รูปแบบปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

NUMERICAL INTEGRATION FORMULAS FOR SOLVING THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ศุภกัญญา กระจ่างบ้าน
สุกัญญา มายะการ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2549

NUMERICAL INTEGRATION FORMULAS FOR SOLVING THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUPAKANYA KRAJANGBAN
SUKANYA MAYAKARN

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
ACADEMIC YEAR 2006

หัวข้อปัญหาพิเศษ รูปแบบปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

NUMERICAL INTEGRATION FORMULAS FOR SOLVING THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ชื่อนักศึกษา นางสาวศุภกัญญา กระจ่างบ้าน 46050035

นางสาวสุกัญญา มายะการ 46050037

ภาควิชา คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

สาขาวิชา คณิตศาสตร์ประยุกต์

อาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข

อ.พุทธพร วานิชกร

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2549

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการ	ดร.พันธนี พงศ์สัมพันธ์	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	อ.พุทธพร วานิชกร	พุทธพร วานิชกร

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)

หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	รูปแบบปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น
ชื่อนักศึกษา	นางสาวศุภกัญญา กระจ่างบ้าน 46050035
	นางสาวสุกัญญา มายะการ 46050037
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2549
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	อ.พุทธพร วานิชกร

บทคัดย่อ

สำหรับเนื้อหาปัญหาพิเศษฉบับนี้ เป็นอีกแนวทางหนึ่งที่แนะนำให้ใช้ในการหาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ในวิธีใหม่นี้จะใช้หลักความจริงที่ว่าปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นสมมูลกับสมการเชิงปริพันธ์ ดังนั้นวิธีใหม่นี้จะคำนวณผลเฉลยของสมการเชิงปริพันธ์แทนการคำนวณผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

Special Project Title	NUMERICAL INTEGRATION FORMULAS FOR SOLVING THE INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
Students	Miss Supakanya Krajangban 46050035
	Miss Sukanaya Mayakarn 46050037
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science , Faculty of Science
Programme	Applied Mathematics
Academic Year	2006
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk
	Buddhaporn Vanishkorn

ABSTRACT

In this special problem, the new way of finding the numerical solution of the initial value problem of the ordinary differential equation will be introduced. This new method uses the fact that the initial value problem of the ordinary differential equation is equivalent to the integral equation. Thus the new method computes the solution of the integral equation instead of finding the numerical solution of the ordinary differential equation.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องรูปแบบปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น สามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และ อ.พุทธพร วานิชกร อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษฉบับนี้ ที่กรุณาให้คำแนะนำ และเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ อาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่ได้ประสาทวิชา ความรู้ ทั้งในภาคทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่คณะผู้จัดทำ และขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ที่ให้ความสะดวกในการเบิกอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำปัญหาพิเศษ รวมทั้งเพื่อนๆ ทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆ เกี่ยวกับปัญหาพิเศษ จนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลได้ด้วยดีทุกประการ

คณะผู้จัดทำ

กุมภาพันธ์ 2550

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บทที่ 1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นสมการที่สามารถนำมาอธิบายปัญหาต่างๆ ได้อย่างมากมาย โดยส่วนใหญ่สมการเชิงอนุพันธ์ที่สร้างขึ้นมานั้น จะมีการสร้างเงื่อนไขเริ่มต้น เรียกสมการลักษณะนี้ว่า ปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้น

รูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ $y'(x) = f(x, y)$ ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(a) = c$ โดยทั่วไปแล้วจะใช้คณิตศาสตร์เชิงวิเคราะห์ในการหาผลเฉลย แต่ในบางกรณีอาจมีความยุ่งยากหรือหาผลเฉลยได้ช้าหรือหาผลเฉลยที่แท้จริงไม่ได้ ถ้าใช้วิธีคณิตศาสตร์เชิงวิเคราะห์ ดังนั้นการประมาณค่าด้วยคณิตศาสตร์เชิงตัวเลขจึงมีความสำคัญเป็นอย่างมากในการแก้ปัญหาดังกล่าว และจากที่ทราบว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นที่กล่าวมาข้างต้นนั้นสมมูลกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t, y)\,dt$ ดังนั้นจึงสามารถใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหาแทนได้

โดยในที่นี้จะใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหา แล้วหาผลเฉลยที่ได้ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีของรุงเก-คุตตา ,วิธีของออยเลอร์ ,วิธีของเทย์เลอร์ ,Goeken-Johnson formula และ Wu's formula

1.2 วัตถุประสงค์ของการศึกษา

1) เพื่อศึกษาวิธีการใช้สมการปริพันธ์ในการแก้ปัญหาสมการเงื่อนไขเริ่มต้น
2) หารูปแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อความแม่นยำและความรวดเร็วในการหาผลเฉลยและเป็นการเพิ่มทางเลือกใหม่ให้กับผู้ใช้งานในด้านนี้

1.3 ขอบเขตของปัญหา

1) ศึกษาเนื้อหาเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น
2) จะหารูปแบบเชิงตัวเลขไม่เกิน 6 จุด
3) นำรูปแบบเชิงตัวเลขที่ได้ไปใช้แก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) สามารถหารูปแบบที่ดีกว่ารูปแบบที่นิยมใช้กันในปัจจุบัน

2) เป็นรูปแบบที่สร้างขึ้นเพื่อนำไปใช้ได้ดีกับการแก้ปัญหาบางสมการ

1.5 ขั้นตอนของการวิจัย

ขั้นตอนที่ 1 ศึกษาข้อมูลเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์และการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข

ขั้นตอนที่ 2 ศึกษาข้อมูลและงานวิจัยที่เกี่ยวกับการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ขั้นตอนที่ 3 วิเคราะห์และรวบรวมข้อมูลที่ได้จากการศึกษา

ขั้นตอนที่ 4 จัดทำรูปเล่มปัญหาพิเศษ

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยของการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equations) ที่อยู่ในรูปของ

$$y'(x) = f(x, y) \tag{2.1}$$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $y(a) = c$

เป็นปัญหาที่สำคัญในหลายสาขาวิชาทั้งวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและสังคมศาสตร์ ซึ่งเป็นที่นิยมศึกษาของนักวิจัยจำนวนมาก โดยในปัจจุบันมีวิธีที่นิยมใช้ในการหาผลเฉลยอยู่หลายวิธี ซึ่งจะนำเสนอดังต่อไปนี้

2.1 วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งมีรูปสมการเป็น

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \tag{2.2}$$

นั่นคือวิธีออยเลอร์จะหา y_{m+1} โดยใช้เส้นตรงที่มีความชัน $y'(x_m)$ และผ่านจุด (x_m, y_m) เป็นตัวกำหนด ซึ่งในงานวิจัยจะเรียกสมการ (2.2) นี้ว่า RK1 ซึ่งใช้แทนสมการรุงเก-คุตตา อันดับหนึ่ง

2.2 วิธีของเทย์เลอร์ (Taylor's Method)

วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งเป็นวิธีที่ให้ผลดีเป็นที่น่าพอใจและมีผู้ที่นิยมใช้กันมาก เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่าย สาเหตุที่เรียกว่าวิธีของเทย์เลอร์เพราะใช้อนุกรมเทย์เลอร์เป็นหลัก

จากสมการ $y'(x) = f(x, y)$, $y(a) = c$

โดยที่ $a \le x \le b$, $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y(c) = 0$ และ $x_k = a + kh$

กระจายเทอม $y(x_m + h)$ ตามอนุกรมกำลังเทย์เลอร์ได้

$$y(x_m + h) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{6} y'''(x_m) + \ldots \tag{2.3}$$

ดังนั้น $y(x_m + h) \cong y_m + hf(x_m, y_m)$ จึงให้

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \tag{2.4}$$

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (2.4) วิธีของเทย์เลอร์อันดับหนึ่ง หรือที่นิยมเรียกกันว่าวิธีของออยเลอร์ ในทำนองเดียวกัน จากรูปแบบที่ (2.3)

$$y(x_m + h) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) \quad \text{แต่ } y'(x) = f(x, y)$$

$$\therefore y'' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = f_x + f_y y' = f_x + ff_y$$

$$\therefore y(x_m + h) \cong y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m) \right]$$

ดังนั้นจึงทำให้

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}\left[f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m) \right] \tag{2.5}$$

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (2.5) วิธีของเทย์เลอร์อันดับสอง

สำหรับวิธีของเทย์เลอร์อันดับสาม ก็เป็นเช่นเดียวกันกับสองแบบแรก ซึ่งใช้รูปแบบที่ (2.3) ได้ว่า

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{6} y'''(x_m) + \ldots$$

$$y'(x) = f(x, y),\ y'' = f_x + ff_y$$

$$\begin{aligned} \therefore y''' &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f_x + ff_y\right) \\ &= \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial (ff_y)}{\partial x} \\ &= \left[f_{xx}\frac{dx}{dx} + f_{xy}\frac{dy}{dx} \right] + f\left[\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dx} \right] + f_y\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} \right] \\ &= f_{xx} + ff_{xy} + ff_{yx} + f^2 f_{yy} + f_y f_x + ff_y^2 \end{aligned}$$

ถ้า f_{xy} และ f_{yx} มีความต่อเนื่องแล้ว $f_{xy} = f_{yx}$ จะได้ว่า

$$y''' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_x f_y + ff_y^2$$

ดังนั้นรูปแบบวิธีของเทย์เลอร์อันดับสาม

$$y_{m+1} = y_m + h\left[f\right]_{(x_m, y_m)} + \frac{h^2}{2}\left[f_x + ff_y \right]_{(x_m, y_m)} + \frac{h^3}{6}\left[f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2 \right]_{(x_m, y_m)} \tag{2.6}$$

สำหรับรูปแบบวิธีของเทย์เลอร์อันดับที่สูงขึ้นไปจะหาได้ในทำนองเดียวกันกับทั้งสามแบบที่แล้วมา โดยใช้รูปแบบที่ (2.3)

2.3 ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา (Runge-Kutta Method)

ปี ค.ศ. 1895 นักคณิตศาสตร์ชื่อ รุงเก (C. Runge) ได้สร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้น ต่อมาในปี ค.ศ.1901 นักคณิตศาสตร์ชื่อ คุตตา (W.Kutta) ได้ปรับปรุงวิธีการของรุงเก และให้ชื่อระเบียบวิธีใหม่นี้ว่าระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา (Runge-Kutta Method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีที่นิยมใช้กันมากในการประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x,y) \tag{2.1}$$

$$y(a) = c$$

ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา เป็นระเบียบวิธีแบบขั้นเดียว โดยรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเก-คุตตาอันดับที่ s คือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h) \quad , \quad m = 1,2,\dots \tag{2.7}$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (increment function) $\phi(x_m, y_m; h)$ คือความชันเฉลี่ยตลอดขนาดชั้น h ซึ่งกำหนดให้มีรูปแบบโดยทั่วไป ดังนี้

$$\phi(x,y;h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{2.8}$$

เมื่อ
$$k_i = \begin{cases} f(x_m, y_m) & ; \quad i = 1 \\ f(x_m + hc_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}k_j) & ; \quad i = 2,\dots,s \end{cases} \tag{2.9}$$

และ
$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \tag{2.10}$$

โดยที่ a_i , c_i และ b_{ij} เป็น สัมประสิทธิ์ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา และ h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละชั้นมีค่าเท่ากับ $x_{m+1} - x_m$ และ s เป็นอันดับของระเบียบวิธี

วิธีรุงเก-คุตตา (Runge-Kutta Method) เป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่นิยมใช้กันมาก ซึ่งเป็นวิธีที่ปรับปรุงมาจากวิธีออยเลอร์ แต่สำหรับวิธีของรุงเก-คุตตาจะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่หลายจุด เช่นในกรณีที่ใช้ความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่สองจุด จะได้รูปแบบ

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \tag{2.11}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

นั่นคือวิธีนี้ใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และจะมีค่าความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของ $y'(x_m)$ และ $f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$

รูปแบบของสมการที่ (2.11) เรียกว่าวิธีของรุงเก-คุตตาอันดับที่สอง (Runge-Kutta method of second order) ซึ่งจะต้องหาค่า a_1, a_2, α และ β ซึ่งวิธีการหาค่าเหล่านี้จะกระทำโดยใช้ความรู้ของการขยายของเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ส่วนวิธีของรุงเก-คุตตาอันดับที่สาม (Runge-Kutta method of third order) จะมีรูปแบบเป็น

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3) \tag{2.12}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta_1 h k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 h k_1 + \lambda_1 h k_2)$$

ในทำนองเดียวกันกับวิธีรุงเก-คุตตาอันดับที่สองและอันดับที่สาม อาจจะหาวิธีของรุงเก-คุตตาอันดับสูงขึ้นเรื่อยๆ ได้ แต่ทั้งในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติ วิธีของรุงเก-คุตตาอันดับที่สูงเกินกว่าสี่จะไม่ทำให้การหาผลเฉลยได้ผลดีขึ้น ดังนั้นโดยทั่วไปจึงใช้วิธีของรุงเก-คุตตาอันดับที่สี่ ที่นิยมใช้จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{2.13}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

โดยทั่วไปจะเขียน RK-2 ,RK-3 และ RK-4 แทนวิธีของรุงเก-คุตตาอันดับที่สอง อันดับที่สาม และอันดับที่สี่ ตามลำดับ

2.4 Goeken-Johnson formula

ในปี 1999 Goeken และ Johnson ได้พัฒนาระเบียบวิธีรุงเก-กุตตาอันดับที่สี่ เพื่อหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{5}{48}K_1 + \frac{27}{56}K_2 \frac{125}{336}K_3 + \frac{1}{24}K_4 \tag{2.14}$$

เมื่อ $K_1 = hf(y_m)$

$$K_2 = hf(y_m + \frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{18}hf_y K_1)$$

$$K_3 = hf(y_m - \frac{152}{125}K_1 + \frac{252}{125}K_2 - \frac{44}{125}hf_y K_1)$$

$$K_4 = hf(y_m + \frac{19}{2}K_1 + \frac{22}{7}K_2 + \frac{22}{14}K_3 + \frac{5}{2}hf_y K_1)$$

เราเรียกสมการ (2.14) นี้ว่า GJ

2.5 Wu's formula

ในปี 2003 Wu ก็ได้พัฒนาระเบียบวิธีรุงเก-กุตตาขึ้นมา เพื่อหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = \frac{3}{2} y_m - \frac{1}{2} y_{m-1} + h\Big[\frac{1}{2} f_m + \frac{121}{192} f(y_m, \frac{8}{11} hf_m)$$
$$+ \frac{23}{192} f(y_m - \frac{44}{23} hf_m + \frac{44}{23} hf(y_m + \frac{8}{11} hf_m)) - \frac{121}{192} f(y_{m-1} + \frac{20}{29} hf_{m-1})$$
$$- \frac{23}{192} hf(y_{m-1} - \frac{44}{23} hf_{m-1} + \frac{44}{23} f(y_{m-1} + \frac{8}{11} hf_{m-1}))\Big]$$

(2.15)

เราเรียกสมการ (2.15) นี้ว่า WU

2.6 Multi-step formula

รูปแบบของ Multi-step formula

$$a_k y_m + a_{k-1} y_{m-1} + \ldots + a_0 y_{m-k} = h\left[b_k f_m + b_{k-1} f_{m-1} + \ldots + b_0 f_{m-k}\right] \qquad (2.16)$$

เมื่อ $f_j = f(x_j, y_j)$

ให้

$$p(z) = a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$
$$q(z) = b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \ldots + b_1 z + b_0$$
$$d_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i$$
$$d_1 = \sum_{i=0}^{k} (ia_i - b_i)$$
$$d_2 = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i^2}{2} a_i - ib_i\right)$$
$$d_3 = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i^3}{6} a_i - \frac{i^2}{2} b_i\right)$$
$$\vdots$$
$$d_j = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{i^j}{j!} a_i - \frac{i^{j-1}}{(j-1)!} b_i\right)$$

และ $Ly = \sum_{i=0}^{k} \left[a_i y(ih) - hb_i y'(ih)\right]$

ทฤษฎีบทที่ 1 (จาก [3])

มีคุณสมบัติดังนี้

(i) $d_0 = d_1 = d_2 = \ldots = d_n = 0$

(ii) $Lp = 0$ สำหรับบางพหุนาม p ที่มี กำลังน้อยกว่าเท่ากับ n

(iii) Ly คือ $O\left(h^{n+1}\right)$ สำหรับทุกๆ $y \in C^{n+1}$

นิยามที่ 1 (จาก [3])

กระบวนการจะเรียกว่า stable ถ้าทุกรากของ $p(z)$ อยู่ใน disk $|z| \leq 1$

นิยามที่ 2 (จาก [3])

กระบวนการจะเรียกว่า consistent ถ้า $p(1) = 0$ และ $p'(1) = q(1)$

ทฤษฎีบทที่ 2 (จาก [3])

เงื่อนไขที่จำเป็นและพอเพียงที่จะทำให้สมการที่ (2.16) ลู่เข้า คือ จะต้องมีคุณสมบัติ stable และ consistent

จากนิยามและทฤษฎีข้างต้น เราจะได้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3

สูตร $y_{m+2} = y_m + 2hf\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right)$ จะลู่เข้าและมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^3)$

ทฤษฎีบทที่ 4

สูตร $y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\left[f\left(x_m, y_m\right) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right)\right]$ จะลู่เข้าและมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^3)$

ทฤษฎีบทที่ 5

สูตร $y_{m+3} = y_m + \frac{3h}{2}\left[f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) + f\left(x_{m+2}, y_{m+2}\right)\right]$ จะลู่เข้าและมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^3)$

ทฤษฎีบทที่ 6

สูตร $y_{m+2} = y_m + \frac{h}{3}\left[f\left(x_m, y_m\right) + 4f\left(x_m, y_{m+1}\right) + f(x_{m+2}, y_{m+2})\right]$ จะลู่เข้าและมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^4)$

ทฤษฎีบทที่ 7

สูตร $y_{m+4} = y_m + \frac{4h}{3}\left[2f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) - f\left(x_{m+2}, y_{m+2}\right) + 2f(x_{m+3}, y_{m+3})\right]$ จะลู่เข้าและมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^5)$

ทฤษฎีบทที่ 8

สูตร $y_{m+3} = y_m + \frac{3h}{8}\left[f\left(x_m, y_m\right) + 3f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) + 3f(x_{m+2}, y_{m+2}) + f(x_{m+3}, y_{m+3})\right]$ จะลู่เข้าและมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^5)$

ทฤษฎีบทที่ 9

สูตร $y_{m+5} = y_m + \frac{5h}{24}\left[11f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) + f\left(x_{m+2}, y_{m+2}\right) + f(x_{m+3}, y_{m+3}) + 11f(x_{m+4}, y_{m+4})\right]$ จะลู่เข้าและมีค่าคลาดเคลื่อน $O(h^5)$

บทที่ 3
วิธีดำเนินงานวิจัย

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = f(x,y), x \in [a,b] \quad \text{(I)}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(a) = c$ (II)

ซึ่งสมมูลกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t,y)dt$ (III)

ดังนั้นแทนที่จะหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการ (I) – (II) แต่จะหาผลเฉลยเชิงตัวเลขจากสมการ (III) แทน

จากงานวิจัยของ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และอาจารย์วรรณพร สรรประเสริฐ (จาก [5] - [8]) ได้เสนอผลงานการวิจัยเกี่ยวกับใช้สูตรปริพันธ์รูปแบบเชิงตัวเลข มาพิสูจน์สมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นไว้หลายผลงาน จะขอยกตัวอย่างเช่น

งานวิจัยชิ้นที่ 1 (จาก [5])

Numerical Integration Formulas for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations

โดยในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้สมการเชิงปริพันธ์แทนสมการปัญหาค่าเริ่มต้น แล้วใช้สูตรอนุพันธ์ 4 สูตร หาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลข แล้วนำค่าที่ได้ไปเปรียบเทียบกับการหาผลเฉลยที่ได้จากระเบียบวิธีรุงเก-คุตตา, วิธีออยเลอร์, Goeken-Johnson formula, Wu's formula

การสร้างสูตรเพื่อการแก้ปัญหา

เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า สมการที่ (I) – (II) สมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t,y)dt \quad \text{(III)}$$

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (I) **โดยที่**

$$y_{m+1}(x) = y_m + \int_a^x f(t, y_m(t))dt \quad \text{(IV)}$$

ดังนั้น จะทำการประมาณค่าหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ โดยใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลขของ

$$y_{m+1} = y_m + \int_a^{a+h} f(t, y_m(t))dt \tag{3.1}$$

สูตรอนุพันธ์ทั้ง 4 สูตรที่จะใช้ในงานวิจัยชิ้นนี้คือ

Midpoint formula

$$\int_a^b y(x)dx \approx (b-a)y\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{3.2}$$

Trapezoidal formula

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)\{y(a)+y(b)\} \tag{3.3}$$

Modified Trapezoidal formula

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{1}{2}(b-a)\{y(a)+y(b)\}+\frac{1}{12}(b-a)^3\{y''(a)-y''(b)\} \tag{3.4}$$

และ Simpson's formula

$$\int_a^b y(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right] \tag{3.5}$$

จากสมการ (3.2), (3.3), (3.4) และ (3.5) เราจะได้สมการใหม่ 4 สมการคือ

1.) สมการ PS1

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + \frac{h}{2}, y_m + bb) \tag{3.6}$$

เมื่อ $bb = \frac{h}{2} f(x_m, y_m)$

2.) สมการ PS2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\{K_1 + K_2\} \tag{3.7}$$

เมื่อ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$

3.) สมการ PS3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\{K_1 + K_2\} + \frac{h^2}{12}\{AA - BB\} \tag{3.8}$$

เมื่อ $K_1 = f(x_m, y_m)$

$K_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$

$AA = f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)$

$$\begin{aligned} BB = {} & f_x(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m)) \\ & + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m)) f_y(x_m + h, y_m + hf(x_m y_m)) \end{aligned}$$

และ

3.) สมการ PS4

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}\left[f(x_m, y_m) + 4f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2} f\left(x_m, y_m\right)\right) + f\left(x_m + h, y_m + hf\left(x_m, y_m\right)\right)\right] \tag{3.9}$$

และต่อไปนี้จะกำหนดให้
- RK 1 แทน สมการรุงเก-คุตตาอันดับ 1
- RK 2 แทน สมการรุงเก-คุตตาอันดับ 2
- RK 3 แทน สมการรุงเก-คุตตาอันดับ 3
- WU formula และ GJ formula จะใช้กับสมการที่มีตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,100]$ เมื่อ $y(5) = 5$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.1, 3.2 และ 3.3

ตารางที่ 3.1 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 5.1, h = 0.1, True value y = 5.0755075525

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	5.0800000000	3.492447×10^{-3}
RK2 (2.11)	5.0756506239	1.430714×10^{-4}
RK3 (2.12)	5.0756507618	6.547634×10^{-8}
PS1 (3.6)	5.0754361150	7.142748×10^{-5}
PS2 (3.7)	50756506230	1.430714×10^{-4}
PS3 (3.8)	5.0756444162	1.368637×10^{-4}
PS4 (3.9)	5.0755076180	6.547634×10^{-8}

ตารางที่ 3.2 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 5.1, h = 0.001, True value y = 5.0755075525

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	5.0755119022	3.349691×10^{-8}
RK2 (2.11)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}

RK3 (2.12)	5.0755076180	6.547634×10^{-8}
PS1 (3.6)	5.0755075525	5.820766×10^{-11}
PS2 (3.7)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
PS3 (3.8)	5.0755075527	1.891749×10^{-10}
PS4 (3.9)	5.0755075525	7.275958×10^{-12}

ตารางที่ 3.3 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 100, h = 0.001, True value y = 6.5686159179

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	6.5686559406	3.002266×10^{-5}
RK2 (2.11)	6.5686159595	3.156027×10^{-8}
RK3 (2.12)	6.5686159586	3.071626×10^{-8}
PS1 (3.6)	6.5686159165	1.462467×10^{-9}
PS2 (3.7)	6.5686159595	3.156027×10^{-8}
PS3 (3.8)	6.5686159595	3.156027×10^{-8}
PS4 (3.9)	6.5686159586	3.071626×10^{-8}

ตัวอย่าง 2 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ เมื่อ $y(0)=1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.4, 3.5 และ 3.6

ตารางที่ 3.4 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x = 0.1, h = 0.1, y = 1.0050251887		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0000000000	5.025189×10^{-3}
RK2 (2.11)	1.0049751860	5.000273×10^{-5}
RK3 (2.12)	1.0050377578	1.256881×10^{-5}
PS1 (3.6)	1.0049937617	3.142699×10^{-5}
PS2 (3.7)	1.0049751860	5.000273×10^{-5}
PS3 (3.8)	1.0049627790	6.240965×10^{-5}
PS4 (3.9)	1.0049875698	3.761890×10^{-5}

ตารางที่ 3.5 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x =0.1 , h =0.0001, True value y = 1.0050251887		
Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0050200075	5.101223×10^{-6}
RK2 (2.11)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}

RK3 (2.12)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS1 (3.6)	1.0050251887	1.818989×10^{-11}
PS2 (3.7)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS3 (3.8)	1.0050251887	3.637979×10^{-12}
PS4 (3.9)	1.0050251887	1.818989×10^{-12}

ตารางที่ 3.6 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x =1.1 , h =0.0001, True value y = 6.1100397659

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	6.0616904647	3.834930×10^{-2}
RK2 (2.11)	6.1100181633	2.160255×10^{-5}
RK3 (2.12)	6.1100398300	6.413757×10^{-5}
PS1 (3.6)	6.1100009806	3.878533×10^{-5}
PS2 (3.7)	6.1100181633	2.160255×10^{-5}
PS3 (3.8)	6.1099903436	3.942231×10^{-5}
PS4 (3.9)	6.1100066900	3.307559×10^{-5}

ตัวอย่าง 3 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \dfrac{\sin x}{x^2} - \dfrac{2y}{x}, x \in [2,10]$ เมื่อ $y(2) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{4 + \cos 2 - \cos x}{x^2}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.7, 3.8 และ 3.9

ตารางที่ 3.7 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 2.1, h = 0.1, True value y =0.9271426912

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9227324357	3.410255×10^{-3}
RK2 (2.11)	0.9272135323	7.084114×10^{-5}
RK3 (2.12)	0.9271409569	1.256881×10^{-6}
PS1 (3.6)	0.9273232808	1.805896×10^{-4}
PS2 (3.7)	0.9272135323	7.084114×10^{-5}
PS3 (3.8)	0.9273578742	2.151830×10^{-4}
PS4 (3.9)	0.9272866980	1.440068×10^{-4}

ตารางที่ 3.8 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x =2.1, h =0.0001, True value y = 0.9271426912

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9271386264	3.064775×10^{-6}
RK2 (2.11)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}

RK3 (2.12)	0.9271426912	2.728484×10^{-12}
PS1 (3.6)	0.9271426913	1.673470×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
PS3 (3.8)	0.9271426912	6.002665×10^{-11}
PS4 (3.9)	0.9271426913	1.300577×10^{-10}

ตารางที่ 3.9 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x =10.0, h =0.0001, True value y = 0.0442292469

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.0442252473	3.999578×10^{-6}
RK2 (2.11)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
RK3 (2.12)	0.0442294669	2.329243×10^{-10}
PS1 (3.6)	0.0442292468	1.350600×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
PS3 (3.8)	0.0442292467	1.901412×10^{-10}
PS4 (3.9)	0.0442292467	1.527951×10^{-10}

<u>ตัวอย่าง 4</u> จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \dfrac{xy}{y^2 - x^2}, x \in [0,100]$ เมื่อ $y(0) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \sqrt{x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.10, 3.11 **และ** 3.12

ตารางที่ 3.10 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x = 0.1, h = 0.1, True value y =1.0050124371

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.1000000000	9.498756×10^{-2}
RK2 (2.11)	1.0050505051	3.806794×10^{-5}
RK3 (2.12)	1.0050081470	3.290066×10^{-6}
PS1 (3.6)	1.0050125313	9.421456×10^{-8}
PS2 (3.7)	1.0050505051	7.084114×10^{-5}
PS3 (3.8)	1.0049572340	5.520314×10^{-5}
PS4 (3.9)	1.0050251872	1.275212×10^{-5}

ตารางที่ 3.11 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x =0.1, h =0.0001, True value y = 1.0050124371

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1.0050074292	5.007957×10^{-6}
RK2 (2.11)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}

RK3 (2.12)	1.0050124371	9.094947×10^{-12}
PS1 (3.6)	1.0050124371	9.094947×10^{-12}
PS2 (3.7)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
PS3 (3.8)	1.0050124371	2.910383×10^{-11}
PS4 (3.9)	1.0050124371	1.818989×10^{-11}

ตารางที่ 3.12 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x =10.0, h =0.0001, True value y = 0.0442292469

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	1413.2151819	1.619565×10^{-3}
RK2 (2.11)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
RK3 (2.12)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS1 (3.6)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS2 (3.7)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS3 (3.8)	1413.2151819	1.619574×10^{-3}
PS4 (3.9)	1413.2148829	1.318799×10^{-4}

ตัวอย่าง 5 จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = y^3, x \in [0, 49.5]$ เมื่อ $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{100 - 2x}}$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.13, 3.14 และ 3.15

ตารางที่ 3.13 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

x = 0.1, h = 0.1, True value y = 0.1001001502

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.10010000000	1.502503×10^{-7}
RK2 (2.11)	0.10010015015	1.002718×10^{-10}
RK3 (2.12)	0.10010015025	1.1366868×10^{-6}
GJ (2.14)	0.10010030624	1.559881×10^{-7}
WU (2.15)	0.10010584213	5.691884×10^{-6}
PS1 (3.6)	0.10010015008	1.753051×10^{-10}
PS2 (3.7)	0.10010015015	1.002718×10^{-10}
PS3 (3.8)	0.10010015002	2.255547×10^{-10}
PS4 (3.9)	0.10010015010	1.502940×10^{-10}

ตารางที่ 3.14 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

x = 0.1, h = 0.0001, True value y = 0.1001001502

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.10010015010	1.504077×10^{-10}
RK2 (2.11)	0.10010025026	3.547474×10^{-13}
RK3 (2.12)	0.10010025026	3.547474×10^{-13}
GJ (2.14)	0.10010025025	1.004693×10^{-7}
WU* (2.15)	0.10000010599	1.000443×10^{-4}
PS1 (3.6)	0.10010025025	3.547474×10^{-13}
PS2 (3.7)	0.10010025025	3.547474×10^{-13}
PS3 (3.8)	0.10010025025	3.547474×10^{-13}
PS4 (3.9)	0.10010025025	3.547474×10^{-13}

ตารางที่ 3.15 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

x = 49.5, h = 0.0001, True value y =1.0

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.9996548547	3.451453×10^{-4}
RK2 (2.11)	1.0000000038	3.845344×10^{-9}
RK3 (2.12)	1.0000000088	8.847564×10^{-9}
GJ (2.14)	1.0003861906	3.861906×10^{-4}

WU (2.15)	17.085971673	16.085971673
PS1 (3.6)	0.9999999987	1.309672×10^{-10}
PS2 (3.7)	1.0000000038	3.845344×10^{-9}
PS3 (3.8)	1.0000000019	1.939043×10^{-9}
PS4 (3.9)	1.0000000038	1.329681×10^{-9}

* ใช้ WU formula ที่ $y(0)$ และ $y(\frac{h}{2})$

สรุป

สูตรใหม่ทั้ง 4 สูตร (PS1, PS2, PS3, PS4) เป็นสูตรรูปแบบเชิงตัวเลขที่ดีที่จะใช้ในการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งจะทำให้ผู้ใช้มีแนวทางในการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นเพิ่มมากขึ้น

อย่างไรก็ตามจากผลการทดลองในการใช้สูตรใหม่ทั้ง 4 สูตร (PS1, PS2, PS3, PS4) ให้ผลดีกับสมการในตัวอย่างเฉพาะ 5 สมการเท่านั้น และสมการจาก WU เป็นสูตรขั้น 2 เราจึงขอแนะนำให้ใช้สูตร PS1 และ PS4

งานวิจัยชิ้นที่ 2 (จาก [6])

Integration Method for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations

โดยในงานวิจัยชิ้นนี้จะใช้สมการเชิงปริพันธ์และวิธีลดตัวแปรของเกาส์เพื่อหาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้น โดยใช้ใช้สมการเชิงปริพันธ์แทนสมการปัญหาค่าเริ่มต้น

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.10}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$
\begin{aligned}
y(x_0) &= c_1 \\
y'(x_0) &= c_2 \\
y''(x_0) &= c_3 \\
&\vdots \\
y^{(n)}(x_0) &= c_n
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

โดยส่วนใหญ่แล้วเราจะใช้ระเบียบวิธีรุงเก-คุตตาในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง n สมการของระบบสมการข้างต้น ได้เป็น

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \;, & y_1(x_0) &= c_1 \\
y_2' &= y_3 \;, & y_2(x_0) &= c_2 \\
y_3' &= y_4 \;, & y_3(x_0) &= c_3 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_{n-1}' &= y_n \;, & y_{n-1}(x_0) &= c_{n-1} \\
y_n' &= F(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), & y_n(x_0) &= c_n
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

หลังจากแก้สมการอันดับหนึ่ง n สมการสำหรับ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ และค่าของ y_1 อยู่ใน y ในระบบสมการเริ่มต้น

การสร้างสูตรเพื่อการแก้ปัญหา

ในปัจจุบันคอมพิวเตอร์สามารถแก้ระบบสมการบางสมการที่มีขนาดใหญ่ได้โดยที่ใช้เวลาเพียงไม่กี่นาที จากประโยชน์ของจุดนี้รวมกับความคิดที่จะหาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงแบบปัญหาค่าเริ่มต้น

เป็นที่ทราบกันอยู่แล้วว่า สมการที่ (I) – (II) สมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t, y)\,dt \tag{III}$$

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ก่อนหน้านี้ โดยที่

$$y_{m+1}(x) = y_m + \int_a^x f(t, y_m(t))\,dt \tag{IV}$$

ดังนั้น จะทำการประมาณค่าหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x=a+h$ โดยใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลขและกฎสี่เหลี่ยมคางหมูจะได้

$$\int_{a}^{a+h} f(t,y(t))dt = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(a+h)\right] \tag{3.13}$$

ซึ่งก็คือ $$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\left[y_m + y_{m+1}\right]$$

หรือ $$y_{m+1} = \frac{(1+0.5h)}{(1-0.5h)} y_m \tag{3.14}$$

เราจะนำความคิดข้างต้นมาประยุกต์ใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ 4

$$y^{(4)} = p(x)y''' + q(x)y'' + r(x)y' + s(x)y + t(x), \qquad x\in[a,b] \tag{3.15}$$

บนเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(a)=c_1,\ \ y'(a)=c_2,\ \ y''(a)=c_3,\ \ y'''(a)=c_4 \tag{3.16}$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งมา 4 สมการ คือ

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2\ , & y_1(a)&=c_1\\
y_2' &= y_3\ , & y_2(a)&=c_2\\
y_3' &= y_4\ , & y_3(a)&=c_3\\
y_4' &= p(x)y_4+q(x)y_3+r(x)y_2+s(x)y_1+t(x)\ , & y_4(a)&=c_4
\end{aligned} \tag{3.17}$$

ใช้สมการที่ (3.14) เราจะหาระบบสมการเชิงเส้น

$$AX = B \tag{3.18}$$

เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{h}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{h}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{h}{2}\\ -\frac{h}{2}s(x_{m+1}) & -\frac{h}{2}r(x_{m+1}) & -\frac{h}{2}q(x_{m+1}) & 1-\frac{h}{2}p(x_{m+1})\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} y_{1_{m+1}} \\ y_{2_{m+1}} \\ y_{3_{m+1}} \\ y_{4_{m+1}} \end{bmatrix}$$

และ

$$B = \begin{bmatrix} y_{1_m} + \frac{h}{2} y_{2_m} \\ y_{2_m} + \frac{h}{2} y_{3_m} \\ y_{3_m} + \frac{h}{2} y_{4_m} \\ y_{4_m} + \frac{h}{2} p(x_m) y_{4_m} + \frac{h}{2} q(x_m) y_{3_m} + \frac{h}{2} r(x_m) y_{2_m} + \frac{h}{2} s(x_m) y_{1_m} + \frac{h}{2} t(x_m) \end{bmatrix}$$

หลังจากนั้นใช้วิธีลดตัวแปรของเกาส์เพื่อหาค่าของ $y_{1_{m+1}}$, $y_{2_{m+1}}$, $y_{3_{m+1}}$ และ $y_{4_{m+1}}$ ซึ่ง $y_{1_{m+1}}$ คือค่าของ $y_{m+1} \approx y(x_{m+1})$ เราเรียกกระบวนการนี้ว่า " Integration Method "

ตัวอย่าง

ตัวอย่างที่1 หาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของสมการ

$$y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = 2x^2 - 16x + 32 \ , \ x \in [0,1]$$

บนเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(0) = 3 \ , \ y'(0) = -2 \ , \ y''(0) = 1 \ , \ y'''(0) = -2$$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = e^x \cos x - e^x \sin x + xe^x - e^x + x^2 - 2x + 3$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.16, 3.17 และ 3.18

ตารางที่ 3.16 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0, h = 0.01

x_i	True value y	Calculated y_i	Error
0.1	2.8238029187	2.8238044729	$1.5541590983 \times 10^{-6}$
0.2	2.6357151797	2.6357185093	$3.3296309994 \times 10^{-6}$
0.3	2.4537005297	2.4537055251	$3.9953814596 \times 10^{-6}$
0.4	2.2756773164	2.2756836460	$6.3296683948 \times 10^{-6}$
0.5	2.0996476491	2.0996546935	$7.0444402809 \times 10^{-6}$
0.6	1.9237964939	1.9238032685	$6.7746805144 \times 10^{-6}$
0.7	1.7466142097	1.7466192770	$5.0673443184 \times 10^{-6}$
0.8	1.5670457702	1.5670471418	$1.3696117094 \times 10^{-6}$
0.9	1.3846701566	1.3846651735	$3.9860741773 \times 10^{-6}$
1.0	1.1999135684	1.1998987893	$1.4779127014 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 3.17 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0, h = 0.001

x_i	True value y	Calculated y_i	Error
0.1	2.8065733818	2.8065733989	$1.7142156139 \times 10^{-8}$
0.2	2.6191198348	2.6191198697	$3.4870626866 \times 10^{-8}$
0.3	2.4375506564	2.4375507077	$5.1295501180 \times 10^{-8}$
0.4	2.2597880028	2.2597880670	$6.4192136051 \times 10^{-8}$

0.5	2.0838457643	2.0838458350	$7.0631358540\times10^{-8}$
0.6	1.9079306325	1.9079306993	$6.6811480792\times10^{-8}$
0.7	1.7305668906	1.7305669388	$3.8166839400\times10^{-8}$
0.8	1.5507481951	1.5507482042	$9.0476532932\times10^{-9}$
0.9	1.3681198385	1.3681197812	$5.7269062381\times10^{-8}$
1.0	1.1831952019	1.1831950431	$1.5879959392\times10^{-7}$

ตารางที่ 3.18 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0, h = 0.0001

x_i	True value y	Calculated y_i	Error
0.1	2.8046628157	2.8046628519	$1.3096723706\times10^{10}$
0.2	2.6172785459	2.6172785463	$3.8198777474\times10^{10}$
0.3	2.4359369427	2.4359369431	$3.7471181713\times10^{10}$
0.4	2.2581993357	2.2581993358	$9.8225427791\times10^{11}$
0.5	2.0822649693	2.0822649690	$2.9103830457\times10^{10}$
0.6	1.9063427949	1.9063427942	$6.2027538661\times10^{10}$
0.7	1.7289605960	1.728960594	$1.1514202924\times10^{-9}$
0.8	1.5491170269	1.5491170249	$1.9772414817\times10^{-9}$
0.9	1.3664641668	1.3664641637	$3.1632225728\times10^{-9}$
1.0	1.1815242974	1.1815242925	$3.8366928240\times10^{-9}$

<u>ตัวอย่างที่2</u> หาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของสมการ

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 8e^{x} + 4\sin x + 4\cos x \ , \ x \in [0,1]$$

บนเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 1 \ , \ y''(0) = 1 \ , \ y'''(0) = 5$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = x^2 e^{x} + \cos x + \sin x$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.19, 3.20 **และ** 3.21

ตารางที่ 3.19 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

$x = 1.0$, $h = 0.01$

x_i	True value y	Calculated y_i	Error
0.1	1.0946987881	1.0946940939	$3.6941986511 \times 10^{-6}$
0.2	1.2145295232	1.2145170406	$1.2142585589 \times 10^{-5}$
0.3	1.3566132871	1.3565896524	$2.3634742320 \times 10^{-5}$
0.4	1.5297852099	1.5297462537	$3.8956188291 \times 10^{-5}$
0.5	1.7449372774	1.7448778712	$5.9406176661 \times 10^{-5}$
0.6	2.0153561946	2.0152700694	$8.6125164671 \times 10^{-5}$
0.7	2.3571116294	2.3569911626	$1.2046674601 \times 10^{-4}$
0.8	2.7895023325	2.7893382977	$1.640370727 \times 10^{-4}$
0.9	3.333568020	3.3353499710	$2.1874595244 \times 10^{-4}$
1.0	3.0226815259	3.0223947457	$2.8678020317 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 3.20 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0, h = 0.001

x_i	True value y	Calculated y_i	Error
0.1	1.1058893445	1.1058892911	$5.3416442825 \times 10^{-8}$
0.2	1.2262744816	1.2262743482	$1.3337376004 \times 10^{-7}$
0.3	1.3707546113	1.3707543630	$2.4827568268 \times 10^{-7}$
0.4	1.5472100466	1.5473096410	$3.0567101678 \times 10^{-7}$
0.5	1.7667327975	1.7667321822	$6.4524769990 \times 10^{-7}$
0.6	2.0428421855	2.0428412969	$8.8863816927 \times 10^{-7}$
0.7	2.3918779423	2.3918767027	$1.2395830709 \times 10^{-6}$
0.8	2.8334519043	2.8334502200	$1.684333250 \times 10^{-6}$
0.9	3.3909669692	3.3909647271	$2.2421336325 \times 10^{-6}$
1.0	3.0922131964	3.0922102606	$2.9357761377 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 3.21 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2 (ค่า y_i ได้จากสมการ (3.15))

x = 1.0, h = 0.0001

x_i	True value y	Calculated y_i	Error
0.1	1.1058892916	1.1058892911	$5.420588422 \times 10^{-10}$
0.2	1.2275920203	1.2275920198	$1.3678800315 \times 10^{-9}$
0.3	1.3721848851	1.3721848826	$2.4811015464 \times 10^{-9}$

0.4	1.5489749342	1.5489749305	3.728928773×10^{-9}
0.5	1.7689425471	1.7689425417	$5.4042175179\times10^{-9}$
0.6	2.0456305826	2.0456305750	$7.5779098552\times10^{-9}$
0.7	2.3954060994	2.3954060890	$1.0368239600\times10^{-8}$
0.8	2.9379126154	2.8379126014	$1.3980752556\times10^{-8}$
0.9	3.3965897114	2.3965896929	$1.8542777980\times10^{-8}$
1.0	3.0992698753	3.0992698512	$2.4141627364\times10^{-8}$

สรุป

วิธีปริพันธ์แบบใหม่ในงานวิจัยชิ้นที่ 2 นี้เป็นวิธีที่ดีสำหรับการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ผลจากตัวอย่างเป็นที่น่าพอใจ วิธีปริพันธ์แบบใหม่นี้ทำให้นักคณิตศาสตร์มีอิสระในการหาผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นมากขึ้น

งานวิจัยชิ้นที่ 3 (จาก [7])

New Numerical Integration Formulas for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equation of Higher Order

การสร้างสูตร

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = f(x, y), x \in [a,b] \qquad \text{(I)}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(a) = c$ (II)

ซึ่งสมมูลกับสมการ $y(x) = c + \int_a^x f(t, y)dt$ (III)

โดยสมมติว่าวิธีประมาณค่าแบบต่อเนื่อง ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (I) โดยที่ $y_{m+1}(x) = y_m + \int_a^x f(t, y_m(t))dt$ (IV)

จากสมมติฐาน ลำดับ $\{y_n(x)\}$ จะลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ข้างต้น มาทำการประมาณค่าหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่จุด $x = a + h$ โดยใช้วิธีการประมาณค่ารูปแบบเชิงตัวเลขจากสมการที่ (3.13) คือ

$$\int_a^{a+h} f(t, y(t))dt = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(a+h)\right]$$

Trapezoidal formula และ

$$\int_a^{a+h} f\left(t, y(t)\right)dt = \frac{h}{6}\left[f\left(a\right) + 4f\left(\frac{2a+h}{2}\right) + f\left(a+h\right)\right] \tag{3.19}$$

Simpson's formula

ดังนั้นจากสมการ Trapezoidal formula และ Simpson's formula ข้างต้นจะได้ 8 สูตรดังนี้

สำหรับ $y' = f\left(x, y\right), y\left(a\right) = P$ เรามี

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\left(f\left(x_m, y_m\right) + f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right)\right) \tag{3.20}$$

สำหรับ $y'' = f\left(x, y, y'\right), y\left(a\right) = P, y'\left(a\right) = Q$ ซึ่งสมมูลกับ

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = f\left(x, y_1, y_2\right)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(f\left(x_{1_m}, y_{1_m}, y_{2_m}\right) + f\left(x_{1_{m+1}}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

สำหรับ $y''' = f\left(x, y, y', y''\right), y\left(a\right) = P, y' = Q, y'' = R$ ซึ่งสมมูลกับ

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = f\left(x, y_1, y_2, y_3\right)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(y_{3_m} + y_{3_{m+1}}\right) \\ y_{3_{m+1}} &= y_{3_m} + \frac{h}{2}\left(f\left(x_{1_m}, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}\right) + f\left(x_{1_{m+1}}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad (3.22)$$

สำหรับ $y^{iv} = f\left(x, y, y', y'', y'''\right), y(a) = P, y' = Q, y'' = R, y''' = S$ ซึ่งสมมูลกับ

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = y_4$$

$$y_4' = f(x, y_1, y_2, y_3, y_4)$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left.\begin{aligned} y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right) \\ y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(y_{3_m} + y_{3_{m+1}}\right) \\ y_{3_{m+1}} &= y_{3_m} + \frac{h}{2}\left(y_{4_m} + y_{4_{m+1}}\right) \\ y_{4_{m+1}} &= y_{4_m} + \frac{h}{2}\left(f\left(x_{1_m}, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}\right) + f\left(x_{1_{m+1}}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}\right)\right) \end{aligned}\right\} \quad (3.23)$$

ในลำดับที่ 1 y_{1_m} ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะได้ $y_{1_{m+2}}$

คือ $$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{1_m} + 4y_{1_{m+1}} + y_{1_{m+2}}\right) \quad (3.24)$$

ในลำดับที่ 2 y_{1_m}, y_{2_m} ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะได้ $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}$

คือ $$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}\right) \tag{3.25}$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}\left(f\left(x_{1_m}, y_{1_m}, y_{2_m}\right) + 4f\left(x_{1_{m+1}}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}\right) + f\left(x_{1_{m+2}}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}\right)\right)$$

ในลำดับที่ 3 $y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}$ ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะได้ $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}$

คือ $$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m-1}} + y_{2_{m+2}}\right) \tag{3.26}$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}\left(y_{3_m} + 4y_{3_{m+1}} + y_{3_{m+2}}\right)$$

$$y_{3_{m+2}} = y_{3_m} + \frac{h}{3}\Big(f\left(x_{1_m}, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}\right) + 4f\left(x_{1_{m+1}}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}\right)$$

$$+ f\left(x_{1_{m+2}}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}\right)\Big)$$

ในลำดับที่ 4 $y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}$ ที่ให้มาและ $y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}$ จาก trapezoidal จะได้ $y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}}, y_{3_{m+2}}, y_{4_{m+2}}$

คือ $$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}\right) \tag{3.27}$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}\left(y_{3_m} + 4y_{3_{m+1}} + y_{3_{m+2}}\right)$$

$$y_{3_{m+2}} = y_{3_m} + \frac{h}{3}\left(y_{4_m} + 4y_{4_{m+1}} + y_{4_{m+2}}\right)$$

$$y_{4_{m+2}} = y_{4_m} + \frac{h}{3}\Big(f\left(x_{1_m}, y_{1_m}, y_{2_m}, y_{3_m}, y_{4_m}\right) + 4f\left(x_{1_{m+1}}, y_{1_{m+1}}, y_{2_{m+1}}, y_{3_{m+1}}, y_{4_{m+1}}\right)$$

$$+ f\left(x_{1_{m+2}}, y_{1_{m+2}}, y_{2_{m+2}} + y_{3_{m+2}} + y_{4_{m+2}}\right)\Big)$$

ตัวอย่าง

__ตัวอย่างที่ 1__ หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{2y}{x}$, $x \in [2,3]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{4 + \cos(2) - \cos(x)}{x^2}$

สำหรับ Trapezoidal formula (3.20) เราจะได้สมการคือ

$$y_{m+1} = \frac{y_m\left(1-\frac{h}{x_m}\right)+\frac{h}{2}\left(\frac{\sin x_m}{x_m^2}+\frac{\sin x_{m+1}}{x_{m+1}^2}\right)}{1+\frac{h}{x_{m+1}}}$$

สำหรับ Simpson's formula (3.24) เราจะได้สมการคือ

$$y_{m+2} = \frac{y_m\left(1-\frac{2h}{3x_m}\right)-\frac{8hy_{m+1}}{3x_{m+1}}+\frac{h}{3}\left(\frac{\sin x_m}{x_m^2}+4\frac{\sin x_{m+1}}{x_{m+1}^2}+\frac{\sin x_{m+2}}{x_{m+2}^2}\right)}{1+\frac{2h}{3x_{m+2}}}$$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.26, 3.27, 3.28 และ 3.29

ตารางที่ 3.22 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 2.0, h = 0.1

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2700×10^{-1}	9.2713×10^{-1}	1.3284×10^{-4}	6.2664×10^{-10}
2.2	8.6205×10^{-1}	8.6195×10^{-1}	8.6204×10^{-1}	1.0410×10^{-4}	1.1321×10^{-6}
2.3	8.0342×10^{-1}	8.0334×10^{-1}	8.0341×10^{-1}	8.2334×10^{-4}	6.8007×10^{-7}
2.4	7.5021×10^{-1}	7.5015×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	3.3035×10^{-5}	1.5790×10^{-6}
2.5	7.0159×10^{-1}	7.0154×10^{-1}	7.0159×10^{-1}	5.2729×10^{-5}	9.1570×10^{-7}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5687×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	4.2624×10^{-5}	1.7354×10^{-6}
2.7	6.1562×10^{-1}	6.1559×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	3.4655×10^{-5}	9.5048×10^{-7}

2.8	5.7730×10^{-1}	5.7727×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	2.8322×10^{-5}	1.7558×10^{-6}
2.9	5.4159×10^{-1}	5.4157×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	2.3257×10^{-5}	8.9503×10^{-7}
3.0	5.0820×10^{-1}	5.0819×10^{-1}	5.0820×10^{-1}	1.9183×10^{-5}	1.7157×10^{-6}

ตารางที่ 3.23 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.0,\ h = 0.1$

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2706×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	7.0841×10^{-5}	1.7343×10^{-6}
2.2	8.6205×10^{-1}	8.6192×10^{-1}	8.6205×10^{-1}	1.2114×10^{-4}	2.8816×10^{-6}
2.3	8.0342×10^{-1}	8.0326×10^{-1}	8.0342×10^{-1}	1.5688×10^{-4}	3.6274×10^{-6}
2.4	7.5021×10^{-1}	7.5002×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	1.8220×10^{-4}	3.0967×10^{-6}
2.5	7.0179×10^{-1}	7.0159×10^{-1}	7.0179×10^{-1}	2.0007×10^{-4}	3.3744×10^{-6}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5670×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	2.1254×10^{-4}	3.5192×10^{-6}
2.7	6.1562×10^{-1}	6.1540×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	2.2113×10^{-4}	3.5718×10^{-6}
2.8	5.7730×10^{-1}	5.7707×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	2.2692×10^{-4}	1.7558×10^{-6}
2.9	5.4159×10^{-1}	5.4136×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	2.3068×10^{-4}	3.5067×10^{-6}
3.0	5.0820×10^{-1}	5.0797×10^{-1}	5.0820×10^{-1}	2.3297×10^{-4}	3.4235×10^{-6}

ตารางที่ 3.24 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.0,\ h = 0.01$

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	1.3254×10^{-6}	7.6397×10^{-10}
2.2	8.6205×10^{-1}	8.6205×10^{-1}	8.6205×10^{-1}	2.2465×10^{-6}	1.2641×10^{-10}
2.3	8.0342×10^{-1}	8.0342×10^{-1}	8.0342×10^{-1}	2.8772×10^{-6}	1.5734×10^{-10}
2.4	7.5021×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	3.5657×10^{-6}	1.8826×10^{-10}
2.5	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	3.5657×10^{-6}	1.9190×10^{-10}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	3.7223×10^{-6}	1.9554×10^{-10}
2.7	6.1562×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	3.7978×10^{-6}	1.9463×10^{-10}
2.8	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	3.8142×10^{-6}	1.9463×10^{-10}
2.9	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	3.7880×10^{-6}	1.9463×10^{-10}
3.0	5.0830×10^{-1}	5.0830×10^{-1}	5.0830×10^{-1}	3.7313×10^{-6}	1.9281×10^{-10}

ตารางที่ 3.25 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.0,\ h = 0.01$

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	6.6328×10^{-7}	1.6379×10^{-9}
2.2	8.6205×10^{-1}	8.6205×10^{-1}	8.6205×10^{-1}	1.1363×10^{-6}	2.7257×10^{-9}
2.3	8.0342×10^{-1}	8.0342×10^{-1}	8.0342×10^{-1}	1.4741×10^{-6}	3.4378×10^{-9}

2.4	7.5021×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	1.7149×10^{-6}	3.8889×10^{-9}
2.5	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	1.8861×10^{-6}	3.1609×10^{-9}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	2.0070×10^{-6}	3.3073×10^{-9}
2.7	6.1562×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	2.0914×10^{-6}	3.3646×10^{-9}
2.8	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	2.1494×10^{-6}	3.3628×10^{-9}
2.9	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	2.1883×10^{-6}	3.3182×10^{-9}
3.0	5.0820×10^{-1}	5.0820×10^{-1}	5.0820×10^{-1}	2.2133×10^{-6}	3.2437×10^{-9}

ตารางที่ 3.26 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.0,\ h = 0.001$

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	1.3245×10^{-8}	1.3642×10^{-11}
2.2	8.6205×10^{-1}	8.6205×10^{-1}	8.6205×10^{-1}	2.2455×10^{-8}	3.3651×10^{-11}
2.3	8.0342×10^{-1}	8.0342×10^{-1}	8.0342×10^{-1}	2.8750×10^{-8}	5.3660×10^{-11}
2.4	7.5021×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	7.5021×10^{-1}	3.2957×10^{-8}	6.3664×10^{-11}
2.5	7.0159×10^{-1}	7.0159×10^{-1}	7.0159×10^{-1}	3.5623×10^{-8}	6.4574×10^{-11}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	3.7183×10^{-8}	6.7302×10^{-11}
2.7	6.1562×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	6.1562×10^{-1}	3.7940×10^{-8}	7.6397×10^{-11}
2.8	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	3.8104×10^{-8}	8.0945×10^{-11}

2.9	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	3.7841×10^{-8}	8.8220×10^{-11}
3.0	5.0820×10^{-1}	5.0820×10^{-1}	5.0820×10^{-1}	3.7271×10^{-8}	8.6402×10^{-11}

ตารางที่ 3.27 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

$x = 2.0,\ h = 0.001$

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	6.6093×10^{-9}	1.2733×10^{-11}
2.2	8.6206×10^{-1}	8.6206×10^{-1}	8.6206×10^{-1}	1.1319×10^{-8}	2.2737×10^{-11}
2.3	8.0343×10^{-1}	8.0343×10^{-1}	8.0343×10^{-1}	1.4688×10^{-8}	3.2741×10^{-11}
2.4	7.5022×10^{-1}	7.5022×10^{-1}	7.5022×10^{-1}	1.7094×10^{-8}	3.4565×10^{-11}
2.5	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	1.8802×10^{-8}	5.2751×10^{-11}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	2.0015×10^{-8}	5.7298×10^{-11}
2.7	6.1563×10^{-1}	6.1563×10^{-1}	6.1563×10^{-1}	2.0862×10^{-8}	6.1846×10^{-11}
2.8	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	2.1447×10^{-8}	6.5484×10^{-11}
2.9	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	2.1841×10^{-8}	6.7303×10^{-11}
3.0	5.0821×10^{-1}	5.0821×10^{-1}	5.0821×10^{-1}	2.2095×10^{-8}	7.0940×10^{-11}

ตารางที่ 3.28 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 2.0, h = 0.0001

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	6.2664×10^{-10}	7.6852×10^{-10}
2.2	8.6206×10^{-1}	8.6206×10^{-1}	8.6206×10^{-1}	1.1523×10^{-9}	1.4051×10^{-9}
2.3	8.0343×10^{-1}	8.0343×10^{-1}	8.0343×10^{-1}	1.6370×10^{-9}	1.9063×10^{-9}
2.4	7.5022×10^{-1}	7.5022×10^{-1}	7.5022×10^{-1}	2.0345×10^{-9}	2.3246×10^{-9}
2.5	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	2.3337×10^{-9}	2.7002×10^{-9}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	2.6029×10^{-9}	2.9758×10^{-9}
2.7	6.1563×10^{-1}	6.1563×10^{-1}	6.1563×10^{-1}	2.8067×10^{-9}	3.221×10^{-9}
2.8	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	2.9840×10^{-9}	3.4251×10^{-9}
2.9	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	3.1532×10^{-9}	3.5906×10^{-9}
3.0	5.0821×10^{-1}	5.0821×10^{-1}	5.0821×10^{-1}	3.2860×10^{-9}	3.7307×10^{-9}

ตารางที่ 3.29 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

x = 2.0, h = 0.0001

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
2.1	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	9.2714×10^{-1}	8.2400×10^{-10}	7.6670×10^{-10}
2.2	8.6206×10^{-1}	8.6206×10^{-1}	8.6206×10^{-1}	1.4797×10^{-9}	1.3842×10^{-9}
2.3	8.0343×10^{-1}	8.0343×10^{-1}	8.0343×10^{-1}	2.0272×10^{-9}	1.8935×10^{-9}

2.4	7.5022×10^{-1}	7.5022×10^{-1}	7.5022×10^{-1}	2.4583×10^{-9}	2.2901×10^{-9}
2.5	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	7.0160×10^{-1}	2.8057×10^{-9}	2.6211×10^{-9}
2.6	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	6.5691×10^{-1}	3.0995×10^{-9}	2.9067×10^{-9}
2.7	6.1563×10^{-1}	6.1563×10^{-1}	6.1563×10^{-1}	3.3396×10^{-9}	3.1386×10^{-9}
2.8	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	5.7730×10^{-1}	3.5333×10^{-9}	3.3251×10^{-9}
2.9	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	5.4159×10^{-1}	3.6998×10^{-9}	3.4860×10^{-9}
3.0	5.0821×10^{-1}	5.0821×10^{-1}	5.0821×10^{-1}	3.8353×10^{-9}	3.6197×10^{-9}

<u>**ตัวอย่างที่ 2**</u> การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y'' = \frac{1}{x^2 e^{2x}} - 4y - 4y', x \in [1,2]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0, y'(1) = \frac{-1}{e^2}$

ซึ่งคำตอบของสมการ คือ $y(x) = \frac{-\ln x}{e^{2x}}$

สำหรับ Trapezoidal formula (3.21) **เราจะได้สมการคือ**

$$y_{1_{m+1}} = y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right)$$

$$y_{2_{m+1}} = \frac{y_{2_m}\left(1 - 2h - h^2\right) - 4hy_{1_m} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{x_m^2 e^{2x_m}} + \frac{1}{x_{m+1}^2 e^{2x_{m+1}}}\right)}{1 + 2h + h^2}$$

สำหรับ Simpson's formula (3.25) **เราจะได้สมการคือ**

$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}\right)$$

$$y_{2_{m+2}}=\left(\left(1-\frac{4}{3}h-\frac{4}{9}h^2\right)y_{2_m}-\left(\frac{16}{3}h+\frac{16}{9}h^2\right)y_{2_{m+1}}-\frac{8}{3}hy_{1_m}-\frac{16}{3}hy_{1_{m+1}}+\frac{h}{3}\left(\frac{e^{-2x_m}}{x_m^2}+\frac{e^{-2x_{m+1}}}{x_{m+1}^2}+\frac{e^{-2x_{m+2}}}{x_{m+2}^2}\right)\right)\frac{1}{1+\frac{4}{3}h+\frac{4}{9}h^2}$$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.30, 3.31, 3.32, 3.33, 3.34 **และ** 3.35

ตารางที่ 3.30 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x = 1.0, h = 0.1

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	-1.0150×10^{-2}	-1.0305×10^{-2}	-1.0150×10^{-2}	1.5524×10^{-4}	2.0027×10^{-10}
1.2	-1.5943×10^{-2}	-1.6150×10^{-2}	-1.5946×10^{-2}	2.0711×10^{-4}	2.7178×10^{-6}
1.3	-1.8838×10^{-2}	-1.9041×10^{-2}	-1.8838×10^{-2}	2.0358×10^{-4}	2.9194×10^{-7}
1.4	-1.9835×10^{-2}	-2.0008×10^{-2}	-1.9838×10^{-2}	1.7297×10^{-4}	2.8242×10^{-6}
1.5	-1.9623×10^{-2}	-1.9754×10^{-2}	-1.9623×10^{-2}	1.3175×10^{-4}	7.0750×10^{-7}
1.6	-1.8674×10^{-2}	-1.8763×10^{-2}	-1.8677×10^{-2}	8.9156×10^{-5}	2.5552×10^{-6}
1.7	-1.7307×10^{-2}	-1.7357×10^{-2}	-1.7309×10^{-2}	5.0047×10^{-5}	1.8531×10^{-6}
1.8	-1.5737×10^{-2}	-1.5753×10^{-2}	-1.5740×10^{-2}	1.6653×10^{-5}	2.5069×10^{-6}
1.9	-1.4107×10^{-2}	-1.4112×10^{-2}	1.4110×10^{-2}	1.0329×10^{-5}	2.8961×10^{-6}
2.0	-1.2505×10^{-2}	-1.2536×10^{-2}	-1.2508×10^{-2}	3.1069×10^{-5}	2.7912×10^{-6}

ตารางที่ 3.31 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.0,\ h = 0.1$

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	-1.0150×10^{-2}	-1.0461×10^{-2}	-1.0181×10^{-2}	3.1052×10^{-4}	3.1250×10^{-5}
1.2	-1.5943×10^{-2}	-1.6538×10^{-2}	-1.5978×10^{-2}	5.9595×10^{-4}	3.5300×10^{-5}
1.3	-1.8838×10^{-2}	-1.9486×10^{-2}	-1.8877×10^{-2}	6.4828×10^{-4}	3.9326×10^{-5}
1.4	-1.9835×10^{-2}	-2.0460×10^{-2}	-1.9873×10^{-2}	6.2536×10^{-4}	3.7745×10^{-5}
1.5	-1.9623×10^{-2}	-2.0186×10^{-2}	-1.9656×10^{-2}	5.6328×10^{-4}	3.3270×10^{-5}
1.6	-1.8674×10^{-2}	-1.9058×10^{-2}	-1.8712×10^{-2}	3.8426×10^{-4}	3.7545×10^{-5}
1.7	-1.7307×10^{-2}	1.7609×10^{-2}	-1.7338×10^{-2}	3.0156×10^{-4}	3.1541×10^{-5}
1.8	-1.5737×10^{-2}	-1.6059×10^{-2}	-1.5763×10^{-2}	3.2273×10^{-4}	2.5804×10^{-5}
1.9	-1.4107×10^{-2}	-1.4359×10^{-2}	-1.4128×10^{-2}	2.5168×10^{-4}	2.0616×10^{-5}
2.0	-1.2505×10^{-2}	-1.2695×10^{-2}	-1.2521×10^{-2}	1.9009×10^{-4}	1.6097×10^{-5}

ตารางที่ 3.32 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.0,\ h = 0.01$

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	-1.0557×10^{-2}	-1.0559×10^{-2}	-1.0557×10^{-2}	1.5220×10^{-6}	1.5880×10^{-10}
1.2	-1.6534×10^{-2}	-1.6536×10^{-2}	-1.6534×10^{-2}	2.0311×10^{-6}	2.0071×10^{-10}
1.3	-1.9481×10^{-2}	-1.9483×10^{-2}	-1.9481×10^{-2}	1.9967×10^{-6}	1.8801×10^{-10}

1.4	-2.0455×10^{-2}	-2.0457×10^{-2}	-2.0455×10^{-2}	1.6961×10^{-6}	1.5350×10^{-10}
1.5	-2.0182×10^{-2}	-2.0183×10^{-2}	-2.0182×10^{-2}	1.2910×10^{-6}	1.1366×10^{-10}
1.6	-1.9154×10^{-2}	-1.9163×10^{-2}	-1.9154×10^{-2}	8.7207×10^{-6}	7.6511×10^{-11}
1.7	-1.7705×10^{-2}	-1.7705×10^{-2}	-1.7705×10^{-2}	3.8713×10^{-7}	3.5645×10^{-11}
1.8	-1.6057×10^{-2}	-1.6057×10^{-2}	-1.6057×10^{-2}	1.5825×10^{-7}	2.2169×10^{-11}
1.9	-1.4356×10^{-2}	-1.4356×10^{-2}	-1.4356×10^{-2}	1.0764×10^{-7}	6.0822×10^{-11}
2.0	-1.2693×10^{-2}	-1.2693×10^{-2}	-1.2693×10^{-2}	3.1214×10^{-7}	3.5527×10^{-11}

ตารางที่ 3.33 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

$x = 1.0,\ h = 0.01$

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	-1.0557×10^{-2}	-1.0560×10^{-2}	-1.0557×10^{-2}	3.3436×10^{-6}	2.5054×10^{-8}
1.2	-1.6534×10^{-2}	-1.6538×10^{-2}	-1.6534×10^{-2}	3.8462×10^{-6}	3.6305×10^{-8}
1.3	-1.9481×10^{-2}	-1.9486×10^{-2}	-1.9481×10^{-2}	5.2596×10^{-6}	3.9492×10^{-8}
1.4	-2.0455×10^{-2}	-2.0461×10^{-2}	-2.0455×10^{-2}	5.0580×10^{-6}	3.8164×10^{-8}
1.5	-2.0182×10^{-2}	-2.0185×10^{-2}	-2.0182×10^{-2}	3.5378×10^{-6}	3.4508×10^{-8}
1.6	-1.9154×10^{-2}	-1.9158×10^{-2}	-1.9154×10^{-2}	3.8815×10^{-6}	2.9852×10^{-8}
1.7	-1.7705×10^{-2}	-1.7708×10^{-2}	-1.7705×10^{-2}	3.1980×10^{-6}	2.4979×10^{-8}
1.8	-1.6057×10^{-2}	-1.6059×10^{-2}	-1.6057×10^{-2}	2.5490×10^{-6}	2.0332×10^{-8}
1.9	-1.4356×10^{-2}	-1.4358×10^{-2}	-1.4356×10^{-2}	1.9663×10^{-6}	1.6138×10^{-8}
2.0	-1.2693×10^{-2}	-1.2694×10^{-2}	-1.2693×10^{-2}	1.4632×10^{-6}	1.2492×10^{-8}

ตารางที่ 3.34 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x = 1.0, h = 0.001

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	-1.0560×10^{-2}	-1.0560×10^{-2}	-1.0560×10^{-2}	1.5214×10^{-8}	2.5153×10^{-12}
1.2	-1.6540×10^{-2}	-1.6540×10^{-2}	-1.6540×10^{-2}	2.0303×10^{-8}	3.5243×10^{-12}
1.3	-1.9486×10^{-2}	-1.9486×10^{-2}	-1.9486×10^{-2}	1.9958×10^{-8}	3.6379×10^{-12}
1.4	-2.0461×10^{-2}	-2.0461×10^{-2}	-2.0461×10^{-2}	1.6954×10^{-8}	3.2116×10^{-12}
1.5	-2.0186×10^{-2}	-2.0186×10^{-2}	-2.0186×10^{-2}	1.2904×10^{-8}	2.5295×10^{-12}
1.6	-1.9158×10^{-2}	-1.9158×10^{-2}	-1.9158×10^{-2}	8.7158×10^{-8}	1.9895×10^{-12}
1.7	-1.7709×10^{-2}	-1.7709×10^{-2}	-1.7709×10^{-2}	3.8682×10^{-8}	1.3642×10^{-12}
1.8	-1.6060×10^{-2}	-1.6060×10^{-2}	-1.6060×10^{-2}	1.5812×10^{-8}	1.0800×10^{-12}
1.9	-1.4358×10^{-2}	-1.4358×10^{-2}	-1.4358×10^{-2}	1.0763×10^{-8}	9.0949×10^{-13}
2.0	-1.2635×10^{-2}	-1.2635×10^{-2}	-1.2635×10^{-2}	3.1200×10^{-8}	9.0949×10^{-12}

ตารางที่ 3.35 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

x = 1.0, h = 0.001

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	-1.0560×10^{-2}	-1.0560×10^{-2}	-1.0560×10^{-2}	3.2768×10^{-8}	2.2737×10^{-11}
1.2	-1.6540×10^{-2}	-1.6540×10^{-2}	-1.6540×10^{-2}	3.7493×10^{-8}	3.3651×10^{-11}
1.3	-1.9486×10^{-2}	-1.9486×10^{-2}	-1.9486×10^{-2}	5.1540×10^{-8}	3.7516×10^{-11}

1.4	-2.0461×10^{-2}	-2.0461×10^{-2}	-2.0461×10^{-2}	3.9557×10^{-8}	3.7204×10^{-11}
1.5	-2.0186×10^{-2}	-2.0186×10^{-2}	-2.0186×10^{-2}	3.4451×10^{-8}	3.4759×10^{-11}
1.6	-1.9158×10^{-2}	-1.9158×10^{-2}	-1.9158×10^{-2}	3.8012×10^{-8}	3.1150×10^{-11}
1.7	-1.7709×10^{-2}	-1.7709×10^{-2}	-1.7709×10^{-2}	3.1306×10^{-8}	2.7256×10^{-11}
1.8	-1.6060×10^{-2}	-1.6060×10^{-2}	-1.6060×10^{-2}	2.4939×10^{-8}	2.3476×10^{-11}
1.9	-1.4358×10^{-2}	-1.4358×10^{-2}	-1.4358×10^{-2}	1.9224×10^{-8}	1.9824×10^{-11}
2.0	-1.2635×10^{-2}	-1.2635×10^{-2}	-1.2635×10^{-2}	1.4290×10^{-8}	1.6427×10^{-11}

<u>**ตัวอย่างที่ 3**</u> การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y'''(x) = y - 3y' + y'' - \frac{6e^x}{x^4}, x \in [1,2]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = e, y'(1) = 0, y''(1) = e$

ซึ่งคำตอบของสมการ คือ $y(x) = \frac{e^x}{x}$

สำหรับ Trapezoidal formula (3.22) เราจะได้สมการคือ

$$
\begin{aligned}
y_{1_{m+1}} &= y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right) \\
y_{2_{m+1}} &= y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(y_{3_m} + y_{3_{m+1}}\right) \\
y_{3_{m+1}} &= \frac{y_{3_m}\left(1 - \frac{3}{2}h - \frac{3}{4}h^2 + \frac{h^3}{8}\right) + \left(-3h + \frac{h^2}{2}\right)y_{2_m} + hy_{1_m} - 3h\left(\frac{e^{x_m}}{x_m^4} + \frac{e^{x_{m+1}}}{x_{m+1}^4}\right)}{1 + \frac{3}{2}h + \frac{3}{4}h^2 - \frac{h^3}{8}}
\end{aligned}
$$

สำหรับ Simpson's formula (3.26) **เราจะได้สมการคือ**

$$y_{1_{m+2}} = y_{1_m} + \frac{h}{3}\left(y_{2_m} + 4y_{2_{m+1}} + y_{2_{m+2}}\right)$$

$$y_{2_{m+2}} = y_{2_m} + \frac{h}{3}\left(y_{3_m} + 4y_{3_{m+1}} + y_{3_{m+2}}\right)$$

$$y_{3_{m+2}}=\left[\left(1+h-\frac{h^2}{3}+\frac{h^3}{27}\right)y_{3_m}+\left(4h-\frac{4}{3}h^2+\frac{4}{27}h^3\right)y_{3_{m+1}}+\left(-2h+\frac{2}{9}h^2\right)y_{2_m}\right.$$

$$\left.+\left(-4h+\frac{4}{9}h^2\right)y_{2_{m+1}}+\frac{2h}{3}y_{1_m}+\frac{4h}{3}y_{1_{m+1}}-2h\left(\frac{e^{x_m}}{x_m^4}+\frac{4e^{x_{m+1}}}{x_{m+1}^4}+\frac{e^{x_{m+2}}}{x_{m+2}^4}\right)\right]$$

$$\times\left(\frac{1}{1-h+\frac{h^2}{3}-\frac{h^3}{27}}\right)$$

ซึ่งผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขได้ผลตามตารางที่ 3.36, 3.37, 3.38, 3.39, 3.40, 3.41, 3.42 และ 3.43

ตารางที่ 3.36 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 1.0, h = 0.1

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	2.7318	2.7314	2.7318	3.0599×10^{-4}	2.9529×10^{-8}
1.2	2.7675	2.7671	2.7675	3.3793×10^{-4}	6.5298×10^{-6}
1.3	2.8225	2.8219	2.8225	5.7533×10^{-4}	1.1761×10^{-6}
1.4	2.8947	2.8938	2.8947	8.6781×10^{-4}	1.2651×10^{-5}
1.5	2.9829	2.9814	2.9829	1.4584×10^{-3}	1.1199×10^{-5}
1.6	3.0862	3.0837	3.0862	2.4981×10^{-3}	3.6527×10^{-5}
1.7	3.2042	3.2010	3.2041	3.1551×10^{-3}	3.6729×10^{-5}
1.8	3.3366	3.3300	3.3365	6.6233×10^{-3}	9.5274×10^{-5}

1.9	3.4833	3.4732	3.4832	1.0129×10^{-2}	1.2701×10^{-4}
2.0	3.6443	3.6293	3.6443	1.4942×10^{-2}	2.1100×10^{-4}

ตารางที่ 3.37 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 1.0, h = 0.1

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	2.7318	2.7309	2.7316	8.1321×10^{-4}	9.2878×10^{-5}
1.2	2.7675	2.7666	2.7673	8.3478×10^{-4}	1.9269×10^{-4}
1.3	2.8225	2.8225	2.8222	7.0083×10^{-7}	3.0866×10^{-4}
1.4	2.8947	2.8928	2.8943	1.8332×10^{-3}	3.4788×10^{-4}
1.5	2.9829	2.9790	2.9823	3.8765×10^{-3}	6.1685×10^{-4}
1.6	3.0862	3.0767	3.0854	9.4008×10^{-3}	8.2225×10^{-4}
1.7	3.2042	3.1882	3.2029	1.5742×10^{-2}	1.0713×10^{-3}
1.8	3.3366	3.3123	3.3352	2.4308×10^{-2}	1.3723×10^{-3}
1.9	3.4833	3.4477	3.4815	3.5586×10^{-2}	1.7345×10^{-3}
2.0	3.6443	3.5941	3.6421	5.0155×10^{-2}	2.1686×10^{-3}

ตารางที่ 3.38 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 1.0, h = 0.01

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	2.7310	2.7310	2.7310	2.9397×10^{-6}	6.3664×10^{-10}
1.2	2.7667	2.7667	2.7667	3.1747×10^{-6}	8.0035×10^{-10}
1.3	2.8225	2.8225	2.8225	5.4845×10^{-6}	1.4188×10^{-10}
1.4	2.8965	2.8965	2.8965	8.3589×10^{-6}	2.8303×10^{-10}
1.5	2.9877	2.9877	2.9877	1.4226×10^{-5}	7.9016×10^{-10}
1.6	3.0955	3.0955	3.0955	2.4594×10^{-5}	1.6138×10^{-9}
1.7	3.2197	3.2196	3.2197	3.1147×10^{-5}	2.8372×10^{-8}
1.8	3.3606	3.3605	3.3606	6.5824×10^{-5}	3.5638×10^{-8}
1.9	3.5184	3.5183	3.5184	1.0090×10^{-4}	6.9172×10^{-8}
2.0	3.6939	3.6939	3.6939	1.4905×10^{-4}	1.0042×10^{-7}

ตารางที่ 3.39 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 1.0, h = 0.01

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	2.7310	2.7310	2.7310	5.3379×10^{-6}	9.8847×10^{-8}
1.2	2.7667	2.7667	2.7667	2.4705×10^{-6}	2.0136×10^{-7}
1.3	2.8225	2.8225	2.8225	9.5246×10^{-6}	3.1722×10^{-7}

1.4	2.8965	2.8964	2.8965	3.2319×10^{-5}	3.5360×10^{-7}
1.5	2.9877	2.9876	2.9877	6.8227×10^{-5}	6.1686×10^{-7}
1.6	3.0955	3.0954	3.0955	1.2020×10^{-4}	8.1331×10^{-7}
1.7	3.2197	3.2195	3.2197	1.9186×10^{-4}	1.0496×10^{-6}
1.8	3.3606	3.3604	3.3606	2.8756×10^{-4}	1.3334×10^{-6}
1.9	3.5184	3.5181	3.5184	3.1254×10^{-4}	1.6731×10^{-6}
2.0	3.6939	3.6933	3.6939	5.7298×10^{-4}	2.0784×10^{-6}

ตารางที่ 3.40 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

$x = 1.0$, $h = 0.001$

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	2.7310	2.7310	2.7310	2.9424×10^{-8}	2.1827×10^{-11}
1.2	2.7667	2.7667	2.7667	3.1789×10^{-8}	1.0913×10^{-11}
1.3	2.8225	2.8225	2.8225	5.4890×10^{-8}	1.8189×10^{-11}
1.4	2.8965	2.8965	2.8965	8.3662×10^{-8}	3.6379×10^{-6}
1.5	2.9878	2.9878	2.9878	1.4233×10^{-7}	6.1845×10^{-11}
1.6	3.0956	3.0956	3.0956	2.4603×10^{-8}	1.3824×10^{-11}
1.7	3.2199	3.2199	3.2199	3.1154×10^{-7}	2.3283×10^{-10}
1.8	3.3609	3.3609	3.3609	6.5830×10^{-7}	3.2564×10^{-10}

1.9	3.5189	3.5189	3.5189	1.0090×10^{-6}	6.7666×10^{-10}
2.0	3.6945	3.6945	3.6945	1.4905×10^{-6}	1.0113×10^{-9}

ตารางที่ 3.41 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 1.0, h = 0.001

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	2.7310	2.7310	2.7310	5.0651×10^{-8}	1.2005×10^{-10}
1.2	2.7667	2.7667	2.7667	1.9183×10^{-8}	2.4010×10^{-10}
1.3	2.8225	2.8225	2.8225	1.0398×10^{-7}	3.7835×10^{-10}
1.4	2.8965	2.8965	2.8965	3.3569×10^{-7}	5.1659×10^{-10}
1.5	2.9878	2.9878	2.9878	6.9933×10^{-6}	7.1304×10^{-10}
1.6	3.0956	3.0956	3.0956	1.2245×10^{-6}	9.3496×10^{-10}
1.7	3.2199	3.2199	3.2199	1.9476×10^{-6}	1.1932×10^{-9}
1.8	3.3609	3.3609	3.3609	2.9126×10^{-6}	1.4806×10^{-9}
1.9	3.5189	3.5189	3.5189	3.1719×10^{-6}	1.8226×10^{-9}
2.0	3.6945	3.6945	3.6945	5.7874×10^{-6}	2.1937×10^{-9}

ตารางที่ 3.42 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 1.0, h = 0.0001

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	2.7311	2.7311	2.7311	1.0913×10^{-11}	2.5465×10^{-10}
1.2	2.7668	2.7668	2.7668	3.3105×10^{-10}	8.0763×10^{-10}
1.3	2.8226	2.8226	2.8226	8.5492×10^{-10}	1.3569×10^{-9}
1.4	2.8966	2.8966	2.8966	1.3678×10^{-9}	1.9499×10^{-9}
1.5	2.9879	2.9879	2.9879	1.6516×10^{-9}	2.4956×10^{-9}
1.6	3.0957	3.0957	3.0957	1.4624×10^{-9}	2.9104×10^{-9}
1.7	3.2201	3.2201	3.2201	3.9840×10^{-10}	2.9647×10^{-9}
1.8	3.3610	3.3610	3.3610	1.4915×10^{-9}	2.4229×10^{-9}
1.9	3.5190	3.5190	3.5190	3.8821×10^{-9}	1.2042×10^{-9}
2.0	3.6947	3.6947	3.6947	1.0157×10^{-8}	1.0586×10^{-9}

ตารางที่ 3.43 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

x = 1.0, h = 0.0001

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	2.7311	2.7311	2.7311	6.5483×10^{-10}	7.9451×10^{-7}
1.2	2.7668	2.7668	2.7668	8.5128×10^{-10}	6.2707×10^{-6}
1.3	2.8226	2.8226	2.8226	3.4561×10^{-10}	2.1101×10^{-5}

1.4	2.8967	2.8967	2.8967	1.1787×10^{-10}	5.0309×10^{-5}
1.5	2.9879	2.9879	2.9879	3.0018×10^{-10}	9.9576×10^{-5}
1.6	3.0957	3.0957	3.0957	8.4947×10^{-10}	1.7549×10^{-4}
1.7	3.2201	3.2201	3.2201	1.5116×10^{-8}	2.8580×10^{-4}
1.8	3.3610	3.3610	3.3610	2.4465×10^{-8}	3.3967×10^{-4}
1.9	3.5190	3.5190	3.5190	3.7049×10^{-8}	6.4794×10^{-4}
2.0	3.6947	3.6947	3.6947	5.3696×10^{-8}	3.6893×10^{-10}

ตัวอย่างที่ 4 การหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ

$$y^{iv}(x) = x + y + xy' + y'' + xy''' + \frac{2}{x^3}, x \in [1,2]$$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=0, y'(1)=1, y''(1)=1, y'''(1)=-1$

คำตอบของสมการ คือ $y(x) = x\ln x$

สำหรับ Trapezoidal formula (3.23) เราจะได้สมการคือ

$$y_{1_{m+1}} = y_{1_m} + \frac{h}{2}\left(y_{2_m} + y_{2_{m+1}}\right)$$

$$y_{2_{m+1}} = y_{2_m} + \frac{h}{2}\left(y_{3_m} + y_{3_{m+1}}\right)$$

$$y_{3m+1} = y_{3m} + \frac{h}{2}\left(y_{4m} + y_{4m+1}\right)$$

$$y_{4_{m+1}} = \left[y_{3_m}\left(1 + \frac{hx_m}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3 x_{m+1}}{8} + \frac{h^4}{16}\right) + \left(h - \frac{h^2 x_{m+1}}{2} + \frac{h^3}{4}\right) y_{3_m}\right.$$

$$+\frac{h}{2}\left(h-x_m-x_{m+1}\right)y_{2_m}+hy_{1_m}+h\left(\frac{x_m}{2}+\frac{x_{m+1}}{2}+\frac{1}{x_m^3}+\frac{1}{x_{m+1}^3}\right)\Bigg]$$

$$\times\left[\frac{1}{1-\frac{hx_{m+1}}{2}-\frac{h^2}{4}+\frac{h^3x_{m+1}}{8}-\frac{h^4}{16}}\right]$$

สำหรับ Simpson's formula (3.27) เราจะได้สมการคือ

$$y_{1_{m+2}}=y_{1_m}+\frac{h}{3}\left(y_{2_m}+4y_{2_{m+1}}+y_{2_{m+2}}\right)$$

$$y_{2_{m+2}}=y_{2_m}+\frac{h}{3}\left(y_{3_m}+4y_{3_{m+1}}+y_{3_{m+2}}\right)$$

$$y_{3_{m+2}}=y_{3_m}+\frac{h}{3}\left(y_{4_m}+4y_{4_{m+1}}+y_{4_{m+2}}\right)$$

$$y_{4_{m+2}}=\Bigg[\frac{h}{3}\left(x_m+4x_{m+1}+x_{m+2}+\frac{2}{x_m^3}+\frac{8}{x_{m+1}^3}+\frac{2}{x_{m+2}^3}\right)+\frac{2h}{3}y_{1_m}+\frac{4h}{3}y_{1_{m+1}}$$

$$+\frac{h}{3}y_{2_m}\left(\frac{2h}{3}-x_m-x_{m+2}\right)+\frac{4h}{3}y_{2_{m+1}}\left(\frac{h}{3}-x_{m+1}\right)+\frac{2h}{3}y_{3_m}\left(1-\frac{hx_{m+2}}{3}+\frac{h^2}{9}\right)$$

$$+\frac{4h}{3}y_{3_{m+1}}\left(1-\frac{hx_{m+2}}{3}+\frac{h^2}{9}\right)+y_{4_m}\left(1+\frac{hx_m}{3}+\frac{h^2}{9}-\frac{h^3x_{m+2}}{27}+\frac{h^4}{81}\right)$$

$$+\frac{4h}{3}y_{4_{m+1}}\left(x_{m+1}+\frac{h}{3}-\frac{h^2x_{m+2}}{9}+\frac{h^3}{27}\right)\Bigg]\left[\frac{1}{\left(1-\frac{hx_{m+2}}{3}-\frac{h^2}{9}+\frac{h^3x_{m+2}}{27}-\frac{h^4}{81}\right)}\right]$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้ แสดงดังตารางที่ 3.45, 3.46, 3.47, 3.48, 3.49, 3.50, 3.51 และ 3.52

ตารางที่ 3.45 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.0,\ h = 0.1$

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	1.0500×10^{-1}	1.049×10^{-1}	1.050×10^{-1}	6.9298×10^{-5}	7.0383×10^{-10}
1.2	2.1905×10^{-1}	2.1893×10^{-1}	2.1904×10^{-1}	1.1592×10^{-4}	1.2058×10^{-5}
1.3	3.4141×10^{-1}	3.4126×10^{-1}	3.4130×10^{-1}	1.4654×10^{-4}	1.1254×10^{-4}
1.4	3.7146×10^{-1}	3.7129×10^{-1}	3.7144×10^{-1}	1.6415×10^{-4}	1.3889×10^{-5}
1.5	6.0867×10^{-1}	6.0850×10^{-1}	6.0858×10^{-1}	1.6303×10^{-4}	8.8543×10^{-5}
1.6	7.5257×10^{-1}	7.5241×10^{-1}	7.5253×10^{-1}	1.5927×10^{-4}	3.7013×10^{-5}
1.7	9.0276×10^{-1}	9.0262×10^{-1}	9.0272×10^{-1}	1.3101×10^{-4}	3.0256×10^{-5}
1.8	1.0589	1.0588	1.0587	7.8403×10^{-5}	2.3891×10^{-4}
1.9	1.2206	1.2205	1.2202	6.5025×10^{-6}	3.8136×10^{-4}
2.0	1.3877	1.3876	1.3869	1.3412×10^{-4}	7.7794×10^{-4}

ตารางที่ 3.46 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.0,\ h = 0.1$

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	1.0500×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.0499×10^{-1}	1.5880×10^{-4}	7.8644×10^{-6}
1.2	2.1905×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.1903×10^{-1}	2.6413×10^{-4}	1.1435×10^{-5}
1.3	3.4141×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.4139×10^{-1}	3.3974×10^{-4}	1.1909×10^{-5}
1.4	3.7146×10^{-1}	3.7115×10^{-1}	3.7145×10^{-1}	3.0484×10^{-4}	1.0031×10^{-5}

1.5	6.0867×10^{-1}	6.0829×10^{-1}	6.0867×10^{-1}	3.7620×10^{-4}	6.2633×10^{-6}
1.6	7.5257×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	7.5256×10^{-1}	5.6959×10^{-4}	8.9200×10^{-7}
1.7	9.0276×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	9.0275×10^{-1}	7.0094×10^{-4}	5.9180×10^{-6}
1.8	1.0589	1.0580	1.0588	8.8721×10^{-4}	1.4088×10^{-5}
1.9	1.2206	1.2194	1.2205	1.1473×10^{-3}	2.3607×10^{-5}
2.0	1.3877	1.3862	1.3876	1.5032×10^{-3}	3.4517×10^{-5}

ตารางที่ 3.47 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.0,\ h = 0.01$

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	6.8867×10^{-7}	6.4145×10^{-6}
1.2	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.1877×10^{-1}	1.1552×10^{-6}	1.2398×10^{-5}
1.3	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.4106×10^{-1}	1.4647×10^{-6}	1.7779×10^{-5}
1.4	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.7104×10^{-1}	1.6459×10^{-6}	2.2146×10^{-5}
1.5	6.0820×10^{-1}	6.0820×10^{-1}	6.0818×10^{-1}	1.7014×10^{-6}	2.4798×10^{-5}
1.6	7.5201×10^{-1}	7.5201×10^{-1}	7.5198×10^{-1}	1.6119×10^{-6}	2.4677×10^{-5}
1.7	9.0207×10^{-1}	9.0207×10^{-1}	9.0205×10^{-1}	1.3390×10^{-6}	2.0274×10^{-5}
1.8	1.0580	1.0580	1.0579	8.2490×10^{-7}	9.5207×10^{-6}
1.9	1.2195	1.2195	1.2194	9.1568×10^{-9}	1.0361×10^{-5}
2.0	1.3863	1.3863	1.3862	1.2659×10^{-6}	1.0042×10^{-5}

ตารางที่ 3.48 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x = 1.0, h = 0.01

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.3983×10^{-6}	6.2764×10^{-9}
1.2	2.1878×10^{-1}	2.1877×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.3745×10^{-6}	8.9428×10^{-9}
1.3	3.4107×10^{-1}	3.4106×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.1368×10^{-6}	8.9780×10^{-9}
1.4	3.7106×10^{-1}	3.7105×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.8598×10^{-6}	6.9972×10^{-9}
1.5	6.0820×10^{-1}	6.0819×10^{-1}	6.0820×10^{-1}	3.7008×10^{-6}	3.3960×10^{-9}
1.6	7.5201×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	7.5201×10^{-1}	5.8125×10^{-6}	1.5716×10^{-9}
1.7	9.0207×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	9.0207×10^{-1}	7.3522×10^{-6}	7.7534×10^{-9}
1.8	1.0580	1.0579	1.0580	9.4912×10^{-6}	1.5070×10^{-8}
1.9	1.2195	1.2194	1.2195	1.2423×10^{-5}	2.3488×10^{-9}
2.0	1.3863	1.3862	1.3863	1.6373×10^{-5}	3.3018×10^{-9}

ตารางที่ 3.49 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x = 1.0, h = 0.001

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	6.9099×10^{-9}	6.4574×10^{-6}
1.2	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.1877×10^{-1}	1.1603×10^{-8}	1.2567×10^{-5}
1.3	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.4106×10^{-1}	1.4728×10^{-8}	1.8415×10^{-5}

1.4	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.7104×10^{-1}	1.6575×10^{-8}	2.4073×10^{-5}
1.5	6.0822×10^{-1}	6.0822×10^{-1}	6.0819×10^{-1}	1.7165×10^{-8}	2.9598×10^{-5}
1.6	7.5200×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	7.5197×10^{-1}	1.6311×10^{-8}	3.5033×10^{-5}
1.7	9.0206×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	9.0203×10^{-1}	1.3626×10^{-8}	3.0399×10^{-5}
1.8	1.0580	1.0580	1.0579	2.4192×10^{-9}	3.5696×10^{-5}
1.9	1.2195	1.2195	1.2190	2.4192×10^{-10}	5.0896×10^{-5}
2.0	1.3862	1.3862	1.3861	1.2270×10^{-8}	5.5936×10^{-5}

ตารางที่ 3.50 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

$x = 1.0,\ h = 0.001$

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.3792×10^{-8}	2.9785×10^{-11}
1.2	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.3458×10^{-8}	5.9117×10^{-11}
1.3	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.1055×10^{-8}	8.5037×10^{-11}
1.4	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.8309×10^{-8}	1.1505×10^{-10}
1.5	6.0821×10^{-1}	6.0821×10^{-1}	6.0821×10^{-1}	3.6786×10^{-8}	1.4551×10^{-10}
1.6	7.5200×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	5.8001×10^{-8}	1.7371×10^{-10}
1.7	9.0206×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	7.3533×10^{-8}	2.0827×10^{-10}
1.8	1.0580	1.0580	1.0580	9.5087×10^{-8}	2.4738×10^{-10}
1.9	1.2195	1.2195	1.2195	1.2459×10^{-7}	2.8740×10^{-10}
2.0	1.3862	1.3862	1.3862	1.6431×10^{-7}	3.2741×10^{-10}

ตารางที่ 3.51 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x = 1.0, h = 0.0001

x_i	True value y	Trapezoidal	Simpson	Error Trapezoidal	Error Simpson
1.1	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	7.0372×10^{-10}	8.4503×10^{-10}
1.2	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	1.5531×10^{-9}	2.8771×10^{-9}
1.3	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	2.5247×10^{-9}	9.0512×10^{-9}
1.4	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.6143×10^{-9}	2.4848×10^{-8}
1.5	6.0819×10^{-1}	6.0819×10^{-1}	6.0819×10^{-1}	3.8084×10^{-9}	5.8855×10^{-8}
1.6	7.5200×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	6.1145×10^{-9}	1.2352×10^{-7}
1.7	9.0206×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	7.5151×10^{-9}	2.3611×10^{-7}
1.8	1.0580	1.0580	1.0580	9.0331×10^{-9}	3.1996×10^{-7}
1.9	1.2195	1.2195	1.2195	1.0655×10^{-8}	7.0603×10^{-7}
2.0	1.3862	1.3862	1.3862	1.2434×10^{-8}	1.1350×10^{-6}

ตารางที่ 3.52 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

x = 1.0, h = 0.0001

x_i	True value y	RK2	RK3	Error RK2	Error RK3
1.1	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	1.0484×10^{-1}	9.1176×10^{-10}	7.6929×10^{-10}
1.2	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	2.1878×10^{-1}	1.9103×10^{-9}	1.6625×10^{-9}
1.3	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	3.4107×10^{-1}	2.9963×10^{-9}	2.6652×10^{-9}

1.4	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.7106×10^{-1}	3.1641×10^{-9}	3.7634×10^{-9}
1.5	6.0819×10^{-1}	6.0819×10^{-1}	6.0819×10^{-1}	5.4405×10^{-9}	3.9549×10^{-9}
1.6	7.5200×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	7.5200×10^{-1}	6.8503×10^{-9}	6.2445×10^{-9}
1.7	9.0206×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	9.0206×10^{-1}	8.3646×10^{-9}	7.5988×10^{-9}
1.8	1.0580	1.0580	1.0580	1.0033×10^{-8}	9.0331×10^{-9}
1.9	1.2195	1.2195	1.2195	1.1872×10^{-8}	1.0553×10^{-8}
2.0	1.3862	1.3862	1.3862	1.3907×10^{-8}	1.2167×10^{-8}

สรุป

วิธีการหาปริพันธ์แบบใหม่นี้ เป็นวิธีที่ดีสำหรับการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ผลเฉลยที่ได้จากตัวอย่างเป็นที่น่าพอใจ วิธีการหาปริพันธ์แบบใหม่นี้จะทำให้นักคณิตศาสตร์มีทางเลือกที่อิสระในการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น เราสนับสนุน Simpson's formula สำหรับวิธีการหาปริพันธ์แบบใหม่ สังเกตุจากค่าความคลาดเคลื่อน $O(h^5)$ น้อยที่สุด เราอาจจะใช้ The Midpoint formula ในการหาปริพันธ์นี้ อย่างไรก็ตามการหาปริพันธ์สำหรับ 4 และ 5 จุด น่าจะให้ผลเฉลยที่น่าพอใจที่สุดสำหรับสมการในตัวอย่างของงานวิจัยนี้

งานวิจัยชิ้นที่ 4 (จาก [8])

Open Formula of Integration Method

การสร้างสูตร

ในบทความนี้จะแนะนำ 5 สูตร ของประเภทสูตรแบบเปิด สูตรทั้ง 5 สูตรนี้คือ สูตร 1 จุด, สูตร 2 จุด, สูตร 3 จุด, สูตร 4 จุด และ สูตร 5 จุด

ได้ทำการแบ่งช่วงปิด $[a,b]$ ออกเป็นช่วงย่อยเท่าๆ กัน n ช่วงซึ่งมีความยาวช่วงเท่ากับ h โดยที่ $h=\dfrac{b-a}{n}$

สูตร 1 จุด : จากสูตรการหาค่าจุดกึ่งกลาง จะได้สูตร 1 จุด ตามมา

$$y_{m+2} = y_m + 2hf\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) \tag{3.28}$$

ถ้าให้ $s = 2h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^3\right)$

สูตร 2 จุด : ใช้จุด x_{m+1} และ x_{m+2} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m, x_{m+3}\right]$ จะได้สูตร 2 จุด ตามมา

$$y_{m+3} = y_m + 1.5h\left(f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) + f\left(x_{m+2}, y_{m+2}\right)\right) \tag{3.29}$$

ถ้าให้ $s = 3h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^3\right)$

สูตร 3 จุด : ใช้จุด x_{m+1}, x_{m+2} และ x_{m+3} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m, x_{m+4}\right]$ จะได้สูตร 3 จุด ตามมา

$$y_{m+4} = y_m + \frac{4}{3}h\left(2f\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) - f\left(x_{m+2}, y_{m+2}\right) + 2f\left(x_{m+3}, y_{m+3}\right)\right) \tag{3.30}$$

ถ้าให้ $s = 4h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^5\right)$

สูตร 4 จุด : ใช้จุด $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}$ และ x_{m+4} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m, x_{m+5}\right]$ จะได้สูตร 4 จุด ตามมา

$$y_{m+5} = y_m + \frac{5}{24}h(11f(x_{m+1}, y_{m+1}) + f(x_{m+2}, y_{m+2}) + f(x_{m+3}, y_{m+3}) + 11f(x_{m+4}, y_{m+4})) \tag{3.31}$$

ถ้าให้ $s = 5h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^5\right)$

สูตร 5 จุด : ใช้จุด $x_{m+1}, x_{m+2}, x_{m+3}, x_{m+4}$ และ x_{m+5} เป็นจุดของสูตรปริพันธ์เชิงตัวเลขสำหรับช่วงปิด $\left[x_m, x_{m+6}\right]$ จะได้สูตร 5 จุด ตามมา

$$\begin{aligned} y_{m+6} = y_m + \frac{3}{10}h(&11f(x_{m+1}, y_{m+1}) - 14f(x_{m+2}, y_{m+2}) + 26f(x_{m+3}, y_{m+3}) - 14f(x_{m+4}, y_{m+4}) \\ &+ 11f(x_{m+5}, y_{m+5})) \end{aligned} \tag{3.32}$$

ถ้าให้ $s = 6h$ แล้วค่าความคลาดเคลื่อนของสูตรด้านบนจะอยู่ในรูป $O\left(s^7\right)$

จะทำการแทนสูตรข้างต้นด้วย

OP1 สำหรับ สูตร 1 จุด

OP2 สำหรับ สูตร 2 จุด

OP3 สำหรับ สูตร 3 จุด

OP4 สำหรับ สูตร 4 จุด

OP5 สำหรับ สูตร 5 จุด

ตัวอย่าง

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,6]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(5) = 5$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ผลเฉลยที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$
\begin{aligned}
y(5.1) &= 5.0755075525 \\
y(5.2) &= 5.1431008437 \\
y(5.3) &= 5.2040953564 \\
y(5.4) &= 5.2595111955 \\
y(5.5) &= 5.3101549284 \\
y(5.6) &= 5.3566749440 \\
y(5.7) &= 5.3995999887 \\
y(5.8) &= 5.4393666599 \\
y(5.9) &= 5.4763275867 \\
y(6.0) &= 5.5108133286
\end{aligned}
$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดังตารางที่

ตารางที่ 3.53 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 1 (3.28)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755046862	2.8663271×10^{-6}
5.2	5.1430958019	5.041729×10^{-6}
5.3	5.2040886257	6.730697×10^{-6}
5.4	5.2595031282	8.067364×10^{-6}
5.5	5.3101457857	9.142699×10^{-6}
5.6	5.3566649238	1.002015×10^{-5}
5.7	5.3995892437	1.074504×10^{-5}
5.8	5.4393553094	1.135046×10^{-5}
5.9	5.4763275867	1.186103×10^{-5}
6.0	5.5108133285	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.54 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 2 (3.29)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755037420	3.810506×10^{-6}
5.2	5.1430942445	6.500206×10^{-6}
5.3	5.2040852614	1.009503×10^{-5}
5.4	5.2594995841	1.161142×10^{-5}
5.5	5.3101421781	1.275022×10^{-5}
5.6	5.3566599151	1.502891×10^{-5}
5.7	5.3995843610	1.562768×10^{-5}
5.8	5.4393505982	1.606170×10^{-5}
5.9	5.4763216577	1.779009×10^{-5}
6.0	5.5108076708	1.795303×10^{-5}

ตารางที่ 3.55 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 3 (3.30)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075514	1.350494×10^{-9}
5.2	5.1431008412	2.437446×10^{-9}
5.3	5.2040953537	2.713922×10^{-9}
5.4	5.2595111920	3.507012×10^{-9}
5.5	5.3101549249	3.441528×10^{-9}
5.6	5.3566749400	3.023605×10^{-9}
5.7	5.3995999849	3.812602×10^{-9}
5.8	5.4393666555	3.307370×10^{-9}
5.9	5.4763394437	3.045432×10^{-9}
6.0	5.5108256194	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.56 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 4 (3.31)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075500	2.517481×10^{-9}
5.2	5.1431008396	3.118192×10^{-9}
5.3	5.2040953512	5.187758×10^{-9}
5.4	5.2595111896	5.908078×10^{-9}
5.5	5.3101549219	6.417395×10^{-9}
5.6	5.3566749372	6.781192×10^{-9}
5.7	5.3995999817	7.043127×10^{-9}
5.8	5.4393666526	7.246854×10^{-9}
5.9	5.4763394404	7.399649×10^{-9}
6.0	5.5108256163	1.229533×10^{-5}

ตารางที่ 3.57 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 1

OP 5 (3.32)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
5.1	5.0755075525	2.546585×10^{-10}
5.2	5.1431008437	3.874892×10^{-10}
5.3	5.2040953564	6.912160×10^{-10}
5.4	5.2595111957	8.876668×10^{-10}
5.5	5.3101549285	1.069566×10^{-9}
5.6	5.3566749442	1.193257×10^{-9}
5.7	5.3995999890	1.367880×10^{-9}
5.8	5.4393666603	1.520675×10^{-9}
5.9	5.4763394482	1.593435×10^{-9}
6.0	5.5108256244	1.229533×10^{-5}

__ตัวอย่างที่ 2__ หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{xy}{y^2 - x^2}, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1 + x^2}}}$

ได้ค่าที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$y(0.1) = 1.0050124371$$
$$y(0.2) = 1.0201959029$$
$$y(0.3) = 1.0459645461$$
$$y(0.4) = 1.0829215632$$
$$y(0.5) = 1.1317139243$$
$$y(0.6) = 1.1928228789$$
$$y(0.7) = 1.2663324102$$
$$y(0.8) = 1.3517639463$$
$$y(0.9) = 1.4480661205$$
$$y(1.0) = 1.5537739740$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 และ OP5 แสดงดังตารางที่

ตารางที่ 3.58 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 1 (3.28)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050121908	2.462839×10^{-7}
0.2	1.0201949649	9.379783×10^{-7}
0.3	1.0459626233	1.922830×10^{-6}
0.4	1.0829186387	2.924542×10^{-6}
0.5	1.1317103672	3.557063×10^{-6}
0.6	1.1928194532	3.425730×10^{-6}
0.7	1.2663300924	2.317742×10^{-5}
0.8	1.3517635818	3.644145×10^{-7}
0.9	1.4480681110	1.990549×10^{-6}
1.0	1.5537781956	3.221509×10^{-5}

ตารางที่ 3.59 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 2 (3.29)	$h = 0.01$	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050120714	3.657533×10^{-7}
0.2	1.0201945107	1.392214×10^{-6}
0.3	1.0459616609	2.885201×10^{-6}
0.4	1.0829171787	3.384572×10^{-6}
0.5	1.1317086023	5.321956×10^{-6}
0.6	1.1928177371	5.141781×10^{-6}
0.7	1.2663289348	3.475356×10^{-5}
0.8	1.3517634157	5.305956×10^{-7}
0.9	1.4480691036	2.983132×10^{-6}
1.0	1.5537803094	6.335387×10^{-5}

ตารางที่ 3.60 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 3 (3.30)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124373	1.709850×10^{-10}
0.2	1.0201959036	7.657945×10^{-10}
0.3	1.0459645480	1.846274×10^{-9}
0.4	1.0829215666	3.421519×10^{-9}
0.5	1.1317139294	5.078618×10^{-9}
0.6	1.1928228850	6.037226×10^{-9}
0.7	1.2663324157	5.509719×10^{-9}
0.8	1.3517639498	3.552486×10^{-9}
0.9	1.4480661216	1.109584×10^{-9}
1.0	1.5537739733	1.109584×10^{-9}

ตารางที่ 3.61 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 4 (3.31)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124374	3.019522×10^{-10}
0.2	1.0201959042	1.296939×10^{-9}
0.3	1.0459645493	3.143214×10^{-9}
0.4	1.0829215690	5.8043952×10^{-9}
0.5	1.1317139329	8.631105×10^{-9}
0.6	1.1928228892	1.025546×10^{-9}
0.7	1.2663324195	9.369614×10^{-9}
0.8	1.3517639523	6.040864×10^{-9}
0.9	1.4480661223	1.897206×10^{-9}
1.0	1.5537739728	1.897206×10^{-9}

ตารางที่ 3.62 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 2

OP 5 (3.32)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	1.0050124371	1.818989×10^{-12}
0.2	1.0201959029	1.818989×10^{-12}
0.3	1.0459645461	0.0
0.4	1.0829215632	5.456968×10^{-12}
0.5	1.1317139243	9.094947×10^{-12}
0.6	1.1928228789	1.637090×10^{-11}
0.7	1.2663324101	2.182787×10^{-11}
0.8	1.3517639462	1.637090×10^{-11}
0.9	1.4480661204	1.637090×10^{-11}
1.0	1.5537739740	1.637090×10^{-11}

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = y^3, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0.1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{100-2x}}$

ได้ค่าที่แท้จริง 10 ค่าที่แต่ละจุด คือ

$$
\begin{aligned}
y(0.1) &= 0.1001001503 \\
y(0.2) &= 0.002006020 \\
y(0.3) &= 0.003013568 \\
y(0.4) &= 0.004024161 \\
y(0.5) &= 0.100537815 \\
y(0.6) &= 0.1006054546 \\
y(0.7) &= 0.1007074368 \\
y(0.8) &= 0.1008097298 \\
y(0.9) &= 0.1009123352 \\
y(1.0) &= 0.1010152545
\end{aligned}
$$

ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่ได้จากการแทนค่าในสูตร OP1, OP2, OP3, OP4 **และ** OP5 **แสดง**ดังตาราง

ตารางที่ 3.63 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 1 (3.28)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	2.501110×10^{-12}
0.2	0.1002006020	5.229595×10^{-12}
0.3	0.1003013568	7.730705×10^{-12}
0.4	0.1004024161	1.023182×10^{-11}
0.5	0.1005037815	1.273293×10^{-11}
0.6	0.1006054546	1.546141×10^{-11}
0.7	0.1007074368	1.818989×10^{-11}
0.8	0.1008097298	2.103206×10^{-11}
0.9	0.1009123351	2.387424×10^{-11}
1.0	0.1010152544	2.637535×10^{-11}

ตารางที่ 3.64 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 2 (3.29)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	3.410605×10^{-12}
0.2	0.1002006020	6.707523×10^{-12}
0.3	0.1003013568	1.136868×10^{-11}
0.4	0.1004024161	1.500666×10^{-11}
0.5	0.1005037815	1.841727×10^{-11}
0.6	0.1006054546	2.330580×10^{-11}
0.7	0.1007074368	2.683009×10^{-11}
0.8	0.1008097298	3.046807×10^{-11}
0.9	0.1009123351	3.558398×10^{-11}
1.0	0.1010152544	3.910827×10^{-11}

ตารางที่ 3.65 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 3 (3.30)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	0.0
0.2	0.1002006020	1.136868×10^{-13}
0.3	0.1003013568	0.0
0.4	0.1004024161	0.0
0.5	0.1005037815	0.0
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	0.0
0.8	0.1008097298	0.0
0.9	0.1009123352	2.273737×10^{-13}
1.0	0.1010152545	0.0

ตารางที่ 3.66 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 4 (3.31)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	1.136868×10^{-13}
0.2	0.1002006020	0.0
0.3	0.1003013568	1.136868×10^{-13}
0.4	0.1004024161	1.136868×10^{-13}
0.5	0.1005037815	1.136868×10^{-13}
0.6	0.1006054546	1.136868×10^{-13}
0.7	0.1007074368	1.136868×10^{-13}
0.8	0.1008097298	0.0
0.9	0.1009123352	$1.1236868 \times 10^{-13}$
1.0	0.1010152545	1.136868×10^{-13}

ตารางที่ 3.67 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 3

OP 5 (3.32)	h = 0.01	
x_i	Calculated y	Error
0.1	0.1001001503	0.0
0.2	0.1002006020	0.0
0.3	5.2040953564	2.273737 x10^{-13}
0.4	0.1004024161	1.136868 x10^{-13}
0.5	0.1005037815	1.136868 x10^{-13}
0.6	0.1006054546	1.136868 x10^{-13}
0.7	0.1007074368	1.136868 x10^{-13}
0.8	0.1008097298	1.136868 x10^{-13}
0.9	0.1009123352	1.136868 x10^{-13}
1.0	0.1010152545	1.136868 x10^{-13}

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{2y}{x}, x \in [2,3]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2)=1$ ที่จุด $x=3$ โดยที่ $h=0.01$

คำตอบของสมการคือ $y(x) = \frac{4+\cos 2 - \cos x}{x^2}$

และ $y(3) = 0.5082050733$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่

ตารางที่ 3.68 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 4

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	0.5067707775	1.434296 x10^{-3}
RK2 (2.11)	0.5082072867	2.213332x10^{-6}
RK3 (2.12)	0.5082050692	3.243702 x10^{-9}
RK4 (2.13)	0.5082050734	3.547474 x10^{-11}
OP1(3.28)	0.5082128146	7.741231 x10^{-6}
OP2 (3.29)	0.5082160491	1.097568 x10^{-5}
OP3 (3.30)	0.5082050756	2.187335 x10^{-9}

OP4 (3.31)	0.5082050771	3.698915×10^{-9}
OP5 (2.32)	0.5082050733	7.003109×10^{-11}

ตัวอย่างที่ 5 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ ที่จุด $x = 1$ โดยที่ $h = 0.01$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

และ $y(1) = 2.4142135625$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่

ตารางที่ 3.69 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 5

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	2.2781717556	1.360418×10^{-1}
RK2 (2.11)	2.3160806852	9.813288×10^{-2}
RK3 (2.12)	2.4142056843	7.878192×10^{-6}
RK4 (2.13)	2.4142135222	3.035246×10^{-8}
OP1(3.21)	2.4099523426	3.261220×10^{-3}
OP2 (3.22)	2.4078786870	6.334876×10^{-3}
OP3 (3.23)	2.4141286225	8.493999×10^{-5}
OP4 (3.24)	2.4140741639	1.393987×10^{-4}
OP5 (2.25)	2.4142071062	6.456310×10^{-6}

ตัวอย่างที่ 6 หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}, x \in [1,100]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$ ที่จุด $x = 10$ และ $x = 100$ โดยที่ $h = 0.01$

ซึ่งคำตอบของสมการคือ $y(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

และ
$$y(10) = 3.4785054262$$
$$y(100) = 10.1$$

ผลลัพธ์ที่ได้จากการแทนค่าในสูตรต่างๆ แสดงดังตารางที่

ตารางที่ 3.70 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	3.4777897010	7.157252×10^{-4}
RK2 (2.11)	3.4785012135	3.212602×10^{-6}
RK3 (2.12)	3.4785054261	3.001777×10^{-11}
RK4 (2.13)	3.4785054261	3.001777×10^{-11}
OP1(3.21)	3.4785138507	8.424493×10^{-6}
OP2 (3.22)	3.4785180615	1.263532×10^{-5}
OP3 (3.23)	3.4785054305	3.361937×10^{-9}
OP4 (3.24)	3.4785054336	7.399649×10^{-9}
OP5 (2.25)	3.4785054262	0.0

ตารางที่ 3.71 แสดงผลเฉลยรูปแบบเชิงตัวเลขของตัวอย่างที่ 6

Formula	Calculated y	Error
RK1 (2.2)	10.099748331	2.516690×10^{-4}
RK2 (2.11)	10.099995831	3.168949×10^{-6}
RK3 (2.12)	10.100000000	7.275958×10^{-11}
RK4 (2.13)	10.100000000	7.275958×10^{-11}
OP1(3.21)	10.100008336	8.336094×10^{-6}
OP2 (3.22)	10.100012503	1.250285×10^{-5}
OP3 (3.23)	10.100000004	3.220554×10^{-9}
OP4 (3.24)	10.100000007	7.392373×10^{-9}
OP5 (2.25)	10.100000000	7.275958×10^{-11}

สรุป

สูตรใหม่ทั้ง 5 สูตรนี้ (OP1, OP2, OP3, OP4, OP5) เป็นสูตรเชิงตัวเลขที่ดีสำหรับการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้น ซึ่งดูจากผลการเปรียบเทียบค่าความคลาดเคลื่อนระหว่าง OP1 กับ OP2 และ OP3 กับ OP4 ส่วนค่าที่ได้จาก OP5 เป็นที่น่าพอใจมากอยู่แล้ว ทั้ง 5 สูตรนี้จะเป็นการให้อิสระในการค้นหาทางของการหาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นอีกทางหนึ่ง อย่างไรก็ตาม ต้องเข้าใจไว้ด้วยว่า คำตอบเชิงตัวเลขด้านบนที่ได้ใช้ได้สำหรับตัวอย่างสมการข้างต้นนี้เท่านั้น ขอแนะนำอย่างยิ่งว่าให้ใช้สูตร OP1, OP3 และ OP5

บทที่ 4
ผลการศึกษาวิจัย

จากการศึกษางานวิจัยของ รศ.ดร. ไมตรี โพธิ์สุข และคณะ (จาก[9]) เรื่อง Single step formulas and multi-step formulas of the integration method for solving the initial value problem of ordinary differential equation ได้พบว่า Adam-Bashforth method และ Adam-Moulton method เป็น The multi-step method สำหรับการหาคำตอบเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้เป็น 2 วิธีที่ใช้ The Newton backward difference method ในการประมาณค่า $f(x,y)$ ในสมการปริพันธ์ ซึ่งสมมูลกับสมการเชิงอนุพันธ์ที่ให้มา

โดยทั่วไปแล้วสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นคือ

$$y'(x) = f(x,y), x \in [a,b] \tag{4.1}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$y(a) = c \tag{4.2}$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$y(x) = c + \int_a^x f(t,y)dt \tag{4.3}$$

แทนค่าสมการ (4.1) – (4.2) เพื่อแก้สมการ (4.3) ดังนั้นจะได้สูตร

$$y_{m+1} = y_m + \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x,y)dx \tag{4.4}$$

Adam-Bashforth method และ Adam-Moulton method ทราบว่า predictor-corrector method เป็นการประมาณค่าของ $f(x,y)$ ในสมการที่ (4.4) โดยใช้ The Newton backward difference method ในการเข้าใกล้ผลเฉลยจะใช้ The Newton-Cotes method ในการประมาณค่าสมการปริพันธ์ในสมการที่ (4.4) วิธีเข้าใกล้ผลเฉลยเหล่านี้จะกลับสู่ The multi-step method อย่างไรก็ตาม ด้วยการใช้ อนุกรมเทย์เลอร์ในการประมาณค่า The multi-step method ของเราจะกลับสู่ The single step method

การสร้างสูตร

The one point Newton-Cotes สูตรมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \tag{4.5}$$

ดังนั้น จะได้

$$y_{m+1} = y_m + hf\left(x_m + \frac{h}{2}, y(x_m + \frac{h}{2})\right) \tag{4.6}$$

ซึ่งเป็น The single step formula ถ้าเราใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ในการประมาณค่าของ $y(x_m + \frac{h}{2})$ หรือ

$$y_{m+2} = y_m + 2hf\left(x_{m+1}, y_{m+1}\right) \tag{4.7}$$

ซึ่งแต่ละอันเป็น Two steps explicit formula

The two points Newton-Cotes, closed สูตรมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \tag{4.8}$$

ดังนั้น จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y(x_{m+1}))] \tag{4.9}$$

ซึ่งเป็น The single step formula ถ้าเราใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ในการประมาณค่าของ $y(x_{m+1})$ หรือ

$$y_{m+2} = y_m + \frac{h}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1})] \tag{4.10}$$

ซึ่งแต่ละอันเป็น Two steps implicit formula

The two points Newton-Cotes, open สูตรมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(\frac{2a+b}{3}) + f(\frac{a+2b}{3})\right] \tag{4.11}$$

ดังนั้น จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[f(x_m + \frac{h}{3}, y(x_m + \frac{h}{3})) + f(x_m + \frac{2h}{3}, y(x_m + \frac{2h}{3}))] \tag{4.12}$$

ซึ่งเป็น The single-step formula ถ้าเราใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ในการประมาณค่าของ $y(x_m + \frac{h}{3})$ และ $y(x_m + \frac{2h}{3})$ หรือ

$$y_{m+3} = y_m + \frac{3h}{2}[f(x_{m+1}, y_{m+1}) + f(x_{m+2}, y_{m+2})] \tag{4.13}$$

ซึ่งแต่ละอันเป็น Three points explicit formula

The three points Newton-Cotes, closed สูตรมีรูปแบบดังนี้

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right] \tag{4.14}$$

ดังนั้น จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}[f(x_m, y(x_m)) + 4f(x_m + \frac{h}{2}, y(x_m + \frac{h}{2})) + f(x_{m+1}, y(x_{m+1}))] \tag{4.15}$$

ซึ่งเป็น The single step method ถ้าเราใช้อนุกรมเทย์เลอร์ ในการประมาณค่าของ $y(x_m + \frac{h}{2})$ และ $y(x_{m+1})$ หรือ

$$y_{m+2} = y_m + \frac{h}{3}[f(x_m, y_m) + 4f(x_{m+1}, y_{m+1}) + f(x_{m+2}, y_{m+2})] \tag{4.16}$$

ซึ่งแต่ละอันเป็น Three points implicit formula

ตัวอย่าง

หาคำตอบเชิงตัวเลขของสมการ $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1]$

ด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

ซึ่งมีคำตอบของสมการ คือ

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}} \tag{4.17}$$

สำหรับ Single step method จะใช้ค่า

$$y_m + shf(x_m, y_m) + \frac{s^2h^2}{2}(f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m)f_y(x_m, y_m))$$

ในการประมาณค่าของ $y(x_m + sh)$

สำหรับ Implicit multi-step method จะหยุดหาผลเฉลยเชิงตัวเลข ก็ต่อเมื่อ $\varepsilon \leq 0.0000001$

ใช้สมการ (4.6) ทำนายค่าในสมการ (4.10)

ใช้สมการ (4.7) ทำนายค่าในสมการ (4.16)

ตารางที่ 4.1 ตารางผลเฉลยสำหรับ Single step method

Formula	x = 0.1 , h =0.1 , True value y = 1.0050251887	
	Calculated y	Error
(4.6)	1.0050125117	1.2676962797 x10^{-5}
(4.9)	1.0050501875	2.4998818844 x10^{-5}
(4.12)	1.0050166921	8.4965522547 x10^{-6}
(4.15)	1.0050250703	1.1836891645 x10^{-7}

ตารางที่ 4.2 ตารางผลเฉลยสำหรับ Single step method

Formula	x = 0.1 , h =0.0001 , True value y = 1.0050251887	
	Calculated y	Error
(4.6)	1.0050251887	$1.8189894035 \times 10^{-12}$
(4.9)	1.0050251887	$3.0922819860 \times 10^{-11}$
(4.12)	1.0050251887	0.0
(4.15)	1.0050251887	$5.4569682106 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 4.3 ตารางผลเฉลยสำหรับ Single step method

Formula	x = 1.0 , h =0.0001 , True value y = 2.4142135769	
	Calculated y	Error
(4.6)	2.4142134513	$1.2563396012 \times 10^{-7}$
(4.9)	2.4142137683	$1.9134677132 \times 10^{-7}$
(4.12)	2.4142134866	$9.0301900950 \times 10^{-8}$
(4.15)	2.4142135568	$2.0128936740 \times 10^{-8}$

ตารางที่ 4.4 ตารางผลเฉลยสำหรับ Implicit multi-step method

Formula	h = 0.1			
	x_i	True value y (4.17)	Calculated y	Error
(4.7)	0.2	1.0204123099	1.0202022689	$2.1004092196 \times 10^{-4}$
(4.10)	0.1	1.0050251887	1.0050505672	$2.5378553717 \times 10^{-5}$
(4.13)	0.3	1.0471699651	1.0464075761	$7.6238899965 \times 10^{-4}$
(4.16)	0.2	1.0204123099	1.0204139611	$1.6512422008 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 4.5 ตารางผลเฉลยสำหรับ Implicit multi-step method

Formula	h = 0.0001			
	x_i	True value y (4.17)	Calculated y	Error
(4.7)	0.2	1.0204123099	1.0204123096	$2.0736479200 \times 10^{-10}$
(4.10)	0.1	1.0050251887	1.0050251887	$3.4560798667 \times 10^{-11}$
(4.13)	0.3	1.0471699651	1.0471699642	$8.8766682893 \times 10^{-10}$
(4.16)	0.2	1.0204123099	1.0204123079	$1.8189894035 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 4.6 **ตารางผลเฉลยสำหรับ** Implicit multi-step method

Formula	x = 1.0 , h =0.0001 , True value y = 2.4142135769	
	Calculated y	Error
(4.7)	2.4142131335	4.4348780648 $\times 10^{-7}$
(4.10)	2.4142137465	1.6951889847 $\times 10^{-7}$
(4.13)	2.4142129169	6.6006759800 $\times 10^{-7}$
(4.16)	2.4142135322	1.0892108548 $\times 10^{-8}$

บทที่ 5
สรุปผลการศึกษาวิจัยและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผลการศึกษาวิจัย

ผลจากการทดลองจากตัวอย่างต่างๆ สรุปได้ว่าวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบปัญหาค่าเริ่มต้นโดยการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการปริพันธ์ที่สมมูลกันได้ผลเป็นที่น่าพอใจ

รูปแบบเชิงตัวเลขที่ได้มีทั้ง Single step, Multi-step, Explicit และ Implicit ซึ่งให้ผลเป็นที่น่าพอใจทั้งสี่แบบจากการเปรียบเทียบตารางผลเฉลย อย่างไรก็ตามผู้ทำการวิจัยเสนอให้ใช้แบบ Single step เพราะสะดวกและง่ายต่อการใช้งาน

5.2 ข้อเสนอแนะ

สำหรับผู้ที่สนใจในงานด้านนี้สามารถหารูปแบบต่างๆ ในการหาผลเฉลยเพิ่มได้อีก เพื่อที่จะเลือกเอารูปแบบที่ได้พัฒนาขึ้นไปใช้งาน อีกทั้งใช้รูปแบบต่างๆ ที่ได้ นำไปประยุกต์ใช้ในงานจริง

บรรณานุกรม

[1] ไมตรี โพธิ์สุข. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, 2529

[2] Atkinson, Kendall E. **Elementary Numerical Analysis**, USA :John Wiley & Sons 1985

[3] David Kincaid, Ward Cheney. **Numerical Analysis**, California : Brooks/Cole Publishing Company, Inc 1990

[4] James M. Ortega. **Numerical Analysis A Second Course**, University of Maryland, Inc 1972

[5] Maitree Podisuk , Wannaporn Sanprasert. **Numerical Integration Formulas for Solving the Initial Value Problem of Ordinary Differential Equations**, WSEAS Transactions on Mathematics, Issue 1, Volume4, January 2005

[6] Maitree Podisuk , Wannaporn Sanprasert. **Integration Method For SolvingThe Initial Value Problem Of Ordinary Differential Equations**, KMITL SCIENCE JOURNAL, Volume 5.No.1,February 2005

[7] Maitree Podisuk , Netchanok Kongchouy, Wannaporn Sanprasert. **New Numerical Integration Formulas For Solving The Initial Value Problem Of Ordinary Differential Equations Of Higher Order**, KMITL SCIENCE JOURNAL, Volume 5.No.1,February 2005

[8] Maitree Podisuk , Wannaporn Sanprasert. **Open Formula Of Integration Method**, KMITL SCIENCE JOURNAL, Volume 5.No.1,February 2005

[9] Maitree Podisuk , Ungsana Chundang, Wannaporn Sanprasert, **Single Step Formulas And Multi-Step Formulas Of The Integration Method For Solving The Initial Value Problem Of Ordinary Differential Equations Of Higher Order**, Journal of Applied Mathematics and Computation (Article in press).