2 สร้างโปรแกรมคำนวณหาคำตอบในทุกๆกรณีที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลแบบ IENRขนาดไม่เกิน 4×4

1.3.3 นำผลเฉลยที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลแบบ IENR ขนาดไม่เกิน 4×4 มาทำเป็นเกมส์

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ผลการศึกษานี้นอกจากจะได้ทราบถึงการพิสูจน์แบบใหม่ที่ยังไม่มีในปัจจุบันแล้ว ยังจะมีโปรแกรมอำนวยความสะดวกในการคำนวณจัตุรัสกลขนาด 1×1, 2×2, 3×3 และ 4×4 ที่เป็นไปได้ และแม่นยำถูกต้อง นอกจากนั้นยังสามารถนำจัตุรัสกลแบบ IENRไปพัฒนาเป็นเกมส์ได้

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินการ

1.5.1 ศึกษาความหมายของจัตุรัสกลจากหนังสือและเอกสารอ้างอิงต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1.5.2 ศึกษาความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องการวิเคราะห์เชิงการจัด (Combinatorial Analysis)

1.5.3 พิสูจน์หาผลเฉลยของจัตุรัสกลแบบ IENR

1.5.4 ศึกษาภาษา Visual basic เพื่อนำไปสร้างโปรแกรมหาผลเฉลย

1.5.5 สร้างโปรแกรม

1.5.6 ทดสอบและแก้ไขโปรแกรมที่สร้างขึ้นมาให้มีประสิทธิภาพ

1.5.7 จัดทำเอกสารประกอบการพิสูจน์และทำโปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

1.5.8 นำไปพัฒนาเป็นเกมส์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2
ความสำคัญและที่มาของปัญหา

จัตุรัสกล

จัตุรัสกล คือ เมตริกซ์ที่มีแถวและสดมภ์ของตัวเลขหรืออักษรที่แตกต่างกัน : A, B, C ... หรือจำนวนบวกที่แตกต่างกัน : 1,2, ... n^2 บรรจุอยู่ในตารางจัตุรัสที่กำหนดให้ช่องละ 1 ตัว โดยไม่ซ้ำกันทั้งในแถวและสดมภ์ แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ 1. จัตุรัสกลอักษร 2. จัตุรัสกลเลข

2.1 จัตุรัสกลอักษร

มี 2 แบบ คือ จัตุรัสคำ และจัตุรัสละติน

2.1.1 จัตุรัสคำ

จัตุรัสคำอันแรก ๆ ประกอบด้วยชุดอักษร(ละติน) ที่จัดไว้ในตารางจัตุรัสเพื่อให้สะกดเป็นคำต่าง ๆ อันหนึ่งที่รู้จักกันดีในซีกโลกตะวันตก คือ ตารางทางขวามือนี้

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

รูปที่ 2.1 จัตุรัสกลคำ

พึงสังเกตว่า คำละติน 5 คำปรากฏในอันดับเดียวกันทั้งแนวนอนและแนวยืน คำในแถวทั้งห้าอ่านแบบแพลินโดรมได้ – อ่านเป็นคำได้ทั้งจากซ้ายไปขวาและจากขวามาซ้าย และยังประกอบกันเป็นประโยคอีกด้วย – "Arepo, the sower, guides the wheel at work."

ประชาชนบางหมู่เหล่าพากันคิดว่าเรื่องนี้มีนัยสำคัญต่อศาสนาคริสต์เท่านั้นเพราะประกอบด้วยคำ "pater noster" ซึ่งหมายถึง "บิดาของเรา" รวมกับอักษร "α " และ "ω"ซึ่งเป็นอักษรกรีก *แอลฟา* และ *โอเมกา* ที่ใช้หมายถึงพระเจ้า

2.1.2 จัตุรัสละติน

ปกติใช้อักษร "*n*" เซตเมื่อ *n* คือ จำนวนตารางสี่เหลี่ยมในแต่ละแถวและสดมภ์ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส โดยจัดให้อักษรแต่ละแถวและสดมภ์ไม่ซ้ำกัน

ถ้าอักษรบนด้านทแยงมุมทั้งสองไม่ซ้ำกันอีกด้วย เรียกว่า **จัตุรัสทแยงมุม** ดังตัวอย่างที่แสดงไว้ข้างล่าง

M	A	G	I	C
G	I	C	M	A
C	M	A	G	I
A	G	I	C	M
I	C	M	A	G

รูปที่ 2.2 จัตุรัสละติน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัตุรัสละดินอาจใช้ตัวเลข หรือสัญลักษณ์อื่นก็ได้ เช่น เครื่องหมายคณิตศาสตร์ เครื่องหมายถนน ดังตัวอย่างข้างล่างนี้

1	2	3
2	3	1
3	1	2

รูปที่ 2.3 จัตุรัสละดินเลข 3×3

+	-	×	÷
÷	+	-	×
×	÷	+	-
-	×	÷	+

รูปที่ 2.4 จัตุรัสละดินสัญลักษณ์ 4×4

2.2 จัตุรัสกลเลข

จัตุรัสกลเลขเป็นจัตุรัสที่น่าสนใจมากกว่า เพราะสมบัติคณิตศาสตร์ของจัตุรัสกลทั้งนี้ เป็นเพราะจัตุรัสกลเลขต้องประกอบด้วยอนุกรมของตัวเลขที่จัดเรียงในจัตุรัสในลักษณะที่ผลบวกของแต่ละแถว แต่ละสดมภ์ และแนวทแยงมุมทั้งสอง มีค่าเท่ากัน ซึ่งเรียกว่า **ตัวคงค่ากล** ตัวอย่างของจัตุรัสกลอันดับ 1, อันดับ 2 ไม่มี, อันดับ 3 ถึง 7 ได้แสดงไว้ในหัวข้อตัวคงค่ากล

ต่อไปจะเรียกจัตุรัสกลเลขว่า "จัตุรัสกล" โดยละ "เลข" ไว้ในฐานที่เข้าใจ.

2.2.1 การจัดจำแนกจัตุรัสกล

อันดับของจัตุรัสกลมีนิยามตามจำนวนแถวและสดมภ์ เช่น จัตุรัสกลอันดับ 3 เพราะมี 3 แถวและ 3 สดมภ์

8	1	6
3	5	7
4	9	2

รูปที่ 2.5 จัตุรัสกลอันดับ 3

และ จัตุรัสกลอันดับ 4 เพราะมี 4 แถวและ 4 สดมภ์

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.6 จัตุรัสกลอันดับ 4

จึงจำแนกชนิดของจัตุรัสกลได้ดังนี้

2.2.1.1 **จัตุรัสกลอันดับคี่** เช่น จัตุรัสกล 3×3, 5×5, 7×7, ...

2.2.1.2 **จัตุรัสกลอันดับคู่** แบ่งย่อยออกเป็น 2 ชนิด คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1) จัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว หมายความว่า จำนวนช่องสี่เหลี่ยมในแต่ละแถวหรือแต่ละสดมภ์หารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว เช่น จัตุรัสกล 6×6 และจัตุรัสกล 10×10 เป็นต้น

2) จัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ลงตัว หมายความว่า จำนวนช่องสี่เหลี่ยมในแต่ละแถวหรือแต่ละสดมภ์หารด้วย 4 ลงตัว เช่น จัตุรัสกล 4×4 และจัตุรัสกล 8×8 เป็นต้น.

2.3 ตัวคงค่ากล

ดังที่กล่าวมาแล้วว่า **จัตุรัสกล** คือ แถวลำดับของจำนวนบวกที่แตกต่างกัน $1,2,\ldots n^2$ ในจัตุรัสซึ่งจัดให้ผลบวกของเลข n จำนวนในแต่ละแถว, สดมภ์และทแยงมุม มีค่าเท่ากัน ค่า n คือ อันดับของจัตุรัสกล ผลบวกเท่ากันนี้เรียกว่า ตัวคงค่ากล หรือ ผลบวกกล $M(n)$* โดยที่

$$M(n) = \frac{1}{n}(1+2+3+\ldots+n^2) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2} k = \frac{1}{n}\left(\frac{n^2(n^2+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{n}n(n^2+1) = 0.5(n)(n^2+1)$$

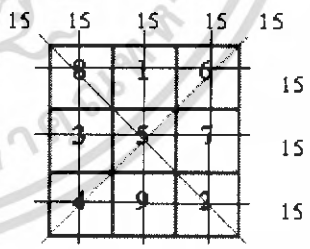
ถ้าลบทุกจำนวนในจัตุรัสกลด้วย n^2+1 จะได้จัตุรัสกลอื่นซึ่งเรียกว่า **จัตุรัสกลเติมเต็ม** (complementary magic square) จัตุรัสกลที่ประกอบด้วยเลขเรียงลำดับจาก 1 ถึง n^2 เรียกว่า จัตุรัสกลปกติ (normal magic square)

- จัตุรัสกลง่ายสุด คือ จัตุรัสกลอันดับ 1 - จัตุรัสกล 1×1 มีเลขตัวเดียว คือ 1
- **ไม่มี**จัตุรัสกลอันดับ 2 เพราะทำไม่ได้ตามนิยาม
- **จัตุรัสกลอันดับ** 3

ตัวคงค่ากล = $0.5(3)(3^2+1)$

= $0.5(3)(10)$

= 15



รูปที่ 2.7 ผลรวมของจัตุรัสกลอันดับ 3

จัตุรัสกลอันดับ 4 - - **จัตุรัสกล** 4×4 ตัวคงค่ากล = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.8 จัตุรัสกล 4×4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัตุรัสกลอันดับ 5 - - **จัตุรัสกล 5×5** ตัวคงค่ากล = 65

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

รูปที่ 2.9 จัตุรัสกล 5×5

จัตุรัสกลอันดับ 6 - - **จัตุรัสกล 6×6** ตัวคงค่ากล = 111

32	29	4	1	24	21
30	31	2	3	22	23
12	9	17	20	28	25
10	11	18	19	26	27
13	16	36	33	5	8
14	15	34	35	6	7

รูปที่ 2.10 จัตุรัสกล 6×6

จัตุรัสกลอันดับ 7 - - **จัตุรัสกล 7×7** ตัวคงค่ากล = 175

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

รูปที่ 2.11 จัตุรัสกล 7×7

ตัวคงค่ากล สำหรับจัตุรัสกลอันดับ n ที่เริ่มต้นด้วยจำนวนเต็ม a และจำนวนต่าง ๆ เพิ่มขึ้นอย่างก้าวหน้าเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม d คือ

$$M(n; a, d) = 0.5n[2a + d(n^2 - 1)]$$

เช่น จัตุรัสกล 4×4 ทางขวามือ จะได้

$$M(4; 47, 6) = 0.5(4)[2(47) + 6(4^2 - 1)]$$

$$= 368$$

113	77	83	95
47	131	125	65
119	59	53	137
89	101	107	71

รูปที่ 2.12 จัตุรัสกล 4×4: $M(4; 47, 6)$

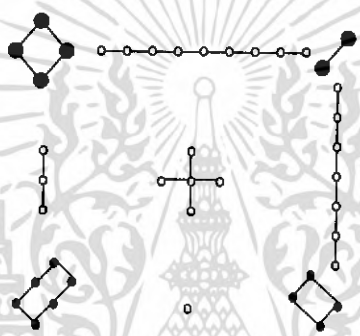
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จัตุรัสกลใดที่ผลบวกแนวทแยงมุมหนึ่งแนวหรือทั้งสองแนวมีค่าไม่เท่ากับตัวคงค่ากล เรียกว่า เซมิเมจิกสแควร์ (semimagic square) – *กึ่งจัตุรัสกล* ถ้าผลบวกทั้งแนวนอน, แนวยืน และแนวทแยงมุม ไม่เท่ากับตัวคงค่ากล เรียกว่า แอนติเมจิกสแควร์ (antimagic square) - *ปฏิจัตุรัสกล* จัตุรัสกลที่เกิดจากการคูณ แทนที่จะเป็นการบวก เรียกว่า มัลติพลิเคชันเมจิกสแควร์ (multiplication magic square) - *จัตุรัสกลการคูณ* นอกจากนี้ จัตุรัสกลที่เกิดจากการบวกและการคูณ เรียกว่า แอดดิชันมัลติพลิเคชันเมจิดสแควร์ (addition-multiplication magic square) – *จัตุรัสกลการบวก -การคูณ*

2.4 ประวัติย่อ

จัตุรัสกลมีการค้นพบตามแหล่งต่าง ๆ คือ

o ในจีนนับย้อนหลังไป 2,800 ปีก่อนคริสต์ศักราช พบจัตุรัสกลในภาษาจีนว่าลู่ซู ดังรูปข้างล่าง



รูปที่ 2.13 จัตุรัสกล ลู่ซู

o ในข้อเขียนกรีกย้อยหลังไป 1,300 ปีก่อนคริสต์ศักราช

o ผลงานของ Theon of Smyrna เมื่อ พ.ศ. 673

o โหรอาหรับนำมาใช้ในคริสต์ศตวรรษที่ 9

o วรรณคดีอาหรับที่เขียนโดย อับบราฮัม เบน เอสรา (Abrahum ben Ezra) ในคริสต์ศตวรรษที่ 11

o ในอินเดียย้อนหลังไปถึงคริสต์ศตวรรษที่ 11 หรือ 12 พบจัตุรัสกลอันดับ 4 เป็นครั้งแรกในคาจุราโฮ (Khajuraho)

o งานเขียนของนักคณิตศาสตร์กรีก, เอมมานูเอล มอสโคปูลัส (Emanuel Moschopulus) ซึ่งผลงานของเขาขณะนี้อยู่ที่ห้องสมุดแห่งชาติฝรั่งเศส

o พบจัตุรัสกลในวรรณคดีจีนหลังสมัยราชวงศ์ ฉู(Chou, พ.ศ.1494 - พ.ศ.1669) หรือสมัยเริ่มต้นราชวงศ์ ซุง (Sung, พ.ศ.1670 - พ.ศ.1876)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

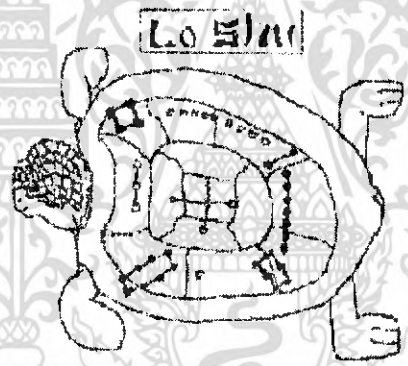
o ผลงานของ คอเนลเลียส อกริปปา (Cornelius Agrippa), แพทย์และนักเทววิทยาชาวเยอรมันได้สร้างจัตุรัสกล อันดับ 3 ถึง 9 เป็นจำนวน 7 อันด้วยกัน ซึ่งเขาโยงไปสัมพันธ์กับดาวเคราะห์ 7 ดวงที่รู้จักกันแล้วในสมัยนั้น (รวมทั้งดวงอาทิตย์และดวงจันทร์)

o ในงานศิลปะที่รู้จักกันดี คือ จัตุรัสกลที่เป็นภาพแกะสลักของ ดุเรอร์(Düere) เขาแกะสลักในปี ค.ศ.1514

o งานละเอียดของจัตุรัสกลฝรั่งเศสตีพิมพ์ในปี พ.ศ.2381.

2.5 จัตุรัสกลลู่ชู

จัตุรัสกลเป็นสิ่งน่าทึ่งของมนุษยชาติมานานหลายศตวรรษ สมัยโบราณถูกนำไปเกี่ยวโยงกับเรื่องนอกเหนือธรรมชาติในทำนองเวทมนตร์ มีการขุดค้นพบในเมืองต่าง ๆ ในทวีปเอเชีย จัตุรัสกลแรกสุดเขียนไว้บนกระดองเต่า (รูป 2.12) เมื่อราว 2,800 ปีก่อนคริสต์ศักราช ชื่อว่า ลู่ ชู (Lu Shu) มีนิทานเล่าไว้ในหนังสือ **อี้จิง** (Yih King) ว่า พบโดยจักรพรรดิ **หยู** (Yu) บนฝั่งแม่น้ำเหลือง มีการนำมาเขียนเป็นรหัสดังรูปที่ 2.14, 2.15 และรูปที่ 2.16

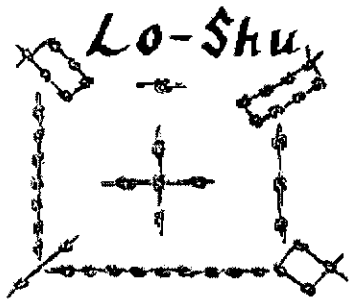


รูปที่ 2.14 จัตุรัสกลลู่ชูบนกระดองเต่า

เรื่อง ลู่ ชู มีตำนานกล่าวขานว่า ประเทศจีนสมัยโบราณ มีน้ำท่วมอย่างใหญ่หลวงทุกปี ประชาชนพยายามทำพิธีเซ่นไหว้ "จ้าวแม่น้ำ" ต่อแม่น้ำที่ล้นท่วมสองฝั่งเป็นประจำทุกปี แม่น้ำสายหนึ่ง คือ แม่น้ำลู่ ทั้งนี้เพื่อให้จ้าวแม่น้ำสงบและลดความรุนแรงลง อย่างไรก็ตาม เมื่อทำการตั้งโต๊ะหมู่บูชาทุกครั้งจะมีเต่าคลานขึ้นมาจากแม่น้ำ แล้วคลานไปรอบๆโต๊ะหมู่บูชา เลยพากันเชื่อว่าจ้าวแม่น้ำไม่ยอมรับการเซ่นไหว้นี้ จนกระทั่งอยู่มาวันหนึ่ง เด็กคนหนึ่งเฝ้าสังเกตรูปบนกระดองเต่าด้วยความอยากรู้อยากเห็น ด้วยข้อสังเกตนี้ทำให้รู้จำนวนที่ถูกต้องของโต๊ะหมู่บูชาว่า คือ 15

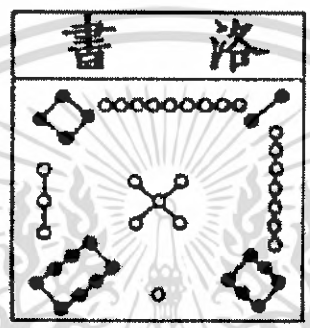
อนึ่ง คำว่า ชู (shu) หมายถึง คัมภีร์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.15 จัตุรัสกลลู่ชู เงื่อน

เงื่อนทึบแทนจำนวนคู่ เงื่อนโปร่งแทนจำนวนคี่ ตัวคงค่ากลของจัตุรัสกลนี้คือ 15



รูปที่ 2.16 ปม

ปมทึบแทนจำนวนคู่ ปมโปร่งแทนจำนวนคี่ ตัวคงค่ากลของจัตุรัสกลนี้คือ 15

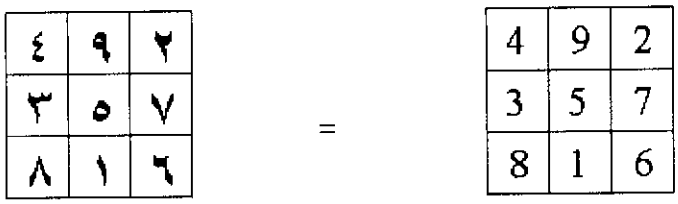
2.6 **จัตุรัสกลในซีกโลกตะวันตก**

ในซีกโลกตะวันตก มีการกล่าวถึงจัตุรัสกลเมื่อ พ.ศ.673 ซึ่งเป็นผลงานของ Theon of Smyma ในคริสต์ศตวรรษที่ 9 จัตุรัสคลีบคลานเข้าไปในวงการโหราศาสตร์โดยนักโหราศาสตร์อาหรับใช้ในการผูกดวง ในที่สุดจัตุรัสกลและสมบัติของจัตุรัสกลได้เผยแพร่เข้าไปยังซีกโลกตะวันตก โดยเฉพาะในช่วงการฟื้นฟูศิลปะวิทยาในยุโรประหว่างคริสต์ศตวรรษที่ 14 ถึง 16 โดยนักคณิตศาสตร์กรีก ชื่อ เอมมานูเอล มอสโคปูลัส (Emanuel Moschopulus) เมื่อพ.ศ.1843

นอกจากนี้ ยังพบจัตุรัสกลเป็นเครื่องรางของขลัง เช่น ชาวฮีบรูใช้ตัวเลขของความหัศจรรย์เป็นสิ่งศักดิ์สิทธิ์ เรียกว่า เยเว (Yehweh) และชาวอิสลามใช้เป็นเครื่องรางของขลังเช่นกัน ส่วนชาวทิเบตใช้เป็นสัญลักษณ์ในดราประทับ

รูปที่ 2.17 เยเว (Yehweh) ของชาวฮีบรู

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.18 เครื่องรางของชาวอิสลาม
จัตุรัสกล 3×3 ที่อยู่ตรงศูนย์กลางของตราประทับของทิเบตโบราณ

2.7 จัตุรัสกล 4×4 ของดุเรอร์

รูปที่ 2.22 คือ ภาพเขียนของดุเรอร์ (Albrecht Dürer) ชื่อ เมเลนโคเลีย (Melencolia) ปัจจุบันอยู่ในพิพิธภัณฑ์ของอังกฤษ (รูปที่ 2.22)ให้สังเกตที่มุมขวาบน ปรากฏจัตุรัสกล 4×4 มีตัวเลขดังนี้

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.19 จัตุรัสกล 4×4 จากภาพเขียนของดุเรอร์

ตัวคงค่ากล = $0.5(4)(4^2 + 1)$ = 34

ความน่าทึ่งของตัวเลขใน เมเลนโคเลีย (Melencolia) คือ

1. ตัวเลขช่องกลาง 2 ช่องในแถวสุดท้าย 1514 คือ ปี ค.ศ. ที่วาดภาพนี้

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.20 จัตุรัสกล 4×4 เลือกตัวเลขช่องกลาง 2 ช่องในแถวสุดท้าย

2. ผลบวกในแนวนอน แนวยืน และแนวทแยงมุม = 34 เช่น

แนวนอน แถวแรก : 16 + 3 + 2 + 13 = 34

แนวยืน สดมภ์แรก : 16 + 5 + 9 + 4 = 34

แนวทแยงมุม : 16 + 10 + 7 + 1 = 34; 4 + 6 + 11 + 13 = 34

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.21 จัตุรัสกล 4×4 ผลบวกในแนวนอน = 34

รูปที่ 2.22 ภาพเขียนของ อัลเบิร์ด ดุเรอร์ (Albrecht Dürer) ชื่อ เมเลนโคเลีย (Melencolia)

3. ผลบวกของเลข 4 จำนวนที่มุมทั้งสี่ = 34: 16 + 13 + 1 + 4 = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.23 จัตุรัสกล 4×4 ที่ผลบวกของเลข 4 จำนวนที่มุมทั้งสี่ = 34

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. ผลบวกของเลข 4 จำนวนตรงกลาง = 34: 10 + 11 + 7 + 6 = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.24 จัตุรัสกล 4×4 ที่ผลบวกของเลข 4 จำนวนตรงกลาง = 34

5. แบ่งจัตุรัสออกเป็น 4 เสี้ยวเท่า ๆ กัน จะได้ผลบวกของเลข 4 จำนวนในแต่ละเสี้ยว = 34:

16 + 3 + 10 + 5 = 34, 2 + 13 + 8 + 11 = 34

9 + 6 + 15 + 4 = 34, 7 + 12 + 1 + 14 = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.25 จัตุรัสกล 4×4 ที่ผลบวกของเลข 4 จำนวนในแต่ละเสี้ยว = 34

6. เลข 2 จำนวนที่ตรงกลางแถวบนกับแถวล่าง รวมเป็น 4 จำนวน บวกกันได้ 34: 3+2+15+14 = 34

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.26 จัตุรัสกล 4×4 ที่เลข 2 จำนวนที่ตรงกลางแถวบนกับแถวล่างบวกกันได้ 34

7. เลข 2 จำนวนที่ตรงกลางสดมภ์แรกกับสดมภ์สุดท้าย รวมเป็น 4 จำนวนบวกกันได้

34: 5 + 9 + 8 + 12 = 34

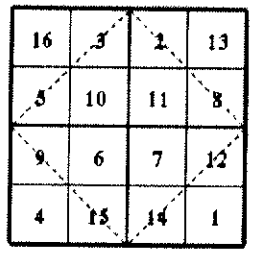
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

รูปที่ 2.27 จัตุรัสกล 4×4 ที่เลข 2 จำนวนที่ตรงกลางสดมภ์แรกกับสดมภ์สุดท้ายบวกกันได้ 34

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. จำนวนตามเส้นประโดยนำจำนวนในด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมเส้นประมาบวกกันได้ 34:

$$5 + 3 + 12 + 14 = 34, \quad 2 + 8 + 15 + 9 = 34$$



รูปที่ 2.28 จัตุรัสกล 4×4 ที่นำจำนวนในด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมเส้นประมาบวกกันได้ 34

9. เมื่อเวียนตามเข็มนาฬิกาไปรอบจัตุรัสและเลือกตัวเลขถัดจากที่มุม กล่าวคือเลือก 3, 8, 14, 9 ซึ่งจะบวกกันได้ 34: $3 + 8 + 14 + 9 = 34$ และยังเป็นจริงเมื่อเวียนทวนเข็มนาฬิกาอีกด้วย:
$5 + 15 + 12 + 2 = 34$

10. เมื่อยกกำลังสองแต่ละจำนวน

พิจารณา

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

แล้วจะได้ว่า

256	9	4	169
25	100	121	64
81	36	49	144
16	225	196	1

รูปที่ 2.29 จัตุรัสกล 4×4 ที่ยกกำลังสองแต่ละจำนวน

เมทริกซ์ข้างบนนี้ไม่เป็นจัตุรัสกล แต่ก็มีคุณสมบัติบางประการที่น่าสนใจยิ่ง คือ

10.1 ผลบวกของจำนวนในแถวแรกเท่ากับผลบวกของจำนวนในแถวท้าย

$$256 + 9 + 4 + 169 = 438 = 16 + 225 + 196 + 1$$

10.2 ผลบวกของจำนวนในแถวสองเท่ากับผลบวกของจำนวนในแถวสาม

$$25 + 100 + 121 + 64 = 310 = 81 + 36 + 49 + 144$$

10.3 ผลบวกของจำนวนในสดมภ์แรกเท่ากับผลบวกของจำนวนในสดมภ์ท้าย

$$256 + 25 + 81 + 16 = 378 = 169 + 64 + 144 + 1$$

10.4 ผลบวกของจำนวนในสดมภ์สองเท่ากับผลบวกของจำนวนในสดมภ์สาม

$$9 + 100 + 36 + 255 = 370 = 4 + 121 + 49 + 196$$

10.5 จาก 10.1 ถึง 10.2 จะได้ว่า ครึ่งซีกซ้ายของจัตุรัสมีผลบวกเท่ากันครึ่งซีกขวา และเท่ากับครึ่งหนึ่งของผลบวกทั้งหมด:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ครึ่งซีกซ้าย: (256 + 25 + 81 + 16) + (9 + 100 + 36 + 225) = 378 + 370 = 748

ครึ่งซีกขวา: (4 + 121 + 49 + 196) + (169 + 64 + 144 + 1) = 370 + 378 = 748

กับยังเป็นจริงกับผลบวกครึ่งซีกบนเท่ากับผลบวกของครึ่งซีกล่างอีกด้วย:

ครึ่งซีกบน: (256 + 9 + 4 +169) + (25 + 100 + 121 + 64) = 438 + 310 = 748

ครึ่งซีกล่าง: (81 + 36 + 49 + 144) + (16+225 + 196 + 1) = 378 + 370 = 748

ฉะนั้น ผลบวกครึ่งซีกซ้ายเท่ากับผลบวกครึ่งซีกขวาเท่ากับผลบวกครึ่งซีกบนเท่ากับผลบวกครึ่งซีกล่าง นอกจากนี้ ยังเท่ากับผลบวกของเลข 8 จำนวนในแนวทแยงมุมทั้งสองและผลบวกของเลข 8 จำนวนที่ไม่อยู่บนเส้นทแยงมุมอีกด้วย

ผลบวกของเลข 8 จำนวนในแนวทแยงมุม:

(256 + 100 + 49 + 1) + (169 + 121+ 36 + 16) = 406 + 342 = 748

ผลบวกของเลข 8 จำนวนนอกแนวทแยงมุม

9 + 4 + 64 + 144 + 196 + 225 + 81 + 25 = 748

11. เมื่อแต่ละจำนวนในจัตุรัสกลนี้ยกกำลังสาม จะได้ปฏิจัตุรัสกลดังนี้

4096	27	8	2197
125	1000	1331	512
729	216	343	1728
64	3375	2744	1

รูปที่ 2.30 ปฏิจัตุรัสกล

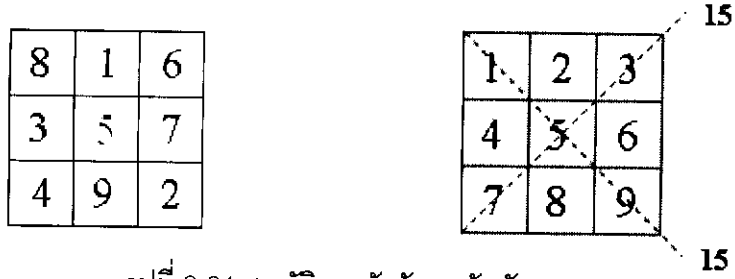
ปฏิจัตุรัสกลที่ได้นี้มีสมบัติว่า ผลบวกของเลข 8 จำนวนบนแนวทแยงมุมทั้งสองเท่ากับผลบวกของเลข 8 จำนวนที่อยู่นอกแนวทแยงมุมทั้งสอง (= 9,248)

2.8 สมบัติของจัตุรัสกล

ความน่าทึ่งของจัตุรัสกลเกิดจากสมบัติแปลก ๆ ที่มีอยู่ในตัวของจัตุรัสกล สมบัติบางประการ คือ แต่ละแถว สดมภ์ และทแยงมุม บวกกันได้เท่ากันเรียกว่า ตัวคงค่ากล ซึ่งสามารถหาได้จากทางใดทางหนึ่งดังต่อไปนี้

2.8.1 ใช้อันดับ n ของจัตุรัสกล แล้วหาค่าของ $0.5(n)(n^2+1)$ เมื่อจัตุรัสกลประกอบด้วยจำนวนธรรมชาติ 1, 2, 3, ..., n^2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.31 สมบัติของจัตุรัสกลอันดับ 3

ตัวคงค่ากล $= 0.5(3)(3^2 + 1) = 15$ $1 + 5 + 9 = 15$ หรือ $7 + 5 + 3 = 15$

2.8.2 ใช้จัตุรัสขนาดใด ๆ และ (เริ่มต้นจากมุมซ้าย) ใส่เลขเรียงไปตามลำดับไปแต่ละแถว ดังรูปที่ 2.31แล้วผลบวกแนวทแยงมุมใด ๆ จะเป็นตัวคงค่ากล

$1 + 5 + 9 = 15$ หรือ $7 + 5 + 3 = 15$

2.8.2.1 เลข 2 จำนวนใด ๆ ในแถว สดมภ์ หรือแนวทแยงมุม ซึ่งห่างเท่ากันจากกึ่งกลาง คือ จำนวนเติมเต็ม จำนวนในจัตุรัสกลจะเป็นจำนวนเติมเต็มถ้าผลบวกของมันเท่ากับผลบวกของจำนวนน้อยสุดกับจำนวนมากสุดของจัตุรัสกลนั้น เลขเติมเต็มของจัตุรัสในรูป ก. คือ 8 กับ 2, 6 กับ 4, 3 กับ 7, 1 กับ 9

2.8.2.2 จัตุรัสกล 3×3 มีสมบัติว่า ทุกแถว สดมภ์ และแนวทแยงมุม มีผลบวก = 15 นั้น ยังมีสมบัติ "กล" และ "กำลังสอง" อีกอย่างหนึ่ง กล่าวคือ ถ้าคิดให้แต่ละแถวเป็น "จำนวน" ทั้งจากซ้ายไปขวาและขวาไปซ้าย เมื่อยกกำลังสองทุกจำนวน แล้วบวกกัน จะได้

รูปที่ 2.32 สมบัติกลและกำลังสองของจัตุรัสกล 3×3

คิดแต่ละแถวเป็น 1 จำนวน		คิดแต่ละสดมภ์เป็น 1 จำนวน
$816^2 + 357^2 + 492^2$	=	$618^2 + 753^2 + 294^2$
665,856 + 127,449 + 242,064	=	381,924 + 567,009 + 86,436
1,035,369	=	1,035,369

ในแง่คณิตศาสตร์ ยังเป็นจริงสำหรับจัตุรัสกล 3×3 ใด ๆ แม้เลขโดดในแต่ละช่องมากกว่า 1 ตัว ก็ยังเป็นจริงโดยการใช้พีชคณิตเชิงเส้น เช่น ในจัตุรัสกล 3×3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

13	6	11
8	10	12
9	14	7

รูปที่ 2.33 จัตุรัสกล 3×3 เลขโดดในแต่ละช่องมากกว่า 1 ตัว

จากรูปที่ 2.33 เราสามารถตรวจสอบได้ว่า

$(1,300 + 60 + 11)^2 + (800 + 100 + 12)^2 + (900 + 140 + 7)^2$

$= (1,100 + 60 + 13)^2 + (1,200 + 100 + 8)^2 + (700 + 140 + 9)^2$

$3,807,594 = 3,807,594$

2.9 วิธีสร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยพีชคณิต

การสร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิตไม่จำเป็นต้องเรียงเลขโดด 1 ถึง 9

2.9.1 ใช้จำนวนใดเริ่มต้นที่ช่องสี่เหลี่ยมกึ่งกลางก็ได้ สมมติเลือกช่องกึ่งกลาง = x

x - a		
	x	
		x + a

รูปที่ 2.34 สร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต(1)

2.9.2 ลดและเพิ่มค่า x ด้วยตัวคงค่า a จะได้ $x - a$ และ $x + a$ นำมาเขียนไว้ในช่องสี่เหลี่ยมของแนวทแยงเส้นหนึ่ง

2.9.3 ลดและเพิ่มค่า x ด้วยตัวคงค่า b จะได้ $x - b$ และ $x + b$ นำมาเขียนไว้ในช่องสี่เหลี่ยมแนวทแยงที่เหลือ

x - a		x + b
	x	
x - b		x + a

รูปที่ 2.35 สร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต(2

2.9.4 เขียนจำนวนลงในช่องสี่เหลี่ยมที่เหลือโดยใช้หลักเกณฑ์ว่า จะต้องรวมในแถวหรือสดมภ์ได้ = 3x เป็นต้นว่า แถวแรกเมื่อรวมกับช่องสี่เหลี่ยมที่มีอยู่แล้ว จะได้ $x - a + b = 2x - a + b$ ดังนั้น ช่องสี่เหลี่ยมกลางแถวแรกจะต้องเขียนเป็น $x + a - b$ และในช่องสี่เหลี่ยมกลางแถวท้ายว่า $x - a + b$ ซึ่งเมื่อรวมจำนวนทั้งสามในสดมภ์กลางก็จะได้ 3x

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.9.5 ในทำนองเดียวกัน เขียนจำนวน x + a + b และ x – a – b ลงในช่องสี่เหลี่ยมของแถวกลางในสดมภ์หนึ่งและสามตามลำดับ

x - a	x+a-b	x + b
x+a+b	x	x-a-b
x - b	x-a+b	x + a

รูปที่ 2.36 สร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต(3)

14	13	18
19	15	11
12	17	16

เมื่อ x = 15, a =1, b =3, ผลบวก = 45

-3	2	-5
-4	-2	0
1	-6	-1

เมื่อ x = −2, a = 1, b = −3, ผลบวก = −6

1/6	3/4	1/3
7/1	5/1	1/4
1/2	1/1	2/3

เมื่อ x = 5/12, a = 3/12, b = −1/12, ผลบวก = 15/12

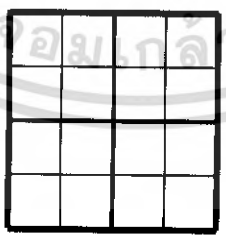
รูปที่ 2.37 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีพีชคณิต

2.10 การเปลี่ยนจัตุรัสกลที่มีอยู่เป็นจัตุรัสกลอื่น

จัตุรัสกลใด ๆ ที่มีจำนวนแถวและสดมภ์คี่ เรียกว่า **จัตุรัสกลอันดับคี่** ถ้าเป็นจำนวนคู่ เรียกว่า **จัตุรัสกลอันดับคู่**

2.10.1 จำนวนใด ๆ อาจบวก ลบ หรือคูณกับเลขทุกจำนวนของจัตุรัสกลได้และยังคงได้เป็นจัตุรัสกล

2.10.2 ถ้า 2 แถวและ 2 สดมภ์ห่างเท่ากันจากศูนย์กลาง สับเปลี่ยนกัน ก็ยังคงเป็นจัตุรัสกล



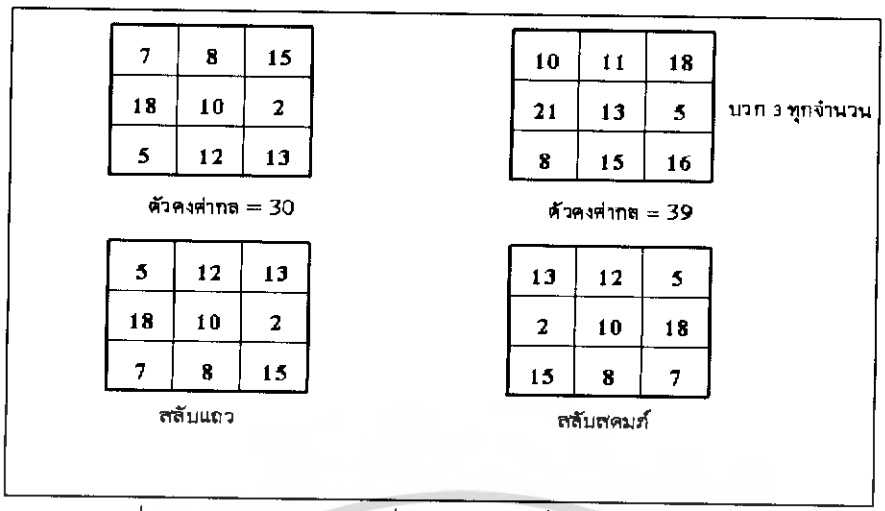
← 1 เสี้ยวใน 4 เสี้ยว ของจัตุรัสกล

รูปที่ 2.38 หนึ่งในสี่เสี้ยวของจัตุรัสกล

2.10.3 ถ้าสับเปลี่ยนเสี้ยวในจัตุรัสกลอันดับคู่ ผลลัพธ์ยังคงเป็นจัตุรัสกล

2.10.4 ถ้าสับเปลี่ยนเสี้ยวย่อยและแถวในจัตุรัสอันดับคี่ ผลลัพธ์ยังเป็นจัตุรัสกล

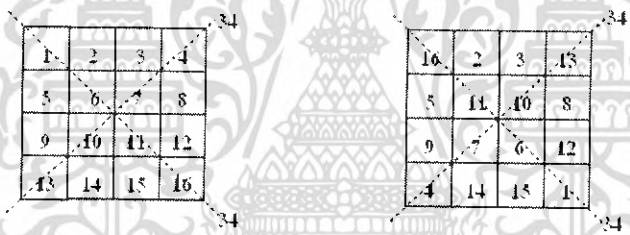
73337
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.39 ตัวอย่างการเปลี่ยนจัตุรัสกลที่มีอยู่เป็นจัตุรัสกลอื่น

2.11 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4

มีการคิดวิธีต่าง ๆ สำหรับสร้างจัตุรัสอันดับคู่ขนาดใดขนาดหนึ่งเป็นการเฉพาะ เช่น วิธีแนวทแยงสำหรับสร้างจัตุรัสกล 4×4: ตัวคงค่ากลของจัตุรัสกล 4×4 = $0.5(4)(4^2 + 1) = 34$



รูปที่ 2.40 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล 4×4

วิธีแนวทแยงสำหรับสร้างจัตุรัสกล 4×4 เท่านั้น เริ่มโดยเขียนตัวเลขเรียงในแถวต่าง ๆ ของจัตุรัสกล ถ้าเลขตัวใดตกบนเส้นทแยงมุม ตำแหน่งของมันต้องสลับกับเลขเติมเต็มของมัน

ในจัตุรัสกล 4×4, ไม่ว่าแถวหรือสดมภ์อาจสับเปลี่ยนกันได้ จะยังคงเป็นจัตุรัสกล ถ้าเสี้ยวต่างๆ สับเปลี่ยนกัน ผลลัพธ์ยังคงเป็นจัตุรัสกล

2.12 วิธีสยาม (วิธีขั้นบันได): วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับคี่

วิธีสยาม เรียกอีกชื่อหนึ่งว่า **วิธีของ** de La Loubere เพราะเขาได้นำเสนอครั้งแรกในทวีปยุโรปเมื่อเดินทางกลับประเทศฝรั่งเศส หลังจากที่หมดวาระการเป็นทูตประจำประเทศสยาม การทำจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีสยาม (Siamese method)

2.12.1 เริ่มต้นเลข 1 ที่กึ่งกลางของแถวบนสุด

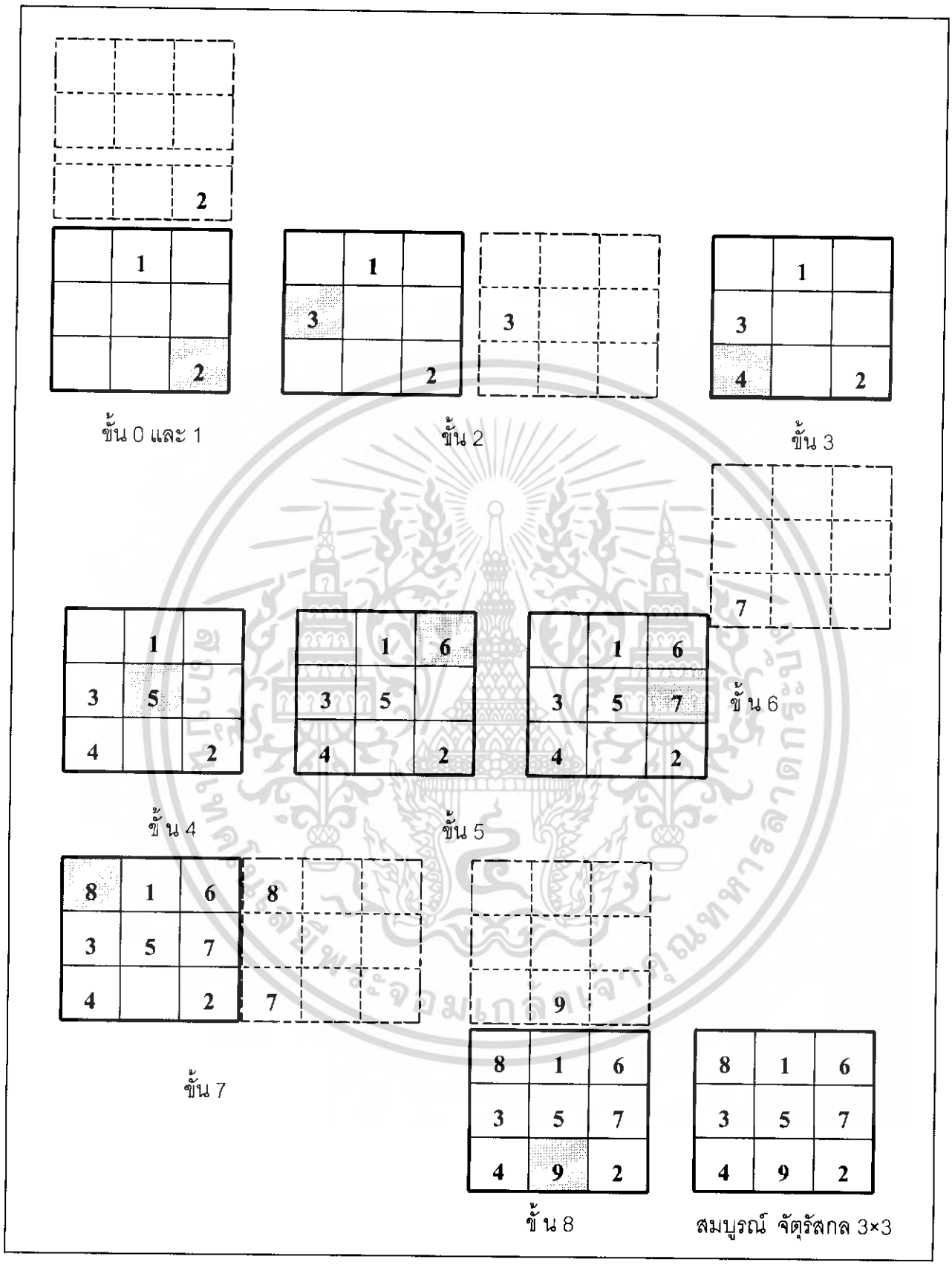
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.12.2 ใส่ตัวเลขถัดไปในแนวทแยงขึ้นบนในจัตุรัสถัดไป เว้นแต่จะมีเลขอื่นอยู่แล้ว ถ้าไปลงในจัตุรัสจินตนาการข้างนอกจัตุรัสกล ให้หาตำแหน่งของมันในจัตุรัสกลโดยเทียบตำแหน่งที่มันอยู่ในจัตุรัสจินตนาการกับจัตุรัสกล

2.12.3 ถ้าในจัตุรัสกล แนวทแยงขึ้นบนในจัตุรัสถัดไปมีตัวเลขอื่นแล้วให้ใส่ตัวเลขถัดไปต่อลงมาในจัตุรัสล่างจากเลขเดิม ดังเช่น สำหรับ 4 และ 7

2.12.4 ทำตามข้อ 2.12.2 และข้อ 2.12.3 เพื่อให้ได้ตำแหน่งของเลขที่เหลือ สำหรับจัตุรัสกล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.41 แผนภาพแสดงวิธีสยามสำหรับจัตุรัสกล 3×3

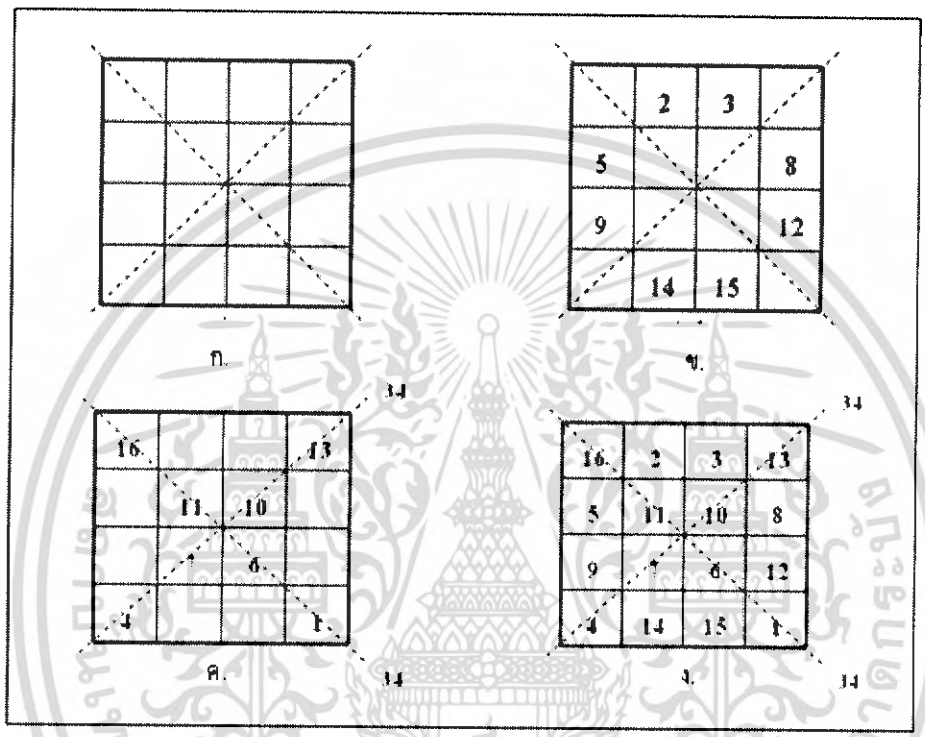
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.13 วิธีทแยงมุม: วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ลงตัว

วิธีทแยงมุม คือ วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ลงตัว: $4n \times 4n$ วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4

ขั้นที่ 1 ลากเส้นทแยงมุมลงจัตุรัสกล 4×4 ดังรูป ก.

ขั้นที่ 2 แล้วนับ 1, 2, 3, 4, โดยเริ่มจากแถวบนช่องแรกเป็น 1, ช่องถัดไปเป็น 2, 3, 4 แล้วขึ้นแถวใหม่เป็น 5, 6, 7, 8 เช่นนี้เรื่อยไป เมื่อถึงช่องที่ไม่ตรงกับเส้นทแยงมุม ให้เขียนเลขนั้นลงไป ดังรูป ข. ช่องที่ตรงกับเส้นทแยงมุมไม่ต้องเขียน



รูปที่ 2.42 แผนภาพแสดงวิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ลงตัว

ขั้นที่ 3 นับเช่นเดิมโดยเริ่มจากมุมล่างขวาสุด แล้วย้อนมาทางซ้าย เมื่อถึงช่องที่ตรงกับ เส้นทแยงมุม ให้เขียนตัวเลขนั้นลงไป ดังรูป ค.

ขั้นที่ 4 เมื่อนำมารวมเป็นตารางเดียวกัน จะได้จัตุรัสกล 4×4 ดังรูปที่ ง วิธีดังกล่าวนี้สามารถนำมาใช้กับจัตุรัส $4n \times 4n$ ได้ เช่น จัตุรัสกล 8×8 ข้างล่าง หรือ 12×12 หรือ 16×16, ...

2.14 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิต

ขั้นที่ 1 กำหนด w, x, y, z ลงในตารางโดยแต่ละแถว แต่ละสดมภ์ไม่ซ้ำกัน ดังข้างล่างนี้

w	x	y	z
z	y	x	w
x	w	z	y
y	z	w	x

รูปที่ 2.43 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่ 2 แถวบน, บวก a ที่ตารางแรกเป็น $w + a$ และบวก c ที่ตารางท้ายเป็น $z + c$ แถวล่าง, ลบ c ที่ตารางแรกเป็น $y - c$ และ ลบ a ที่ตารางท้ายเป็น $x - a$

w+a	x	y	z+c
z	y	x	w
x	w	z	y
y-c	z	w	x-a

รูปที่ 2.44 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 2

ขั้นที่ 3 บวกหรือลบด้วย a และ c เพื่อให้แต่ละแถวและแต่ละสดมภ์ รวมเป็น $w + x + y + z$ ดังข้างล่างนี้

w+a	x-a	y-c	z+c
z-a	y	x	w+a
x+c	w	z	y-c
y-c	z+a	w+c	x-a

รูปที่ 2.45 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 3

ขั้นที่ 4 บวกหรือลบด้วย b จากสองช่องกลางแถวบนและแถวล่าง โดยให้แต่ละแถวและสดมภ์มีผลรวม = $w + x + y + z$ ดังข้างล่างนี้

w+a	x-a+b	y-c-b	z+c
z-a	y	x	w+a
x+c	w	z	y-c
y-c	z+a-b	w+c+b	x-a

รูปที่ 2.46 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 4

ขั้นที่ 5 บวกหรือลบด้วย d จากสองแถวกางซ้ายมือสุดและขวามือสุด โดยให้แต่ละแถวและสดมภ์มีผลรวม = $w + x + y + z$ ดังข้างล่างนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

w+a	x–a+b	y-c-b	z+c
z-a	y	x	w+a
x+c	w	z	y-c
y-c	z+a-b	w+c+b	x-a

รูปที่ 2.47 วิธีสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิตขั้นที่ 4

ตัวอย่าง เช่น

6	7	9	12
10	11	5	8
3	2	16	13
15	14	4	1

ในที่นี้ $x = 5$, $y = 11$,
$z = 16$, $w = 2$,
$w + x + y + z = 2 + 5 + 11 + 16 = 34$

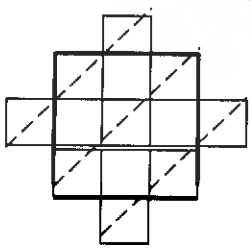
ตัวลงค่ากล $= 34$: $x - a = 1$, $a = 5 - 1 = 4$
$x - a + b = 7$, $b = 7 - 1 = 6$
$z + c = 12$, $c = 12 - 16 = -4$
$z - a + d = 10$, $d = 10 - 16 + 4 = -2$

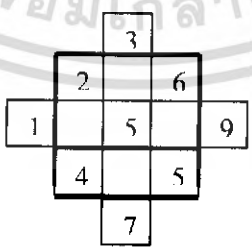
รูปที่ 2.48 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล 4×4 โดยวิธีพีชคณิต

2.15 วิธีพีระมิดสำหรับสร้างจัตุรัสกลอันดับคี่

วิธีพีระมิดเป็นอีกวิธีหนึ่งสำหรับสร้างจัตุรัสกลอันดับคี่ ตัวอย่างข้างล่างแสดงวิธีสร้างจัตุรัสกล 3×3

2.15.1 เขียนเลข 1 ถึง 9 เรียงตามลำดับตามเส้นประดังรูปข้างล่าง





2	7	6
9	5	1
4	3	8

รูปที่ 2.49 ตัวอย่างการสร้างจัตุรัสกล สร้างจัตุรัสกล 3×3 วิธีพีระมิด

2.15.2 เลื่อนตัวเลขที่อยู่นอกสี่เหลี่ยมจัตุรัสกล 3×3 (กรอบเส้นหนา) 1, 3, 7, 9 ขึ้นหรือลงซ้ายหรือขวา ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าอยู่บน ให้เลื่อนลงมา 3 ช่อง คือ เลื่อน 3 ลงอยู่ที่ใต้ 5

ถ้าอยู่ล่าง ให้เลื่อนขึ้นไป 3 ช่อง คือ เลื่อน 7 ขึ้นไปอยู่เหนือ 5

ถ้าอยู่ซ้าย ให้เลื่อนขึ้นไปขวา 3 ช่อง คือ เลื่อน 1 ไปทางขวาของ 5

ถ้าอยู่ขวาให้เลื่อนมาซ้าย 3 ช่อง คือ เลื่อน 9 มาอยู่ทางซ้ายของ 5

เสร็จแล้วก็จะได้จัตุรัสกล 3×3 ดังรูป 2 ค่าคงตัวกลของจัตุรัสกล 3×3 คือ

$$0.5\,(3)\,(3^2+1) = 0.5\,(3)\,(10) = 15$$

ลองทดสอบว่า จัตุรัสกลที่ได้ถูกต้องโดยหาผลบวกของจำนวนแต่ละแถว สดมภ์ และทแยงมุม

แถว : $2 + 7 + 6 = 15$, $9 + 5 + 1 = 15$, $4 + 3 + 8 = 15$;

สดมภ์ : $2 + 9 + 4 = 15$, $7 + 5 + 3 = 15$, $6 + 1 + 8 = 15$;

ทแยงมุม : $2 + 5 + 8 = 15$, $4 + 5 + 6 = 15$;

$\therefore$ จัตุรัสกล 3×3 นี้ถูกต้อง

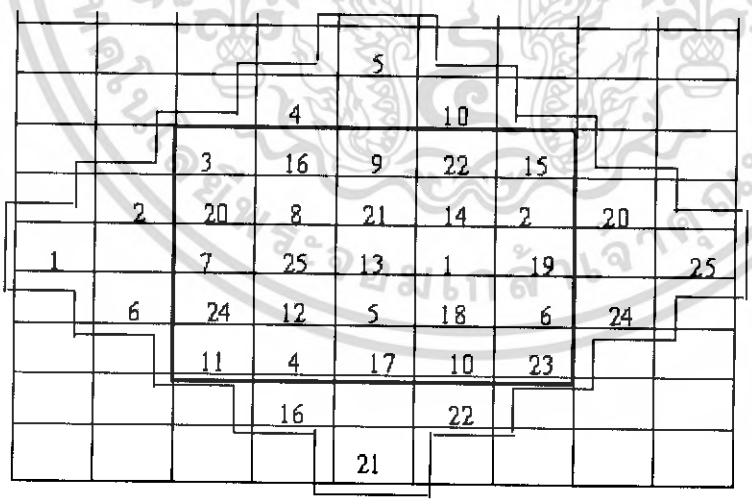
เมื่อนำวิธีพีระมิดมาสร้างจัตุรัสกล 5×5 จะได้ดังนี้

2.15.2.1 สร้างตาราง 5×5 แล้วต่อพีระมิดออกไปข้างละ 2 ตาราง

2.15.2.2 เขียนเลข 1 ถึง 25 ลงในแนวทแยง

2.15.2.3 เลื่อนจำนวนใดๆที่อยู่นอกจัตุรัสกล 5×5 (กรอบเส้นหนา)คือ จำนวนที่อยู่ในจัตุรัสจินตนาการ (รูปข้าวหลามตัดด้านเท่า) ในตำแหน่งตามลำดับของมันลงในจัตุรัสกล

ตัวเลขโปร่ง คือ ตัวเลขที่ถูกเลื่อนมายังตำแหน่งใหม่ ในทำนองเดียวกับจัตุรัสกล 3×3 ที่ได้กล่าวมาแล้ว คือ เลื่อนมา 5 ช่อง ก็จะได้จัตุรัสกล 5×5 ดังรูป 2.20



รูปที่ 2.50 จัตุรัสกลอันดับคี่ 5×5

2.16 วิธีลักซ์: วิธีสร้างจัตุรัสกลอันดับคู่ที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว

วิธีสร้างจัตุรัสกล $n \times n$ อันดับคู่ที่หารด้วย 4ไม่ลงตัว : $n = 4m + 2$ เมื่อ $m \geq 1$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- -ไม่มีจัตุรัสกลอันดับ 2 - -ใช้วิธีที่ เจ.เฮช.คอนเวย์ (J.H. Conway) เรียกว่า วิธีลักซ์ (“LUX” method) โดยสร้างแถวลำดับที่มี $m+1$ แถวของ L, 1 แถวของ U และ m-1 แถวของ X ทั้งหมดต่างมีขนาด $n/2 = 2m + 1$ แลกที่กันระหว่าง U ตรงกลางกับ L ที่อยู่ข้างบน สร้างจัตุรัสกลอันดับ 2m + 1 ด้วยวิธีสยาม

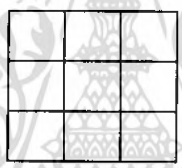
จัตุรัสกลอันดับคู่อันแรกที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว คือ จัตุรัสกล 6×6 เพราะหาร 6 ด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2 อันถัดไป คือ จัตุรัสกล 10×10

วิธีลักซ์สำหรับสร้างจัตุรัสกล 6×6 มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จัตุรัสกล 6×6 มีเลขทั้งหมด 36 ตัว นำมาจัดเป็นกลุ่มละ 4 ตัว ได้ทั้งหมด 9 กลุ่ม มีหมายเลข 1 ถึง 9 เรียงลำดับดังนี้

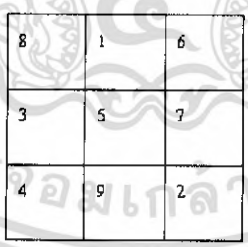
กลุ่ม1	กลุ่ม2	กลุ่ม3	กลุ่ม4	กลุ่ม5
1-4,	5-8,	9-12,	13-16,	17-20,
กลุ่ม6	กลุ่ม7	กลุ่ม8	กลุ่ม9	
21-24,	25-28,	29-32	33-36,	

ขั้นที่ 2 เริ่มต้นโดยเขียนรูปจัตุรัส 3×3 ซึ่งจะมีสี่เหลี่ยมย่อย 9 ตาราง(ช่อง)



รูปที่ 2.51 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 2

ขั้นที่ 3 นำเลขกลุ่ม 1-9 มาจัดลงในจัตุรัสกล 3×3 โดยวิธีสยาม จะได้ดังนี้

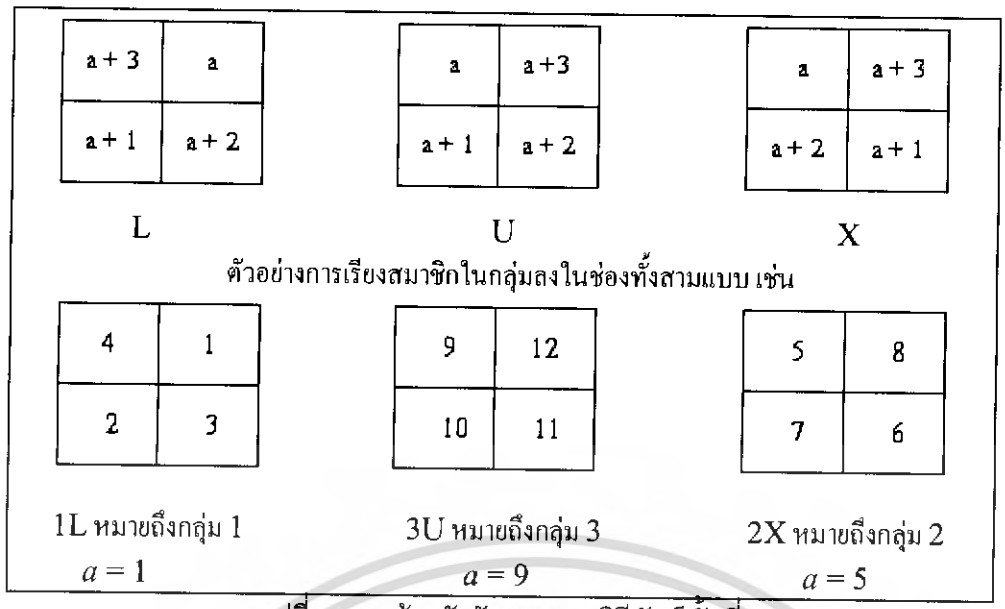


รูปที่ 2.52 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 3

ขั้นที่ 4 คำตอบของจัตุรัสกล 6×6 จะต้องมีตัวเลขของสมาชิกในกลุ่มอยู่ตามเลขหมายกลุ่มในขั้นที่ 0 กลุ่มละ 4 ตัว

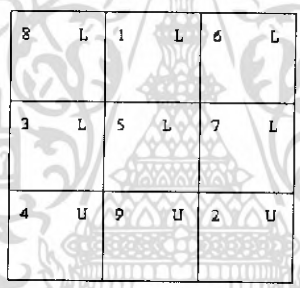
ขั้นที่ 5 จัดประเภทของช่องออกเป็น 3 ประเภท คือ L, U, X ซึ่งการเรียงสมาชิกของกลุ่มลงในช่องแบบ L, U, X จะเป็นดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.53 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 5

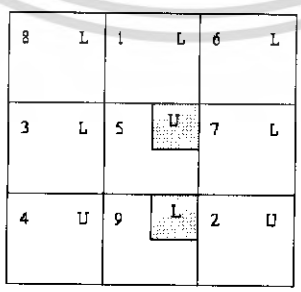
ขั้นที่ 6 ให้ช่องตั้งแต่แถวกลางถึงแถวบนสุดเป็น L ช่องใต้แถวกลาง 1 แถวเป็น U ช่องใต้แถว U ทั้งหมดเป็น X



รูปที่ 2.54 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 6

หมายเหตุ กรณีจัตุรัสกล 6×6 ไม่มีแถวของช่องแบบ X

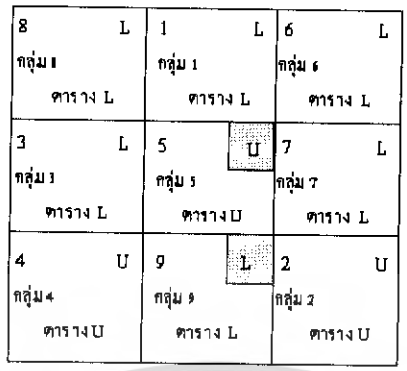
ขั้นที่ 7 ให้สลับ**ช่องศูนย์กลาง** กับ **ช่องที่อยู่ข้างใต้** ในที่นี้คือ การสลับระหว่าง L ที่ช่องศูนย์กลางกับ U ที่อยู่ข้างใต้ ดังที่แรเงา



รูปที่ 2.55 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 7

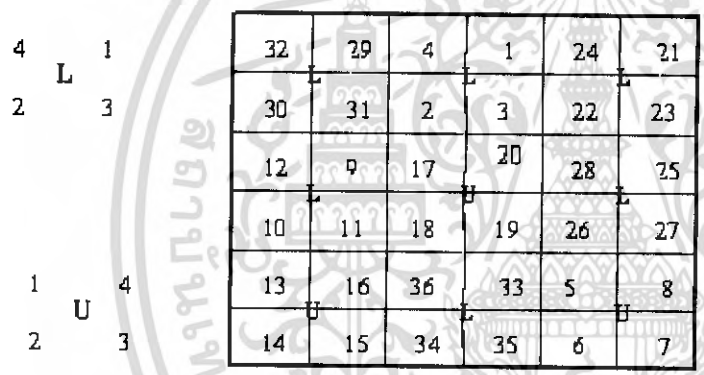
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขั้นที่ 8 ขั้นตอนสุดท้าย คือ นำสมาชิกในกลุ่มมาใส่ลงช่องตามหมายเลขของวิธีสยาม แล้วเรียงสมาชิกในกลุ่มให้ถูกประเภท L U X



รูปที่ 2.56 สร้างจัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ ขั้นที่ 8

จะได้ผลลัพธ์ตามต้องการ



ผลบวกแต่ละแถว สดมภ์ และทแยงมุม ล้วนเท่ากับ 111

ตัวคงค่ากล

$= 0.5\,(6)\,(6^2 + 1)$

$= 0.5\,(6)\,(37) = 111$

รูปที่ 2.57 จัตุรัสกล 6×6 วิธีลักซ์ สมบูรณ์

2.17 **จัตุรัสกล** 10×10

จัตุรัสกล 10×10 มีตัวเลขทั้งหมด 100 ตัว นำมาจัดกลุ่มละ 4 ตัวได้ทั้งหมด 25 กลุ่ม มีเลขหมายกลุ่ม 1 ถึง 25 เรียงลำดับดังนี้

กลุ่ม1	กลุ่ม2	กลุ่ม3	กลุ่ม4	กลุ่ม5
1-4,	5-8,	9-12,	13-16,	17-20,
กลุ่ม6	กลุ่ม7	กลุ่ม8	กลุ่ม9	กลุ่ม10
21-24,	25-28	29-32	33-36,	37-40,
กลุ่ม11	กลุ่ม12	กลุ่ม13	กลุ่ม14	กลุ่ม15
41-44,	45-48,	49-52,	53-56,	57-60,

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กลุ่ม16	กลุ่ม17	กลุ่ม18	กลุ่ม19	กลุ่ม20
61-64,	65-68,	69-72,	73-76,	77-80,
กลุ่ม21	กลุ่ม22	กลุ่ม23	กลุ่ม24	กลุ่ม25
81-84,	85-88,	89-92,	93-96,	97-100

นำเลขกลุ่ม 1 ถึง 25 มาจัดเป็น

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

รูปที่ 2.58 จัตุรัสกล 5×5 ตามวิธีสยาม

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

รูปที่ 2.59 ตาราง L U X

นำสมาชิกในกลุ่มมาใส่ลงช่อง เรียงตัวเลขตามกลุ่มที่เขียนไว้ที่สมนัยกับอักษร L, U และ X จะได้จัตุรัสกล 10×10 ตามต้องการ

จัตุรัส 10×10

68	65	96	93	4	1	32	29	60	57
66	67	94	95	2	3	30	31	58	59
92	89	20	17	28	25	56	53	64	61
90	91	18	19	26	27	54	55	62	63
16	13	24	21	49	52	80	77	88	85
14	15	22	23	50	51	78	79	86	87
37	40	45	48	76	73	81	84	9	12
38	39	46	47	74	75	82	83	10	11
41	44	69	72	97	100	5	8	33	36
43	42	71	70	99	98	7	6	35	34

รูปที่ 2.60 จัตุรัสกล10×10 วิธีลักซ์

ผลบวกแต่ละแถว สดมภ์ และทแยงมุม ล้วนเท่ากับ 505

ตัวคงค่ากล = $0.5\ (10)\ (10^2 + 1) = 0.5\ (10)\ (101) = 505$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.18 จัตุรัสกล 8×8

ในกรณีนี้ เพียงเขียนเลข 1 ถึง 64ลงในตาราง จัตุรัสกล 8×8 เรียงตามลำดับ ดังรูป 2.61 ลากเส้นประในแนวทแยงในการจะได้จัตุรัสกล 8×8 ดังรูป 2.62 นั้น ให้แทนจำนวนที่อยู่บนเส้นประด้วยจำนวนเติมเต็มเลข 2 จำนวนของจัตุรัสกลเป็นจำนวนเติมเต็มถ้าผลบวกมีค่าเดียวกันกับผลบวกของจำนวนน้อยสุดกับจำนวนมากสุดของจัตุรัสกลนั้น เช่น แทน 4 ด้วย 61 ซึ่งได้มาจาก (1 + 64) – 4 = 61

แทน	1	ด้วย	65 - 1 = 64
แทน	5	ด้วย	65 – 5 = 60
แทน	14	ด้วย	65 – 14 = 51

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

รูปที่ 2.61 จัตุรัสกล 8×8 ก

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

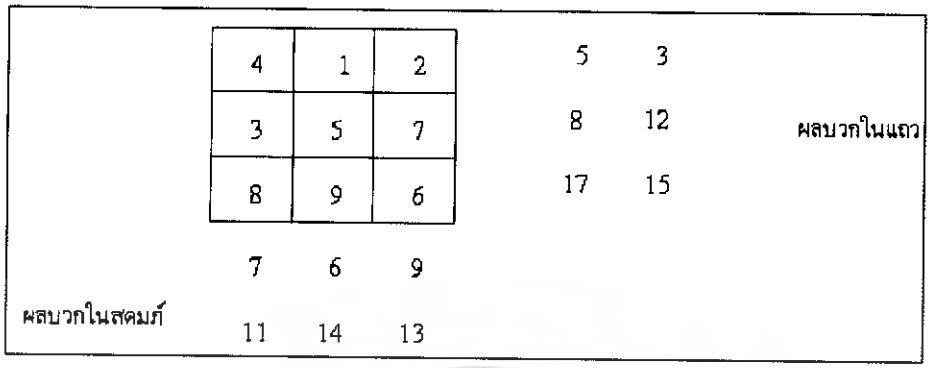
รูปที่ 2.62 จัตุรัสกล 8×8 ข

2.19 ปฏิจัตุรัสกล: ผลบวก 2 ช่องติดกันในแถว – สดมภ์มีค่าต่างกัน

ปฏิจัตุรัสกล 3×3 ซึ่งมีตัวเลข 1 ถึง 9 บรรจุอยู่นั้นมีลักษณะสำคัญคือผลบวกในแถวของเลข 2 ช่องติดกัน มีทั้งหมด 6 ค่า เช่น 4 + 1 = 5, 1 + 2 = 3 เป็นต้น ล้วนได้ค่าแตกต่างกัน

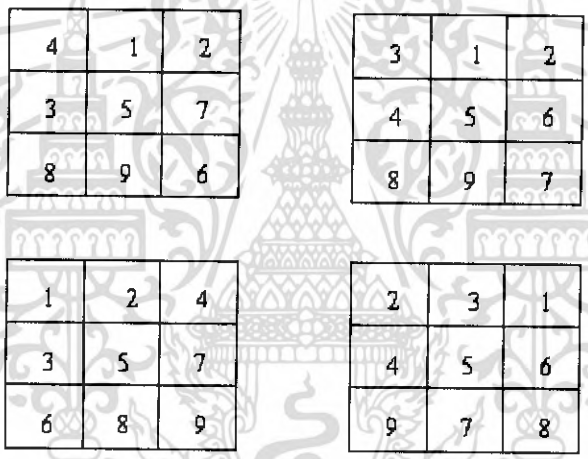
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลบวกของสดมภ์ของเลข 2 ช่องติดกันมีทั้งหมด 6 ค่า เช่น 4 + 3 = 7, 3 + 8 = 11 เป็นต้น ล้วนได้ค่าแตกต่างกันทั้ง 12 ค่าได้เขียนแสดงไว้ข้างๆ และข้างใต้จัตุรัสกล 3×3 ดังนี้



รูปที่ 2.63 ปฏิจัตุรัสกลผลบวกของสดมภ์ของเลข 2 ช่องติดกัน

พบว่าปฏิจัตุรัสกล 3×3 ที่มีลักษณะดังกล่าว มีอยู่ 4 ตารางด้วยกันคือ



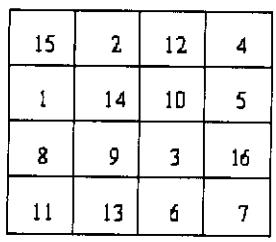
รูปที่ 2.64 ปฏิจัตุรัสกล 3×3

2.20 ปฏิจัตุรัสกล: ผลบวกในแถว-สดมภ์-ทแยงมุมเป็นอนุกรม

มีการค้นหาปฏิจัตุรัสกลที่มีผลบวกในแถว สดมภ์ และทแยงมุมที่มีค่าไม่เท่ากัน แต่มีลักษณะพิเศษเพิ่มเติม คือ ได้ผลบวกที่สามารถนำมาเรียงกันเป็นอนุกรมเลขคณิตได้

จากผลการค้นหาปฏิจัตุรัสกล 4×4 นี้เราได้ผลบวกที่มีลักษณะพิเศษดังนี้

ผลบวกแต่ละแถวเท่ากับ	33, 30, 36, 37
ผลบวกแต่ละสดมภ์เท่ากับ	35, 38, 31, 32
ผลบวกแต่ละทแยงมุมเท่ากับ	34, 39



รูปที่ 2.65 ปฏิจัตุรัสกล 4×4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นำผลบวกทั้ง 10 มาเรียงลำดับ จะได้อนุกรมเลขคณิตที่มีผลต่างร่วม = 1

30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39

21	18	6	17	4
7	3	13	16	24
5	20	23	11	1
15	8	19	2	25
14	12	9	22	10

รูปที่ 2.66 ปฏิจัตุรัสกล 5×5

ผลบวกในแถว-สดมภ์-ทแยงมุม ทั้งหมด 12 ค่า นำมาเรียงลำดับได้เป็นอนุกรมเลขคณิต 59, 60, 61,..., 70

10	25	32	13	16	9
22	7	3	24	21	30
20	27	18	26	11	6
1	31	23	33	17	8
19	5	36	12	15	29
34	14	2	4	35	28

รูปที่ 2.67 ปฏิจัตุรัสกล 6×6

นำมาเรียงลำดับได้เป็นอนุกรมเลขคณิต ทั้งหมด 14 ค่า นำมาเรียงลำดับได้เป็นเป็นอนุกรมเลขคณิต

2.21 จัตุรัสกล 5×5: ผลบวก 2 ช่องที่สมมาตรกับช่องศูนย์กลาง = 26

จัตุรัสกล 5×5 บรรจุเลข 1 ถึง 25 ดังนี้

ตัวคงค่ากล = $0.5\,(5)\,(5^2 + 1) = 65$

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

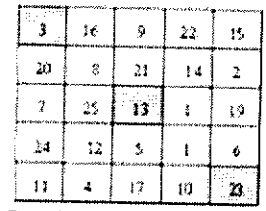
รูปที่ 2.68 ปฏิจัตุรัสกล 5×5 ผลบวก 2 ช่องที่สมมาตรกับช่องศูนย์กลาง

จัตุรัสกล 5×5 นี้มีลักษณะเฉพาะตัว คือ สองช่องที่สมมาตรกับช่องศูนย์กลางมีผลบวกเท่ากับ 26 เสมอ ช่องศูนย์กลางของจัตุรัสกล 5×5 นี้ คือ ตำแหน่ง (3, 3) ซึ่งมีค่าเท่ากับ 13

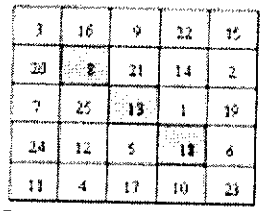
สำหรับ 2 ช่องที่สมมาตรกับช่องศูนย์กลางได้ (แสดงให้เห็นไว้ 6 แบบ) ให้สังเกตว่า ผลบวกเท่ากับ 26 เสมอ ตามที่เขียนแสดงไว้ข้างใต้

พึงสังเกตอีกด้วยว่า มีค่าเป็น 2 เท่าของจำนวนที่ช่องศูนย์กลาง

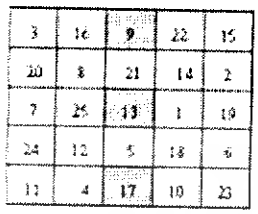
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



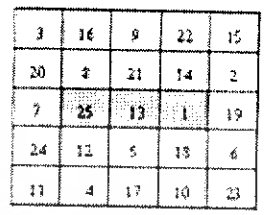
3 + 23 = 26 = 2×13



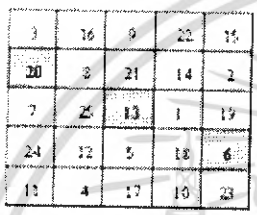
8 + 18 = 26 = 2×13



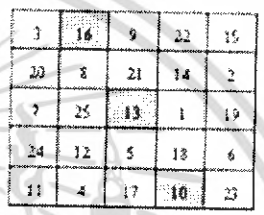
9 + 17 = 26 = 2×13



25 + 1 = 26 = 2×13



20 + 6 = 26 = 2×13



16 + 10 = 26 = 2×13

รูปที่ 2.69 จัตุรัสกล 5×5 ผลบวกเท่ากับ 26

2.22 จัตุรัสกล 6×6

ในจัตุรัสกล 6×6 ผลบวกของเลขจำนวน 6 ช่อง ทั้งแนวนอน แนวยืน และแนวทแยงมุม = 111

ตัวคงค่ากลของจัตุรัสกล 6×6 $= 0.5\,(6)\,(6^2 + 1) = 111$

28	4	3	31	35	10
36	18	21	24	11	1
7	23	12	17	22	30
8	13	26	19	16	29
5	20	15	14	25	32
27	33	34	6	2	9

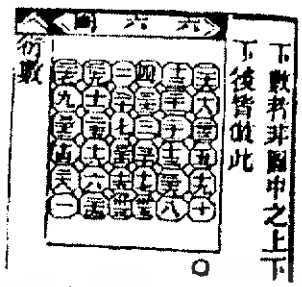
รูปที่ 2.70 จัตุรัสกล 6×6 ผลบวกเท่ากับ 111

พบข้อมูลที่สลักไว้ในแผ่นเหล็กบาง เรียกว่า "ฮว่านฟางแถ่วป่าน" ทำในสมัยราชวงศ์หยวน ค.ศ. 1271 (พ.ศ. 1814) ปัจจุบันแสดงอยู่ในพิพิธภัณฑ์ประวัติศาสตร์ มณฑลส่านซี -- ห้องเรียนประวัติศาสตร์จีน.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.23 จัตุรัสจีน 6×6

จัตุรัสกลจีนดังแสดงไว้ข้างล่าง มีอายุราว 400 ปี เป็นจัตุรัสกล 6×6 ในระบบจำนวนฐาน 10



รูปที่ 2.71 จัตุรัสกลจีน

2.24 จัตุรัสกล 7×7 จัตุรัสตัดขอบ

จัตุรัสกล 7×7 ข้างล่างนี้บรรจุตัวเลขตั้งแต่ 1 ถึง 49 ซึ่งมีตัวคงค่ากล = 175

ตัวคงค่ากล $= 0.5\,(7)\,(7^2 + 1) = 175$

40	1	2	3	42	41	46
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

รูปที่ 2.72 จัตุรัสกล 7×7 มีตัวคงค่ากลเท่ากับ175

เมื่อนำจัตุรัสกล 7×7 นี้มาตัดขอบออก (บริเวณแรเงา) กล่าวคือ ลบแถวแรกกับแถวท้าย และสดมภ์แรกกับสดมภ์ท้าย จะทำให้จัตุรัสกล 5×5

40	1	2	3	42	41	46
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

รูปที่ 2.73 จัตุรัสกล 7×7 ตัดขอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.25 จัตุรัสกล 5×5

ผลบวกแต่ละแถว สดมภ์ และทแยงมุม = 125

31	13	14	32	35
30	26	21	28	20
33	27	25	23	17
16	22	29	24	34
15	37	36	18	19

รูปที่ 2.74 จัตุรัสกล 5×5 ผลบวกเท่ากับ = 125

เมื่อนำจัตุรัสกล 5×5 นี้มาตัดขอบออก (บริเวณแรเงา) กล่าวคือ ลบแถวแรกกับแถวท้าย จะทำให้ได้จัตุรัสกล 3×3

รูปที่ 2.75 ตัวอย่างจัตุรัสกล 5×5 ตัดขอบ

2.26 จัตุรัสกลของ เบนจามิน แฟรงคลิน

จัตุรัสกลของเบนจามิน แฟรงคลิน มีลักษณะเด่นหลายประการเกี่ยวกับความประหลาดของตัวเลข นอกเหนือจากสมบัติปกติของจัตุรัสกล คือ

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.76 จัตุรัสกลของเบนจามิน แฟรงคลิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.26.1 แต่ละแถวบวกกันได้ 260 เช่น

แถวล่างสุด: 16+1+64+49+48+33+32+17 = 260

2.26.2 แต่ละสดมภ์บวกกันได้ 260 เช่น

สดมภ์ขวาสุด: 45+19+44+22+42+24+47+17 = 260

ยกเว้นแนวทแยงมุม

2.26.3 ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = ผลบวกครึ่งแถวขวา = 130 เช่น

แถวบนสุด: ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = 52+61+4+13 = 130

ผลบวกครึ่งแถวขวา = 20+29+36+45 = 130

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.77 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = ผลบวกครึ่งแถวขวา

2.26.4 ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง = 130 เช่น

สดมภ์ขวาสุด: ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = 45+19+44+22 = 130

ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง = 42+24+47+17 = 130

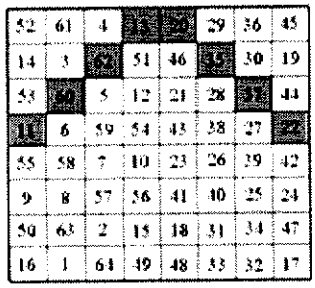
52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.78 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง

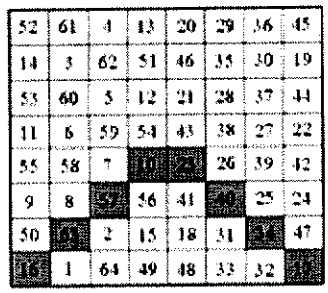
2.26.5 เส้นทแยงที่แรเงาซึ่งมีเลข 4 จำนวนในแนวทแยงขึ้นและ 4 จำนวนในแนวทแยงลง (แนวทแยง) บวกกันได้เท่ากับ 260 มี 4 ชุด คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

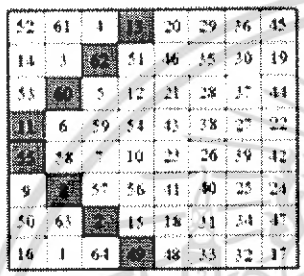
11+60+62+13+20+35+37+22
= 260



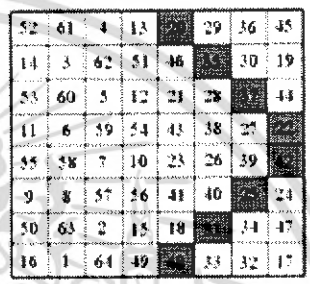
16+63+57+10+23+40+34+17
= 260



13+62+60+11+55+8+2+49
= 260



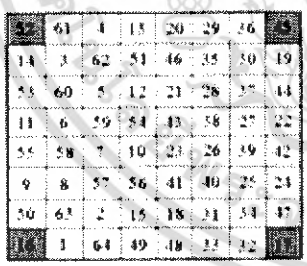
20+35+37+22+42+25+31+48
= 260



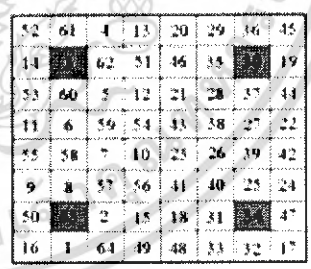
รูปที่ 2.79 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง

2.26.6 ผลบวกของเลข 4 จำนวนที่ห่างเท่ากันจากช่องศูนย์กลางในแนวทแยงมุมเท่ากับ 130 ในกรณีนี้หมายถึงผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่ของจัตุรัสกล 8×8 ด้วย

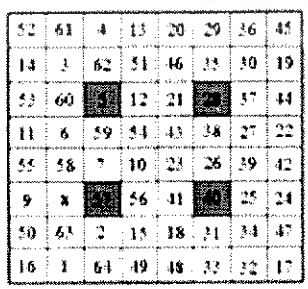
52+45+17+16 = 130



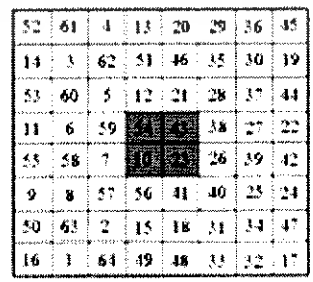
3+30+34+63 = 130



5+28+40+57 = 130



54+43+23+10 = 130



รูปที่ 2.80 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่ของจัตุรัสกล 8×8

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.26.7 ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่และที่ศูนย์กลาง
ทั้งสี่เท่ากับ 260 เช่น
(52+45+17+16)+(54+43+23+10)
= 130+130 = 260

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.81 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน
ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่และที่ศูนย์กลางทั้ง

2.26.8 ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่ของเสี้ยว
จัตุรัส 4×4 เท่ากับ 520 เช่น 52+13+54+11=130

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.82 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน
ผลบวกของจำนวนที่มุมทั้งสี่ของเสี้ยวผลบวก

2.26.9 ผลบวกของ 16 จำนวนในเสี้ยวจัตุรัส 4×4
เท่ากับ 520 เช่น
(52+61+41+13)+(14+3+62+51)
+(53+60+5+12)+(11+6+59+54)
= 130+130+130+130
= 520

52	61	41	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.83 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน
ผลบวกของ 16 จำนวนในเสี้ยวจัตุรัส 4×4

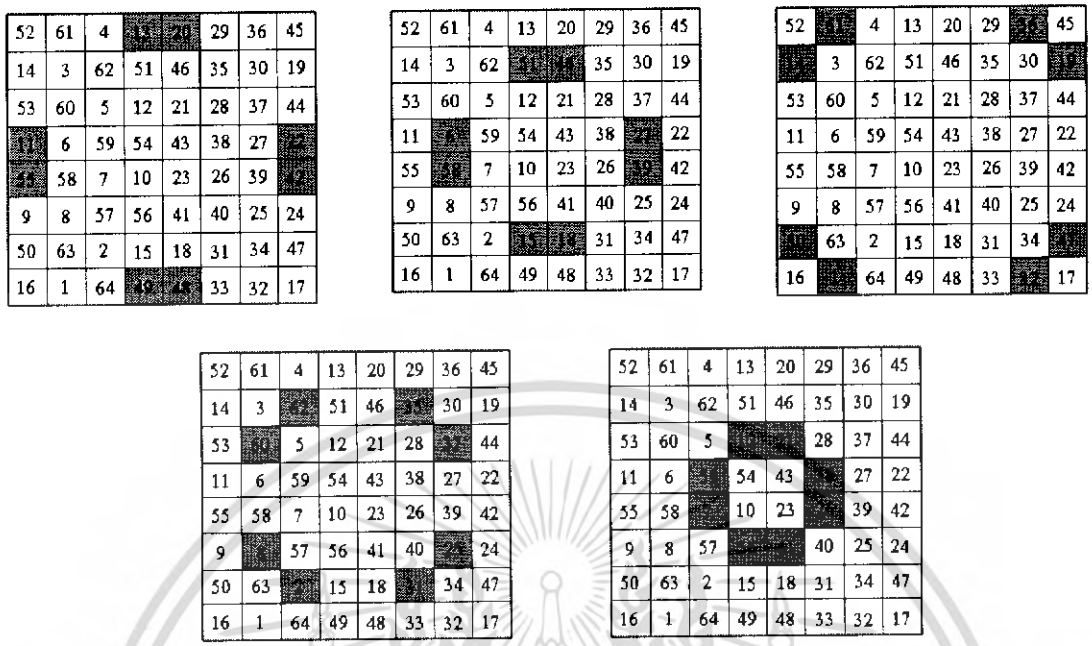
2.26.10 ผลบวกของเลข 4 จำนวนในจัตุรัส 2×2
เท่ากับ130 เช่น
52+61+3+14 = 130
37+44+22+27 = 130
8+57+2+63 = 130

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.84 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน
ผลบวกของเลข 4 จำนวนในจัตุรัส 2×2

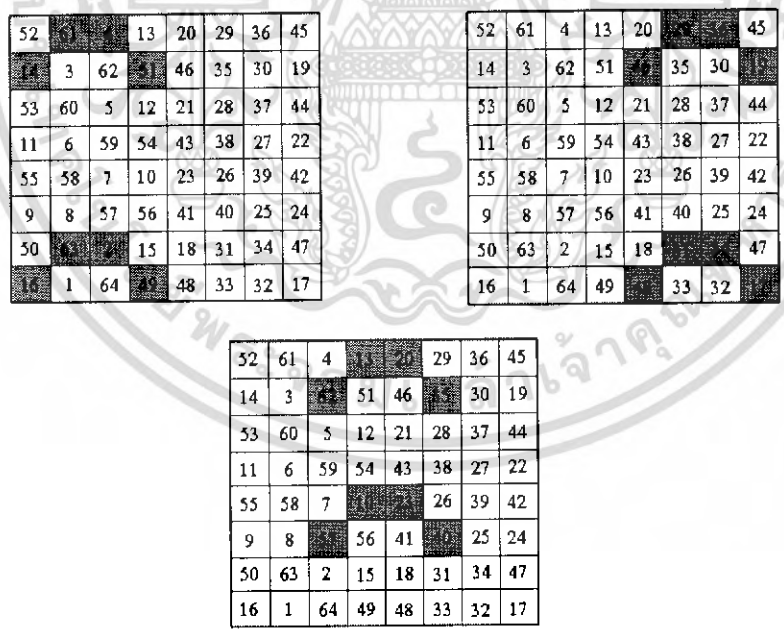
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.26.11 ผลบวกของ 2 ช่องกลางแนวขอบ รวมเป็น 8 ช่อง เท่ากับ 260



รูปที่ 2.85 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวกของ 2 ช่องกลางแนวขอบ แบบต่างๆ

2.26.12 ผลบวก 4 ช่องแบบ C คว่ำเท่ากับ 130



รูปที่ 2.86 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวก4 ช่องแบบ C คว่ำ แบบต่างๆ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.26.13 ผลบวก 4 ช่องแบบ C หงาย เท่ากับ 130

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

รูปที่ 2.87 จัตุรัสกลเบนจามิน แฟรงคลิน ผลบวก 4 ช่องแบบ C หงาย แบบต่างๆ

2.27 จัตุรัสกลของ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์

จัตุรัสกลของ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ มีลักษณะเด่นหลายประการเกี่ยวกับความแปลกน่าทึ่ง นอกเหนือจากสมบัติปกติของจัตุรัสกล คือ

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

รูปที่ 2.88 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์

2.27.1 แต่ละแถวบวกกันได้ 260 เช่น

แถวล่างสุด: 54+27+42+7+58+23+38+11 = 260

2.27.2 แต่ละสดมภ์บวกกันได้ 260 เช่น

สดมภ์ขวาสุด: 18+35+64+13+60+37+22+11 = 260 **ยกเว้นแนวทแยงมุม**

2.27.3 ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = ผลบวกครึ่งแถวขวา = 130 เช่น

แถวบนสุด: ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = 1+48+31+50 = 130

ผลบวกครึ่งแถวขวา = 33+16+63+18 = 130

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

รูปที่ 2.89 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกครึ่งแถวซ้าย = ผลบวกครึ่งแถวขวา = 130

2.27.4 ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง = 130 เช่น

สดมภ์ขวาสุด: ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = 18+35+64+13 = 130

ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง = 60+37+22+11 = 130

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

รูปที่ 2.90 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกครึ่งสดมภ์บน = ผลบวกครึ่งสดมภ์ล่าง = 130

2.27.4 ผลบวกของ 16 จำนวนในเสี้ยวจัตุรัส 4×4 เท่ากับ 520 เช่น

1+48+31+50+30+51+46+3+47+2+49+32+52+29+4+45 = 520

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

รูปที่ 2.91 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกของ 16 จำนวนในเสี้ยวจัตุรัส 4×4 เท่ากับ 520

2.27.5 ผลบวกของเลข 4 จำนวนในจัตุรัส 2×2 เท่ากับ 130 เช่น

1+48+51+30 = 130

14+35+64+17 = 130

56+9+24+41 = 130

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

[illegible]	[illegible]	31	50	33	16	63	18
[illegible]	[illegible]	46	3	62	19	[illegible]	[illegible]
47	2	49	32	15	34	[illegible]	[illegible]
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	[illegible]	[illegible]	40	21	60
28	53	8	[illegible]	[illegible]	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

รูปที่ 2.92 จัตุรัสกลของเลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ผลบวกของเลข 4 จำนวนในจัตุรัส 2×2 เท่ากับ 130

2.28 จัตุรัสกล "พิเศษ"

ลำดับฟีบอนาซี คือ 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...

ซึ่งแต่ละพจน์ คือ ผลบวกของ 2 พจน์ที่อยู่ก่อนหน้า เมื่อเลขฟีบอนาซี

3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

จับคู่กับเลขธรรมชาติ (จำนวนธรรมชาติ)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

8	1	6
3	5	7
4	9	2

รูปที่ 2.93 จัตุรัสกลพิเศษ 3×3

ในจัตุรัสกล 3×3 (รูปขวามือ) จะได้จัตุรัสใหม่ (รูปล่าง) โดย

แทน 1 ด้วย 3
แทน 2 ด้วย 5
แทน 3 ด้วย 8
แทน 4 ด้วย 13
แทน 5 ด้วย 21
แทน 6 ด้วย 34
แทน 7 ด้วย 55
แทน 8 ด้วย 89
แทน 9 ด้วย 144

89	3	34
8	21	55
13	144	5

รูปที่ 2.94 จัตุรัสกลพิเศษ 3×3 ใหม่

จัตุรัสกล "พิเศษ" นี้ไม่มีสมบัติตามแบบของจัตุรัสกล

ผลบวกของผลคูณของ 3 แถว = ผลบวกของผลคูณของ 3 สดมภ์

89 × 3 × 34 = 9,078 89 × 8 × 13 = 9,256

8 × 21 × 55 = 9,240 3 × 21 × 144 = 9,072

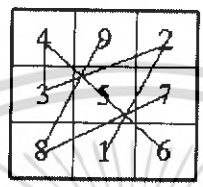
13 × 144 × 5 = +9,360 34 × 55 × 5 = +9,350

บวกกันได้ = 27,678 บวกกันได้ = 27,678

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.29 เส้นกล

เมื่อ พ.ศ. 2443 คลาว เอฟ. แบล็กดอน (Claude F. Bragdon) ค้นพบว่า สามารถใช้จัตุรัสกลเพื่อทำให้เกิดลวดลายศิลปะสวยงามได้อย่างไร เขาพบว่าถ้าลากเส้นต่อโยงเลขจำนวนในจัตุรัสกลเรียงตามกันไป จะเกิดลวดลายที่น่าสนใจ ซึ่งกลายเป็นสิ่งที่เรียกกันต่อมาว่า เส้นกล จริงๆแล้วเส้นกลไม่ได้เป็นเส้น แต่เป็นลวดลายที่เกิดขึ้นจากการลากเส้น เมื่อแรงเงาสลับกัน ย่อมเกิดลวดลายเฉพาะและได้รูปแบบไม่ซ้ำกันเกิดขึ้น ดังที่สถาปนิก แบล็กดอน (Bragdon) ใช้เส้นกลกับลวดลายประดับประดา ทางสถาปัตยกรรมและการออกแบบกราฟิกของหนังสือและสิ่งทอ



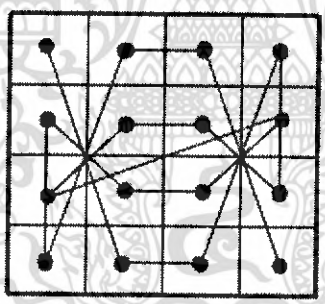
รูปที่ 2.95 เส้นกลสำหรับ ลู่ ซู (Lo - Shu)

ซึ่งเป็นจัตุรัสกลเก่าที่สุดจากจีนเมื่อ 2,800 ปีก่อนคริสต์ศักราช

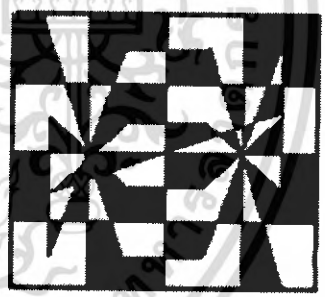
เส้นกลสำหรับจัตุรัสกล (รูปที่ 2.95 ก) ของ อัลเบิร์ด ดุเรอร์ (Albrecht Dürer) ในปี ค.ศ. 1514 เลข 1514 ได้จากเลข 2 ช่องกลางในแถวล่างรวมกันเป็น 1 จำนวน เมื่อลากเส้นเชื่อมโยงตัวเลขในจัตุรัสกลนี้ (รูปที่ 2.95 ข) จะได้ลวดลายสวยงาม โดยการระบายสีต่างๆ (รูปที่ 2.95 ค)

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

ก.



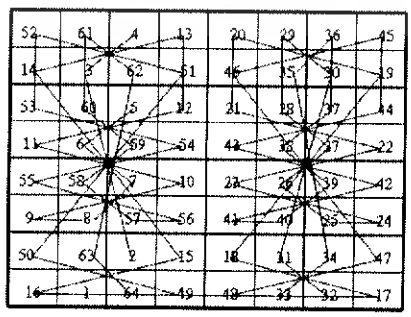
ข.



ค.

รูปที่ 2.96 เส้นกลสำหรับจัตุรัสกลแบบต่างๆ

2.29.1 เส้นกลของจัตุรัสกล เบนจามิน แฟรงคลิน



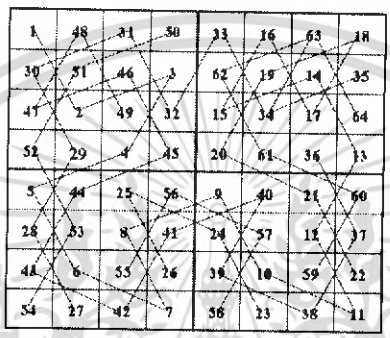
รูปที่ 2.97 เส้นกลของจัตุรัสกล เบนจามิน แฟรงคลิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในช่วงเวลาครึ่งแรกของคริสต์ศตวรรษที่ 20, สถาปนิก คลาว เอฟ. แบล็กดอน (Claude F. Bragdon) ค้นพบวิธีที่จัตุรัสกลสามารถใช้สร้างรูปแบบศิลปะที่เป็นลวดลายน่าชวนชม โดยการลากเส้นต่อโยงเลขจำนวนเรียงตามกันไป แผนภาพนี้แสดงให้เห็นถึงเส้นกลที่เกิดจากการลากเส้นดังกล่าวในจัตุรัสกลของเบนจามิน แฟรงคลิน เมื่อระบายสีต่างๆ ก็จะได้ลวดลายที่สวยงาม.

2.29.2 เส้นกลของจัตุรัสกล เลออนฮาร์ด ออยเลอร์

ถ้าลากเส้นต่อโยงเลขจำนวนจาก 1 ถึง 64 เรียงตามกันไปในจัตุรัสกลของออยเลอร์ เมื่อระบายสีต่างๆ ก็จะได้ภาพศิลปะที่สวยงามอีกแบบหนึ่ง



รูปที่ 2.98 เส้นกลของจัตุรัสกลกล เลออนฮาร์ด ออยเลอร์

2.30 จัตุรัสละติน

จัตุรัสละติน $n \times n$ (Latin Square $n \times n$) มีจัตุรัสย่อยเท่ากับ n^2 ช่องที่บรรจุตัวเลข 1 ถึง n โดยไม่ซ้ำกันทั้งแนวนอนและแนวยืน เช่น

2.30.1 จัตุรัสละติน 2×2 มี 2 แบบ คือ

1	2
2	1

2	1
1	2

รูปที่ 2.99 จัตุรัสละติน 2×2 ซึ่งมีเลข 1 และ 2 ไม่ซ้ำกันทั้งแนวนอนและแนวยืน

2.30.2 จัตุรัสละติน 3×3 มี 12 แบบ คือ

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

รูปที่ 2.100 จัตุรัสละติน 3×3 ซึ่งมีเลข 1, 2 และ 3 ไม่ซ้ำกันทั้งแนวนอนและแนวยืน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.30.3 จัตุรัสละติน 4×4 มี 576 แบบ เช่น

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

รูปที่ 2.101 จัตุรัสละติน 4×4

ซึ่งมีเลข 1, 2 และ 3 ไม่ซ้ำกันทั้งแนวนอนและแนวยืนจำนวนแบบ $N(n,n)$ ของจัตุรัสละติน อันดับ n = 1, 2, 3, 4, 5, ... คือ 1, 2, 12, 567, 161, 289,... แบบ

จัตุรัสละตินคู่หนึ่งๆเรียกว่าเป็นจัตุรัสละตินเชิงตั้งฉากถ้าจำนวน n^2 คู่ตั้งอยู่ติดกันโดยมีแถวลำดับล้วนแตกต่างกัน เช่น จัตุรัสละติน 2 แบบ:

3	2	1
2	1	3
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

รูปที่ 2.102 จัตุรัสละตินเชิงตั้งฉาก

จำนวนคู่ของจัตุรัสละตินเชิงตั้งฉากอันดับ n = 1, 2, 3, 4, ... คือ 0, 0, 36, 3456,...คู่

2.30.4 จัตุรัสละติน 5×5 มี 161,280 แบบ เช่น

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

รูปที่ 2.103 จัตุรัสละติน 5×5

ซึ่งมีเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 ไม่ซ้ำกันทั้งแนวนอนและแนวยืน

2.30.5 จัตุรัสละติน 6×6 เช่น

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	1	2
4	5	6	1	2	3
5	6	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5

รูปที่ 2.104 จัตุรัสละติน 6×6 ซึ่งมีเลข 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ไม่ซ้ำกันทั้งแนวนอนและแนวยืน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.31 จัตุรัสละติน 9×9

6	1	4	7	8	9	2	3	5
8	2	5	1	6	3	7	4	9
3	9	7	5	4	2	6	8	1
4	7	8	6	5	1	9	2	3
5	3	1	9	2	8	4	6	7
2	6	9	4	4	7	5	1	8
9	8	3	2	7	6	1	5	4
7	5	2	8	1	4	3	9	6
1	4	6	3	9	5	8	7	2

รูปที่ 2.105 จัตุรัสละติน 9×9

ซึ่งมีเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 ไม่ซ้ำกันทั้งแนวนอนและแนวยืน

วิธีสร้างจัตุรัสละติน 9×9

มองจัตุรัสละติน 9×9 แล้วอาจรู้สึกว่า สับสนพอสมควร คงจะเขียนจัตุรัสละตินนี้ได้ยาก อย่างไรก็ตามมีวิธีเขียนไม่ยากดังนี้

แถวที่หนึ่ง: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

แถวที่สอง: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1

แถวที่สาม: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2

(เขียนเรียงวนเป็นวัฏจักร)

.

.

.

แถวที่แปด: 8, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

แถวที่เก้า: 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

2.32 จัตุรัสละติน "กรณีเฉพาะ"

นักคณิตศาสตร์ต่างนำสมบัติในเรื่องนี้มาตั้งเป็นเกมส์ คือ แบ่งจัตุรัสละติน 9×9 ออกมาเป็น 9 บริเวณ แต่ละบริเวณเป็นจัตุรัสละติน 3×3 ดังนี้

①	②	③
④	⑤	⑥
⑦	⑧	⑨

รูปที่ 2.106 จัตุรัสละติน กรณีเฉพาะ 3×3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างเช่น

จัตุรัสละติน ① =

6	1	4
8	2	5
3	9	7

จัตุรัสละติน ② =

7	8	9
1	6	3
5	4	2

จัตุรัสละติน ⑧ =

2	7	6
8	1	4
3	9	5

จัตุรัสละติน ⑨ =

1	5	4
3	9	6
8	7	2

รูปที่ 2.107 ตัวอย่างจัตุรัสละติน กรณีเฉพาะ 9×9

เมื่อนำมาประกอบกัน จะได้จัตุรัสละติน 9×9 ที่มีลักษณะพิเศษ คือ

1. จัตุรัสละติน 3×3 มีเลข 1 ถึง 9 ทั้ง 9 บริเวณ (บริเวณ 1 ถึงบริเวณ 9)
2. จัตุรัสละติน 9×9 มีเลข 1 ถึง 9 ทุกแนวนอนและแนวยืน

จัตุรัสละติน 9×9

6	1	4	7	8	9	2	3	5
8	2	5	1	6	3	7	4	9
3	9	7	5	4	2	6	8	1
4	7	8	6	5	1	9	2	3
5	3	1	9	2	8	4	6	7
2	6	9	4	3	7	5	1	8
9	8	3	2	7	6	1	5	4
7	5	2	8	1	4	3	9	6
1	4	6	3	9	5	8	7	2

รูปที่ 2.108 จัตุรัสละติน กรณีเฉพาะ 9×9

ในทำนองเดียวกัน จัตุรัสละติน 12×12 มีลักษณะพิเศษเช่นกัน คือ

1. จัตุรัสละติน 12×12 แบ่งเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก (ตารางย่อย) 3×4 = 12 บริเวณมีเลข 1 ถึง 12 ทั้ง 12 บริเวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. จัตุรัสละติน 12×12 มีเลข 1 ถึง 12 ทุกแนวนอนและแนวยืน เช่น

6	8	1	2	9	4	7	12	5	10	3	11
5	4	11	12	2	1	10	3	9	8	6	7
10	9	7	3	11	6	5	8	1	12	2	4
9	2	12	4	8	10	11	5	3	6	7	1
7	1	3	10	5	9	2	4	8	5	11	12
8	6	5	11	1	3	12	7	2	9	4	10
4	7	10	8	3	12	9	11	6	1	5	2
3	5	6	1	10	8	4	2	7	11	12	9
12	11	2	9	5	7	6	1	4	3	10	8
1	10	4	7	12	5	8	6	11	2	9	3
11	3	9	6	4	2	1	10	12	7	8	5
2	12	8	5	7	11	3	9	10	4	1	6

รูปที่ 2.109 จัตุรัสละติน 12×12

ในทำนองเดียวกัน จัตุรัสละติน 16×16 ก็มีลักษณะพิเศษเช่นกัน คือ

1. จัตุรัสละติน 16×16 แบ่งเป็นจัตุรัสละติน 4×4 ได้ 16 บริเวณ มีเลข 1 ถึง 16 ทั้ง 16 บริเวณ

2. จัตุรัสละติน 16×16 มีเลข 1 ถึง 16 ทุกแนวนอนและแนวยืน เช่น

16	15	1	12	2	10	3	4	5	6	11	7	13	8	9	14
9	14	10	4	11	13	6	15	1	2	8	3	7	16	12	5
3	8	2	5	1	9	16	7	14	13	15	12	6	11	4	10
13	7	6	11	12	5	8	14	9	10	16	4	2	3	15	1
4	10	5	9	6	8	7	16	15	14	1	11	3	12	2	13
11	13	3	1	15	4	14	2	12	7	5	16	10	9	6	8
7	6	8	14	9	12	10	11	4	3	13	2	15	1	5	16
2	12	16	15	5	3	1	13	8	9	6	10	11	4	14	7
10	3	11	6	16	2	4	8	13	5	12	1	14	15	7	9
15	1	14	16	13	7	12	9	10	11	2	6	8	5	3	4
8	5	9	7	10	1	11	3	16	4	14	15	12	2	13	6
12	4	13	2	14	15	5	6	7	8	3	9	1	10	16	11
14	16	12	13	4	6	15	5	3	1	10	8	9	7	11	2
5	9	4	10	3	11	2	1	6	15	7	14	16	13	8	12
1	11	15	8	7	14	13	12	2	16	9	5	4	6	10	3
6	2	7	3	8	16	9	10	11	12	4	13	5	14	1	15

รูปที่ 2.110 จัตุรัสละติน 16×16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3
การพิสูจน์หาผลเฉลยของจัตุรัสกล

3.1 คุณสมบัติของจัตุรัสกลแบบ "IENR"

3.1.1 ค่าคงตัวกลมีค่าได้ไม่จำกัด (Infinite sum)

3.1.2 ผลรวมของแต่ละแถว และผลรวมของแต่ละสดมภ์ มีค่าเท่ากัน (Row sum and column sum are equal)

3.1.3 ตัวเลขมีค่าไม่เป็นลบ (มีค่าเป็นศูนย์ได้) (Nonnegative integer)

3.1.4 มีตัวเลขที่ซ้ำกันได้ (Repetition of element in rows and columns)

3.2 พิจารณาจำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลแบบ "IENR"

3.2.1 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 1×1

มีจำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้เพียงแบบเดียว คือ $\boxed{r}$ (r คือตัวคงค่ากล)

3.2.2 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 2×2

มีจำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ คือ $H_2(r) = r+1$

a	$r-a$
$r-a$	$r-(r-a)$

รูปที่ 3.1 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 2×2

จะได้อสมการ คือ $a \le r$ (1)

กำหนดให้ $0 \le a \le r$

ให้สังเกตอสมการที่ (1) จะเห็นได้ว่า 1 พจน์นี้ (a) มีค่าได้ตั้งแต่ 0 ถึง r ดังนั้นเราสามารถเลือกพจน์พจน์นี้ได้จากเลข $r+1$ ตัว

วิธีเลือกพจน์ (a) นี้ เป็นได้ กรณีเดียวคือ $\binom{r+1}{1}$ แบบ หรือ

$$\binom{r+1}{1} = \frac{(r+1)!}{1!(r+1-1)!} = \frac{(r+1)!}{r!} = r+1 \text{ แบบ}$$

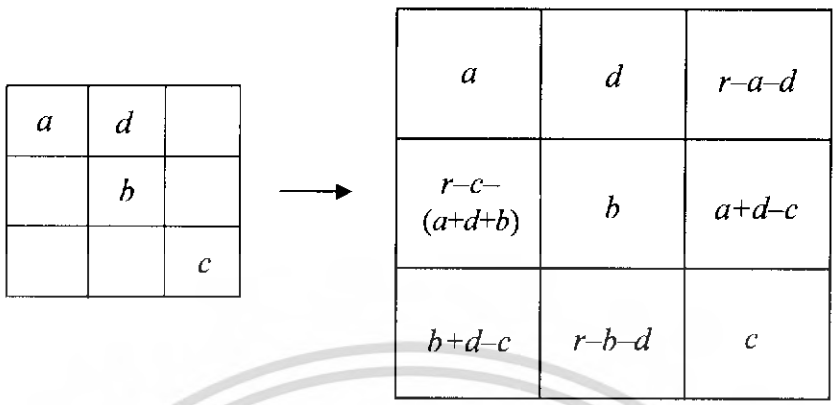
สรุปได้ว่า จำนวนแบบที่เป็นไปได้มี $r+1$ แบบ

3.2.3 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 3 × 3

มีจำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H_3(r) = \begin{pmatrix} r+4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r+3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r+2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (2)$$



รูปที่ 3.2 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 3×3

ซึ่งจาก คุณสมบัติที่ว่า สมาชิกในเมทริกซ์จะมีค่าไม่เป็นลบ และผลรวมของสมาชิกในแถว, สดมภ์ และ แนวทแยง มีค่าเท่ากับ ตัวคงค่ากล (r) ดังนั้นจะได้อสมการที่สอดคล้องกันคือ

$$a+d \leq r \qquad (3)$$

$$b+d \leq r \qquad (4)$$

$$c \leq a+d \qquad (5)$$

$$c \leq b+d \qquad (6)$$

$$a+d+b-c \leq r \qquad (7)$$

เพื่อที่จะพิสูจน์สมการ (2) ให้พิจารณากรณีที่แตกต่างกันของ a, b, c 60 กรณีดังนี้

1. $a \leq b$ & $a \leq c$ → $b > a$ & $c \geq a$ → $b > a$ & $c > a$
   → $b \geq a$ & $c > a$

2. $a \leq b$ & $b \leq c$ → $b > a$ & $c \geq b$ → $b > a$ & $c > b$
   → $b \geq a$ & $c > b$

3. $a \leq b$ & $b \leq a$ → $b > a$ & $a \geq b$ → $b > a$ & $a > b$
   → $b \geq a$ & $a > b$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. $a \leq b \;\&\; c \leq a \rightarrow \begin{cases} b > a \;\&\; a \geq c \rightarrow b > a \;\&\; a > c \\ b \geq c \;\&\; a > c \end{cases}$

5. $a \leq b \;\&\; c \leq b \rightarrow \begin{cases} b > a \;\&\; b \geq c \rightarrow b > a \;\&\; b > c \\ b \geq a \;\&\; b > c \end{cases}$

6. $a \leq c \;\&\; b \leq a \rightarrow \begin{cases} c > a \;\&\; a > b \rightarrow c > a \;\&\; a > b \\ c \geq a \;\&\; a > b \end{cases}$

7. $a \leq c \;\&\; b \leq c \rightarrow \begin{cases} c > a \;\&\; c \geq b \rightarrow c > a \;\&\; c > b \\ c \geq a \;\&\; c > b \end{cases}$

8. $a \leq c \;\&\; c \leq b \rightarrow \begin{cases} c > a \;\&\; b \geq c \rightarrow c > a \;\&\; b > c \\ c \geq a \;\&\; b > c \end{cases}$

9. $a \leq c \;\&\; c \leq a \rightarrow \begin{cases} c > a \;\&\; a \geq c \rightarrow c > a \;\&\; a > c \\ c \geq a \;\&\; a > c \end{cases}$

10. $b \leq a \;\&\; b \leq c \rightarrow \begin{cases} a > b \;\&\; c \geq b \rightarrow a > b \;\&\; c > b \\ a \geq b \;\&\; c > b \end{cases}$

11. $b \leq a \;\&\; c \leq a \rightarrow \begin{cases} a > b \;\&\; a \geq c \rightarrow a > b \;\&\; a > c \\ a \geq b \;\&\; a > c \end{cases}$

12. $b \leq a \;\&\; c \leq b \rightarrow \begin{cases} a > b \;\&\; b \geq c \rightarrow a > b \;\&\; b > c \\ a \geq b \;\&\; b > c \end{cases}$

13. $b \leq c \;\&\; c \leq b \rightarrow \begin{cases} c > b \;\&\; b \geq c \rightarrow c > b \;\&\; b > c \\ c \geq b \;\&\; b > c \end{cases}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

14. $b \le c \;\&\; c \le a \longrightarrow \begin{cases} c > b \;\&\; a \ge c \\ c \ge b \;\&\; a > c \end{cases} \longrightarrow c > b \;\&\; a > c$

15. $c \le a \;\&\; c \le b \longrightarrow \begin{cases} a > c \;\&\; b \ge c \\ a \ge c \;\&\; b > c \end{cases} \longrightarrow a > c \;\&\; b > c$

ดังนั้นจาก 60 กรณีข้างต้น จะสังเกตเห็นว่ามีขอบเขตของ a, b, c และ d ที่เป็นไปได้มี 3 ช่วง ดังนี้

1. 0 ถึง r 2. 0 ถึง r-1 3. 0 ถึง r-2

เพราะฉะนั้นเพื่อให้ครอบคลุมขอบเขต a, b, c และ d เราจึงเลือก 3 กรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 1</u>:

สมมติ $0 \le a \le b$ และ $0 \le a \le c$ ในกรณีนี้เราจะได้อสมการที่สอดคล้องกันคือ

$$a \le 2a + d - c \le a + b + d - c \le b + d \le r \qquad (7)$$

อสมการคู่แรก $(a \le 2a + d - c)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ (5)นั่นก็คือ

$$\begin{aligned} c &\le a + d \\ a + c &\le 2a + d && \text{(บวก } a \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ a &\le 2a + d - c && \text{(บวก } -c \text{ ทั้งสองข้าง)} \end{aligned}$$

อสมการคู่ที่สอง $(2a + d - c \le a + b + d - c)$ จะสอดคล้องกับข้อสมมติ $a \le b$

$$\begin{aligned} a &\le b \\ 2a &\le a + b && \text{(บวก } a \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ 2a + d &\le a + b + d && \text{(บวก } d \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ 2a + d - c &\le a + b + d - c && \text{(บวก } -c \text{ ทั้งสองข้าง)} \end{aligned}$$

อสมการคู่ที่สาม $(a + b + d - c \le b + d)$ จะสอดคล้องกับข้อสมมติที่ว่า $a \le c$ นั่นก็คือ

$$\begin{aligned} a &\le c \\ a + b &\le c + b && \text{(บวก } b \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ a + b + d &\le c + b + d && \text{(บวก } d \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ a + b + d - c &\le b + d && \text{(บวก } -c \text{ ทั้งสองข้าง)} \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อสมการคู่ที่สี่ $(b+d \le r)$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ (4)

จะเห็นว่า ถ้าเราหาค่า $a, 2a+d-c, a+b+d-c, b+d$ ได้แล้วเราก็จะรู้ค่า a, b, c และ d ด้วย ทำให้เราสามารถที่จะหา จัตุรัสกลแบบ "IENR" นี้ได้

ให้สังเกตอสมการที่ (7) จะเห็นได้ว่าทั้ง 4 พจน์นี้ $(a, 2a+d-c, a+b+d-c, b+d)$ มีค่าได้ตั้งแต่ 0 ถึง r ดังนั้นเราสามารถเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้ได้จากเลข $r+1$ ตัว

วิธีที่จะเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์ $(a, 2a+d-c, a+b+d-c, b+d)$ เพื่อสร้างจัตุรัสกลแบบ "IENR" เป็นไปได้ดังนี้ คือ

1. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าไม่เท่ากันเลย จะได้วิธีเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้ คือ $\binom{r+1}{4}$ วิธี

2. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันทุกพจน์ จะได้วิธีเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้ คือ $\binom{r+1}{1}$ วิธี

3. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันอยู่ 2 พจน์ จะได้วิธีเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้ คือ

$$3\binom{r+1}{3}+\binom{r+1}{2} \text{ วิธี}$$

4. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันอยู่ 3 พจน์ จะได้วิธีเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้ คือ $2\binom{r+1}{2}$ วิธี

นั่นก็คือ วิธีที่จะเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้มี

$$\binom{r+1}{4}+\binom{r+1}{1}+3\binom{r+1}{3}+\binom{r+1}{2}+2\binom{r+1}{2} \text{ วิธี}$$

หรือ จำนวน 3 × 3 จัตุรัสกลแบบ "IENR" ที่เป็นไปได้ในกรณีนี้มีจำนวน

$$\binom{r+1}{4}+\binom{r+1}{1}+3\binom{r+1}{3}+\binom{r+1}{2}+2\binom{r+1}{2} \text{ แบบ}$$

ซึ่ง

$$\binom{r+1}{4}+\binom{r+1}{1}+3\binom{r+1}{3}+\binom{r+1}{2}+2\binom{r+1}{2}$$

$$= \frac{(r+1)(r)(r-1)(r-2)(r-3)!}{4!(r-1)!}+\frac{(r+1)(r)!}{1!(r)!}+3\frac{(r+1)(r)(r-1)(r-2)!}{3!(r-2)!}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$+ \frac{(r+1)(r)(r-1)!}{2!(r-1)!} + 2\frac{(r+1)(r)(r-1)!}{2!(r-1)!}$$

$$= \frac{(r+1)(r)(r-1)(r-2)}{4!} + (r+1) + 3\frac{(r+1)(r)(r-1)}{3!} + \frac{(r+1)(r)}{2!} + 2\frac{(r+1)(r)}{2!}$$

$$= \frac{(r+1)}{4!}\left(r(r-1)(r-2) + 4! + 3\frac{(r)(r-1)4!}{3!} + 3\frac{(r)4!}{2!}\right)$$

$$= \frac{(r+1)}{4!}(r^3+9r^2+26r+24)$$

$$= \frac{(r+1)}{4!}(r+2)(r+3)(r+4)$$

$$= \frac{(r+4)(r+3)(r+2)(r+1)(r)!}{4!(r)!}$$

$$= \begin{pmatrix} r+4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ดังนั้นจำนวน 3 × 3 จัตุรัสกลแบบ "IENR" ที่เป็นไปได้ในกรณีนี้มี $\begin{pmatrix} r+4 \\ 4 \end{pmatrix}$ แบบ

<u>กรณีที่ 2</u>:

สมมติ $a > b$ และ $c \geq b$ ในกรณีนี้เราจะได้สมการที่สอดคล้องกัน คือ

$$b \leq 2b+d-c \leq a+b+d-c-1 \leq a+d-1 \leq r-1 \qquad (8)$$

อสมการคู่แรก $(b \leq 2b+d-c)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข (6) นั่นก็คือ

$$\begin{array}{lcll} c & \leq & b+d & \\ b+c & \leq & 2b+d & \text{(บวก } b \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ b & \leq & 2b+d-c & \text{(บวก } -c \text{ ทั้งสองข้าง)} \end{array}$$

อสมการคู่ที่สอง $(2a+d-c \leq a+b+d-c-1)$ จะสอดคล้องกับข้อสมมติ $a > b$

$$a > b$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$
\begin{aligned}
b &\le a-1 \\
2b &\le a+b-1 && \text{(บวก } b \text{ ทั้งสองข้าง)} \\
2b+d &\le a+b+d-1 && \text{(บวก } d \text{ ทั้งสองข้าง)} \\
2b+d-c &\le a+b+d-c-1 && \text{(บวก } -c \text{ ทั้งสองข้าง)}
\end{aligned}
$$

อสมการคู่ที่สาม $(a+b+d-c-1 \le a+d-1)$ จะสอดคล้องกับข้อสมมติที่ว่า $c \ge b$

$$
\begin{aligned}
b &\le c \\
a+b &\le a+c && \text{(บวก } a \text{ ทั้งสองข้าง)} \\
a+b+d &\le a+c+d && \text{(บวก } d \text{ ทั้งสองข้าง)} \\
a+b+d-c &\le a+d && \text{(บวก } -c \text{ ทั้งสองข้าง)} \\
a+b+d-c-1 &\le a+d-1 && \text{(บวก –1 ทั้งสองข้าง)}
\end{aligned}
$$

อสมการคู่ที่สี่ $(a+d-1 \le r-1)$ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ (3)

$$
\begin{aligned}
a+d &\le r \\
a+d-1 &\le r-1 && \text{(บวก –1 ทั้งสองข้าง)}
\end{aligned}
$$

ให้สังเกตอสมการ (8) ทั้ง 4 พจน์นี้ $(b, 2b+d-c, a+b+d-c-1, a+d-1, r-1)$ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $r-1$ ดังนั้นเราสามารถที่จะเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์ได้จากเลข r ตัว

จาก สมมติฐาน $a > b$ ดังนั้นจึงไม่มี $a = b$ อธิบายได้จากค่า –1 ใน 3 เทอมสุดท้าย

วิธีเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์ $(b, 2b+d-c, a+b+d-c-1, a+d-1, r-1)$ เป็นไปได้ดังนี้

1. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าไม่เท่ากันเลย จะได้วิธีที่เลือกทั้ง 4 พจน์นี้ คือ $\binom{r}{4}$ วิธี

2. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันทุกพจน์ จะได้วิธีเลือกทั้ง 4 พจน์นี้คือ $\binom{r}{1}$ วิธี

3. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันอยู่ 2 พจน์ จะได้วิธีเลือกทั้ง 4 พจน์นี้คือ

$$3\binom{\ }{\ } + \binom{r}{2} \text{ วิธี}$$

4. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันอยู่ 3 พจน์ จะได้วิธีเลือกทั้ง 4 พจน์นี้คือ $2\binom{r}{2}$ วิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นั่นก็คือวิธีที่จะเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้มี

$$\begin{pmatrix} r \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} r \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} r \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)!}{4!(r-4)!} + \frac{r(r-1)!}{(r-1)!} + 3\frac{(r)(r-1)(r-2)(r-3)!}{3!(r-3)!} + \frac{r(r-1)(r-2)!}{2!(r-4)!} + 2\frac{(r)(r-1)(r-2)!}{2!(r-2)!}$$

$$= \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{4!} + r + 3\frac{(r)(r-1)(r-2)}{3!} + \frac{r(r-1)}{2!} + 2\frac{(r)(r-1)}{2!}$$

$$= \frac{r}{4!}\left((r-1)(r-2)(r-3) + 4! + 3\frac{(r)(r-1)(r-2)4!}{3!} + \frac{r(r-1)4!}{2!} + 2\frac{(r)(r-1)}{2!}\right)$$

$$= \frac{r}{4!}(r^3 + 6r^2 + 11r + 6)$$

$$= \frac{r}{4!}(r+1)(r+2)(r+3)$$

$$= \frac{(r+3)(r+2)(r+1)(r)(r-1)!}{4!(r-1)!}$$

$$= \begin{pmatrix} r+3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

จำนวน 3×3 จัตุรัสกลแบบ "IENR" ที่เป็นไปได้ในกรณีนี้มี $\begin{pmatrix} r+3 \\ 4 \end{pmatrix}$ วิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

<u>กรณีที่ 3</u> :

สมมติ $a > c$ และ $b > c$ เราจะได้อสมการที่สอดคล้องกันคือ

$$c \le b-1 \le b+d-1 \le a+b+d-c-2 \le r-2 \qquad (9)$$

อสมการคู่แรก $(c \le b-1)$ จะสอดคล้องกับสมมติ $c < b$

$$\begin{array}{lll} c & < & b \\ c & \le & b-1 \end{array}$$

อสมการคู่ที่สอง $(b-1 \le b+d-1)$ ซึ่ง d มีค่าไม่เป็นลบ $(d \ge 0)$

$$\begin{array}{lll} d & \ge & 0 \\ 0 & \le & d \\ b & \le & b+d \qquad \text{(บวก } b \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ b-1 & \le & b+d-1 \qquad \text{(บวก } -1 \text{ ทั้งสองข้าง)} \end{array}$$

อสมการคู่ที่สาม $(b+d-1 \le a+b+d-c-2)$ จะสอดคล้องกับข้อสมมุติ $c < a$

$$\begin{array}{lll} c & < & a \\ c & \le & a-1 \\ 0 & \le & a-c-1 \\ b & \le & a+b-c-1 \qquad \text{(บวก } b \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ b+d & \le & a+b+d-c-1 \qquad \text{(บวก } d \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ b+d-1 & \le & a+b+d-c-2 \qquad \text{(บวก } -1 \text{ ทั้งสองข้าง)} \end{array}$$

อสมการคู่ที่สี่ $(a+b+d-c-2 \le r-2)$ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ (7)

สังเกตเห็นว่าอสมการที่ (9) จะเห็นว่า 4 พจน์นี้ $(c, b-1, b+d-1, a+b+d-c-2)$ มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $r-2$ ดังนั้นเราสามารถเลือกทั้ง 4 พจน์นี้ได้จากเลข $r-1$ ตัว เป็นไปได้ดังนี้

1. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าไม่เท่ากันเลย จะได้วิธีที่เลือกทั้ง 4 พจน์นี้ คือ $\begin{pmatrix} r-1 \\ 4 \end{pmatrix}$ วิธี

2. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันทุกพจน์ จะได้วิธีเลือกทั้ง 4 พจน์นี้ คือ $\begin{pmatrix} r-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ วิธี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันอยู่ 2 พจน์ จะได้วิธีเลือกทั้ง 4 พจน์นี้คือ

$$3\binom{r-1}{3} + \binom{r-1}{2} \text{ วิธี}$$

4. ถ้าทั้ง 4 พจน์นี้มีค่าเท่ากันอยู่ 3 พจน์ จะได้วิธีเลือกทั้ง 4 พจน์นี้คือ $2\binom{r-1}{2}$ วิธี

นั่นก็คือวิธีที่จะเลือกพจน์ทั้ง 4 พจน์นี้มี

$$\binom{r-1}{4} + \binom{r-1}{1} + 3\binom{r-1}{3} + \binom{r-1}{2} + 2\binom{r-1}{2} \text{ วิธี}$$

ซึ่ง $\binom{r-1}{4} + \binom{r-1}{1} + 3\binom{r-1}{3} + \binom{r-1}{2} + 2\binom{r-1}{2}$

$$= \frac{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)!}{4!(r-5)!} + \frac{(r-1)(r-2)!}{1!(r-2)!}$$

$$+ 3\frac{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)!}{3!(r-4)!} + \frac{(r-1)(r-2)(r-3)!}{2!(r-3)!}$$

$$+ 2\frac{(r-1)(r-2)(r-3)!}{2!(r-3)!}$$

$$= \frac{(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{4!} + (r-1) + 3\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{3!}$$

$$+ \frac{(r-1)(r-2)}{2!} + 2!\frac{(r-1)(r-2)}{2!}$$

$$= \frac{(r-1)}{4!}\left((r-2)(r-3)(r-4) + 4! + 3\frac{(r-2)(r-3)4!}{3!} + \frac{(r-2)4!}{2!}\right.$$

$$\left. + 2\frac{(r-2)4!}{2!}\right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$= \frac{(r-1)}{4!}(r^3+3r^2+2r)$$

$$= \frac{(r-1)}{4!}(r)(r+1)(r+2)$$

$$= \frac{(r+2)(r+1)(r)(r-1)(r+2)!}{4!(r-2)!}$$

$$= \begin{pmatrix} r+2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

จำนวน 3×3 จัตุรัสกลแบบ "IENR" ที่เป็นไปได้ในกรณีนี้มี $\begin{pmatrix} r+2 \\ 4 \end{pmatrix}$ แบบ

สรุปได้ว่า จำนวนแบบที่เป็นไปได้ของ 3×3 จัตุรัสกลแบบ "IENR" เป็นไปตามสมการ (1) นั่นก็คือ

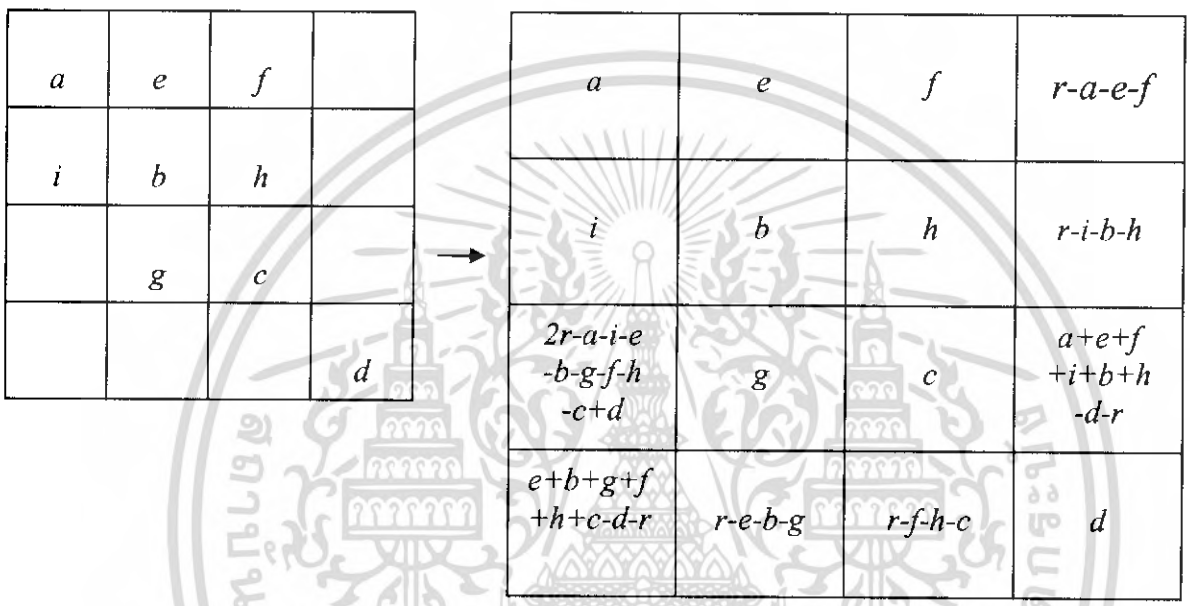
$$H_3(r) = \begin{pmatrix} r+4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r+3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r+2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4
การหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR ขนาด 4×4

4.1 จำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกลแบบ "IENR" ขนาด 4×4

กำหนดเงื่อนไขของจัตุรัสกล IENR 4×4 ขึ้นจากตารางด้านล่าง ซึ่งจะมีตัวแปรที่จำเป็นอยู่ 9 ตัว คือ *a, b, c, d, e, f, g, h* และ *i*



รูปที่ 4.1 จัตุรัสกลแบบ "IENR" 4×4

การตั้งกรณีให้สัมพันธ์และครอบคลุมตัวแปรทั้ง 9 ตัว *(a, b, c, d, e, f, g, h* และ *i)* ด้วยการคำนวณและตัดกรณีที่ซ้ำที่เหมือนกับการตั้งกรณีของจัตุรัสกล IENR 3×3 ที่มีถึง 60 กรณีนั้น จะเป็นการยาก เนื่องจาก กรณี(เฉพาะ≤) ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของจัตุรัสกล IENR 4×4 นั้นมีมากโดย แต่ละกรณีจะมี 8 ตำแหน่งดังนี้

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

(..≤..)และ(..≤..)และ(..≤..)และ(..≤..)และ(..≤..)และ(..≤..)และ(..≤..)และ(..≤..)

เมื่อเราพิจารณาจาก 9 ตัวแปร *(a, b, c, d, e, f, g, h* และ *i)* จะพบว่าแต่ละตำแหน่งที่เป็นไปได้มี ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$(a \le b), (a \le c), (a \le d), (a \le e), (a \le f), (a \le g), (a \le h), (a \le i)$
$(b \le a), (b \le c), (b \le d), (b \le e), (b \le f), (b \le g), (b \le h), (b \le i)$
$(c \le b), (c \le a), (c \le d), (c \le e), (c \le f), (c \le g), (c \le h), (c \le i)$
$(d \le b), (d \le c), (d \le a), (d \le e), (d \le f), (d \le g), (d \le h), (d \le i)$
$(e \le b), (e \le c), (e \le d), (e \le a), (e \le f), (e \le g), (e \le h), (e \le i)$
$(f \le b), (f \le c), (f \le d), (f \le e), (f \le a), (f \le g), (f \le h), (f \le i)$
$(g \le b), (g \le c), (g \le d), (g \le e), (g \le f), (g \le a), (g \le h), (g \le i)$
$(h \le b), (h \le c), (h \le d), (h \le e), (h \le f), (h \le g), (h \le a), (h \le i)$
$(i \le b), (i \le c), (i \le d), (i \le e), (i \le f), (i \le g), (i \le h), (i \le a)$

} 72 แบบ

ดังนั้นกรณีทั้งหมด (เฉพาะ $\le$) จึงมีเท่ากับ $\binom{72}{8} = \frac{72!}{64!(8!)} = 11{,}969{,}016{,}345$ กรณี

จึงได้ทำการหาผลเฉลยและความเป็นไปได้ของจำนวนเมทริกซ์จากการสังเกตจาก 81 กรณี ซึ่งครอบคลุมเครื่องหมาย ($\le$, $<$) และตัวแปรทั้ง 9 ตัว *(a, b, c, d, e, f, g, h และ i)* ด้วยการเขียนโปรแกรม มีลำดับขั้นตอนดังนี้

ตั้งกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของตัวแปรทั้ง 9 ตัว *(a, b, c, d, e, f, g, h และ i)* ซึ่งมีทั้งหมด 81 กรณี ดังนี้

1. $(a \le b)$และ$(a \le c)$และ$(a \le d)$และ$(a \le e)$และ$(a \le f)$และ$(a \le g)$และ$(a \le h)$และ$(a \le i)$
2. $(b \le a)$และ$(b \le c)$และ$(b \le d)$และ$(b \le e)$และ$(b \le f)$และ$(b \le g)$และ$(b \le h)$และ$(b \le i)$
3. $(c \le b)$และ$(c \le a)$และ$(c \le d)$และ$(c \le e)$และ$(c \le f)$และ$(c \le g)$และ$(c \le h)$และ$(c \le i)$
4. $(d \le b)$และ$(d \le c)$และ$(d \le a)$และ$(d \le e)$และ$(d \le f)$และ$(d \le g)$และ$(d \le h)$และ$(d \le i)$
5. $(e \le b)$และ$(e \le c)$และ$(e \le d)$และ$(e \le a)$และ$(e \le f)$และ$(e \le g)$และ$(e \le h)$และ$(e \le i)$
6. $(f \le b)$และ$(f \le c)$และ$(f \le d)$และ$(f \le e)$และ$(f \le a)$และ$(f \le g)$และ$(f \le h)$และ$(f \le i)$
7. $(g \le b)$และ$(g \le c)$และ$(g \le d)$และ$(g \le e)$และ$(g \le f)$และ$(g \le a)$และ$(g \le h)$และ$(g \le i)$
8. $(h \le b)$และ$(h \le c)$และ$(h \le d)$และ$(h \le e)$และ$(h \le f)$และ$(h \le g)$และ$(h \le a)$และ$(h \le i)$
9. $(i \le b)$และ$(i \le c)$และ$(i \le d)$และ$(i \le e)$และ$(i \le f)$และ$(i \le g)$และ$(i \le h)$และ$(i \le a)$

10. $(a < b)$และ$(a \le c)$และ$(a \le d)$และ$(a \le e)$และ$(a \le f)$และ$(a \le g)$และ$(a \le h)$และ$(a \le i)$
11. $(b < a)$และ$(b \le c)$และ$(b \le d)$และ$(b \le e)$และ$(b \le f)$และ$(b \le g)$และ$(b \le h)$และ$(b \le i)$
12. $(c < b)$และ$(c \le a)$และ$(c \le d)$และ$(c \le e)$และ$(c \le f)$และ$(c \le g)$และ$(c \le h)$และ$(c \le i)$
13. $(d < b)$และ$(d \le c)$และ$(d \le a)$และ$(d \le e)$และ$(d \le f)$และ$(d \le g)$และ$(d \le h)$และ$(d \le i)$
14. $(e < b)$และ$(e \le c)$และ$(e \le d)$และ$(e \le a)$และ$(e \le f)$และ$(e \le g)$และ$(e \le h)$และ$(e \le i)$
15. $(f < b)$และ$(f \le c)$และ$(f \le d)$และ$(f \le e)$และ$(f \le a)$และ$(f \le g)$และ$(f \le h)$และ$(f \le i)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

16. $(g < b)$และ$(g \leq c)$และ$(g \leq d)$และ$(g \leq e)$และ$(g \leq f)$และ$(g \leq a)$และ$(g \leq h)$และ$(g \leq i)$
17. $(h < b)$และ$(h \leq c)$และ$(h \leq d)$และ$(h \leq e)$และ$(h \leq f)$และ$(h \leq g)$และ$(h \leq a)$และ$(h \leq i)$
18. $(i < b)$และ$(i \leq c)$และ$(i \leq d)$และ$(i \leq e)$และ$(i \leq f)$และ$(i \leq g)$และ$(i \leq h)$และ$(i \leq a)$

19. $(a < b)$และ$(a < c)$และ$(a \leq d)$และ$(a \leq e)$และ$(a \leq f)$และ$(a \leq g)$และ$(a \leq h)$และ$(a \leq i)$
20. $(b < a)$และ$(b < c)$และ$(b \leq d)$และ$(b \leq e)$และ$(b \leq f)$และ$(b \leq g)$และ$(b \leq h)$และ$(b \leq i)$
21. $(c < b)$และ$(c < a)$และ$(c \leq d)$และ$(c \leq e)$และ$(c \leq f)$และ$(c \leq g)$และ$(c \leq h)$และ$(c \leq i)$
22. $(d < b)$และ$(d < c)$และ$(d \leq a)$และ$(d \leq e)$และ$(d \leq f)$และ$(d \leq g)$และ$(d \leq h)$และ$(d \leq i)$
23. $(e < b)$และ$(e < c)$และ$(e \leq d)$และ$(e \leq a)$และ$(e \leq f)$และ$(e \leq g)$และ$(e \leq h)$และ$(e \leq i)$
24. $(f < b)$และ$(f < c)$และ$(f \leq d)$และ$(f \leq e)$และ$(f \leq a)$และ$(f \leq g)$และ$(f \leq h)$และ$(f \leq i)$
25. $(g < b)$และ$(g < c)$และ$(g \leq d)$และ$(g \leq e)$และ$(g \leq f)$และ$(g \leq a)$และ$(g \leq h)$และ$(g \leq i)$
26. $(h < b)$และ$(h < c)$และ$(h \leq d)$และ$(h \leq e)$และ$(h \leq f)$และ$(h \leq g)$และ$(h \leq a)$และ$(h \leq i)$
27. $(i < b)$และ$(i < c)$และ$(i \leq d)$และ$(i \leq e)$และ$(i \leq f)$และ$(i \leq g)$และ$(i \leq h)$และ$(i \leq a)$

28. $(a < b)$และ$(a < c)$และ$(a < d)$และ$(a \leq e)$และ$(a \leq f)$และ$(a \leq g)$และ$(a \leq h)$และ$(a \leq i)$
29. $(b < a)$และ$(b < c)$และ$(b < d)$และ$(b \leq e)$และ$(b \leq f)$และ$(b \leq g)$และ$(b \leq h)$และ$(b \leq i)$
30. $(c < b)$และ$(c < a)$และ$(c < d)$และ$(c \leq e)$และ$(c \leq f)$และ$(c \leq g)$และ$(c \leq h)$และ$(c \leq i)$
31. $(d < b)$และ$(d < c)$และ$(d < a)$และ$(d \leq e)$และ$(d \leq f)$และ$(d \leq g)$และ$(d \leq h)$และ$(d \leq i)$
32. $(e < b)$และ$(e < c)$และ$(e < d)$และ$(e \leq a)$และ$(e \leq f)$และ$(e \leq g)$และ$(e \leq h)$และ$(e \leq i)$
33. $(f < b)$และ$(f < c)$และ$(f < d)$และ$(f \leq e)$และ$(f \leq a)$และ$(f \leq g)$และ$(f \leq h)$และ$(f \leq i)$
34. $(g < b)$และ$(g < c)$และ$(g < d)$และ$(g \leq e)$และ$(g \leq f)$และ$(g \leq a)$และ$(g \leq h)$และ$(g \leq i)$
35. $(h < b)$และ$(h < c)$และ$(h < d)$และ$(h \leq e)$และ$(h \leq f)$และ$(h \leq g)$และและ$(h \leq a)$และ$(h \leq i)$
36. $(i < b)$และ$(i < c)$และ$(i < d)$และ$(i \leq e)$และ$(i \leq f)$และ$(i \leq g)$และ$(i \leq h)$และ$(i \leq a)$

37. $(a < b)$และ$(a < c)$และ$(a < d)$และ$(a < e)$และ$(a \leq f)$และ$(a \leq g)$และ$(a \leq h)$และ$(a \leq i)$
38. $(b < a)$และ$(b < c)$และ$(b < d)$และ$(b < e)$และ$(b \leq f)$และ$(b \leq g)$และ$(b \leq h)$และ$(b \leq i)$
39. $(c < b)$และ$(c < a)$และ$(c < d)$และ$(c < e)$และ$(c \leq f)$และ$(c \leq g)$และ$(c \leq h)$และ$(c \leq i)$
40. $(d < b)$และ$(d < c)$และ$(d < a)$และ$(d < e)$และ$(d \leq f)$และ$(d \leq g)$และ$(d \leq h)$และ$(d \leq i)$
41. $(e < b)$และ$(e < c)$และ$(e < d)$และ$(e < a)$และ$(e \leq f)$และ$(e \leq g)$และ$(e \leq h)$และ$(e \leq i)$
42. $(f < b)$และ$(f < c)$และ$(f < d)$และ$(f < e)$และ$(f \leq a)$และ$(f \leq g)$และ$(f \leq h)$และ$(f \leq i)$
43. $(g < b)$และ$(g < c)$และ$(g < d)$และ$(g < e)$และ$(g \leq f)$และ$(g \leq a)$และ$(g \leq h)$และ$(g \leq i)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

44. (h < b)และ(h < c)และ(h < d)และ(h < e)และ(h $\leq$ f)และ(h $\leq$ g)และ(h $\leq$ a)และ(h $\leq$ i)
45. (i < b)และ(i < c)และ(i < d)และ(i < e)และ(i $\leq$ f)และ(i $\leq$ g)และ(i $\leq$ h)และ(i $\leq$ a)

46. (a < b)และ(a < c)และ(a < d)และ(a < e)และ(a < f)และ(a $\leq$ g)และ(a $\leq$ h)และ(a $\leq$ i)
47. (b < a)และ(b < c)และ(b < d)และ(b < e)และ(b < f)และ(b $\leq$ g)และ(b $\leq$ h)และ(b $\leq$ i)
48. (c < b)และ(c < a)และ(c < d)และ(c < e)และ(c < f)และ(c $\leq$ g)และ(c $\leq$ h)และ(c $\leq$ i)
49. (d < b)และ(d < c)และ(d < a)และ(d < e)และ(d < f)และ(d $\leq$ g)และ(d $\leq$ h)และ(d $\leq$ i)
50. (e < b)และ(e < c)และ(e < d)และ(e < a)และ(e < f)และ(e $\leq$ g)และ(e $\leq$ h)และ(e $\leq$ i)
51. (f < b)และ(f < c)และ(f < d)และ(f < e)และ(f < a)และ(f $\leq$ g)และ(f $\leq$ h)และ(f $\leq$ i)
52. (g < b)และ(g < c)และ(g < d)และ(g < e)และ(g < f)และ(g $\leq$ a)และ(g $\leq$ h)และ(g $\leq$ i)
53. (h < b)และ(h < c)และ(h < d)และ(h < e)และ(h < f)และ(h $\leq$ g)และ(h $\leq$ a)และ(h $\leq$ i)
54. (i < b)และ(i < c)และ(i < d)และ(i < e)และ(i < f)และ(i $\leq$ g)และ(i $\leq$ h)และ(i $\leq$ a)

55. (a < b)และ(a < c)และ(a < d)และ(a < e)และ(a < f)และ(a < g)และ(a $\leq$ h)และ(a $\leq$ i)
56. (b < a)และ(b < c)และ(b < d)และ(b < e)และ(b < f)และ(b < g)และ(b $\leq$ h)และ(b $\leq$ i)
57. (c < b)และ(c < a)และ(c < d)และ(c < e)และ(c < f)และ(c < g)และ(c $\leq$ h)และ(c $\leq$ i)
58. (d < b)และ(d < c)และ(d < a)และ(d < e)และ(d < f)และ(d < g)และ(d $\leq$ h)และ(d $\leq$ i)
59. (e < b)และ(e < c)และ(e < d)และ(e < a)และ(e < f)และ(e < g)และ(e $\leq$ h)และ(e $\leq$ i)
60. (f < b)และ(f < c)และ(f < d)และ(f < e)และ(f < a)และ(f < g)และ(f $\leq$ h)และ(f $\leq$ i)
61. (g < b)และ(g < c)และ(g < d)และ(g < e)และ(g < f)และ(g < a)และ(g $\leq$ h)และ(g $\leq$ i)
62. (h < b)และ(h < c)และ(h < d)และ(h < e)และ(h < f)และ(h < g)และ(h $\leq$ a)และ(h $\leq$ i)
63. (i < b)และ(i < c)และ(i < d)และ(i < e)และ(i < f)และ(i < g)และ(i $\leq$ h)และ(i $\leq$ a)

64. (a < b)และ(a < c)และ(a < d)และ(a < e)และ(a < f)และ(a < g)และ(a < h)และ(a $\leq$ i)
65. (b < a)และ(b < c)และ(b < d)และb < e)และ(b < f)และ(b < g)และ(b < h)และ(b $\leq$ i)
66. (c < b)และ(c < a)และ(c < d)และ(c < e)และ(c < f)และ(c < g)และ(c < h)และ(c $\leq$ i)
67. (d < b)และ(d < c)และ(d < a)และ(d < e)และ(d < f)และ(d < g)และ(d < h)และ(d $\leq$ i)
68. (e < b)และ(e < c)และ(e < d)และ(e < a)และ(e < f)และ(e < g)และ(e < h)และ(e $\leq$ i)
69. (f < b)และ(f < c)และ(f < d)และ(f < e)และ(f < a)และ(f < g)และ(f < h)และ(f $\leq$ i)
70. (g < b)และ(g < c)และ(g < d)และ(g < e)และ(g < f)และ(g < a)และ(g < h)และ(g $\leq$ i)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

71. (h < b)และ(h < c)และ(h < d)และ(h < e)และ(h < f)และ(h < g)และ(h < a)และ(h $\leq$ i)

72. (i < b)และ(i < c)และ(i < d)และ(i < e)และ(i < f)และ(i < g)และ(i < h)และ(i $\leq$ a)

73. (a < b)และ(a < c)และ(a < d)และ(a < e)และ(a < f)และ(a < g)และ(a < h)และ(a < i)

74. (b < a)และ(b < c)และ(b < d)และ(b < e)และ(b < f)และ(b < g)และ(b < h)และ(b < i)

75. (c < b)และ(c < a)และ(c < d)และ(c < e)และ(c < f)และ(c < g)และ(c < h)และ(c < i)

76. (d < b)และ(d < c)และ(d < a)และ(d < e)และ(d < f)และ(d < g)และ(d < h)และ(d < i)

77. (e < b)และ(e < c)และ(e < d)และ(e < a)และ(e < f)และ(e < g)และ(e < h)และ(e < i)

78. (f < b)และ(f < c)และ(f < d)และ(f < e)และ(f < a)และ(f < g)และ(f < h)และ(f < i)

79. (g < b)และ(g < c)และ(g < d)และ(g < e)และ(g < f)และ(g < a)และ(g < h)และ(g < i)

80. (h < b)และ(h < c)และ(h < d)และ(h < e)และ(h < f)และ(h < g)และ(h < a)และ(h < i)

81. (i < b)และ(i < c)และ(i < d)และ(i < e)และ(i < f)และ(i < g)และ(i < h)และ(i < a)

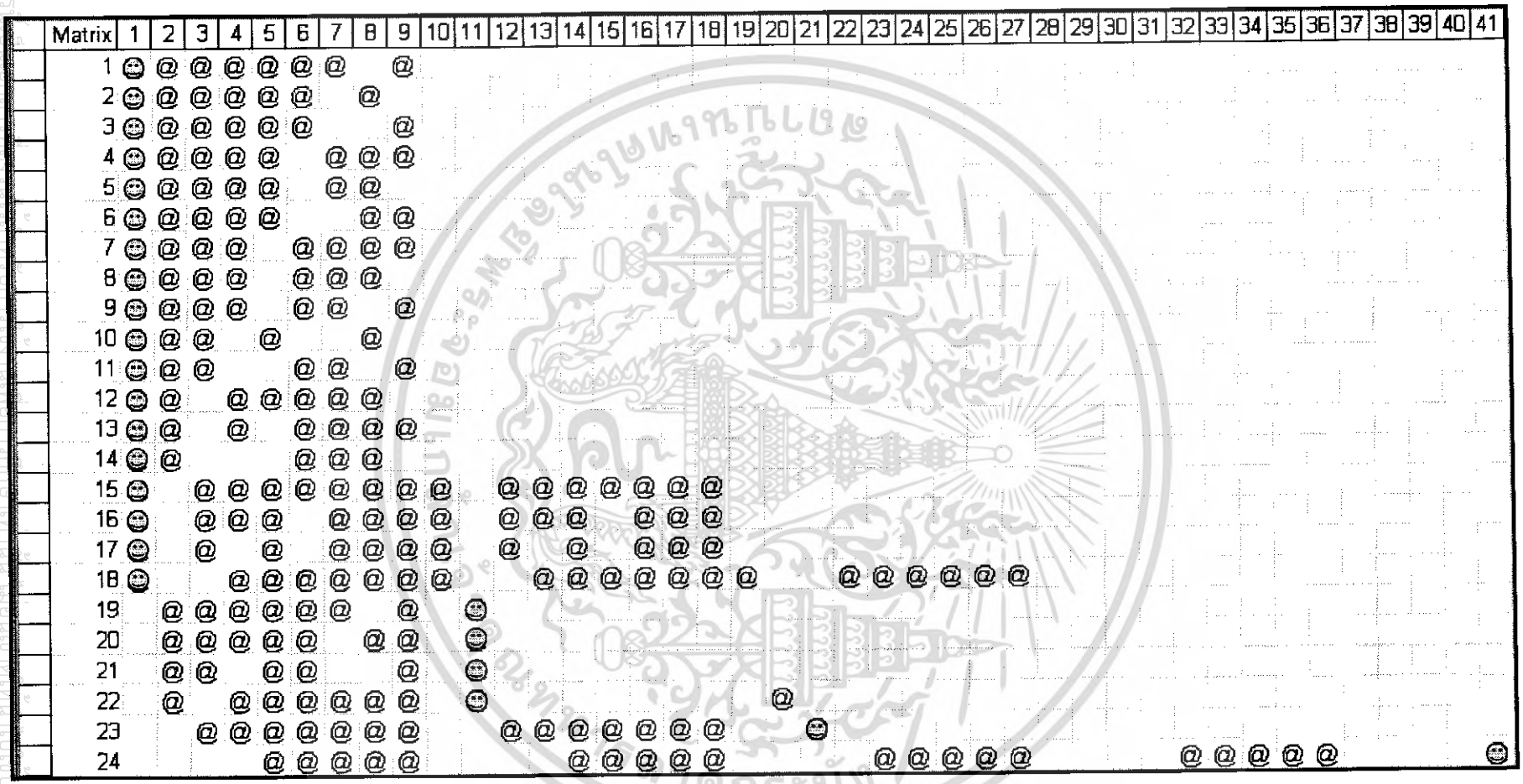
จากเงื่อนไขทั้ง 81 เงื่อนไขนี้ เราได้นำมาเขียนโปรแกรมที่จะแสดงให้เห็นว่าแต่ละเมทริกซ์ผลเฉลยนั้น ค่า *a, b, c, d, e, f, g, h* และ *i* อยู่ในเงื่อนไขใดบ้าง จาก 81 เงื่อนไข เพื่อที่เราจะได้นำมาทำการสังเกตและตัดเงื่อนไขที่ซ้ำ เพื่อให้เหลือจำนวนของเงื่อนไขน้อยสุดที่ครอบคลุมผลเฉลยทั้งหมด

ผลที่ได้จากการเขียนโปรแกรมแสดงผลที่นำมาสังเกตนั้นเป็นดังตารางที่ 1, ตารางที่ 2, ตารางที่ 3 และ ตารางที่ 4 ดังนี้

หมายเหตุ: สัญลักษณ์ ☺ หมายถึง ได้เลือกเงื่อนไขนี้ให้เมทริกซ์นั้นๆ ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.1 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อตัวคงค่ากล (r) เท่ากับ 1 (ได้จำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 24 แบบ)



ตารางที่ 4.2 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อตัวคงค่ากล (r) เท่ากับ 2 (ให้จำนวนแม่พิมพ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 282 แบบ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ ดัดแปลง เผยแพร่ หรือแสวงหาผลประโยชน์ทางการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

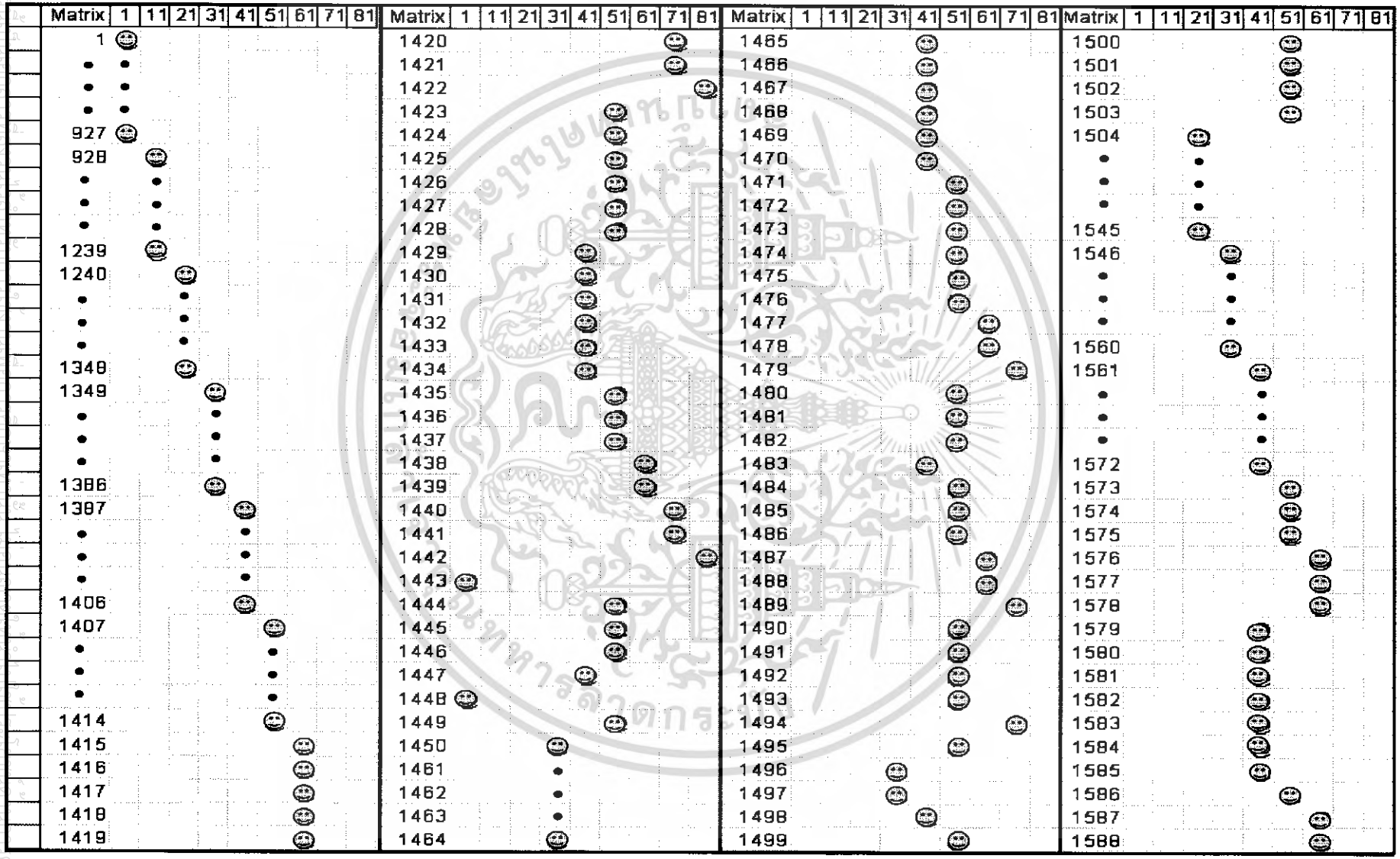
ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

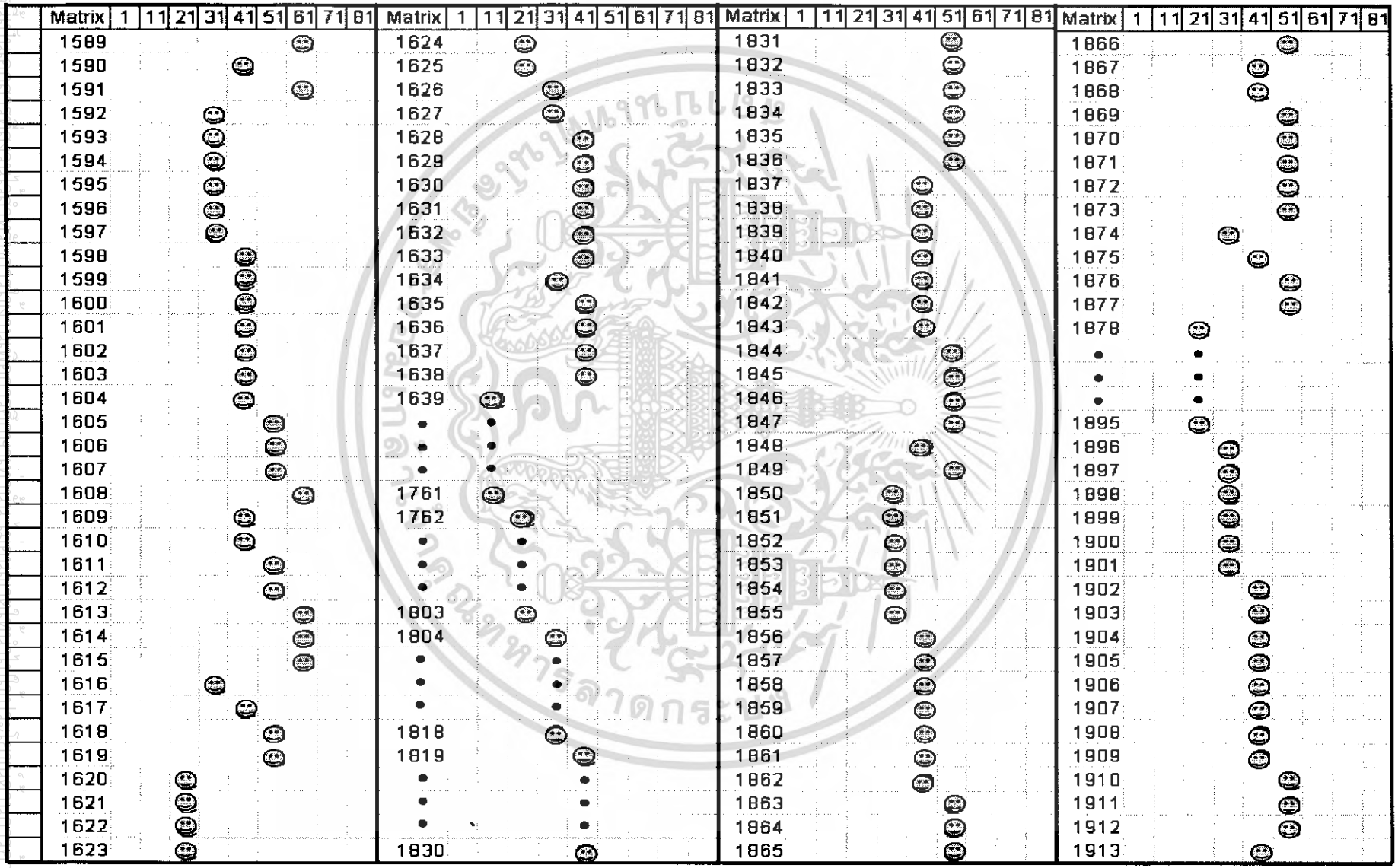
ตารางที่ 4.2 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.3 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อตัวคงค่ากล (r) เท่ากับ3 (ได้จำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 2,008 แบบ)



ตารางที่ 4.3 (ต่อ)



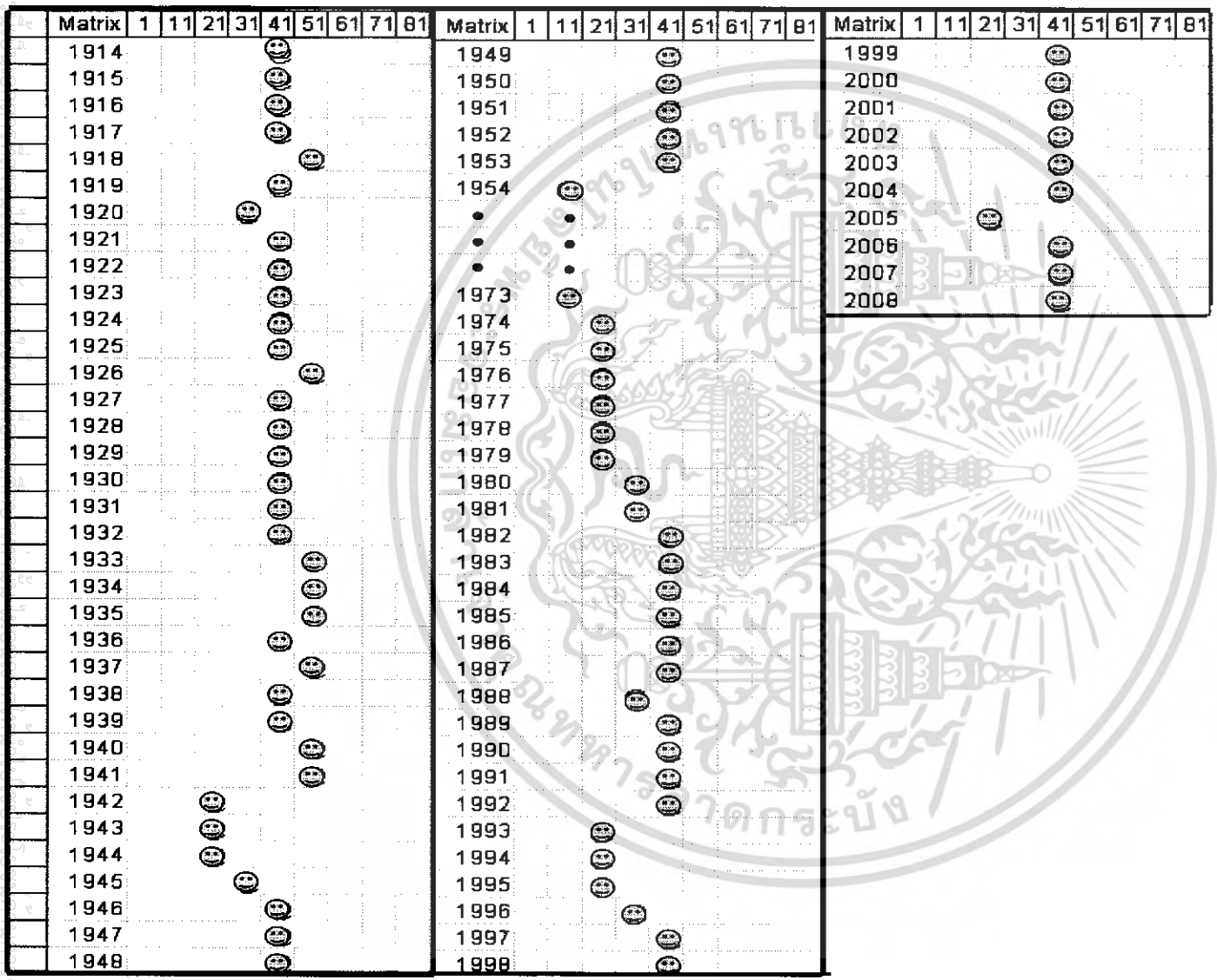
Matrix	1	11	21	31	41	51	61	71	81
1589							●		
1590					●				
1591							●		
1592				●					
1593				●					
1594				●					
1595				●					
1596				●					
1597				●					
1598					●				
1599					●				
1600					●				
1601					●				
1602					●				
1603					●				
1604					●				
1605						●			
1606						●			
1607						●			
1608							●		
1609					●				
1610					●				
1611						●			
1612						●			
1613							●		
1614							●		
1615							●		
1616				●					
1617					●				
1618						●			
1619						●			
1620			●						
1621			●						
1622			●						
1623			●						

Matrix	1	11	21	31	41	51	61	71	81
1624			●						
1625			●						
1626				●					
1627				●					
1628					●				
1629					●				
1630					●				
1631					●				
1632					●				
1633					●				
1634				●					
1635					●				
1636					●				
1637					●				
1638					●				
1639		●							
		•							
		•							
		•							
1761		●							
1762			●						
		•							
		•							
		•							
1803			●						
1804				●					
		•							
		•							
		•							
1818				●					
1819					●				
		•							
		•							
		•							
1830					●				

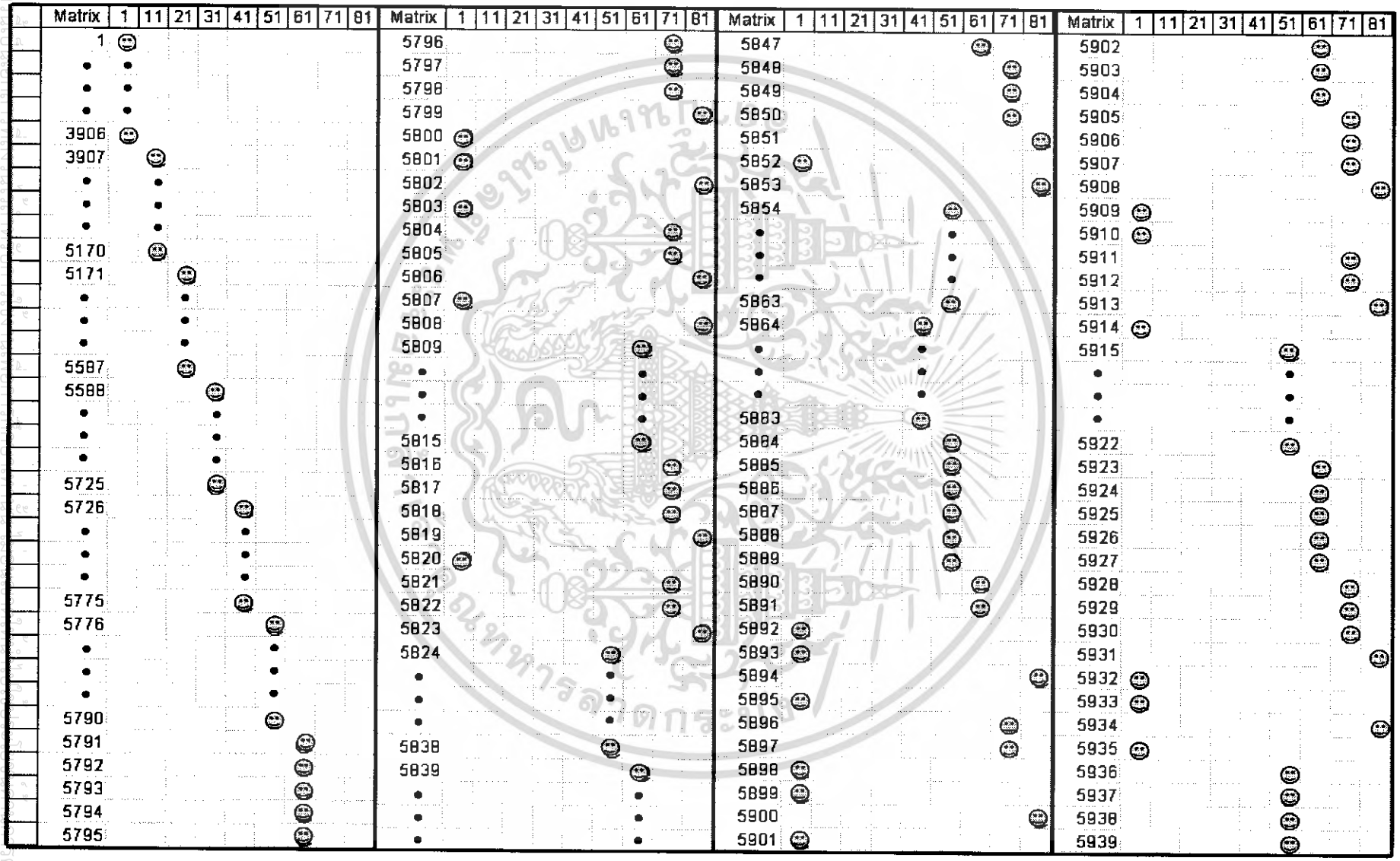
Matrix	1	11	21	31	41	51	61	71	81
1831						●			
1832						●			
1833						●			
1834						●			
1835						●			
1836						●			
1837					●				
1838					●				
1839					●				
1840					●				
1841					●				
1842					●				
1843					●				
1844						●			
1845						●			
1846						●			
1847						●			
1848					●				
1849						●			
1850				●					
1851				●					
1852				●					
1853				●					
1854				●					
1855				●					
1856					●				
1857					●				
1858					●				
1859					●				
1860					●				
1861					●				
1862					●				
1863						●			
1864						●			
1865						●			

Matrix	1	11	21	31	41	51	61	71	81
1866						●			
1867					●				
1868					●				
1869						●			
1870						●			
1871						●			
1872						●			
1873						●			
1874				●					
1875					●				
1876						●			
1877						●			
1878			●						
			•						
			•						
			•						
1895			●						
1896				●					
1897				●					
1898				●					
1899				●					
1900				●					
1901				●					
1902					●				
1903					●				
1904					●				
1905					●				
1906					●				
1907					●				
1908					●				
1909					●				
1910						●			
1911						●			
1912						●			
1913					●				

ตารางที่ 4.3 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
1914
1915
1916
1917
1918
1919
1920
1921
1922
1923
1924
1925
1926
1927
1928
1929
1930
1931
1932
1933
1934
1935
1936
1937
1938
1939
1940
1941
1942
1943
1944
1945
1946
1947
1948
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
1949
1950
1951
1952
1953
1954
1973
1974
1975
1976
1977
1978
1979
1980
1981
1982
1983
1984
1985
1986
1987
1988
1989
1990
1991
1992
1993
1994
1995
1996
1997
1998
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
1999
2000
2001
2002
2003
2004
2005
2006
2007
2008

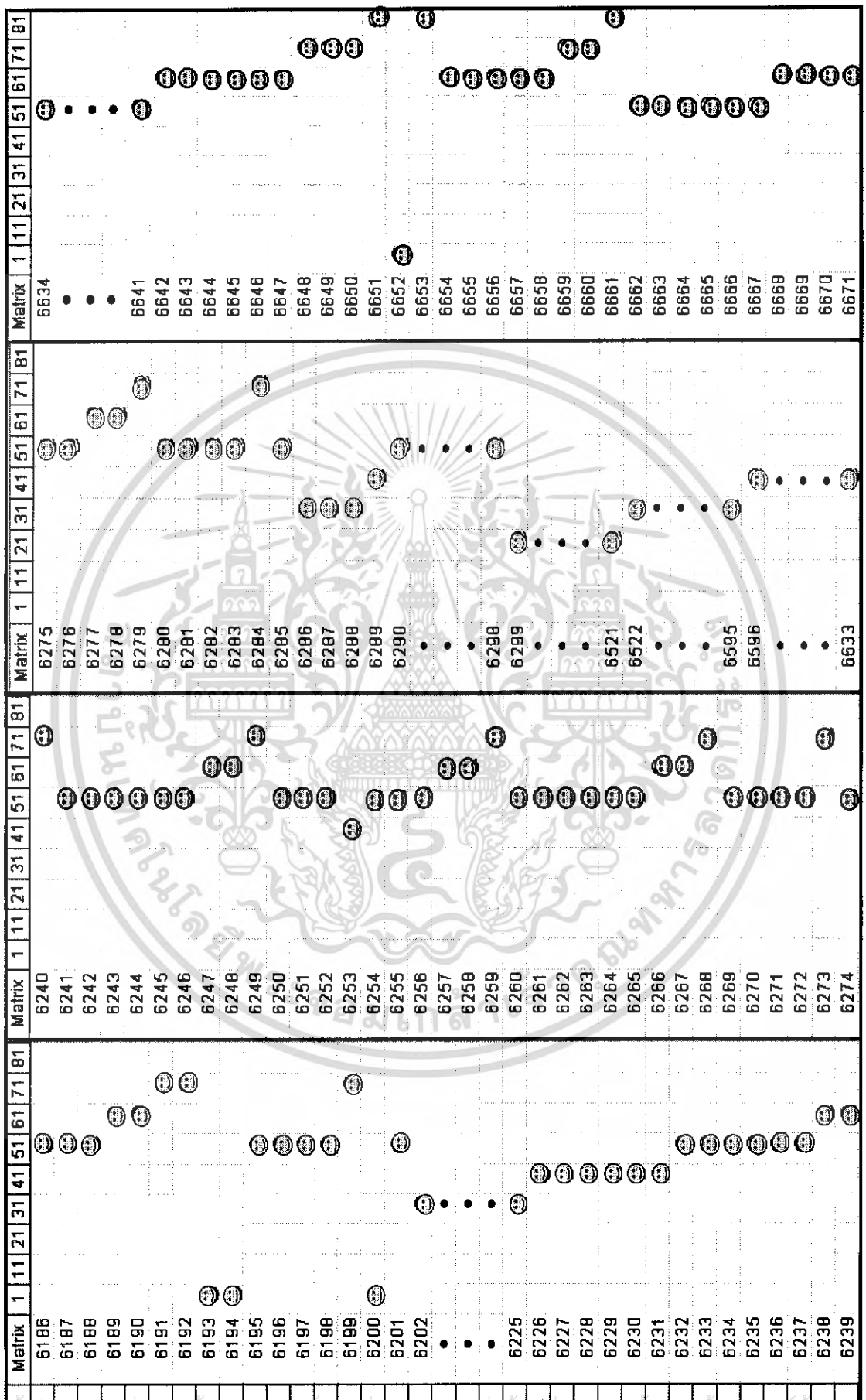
ตารางที่ 4.4 จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อตัวคงค่ากล (r) เท่ากับ 4 (ได้จำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด 10,147 แบบ)



ตารางที่ 4.4 (ต่อ)

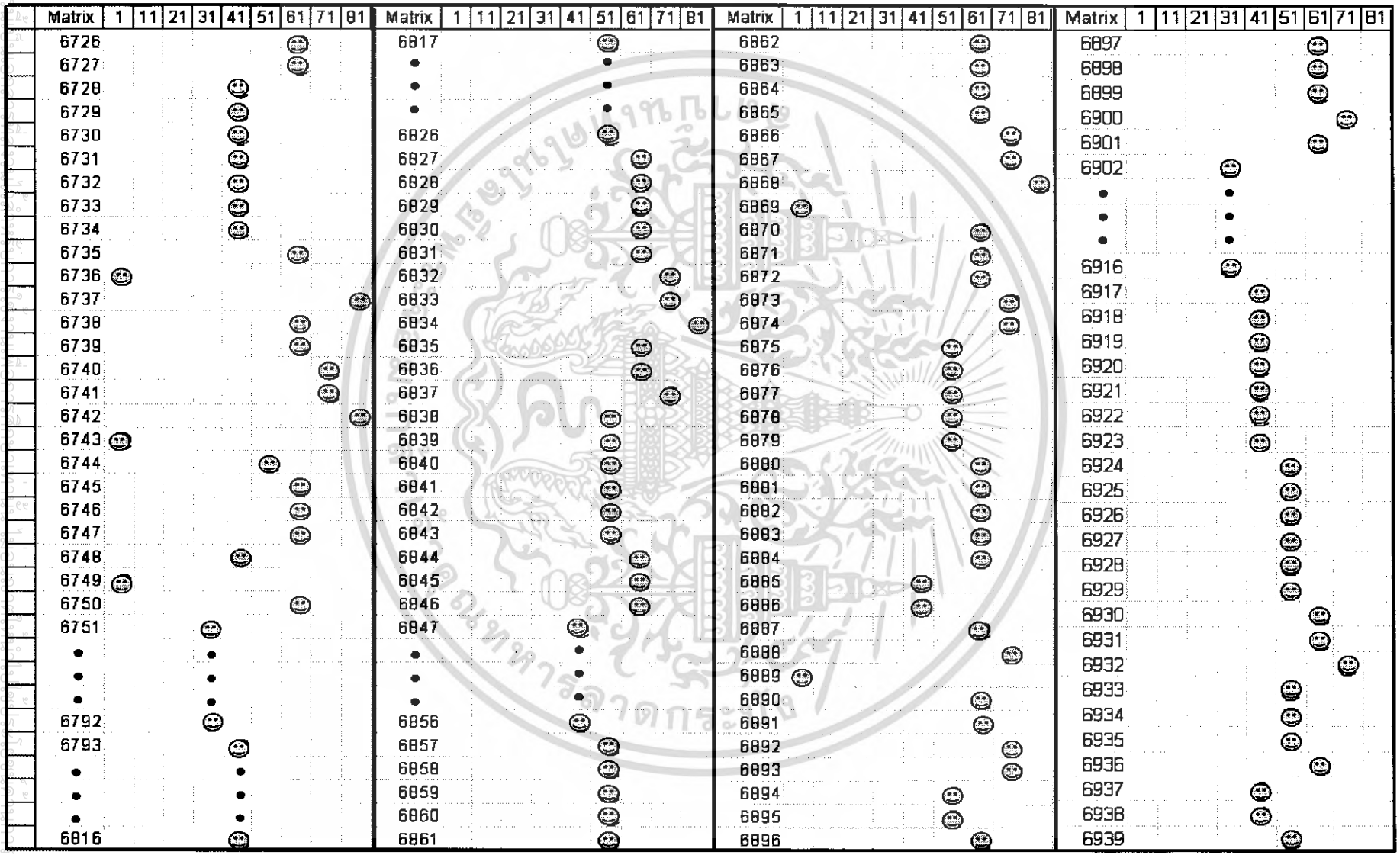
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)

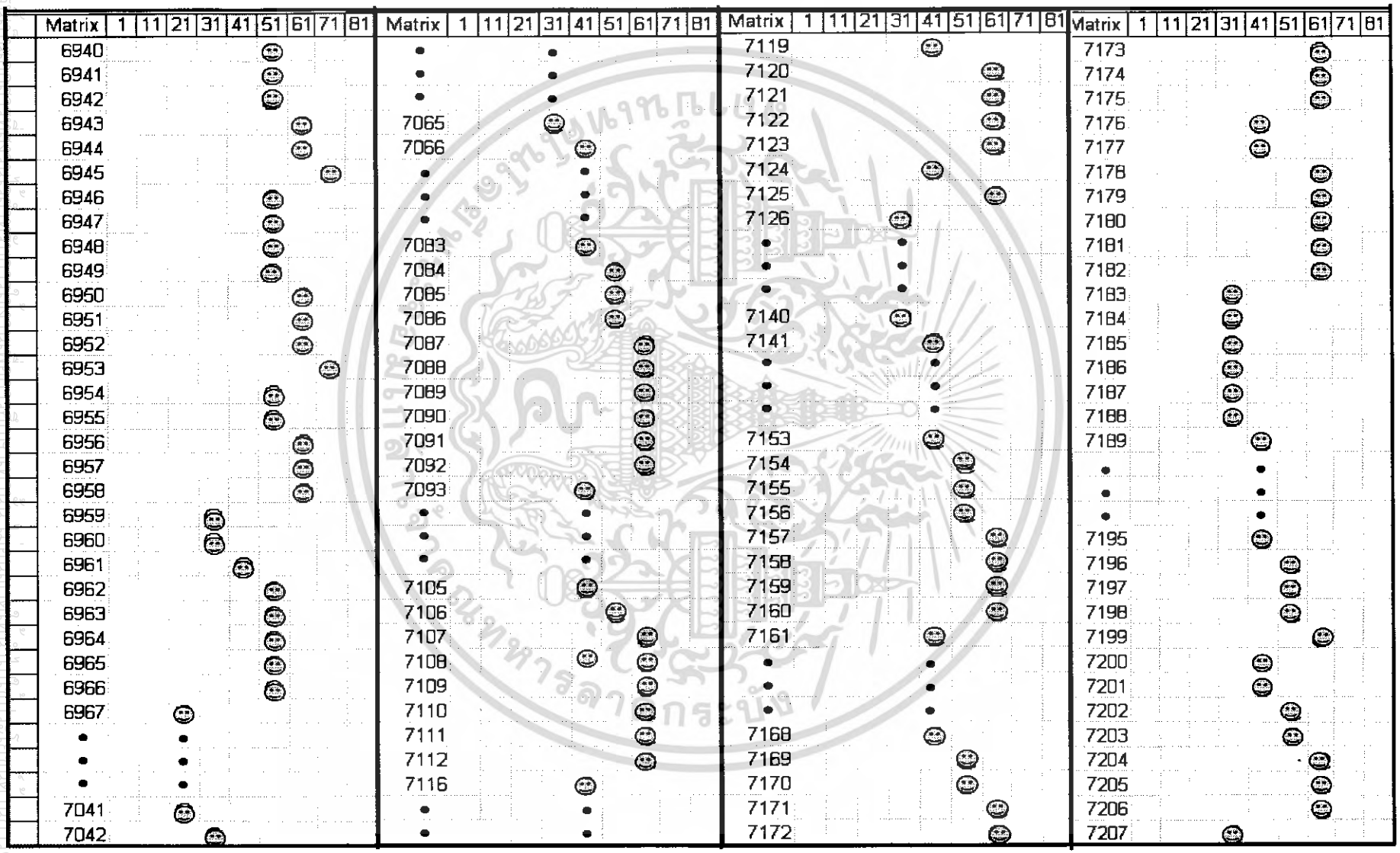


เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

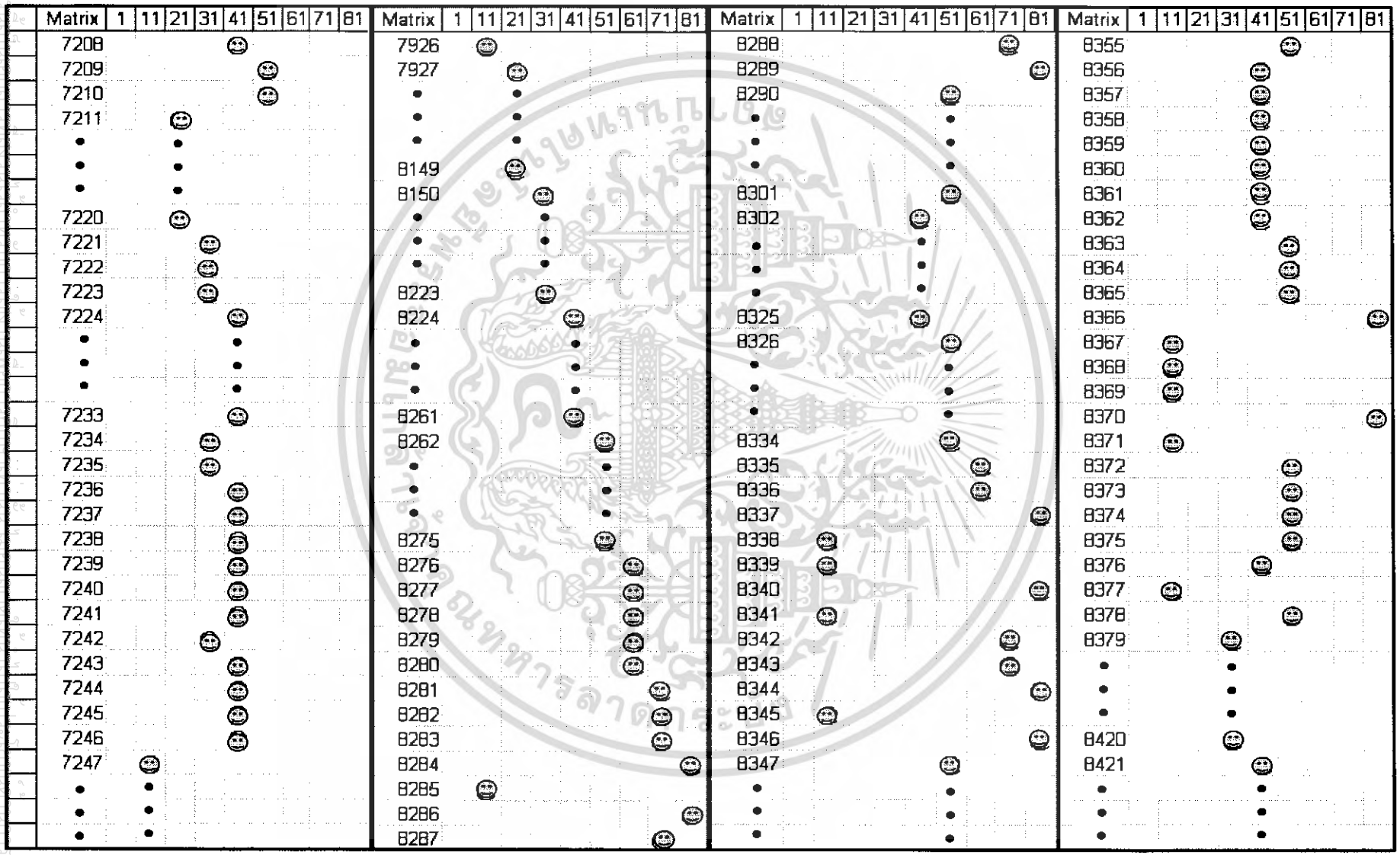
ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
6726
6727
6728
6729
6730
6731
6732
6733
6734
6735
6736
6737
6738
6739
6740
6741
6742
6743
6744
6745
6746
6747
6748
6749
6750
6751
6792
6793
6816
6817
6826
6827
6828
6829
6830
6831
6832
6833
6834
6835
6836
6837
6838
6839
6840
6841
6842
6843
6844
6845
6846
6847
6856
6857
6858
6859
6860
6861
6862
6863
6864
6865
6866
6867
6868
6869
6870
6871
6872
6873
6874
6875
6876
6877
6878
6879
6880
6881
6882
6883
6884
6885
6886
6887
6888
6889
6890
6891
6892
6893
6894
6895
6896
6897
6898
6899
6900
6901
6902
6916
6917
6918
6919
6920
6921
6922
6923
6924
6925
6926
6927
6928
6929
6930
6931
6932
6933
6934
6935
6936
6937
6938
6939

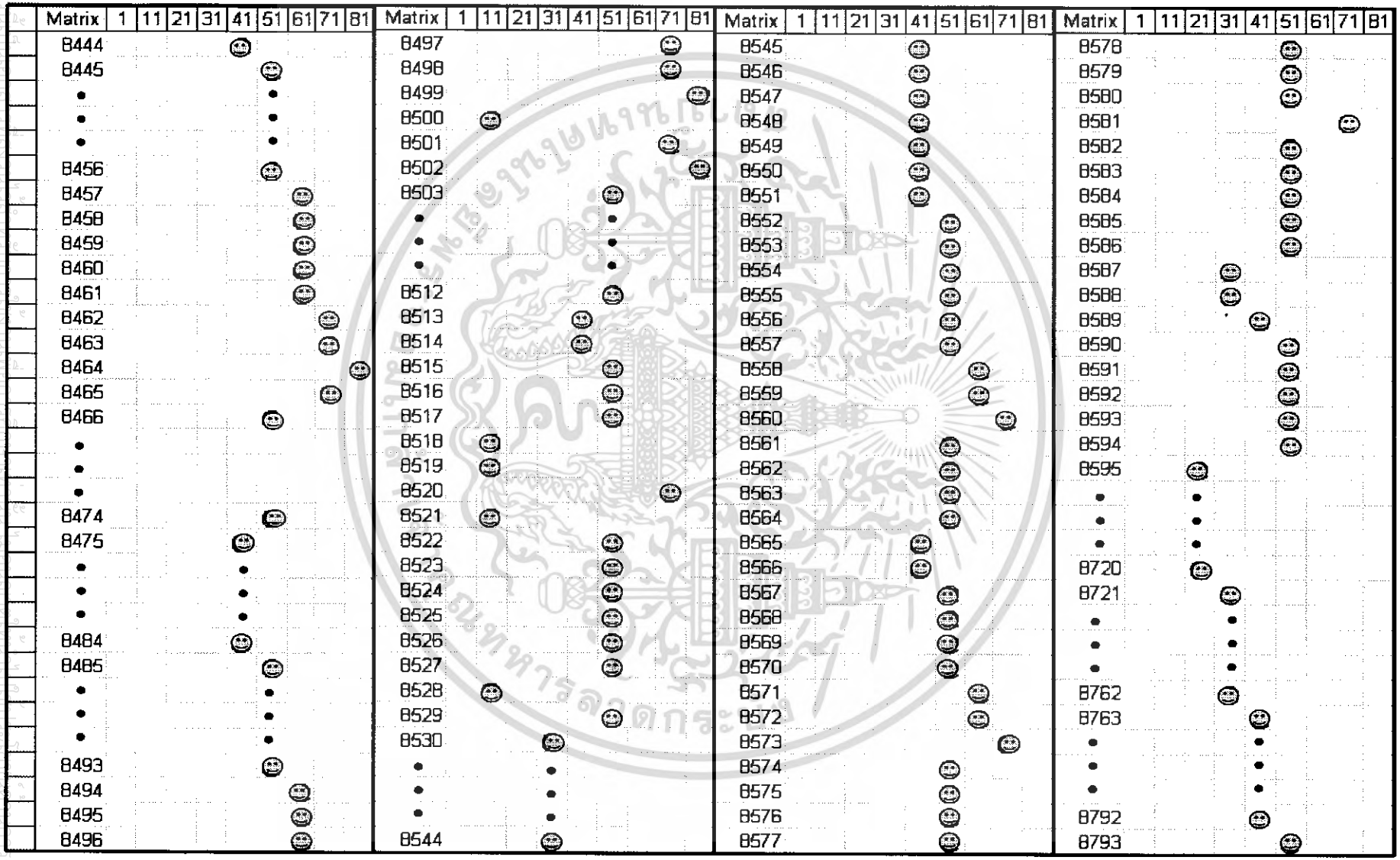
ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
6940
6941
6942
6943
6944
6945
6946
6947
6948
6949
6950
6951
6952
6953
6954
6955
6956
6957
6958
6959
6960
6961
6962
6963
6964
6965
6966
6967
7041
7042
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
7065
7066
7083
7084
7085
7086
7087
7088
7089
7090
7091
7092
7093
7105
7106
7107
7108
7109
7110
7111
7112
7116
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
7119
7120
7121
7122
7123
7124
7125
7126
7140
7141
7153
7154
7155
7156
7157
7158
7159
7160
7161
7168
7169
7170
7171
7172
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
7173
7174
7175
7176
7177
7178
7179
7180
7181
7182
7183
7184
7185
7186
7187
7188
7189
7195
7196
7197
7198
7199
7200
7201
7202
7203
7204
7205
7206
7207

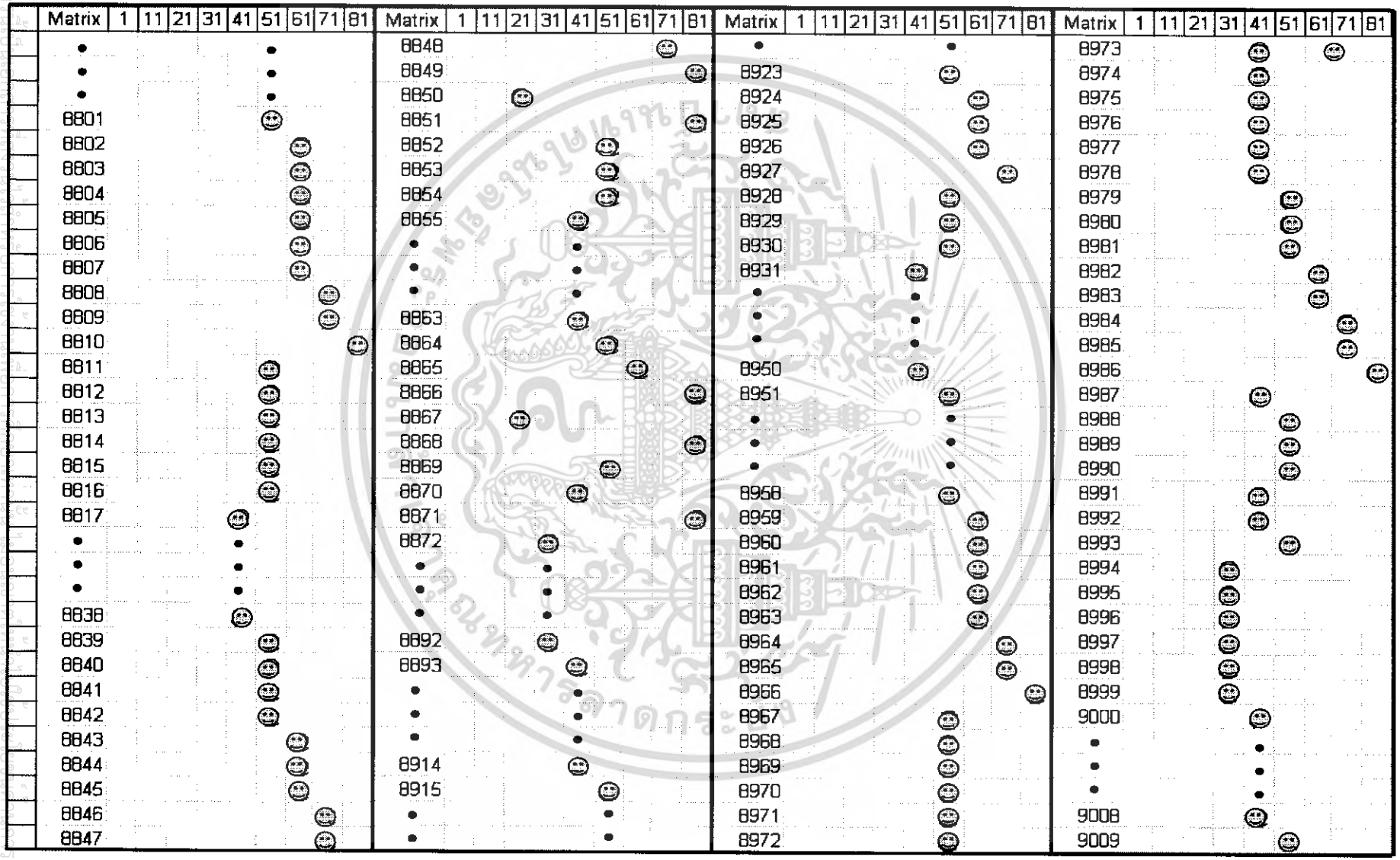
ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
7208
7209
7210
7211
7220
7221
7222
7223
7224
7233
7234
7235
7236
7237
7238
7239
7240
7241
7242
7243
7244
7245
7246
7247
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
7926
7927
8149
8150
8223
8224
8261
8262
8275
8276
8277
8278
8279
8280
8281
8282
8283
8284
8285
8286
8287
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
8288
8289
8290
8301
8302
8325
8326
8334
8335
8336
8337
8338
8339
8340
8341
8342
8343
8344
8345
8346
8347
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
8355
8356
8357
8358
8359
8360
8361
8362
8363
8364
8365
8366
8367
8368
8369
8370
8371
8372
8373
8374
8375
8376
8377
8378
8379
8420
8421

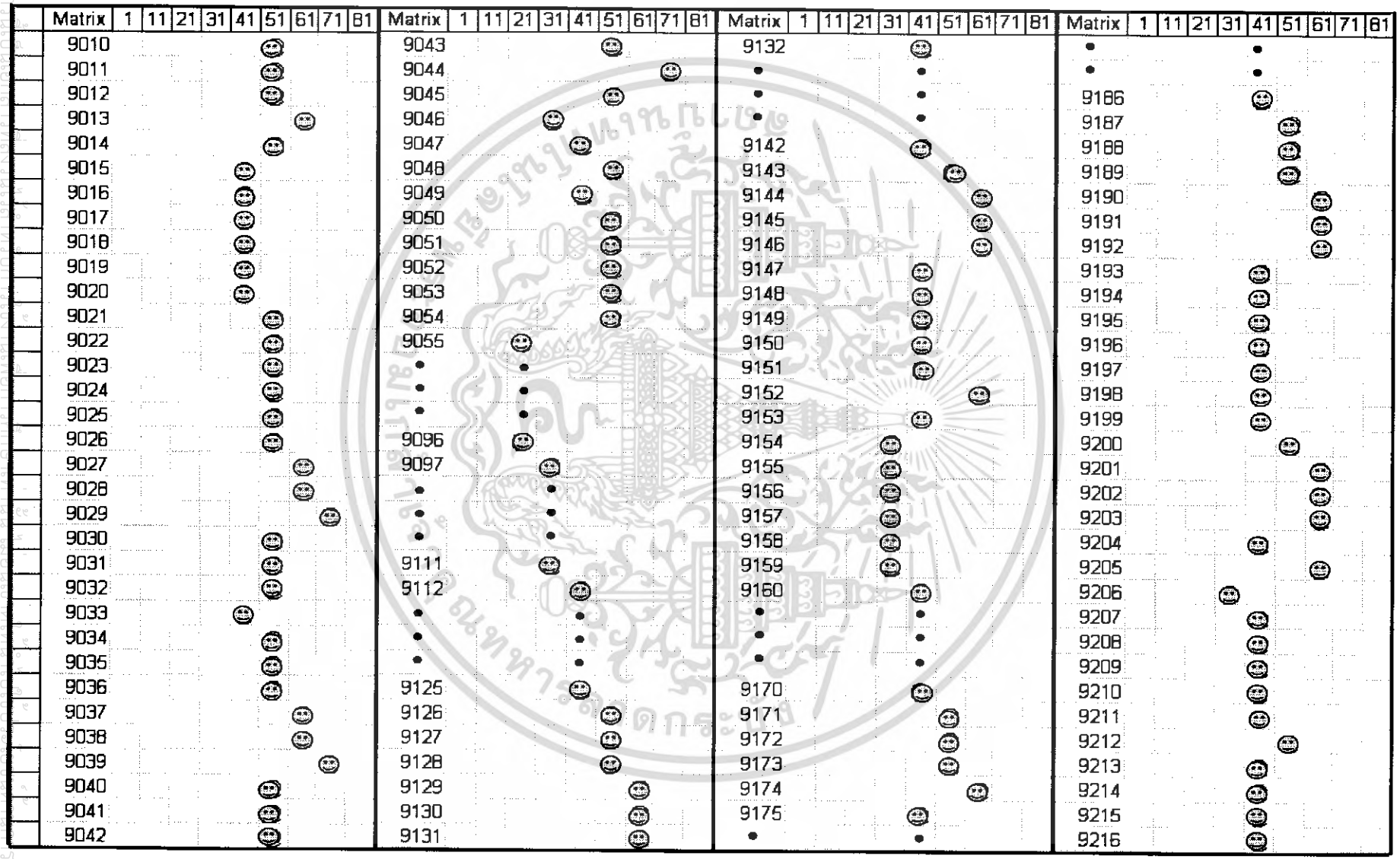
ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
B444
B445
B456
B457
B458
B459
B460
B461
B462
B463
B464
B465
B466
B474
B475
B484
B485
B493
B494
B495
B496
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
B497
B498
B499
B500
B501
B502
B503
B512
B513
B514
B515
B516
B517
B518
B519
B520
B521
B522
B523
B524
B525
B526
B527
B528
B529
B530
B544
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
B545
B546
B547
B548
B549
B550
B551
B552
B553
B554
B555
B556
B557
B558
B559
B560
B561
B562
B563
B564
B565
B566
B567
B568
B569
B570
B571
B572
B573
B574
B575
B576
B577
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
B578
B579
B580
B581
B582
B583
B584
B585
B586
B587
B588
B589
B590
B591
B592
B593
B594
B595
B720
B721
B762
B763
B792
B793

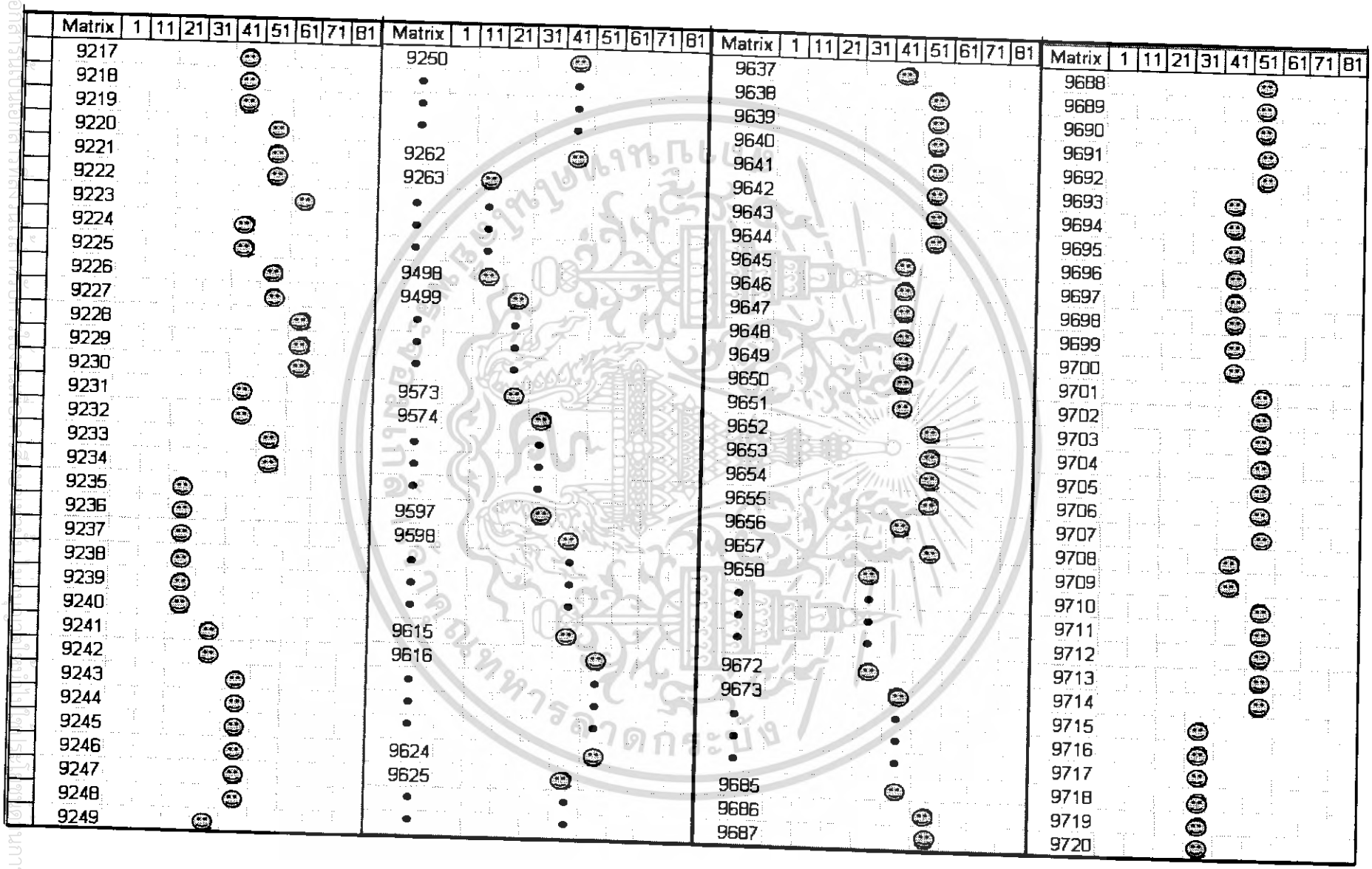
ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
8801
8802
8803
8804
8805
8806
8807
8808
8809
8810
8811
8812
8813
8814
8815
8816
8817
8838
8839
8840
8841
8842
8843
8844
8845
8846
8847
8848
8849
8850
8851
8852
8853
8854
8855
8863
8864
8865
8866
8867
8868
8869
8870
8871
8872
8892
8893
8914
8915
8923
8924
8925
8926
8927
8928
8929
8930
8931
8950
8951
8958
8959
8960
8961
8962
8963
8964
8965
8966
8967
8968
8969
8970
8971
8972
8973
8974
8975
8976
8977
8978
8979
8980
8981
8982
8983
8984
8985
8986
8987
8988
8989
8990
8991
8992
8993
8994
8995
8996
8997
8998
8999
9000
9008
9009

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9010 9011 9012 9013 9014 9015 9016 9017 9018 9019 9020 9021 9022 9023 9024 9025 9026 9027 9028 9029 9030 9031 9032 9033 9034 9035 9036 9037 9038 9039 9040 9041 9042
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9043 9044 9045 9046 9047 9048 9049 9050 9051 9052 9053 9054 9055 9096 9097 9111 9112 9125 9126 9127 9128 9129 9130 9131
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9132 9142 9143 9144 9145 9146 9147 9148 9149 9150 9151 9152 9153 9154 9155 9156 9157 9158 9159 9160 9170 9171 9172 9173 9174 9175
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9186 9187 9188 9189 9190 9191 9192 9193 9194 9195 9196 9197 9198 9199 9200 9201 9202 9203 9204 9205 9206 9207 9208 9209 9210 9211 9212 9213 9214 9215 9216

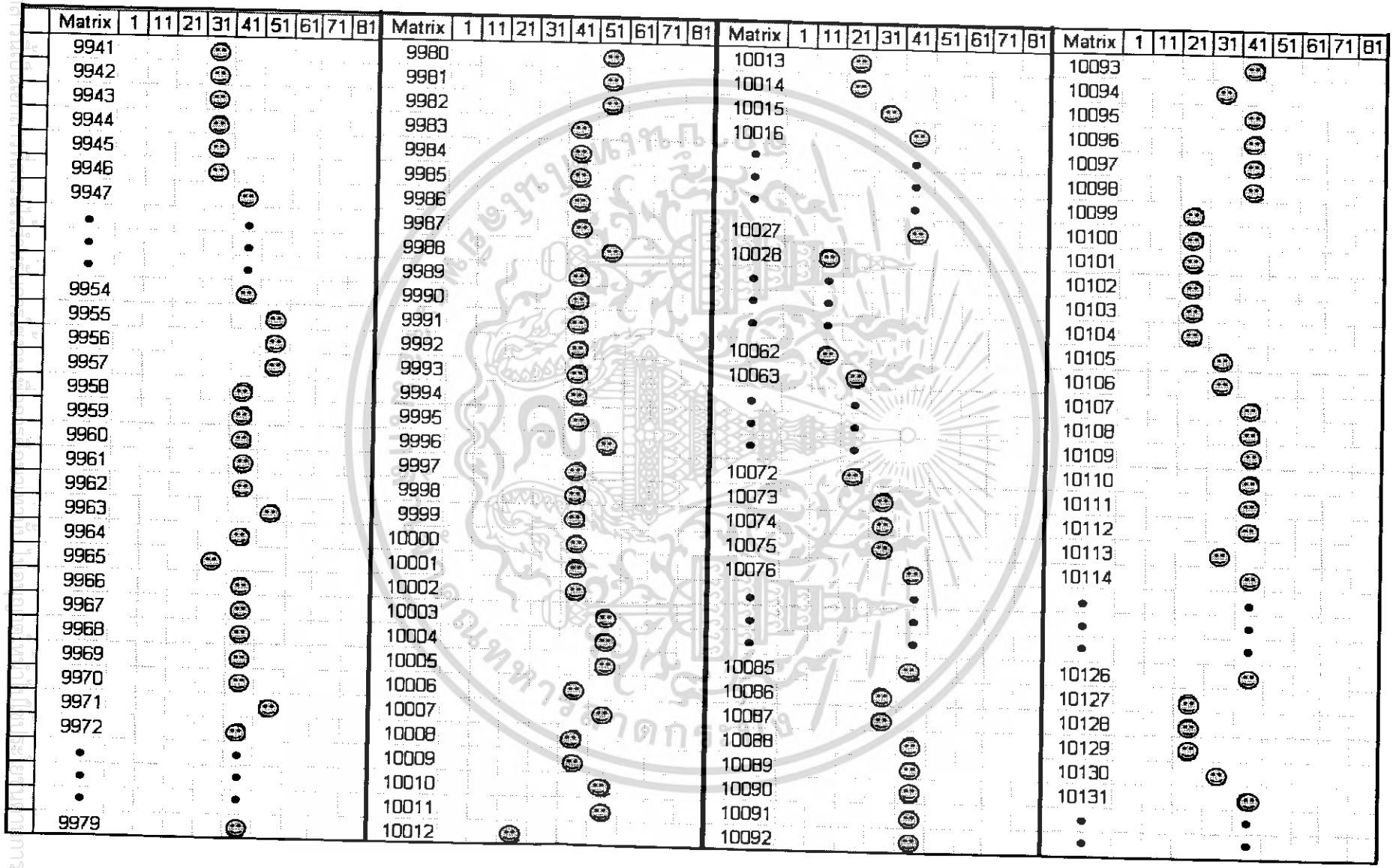
ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9217
9218
9219
9220
9221
9222
9223
9224
9225
9226
9227
9228
9229
9230
9231
9232
9233
9234
9235
9236
9237
9238
9239
9240
9241
9242
9243
9244
9245
9246
9247
9248
9249
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9250
9262
9263
9498
9499
9573
9574
9597
9598
9615
9616
9624
9625
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9637
9638
9639
9640
9641
9642
9643
9644
9645
9646
9647
9648
9649
9650
9651
9652
9653
9654
9655
9656
9657
9658
9672
9673
9685
9686
9687
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9688
9689
9690
9691
9692
9693
9694
9695
9696
9697
9698
9699
9700
9701
9702
9703
9704
9705
9706
9707
9708
9709
9710
9711
9712
9713
9714
9715
9716
9717
9718
9719
9720

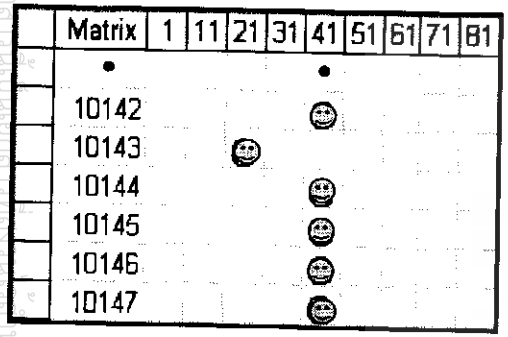
ตารางที่ 4.4 (ต่อ)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)


Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9941
9942
9943
9944
9945
9946
9947
9954
9955
9956
9957
9958
9959
9960
9961
9962
9963
9964
9965
9966
9967
9968
9969
9970
9971
9972
9979
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
9980
9981
9982
9983
9984
9985
9986
9987
9988
9989
9990
9991
9992
9993
9994
9995
9996
9997
9998
9999
10000
10001
10002
10003
10004
10005
10006
10007
10008
10009
10010
10011
10012
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
10013
10014
10015
10016
10027
10028
10062
10063
10072
10073
10074
10075
10076
10085
10086
10087
10088
10089
10090
10091
10092
Matrix 1 11 21 31 41 51 61 71 81
10093
10094
10095
10096
10097
10098
10099
10100
10101
10102
10103
10104
10105
10106
10107
10108
10109
10110
10111
10112
10113
10114
10126
10127
10128
10129
10130
10131

ตารางที่ 4.4 (ต่อ)



ลิขสิทธิ์ของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
Chulalongkorn University

ซึ่งจะทำการสังเกตคร่าวๆจากตารางที่ 4.1 และ ตารางที่ 4.2 ได้ผลดังนี้

สังเกตตารางที่ 4.1 ทำการตัดเงื่อนไขที่ซ้ำกันของแต่ละเมทริกซ์ออกไป แล้วสังเกตว่าเมทริกซ์ทั้งหมดนั้น มีเมทริกซ์ที่อยู่ในเงื่อนไขที่ 1, 11, 21 และ 41

วิธีการจัดกลุ่มให้แต่ละเมทริกซ์ว่าอยู่ในเงื่อนไขใดนั้น จะทำการเลือกเงื่อนไขที่มีจำนวนเมทริกซ์อยู่มากที่สุดก่อนเป็นอันดับแรก เพื่อจะได้เงื่อนไขที่น้อยที่สุดและครอบคลุมมากที่สุด

เริ่มต้นสังเกตจากตารางที่ 4.1 นั้น เงื่อนไขที่ 1 [(a $\leq$ b)และ(a $\leq$ c)และ(a $\leq$ d)และ(a $\leq$ e) และ (a $\leq$f)และ(a $\leq$ g)และ(a $\leq$ h)และ(a $\leq$ i)] มีเมทริกซ์ที่ 1 ถึง 18 อยู่ในเงื่อนไข จึงจัดให้ว่ามีเงื่อนไขที่ 1 เป็นเงื่อนไขที่ครอบคลุม เมทริกซ์ที่ 1 ถึง 18 เหลือเมทริกซ์ที่ 19 ถึง 24 ที่ไม่อยู่ในเงื่อนไขที่ 1 จึงทำการสังเกตต่อได้ว่า เมทริกซ์ที่ 19 ถึง 22 อยู่ในเงื่อนไขที่ 11 [(b < a)และ(b $\leq$ c)และ(b $\leq$ d) และ(b $\leq$ e)และ(b $\leq$ f)และ(b $\leq$ g)และ(b $\leq$ h)และ(b $\leq$ i)] และไม่อยู่ในเงื่อนไขที่ 1 ที่ได้เลือกไปแล้ว ต่อไปสังเกตเมทริกซ์ที่ 23 และ 24 ว่าอยู่ในเงื่อนไขใดที่ไม่ใช่เงื่อนไขที่ได้เลือกไปแล้วคือ 1 และ 11 จึงได้ว่า เมทริกซ์ที่ 23 นั้นอยู่ในเงื่อนไขที่ 21 [(c < b)และ(c < a)และ(c $\leq$ d)และ(c $\leq$ e)และ(c $\leq$ f)และ(c $\leq$ g)และ(c $\leq$ h)และ(c $\leq$ i)]และเมทริกซ์ที่ 24 อยู่ในเงื่อนไขที่ 41 [(e < b)และ(e < c)และ(e < d)และ(e < a)และ(e $\leq$ f)และ(e $\leq$ g)และ(e $\leq$ h)และ(e $\leq$ i)]

สรุปได้ว่าจากตารางที่ 4.1 เมื่อตัวคงค่ากล (*r*) เท่ากับ1 มีจำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้จำนวน 24 แบบนั้น อยู่ในเงื่อนไขที่ 1, 11, 21 และ 41 นั่นเอง

สังเกตตารางที่ 4.2 ต่อ เมื่อ ตัวคงค่ากล (*r*) เท่ากับ 2 มีจำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้จำนวน 282 แบบ โดยเลือกเงื่อนไขที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่เลือกไว้ในตารางที่ 4.1(เงื่อนไขที่ 1, 11, 21 และ 41)

จะได้ว่า

เมทริกซ์ที่ 1 ถึง 162 อยู่ในเงื่อนไขที่ 1

เมทริกซ์ที่ 163 ถึง 214 อยู่ในเงื่อนไขที่ 11

เมทริกซ์ที่ 215 ถึง 232 อยู่ในเงื่อนไขที่ 21

เมทริกซ์ที่ 233 ถึง 238 อยู่ในเงื่อนไขที่ 31 (ไม่อยู่ในเงื่อนไขที่ 1 และ 11)

เมทริกซ์ที่ 239 ถึง 244 อยู่ในเงื่อนไขที่ 41

เมทริกซ์ที่ 245 ถึง 247 อยู่ในเงื่อนไขที่ 51

เมทริกซ์ที่ 248 อยู่ในเงื่อนไขที่ 41

เมทริกซ์ที่ 249 อยู่ในเงื่อนไขที่ 51

เมทริกซ์ที่ 250 ยู่ในเงื่อนไขที่ 31

เมทริกซ์ที่ 251 อยู่ในเงื่อนไขที่ 41

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมทริกซ์ที่ 252 ถึง 253 อยู่ในเงื่อนไขที่ 51

เมทริกซ์ที่ 254 ถึง 256 อยู่ในเงื่อนไขที่ 21

เมทริกซ์ที่ 257 อยู่ในเงื่อนไขที่ 31

เมทริกซ์ที่ 258 ถึง 261 อยู่ในเงื่อนไขที่ 41

เมทริกซ์ที่ 262 ถึง 271 อยู่ในเงื่อนไขที่ 11

เมทริกซ์ที่ 272 ถึง 274 อยู่ในเงื่อนไขที่ 21

เมทริกซ์ที่ 275 อยู่ในเงื่อนไขที่ 31

เมทริกซ์ที่ 276 ถึง 279 อยู่ในเงื่อนไขที่ 41

เมทริกซ์ที่ 280 อยู่ในเงื่อนไขที่ 21

เมทริกซ์ที่ 281 ถึง 282 อยู่ในเงื่อนไขที่ 41

สรุปได้ว่าจากตารางที่ 4.2 เมื่อค่าคงตัวกลเท่ากับ 4.2 มีจำนวนเมทริกซ์ที่เป็นไปได้จำนวน 282 แบบนั้น อยู่ในเงื่อนไขที่ 1, 11, 21, 31, 41และ 51 นั่นเอง

ในส่วนของตารางที่ 4.3 เมื่อตัวคงค่ากล (r) เท่ากับ 3 และ ตารางที่ 4.4 เมื่อตัวคงค่ากล (r) เท่ากับ 4 นั้น การเลือกเงื่อนไขให้ครอบคลุมนั้นเป็นไปในทำนองเดียวกันกับตารางที่ 4.1และตารางที่ 4.2 ทำให้สามารถยืนยันผลได้ว่า เงื่อนไขทั้งหมดที่จะครอบคลุมเมทริกซ์แบบ "IENR" นั้นคือ เงื่อนไขที่ 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71 และ 81

ดังนี้ เงื่อนไขที่

1 : $(a \leq b)$และ$(a \leq c)$และ$(a \leq d)$และ$(a \leq e)$และ$(a \leq f)$และ$(a \leq g)$และ$(a \leq h)$และ$(a \leq i)$

11: $(b < a)$และ$(b \leq c)$และ$(b \leq d)$และ$(b \leq e)$และ$(b \leq f)$และ$(b \leq g)$และ$(b \leq h)$และ$(b \leq i)$

21: $(c < b)$และ$(c < a)$และ$(c \leq d)$และ$(c \leq e)$และ$(c \leq f)$และ$(c \leq g)$และ$(c \leq h)$และ$(c \leq i)$

31: $(d < b)$และ$(d < c)$และ$(d < a)$และ$(d \leq e)$และ$(d \leq f)$และ$(d \leq g)$และ$(d \leq h)$และ$(d \leq i)$

41: $(e < b)$และ$(e < c)$และ$(e < d)$และ$(e < a)$และ$(e \leq f)$และ$(e \leq g)$และ$(e \leq h)$และ$(e \leq i)$

51: $(f < b)$และ$(f < c)$และ$(f < d)$และ$(f < e)$และ$(f < a)$และ$(f \leq g)$และ$(f \leq h)$และ$(f \leq i)$

61: $(g < b)$และ$(g < c)$และ$(g < d)$และ$(g < e)$และ$(g < f)$และ$(g < a)$และ$(g \leq h)$และ$(g \leq i)$

71: $(h < b)$และ$(h < c)$และ$(h < d)$และ$(h < e)$และ$(h < f)$และ$(h < g)$และ$(h < a)$และ$(h \leq i)$

81: $(i < b)$และ$(i < c)$และ$(i < d)$และ$(i < e)$และ$(i < f)$และ$(i < g)$และ$(i < h)$และ$(i < a)$

ทำการสังเกตในกรณีที่ตัวคงค่ากล (r) มีค่ามากกว่า 4 พบว่าเงื่อนไขทั้ง 9 เงื่อนไขด้านบนนั้นครอบคลุมผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นสรุปได้ว่าจัตุรัสกลแบบ “IENR”ขนาด 4×4 ที่มีค่าค่าคงตัวกลเท่ากับใดๆ นั้นสามารถหาค่าได้จากโปรแกรมที่ทำการคำนวณหาผลเฉลยของเมทริกซ์ที่เป็นไปได้จากเงื่อนไขที่ได้คัดเลือกมาทั้งหมด 9 เงื่อนไขด้านบน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
โปรแกรมและเกมส์หาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

5.1 โปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

5.1.1 ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

1. นำฐานข้อมูล ชื่อ magic ไปไว้ใน Drive C ของเครื่องคอมพิวเตอร์

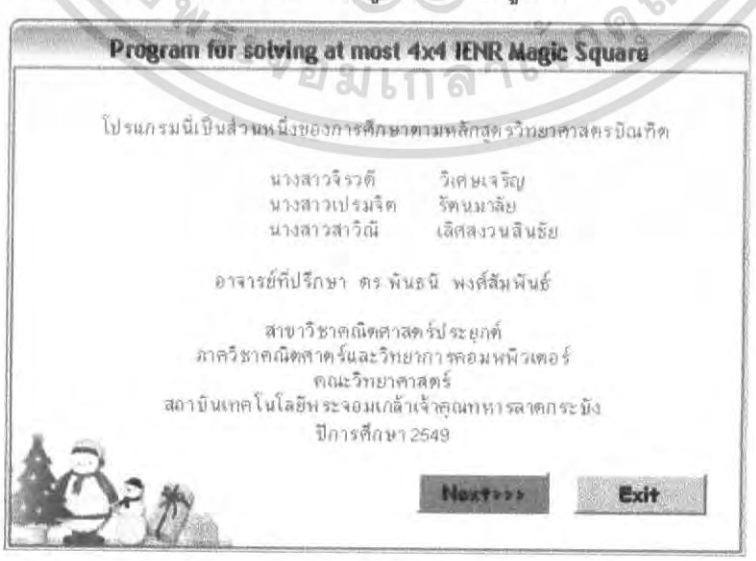
2. ใช้งานโปรแกรม IENR.exe ได้ทันที

5.1.2 คู่มือการใช้งานโปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

1. ดับเบิลคลิ๊กที่ไอคอน IENR .exe
2. หน้าจอเริ่มต้นโปรแกรม

รูปที่ 5.1 หน้าจอเริ่มต้นโปรแกรม

3. กด next ไปยังหน้าจอถัดไป แสดง ข้อมูลของคณะผู้จัดทำ

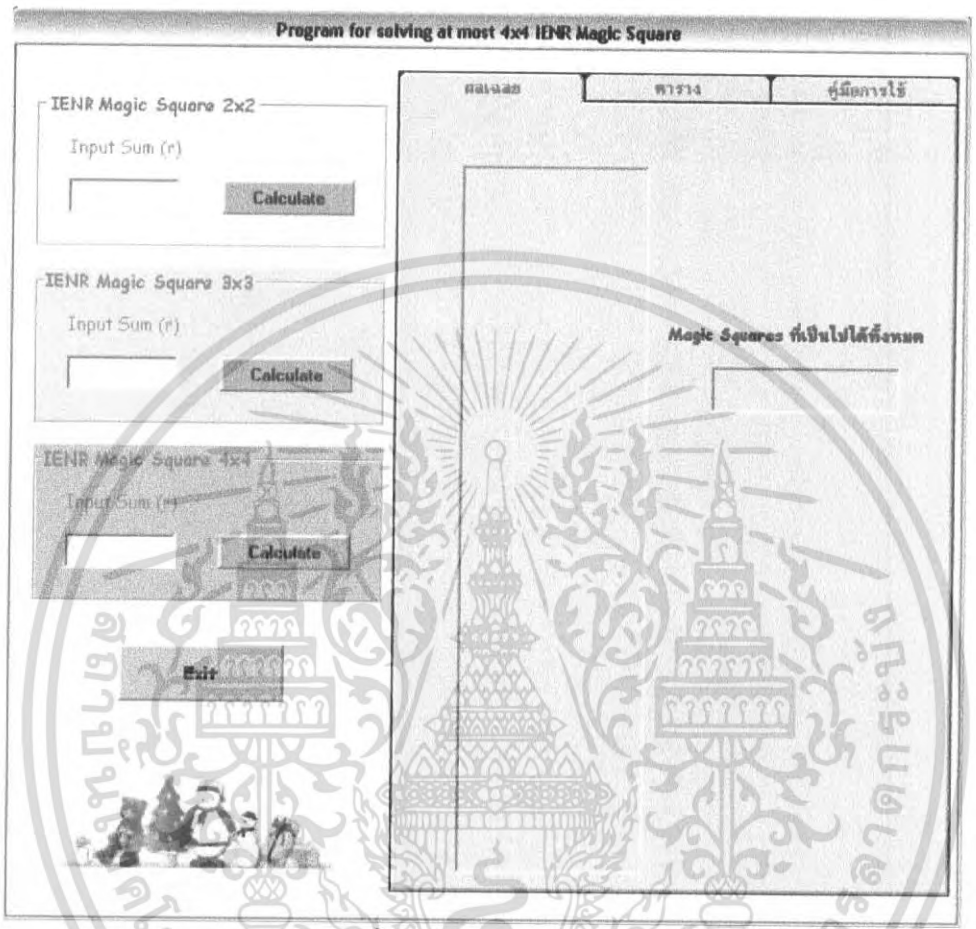


รูปที่ 5.2 หน้าจอแสดงรายละเอียดผู้จัดทำ

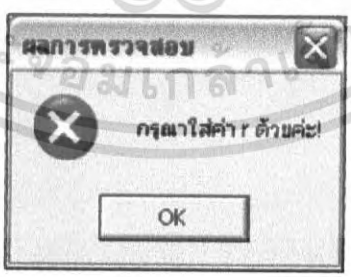
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. กด next จะเห็นหน้าจอโปรแกรมที่ไว้ใช้ใส่ค่าผลรวม r ที่ต้องการจะหาเมทริกซ์ผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีช่องให้ใส่ค่าผลรวม r จำนวนสามช่องด้วยกัน แยกเป็น เมทริกซ์ 2×2, 3×3 และ 4×4

หมายเหตุ: ห้ามใส่ค่า r ที่ไม่ใช่ตัวเลข



รูปที่ 5.3 หน้าจอแสดงการคำนวณ

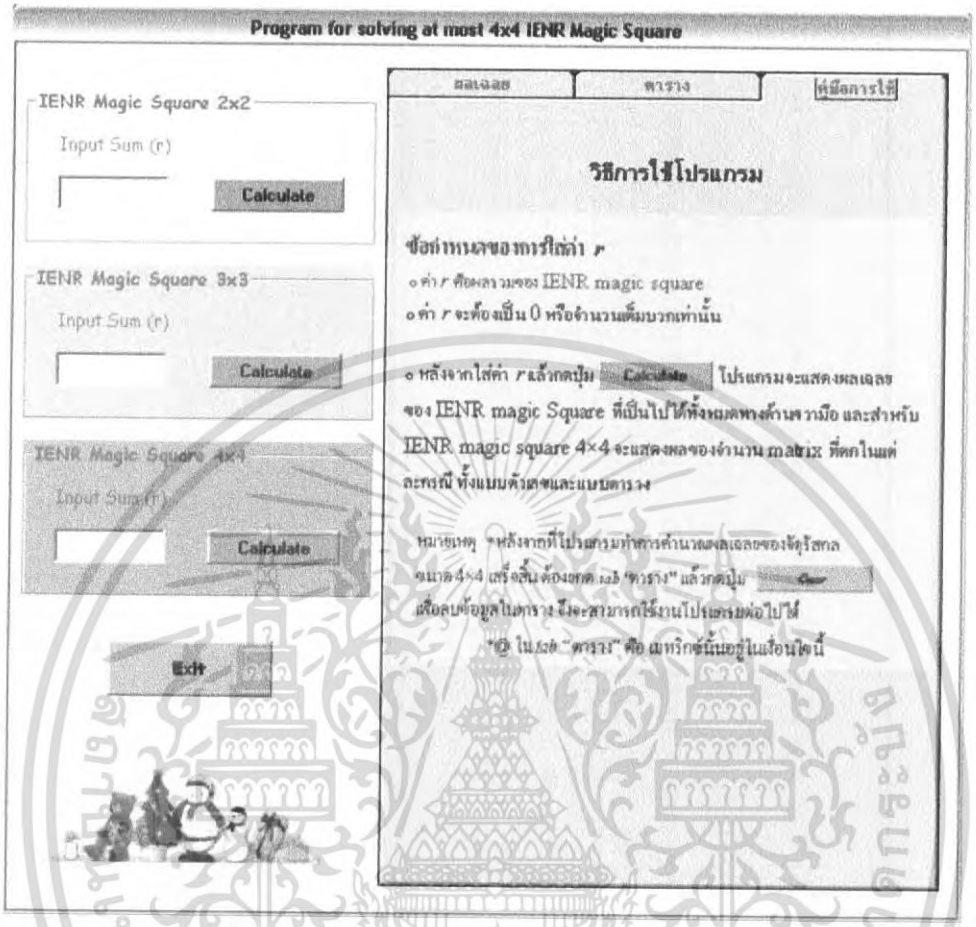


รูปที่ 5.4 หน้าจอแสดงข้อความเมื่อใส่ค่าผิด

5. ใส่ค่าตัวเลขลงไป แล้วกดปุ่ม Calculate โปรแกรมจะทำการคำนวณแล้วแสดงเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดทางด้านขวาของโปรแกรม Exit

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

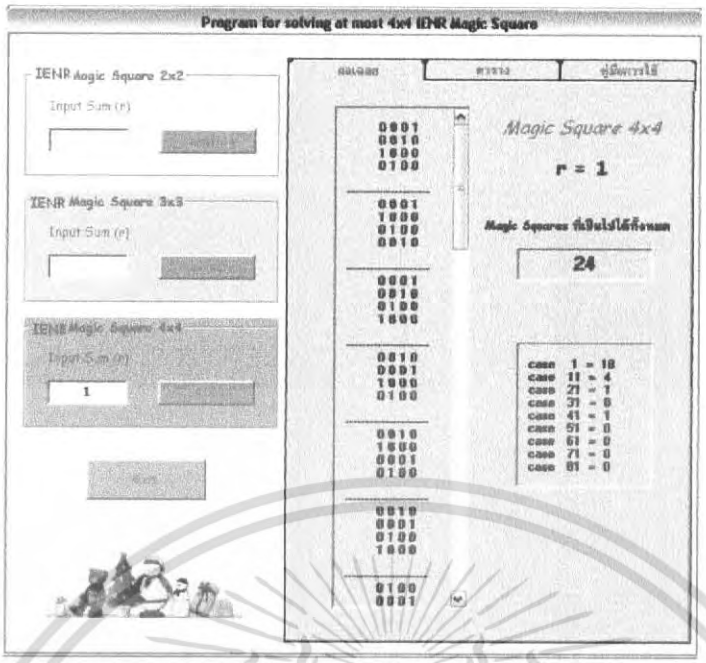
6. ต้องการออกจากโปรแกรม กดปุ่ม
7. คู่มือการใช้งานจะแสดงเมื่อกด *tab "คู่มือการใช้"*



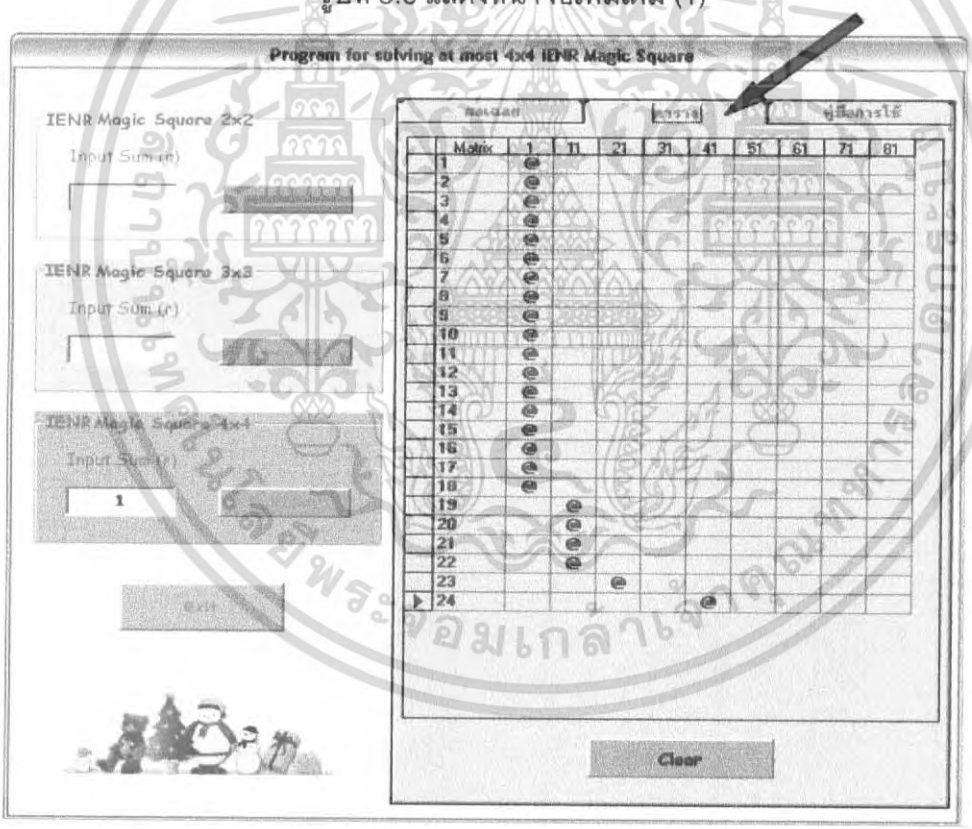
รูปที่ 5.5 หน้าจอแสดงคู่มือการใช้งานโปรแกรม

เพิ่มเติม: หากเป็นกรณีของจัตุรัสกล IENR 4×4 นั้น เมื่อใส่ค่าแล้วกดปุ่ม Calculate แล้ว จะสามารถดูได้ว่ามีจำนวนของเมทริกซ์ที่อยู่ในแต่ละเงื่อนไข (เงื่อนไขที่ 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71 และ 81) ว่ามีจำนวนเท่าใดบ้าง โดยกด *tab "ตาราง"*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.6 แสดงหน้าจอเพิ่มเติม (1)



รูปที่ 5.7 แสดงหน้าจอเพิ่มเติม (2)

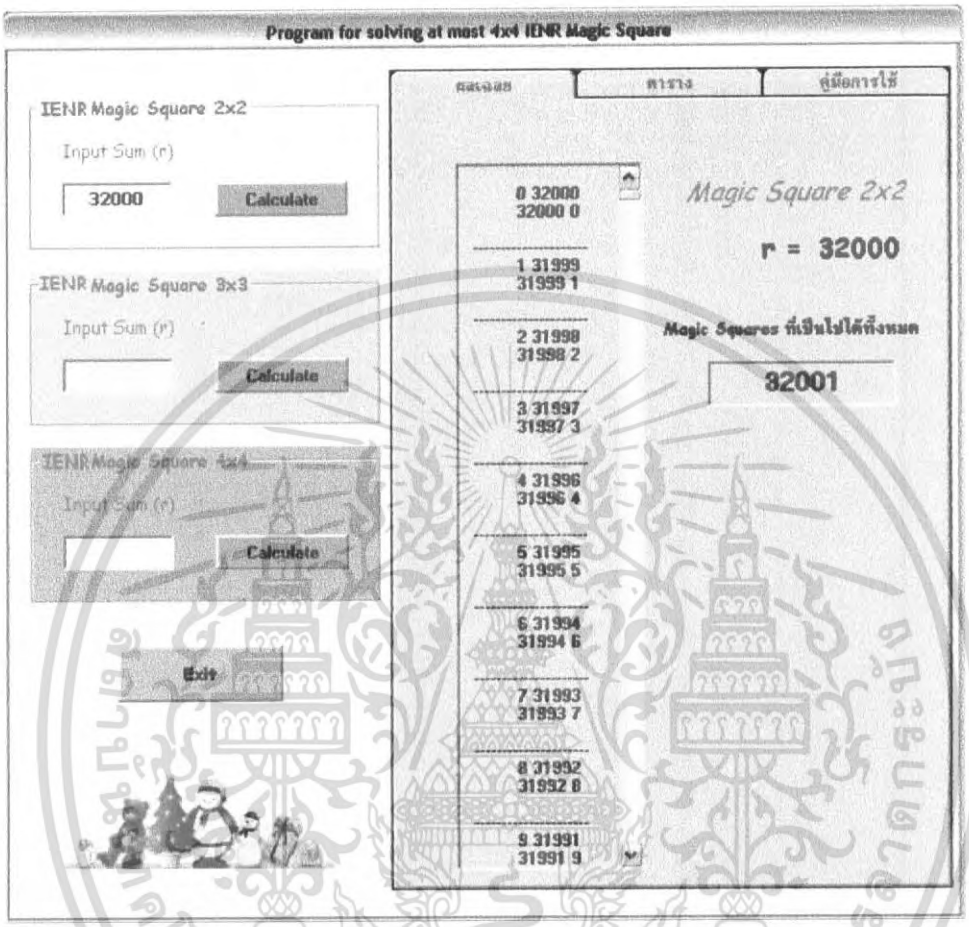
หมายเหตุ: ทุกครั้งที่ทำการคำนวณผลเฉลยของจัตุรัสกล 4×4 จะต้องทำการกดปุ่ม Clear ในหน้า *tab "ตาราง"* ทุกครั้งก่อนที่จะใช้งานโปรแกรมต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม

ตัวอย่างที่ 1

จัตุรัสกล IENR 2×2 เมื่อผลรวม (r) = 32,000



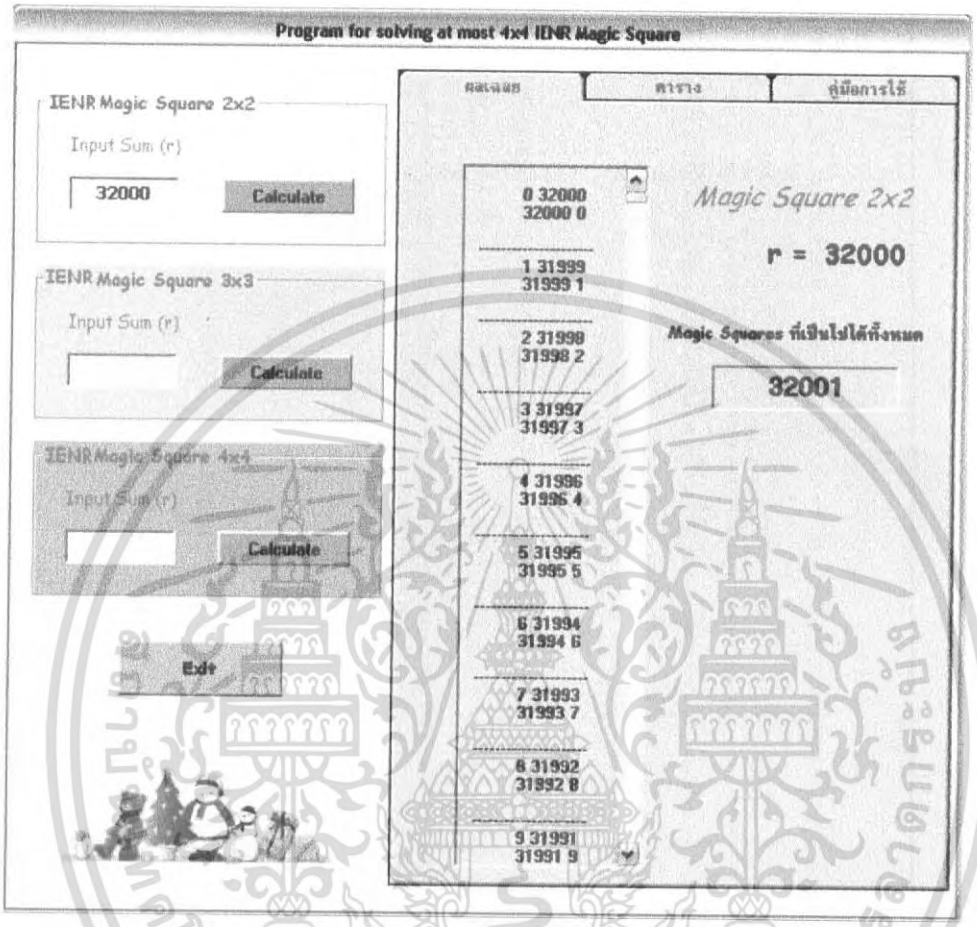
รูปที่ 5.8 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม

ตัวอย่างที่ 1

จัตุรัสกล IENR 2×2 เมื่อผลรวม (r) = 32,000

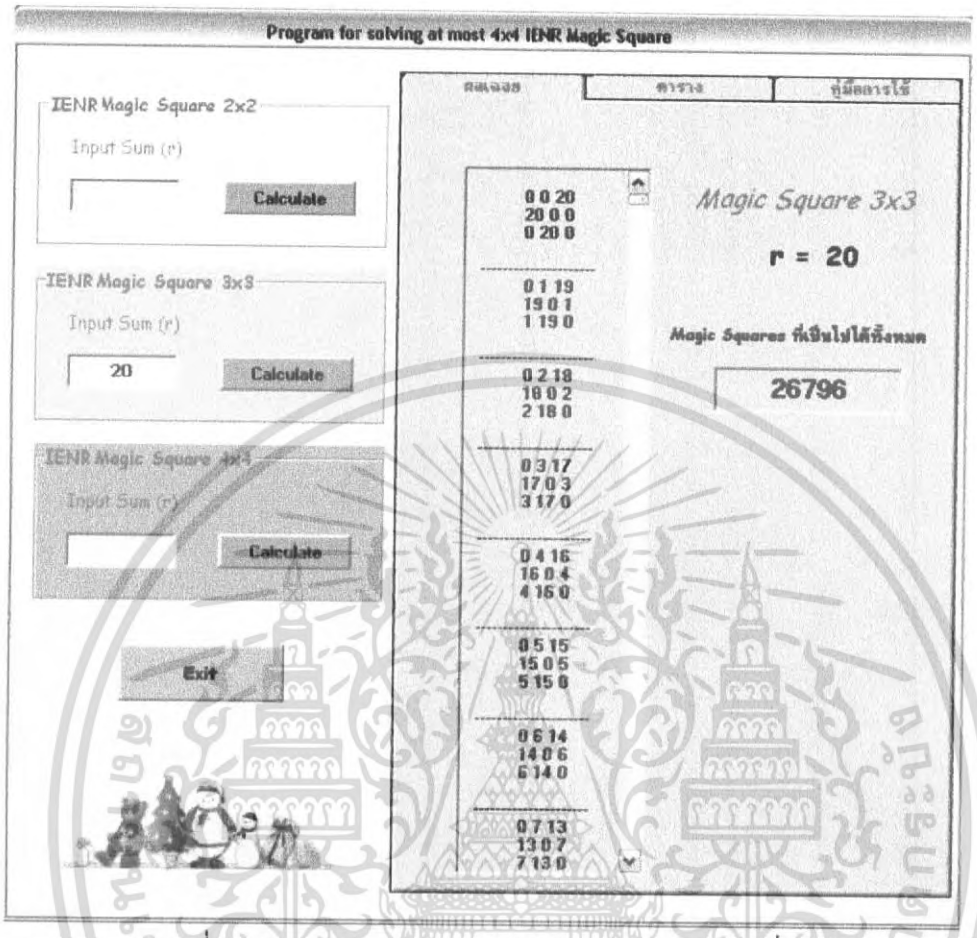


รูปที่ 5.8 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2

จัตุรัสกล IENR 3×3 เมื่อผลรวม (r) = 20

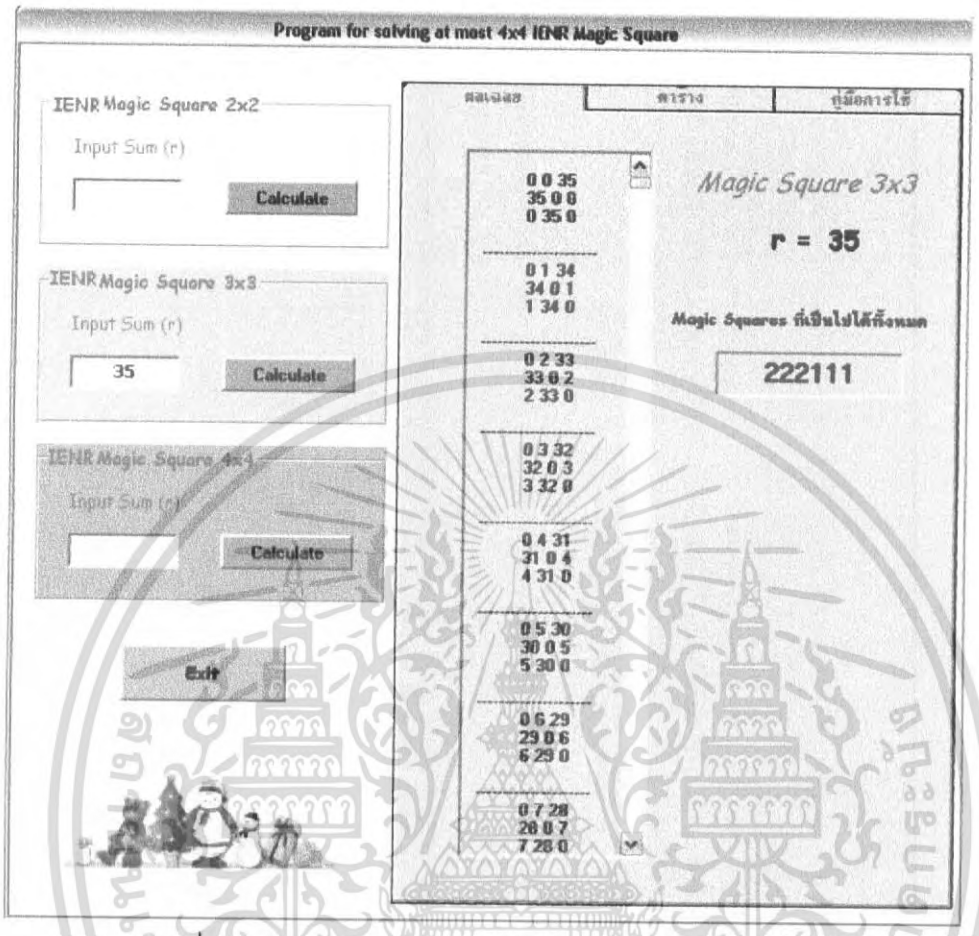


รูปที่ 5.9 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3

จัตุรัสกล IENR 3×3 เมื่อผลรวม (r) = 35

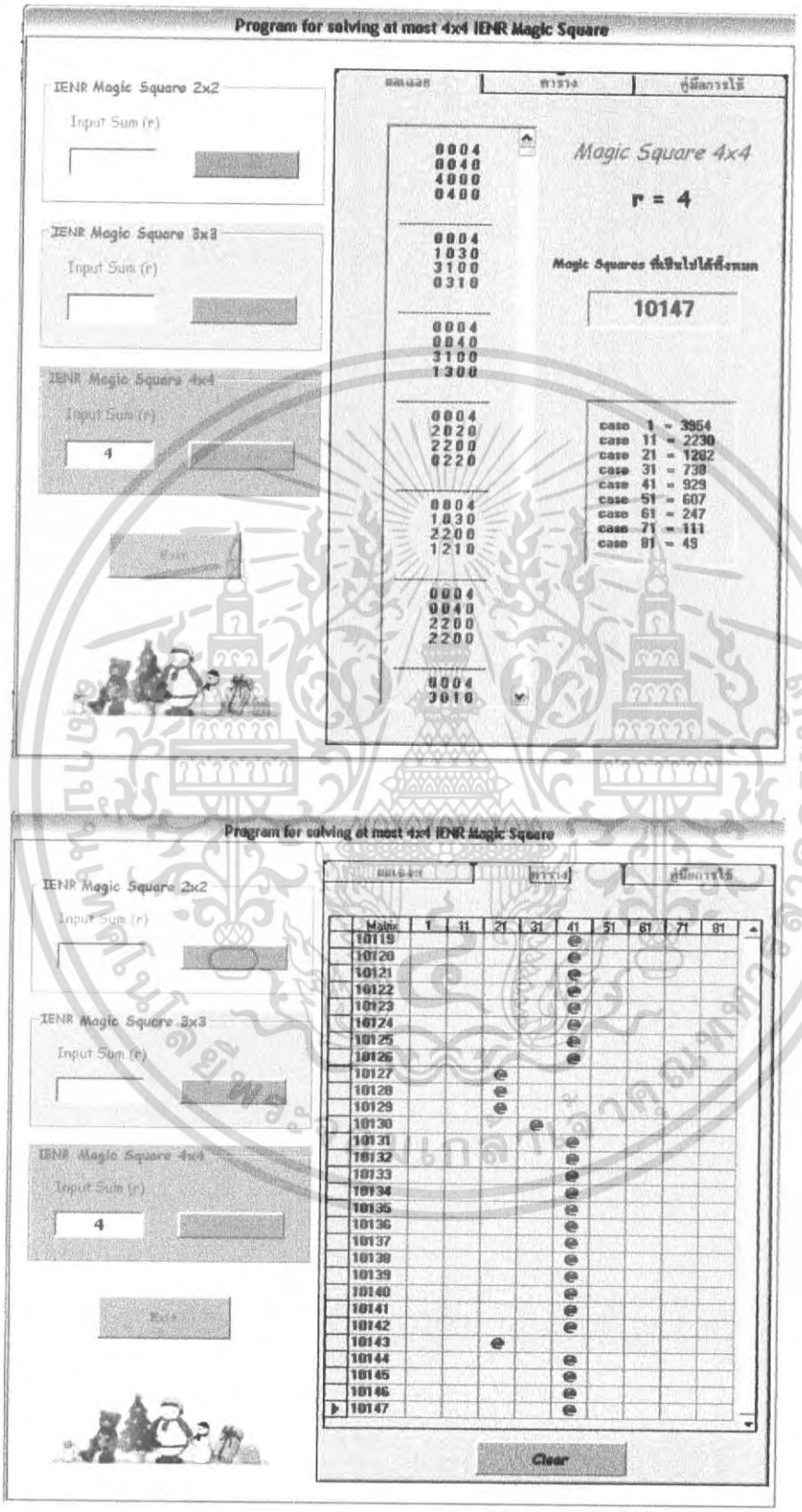


รูปที่ 5.10 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4

จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อผลรวม (r) = 4

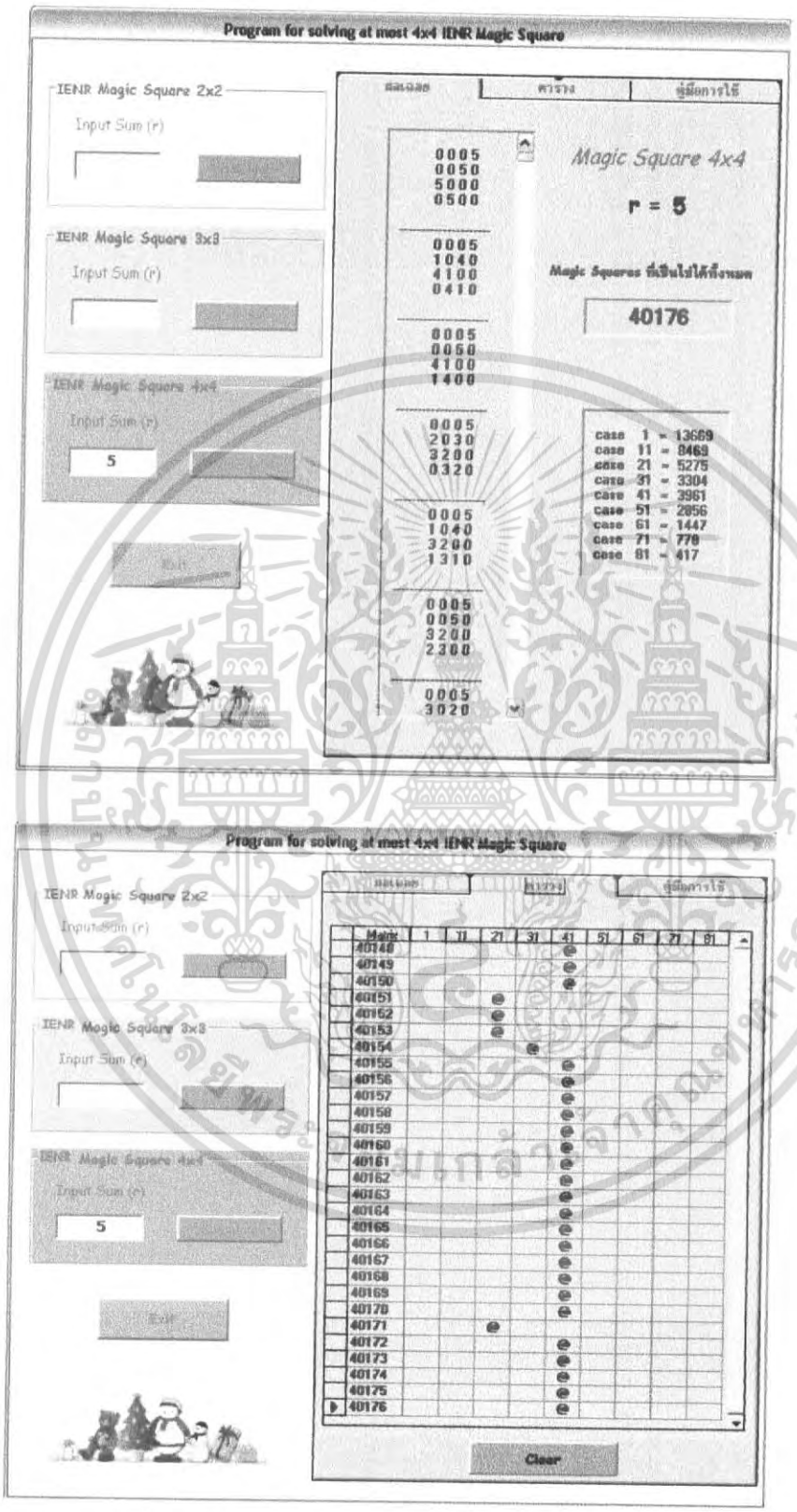


รูปที่ 5.11 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 5

จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อผลรวม (r) = 5



รูปที่ 5.12 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 เกมส์จัตุรัสกล IENR

5.2.1 วิธีการเล่นเกมส์

1. double click magic_game ก็สามารถเล่นเกมส์ได้ทันที

2. หน้าจอเมนูหลักจะมี Classic Mode, Hero Mode(ถูกล็อคไว้), Help, Credit และ Exit ให้ผู้เล่นเลือก

รูปที่ 5.13 หน้าจอเมนูหลัก

ปุ่ม Classic Mode

ปุ่ม Hero Mode จะถูกปลดล็อคถ้าผ่าน Classic Mode

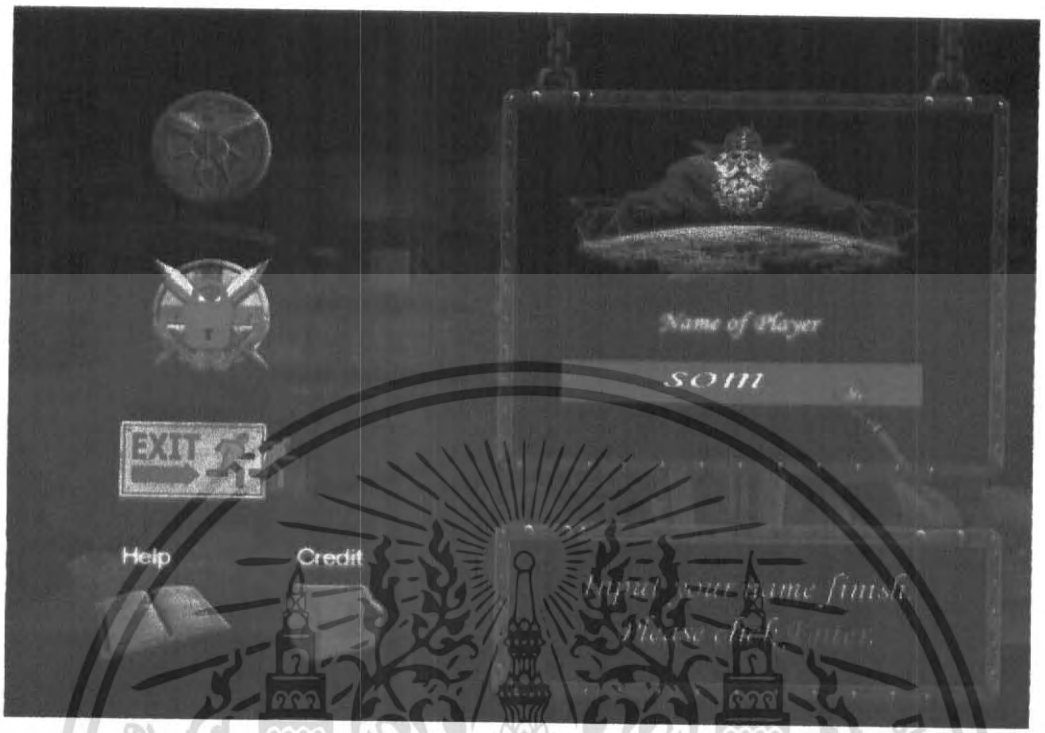
ปุ่ม Help เมื่อต้องการทราบวิธีการเล่น

ปุ่ม Exit เมื่อต้องการออกจากเกมส์

ปุ่ ม Credit เมื่อต้องการทราบรายละเอียดของผู้จัดทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. หน้าจอกรอกชื่อ หลังจากที่เลือกClassic Mode ผู้เล่นจะต้องทำการกรอกชื่อลงไปใน Name of Player จากนั้นกด Enter



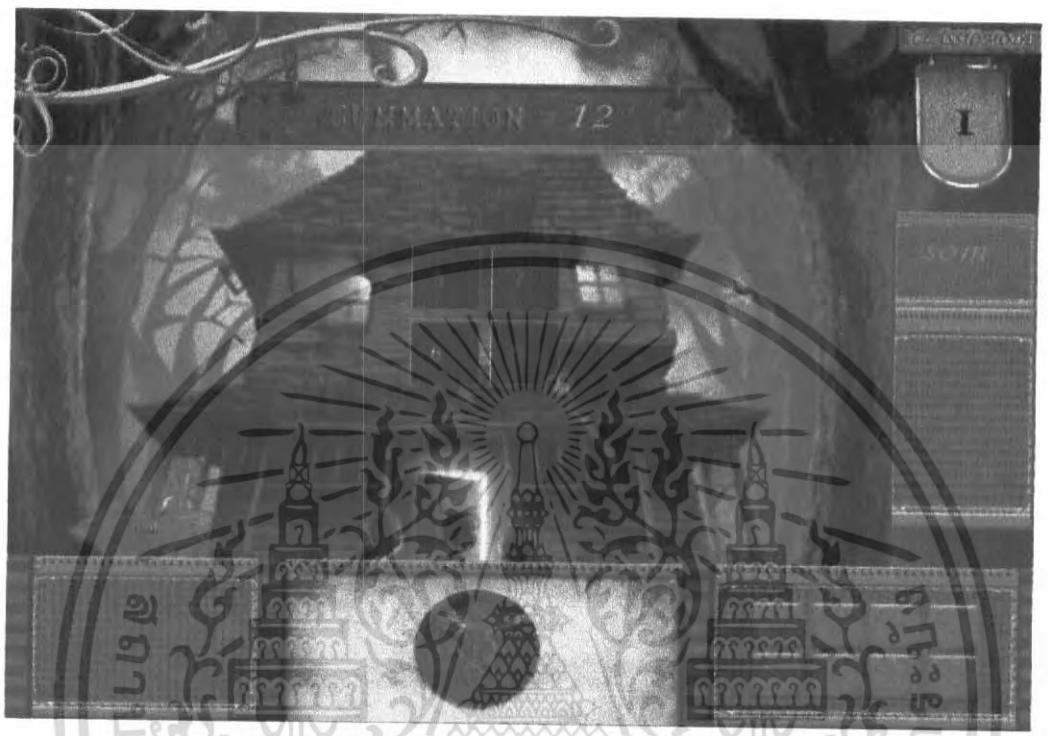
รูปที่ 5.14 หน้าจอกรอกชื่อ

4. หน้าจอประตู CLASSIC หลังจากผู้เล่นได้กด Enter

รูปที่ 5.15 หน้าจอประตู CLASSIC

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

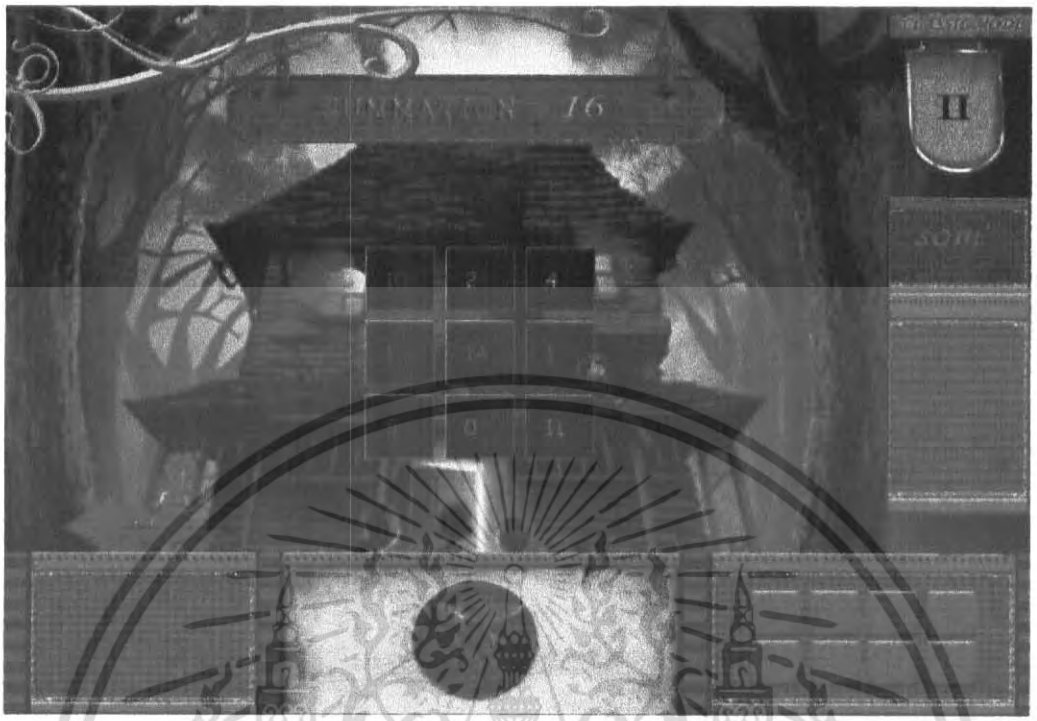
5. หน้าจอเกมส์ level 1 เมื่อเข้าสู่เกมส์การแข่งขันใน Classic Mode ผู้เล่นจะพบ Summationโดยที่ Summation นั้นคือผลรวมในแต่ละแถวแต่ละหลัก ผู้เล่นจะต้องนำเมาส์ไปกดที่ช่องที่เราต้องการใส่ค่าจากนั้นก็ใส่ค่าลงไป ถ้าค่าที่ใส่ลงไปนั้นถูกต้องตัวเลขจะกลายเป็นสีแดงถ้าตัวเลขไม่ถูกต้องจะเป็นสีเหลืองโดยค่าที่ถูกต้องจะต้องตรงตามจัตุรัสกลที่คอมพิวเตอร์ได้สุ่มมา



รูปที่ 5.16 หน้าจอเกมส์ level 1

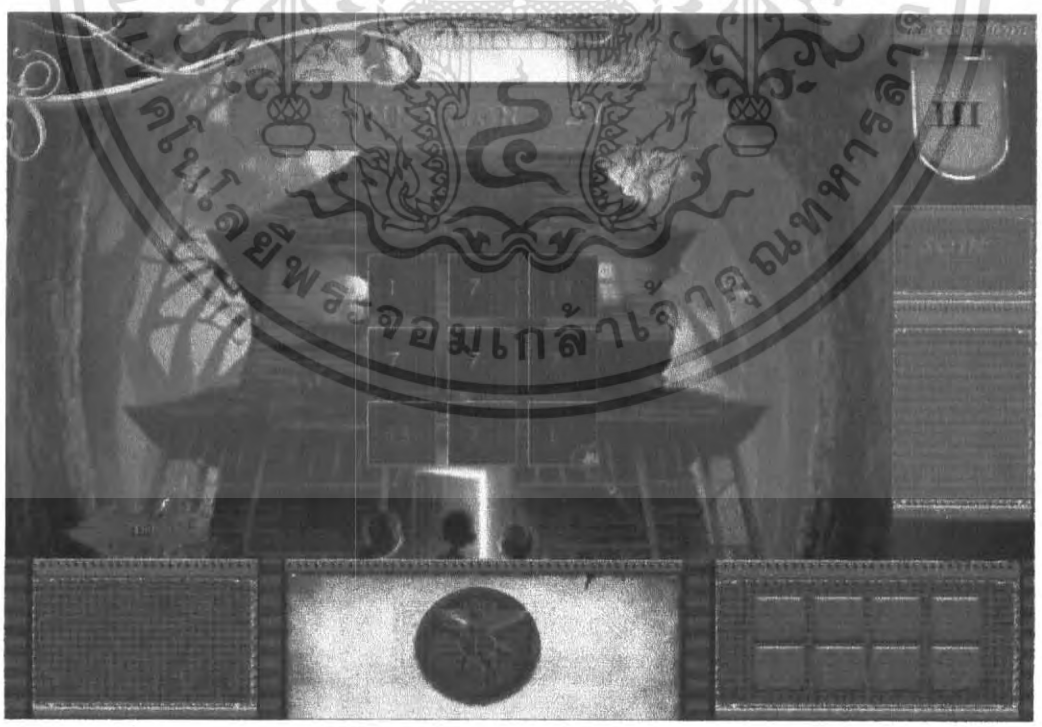
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. หน้าจอเกมส์ level 2 จะปรากฏขึ้นมาหลังจากที่ผู้เล่นได้ผ่านใน level 1แล้ว โดยวิธีการเล่นจะเหมือนกันกับ level 1



รูปที่ 5.17 หน้าจอเกมส์ level 2

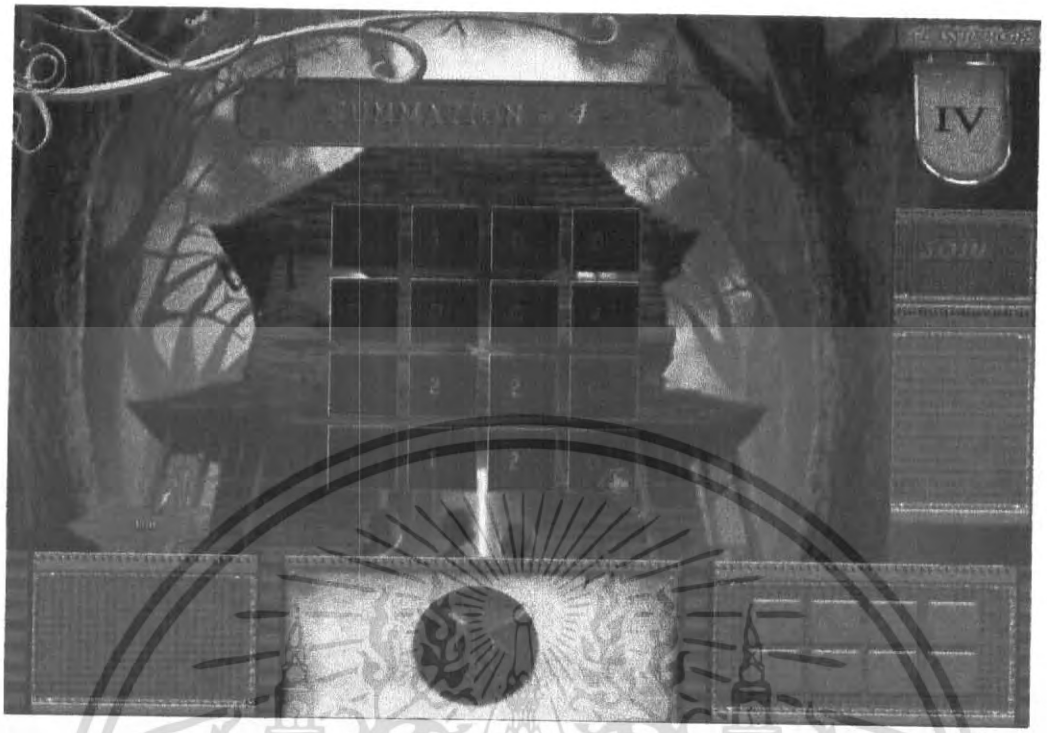
7. หน้าจอเกมส์ level 3 จะปรากฏขึ้นมาหลังจากที่ผู้เล่นได้ผ่านใน level 2แล้ว



รูปที่ 5.18 หน้าจอเกมส์ level 3

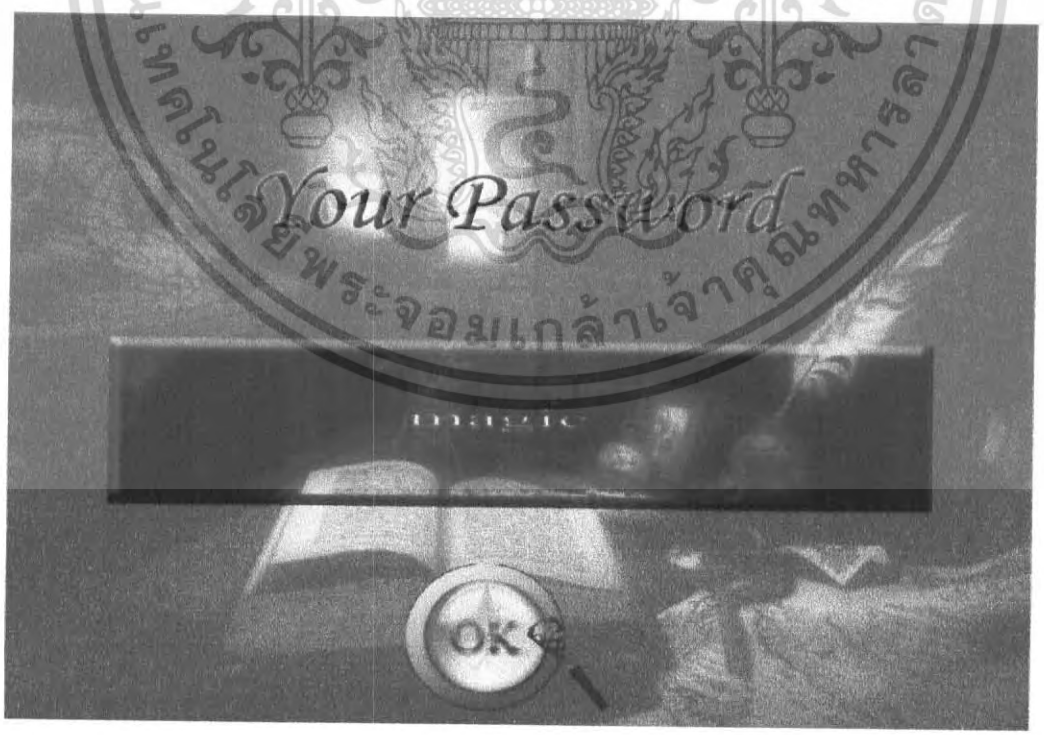
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. หน้าจอเกมส์ level 4 จะปรากฏขึ้นมาหลังจากที่ผู้ได้เล่นผ่านใน level 3 แล้ว



รูปที่ 5.19 หน้าจอเกมส์ level 4

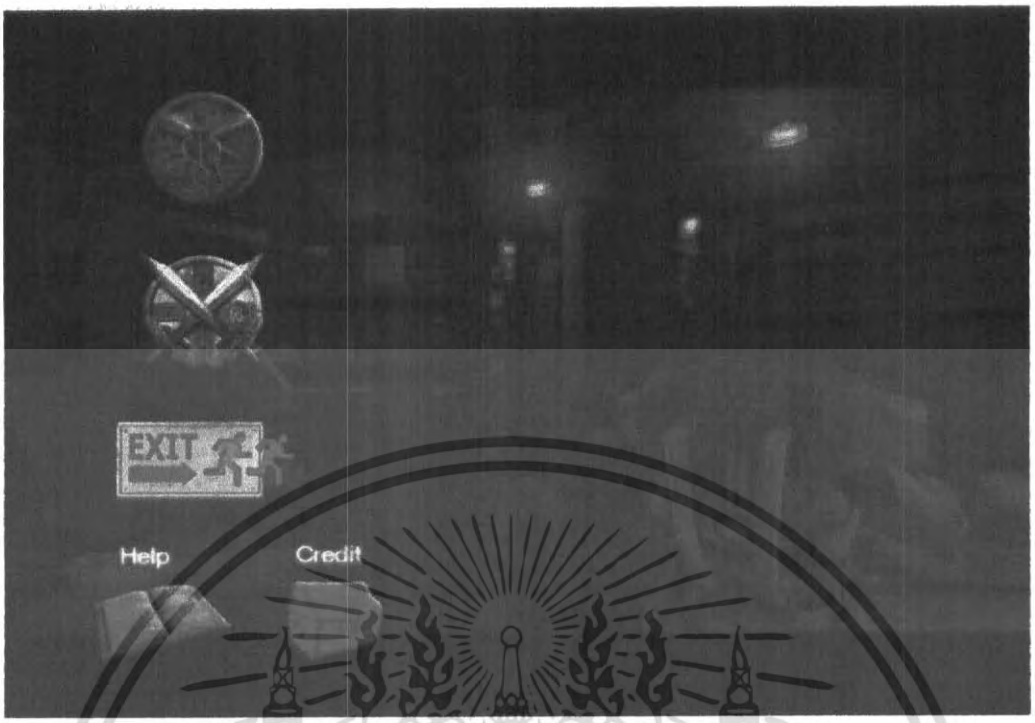
9. หน้าจอ Password ผู้เล่นจะได้รับ Password หลังจากที่ผ่านทั้งสี่ level แล้ว



รูปที่ 5.20 หน้าจอ Password

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

10. Hero Mode จะถูกปลดล็อคหลังจากได้รับ Password แล้ว



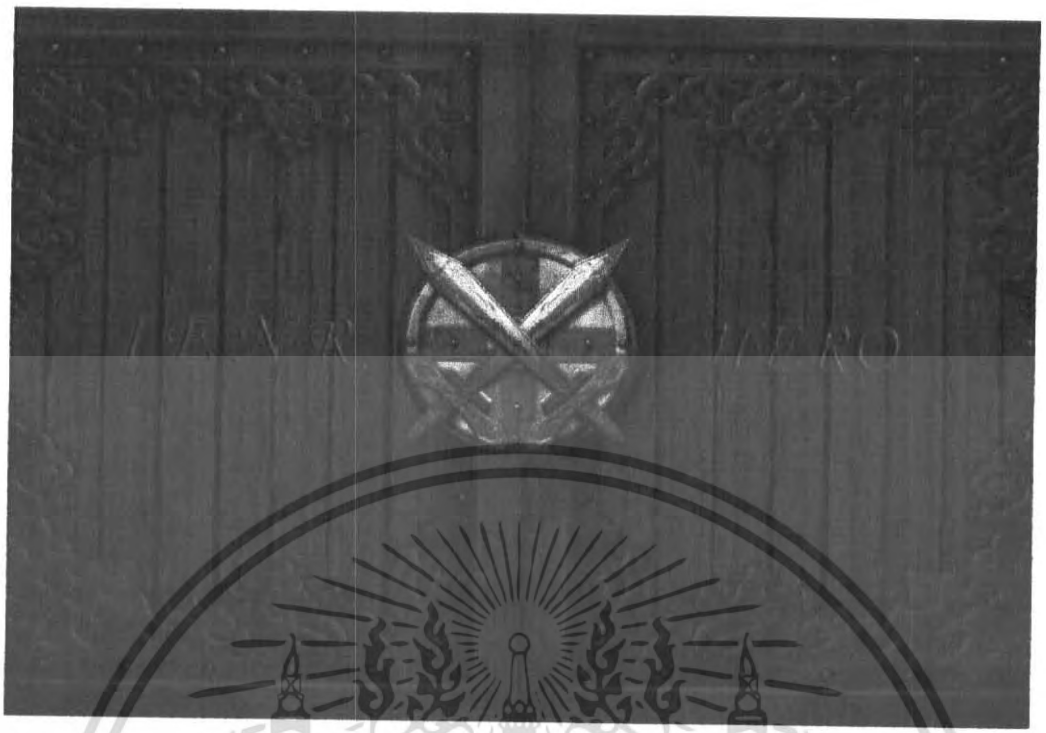
รูปที่ 5.21 หน้าจอหลัก (Hero Mode) ถูกปลดล็อค

11. หน้าจอกรอก Password หลังจากที่ผู้เล่นเลือก Hero Mode ผู้เล่นจะต้องทำการ กรอก Password จากนั้นกด Enter

รูปที่ 5.22 หน้าจอกรอก Password

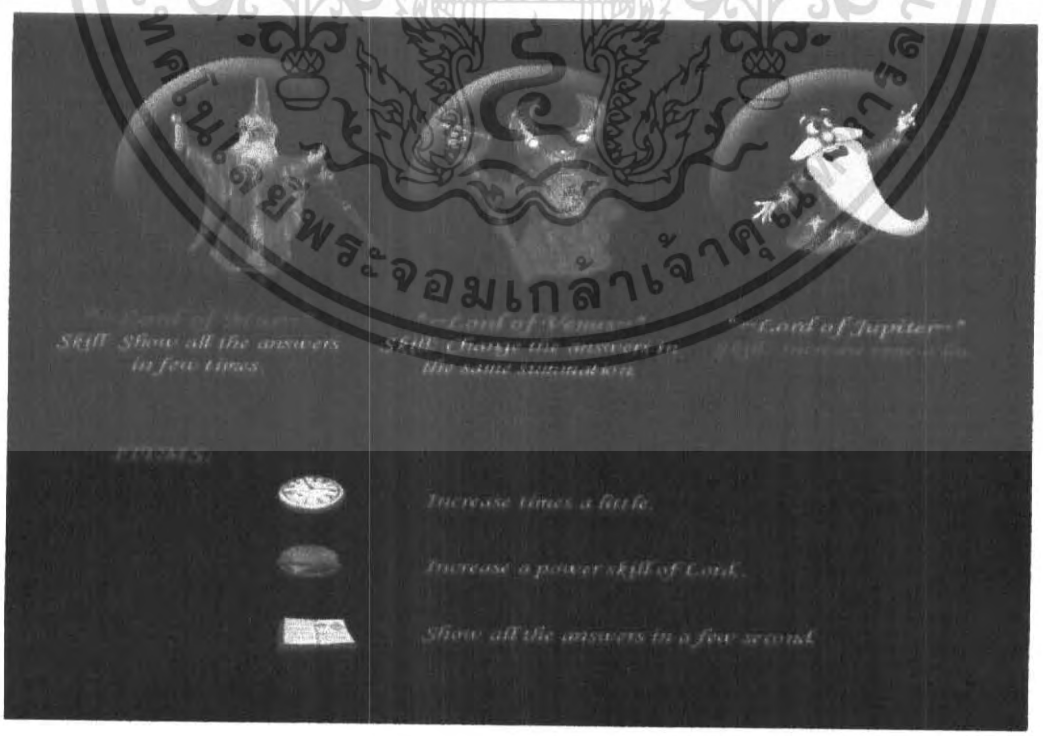
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

12. หน้าจอประตู HERO หลังจากผู้เล่นได้กด Enter



รูปที่ 5.23 หน้าจอประตู HERO

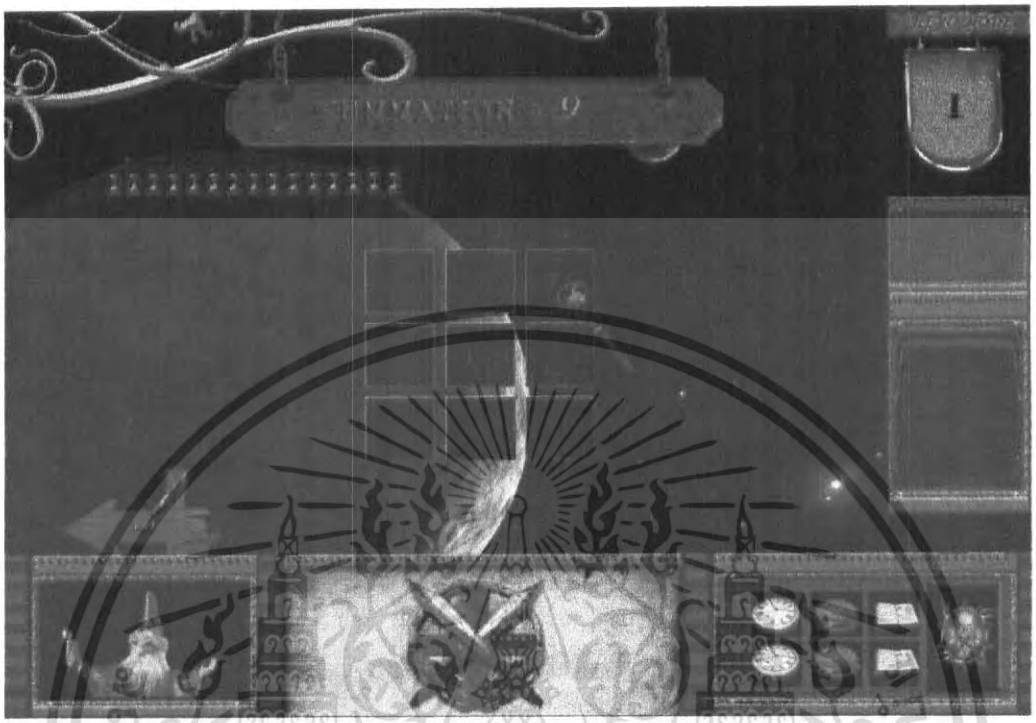
13. หน้าจอ HERO โดยในหน้านี้ผู้เล่นจะต้องเลือก Hero หนึ่งตัวจากสามตัวเพื่อไปเป็นตัวช่วยในการเล่นเกมส์ของ Hero Mode โดย Hero แต่ละตัวจะมีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ในการเล่น Hero Mode นั้นผู้เล่นจะมี items สามชนิดติดตัวผู้เล่นไปโดยแต่ละชนิดจะมีอย่างละสองชิ้น



รูปที่ 5.24 หน้าจอ HERO

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

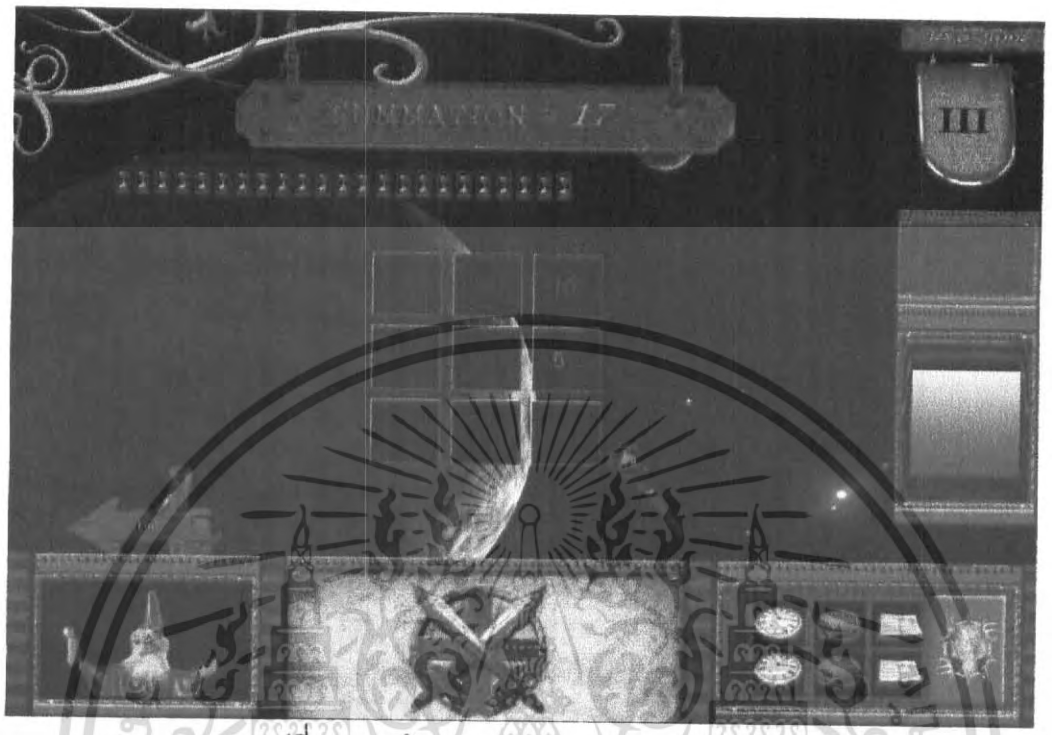
14. หน้าจอเกมส์ level 1(Hero Mode) หลังจากที่ผู้เล่นได้ทำการเลือก Heroแล้วกด Enter โดยวิธีการเล่นจะคล้ายกับ Classic Mode แต่ต่างกันตรงที่ Hero Mode จะทำการจับเวลาและมีตัวช่วยให้โดยที่ตัวช่วยแต่ละตัวจะใช้ได้เพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น



รูปที่ 5.25 หน้าจอเกมส์ level 1(Hero Mode)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

15.หน้าจอเกมส์ level 3(Hero Mode) หลังจากผ่าน level 1 และ level 2 แล้ว จะเห็นว่าความสามารถพิเศษของ Hero จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อที่แถบพลังจะมีพลังขึ้นเต็มและปุ่มใช้พลังที่อยู่ติดกับ Items จะเปลี่ยนเป็นสีส้ม



รูปที่ 5.26 หน้าจอเกมส์ level 3(Hero Mode)

16. หน้าจอ GAME OVER หลังจากที่เวลาหมด จากนั้นให้กด Enter เพื่อกลับสู่หน้าจอหลัก

รูปที่ 5.27 หน้าจอ GAME OVER

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 5
โปรแกรมและเกมส์หาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

5.1 โปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

5.1.1 ขั้นตอนการติดตั้งโปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

1. นำฐานข้อมูล ชื่อ magic ไปไว้ใน Drive C ของเครื่องคอมพิวเตอร์

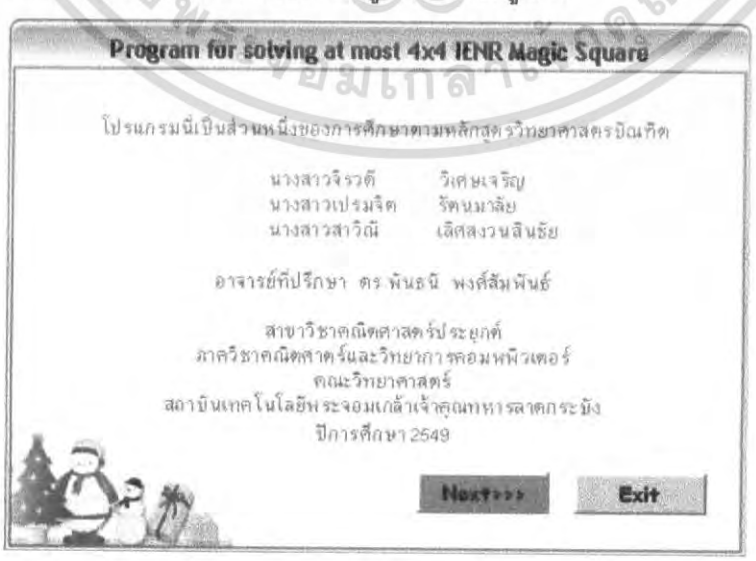
2. ใช้งานโปรแกรม IENR.exe ได้ทันที

5.1.2 คู่มือการใช้งานโปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกล IENR

1. ดับเบิลคลิ๊กที่ไอคอน IENR .exe
2. หน้าจอเริ่มต้นโปรแกรม

รูปที่ 5.1 หน้าจอเริ่มต้นโปรแกรม

3. กด next ไปยังหน้าจอถัดไป แสดง ข้อมูลของคณะผู้จัดทำ

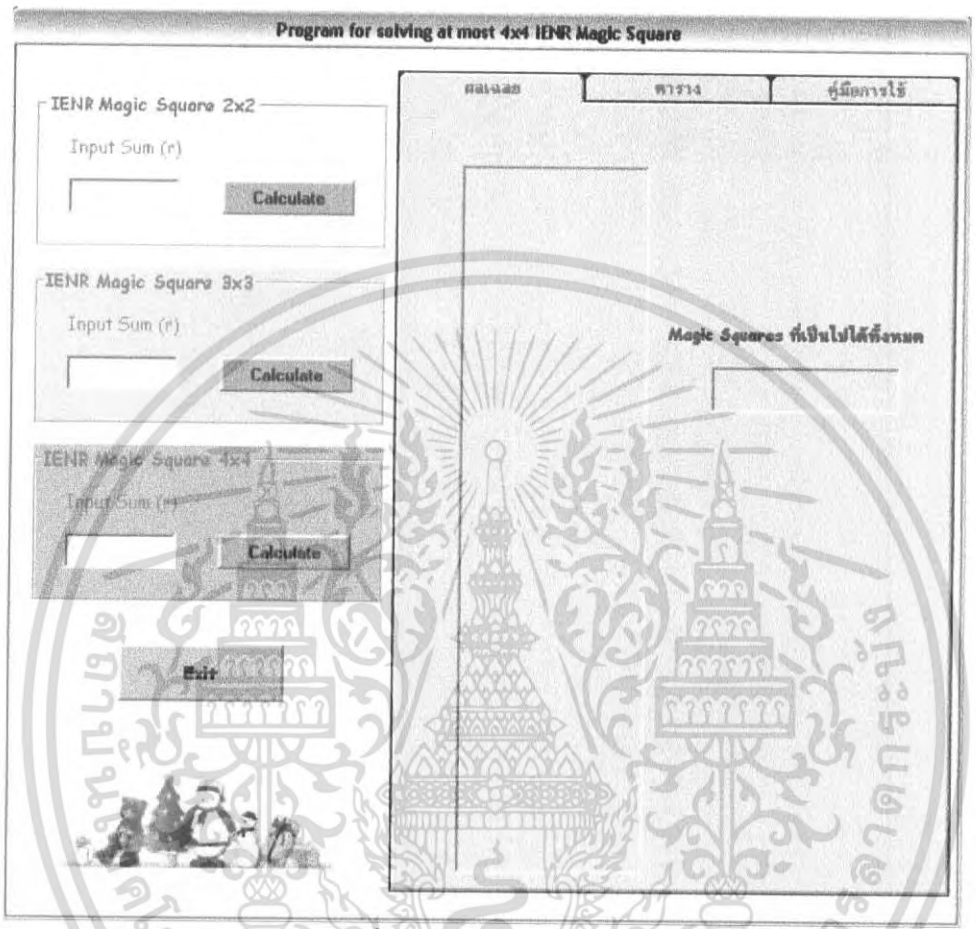


รูปที่ 5.2 หน้าจอแสดงรายละเอียดผู้จัดทำ

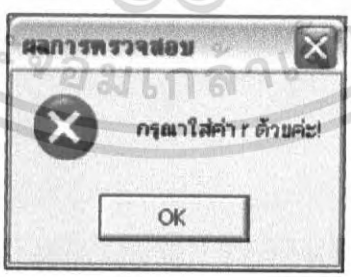
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

4. กด next จะเห็นหน้าจอโปรแกรมที่ไว้ใช้ใส่ค่าผลรวม r ที่ต้องการจะหาเมทริกซ์ผลเฉลยที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีช่องให้ใส่ค่าผลรวม r จำนวนสามช่องด้วยกัน แยกเป็น เมทริกซ์ 2×2, 3×3 และ 4×4

หมายเหตุ: ห้ามใส่ค่า r ที่ไม่ใช่ตัวเลข



รูปที่ 5.3 หน้าจอแสดงการคำนวณ

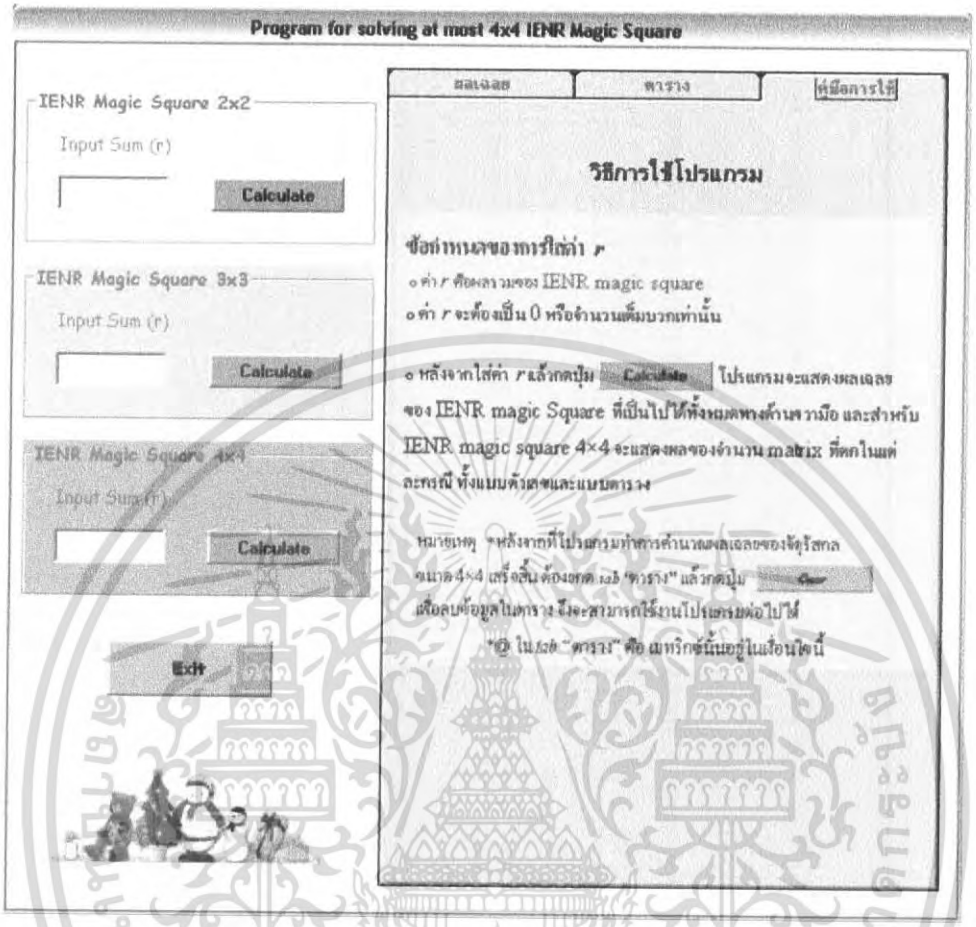


รูปที่ 5.4 หน้าจอแสดงข้อความเมื่อใส่ค่าผิด

5. ใส่ค่าตัวเลขลงไป แล้วกดปุ่ม Calculate โปรแกรมจะทำการคำนวณแล้วแสดงเมทริกซ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดทางด้านขวาของโปรแกรม Exit

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

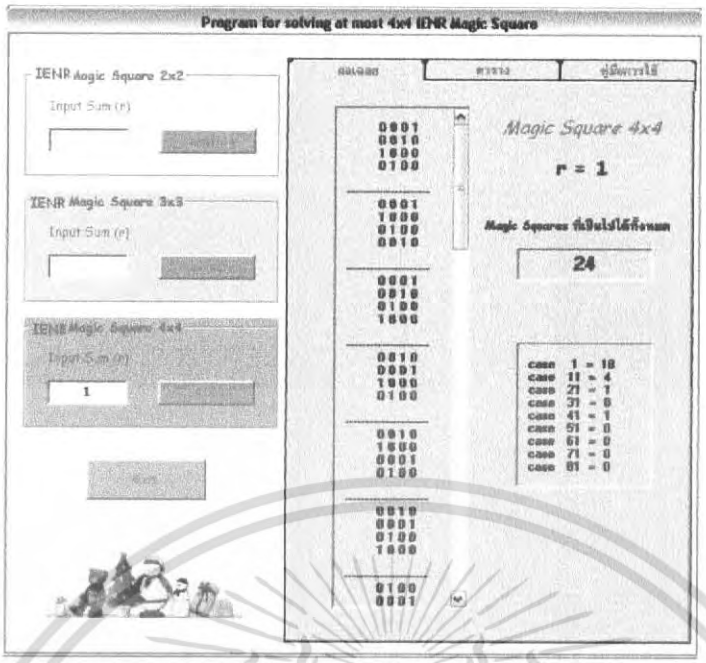
6. ต้องการออกจากโปรแกรม กดปุ่ม
7. คู่มือการใช้งานจะแสดงเมื่อกด *tab "คู่มือการใช้"*



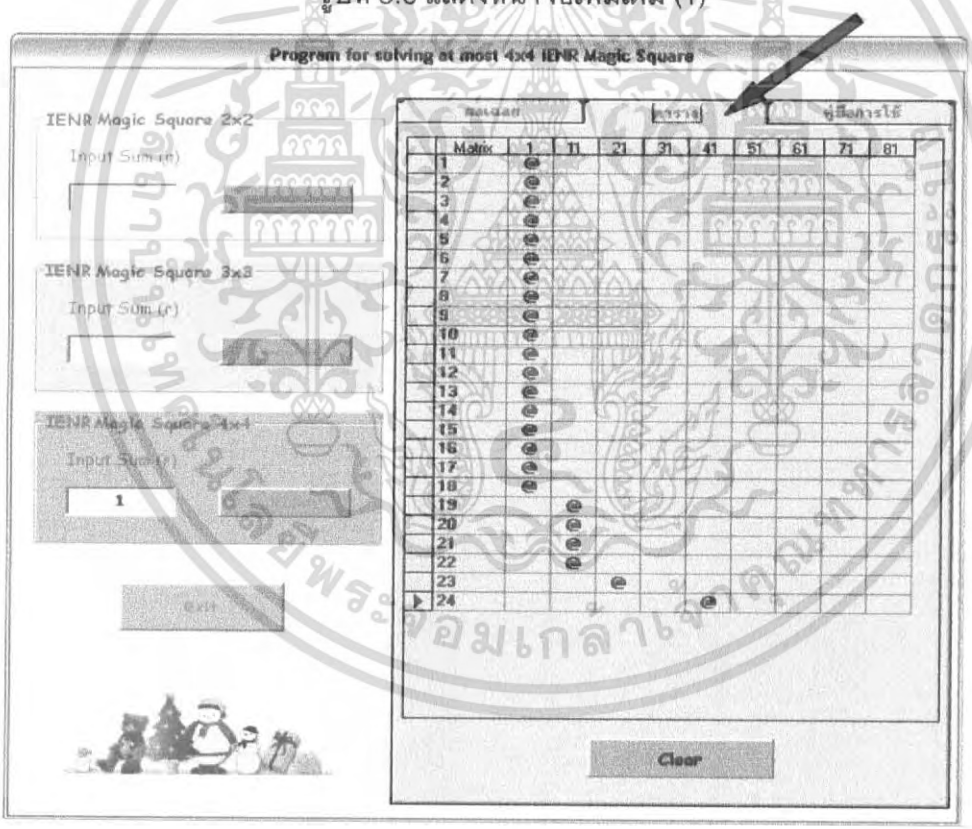
รูปที่ 5.5 หน้าจอแสดงคู่มือการใช้งานโปรแกรม

เพิ่มเติม: หากเป็นกรณีของจัตุรัสกล IENR 4×4 นั้น เมื่อใส่ค่าแล้วกดปุ่ม Calculate แล้ว จะสามารถดูได้ว่ามีจำนวนของเมทริกซ์ที่อยู่ในแต่ละเงื่อนไข (เงื่อนไขที่ 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71 และ 81) ว่ามีจำนวนเท่าใดบ้าง โดยกด *tab "ตาราง"*

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 5.6 แสดงหน้าจอเพิ่มเติม (1)



รูปที่ 5.7 แสดงหน้าจอเพิ่มเติม (2)

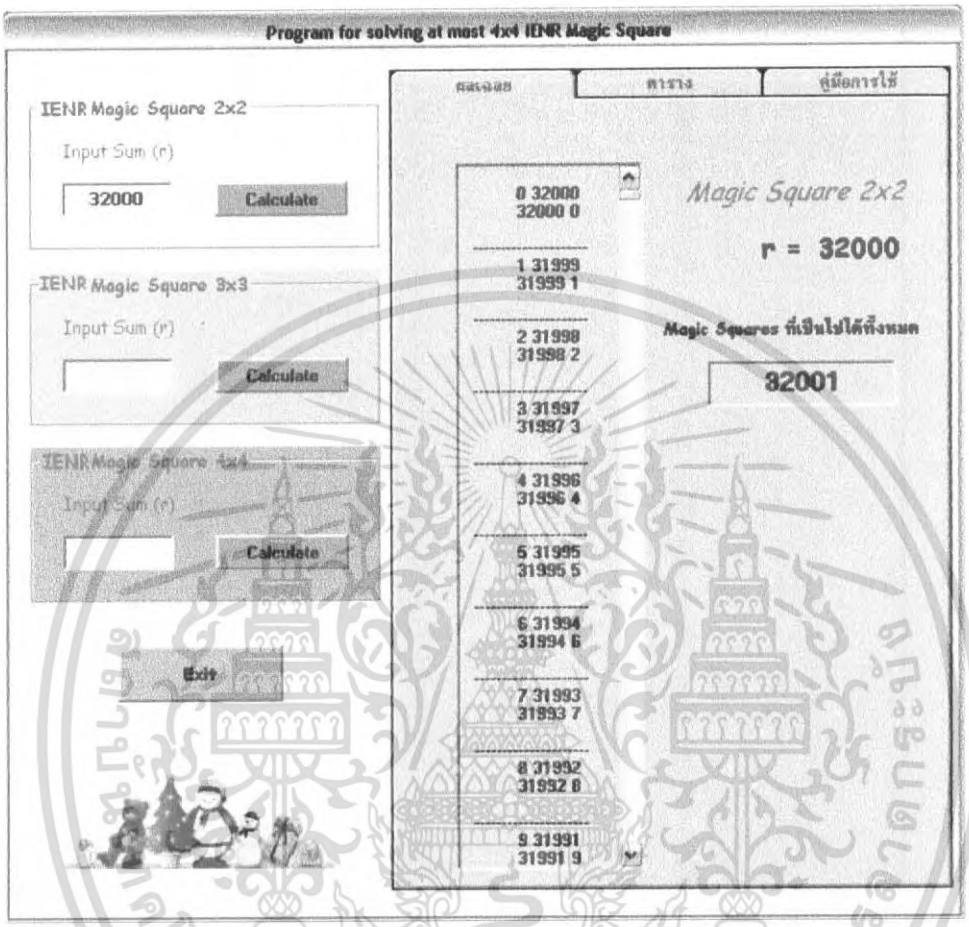
หมายเหตุ: ทุกครั้งที่ทำการคำนวณผลเฉลยของจัตุรัสกล 4×4 จะต้องทำการกดปุ่ม Clear ในหน้า *tab "ตาราง"* ทุกครั้งก่อนที่จะใช้งานโปรแกรมต่อไป

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม

ตัวอย่างที่ 1

จัตุรัสกล IENR 2×2 เมื่อผลรวม (r) = 32,000



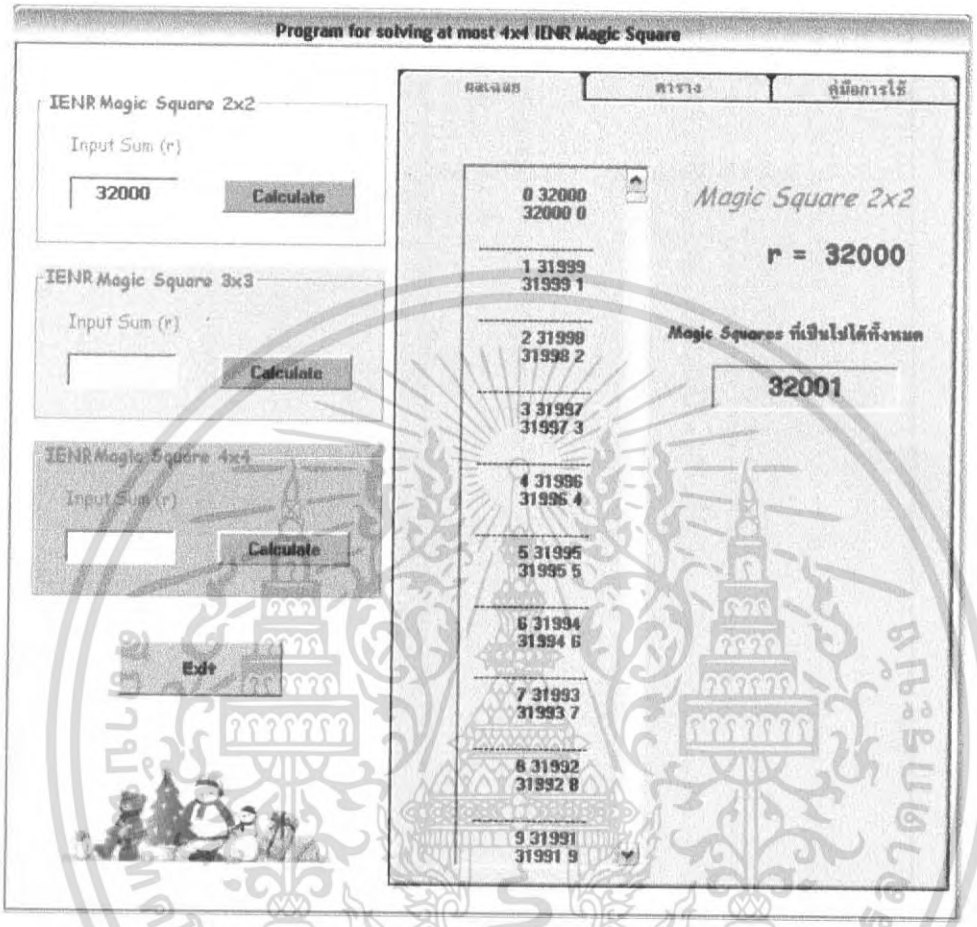
รูปที่ 5.8 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.1.3 ตัวอย่างการใช้งานโปรแกรม

ตัวอย่างที่ 1

จัตุรัสกล IENR 2×2 เมื่อผลรวม (r) = 32,000

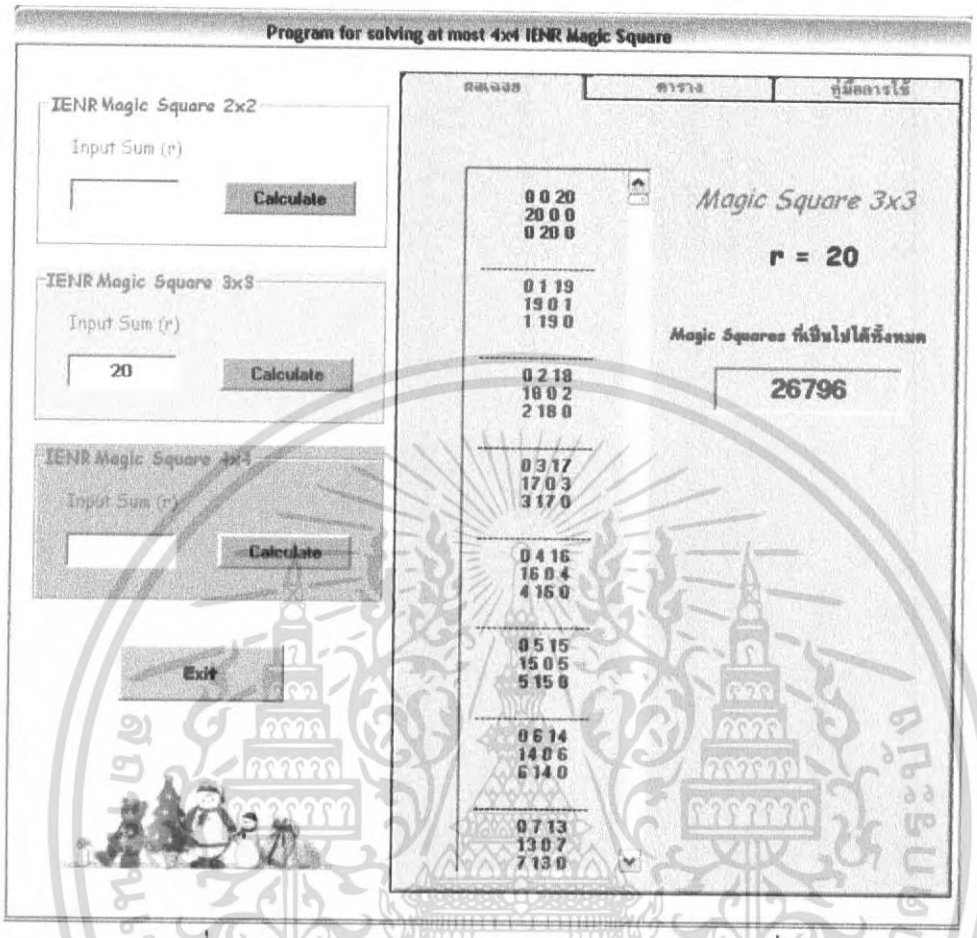


รูปที่ 5.8 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 2

จัตุรัสกล IENR 3×3 เมื่อผลรวม (r) = 20

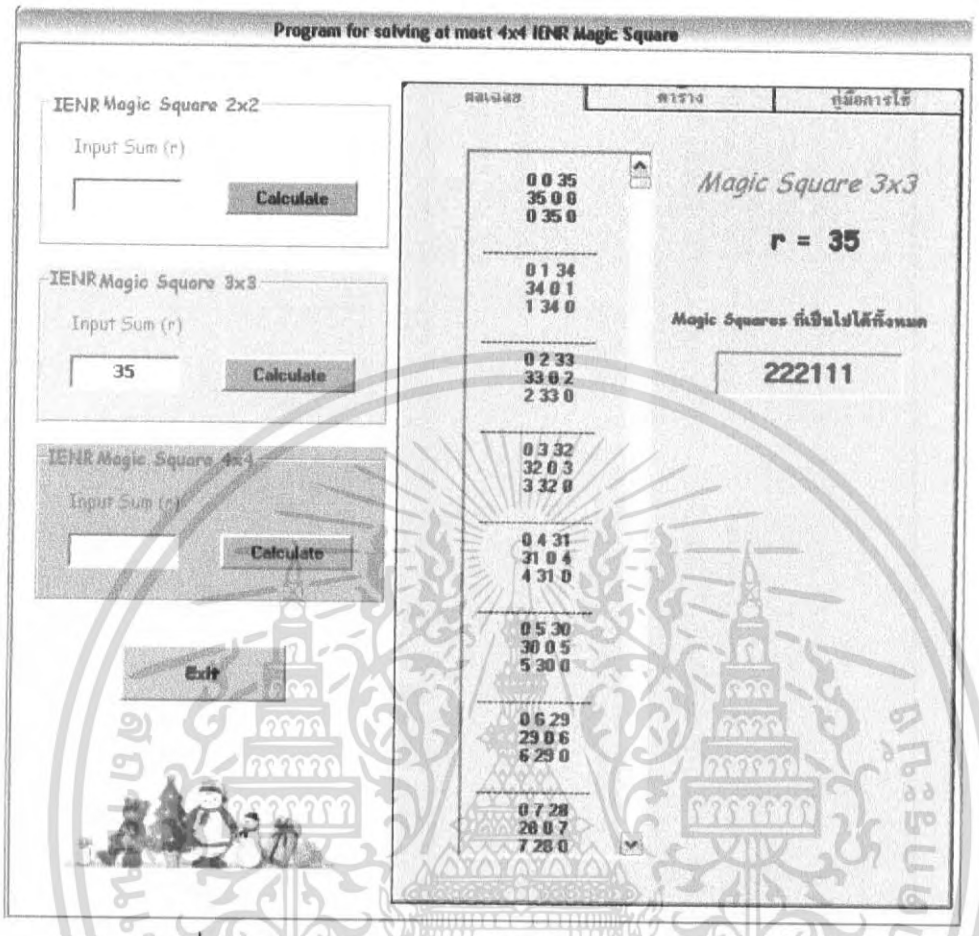


รูปที่ 5.9 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 2

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 3

จัตุรัสกล IENR 3×3 เมื่อผลรวม (r) = 35

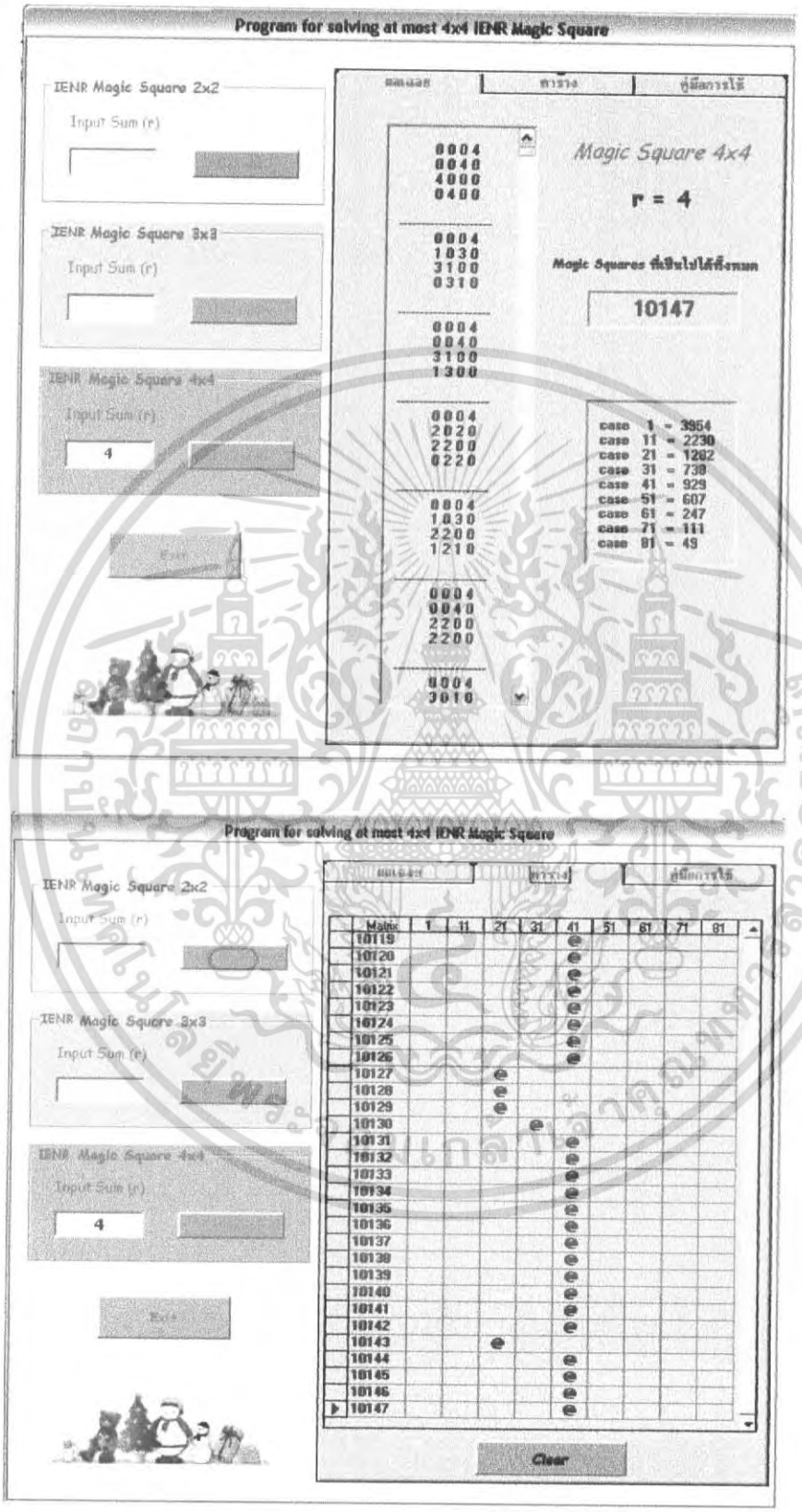


รูปที่ 5.10 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 4

จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อผลรวม (r) = 4

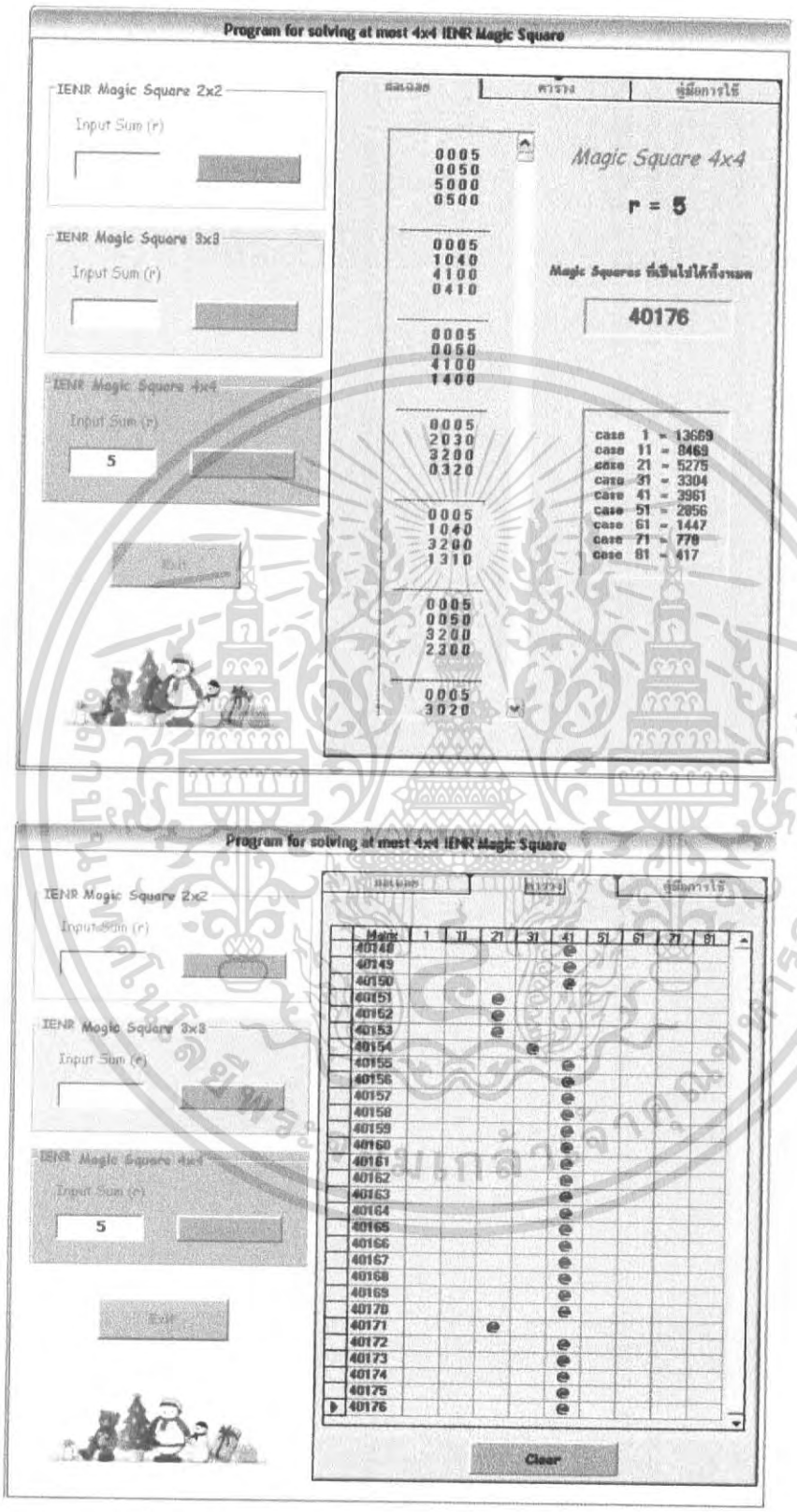


รูปที่ 5.11 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัวอย่างที่ 5

จัตุรัสกล IENR 4×4 เมื่อผลรวม (r) = 5



รูปที่ 5.12 แสดงหน้าจอการหาจัตุรัสกล IENR ตัวอย่างที่ 5

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

5.2 เกมส์จัตุรัสกล IENR

5.2.1 วิธีการเล่นเกมส์

1. double click magic_game ก็สามารถเล่นเกมส์ได้ทันที

2. หน้าจอเมนูหลักจะมี Classic Mode, Hero Mode(ถูกล็อคไว้), Help, Credit และ Exit ให้ผู้เล่นเลือก

รูปที่ 5.13 หน้าจอเมนูหลัก

ปุ่ม Classic Mode

ปุ่ม Hero Mode จะถูกปลดล็อคถ้าผ่าน Classic Mode

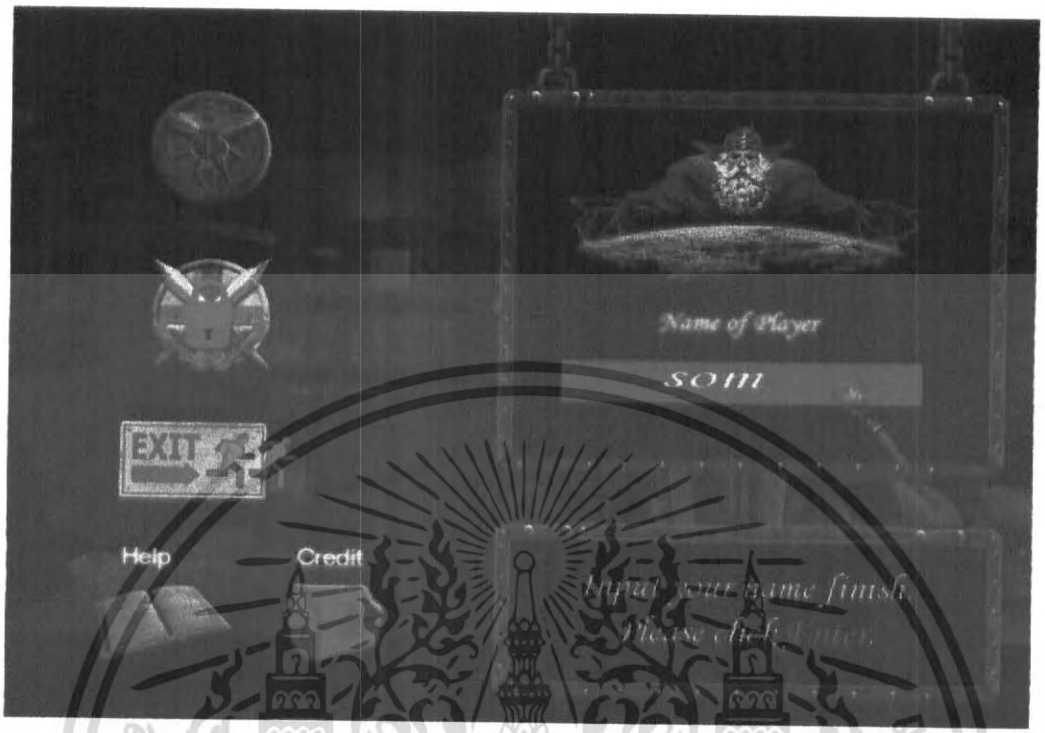
ปุ่ม Help เมื่อต้องการทราบวิธีการเล่น

ปุ่ม Exit เมื่อต้องการออกจากเกมส์

ปุ่ ม Credit เมื่อต้องการทราบรายละเอียดของผู้จัดทำ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. หน้าจอกรอกชื่อ หลังจากที่เลือกClassic Mode ผู้เล่นจะต้องทำการกรอกชื่อลงไปใน Name of Player จากนั้นกด Enter



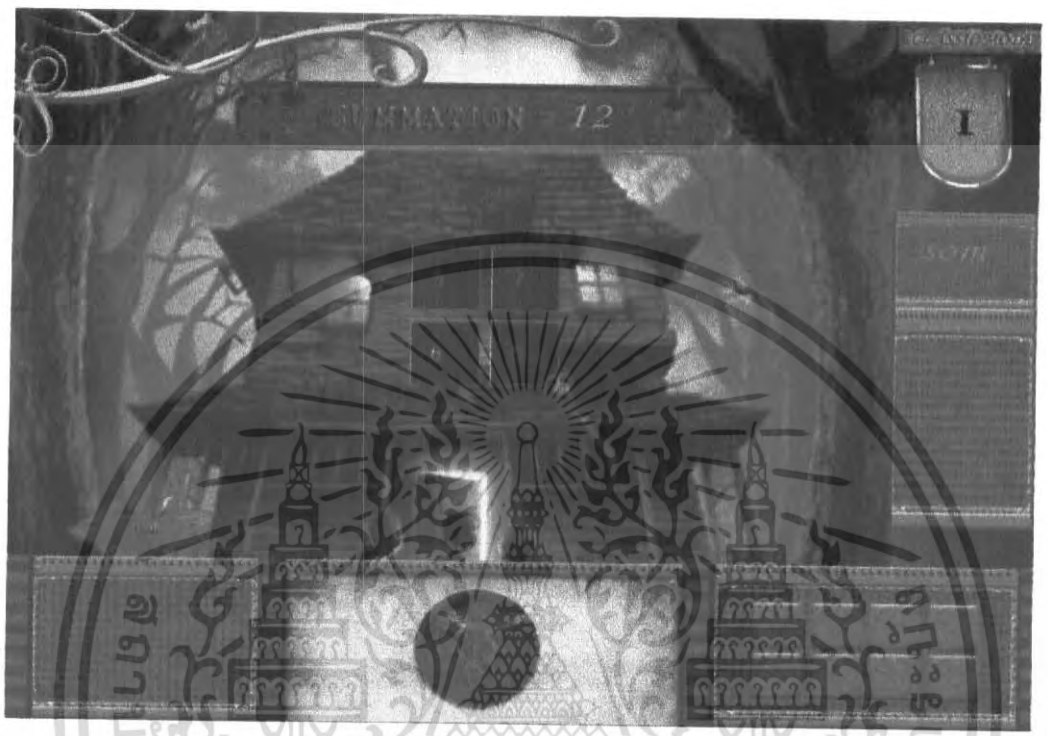
รูปที่ 5.14 หน้าจอกรอกชื่อ

4. หน้าจอประตู CLASSIC หลังจากผู้เล่นได้กด Enter

รูปที่ 5.15 หน้าจอประตู CLASSIC

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

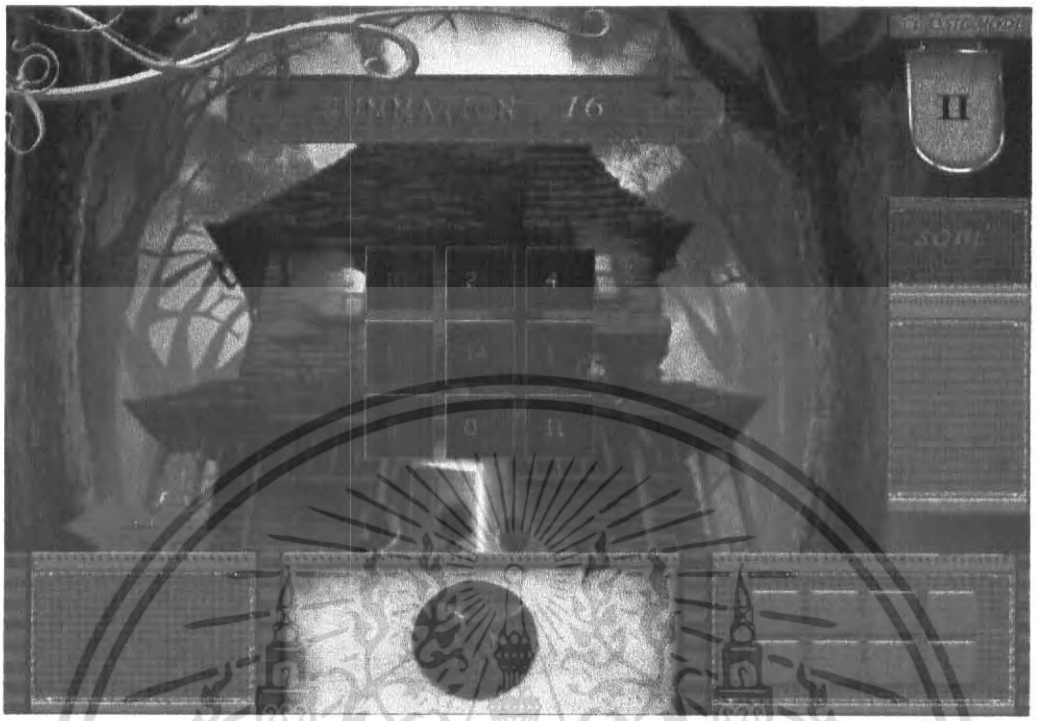
5. หน้าจอเกมส์ level 1 เมื่อเข้าสู่เกมส์การแข่งขันใน Classic Mode ผู้เล่นจะพบ Summationโดยที่ Summation นั้นคือผลรวมในแต่ละแถวแต่ละหลัก ผู้เล่นจะต้องนำเมาส์ไปกดที่ช่องที่เราต้องการใส่ค่าจากนั้นก็ใส่ค่าลงไป ถ้าค่าที่ใส่ลงไปนั้นถูกต้องตัวเลขจะกลายเป็นสีแดงถ้าตัวเลขไม่ถูกต้องจะเป็นสีเหลืองโดยค่าที่ถูกต้องจะต้องตรงตามจัตุรัสกลที่คอมพิวเตอร์ได้สุ่มมา



รูปที่ 5.16 หน้าจอเกมส์ level 1

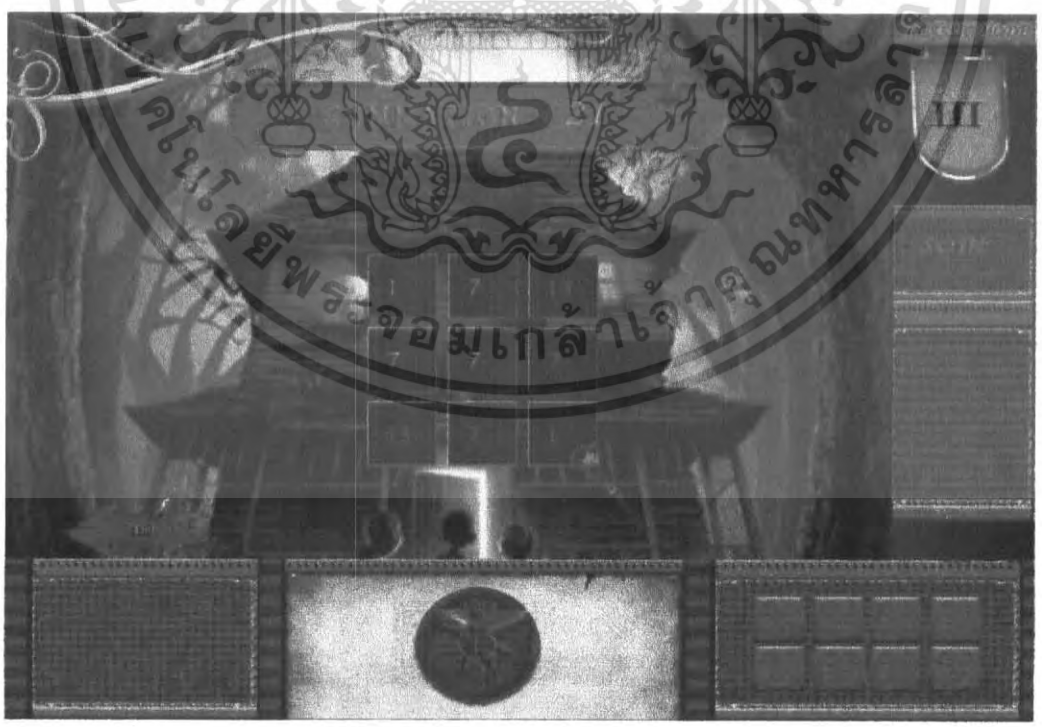
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6. หน้าจอเกมส์ level 2 จะปรากฏขึ้นมาหลังจากที่ผู้เล่นได้ผ่านใน level 1แล้ว โดยวิธีการเล่นจะเหมือนกันกับ level 1



รูปที่ 5.17 หน้าจอเกมส์ level 2

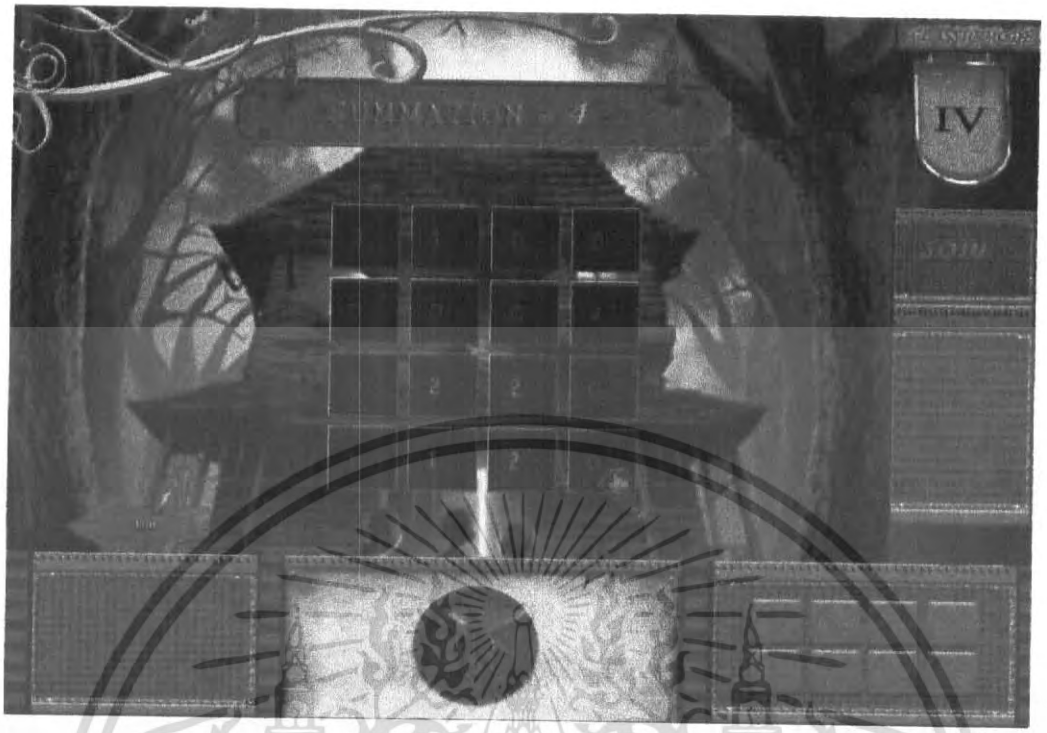
7. หน้าจอเกมส์ level 3 จะปรากฏขึ้นมาหลังจากที่ผู้เล่นได้ผ่านใน level 2แล้ว



รูปที่ 5.18 หน้าจอเกมส์ level 3

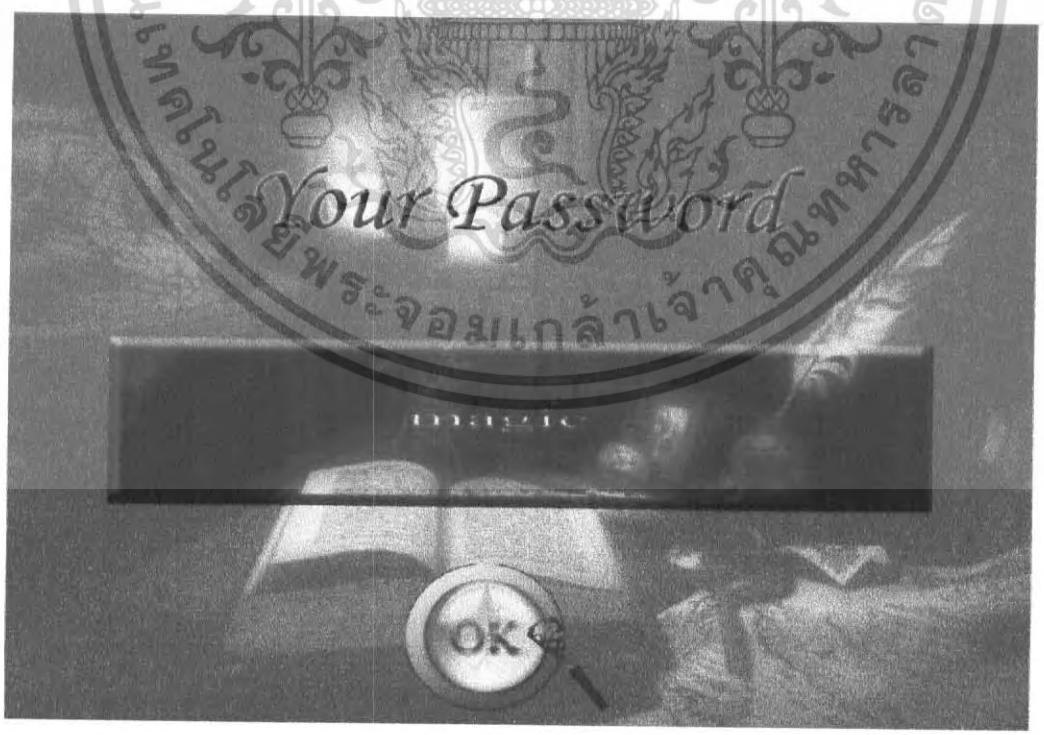
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

8. หน้าจอเกมส์ level 4 จะปรากฏขึ้นมาหลังจากที่ผู้ได้เล่นผ่านใน level 3 แล้ว



รูปที่ 5.19 หน้าจอเกมส์ level 4

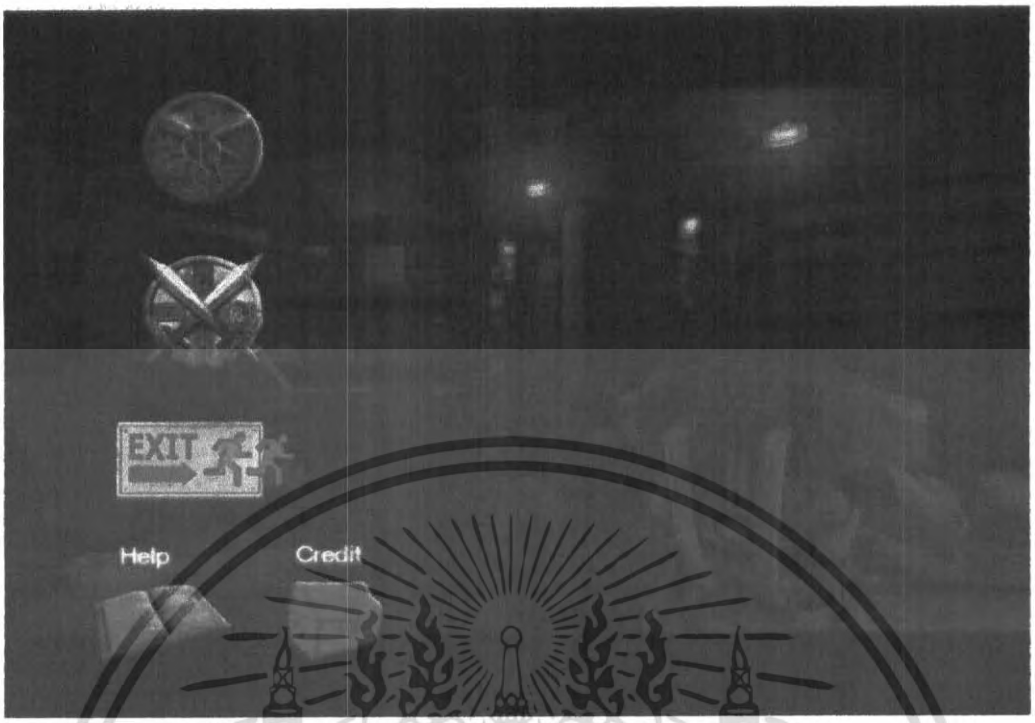
9. หน้าจอ Password ผู้เล่นจะได้รับ Password หลังจากที่ผ่านทั้งสี่ level แล้ว



รูปที่ 5.20 หน้าจอ Password

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

10. Hero Mode จะถูกปลดล็อคหลังจากได้รับ Password แล้ว



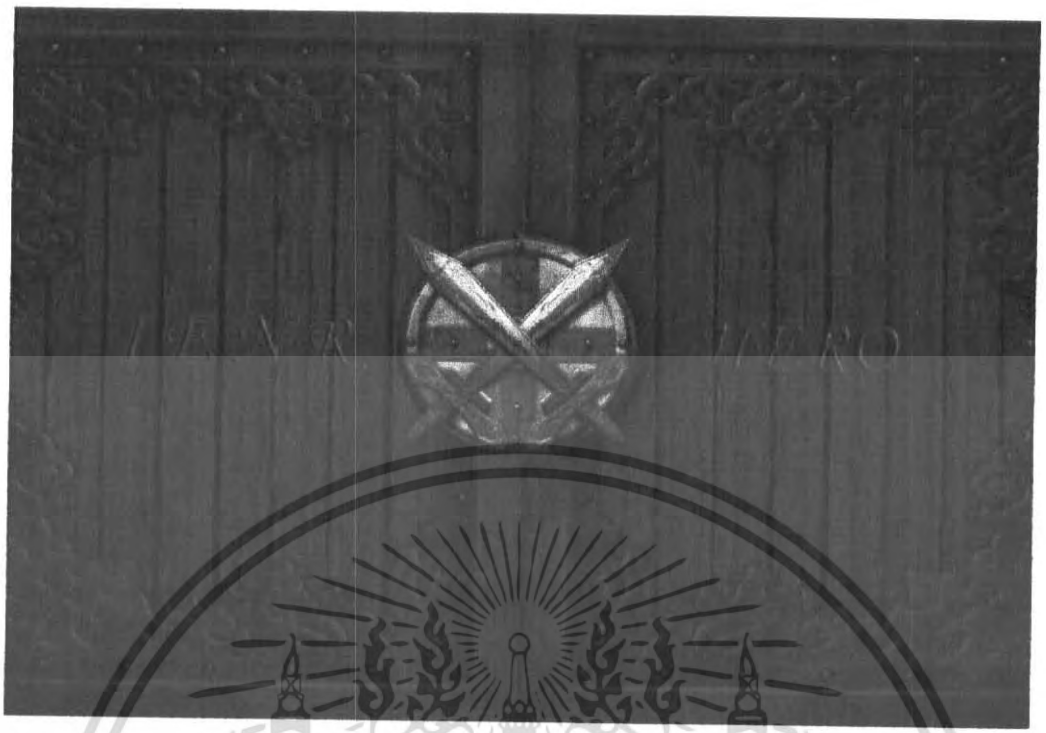
รูปที่ 5.21 หน้าจอหลัก (Hero Mode) ถูกปลดล็อค

11. หน้าจอกรอก Password หลังจากที่ผู้เล่นเลือก Hero Mode ผู้เล่นจะต้องทำการ กรอก Password จากนั้นกด Enter

รูปที่ 5.22 หน้าจอกรอก Password

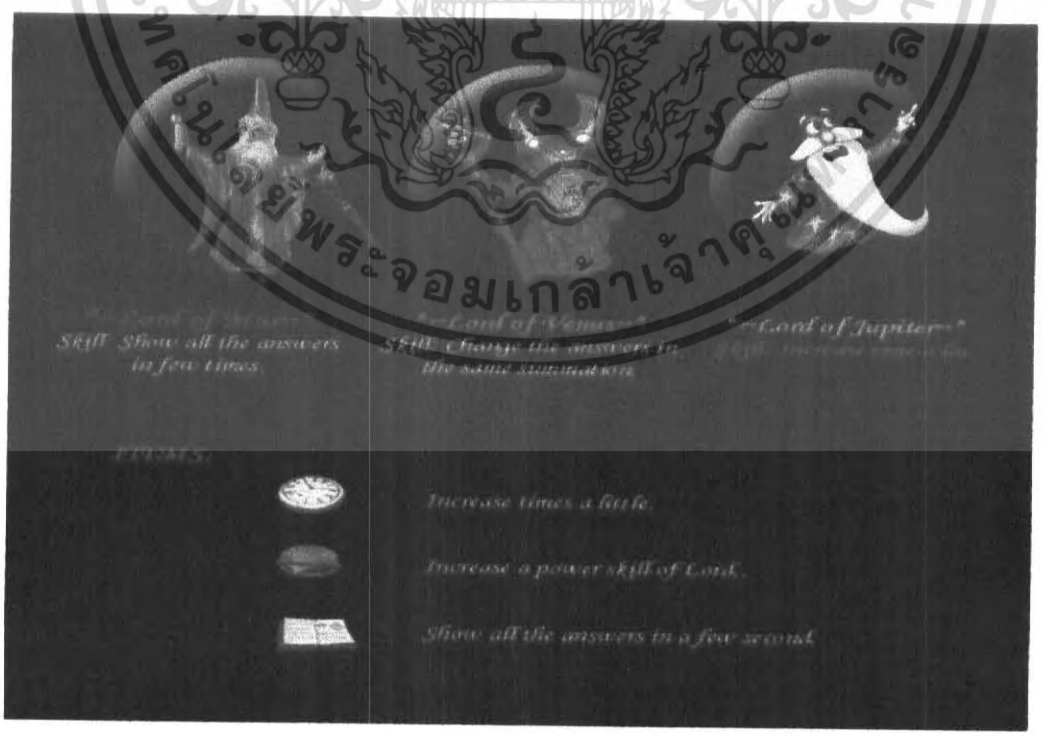
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

12. หน้าจอประตู HERO หลังจากผู้เล่นได้กด Enter



รูปที่ 5.23 หน้าจอประตู HERO

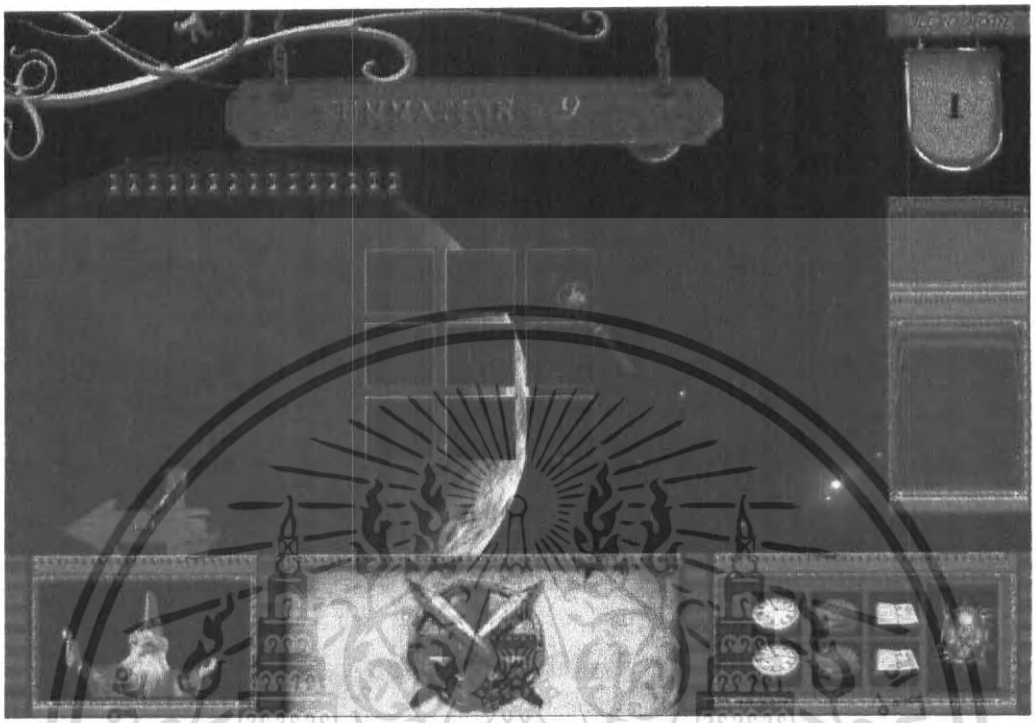
13. หน้าจอ HERO โดยในหน้านี้ผู้เล่นจะต้องเลือก Hero หนึ่งตัวจากสามตัวเพื่อไปเป็นตัวช่วยในการเล่นเกมส์ของ Hero Mode โดย Hero แต่ละตัวจะมีคุณสมบัติที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ในการเล่น Hero Mode นั้นผู้เล่นจะมี items สามชนิดติดตัวผู้เล่นไปโดยแต่ละชนิดจะมีอย่างละสองชิ้น



รูปที่ 5.24 หน้าจอ HERO

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

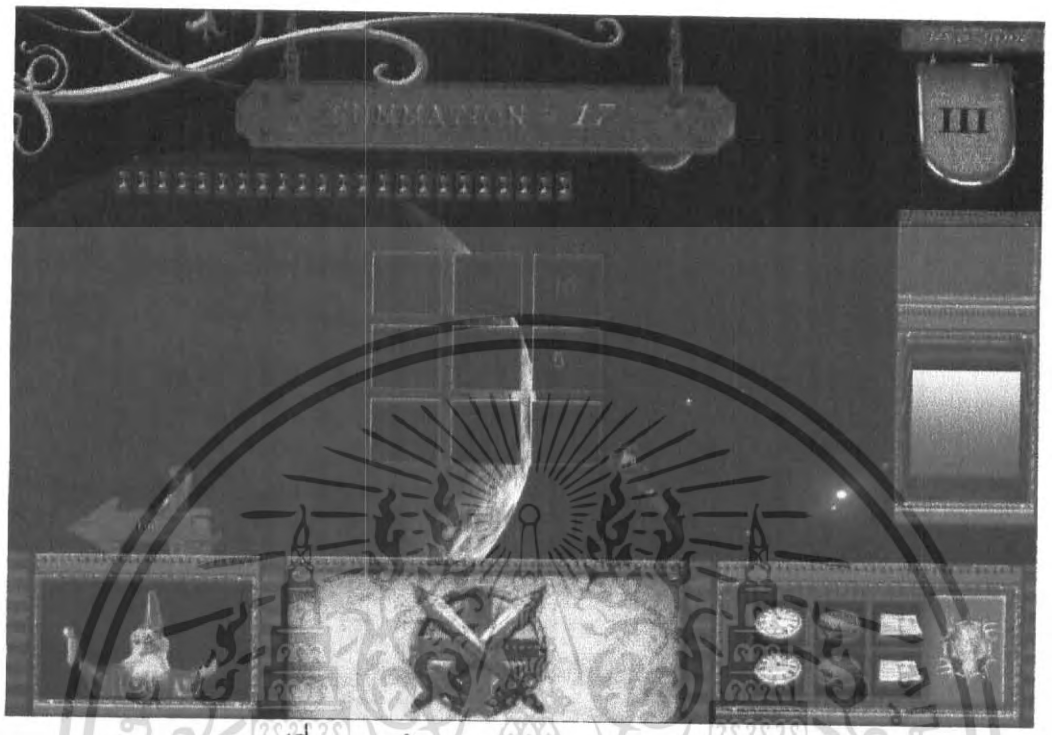
14. หน้าจอเกมส์ level 1(Hero Mode) หลังจากที่ผู้เล่นได้ทำการเลือก Heroแล้วกด Enter โดยวิธีการเล่นจะคล้ายกับ Classic Mode แต่ต่างกันตรงที่ Hero Mode จะทำการจับเวลาและมีตัวช่วยให้โดยที่ตัวช่วยแต่ละตัวจะใช้ได้เพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น



รูปที่ 5.25 หน้าจอเกมส์ level 1(Hero Mode)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

15.หน้าจอเกมส์ level 3(Hero Mode) หลังจากผ่าน level 1 และ level 2 แล้ว จะเห็นว่าความสามารถพิเศษของ Hero จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อที่แถบพลังจะมีพลังขึ้นเต็มและปุ่มใช้พลังที่อยู่ติดกับ Items จะเปลี่ยนเป็นสีส้ม



รูปที่ 5.26 หน้าจอเกมส์ level 3(Hero Mode)

16. หน้าจอ GAME OVER หลังจากที่เวลาหมด จากนั้นให้กด Enter เพื่อกลับสู่หน้าจอหลัก

รูปที่ 5.27 หน้าจอ GAME OVER

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6
สรุปผลการทำงาน

จัตุรัสกลแบบ IENR เป็นการจัดทำโดยเพิ่มจากขอบเขตต่างๆให้กว้างกว่าจัตุรัสกลแบบเก่า ดังนั้นผู้จัดทำต้องใช้เวลาและต้องอาศัยความร่วมมือจากหลายฝ่ายจึงทำให้ จัตุรัสกลแบบ IENR ยังมีข้อจำกัดหลายประการคือ

- เป็นการพิสูจน์เพื่อหาสูตรของผลเฉลยจัตุรัสกล IENR ขนาด 1×1, 2×2 และ 3×3 โดยใช้วิธีวิเคราะห์เชิงการจัด(Combinatorial Analysis)
- ใช้การสังเกตในการหาเงื่อนไขที่เป็นไปได้ของจัตุรัสกล IENR ขนาด 4×4
- โปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกลแบบ IENR ขนาด 3×3 แนะนำให้ใส่ค่าผลรวม r ไม่เกิน 35 มิฉะนั้นโปรแกรมจะเกิดการ over flow
- โปรแกรมหาผลเฉลยของจัตุรัสกลแบบ IENR ขนาด 4×4 ค่อนข้างใช้เวลาในการคำนวณนานมากกว่าการคำนวณของจัตุรัสกลขนาด 2×2, 3×3 หากใส่ค่าผลรวม r ที่มีค่ามากกว่า 5 ขึ้นไป
- เกมส์ที่ทำขึ้นไม่ยากจนเกินไป ผู้เล่นทุกวัยสามารถเล่นได้ และเกมส์ยังมีความสวยงามด้านกราฟฟิคภาพและเสียงที่ทำให้เกมส์ดูความดึงดูดใจมากยิ่งขึ้น

แนวทางการพัฒนาในอนาคต

- ทำการพิสูจน์หาสูตรของจัตุรัสกลแบบ IENR ขนาด 4×4 ถึง $n \times n$
- พัฒนาโปรแกรมหาผลเฉลยให้มีความรวดเร็วในการคิดคำนวณมากขึ้น และสามารถกำหนดค่าผลรวม r ได้มากไม่จำกัด
- พัฒนาเกมส์ให้มีความยากหลายระดับและสนุกสนานมากยิ่งขึ้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บรรณานุกรม

ธิดาสิริ ภัทรากาญจน์, ก่องกัญจน์ ภัทรากาญจน์ และธนกาญจน์ ภัทรากาญจน์. 2548. "จัตุรัสกล สำหรับคนชอบคิดชอบแก้." เล่มที่ 64 พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

นิรุธ อำนวยศิลป์. 2546. "สร้างเกมด้วยเอนจิ้น CDX และ DirectX ฉบับมืออาชีพ." นนทบุรี: อินโฟเพรส.

H. Anand, V. C. Dumir and H. Gupta, 1666. A combinatorial distribution problem, *Duke Math. J.* 33. 757-769.

M. Bóna, There are a lot of magic squares, 1995. *Studies in Applied Mathematics* 94, 415-421.

C. j. Henrich, Magic squares and linear algebra, 1991. *Amer. Math. Monthly* 98, 481-488.

P. A. MacMahon, 1916. *Combinatorial Analysis*, vols. 1-2, Cambridge Univ. Pr, Cambridge, UK (reprinted by Chelsea, New York, NY, 1960).

D. B. Shapiro, 1992.A replication property for magic squares, this MAGAZINE 65, 155-160.

R. P. Stanley, 1983. *Combinatorics and Commutative Algebra*, Progress in Mathematics 41, Birkhäuser, Boston, MA.

KENJI MANO, 1961. *On the formula of* $_nH_r$, Scientific Reports of the Faculty of Literature and Science, Hirosaki University, vol. 8, pp. 58-60.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้