การประยุกต์ใช้รูปแบบนิวตัน-โค้ตกับวิธีรุงเง-คุตตา

APPLICATION OF NEWTON-COTES FORMULA IN RUNGE-KUTTA METHOD

จิตตคุณ จิระวัชร

พรรณพิมล พราหมณ์เพชร

อรพรรณ อมรอรช

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2549

APPLICATION OF NEWTON-COTES FORMULA IN RUNGE-KUTTA METHOD

CHITTAKUNE CHIRAVAJR

PANPIMON PRAMPETCH

ORAPAN AMORNARACHA

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2006

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การประยุกต์ใช้รูปแบบนิวตัน-โค้ตกับวิธีรุงเง-คุตตา APPLICATION OF NEWTON-COTES FORMULA IN RUNGE-KUTTA METHOD
ชื่อนักศึกษา	นายจิตตคุณ จิระวัชร 46050004 นางสาวพรรณพิมล พราหมณ์เพชร 46050025 นางสาวอรพรรณ อมรอรช 46050042
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2549

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.กฤษฎา ไตรสุรัตน์	
กรรมการ	อ.เทอดขวัญ ช้างเผือก	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	

(รองศาสตราจารย์ ดร. วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	การประยุกต์ใช้รูปแบบนิวตัน-โค้ตกับวิธีรุงเง-คุตตา
นักศึกษา	นายจิตตคุณ จิระวัชร 46050004
	นางสาวพรรณพิมล พราหมณ์เพชร 46050025
	นางสาวอรพรรณ อมรอรช 46050042
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2549
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์

บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นการสร้างรูปแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อใช้คำนวณหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญรูปแบบค่าเริ่มต้นด้วยวิธีรุงเง-คุตตา โดยนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ตมาใช้เป็นจุดของรูปแบบและจุดถ่วงในรูปแบบรุงเง-คุตตา เมื่อได้รูปแบบที่ต้องการแล้วจะนำรูปแบบที่ได้ใหม่นี้ไปทดลองใช้กับตัวอย่างต่างๆ แล้วเปรียบเทียบผลที่ได้จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่นิยมใช้ในปัจจุบัน

Special Project Title	APPLICATION OF NEWTON-COTES FORMULA IN RUNGE-KUTTA METHOD
Students	Mr.Chittakune Chiravajr 46050004
	Miss Panpimol Prampetch 46050025
	Miss Orapan Amornaracha 46050042
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2006
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk
	Assoc.Prof.Pongpan Rattanathanawan

ABSTRACT

This project is to construct the mathematical formulas of the Runge-Kutta method for finding the numerical solution of the initial value problem of ordinary differential equation. The points and weights from the Newton-Cotes formulas are used as points and weights of Runge-Kutta formulas. The new formulas are tested on several examples then compare the results with the classical Runge-Kutta formulas.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องการประยุกต์ใช้รูปแบบนิวตัน-โค้ตกับวิธีรุงเง-คุตตา สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และรศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์ อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่คอยช่วยเหลือและให้คำปรึกษาปัญหาต่างๆ เป็นอย่างดี รวมทั้งประธานกรรมการ รศ.กฤษฎา ไตรสุรัตน์ และกรรมการ อ.เทอดขวัญ ช้างเผือก ได้ตรวจสอบและเสนอแนะความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอกราบขอบพระคุณคุณพ่อและคุณแม่ที่คอยเป็นกำลังใจแก่คณะผู้จัดทำอยู่ตลอดเวลา และขอขอบคุณพี่ๆ เพื่อนๆ ทุกคนของคณะผู้จัดทำที่มีส่วนช่วยเหลือในปัญหาพิเศษนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำและเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการและอำนวยความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ต่างๆที่ใช้ในการจัดทำปัญหาพิเศษ จนปัญหาพิเศษฉบับนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2550

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

เนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้ในการอธิบายปัญหาต่างๆทั้งทางด้านวิทยาศาสตร์วิศวกรรมศาสตร์และด้านอื่นๆอีกหลายปัญหาสามารถอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งสมการเชิงอนุพันธ์ที่ใช้อธิบายปัญหาต่างๆมักมีการกำหนดเงื่อนไขที่จุดเริ่มต้นให้กับสมการที่สร้างขึ้นและเรียกสมการในลักษณะนี้ว่า ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น (initial value problem) สำหรับรูปแบบทั่วไปของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งคือ

$$y' = f(x,y)$$

โดยมีเงื่อนไขค่าเริ่มต้นเป็น $\quad y(x_0) = y_0$

มีวิธีในการแก้ปัญหา 2 ประเภทคือ วิธีในการหาผลเฉลยจริงและวิธีในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้รับความนิยมใช้ในการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์คือระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ในปัญหาพิเศษนี้จึงได้คิดนำเอาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตามาดัดแปลง โดยนำค่าจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ตซึ่งเป็นวิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้ประมาณค่าหาปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความแม่นยำไปเป็นค่าของจุดถ่วงในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งแตกต่างกันไปในแต่ละอันดับ แล้วทำการหาตัวแปรไม่ทราบค่าที่เหลือในระเบียบรุงเง-คุตตาให้ครบ

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1.2.1 เพื่อศึกษาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตารูปแบบต่างๆ และการสร้างรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

1.2.2 เพื่อศึกษารูปแบบนิวตัน-โค้ต และหาจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ต

1.2.3 เพื่อหารูปแบบระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาซึ่งได้นำเอาจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ตมาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

1.3 ขอบเขตของปัญหา

ปัญหาพิเศษนี้ได้ศึกษาการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ตที่นำมาประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองถึงอันดับหก จากนั้นหาจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ตจุดใหม่มาปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองและอันดับสาม โดยทดสอบรูปแบบระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้จากการวิจัยมาแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่หนึ่งที่อยู่ในรูปแบบ

$$y' = f(x, y)$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $y(x_0) = y_0$

1.4 ขั้นตอนของการวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาเอกสาร ทฤษฎีบท และข้อมูลที่เกี่ยวข้อง

ขั้นตอนที่ 3 นำรูปแบบของนิวตัน-โค้ตมาใช้หารูปแบบของวิธีรุงเง-คุตตาที่มีอันดับสองถึงอันดับสามแล้วเปรียบเทียบกับวิธีรุงเง-คุตตาที่นิยมใช้ในปัจจุบัน

ขั้นตอนที่ 4 เขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์เพื่อทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ที่นำเอาจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ตมาประยุกต์ใช้

ขั้นตอนที่ 5 สรุปผลและเขียนปัญหาพิเศษ

1.5 คำจำกัดความที่ใช้ในปัญหาพิเศษ

1.5.1 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta methods) หมายถึง ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบชัดแจ้ง (explicit Runge-Kutta) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการเชิงตัวเลขที่ใช้แก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

1.5.2 รูปแบบนิวตัน-โค้ต (Newton-Cotes formular) หมายถึง รูปแบบที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขต

บทที่2
ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 รูปแบบนิวตัน-โค้ต (Newton-Cotes formula)

รูปแบบนิวตัน-โค้ตมีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) + E[f] \tag{2.1}$$

เรียกรูปแบบที่ (2.1) ว่าการปริพันธ์ด้วยรูปแบบของนิวตัน-โค้ต x_k เรียกว่า จุดของรูปแบบ (nodal point) , a_k เรียกว่าจุดถ่วง (weight point) , $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์และ $E[f]$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อน

นิยาม 2.1 ถ้า $x_1 = a$ และ $x_n = b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน-โค้ตจาก (2.1) ว่า รูปแบบนิวตัน-โค้ตชนิดปิด (closed Newton-Cotes formula) และถ้า $x_1 > a$ และ $x_n < b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน-โค้ตนี้ว่า รูปแบบนิวตัน-โค้ตชนิดเปิด (open Newton-Cotes formula)

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้ากำหนดจุด $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นจุดต่างๆกันในช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่ง $x_i \neq x_j$ สำหรับ $i \neq j$ และค่า $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$ แล้วจะมีจำนวนจริง $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k) \tag{2.2}$$

สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่กำลังน้อยกว่า หรือเท่ากับ $n-1$

<u>พิสูจน์</u>

ต้องการรูปแบบที่เป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ นั่นคือ

$$\int_a^b dx = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\int_a^b x dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k$$

$$\int_a^b x^2 dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k^2$$

$$\int_a^b x^3 dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k^3$$

$$\vdots$$

$$\int_a^b x^{n-1} dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot x_k^{n-1}$$

กำหนดให้ $\alpha_k = \int_a^b x^{k-1} dx$

$$\begin{aligned} \therefore \quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n &= \alpha_1 \\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n &= \alpha_2 \\ a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \ldots + a_nx_n^2 &= \alpha_3 \\ &\vdots \\ a_1x_1^{n-1} + a_2x_2^{n-1} + a_3x_3^{n-1} + \ldots + a_nx_n^{n-1} &= \alpha_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\therefore$ ได้สมการเชิงเส้น $Ax = c$

โดย
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \ddots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นจุดต่างๆกันในช่วง $[a,b]$ ดังนั้น A เป็น Van de Monte matrix และ $|A| \neq 0$

$\therefore$ สมการ $Ax = c$ จะมีคำตอบและมีเพียงชุดเดียวเท่านั้น

นั่นคือมี $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ที่ทำให้รูปแบบที่ (2.2) เป็นจริง

2.2 ระเบียบวิธีรุงเง – คุตตา (Runge – Kutta Method)

วิธีการนี้เกิดจาก รุงเง (Runge) เมื่อปี ค.ศ. 1895 และฮวน (Heun) เมื่อปี ค.ศ. 1900 ได้คิดค้นระเบียบวิธีนี้มาจากระเบียบวิธีออยเลอร์และต่อมา คุตตา (Kutta) ได้ปรับปรุงระเบียบวิธีให้เป็นขั้นตอน เมื่อปี ค.ศ.1901 จึงได้ชื่อว่าระเบียบ วิธีรุงเง - คุตตา(Runge – Kutta Method) ซึ่งเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่นิยมใช้กันมาก โดยรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \qquad m = 1,2,... \tag{2.4}$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (increment function) $\phi(x_m, y_m; h)$ คือความชันเฉลี่ยตลอดขนาดขั้น h ซึ่งกำหนดให้มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$\phi(x_m, y_m; h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{2.5}$$

เมื่อ

$$k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; i = 1 \\ f\left(x_m + hc_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j\right) & ; i = 2,3,...,s \end{cases} \tag{2.6}$$

และ

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \tag{2.7}$$

โดยที่ a_i, c_i และ b_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา, h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละขั้นมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ และ s เป็นอันดับ (order) ของระเบียบวิธี

วิธีของรุงเง – คุตตาอันดับสอง (Runge – Kutta method of second order) จะมีรูปแบบทั่วไปคือ

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \tag{2.8}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

ซึ่งต้องหาค่า a_1, a_2, α, β วิธีการหาค่าเหล่านี้จะกระทำโดยใช้ความรู้ของการขยายของเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปรดังนี้

$$f\left(x+h, y+k\right) = f\left(x,y\right) + \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{(x,y)} + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]_{(x,y)} + \ldots \tag{2.9}$$

$$\therefore \quad k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

$$= f\left(x_m, y_m\right) + \alpha h f_x\left(x_m, y_m\right) + \beta h k_1 f_y\left(x_m, y_m\right) + \ldots \tag{2.10}$$

$$\therefore \quad y_{m+1} = y_m + h a_1 f\left(x_m, y_m\right) + h a_2 f\left(x_m, y_m\right) + h^2 \alpha a_2 f_x\left(x_m, y_m\right) + h^2 \beta a_2 k_1 f_y\left(x_m, y_m\right) + \ldots \tag{2.11}$$

นำสมการ (2.11) ไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทเลอร์ซึ่งมีรูปแบบ (2.12) จะได้ค่า a_1, a_2, α และ β ที่ต้องการ

$$y_{m+1} = y_m + h y'_m + \frac{1}{2}h^2 y''_m + \frac{1}{6}h^3 y'''_m + \frac{1}{24}h^4 y''''_m + \frac{1}{120}h^5 y'''''_m + \ldots$$

$$\begin{aligned} &= y_m + hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + ff_y) + \frac{1}{6}h^3(f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + ff_y^2 \\ &\quad + f^2 f_{yy}) + \frac{1}{24}h^4(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + f_x f_y^2 + ff_y^3 + f_{xx} f_y \\ &\quad + 5ff_{xy}f_y + 3ff_x f_{yy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy}) \\ &\quad + \frac{1}{120}h^5(f_{xxxx} + 4ff_{xxxy} + 12ff_x f_{xyy} + 9ff_{xxy}f_y + 4ff_{xx}f_{yy} \\ &\quad + 13ff_x f_y f_{yy} + 8ff_{xy}^2 + 9ff_{xy}f_y^2 + ff_y^4 + 6f^2 f_{xxyy} + 6f^2 f_x f_{yyy} \\ &\quad + 15f^2 f_{xyy} f_y + 12f^2 f_{xy} f_{yy} + 11f^2 f_y^2 f_{yy} + 4f^3 f_{xyyy} \\ &\quad + 7f^3 f_y f_{yyy} + 4f^3 f_{yy}^2 + f^4 f_{yyyy} + 6f_x f_{xxy} + 4f_{xx} f_{xy} \\ &\quad + 7f_x f_{xy} f_y + f_x f_y^3 + 3f_x^2 f_{yy} + f_{xx} f_y^2 + f_{xxx} f_y) + \ldots \end{aligned} \tag{2.12}$$

ส่วนวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสาม (Runge – Kutta method of third order) มีรูปแบบทั่วไปดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3) \tag{2.13}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_1 h\ ,\ y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_2 h\ ,\ y_m + \beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2)$$

ในทำนองเดียวกันกับวิธีรุงเง–คุตตาอันดับสองและอันดับสาม อาจจะหาวิธีรุงเง–คุตตาอันดับสูงขึ้นเรื่อยๆได้ แต่ในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สูงเกินกว่าสี่จะไม่ทำให้การหาผลเฉลยได้ผลดีขึ้น

วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสองที่นิยมใช้มีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{2.14}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + hk_1)$$

วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสามที่นิยมใช้มีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{2.15}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}\ ,\ y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h\ ,\ y_m - hk_1 + 2hk_2)$$

วิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสี่ที่นิยมใช้มีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.16)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m , y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h , y_m + hk_3)$$

ระเบียบรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก เสนอไว้เมื่อ ค.ศ. 1969 โดยนักวิจัยชื่อ ไฟล์เบิร์ก(E.Fehlberg) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการหนึ่งที่เป็นที่ยอมรับโดยระเบียบวิธีดังกล่าวเป็นระเบียบวิธีที่ปรับปรุงรูปแบบจากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาในกรณีที่ $s = 5$ และตัดเทอม k_2 ออกทำให้ได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \quad (2.17)$$

เมื่อ

$$k_1 = hf(x_m, y_m)$$

$$k_2 = hf(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_m + h, y_m + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

วิธีการต่างๆที่ใช้ในปัจจุบันจะเป็นรูปแบบออยเลอร์,เทย์เลอร์ ,รุงเง-คุตตา แต่ในแนวคิดใหม่นี้จะเป็นการปรับปรุงรูปแบบวิธีของรุงเง-คุตตาโดยใช้จุด $x_m + \alpha_k h$ และ a_k เป็นจุดและจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ต

เหตุผลที่สามารถเลือกกระทำแบบนี้ได้ เนื่องจากการหาค่า $x_m + \alpha_k h$ และ a_k เป็นระบบสมการไม่เชิงเส้นที่มีจำนวนตัวแปรมากกว่าจำนวนสมการจึงเกิด degree of freedom ที่สามารถกำหนดตัวแปรบางตัวแปรเองได้

ในปี ค.ศ. 2003 , รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และนายสมสกุล พุ่มมาก ได้ทำการวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method จากงานวิจัยได้แนะนำสมการซึ่งได้ผลเป็นที่น่าพึงพอใจทั้ง 3 สมการดังต่อไปนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \tag{1}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}h\, ,\, y_m + \frac{\sqrt{2}}{3}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h\, ,\, y_m + \frac{(2-\sqrt{2})}{3}hk_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}hk_2)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{54}(19k_1 - 20k_2 + 55k_3) \tag{2}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m\, ,\, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{10}h\, ,\, y_m + \frac{3}{10}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{3}{5}h\, ,\, y_m + \frac{3}{55}hk_1 + \frac{6}{11}hk_2)$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_2 + 12k_3 + 32k_4 + 7k_5) \tag{3}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m - hk_1 + \frac{3}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{9}{16}hk_1 - \frac{3}{8}hk_2 + \frac{9}{16}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + h, y_m - hk_1 + \frac{18}{7}hk_2 - \frac{12}{7}hk_3 + \frac{8}{7}hk_4)$$

3.1 ค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตจากการศึกษาวิจัย

ในหัวข้อนี้จะแสดงการหาค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตที่จะนำมาพัฒนาระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยการศึกษางานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method

3.1.1 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสอง

เราใช้นิวตัน-โค้ตอันดับสองหาค่า โดยให้ x_1, x_2 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากัน ในช่วง [0,1] จะได้ว่า

ถ้า $x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{3}{4}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{3}{4}a_2 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{3.1}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad a_2 = \frac{2}{3} \tag{3.2}$$

ถ้า $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 &= \int_0^1 dx = 1 \\
\frac{1}{2} a_2 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 1 \tag{3.4}$$

3.1.2 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสาม

เราใช้นิวตัน-โค้ตอันดับสามหาค่า ให้ x_1 , x_2 , x_3 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วง [0,1] จะได้ว่า

ถ้า $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\
\frac{\sqrt{2}}{3} a_2 + \frac{2}{3} a_3 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \\
\frac{2}{9} a_2 + \frac{4}{9} a_3 &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = \frac{3}{4} \tag{3.6}$$

ถ้า $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{10}$, $x_3 = \frac{3}{5}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\
\frac{3}{10}a_2 + \frac{3}{5}a_3 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad (3.7) \\
\frac{9}{100}a_2 + \frac{9}{25}a_3 &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = \frac{19}{54} \quad , \quad a_2 = -\frac{10}{27} \quad , \quad a_3 = \frac{55}{54} \qquad (3.8)$$

3.1.3 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ดอันดับสี่

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ดอันดับสี่ สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) โดยให้ x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วง [0,1] จะได้ว่า
ถ้า $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $x_4 = 1$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= \int_0^1 dx = 1 \\
\frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 + a_4 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \\
\frac{1}{9}a_2 + \frac{4}{9}a_3 + a_4 &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \qquad (3.9) \\
\frac{1}{27}a_2 + \frac{8}{27}a_3 + a_4 &= \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = \frac{1}{8}\ ,\ a_2 = \frac{3}{8}\ ,\ a_3 = \frac{3}{8}\ ,\ a_4 = \frac{1}{8} \tag{3.10}$$

3.1.4 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับห้า

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ดอันดับห้า สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) โดยให้ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วง [0,1] จะได้ว่า ถ้า $x_1 = 0\ ,\ x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{2}\ ,\ x_4 = \frac{3}{4}, x_5 = 1$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= \int_0^1 dx = 1 \\
\frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{2}a_3 + \frac{3}{4}a_4 + a_5 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \\
\frac{1}{16}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{9}{16}a_4 + a_5 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\
\frac{1}{64}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \frac{27}{64}a_4 + a_5 &= \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \\
\frac{1}{256}a_2 + \frac{1}{16}a_3 + \frac{81}{256}a_4 + a_5 &= \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = \frac{7}{90}, a_2 = \frac{32}{90}, a_3 = \frac{12}{90}, a_4 = \frac{32}{90}, a_5 = \frac{7}{90} \tag{3.12}$$

3.1.5 ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับหก

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ดอันดับหก สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3) โดยให้ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วง [0,1] จะได้ว่า ถ้า $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{5}$, $x_3 = \frac{2}{5}$, $x_4 = \frac{3}{5}$, $x_5 = \frac{4}{5}$, $x_6 = 1$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 &= \int_0^1 dx = 1 \\
\frac{1}{5}a_2 + \frac{2}{5}a_3 + \frac{3}{5}a_4 + \frac{4}{5}a_5 + a_6 &= \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \\
\frac{1}{25}a_2 + \frac{4}{25}a_3 + \frac{9}{25}a_4 + \frac{16}{25}a_5 + a_6 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\
\frac{1}{125}a_2 + \frac{8}{125}a_3 + \frac{27}{125}a_4 + \frac{64}{125}a_5 + a_6 &= \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \\
\frac{1}{625}a_2 + \frac{16}{625}a_3 + \frac{81}{625}a_4 + \frac{256}{625}a_5 + a_6 &= \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} \\
\frac{1}{3125}a_2 + \frac{32}{3125}a_3 + \frac{243}{3125}a_4 + \frac{1024}{3125}a_5 + a_6 &= \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = \frac{19}{288}, a_2 = \frac{75}{288}, a_3 = \frac{50}{288}, a_4 = \frac{50}{288}, a_5 = \frac{75}{288}, a_6 = \frac{19}{288} \tag{3.14}$$

3.2 รูปแบบของระเบียบรูงเง-คุตตาจากการศึกษาวิจัย

ในหัวข้อนี้จะนำค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตจากหัวข้อ 3.1 มาใส่ในจุดถ่วงของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาในแต่ละอันดับ โดยการศึกษางานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method

3.2.1 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \tag{3.15}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.2) มาแทนในสมการที่ (3.15) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \tag{3.16}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \beta h k_1)$$

เมื่อนำไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้ $\beta = \frac{3}{4}$ ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองแบบที่ 1 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \tag{3.17}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{3}{4}h k_1)$$

ในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองรูปแบบที่ 2 ให้นำจุดถ่วงจากสมการที่ (3.4) มาแทนในสมการที่ (3.15) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + hk_2 \tag{3.18}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m\ ,\ y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}\ ,\ y_m + \beta hk_1)$$

เมื่อนำไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้ $\beta = \dfrac{1}{2}$ ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองแบบที่ 2 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hk_2 \tag{3.19}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m\ ,\ y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}\ ,\ y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

3.2.2 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสาม

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสาม จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3) \tag{3.20}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m , y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_1 h\ ,\ y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_2 h\ ,\ y_m + \beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.6) มาแทนในสมการที่ (3.20) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \tag{3.21}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}h\,,\, y_m + \beta_1 h k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h\,,\, y_m + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2)$$

เมื่อนำไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\,,\, \beta_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}\,,\, \beta_3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \tag{3.22}$$

ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามแบบที่ 1 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \tag{3.23}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}\,h,\, y_m + \frac{\sqrt{2}}{3}\,hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h\,,\, y_m + \frac{(2-\sqrt{2})}{3}hk_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}hk_2)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.8) มาแทนในสมการที่ (3.20) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{54}(19k_1 - 20k_2 + 55k_3) \tag{3.24}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{10}h\ ,\ y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{3}{5}h\ ,\ y_m + \beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2)$$

เมื่อนำไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้

$$\beta_1 = \frac{3}{10}\ ,\ \beta_2 = \frac{3}{55}\ ,\ \beta_3 = \frac{6}{11} \tag{3.25}$$

ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามแบบที่ 2 มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{54}(19k_1 - 20k_2 + 55k_3) \tag{3.26}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{10}h\ ,\ y_m + \frac{3}{10}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{3}{5}h\ ,\ y_m + \frac{3}{55}hk_1 + \frac{6}{11}hk_2)$$

3.2.3 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.10) มาใส่ในสมการรุงเง-คุตตาอันดับสี่ จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{3.27}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m\ ,\ y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}\ ,\ y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h\ ,\ y_m + \beta_2 hk_1 + \gamma_1 hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h\ ,\ y_m + \beta_3 hk_1 + \gamma_2 hk_2 + \lambda_1 hk_3)$$

เมื่อนำไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้

$$\beta_1 = \frac{1}{3}, \beta_2 = -\frac{1}{3}, \beta_3 = 1, \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1, \lambda_1 = 1 \tag{3.28}$$

ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{3.29}$$

โดยที่
$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m - \frac{h}{3}k_1 + hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_1 - hk_2 + hk_3)$$

3.2.4 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับห้า

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.12) มาใส่ในสมการรุงเง-คุตตาอันดับห้า จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_2 + 12k_3 + 32k_4 + 7k_5) \tag{3.30}$$

โดยที่
$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \beta_2 hk_1 + \gamma_1 hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \beta_3 hk_1 + \gamma_2 hk_2 + \lambda_1 hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + h, y_m + \beta_4 hk_1 + \gamma_3 hk_2 + \lambda_2 hk_3 + \alpha_1 hk_4)$$

เมื่อนำไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้

$$\beta_1 = \frac{1}{4}, \beta_2 = -1, \beta_3 = \frac{9}{16}, \beta_4 = -1, \gamma_1 = \frac{3}{2},$$
$$\gamma_2 = -\frac{3}{8}, \gamma_3 = \frac{18}{7}, \lambda_1 = \frac{9}{16}, \lambda_2 = -\frac{12}{7}, \alpha_1 = \frac{8}{7} \tag{3.31}$$

ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับห้ามีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_2 + 12k_3 + 32k_4 + 7k_5) \tag{3.32}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m - hk_1 + \frac{3}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{9}{16}hk_1 - \frac{3}{8}hk_2 + \frac{9}{16}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + h, y_m - hk_1 + \frac{18}{7}hk_2 - \frac{12}{7}hk_3 + \frac{8}{7}hk_4)$$

3.2.5 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับหก

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.14) มาใส่ในสมการรุงเง-คุตตาอันดับหก จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{288}(19k_1 + 75k_2 + 50k_3 + 50k_4 + 75k_5 + 19k_6) \tag{3.33}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{5}, y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{5}h\,,\, y_m + \beta_2 hk_1 + \gamma_1 hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{3}{5}h\,,\, y_m + \beta_3 hk_1 + \gamma_2 hk_2 + \lambda_1 hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \frac{4}{5}h\,,\, y_m + \beta_4 hk_1 + \gamma_3 hk_2 + \lambda_2 hk_3 + \alpha_1 hk_4)$$

$$k_6 = f(x_m + h\,,\, y_m + \beta_5 hk_1 + \gamma_4 hk_2 + \lambda_3 hk_3 + \alpha_2 hk_4 + \omega_1 hk_5)$$

เมื่อนำไปเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้

$$\beta_1 = \frac{1}{15}, \beta_2 = -\frac{1}{5}, \beta_3 = \frac{3}{20}, \beta_4 = -\frac{1}{15}, \beta_5 = \frac{23}{38}, \gamma_1 = \frac{3}{5}, \gamma_2 = -\frac{3}{10},$$
$$\gamma_3 = \frac{6}{5}, \gamma_4 = -\frac{45}{19}, \lambda_1 = \frac{3}{4}, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \frac{135}{38}, \alpha_1 = \frac{2}{3}, \alpha_2 = -\frac{30}{19}, \omega_1 = \frac{15}{19} \quad (3.34)$$

ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับหกมีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{288}(19k_1 + 75k_2 + 50k_3 + 50k_4 + 75k_5 + 19k_6) \quad (3.35)$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m\,,\, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{5}\,,\, y_m + \frac{h}{5}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{5}h\,,\, y_m - \frac{h}{5}k_1 + \frac{3}{5}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{3}{5}h\,,\, y_m + \frac{3}{20}hk_1 - \frac{3}{10}hk_2 + \frac{3}{4}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \frac{4}{5}h\,,\, y_m - \frac{h}{15}k_1 + \frac{6}{5}hk_2 - hk_3 + \frac{2}{3}hk_4)$$

$$k_6 = f(x_m + h\,,\, y_m + \frac{23}{38}hk_1 - \frac{45}{19}hk_2 + \frac{135}{38}hk_3 - \frac{30}{19}hk_4 + \frac{15}{19}hk_5)$$

3.3 ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตาจากการวิจัย

จากการกำหนดจุดขึ้นมาใหม่ โดยการหาจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ดอันดับสอง สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3)

โดยกำหนดจุดเป็น $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$

ดังนั้น

$$a_1 + a_2 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\frac{1}{3}a_2 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \qquad (3.36)$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = -\frac{1}{2} \ , \ a_2 = \frac{3}{2} \qquad (3.37)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.37) มาแทนในสมการที่ (3.15) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + h(-\frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2) \qquad (3.38)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \beta h k_1)$$

จากสมการที่ (2.6) และสมการที่ (2.7) จะทราบได้ว่า $\beta = \frac{1}{3}$

จะได้ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตาอันดับสองมีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(-\frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2) \qquad (3.39)$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$

จากการหาจุดขึ้นมาใหม่ โดยการหาจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ดอันดับสาม สามารถหาได้จากสมการที่ (2.3)

โดยให้ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = 1$

ดังนั้น

$$a_1 + a_2 + a_3 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\frac{1}{3}a_2 + a_3 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \quad (3.40)$$

$$\frac{1}{9}a_2 + a_3 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = \frac{3}{4} \quad , \quad a_3 = \frac{1}{4} \quad (3.41)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (3.41) มาแทนในสมการที่ (3.20) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(3k_2 + k_3) \quad (3.42)$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h, y_m + \beta_1 h k_1 + \beta_2 h k_2)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย k_1, k_2 และ k_3 จะได้

$$k_1 = f \qquad ; f \text{ คือ } f(x_m, y_m) \tag{3.43}$$

$$k_2 = f + h\left(\frac{1}{3}f_x + \frac{1}{3}k_1 f_y\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{9}f_{xx} + \frac{2}{9}k_1 f_{xy} + \frac{1}{9}k_1^2 f_{yy}\right) + \ldots$$

$$= f + h\left(\frac{1}{3}f_x + \frac{1}{3}ff_y\right) + \frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{9}f_{xx} + \frac{2}{9}ff_{xy} + \frac{1}{9}f^2 f_{yy}\right) + \ldots$$

$$k_3 = f + h\left(f_x + \left(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2\right) f_y\right) + \frac{h^2}{2}\left(f_{xx} + 2\left(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2\right) f_{xy} + \left(\beta_1 k_1 + \beta_2 k_2\right)^2 f_{yy}\right) + \ldots$$

$$= f + h\left(f_x + \beta_1 ff_y + \beta_2 k_2 f_y\right) + \frac{h^2}{2}\left(f_{xx} + 2\left(\beta_1 f + \beta_2 k_2\right) f_{xy} + \left(\beta_1 f + \beta_2 k_2\right)^2 f_{yy}\right) + \ldots$$

$$= f + h\left(f_x + \left(\beta_1 + \beta_2\right) ff_y\right) + h^2\left(\frac{\beta_2}{3}f_x f_y + \frac{\beta_2}{3}ff_y^2 + \frac{1}{2}f_{xx} + \left(\beta_1 f + \beta_2 k_2\right) f_{xy} + \left(\frac{\beta_1^2 f^2 + 2\beta_1\beta_2 fk_2 + \beta_2^2 k_2^2}{2}\right) f_{yy}\right) + \ldots$$

$$= f + h\left(f_x + ff_y\right) + h^2\left(\frac{\beta_2}{3}f_x f_y + \frac{\beta_2}{3}ff_y^2 + \frac{1}{2}f_{xx} + \left(\beta_1 + \beta_2\right) ff_{xy} + \left(\frac{\beta_1^2}{2}f^2 + \beta_1\beta_2 f^2 + \frac{\beta_2^2}{2}f^2\right) f_{yy}\right) + \ldots$$

$$= f + h\left(f_x + ff_y\right) + h^2\left(\frac{\beta_2}{3}f_x f_y + \frac{\beta_2}{3}ff_y^2 + \frac{1}{2}f_{xx} + ff_{xy} + \frac{1}{2}f^2 f_{yy}\right) + \ldots$$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า k_1, k_2 และ k_3 จากสมการที่ (3.43) ลงในสมการที่ (3.38) จะได้รูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{3}{4}hf + \frac{h^2}{4}\left(f_x + ff_y\right) + \frac{h^3}{8}\left(\frac{1}{3}f_{xx} + \frac{2}{3}ff_{xy} + \frac{1}{3}f^2 f_{yy}\right) + \frac{h}{4}f + \frac{h^2}{4}\left(f_x + ff_y\right) + \frac{h^3}{4}\left(\frac{\beta_2}{3}f_x f_y + \frac{\beta_2}{3}ff_y^2 + \frac{1}{2}f_{xx} + ff_{xy} + \frac{1}{2}f^2 f_{yy}\right) + O\left(h^4\right)$$

$$= y_m + hf + \frac{h^2}{4}\left(2f_x + 2ff_y\right) + \frac{h^3}{6}\left(\frac{\beta_2}{2}f_x f_y + \frac{\beta_2}{2}ff_y^2 + f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy}\right) + O\left(h^4\right) \tag{3.44}$$

นำสมการที่ (3.44) มาเทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการที่ (2.12) จะได้

$$\beta_1 = -1 \quad , \quad \beta_2 = 2 \tag{3.45}$$

นำลงไปแทนในสมการที่ (3.42) ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามมีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(3k_2 + k_3) \tag{3.46}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h, y_m - hk_1 + 2hk_2)$$

บทที่ 4
ผลของงานวิจัย

ในบทนี้จะแสดงการทดสอบประสิทธิภาพของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากการนำรูปแบบของนิวตัน-โค้ตมาปรับปรุงใช้ ซึ่งได้แสดงการสร้างไว้ในบทที่ 3 โดยในการทดสอบจะนำระเบียบวิธีดังกล่าวมาหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง และแสดงการเปรียบเทียบความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยที่แท้จริงกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

4.1 ผลเฉลยเชิงตัวเลข

ในส่วนนี้จะแสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีรูปแบบ

$$y' = f(x,y) \quad ; y(x_0) = y_0 \tag{4.1}$$

ที่ได้จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบใหม่ที่ได้ทำการวิจัยขึ้น 2 รูปแบบ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่นิยมใช้ และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากการวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก ซึ่งมีรูปแบบดังต่อไปนี้

1. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองที่นิยมใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{4.2}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$k_2 = f(x_m+h, y_m+hk_1)$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " RK2 "

2. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามที่นิยมใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{4.3}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h, y_m - hk_1 + 2hk_2)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " **RK3** "

3. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ที่นิยมใช้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.4}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " **RK4** "

4. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองแบบที่ 1 จากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \tag{4.5}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{3}{4}hk_1)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " **RK21S** "

5. ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตาอันดับสองแบบที่ 2 จากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก

$$y_{m+1} = y_m + hk_2 \tag{4.6}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m , y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2} , y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " **RK22S** "

6. ระเบียบวิธีรูงเง-คุตตาอันดับสามแบบที่ 1 จากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \tag{4.7}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}h, y_m + \frac{\sqrt{2}}{3}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h , y_m + \frac{(2-\sqrt{2})}{3}hk_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}hk_2)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " **RK31S** "

7. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามแบบที่ 2 จากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{54}(19k_1 - 20k_2 + 55k_3) \tag{4.8}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{10}h\,,\, y_m + \frac{3}{10}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{3}{5}h\,,\, y_m + \frac{3}{55}hk_1 + \frac{6}{11}hk_2)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " **RK32S** "

8. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ จากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{4.9}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m\,,\, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}\,,\, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h\,,\, y_m - \frac{h}{3}k_1 + hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h\,,\, y_m + hk_1 - hk_2 + hk_3)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า " **RK4S** "

9. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับห้า จากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{90}(7k_1 + 32k_2 + 12k_3 + 32k_4 + 7k_5) \qquad (4.10)$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m , y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m - hk_1 + \frac{3}{2}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{3}{4}h , y_m + \frac{9}{16}hk_1 - \frac{3}{8}hk_2 + \frac{9}{16}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + h , y_m - hk_1 + \frac{18}{7}hk_2 - \frac{12}{7}hk_3 + \frac{8}{7}hk_4)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า “ **RK5S** ”

10. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับหก จากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{288}(19k_1 + 75k_2 + 50k_3 + 50k_4 + 75k_5 + 19k_6) \qquad (4.11)$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m , y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{5}, y_m + \frac{h}{5}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{5}h , y_m - \frac{h}{5}k_1 + \frac{3}{5}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{3}{5}h \,,\, y_m + \frac{3}{20}hk_1 - \frac{3}{10}hk_2 + \frac{3}{4}hk_3)$$

$$k_5 = f(x_m + \frac{4}{5}h \,,\, y_m - \frac{h}{15}k_1 + \frac{6}{5}hk_2 - hk_3 + \frac{2}{3}hk_4)$$

$$k_6 = f(x_m + h \,,\, y_m + \frac{23}{38}hk_1 - \frac{45}{19}hk_2 + \frac{135}{38}hk_3 - \frac{30}{19}hk_4 + \frac{15}{19}hk_5)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า “ **RK6S** ”

11. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองจากการวิจัย

$$y_{m+1} = y_m + h(-\frac{1}{2}k_1 + \frac{3}{2}k_2) \tag{4.12}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า “ **RK2N** ”

12. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามจากการวิจัย

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(3k_1 + k_3) \tag{4.13}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3} \,,\, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h \,,\, y_m - hk_1 + 2hk_2)$$

โดยใช้ชื่อย่อว่า “ **RK3N** ”

จากระเบียบดังกล่าว กำหนดให้มีเงื่อนไขในการคำนวณดังต่อไปนี้

เงื่อนไขที่ 1 กำหนดให้ขนาดขั้น(step size) $h = 0.1$ และพิจารณาผลการคำนวณ $y(x_m)$ ที่ $m = 1$ ซึ่งใช้สำหรับการเปรียบเทียบเพื่อแสดงประสิทธิภาพของแต่ละระเบียบวิธี

เงื่อนไขที่ 2 พิจารณาค่า $y(x_m)$ จากการคำนวณโดยใช้ขนาดขั้น $h = 0.0001$ ที่ $m = 1000$

จากรูปแบบของระเบียบวิธีและเงื่อนไขของการคำนวณดังกล่าวนำมาเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์โดยใช้ภาษาจาวา เพื่อคำนวณหาผลเฉลยพร้อมทั้งหาค่าความคลาดเคลื่อนของปัญหาดังต่อไปนี้

ปัญหาที่ 1 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(1) = 0 \tag{4.14}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y = \frac{-\pi}{4} + \arctan x$ (4.15)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.1 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 1 ที่ค่า h=0.1

	x=1.1, h=0.1, y=0.04726698096014603	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	0.04762443438914027	$3.57453428994237\times 10^{-4}$
RK3	0.04758309525218667	$3.16114292040641\times 10^{-4}$
RK4	0.04758309525218667	$3.16114292040641\times 10^{-4}$
RK21S	0.04759350536387359	$3.26524403727560\times 10^{-4}$
RK22S	0.04756242568370987	$2.95444723563840\times 10^{-4}$
RK31S	0.04758316008316008	$3.16179123014050\times 10^{-4}$
RK32S	0.04758318157602358	$3.16200615877546\times 10^{-4}$
RK4S	0.04758309970818269	$3.16118748036658\times 10^{-4}$
RK5S	0.04758310327473168	$3.16122314585651\times 10^{-4}$
RK6S	0.04758310327571545	$3.16122315569413\times 10^{-4}$
RK2N	0.04754164427727029	$2.74663317124259\times 10^{-4}$
RK3N	0.04758303933320528	$3.16058373059251\times 10^{-4}$

ตารางที่ 4.2 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 1 ที่ค่า h=0.0001

	x=1.1, h=0.0001, y=0.04726698096014603	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	0.04762834993497659	$3.61368974830557 \times 10^{-4}$
RK3	0.04762834989363695	$3.61368933490917 \times 10^{-4}$
RK4	0.04762834989363695	$3.61368933490917 \times 10^{-4}$
RK21S	0.04762834990397199	$3.61368943825956 \times 10^{-4}$
RK22S	0.04762834987296719	$3.61368912821160 \times 10^{-4}$
RK31S	0.04762834989363705	$3.61368933491021 \times 10^{-4}$
RK32S	0.04762834989363707	$3.61368933491035 \times 10^{-4}$
RK4S	0.04762834989363695	$3.61368933490917 \times 10^{-4}$
RK5S	0.04762834989363695	$3.61368933490917 \times 10^{-4}$
RK6S	0.04762834989363695	$3.61368933490917 \times 10^{-4}$
RK2N	0.04762834985229728	$3.61368892151243 \times 10^{-4}$
RK3N	0.04762834989363691	$3.61368933490876 \times 10^{-4}$

ปัญหาที่ 2 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = \frac{2}{3\sqrt{y}} \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(0) = 1 \tag{4.16}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$ (4.17)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.3 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 2 ที่ค่า h=0.1

	x=0.1, h=0.1, y=1.0656022367666107	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	1.06560819455172840	$5.95778511769396\times 10^{-6}$
RK3	1.06560207121376220	$1.65552848541140\times 10^{-7}$
RK4	1.06560224068845780	$3.92184706932142\times 10^{-9}$
RK21S	1.06559555879771260	$6.67796889808336\times 10^{-6}$
RK22S	1.06558258357839520	$1.96531882155071\times 10^{-5}$
RK31S	1.06560257649600290	$3.39729392173638\times 10^{-7}$
RK32S	1.06560281265600700	$5.75889396392526\times 10^{-7}$
RK4S	1.06560223872344520	$1.95683447223871\times 10^{-9}$
RK5S	1.06568401286023600	$8.17760936253631\times 10^{-5}$
RK6S	1.06560223713647170	$3.69861030691254\times 10^{-10}$
RK2N	1.06557373767603480	$2.84990905758953\times 10^{-5}$
RK3N	1.06560200058741400	$2.36179196644315\times 10^{-7}$

ตารางที่ 4.4 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 2 ที่ค่า h=0.0001

	x=0.1, h=0.0001, y=1.0656022367666107	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	1.06560223677204800	$5.43720624079924 \times 10^{-12}$
RK3	1.06560223676661140	$6.66133814775094 \times 10^{-16}$
RK4	1.06560223676661160	$8.88178419700125 \times 10^{-16}$
RK21S	1.06560223675981680	$6.79389877689118 \times 10^{-12}$
RK22S	1.06560223674758200	$1.90287785528653 \times 10^{-11}$
RK31S	1.06560223676661200	$1.33226762955019 \times 10^{-15}$
RK32S	1.06560223676661230	$1.55431223447522 \times 10^{-15}$
RK4S	1.06560223676661160	$8.88178419700125 \times 10^{-16}$
RK5S	1.06560231722956590	$8.04629551875991 \times 10^{-8}$
RK6S	1.06560223676661160	$8.88178419700125 \times 10^{-16}$
RK2N	1.06560223673943020	$2.71804800888731 \times 10^{-11}$
RK3N	1.06560223676661140	$6.66133814775094 \times 10^{-16}$

ปัญหาที่ 3 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = x^2(1+y) \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(0) = 3 \tag{4.18}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 4e^{\frac{x}{3}} - 1$ (4.19)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.5 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 3 ที่ค่า h=0.1

	x=0.1, h=0.1, y=3.001333555580249	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	3.00200000000000000	$6.66444419750611\times 10^{-4}$
RK3	3.00133366666666660	$1.11086417398099\times 10^{-7}$
RK4	3.00133354168750000	$1.38927491732943\times 10^{-8}$
RK21S	3.00150000000000000	$1.66444419750889\times 10^{-4}$
RK22S	3.00100000000000000	$3.33555580249278\times 10^{-4}$
RK31S	3.00133347300874700	$8.25715020802420\times 10^{-8}$
RK32S	3.00133340533333340	$1.50246915797680\times 10^{-7}$
RK4S	3.00133357409876520	$1.85185160539447\times 10^{-8}$
RK5S	3.00133360529844760	$4.97181984471240\times 10^{-8}$
RK6S	3.00133355668657600	$1.10632702998714\times 10^{-9}$
RK2N	3.00066666666666660	$6.66888913582575\times 10^{-4}$
RK3N	3.00133355555555560	$2.46935805137127\times 10^{-11}$

ตารางที่ 4.6 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 3 ที่ค่า h=0.0001

	x=0.1, h=0.0001, y=3.001333555580249	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	3.00133355624713000	$6.66880772826062\times 10^{-10}$
RK3	3.00133355558024470	$4.44089209850063\times 10^{-15}$
RK4	3.00133355558024470	$4.44089209850063\times 10^{-15}$
RK21S	3.00133355574672200	$1.66472613472024\times 10^{-10}$
RK22S	3.00133355524631100	$3.33938210417273\times 10^{-10}$
RK31S	3.00133355558024470	$4.44089209850063\times 10^{-15}$
RK32S	3.00133355558024470	$4.44089209850063\times 10^{-15}$
RK4S	3.00133355558024470	$4.44089209850063\times 10^{-15}$
RK5S	3.00133355554889160	$3.13575831967228\times 10^{-11}$
RK6S	3.00133355558024470	$4.44089209850063\times 10^{-15}$
RK2N	3.00133355491269470	$6.67554456157404\times 10^{-10}$
RK3N	3.00133355558024470	$4.44089209850063\times 10^{-15}$

ปัญหาที่ 4 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = \frac{4}{x(x-4)} \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(5) = 5 \tag{4.20}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$ (4.21)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.7 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 4 ที่ค่า h=0.1

	x=5.1, h=0.1, y=5.075507552508145	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	5.07565062388591850	$1.43071377773474 \times 10^{-4}$
RK3	5.07550761798868950	$6.54805445421403 \times 10^{-8}$
RK4	5.07550761798868950	$6.54805445421403 \times 10^{-8}$
RK21S	5.07554588154427750	$3.83290361325450 \times 10^{-5}$
RK22S	5.07543611504007500	$7.14374680699237 \times 10^{-5}$
RK31S	5.07550986842105300	$2.31591290766886 \times 10^{-6}$
RK32S	5.07551091601562400	$3.36350747875969 \times 10^{-6}$
RK4S	5.07550758163682300	$2.91286781362032 \times 10^{-8}$
RK5S	5.07550755253470300	$2.65583111058731 \times 10^{-11}$
RK6S	5.07550755252311000	$1.49649181935274 \times 10^{-11}$
RK2N	5.07535996581927000	$1.47586688875379 \times 10^{-4}$
RK3N	5.07550529485259400	$2.25765555139645 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 4.8 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 4 ที่ค่า h=0.0001

	x=5.1, h=0.0001, y=5.075507552508145	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	5.07557884995964700	$7.12974515018061\times 10^{-5}$
RK3	5.07557884981617200	$7.12973080272406\times 10^{-5}$
RK4	5.07557884981617200	$7.12973080272406\times 10^{-5}$
RK21S	5.07557884985204500	$7.12973438998787\times 10^{-5}$
RK22S	5.07557884974443200	$7.12972362872932\times 10^{-5}$
RK31S	5.07557884981617700	$7.12973080316814\times 10^{-5}$
RK32S	5.07557884981617700	$7.12973080316814\times 10^{-5}$
RK4S	5.07557884981617200	$7.12973080272406\times 10^{-5}$
RK5S	5.07557884981617300	$7.12973080281287\times 10^{-5}$
RK6S	5.07557884981617200	$7.12973080272406\times 10^{-5}$
RK2N	5.07557884967270400	$7.12971645588922\times 10^{-5}$
RK3N	5.07557884981617000	$7.12973080245760\times 10^{-5}$

ปัญหาที่ 5 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(0)=1 \tag{4.22}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$ (4.23)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.9 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 5 ที่ค่า h=0.1

	x=0.1, h=0.1, y=1.005025188681312	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	1.00497518595104980	$5.00027302621220\times 10^{-5}$
RK3	1.00503775749608850	$1.25688147765146\times 10^{-5}$
RK4	1.00502522738031530	$3.86990033351964\times 10^{-8}$
RK21S	1.00498599654944230	$3.91921318696475\times 10^{-5}$
RK22S	1.00499376169438910	$3.14269869228223\times 10^{-5}$
RK31S	1.00502222220171440	$2.96647959752150\times 10^{-6}$
RK32S	1.00501951093803380	$5.67774327819848\times 10^{-6}$
RK4S	1.00502526097501190	$7.22936999153490\times 10^{-8}$
RK5S	1.00502825581269770	$3.06713138575887\times 10^{-6}$
RK6S	1.00502519110016550	$2.41885356189187\times 10^{-9}$
RK2N	1.00499722453489570	$2.79641464162594\times 10^{-5}$
RK3N	1.00503626153235140	$1.10728510394065\times 10^{-5}$

ตารางที่ 4.10 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 5 ที่ค่า h=0.0001

	x=0.1, h=0.0001, y=1.005025188681312	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	1.00502518866849020	$1.28217436667910 \times 10^{-11}$
RK3	1.00502518868132420	$1.22124532708767 \times 10^{-14}$
RK4	1.00502518868131150	$4.44089209850063 \times 10^{-16}$
RK21S	1.00502518865887640	$2.24356089262301 \times 10^{-11}$
RK22S	1.00502518864925380	$3.20581339252612 \times 10^{-11}$
RK31S	1.00502518868130840	$3.55271367880050 \times 10^{-15}$
RK32S	1.00502518868130660	$5.32907051820075 \times 10^{-15}$
RK4S	1.00502518868131150	$4.44089209850063 \times 10^{-16}$
RK5S	1.00502518470178530	$3.97952670816437 \times 10^{-9}$
RK6S	1.00502518868131150	$4.44089209850063 \times 10^{-16}$
RK2N	1.00502518864284400	$3.84678955356321 \times 10^{-11}$
RK3N	1.00502518868132350	$1.15463194561016 \times 10^{-14}$

ปัญหาที่ 6 : พิจารณาผลเฉลยเชิงตัวเลขของ

$$y' = y^3 \qquad \text{เมื่อ} \qquad y(0) = 0.1 \tag{4.24}$$

มีผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$ (4.25)

ซึ่งผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนแสดงดังตาราง

ตารางที่ 4.11 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 6 ที่ค่า h=0.1

	x=0.1, h=0.1, y=0.10010015025043828	
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	0.10010015015005000	$1.00388281021324\times 10^{-10}$
RK3	0.10010015025040077	$3.75116604445225\times 10^{-14}$
RK4	0.10010015025043830	$1.38777878078145\times 10^{-17}$
RK21S	0.10010015011252812	$1.37910155517673\times 10^{-10}$
RK22S	0.10010015007501251	$1.75425771131721\times 10^{-10}$
RK31S	0.10010015025029322	$1.45064515955085\times 10^{-13}$
RK32S	0.10010015025024620	$1.92082461047960\times 10^{-13}$
RK4S	0.10010015025043830	$1.38777878078145\times 10^{-17}$
RK5S	0.10010013847700562	$1.17734326593455\times 10^{-8}$
RK6S	0.10010015025043831	$2.77555756156289\times 10^{-17}$
RK2N	0.10010015005000557	$2.00432712094134\times 10^{-10}$
RK3N	0.10010015025037834	$5.99381655419506\times 10^{-14}$

ตารางที่ 4.12 แสดงผลเฉลยเชิงตัวเลขและความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในการแก้ปัญหาที่ 6 ที่ค่า h=0.0001

x=0.1, h=0.0001, y=0.10010015025043828		
	Calculated Value y	Absolute Error
RK2	0.10010015025043854	$2.63677968348475 \times 10^{-16}$
RK3	0.10010015025043861	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
RK4	0.10010015025043861	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
RK21S	0.10010015025043849	$2.08166817117217 \times 10^{-16}$
RK22S	0.10010015025043849	$2.08166817117217 \times 10^{-16}$
RK31S	0.10010015025043861	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
RK32S	0.10010015025043861	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
RK4S	0.10010015025043861	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
RK5S	0.10010015023862637	$1.18119125591676 \times 10^{-11}$
RK6S	0.10010015025043861	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$
RK2N	0.10010015025043845	$1.66533453693773 \times 10^{-16}$
RK3N	0.10010015025043861	$3.33066907387547 \times 10^{-16}$

4.2 บทสรุป

จากตารางที่ 4.1 – 4.12 เมื่อทำการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนของผลเฉลยจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากการวิจัย กับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบอื่นๆ พบว่า

ในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองที่ได้จากการวิจัย (RK2N) มีค่าความคลาดเคลื่อนใกล้เคียงกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองที่นิยมใช้ (RK2)

ในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามที่ได้จากการวิจัย (RK3N) มีค่าความคลาดเคลื่อนเทียบเท่าหรือใกล้เคียงกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามที่นิยมใช้ (RK3) ดังตารางที่ 4.1-4.12 แต่ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามที่ได้จากการวิจัย (RK3N) มีรูปแบบที่กระชับกว่า ดังสมการที่ 3.46 (หน้า 25) ทำให้ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามที่นิยมใช้ (RK3) และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามที่ได้จากการวิจัย (RK3N) มีค่าคลาดเคลื่อนเทียบเท่าหรือใกล้เคียงกับ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ที่นิยมใช้ (RK4) ดังตารางที่ 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8 และ 4.12

จากการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนจากโจทย์ปัญหาทั้ง 6 ข้อ พบว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับหกมีค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดซึ่งเห็นได้อย่างชัดเจน

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการวิจัย

จากการศึกษารูปแบบนิวตัน-โค้ต และระเบียบวิธีรุงเง-คุตตารูปแบบต่างๆ แล้วทำการสร้างรูปแบบรุงเง-คุตตาโดยนำรูปแบบนิวตัน-โค้ตมาประยุกต์ใช้ จะได้รูปแบบทั่วไปสำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s ในงานวิจัยดังนี้ คือ

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2 + \ldots + a_sk_s) \tag{5.1}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h \,,\, y_m + \beta_{21}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h \,,\, y_m + \beta_{31}hk_1 + \beta_{32}hk_2)$$

$$\vdots$$

$$k_s = f(x_m + \alpha_s h \,,\, y_m + \beta_{s1}hk_1 + \ldots + \beta_{s,s-1}hk_{s-1})$$

ซึ่ง β_i สัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา และสำหรับ a_i, α_i จะถูกกำหนดโดยรูปแบบของนิวตัน-โค้ต โดยได้ศึกษาการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากงานวิจัยเรื่อง Newton-Cotes Formulas in Runge-Kutta Method ของนายสมสกุล พุ่มมาก และได้สร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาแบบใหม่ 2 รูปแบบดังสมการที่ (3.39) และ (3.46) ดังแสดงในบทที่ 3

จากการทดสอบประสิทธิภาพระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้จากการวิจัยกับโจทย์ปัญหาทั้ง 6 ข้อ โดยใช้ขนาดขั้น $h = 0.1$ และ $h = 0.0001$ ดังกล่าวในบทที่ 4 แสดงให้เห็นว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้จากการวิจัยสามารถนำไปใช้หาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งมีผลเฉลยที่ดีและมีความแม่นยำ และมีค่าความคลาดเคลื่อนดีกว่าหรือเทียบเท่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่นิยมใช้

ข้อดีของการประยุกต์ใช้นิวตัน-โค้ตในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา คือ เราสามารถที่จะเลือกจุดได้ตามต้องการ เนื่องจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาไม่สามารถที่จะเลือกจุดได้และต้องไปตามการเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการเทเลอร์

5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น เป็นการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาที่มีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงมาจากรูปแบบนิวตัน-โค้ต ทางผู้ทำการวิจัยขอแนะนำระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามจากการวิจัย (RK3N) ซึ่งมีประสิทธิภาพที่เทียบเท่ากับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามและอันดับสี่ที่นิยมใช้ ดังตารางที่ 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, 4.6, 4.8 และ 4.12 สำหรับผู้ที่สนใจเกี่ยวกับการพัฒนารูปแบบต่างๆของระเบียบวิธีรุงเง- คุตตา สามารถนำแนวคิดนี้ไปประยุกต์ใช้เพื่อสร้างระเบียบวิธีรูปแบบใหม่โดยเลือกจุดที่เหมาะสมที่จะใช้กับสมการจริงที่มีอยู่

บรรณานุกรม

ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน.** กรุงเทพฯ : โครงการตำราคณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง. 2529.

สมสกุล พุ่มมาก. **การนำรูปแบบนิวตัน-โค้ตไปใช้ในระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา.** สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหาร ลาดกระบัง. 2548.

Bernard J. Rice, Jerry D. Strange. **Ordinary Differential Equations with applications.** 3rd Ed. 1994.

Benjamin F. Plybon. **An introduction to applied numerical analysis.** 1992.

E. Hairer, S.P. Norsett, G. Wanner. **Solving Ordinary Differential Equations I.** Second Revised Edition. 1993.

R. Kent Nagle, Edward B. Saff. **Fundamentals of differential equations.** Second Edition.

Ward Cheney, David Kincaid. **Numerical Mathematics and Computing.** Third Edition. 1994.