พหุนามเชิงตั้งฉาก

ORTHOGONAL POLYNOMIALS

ศิริภา ศิริวรภา
สุรสิทธิ์ วัตรวิมล

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ปีการศึกษา 2548

ORTHOGONAL POLYNOMIALS

SIRIPHA SIRIWORAPHA

SURASIT WATARAVIMON

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT

OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

FACULTY OF SCIENCE

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LARDKRABANG

ACADEMIC YEAR 2005

หัวข้อปัญหาพิเศษ	พหุนามเชิงตั้งฉาก
	ORTHOGONAL POLYNOMIAL
ชื่อนักศึกษา	นางสาวศิริภา ศิริวรภา 45050057
	นายสุรสิทธิ์ วัตรวิมล 45050063
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2548

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.ภัคคินี ชิตสกุล	
กรรมการ	อ.พุทธพร วานิชกร	พุทธพร วานิชกร
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	พหุนามเชิงตั้งฉาก
ชื่อนักศึกษา	นางสาวศิริภา ศิริวรภา 45050057
	นายสุรสิทธิ์ วัตรวิมล 45050063
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2548
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษฉบับนี้ เป็นการศึกษาพหุนามเชิงตั้งฉากบางชนิด มีการนำเสนอการประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากในการคำนวณเชิงตัวเลขสามแบบ การประยุกต์ใช้สามแบบนี้ ได้แก่ การหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และ การประมาณค่าเชิงตัวเลขของฟังก์ชัน ทั้งมีการยกตัวอย่างประกอบ ปัญหาพิเศษฉบับนี้ จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาและนักวิจัยในทางการคำนวณเชิงตัวคณิตศาสตร์

Special Project Title	ORTHOGONAL POLYNOMIALS
Student	Ms. Siripha Siriworapha 45050057
	Mr. Surasit Wataravimon 45050063
Degree	Bachelor of Science
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science
Program	Applied Mathematics
Academic Year	2005
Special Project Advisor	Assoc. Prof. Dr. Maitree Podisuk
	Asst. Prof. Dr. Sarun Intakosum

ABTRACT

The purpose of this special problem is to study some types of orthogonal polynomials. There are three selected types of applications of orthogonal polynomials in numerical computation. These three types of applications are; numerical integration, numerical solution of the ordinary differential equation, and numerical approximation of a function. Some examples are illustrated. This special problem is useful for students and researchers in mathematical computation.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องพหุนามเชิงตั้งฉากสำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดีทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และ ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษที่กรุณาคอยให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆรวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ทางคณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้ความสะดวกในการใช้ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์และอื่น ๆ

คณะผู้จัดทำ
มีนาคม 2548

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

บทที่1
บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

ในปัจจุบันมีผู้ทำการศึกษาเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากเป็นจำนวนมาก ดังนั้นเพื่อการศึกษาและค้นคว้าที่สะดวกรวดเร็ว จึงได้ค้นคว้าและเก็บรวบรวมพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆให้มากที่สุด เพื่อให้มีความสะดวกต่อการศึกษาสำหรับผู้สนใจยิ่งขึ้น

พหุนามเชิงตั้งฉากเป็นวงศ์ของพหุนาม $\{p_k(x)\}$ นิยามบนพิสัย[a ,b] โดยความสัมพันธ์

$$\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$$

ซึ่ง $w(x)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงและ $q_m(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m ใดๆที่ $0 \le m \le k-1$

1.2 วัตถุประสงค์ของการทำปัญหาพิเศษ

ในเอกสารฉบับนี้ ได้ค้นคว้าและเก็บรวบรวมพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆให้มากที่สุด โดยมีวัตถุประสงค์ดังนี้

1) เพื่อศึกษารูปแบบต่างๆของพหุนามเชิงตั้งฉาก
2) เพื่อศึกษาเกี่ยวกับการนำพหุนามเชิงตั้งฉากไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลขสามแบบ ซึ่งได้แก่ การประมาณค่าปริพันธ์ การประมาณผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และการประมาณค่าของฟังก์ชันพร้อมทั้งยกตัวอย่างแสดงให้เห็นจริง
3) เพื่อผู้ที่มีความสนใจและต้องการศึกษาหาความรู้เกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากจะมีความสะดวกรวดเร็วต่อการค้นคว้า เนื่องจากได้ทำการรวบรวม งานวิจัยเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆ ไว้ด้วยกัน

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

รวบรวมพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆ โดยรวมทั้งการนำมาประยุกต์ใช้พหุนามเชิงตั้งฉากเหล่านั้น

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ได้มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆแล้วนำไปประยุกต์ใช้ในเรื่องต่างได้ดี และมีประโยชน์กับผู้ที่ต้องการศึกษาเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉาก

1.5 ขั้นตอนในการดำเนินงาน

ลำดับขั้นตอนการดำเนินงานมีดังนี้

1) ค้นคว้าเกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆ ทางอินเทอร์เน็ต วิทยานิพนธ์และงานวิจัยต่างๆ
2) รวบรวมและเรียบเรียงเรื่องพหุนามเชิงตั้งฉากที่ได้มาทำการศึกษาและทำความเข้าใจพหุนามเชิงตั้งฉากในรูปแบบต่างๆที่ได้ค้นคว้ามา

บทที่2

บทนิยามและทฤษฎีบทของพหุนามเชิงตั้งฉาก

ในบทนี้เราจะแสดงบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับพหุนามเชิงตั้งฉาก

นิยามที่2.1 ให้ $p_k(x)$ เป็นพหุนามกำลัง k เรียก $p_k(x)$ ว่าเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด [a,b] ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้า

$$\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$$

เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใดๆที่ $0 \le m \le k-1$

นิยามที่2.2 ให้ $p_0(x), p_1(x), p_2(x), ..., p_k(x), ...$ เป็นอันดับของพหุนาม จะเรียกว่าเป็นอันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ถ้าทุกๆพหุนาม $p_i(x)$ เมื่อ $i = 0,1,2,...,k,...$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ($w(x)$ มีค่าเป็นบวกหรือมากกว่าศูนย์ตลอดช่วงเปิด (a,b))

ทฤษฎีบทที่2.3 พหุนาม $p_k(x)$ ที่ทำให้ $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0$ สำหรับทุกพหุนาม $q_m(x)$ ที่ $0 \le m \le k-1$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น (ยกเว้นพหุนามเป็นผลคูณของ $p_k(x)$ กับค่าคงที่ใดๆ)

พิสูจน์ เมื่อ $q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$

และ $$\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx = 0, m \le n-1 \qquad (*)$$

ถ้า $(*)$ เป็นจริงสำหรับ $q_m(x)$ แล้ว $(*)$ จะเป็นจริง

เมื่อ $q_m(x)$ เป็น $1, x, x^2, ..., x^m$ ด้วย

นั่นคือเป็นจริงสำหรับ $q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{m-1}x^{m-1} + x^m$ ใดๆ

ดังนั้นสิ่งที่ต้องการคือ

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)1dx = 0$$

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)xdx = 0$$

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)x^2dx = 0$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$\int_a^b w(x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k)x^{k-1}dx = 0$$

ถ้าให้ $c_i = \int_a^b w(x)x^i dx$ เมื่อ $i = 0,1,2,\ldots,2k-1$

$$\begin{aligned} a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_{k-1}c_{k-1} &= -c_k \\ a_0c_1 + a_1c_2 + a_2c_3 + \ldots + a_{k-1}c_k &= -c_{k+1} \\ a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_4 + \ldots + a_{k-1}c_{k+1} &= -c_{k+2} \\ &\vdots \\ a_0c_{k-1} + a_1c_k + a_2c_{k+1} + \ldots + a_{k-1}c_{2k-2} &= -c_{2k-1} \end{aligned}$$

$\therefore$ มีสมการอยู่ k สมการและมีตัวแปรที่ไม่รู้ค่า k ตัว ตัวแปรที่ไม่รู้ค่า k คือ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$

ให้ C เป็น $k \times k$ เมตริกซ์โดยที่

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-1} \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_k \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k-1} & c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{2k-2} \end{pmatrix}$$

จะต้องพิสูจน์ว่า $|C| \neq 0$

เมื่อ $|C|$ เป็นค่ากำหนด(ดีเทอร์มิแนนต์)ของเมตริกซ์ C

ถ้า $|C| \neq 0$ แล้วค่า $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ มีจริงและมีเพียงจุดเดียว นั่นคือ

$p_k(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

สมมติ $|C| = 0$ จะสามารถหา $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}$ ที่ทำให้

$$b_0c_0 + b_1c_1 + b_2c_2 + \ldots + b_{k-1}c_{k-1} = 0 \qquad \ldots(1)$$
$$b_0c_1 + b_1c_2 + b_2c_3 + \ldots + b_{k-1}c_k = 0 \qquad \ldots(2)$$
$$b_0c_2 + b_1c_3 + b_2c_4 + \ldots + b_{k-1}c_{k+1} = 0 \qquad \ldots(3)$$
$$\vdots$$
$$b_0c_{k-1} + b_1c_k + b_2c_{k+1} + \ldots + b_{k-1}c_{2k-2} = 0 \qquad \ldots(\mathrm{k})$$

นั่นคือ

$$(1) \times b_0, \int_a^b w(x)(b_0^2 + b_0b_1x + b_0b_2x^2 + \ldots + b_0b_{k-1}x^{k-1})1dx = 0 \qquad \ldots(k+1)$$
$$(2) \times b_1, \int_a^b w(x)(b_0b_1 + b_1^2x + b_1b_2x^2 + \ldots + b_1b_{k-1}x^{k-1})xdx = 0 \qquad \ldots(k+2)$$
$$(3) \times b_2, \int_a^b w(x)(b_0b_2 + b_1b_2x + b_2^2x^2 + \ldots + b_2b_{k-1}x^{k-1})x^2dx = 0 \qquad \ldots(k+3)$$
$$\vdots$$
$$(\mathrm{k}) \times b_{k-1}, \int_a^b w(x)(b_0b_{k-1} + b_1b_{k-1}x + b_2b_{k-1}x^2 + \ldots + b_{k-1}^2x^{k-1}).x^{k-1}dx = 0 \quad \ldots(2k)$$

เมื่อนำสมการที่ (k + 1)+ (k + 2)+(k + 3)+ ...+ (2k) จะได้

$$\int_a^b w(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1})^2 dx = 0$$

แต่ $w(x)[\ b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}\ ]^2 > 0$

เพราะฉะนั้น $\int_a^b w(x)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{k-1}x^{k-1})^2 dx > 0$

$\therefore$ เกิดการขัดแย้ง ดังนั้นจะได้ว่า $|C| \neq 0$ นั่นคือ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ มีจริงเพียงชุดเดียวซึ่งทำให้ $p_k(x)$ มีจริงและมีเพียงหนึ่งเดียว

ทฤษฎีบทที่2.4 ถ้า $p_k(x)$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากในช่วงปิด $[a,b]$ ตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ แล้ว รากทั้งหมดของ $p_k(x)$ จะเป็นเลขจำนวนจริงและอยู่ในช่วงปิด $[a,b]$

พิสูจน์ (จาก หนังสือการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน [1])

บทที่ 3
พหุนามเชิงตั้งฉากรูปแบบต่างๆ

3.1พหุนามเลอจองด์

พหุนามเลอจองด์บางครั้งเราจะเรียกว่าฟังก์ชันเลอจองด์ ชนิดแรกสัมประสิทธิ์เลอจองด์ หรือ โซเนล คือ ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ของเลอจองด์ โดยจะแสดงพหุนามเลอจองด์ $P_n(z)$ สำหรับ $x \in [-1,1]$ และ n = 1,2,3,4,5

พหุนามนี้จะสามารถนิยามได้โดยปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint (1 - 2tz + t^2)^{-1/2} t^{-n-1}\, dt, \tag{3.1.1}$$

พหุนามเลอจองด์รูปแบบแรก คือ

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5(x) &= \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
P_6(x) &= \tfrac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).
\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

กำลังในเทอมพหุนามเลอจองด์ชนิดแรก คือ

$$\begin{aligned}
1 &= P_0(x) \\
x &= P_1(x) \\
x^2 &= \tfrac{1}{3}[P_0(x) + 2P_2(x)] \\
x^3 &= \tfrac{1}{5}[3P_1(x) + 2P_3(x)] \\
x^4 &= \tfrac{1}{35}[7P_0(x) + 20P_2(x) + 8P_4(x)] \\
x^5 &= \tfrac{1}{63}[27P_1(x) + 28P_3(x) + 8P_5(x)] \\
x^6 &= \tfrac{1}{231}[33P_0(x) + 110P_2(x) + 72P_4(x) + 16P_6(x)]
\end{aligned}$$

สำหรับรูปแบบเฉพาะนี้ใช้ได้โดย

$$x^n = \sum_{l=n,n-2,n-4,\ldots} \frac{(2l+1)\,n!}{2^{(n-l)/2}\left(\frac{1}{2}(n-l)\right)!\,(l+n+1)!!} P_l(x) \qquad (3.1.3)$$

พหุนามเลอจองด์สามารถที่จะหาได้โดยการใช้กระบวนการกราม-ชมิดต์ เพื่อทำเป็นฐานเชิงตั้งฉากปกติ ในช่วงเปิด (-1,1) โดยมี 1 เป็น ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \left[x - \frac{\int_{-1}^{1} x\,dx}{\int_{-1}^{1} dx}\right]\cdot 1$$

$$= x$$

$$P_2(x) = x\left[x - \frac{\int_{-1}^{1} x^3\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}\right] - \left[\frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} dx}\right]\cdot 1$$

$$= x^2 - \frac{1}{3}$$

$$P_3(x) = \left[x - \frac{\int_{-1}^{1} x\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx}{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx}\right]\left(x^2-\frac{1}{3}\right) - \left[\frac{\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)^2 dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}\right]x$$

$$= x^3 - \frac{3}{5}x.$$

$$\overline{P}_0(x) = 1$$

$$\overline{P}_1(x) = 2x - 1$$

$$\overline{P}_2(x) = 6x^2 - 6x + 1$$

$$\overline{P}_3(x) = 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1.$$

พหุนามเลอจองด์ตั้งฉากกันบนช่วง(-1,1) โดยมี 1 เป็นฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักและทำให้

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\,\delta_{mn}, \qquad (3.1.4)$$

เมื่อ $\delta_{m,n}$ เป็น ฟังก์ชันเดลตาโครเนกเคร์

พหุนามเลอจองด์เป็นกรณีพิเศษของฟังก์ชันอัลตร้าสฟิริคัล เมื่อ $\alpha = 1/2$ เป็นกรณีพิเศษของพหุนามจาโคเบียน $P_n^{(\alpha,\beta)}$ เมื่อ $\alpha = \beta = 0$ และสามารถเขียนได้ในรูปฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกโดยใช้สูตรเมอร์ฟีส์

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x) = {}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \tfrac{1}{2}(1-x)\right) \qquad (3.1.5)$$

Rodrigue ได้นำเสนอสูตร

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\, \frac{d^l}{d\,x^l}\,(x^2-1)^l,$$

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\lfloor l/2\rfloor} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{k!\,(l-k)!\,(l-2k)!}\, x^{l-2k}$$

$$= \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{\lfloor l/2\rfloor} (-1)^k \binom{l}{k}\binom{2l-2k}{l} x^{l-2k}$$

เมื่อ $\lfloor x \rfloor$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด มีสูตรหาผลบวก

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l}\sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k}^2 (x-1)^{l-k}(x+1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k}\binom{-l-1}{k}\left(\frac{1-x}{2}\right)^k$$

ในเทอมของฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกสามารถเขียนได้ในรูป

$$P_n(x) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^n {}_2F_1(-n, -n; 1; (x+1)/(x-1))$$

$$P_n(x) = \binom{2n}{n}\frac{x^n}{2^n}\, {}_2F_1(-n/2, (1-n)/2; 1/2-n; x^{-2})$$

$$P_n(x) = {}_2F_1(-n, n+1; 1; (1-x)/2)$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิด สำหรับ $P_n(x)$ แสดงโดย

$$g(t, x) = (1-2xt+t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n. \qquad (3.1.6)$$

$\partial g / \partial t$ ทั้งสองข้าง

$$-\tfrac{1}{2}(1-2xt+t^2)^{-3/2}(-2x+2t) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P_n(x)\, t^{n-1}. \qquad (3.1.7)$$

คูณสมการ(3.1.7)ด้วย $2t$ จะได้

$$-t\,(1-2\,x\,t+t^2)^{-3/2}\,(-2\,x+2\,t)=\sum_{n=0}^{\infty}2\,n\,P_n\,(x)\,t^n \qquad (3.1.8)$$

และบวกสมการ(3.1.7)กับ(3.1.8)จะได้

$$(1-2\,x\,t+t^2)^{-3/2}\,[(2\,x\,t-2\,t^2)+(1-2\,x\,t+t^2)]=\sum_{n=0}^{\infty}(2\,n+1)\,P_n\,(x)\,t^n \qquad (3.1.9)$$

จากการทดสอบแบบนี้ถูกนำมาใช้ในปัญหาทางกายภาพ ในบางปัญหาประกอบด้วยการทดสอบของเฮเน-กรีนสไตน์ และการคำนวณบนพื้นที่ ฟังก์ชันก่อกำเนิดรูปแบบอื่นให้ได้โดย

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n\,(x)}{n\,!}\,z^n=e^{x\,z}\,J_0\left(z\sqrt{1-x^2}\right), \qquad (3.1.10)$$

เมื่อ $J_0(x)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซลอันดับ 0 ชนิดแรก
พหุนามเลอจองด์เป็นไปตามความสัมพันธ์ซ้ำ

$$(l+1)\,P_{l+1}\,(x)-(2\,l+1)\,x\,P_l\,(x)+l\,P_{l-1}\,(x)=0 \qquad (3.1.11)$$

ในส่วนที่เพิ่มเติม

$$(1-x^2)\,P_n'\,(x)=-n\,x\,P_n\,(x)+n\,P_{n-1}\,(x)=(n+1)\,x\,P_n\,(x)-(n+1)\,P_{n+1}\,(x) \qquad (3.1.12)$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดเชิงซ้อน คือ

$$P_l\,(x)=\frac{1}{2\,\pi\,i}\int(1-2\,z\,x+z^2)^{-1/2}\,z^{-l-1}\,d\,z, \qquad (3.1.13)$$

และ ปริพันธ์สเลไฟล คือ

$$P_l\,(x)=\frac{(-1)^l}{2^l}\,\frac{1}{2\,\pi\,i}\int\frac{(1-z^2)^l}{(z-x)^{l+1}}\,d\,z. \qquad (3.1.13)$$

ปริพันธ์บนช่วง $[x,1]$ มีสูตรทั่วไป คือ

$$\int_x^1 P_m(x)\,dx = \frac{(1-x^2)}{m(m+1)}\frac{dP_m(x)}{dx} \tag{3.1.14}$$

สำหรับกรณี $m \neq 0$ เป็นกรณีพิเศษ

$$\int_0^1 P_m(x)\,dx = \frac{P_{m-1}(0)-P_{m+1}(0)}{2m+1} = \begin{cases} 1 & m=0 \\ 0 & m \text{ even } \neq 0 \\ (-1)^{(m-1)/2}\dfrac{m!!}{m(m+1)(m-1)!!} & m \text{ odd} \end{cases}$$

สำหรับปริพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชันเลอจองด์

$$\int_x^1 P_m(x)P_n(x)\,dx = \frac{(1-x^2)[P_n(x)P'_m(x)-P_m(x)P'_n(x)]}{m(m+1)-n(n+1)} \tag{3.1.15}$$

สำหรับ $m \neq 0$ ซึ่งทำให้เป็นกรณีพิเศษ

$$\int_0^1 P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+1} & m=n \\ 0 & m \neq n,\ m, n \text{ both even or odd} \\ f_{m,n} & m \text{ even}, n \text{ odd} \\ f_{n,m} & m \text{ odd}, n \text{ even} \end{cases}$$

เมื่อ

$$f_{m,n} \equiv \frac{(-1)^{(m+n+1)/2}\,m!\,n!}{2^{m+n-1}(m-n)(m+n+1)\left[\left(\frac{1}{2}m\right)!\right]^2\left\{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]!\right\}^2} \tag{3.1.16}$$

กรณีพิเศษของรูปแบบนี้

$$\int_0^1 P_\mu(x)P_\nu(x)\,dx = \frac{A\sin\left(\frac{1}{2}\pi\nu\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right)-A^{-1}\sin\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi\nu\right)}{\frac{1}{2}\pi(\nu-\mu)(\mu+\nu+1)}, \tag{3.1.17}$$

เมื่อ

$$A \equiv \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\mu+1)\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\nu+1)\right)\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\mu\right)} \tag{3.1.18}$$

และ $\Gamma(z)$ เป็นฟังก์ชันแกมมา

บนช่วง [-1,1] โดยมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก x และ x^2 ถูกให้ไว้โดย

$$\int_{-1}^{1} x\,P_L(x)\,P_N(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2(L+1)}{(2L+1)(2L+3)} & \text{for } N=L+1 \\ \dfrac{2L}{(2L-1)(2L+1)} & \text{for } N=L-1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,P_L(x)\,P_N(x)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2(L+1)(L+2)}{(2L+1)(2L+3)(2L+5)} & \text{for } N=L+2 \\ \dfrac{2(2L^2+2L-1)}{(2L-1)(2L+1)(2L+3)} & \text{for } N=L \\ \dfrac{2L(L-1)}{(2L-3)(2L-1)(2L+1)} & \text{for } N=L-2 \end{cases}$$

เอกลักษณ์ของผลบวก ให้ไว้โดย

$$1-[P_n(x)]^2 = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-x^2}{1-x_\nu{}^2}\left[\frac{P_n(x)}{P_n'(x_\nu)(x-x_\nu)}\right]^2, \tag{3.1.19}$$

เมื่อ x_ν เป็นรากที่ ν ของ $P_n(x)$ ในทำนองเดียวกันเอกลักษณ์ที่ได้ก็คือ

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-x_\nu^2}{(n+1)^2\,[P_{n+1}(x_\nu)]^2} = 1, \tag{3.1.20}$$

ซึ่งเป็นสาเหตุ สำหรับผลบวกของค่าน้ำหนักในรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มีค่าเท่ากับ 2 เสมอ

พหุนามเลอจองด์สมทบ $P_l^m(x)$ และ P_l^{-m} เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เลอจองด์ เมื่อ l เป็นจำนวนเต็มบวก และ $m=0,\ldots,l$ เมื่อ m เป็นบวก สามารถใช้ได้ในเทอมของพหุนามไม่สมทบโดย

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l\, l!}(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^{l+m}}{d\,x^{l+m}}(x^2-1)^l,$$

เมื่อ $P_l^m(x)$ เป็นพหุนามเลอจองด์ไม่สมทบพหุนามเลอจองด์สมทบสำหรับค่า m ที่เป็นลบนิยามได้โดย

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\,P_l^m(x). \tag{3.1.21}$$

สำหรับพหุนามที่เกี่ยวเนื่องกับพหุนามเลอจองด์

$$P_{l\,m}(x) \equiv (-1)^m\,P_l^m(x) \tag{3.1.22}$$

พหุนามที่เชื่อมโยง บางครั้งเรียกว่า ฟังก์ชันเฟอเรอ ถ้า $m=0$ พหุนามที่ไม่เชื่อมโยงเป็นส่วนของทรงกลมฮาร์มอนิก ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการลาปลาส ในระบบพิกัดทรงกลม การตั้งฉากบนช่วง [-1,1] โดยที่ ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก เป็น 1

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\,P_{l'}^m(x)\,d\,x = \frac{2}{2\,l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{l\,l'}, \tag{3.1.23}$$

และตั้งฉากบนช่วง[-1,1] เทียบกับ m เทียบกับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก $(1-x^2)^{-1}$

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)\,P_l^{m'}(x)\,\frac{d\,x}{1-x^2} = \frac{(l+m)!}{m\,(l-m)!}\,\delta_{m\,m'}. \tag{3.1.24}$$

พหุนามที่เกี่ยวเนื่องกับพหุนามเลอจองด์ เป็นไปตามความสัมพันธ์ซ้ำ

$$(l-m)\,P_l^m(x) = x\,(2\,l-1)\,P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)\,P_{l-2}^m(x). \tag{3.1.25}$$

ให้ $x=\cos\theta$ (แล้วแทนค่า u ลงในสมการ(3.1.25))

$$\frac{d\,P_l^m(\mu)}{d\,\theta} = \frac{l\,\mu\,P_l^m(\mu) - (l+m)\,P_{l-1}^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \tag{3.1.26}$$

$$(2\,l+1)\,\mu\,P_l^m(\mu) = (l+m)\,P_{l-1}^m(\mu) + (l-m+1)\,P_{l+1}^m(\mu). \tag{3.1.27}$$

เอกลักษณ์ที่เพิ่มเติม คือ

$$P_l^l(x) = (-1)^l (2l-1)!!\,(1-x^2)^{l/2}$$
$$P_{l+1}^l(x) = x\,(2l+1)\,P_l^l(x).$$

ตัวอย่างพหุนามที่สอดคล้องกับพหุนามเลอจองด์

$P_0^0(x)$	=	1
$P_1^0(x)$	=	x
$P_1^1(x)$	=	$-(1-x^2)^{1/2}$
$P_2^0(x)$	=	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
$P_2^1(x)$	=	$-3x(1-x^2)^{1/2}$
$P_2^2(x)$	=	$3(1-x^2)$
$P_3^0(x)$	=	$\frac{1}{2}x(5x^2-3)$
$P_3^1(x)$	=	$\frac{3}{2}(1-5x^2)(1-x^2)^{1/2}$
$P_3^2(x)$	=	$15x(1-x^2)$
$P_3^3(x)$	=	$-15(1-x^2)^{3/2}$
$P_4^0(x)$	=	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
$P_4^1(x)$	=	$\frac{5}{2}x(3-7x^2)(1-x^2)^{1/2}$
$P_4^2(x)$	=	$\frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)$
$P_4^3(x)$	=	$-105x(1-x^2)^{3/2}$
$P_4^4(x)$	=	$105(1-x^2)^2$
$P_5^0(x)$	=	$\frac{1}{8}x(63x^4-70x^2+15).$

นำเขียนในเทอมของ $x = \cos\theta$ (เขียน $u = \cos\theta$)

$P_0^0(\cos\theta)$	=	1
$P_1^0(\cos\theta)$	=	$\cos\theta$
$P_1^1(\cos\theta)$	=	$-\sin\theta$
$P_2^0(\cos\theta)$	=	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1)$
$P_2^1(\cos\theta)$	=	$-3\sin\theta\cos\theta$
$P_2^2(\cos\theta)$	=	$3\sin^2\theta$
$P_3^0(\cos\theta)$	=	$\frac{1}{2}\cos\theta(5\cos^2\theta-3)$

$$P_3^1(\cos\theta) = -\frac{3}{2}(5\cos^2\theta - 1)\sin\theta$$

$$P_3^2(\cos\theta) = 15\cos\theta\sin^2\theta$$

$$P_3^3(\cos\theta) = -15\sin^3\theta.$$

อนุพันธ์รอบๆจุดกำเนิด คือ

$$\left[\frac{dP_\nu^\mu(x)}{dx}\right]_{x=0} = \frac{2^{\mu+1}\sin\left[\frac{1}{2}\pi(\nu+\mu)\right]\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\mu+1\right)}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\right)} \tag{3.1.27}$$

และอนุพันธ์ของลอการิทึมคือ

$$\left[\frac{d\ln P_\lambda^\mu(z)}{dz}\right]_{z=0} = 2\tan\left[\frac{1}{2}\pi(\lambda+\mu)\right]\frac{\left[\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\right]!\left[\frac{1}{2}(\lambda-\mu)\right]!}{\left[\frac{1}{2}(\lambda+\mu-1)\right]!\left[\frac{1}{2}(\lambda-\mu-1)\right]!} \tag{3.1.28}$$

3.2 พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งเป็นเซตของพหุนามเชิงตั้งฉากที่ให้ผลลัพธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์เชบีเชฟและให้เป็น $T_n(x)$ ซึ่งใช้การประมาณค่ากำลังสองเหมาะสมที่น้อยที่สุดและเป็นกรณีพิเศษของพหุนามอัลตร้าสฟีริคัล กับ $\alpha = 0$ เหล่านั้นเกี่ยวข้องกับรูปแบบมุมพหุคูณตรีโกณมิติ พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง อยู่ในรูป $T_n(x)$ โดย $T_n(1) = 1$ พหุนามน้อยๆชนิดที่หนึ่งแสดงได้ว่า $x \in [-1, 1]$ และ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง $T_n(z)$ สามารถนิยามโดยปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ

$$T_n(z) = \frac{1}{4\pi i}\oint\frac{(1-t^2)\,t^{-n-1}}{(1-2tz+t^2)}\,dt, \tag{3.2.1}$$

ที่ซึ่งโอบรอบเส้นรอบขอบ ที่จุดเริ่มต้นและอยู่ในการนับแสดงทิศทาง

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งจำนวนน้อยๆในช่วงแรกๆ

$$
\begin{aligned}
&T_0(x) = 1\\
&T_1(x) = x\\
&T_2(x) = 2x^2 - 1\\
&T_3(x) = 4x^3 - 3x\\
&T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\\
&T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\\
&T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1
\end{aligned}
$$

เมื่ออันดับกำลังจากน้อยไปหามาก สัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์ของรูปสามเหลี่ยมคือ 1;1;-1,2;-3,4;1,-8,8;5,-20,16,...

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง นิยามโดยเอกลักษณ์

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งสามารถแสดงในรูปฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$g_1(t, x) \equiv \frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} = T_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)\, t^n \qquad (3.2.2)$$

และ

$$g_2(t, x) \equiv \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n \qquad (3.2.3)$$

สำหรับ $|x| \le 1$ และ $|t| < 1$ (บทนิยามพื้นฐานของพหุนามเชบีเชฟชนิดที่สองมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันก่อกำเนิด)

พหุนามสามารถเขียนอยู่ในรูปของผลบวกได้เป็น

$$T_n(x) = \frac{n}{2}\sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^r}{n - r}\binom{n-r}{r}(2x)^{n-2r} \qquad (3.2.4)$$

$$T_n(x) = \cos(n\cos^{-1} x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2m} x^{n-2m}(x^2 - 1)^m, \qquad (3.2.5)$$

ซึ่ง $\binom{n}{k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ทวินามและ $\lfloor x \rfloor$ คือ ฟังก์ชันพื้นฐาน

พหุนามเขียนอยู่ในรูปของผลคูณได้เป็น

$$T_n(x) = 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n} \left\{ x - \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right] \right\} \tag{3.2.6}$$

นำ T_n มาเขียนเป็นสมการดีเทอร์มิแนนต์ครูเรียร์

$$T_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{vmatrix}.$$

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง ในกรณีพิเศษของพหุนามจาโคเบียน $P_n^{(\alpha,\beta)}$ กับ $\alpha = \beta = -1/2$

$$T_n(x) = \frac{P_n^{(-1/2,-1/2)}(x)}{P_n^{(-1/2,-1/2)}(1)} = {}_2F_1\left(-n, n; \tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}(1-x)\right), \tag{3.2.7}$$

ซึ่ง ${}_2F_1(a, b; c; x)$ เป็นฟังก์ชัน ไฮเพอร์จีออเมตริก มีค่าเป็นศูนย์เมื่อ

$$x = \cos\left[\frac{\pi\left(k - \frac{1}{2}\right)}{n} \right]$$

สำหรับ $k = 1, 2, ..., n$ เอ็กทรีม่า เกิดขึ้นสำหรับ

$$x = \cos\left(\frac{\pi k}{n} \right),$$

ซึ่ง $k = 0, 1, ..., n$ ที่ $T_n(x) = 1$ มีค่าสูงสุด และ $T_n(x) = -1$ มีค่าต่ำสุด

พหุนามเชบีเชฟปืนพหุนามเชิงตั้งฉาก ที่สอดคล้องกับฟังก์ชันถ่วง $(1-x^2)^{-1/2}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\delta_{nm} & \text{for } m \neq 0, n \neq 0 \\ \pi & \text{for } m = n = 0, \end{cases} \tag{3.2.8}$$

ซึ่ง δ_{mn} เป็น ฟังก์ชันเดลตาโครเนกแคร์ พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งเขียนเป็นเอกลักษณ์ไม่ต่อเนื่องของการบวก

$$\sum_{k=1}^{m} T_i(x_k)\, T_j(x_k) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, m\, \delta_{ij} & \text{for } i \neq 0, j \neq 0 \\ m & \text{for } i = j = 0, \end{cases} \tag{3.2.9}$$

ซึ่ง x_k เมื่อ $k = 1, \ldots, m$ และ m เป็นศูนย์จะได้ $T_m(x)$
ที่กล่าวแล้วจะได้ความสัมพันธ์ซ้ำ

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_{n+1}(x) &= xT_n(x) - \sqrt{(1-x^2)\{1-[T_n(x)]^2\}} \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

สำหรับ $n \geq 1$ จะได้

$$\begin{aligned} (x-1)[T_{2n+1}(x)-1] &= [T_{n+1}(x)-T_n(x)]^2 \\ 2(x^2-1)[T_{2n}(x)-1] &= [T_{n+1}(x)-T_{n-1}(x)]^2 \end{aligned}$$

จากสมการที่ได้มีตัวแปรปริพันธ์เชิงซ้อน

$$T_n(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_\gamma \frac{(1-z^2)\, z^{-n-1}\, dz}{1 - 2xz + z^2} \tag{3.2.11}$$

และตัวแปรโรดริกส์

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\, (1-x^2)^{1/2}}{2n\left(n-\frac{1}{2}\right)!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n-1/2}\right]. \tag{3.2.12}$$

การใช้การแปลงไฟโบแนนซี่อย่างเร็วกับกฎการคูณ

$$(A, B)(C, D) = (AD + BC + 2xAC, BD - AC)$$

ให้

$$(T_{n+1}(x), -T_n(x)) = (T_1(x), -T_0(x))(1, 0)^n.$$

การใช้กราม-ชมิดต์ ออนอมอไรด์เซชัน ในพิสัย (-1,1) กับฟังก์ชันถ่วง $(1-x^2)^{-1/2}$ ให้

$$p_0(x)=1$$

$$p_1(x)=\left[x-\frac{\int_{-1}^{1}x(1-x^2)^{-1/2}\,dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\,dx}\right]$$

$$=x-\frac{\left[-(1-x^2)^{-1/2}\right]_{-1}^{1}}{\left[\sin^{-1}x\right]_{-1}^{1}}=x$$

$$p_2(x)=\left[x-\frac{\int_{-1}^{1}x^3(1-x^2)^{-1/2}\,dx}{\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)^{-1/2}\,dx}\right]x-\left[\frac{\int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)^{-1/2}\,dx}{\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}\,dx}\right]\cdot 1$$

$$=\left[x-0\right]x-\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}=x^2-\frac{1}{2},$$

และอื่นๆ การทำให้เป็นรูปแบบมาตรฐานนั้นทำให้ได้พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งมีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่ง $J_n(x)$ และแปลงฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่หนึ่งเป็น $I_n(x)$ โดยความสัมพันธ์

$$J_n(x)=i^n\,T_n\left(i\frac{d}{dx}\right)J_0(x)$$

$$I_n(x)=T_n\left(\frac{d}{dx}\right)I_0(x).$$

ให้ $x\equiv\cos\theta$ ในพหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งเขียนได้เป็น

$$T_n(x)=\cos(n\theta)=\cos(n\cos^{-1}x).$$

ผลลัพธ์ไม่อิสระเชิงเส้นที่สองแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2T_n}{d\theta^2}+n^2T_n=0$$

โดยให้

$$V_n(x)=\sin(n\theta)=\sin(n\cos^{-1}x),$$

ซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปของ

$$V_n(x) = \sqrt{1-x^2}\; U_{n-1}(x),$$

ซึ่ง U_n เป็นพหุนามเชบีเชฟชนิดที่ 2 ดังนั้น $V_n(x)$ ไม่เป็นพหุนาม

สมการพหุนาม

$$p_n(x) = x^n - 2^{1-n}\, T_n(x)$$

ที่ดีกรี $n-2$ จำนวนแรกๆเป็น

$$p_1(x) = 0$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}$$

$$p_3(x) = \frac{3}{4}x$$

$$p_4(x) = x^2 - \frac{1}{8}$$

$$p_5(x) = \frac{5}{16}(4x^3 - x)$$

เป็นพหุนามดีกรี $< n$ ซึ่งอยู่ในเซตปิดโดยที่ x^n อยู่ในช่วง(-1,1) ค่าเบี่ยงเบนมากที่สุดคือ 2^{1-n} ที่จุด $n+1$ ซึ่ง

$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right),$$

โดยที่ $k = 0,1,2,\ldots,n$

3.3 พหุนามเชบีเชฟชนิดที่สอง

เซตของพหุนามเชบีเชฟนิยามโดยฟังก์ชันก่อกำเนิดแตกต่างกันเล็กน้อยนั้นเกิดขึ้นในการพัฒนาของทรงกลม 4 มิติ เป็นฮาร์มอนิกส์ในทฤษฎีโมเมนส์ตัมเชิงมุม ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของพหุนามอัลตร้าสฟีริคัลกับ $\alpha = 1$ ดังนั้นเกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับรูปแบบมุมพหุคูณตรีโกณมิติ พหุนามเซฟบีเชพประเภทที่สองกำหนดเป็น $U_n(x)$ พหุนาม $U_n(x)$ เป็นการอธิบายโดยที่ $x \in [-1,1]$ และ $n = 1,2,3,4,5$

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่สองจำนวนน้อยๆในช่วงแรกๆ

$$U_0(x)=1$$
$$U_1(x)=2x$$
$$U_2(x)=4x^2-1$$
$$U_3(x)=8x^3-4x$$
$$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$$
$$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$$
$$U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1$$

เมื่ออันดับกำลังจากน้อยไปหามาก รูปสามเหลี่ยมสัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์คือ 1;2;-1,4;-4,8;1,-12,16;6,-32,32;-1,24,-80,64.

จะนิยามฟังก์ชันก่อกำเนิดของพหุนามเชบีเชฟชนิดที่สองได้เป็น

$$g(t,x)=\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)t^n \tag{3.3.1}$$

โดยที่ $|x|<1$และ$|t|<1$ ไปดูความสัมพันธ์ของพหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่ง$T(x)$ นำสมการที่ (3.3.1)มา $\partial g/\partial t$ จะได้

$$\frac{\partial g}{\partial t}=2(x-t)(1-2xt+t^2)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}n\,U_n(x)t^{n-1}. \tag{3.3.2}$$

นำ t คูณเข้าในสมการ(3.3.2)จะได้

$$(2xt-2t^2)(1-2xt+t^2)^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty}n\,U_n(x)t^n \tag{3.3.3}$$

และนำสมการ(3.3.2)บวกกับ(3.3.3)จะได้

$$\frac{(2xt-2t^2)+(1-2xt+t^2)}{(1-2xt+t^2)^2}=\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,U_n(x)t^n. \tag{3.3.4}$$

นี้คือฟังก์ชันก่อกำเนิดที่เหมือนกันสำหรับพหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งยอมรับตัวประกอบการบวก $1-2xt+t^2$ เป็นตัวหาร

ตัวแทนโรดริกส์ สำหรับ U_n คือ

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\left(n+\frac{1}{2}\right)!\,(1-x^2)^{1/2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{n+1/2}\right]. \tag{3.3.5}$$

พหุนามสามารถอยู่ในรูปของผลบวกได้เป็น

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^r \binom{n-r}{r} (2x)^{n-2r} \\ &= \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2m+1} x^{n-2m} \left(x^2-1\right)^m, \end{aligned}$$

ซึ่ง $\lfloor x \rfloor$ เป็นฟังก์ชันพื้นฐาน และ $\lceil x \rceil$ เป็นฟังก์ชันจำนวนเต็มน้อยสุด พหุนามอยู่ในรูปของผลคูณจะได้

$$U_n(x) = 2^n \prod_{k=1}^{n} \left[x - \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\right]$$

จาก $U_n(x)$ จะได้เอกลักษณ์ดีเทอร์มิแนนต์ที่น่าสนใจคือ

$$U_n = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{vmatrix}.$$

พหุนามเชบีเชฟชนิดที่สองเป็นกรณีพิเศษของพหุนามจาโคเบียน $P_n^{(\alpha,\beta)}$ กับ $\alpha = \beta = -1/2$

$$\begin{aligned} U_n(x) &= (n+1)\frac{P_n^{(1/2,1/2)}(x)}{P_n^{(1/2,1/2)}(1)} \\ &= {}_2F_1\left(-n, n+2; \frac{3}{2}; \frac{1}{2}(1-x)\right), \end{aligned}$$

ซึ่ง ${}_2F_1(a,b;c;x)$ เป็นฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก

กำหนดให้ $x \equiv \cos\theta$ โดยที่พหุนามเชบีเชฟชนิดที่สองเขียนได้เป็น

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta}.$$

ผลลัพธ์ไม่อิสระเชิงเส้นอันดับที่สองเปลี่ยนเป็นสมการอนุพันธ์จะได้

$$W_n(x) = \frac{\cos[(n+1)\theta]}{\sin\theta},$$

ซึ่งเขียนได้เป็น

$$W_n(x) = (1-x^2)^{-1/2}\, T_{n+1}(x),$$

ซึ่ง $T_n(x)$ คือพหุนามเชบีเชฟชนิดที่หนึ่งโดยที่ $W_n(x)$ ไม่เป็นพหุนาม

3.4 พหุนามลาแกร์

พหุนามลาแกร์เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ลาแกร์ เมื่อ $\nu = 0$

$$L_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{e^{-zt/(1-t)}}{(1-t)\,t^{n+1}}\,dt, \tag{3.4.1}$$

พหุนามลาแกร์ $H_n(x)$ สามารถนิยามโดยปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ
ตัวอย่างของพหุนามลาแกร์คือ

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= -x+1 \\
L_2(x) &= \tfrac{1}{2}(x^2-4x+2) \\
L_3(x) &= \tfrac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6).
\end{aligned}$$

Rodrigue ได้นำเสนอพหุนามลาแกร์คือ

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \tag{3.4.2}$$

และฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับพหุนามลาแกร์คือ

$$g(x,z) = \frac{\exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right)}{1-z}$$
$$= 1 + (-x+1)z + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right)z^2 + \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1\right)z^3 + \ldots$$

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)\,z^{n+1}}\,dz,$$

พหุนามลาแกร์เป็นไปตาม ความสัมพันธ์ซ้ำ

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

และ

$$x\,L_n'(x) = n\,L_n(x) - n\,L_{n-1}(x).$$

ผลเลยของสมการเชิงอนุพันธ์เมื่อ $\nu \neq 0$ และ k เป็นจำนวนเต็ม

$$L_n(x) = L_n^0(x).$$

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^{n+k}\right)$$
$$= (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[L_{n+k}(x)\right]$$
$$= \frac{(-1)^n x^{-(k+1)/2}}{n!} e^{x/2} W_{k/2+n+1/2,k/2}(x)$$
$$= \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{(n+k)!}{(n-m)!\,(k+m)!\,m!} x^m,$$

เมื่อ $W_{k,m}(x)$ เป็นฟังก์ชันวิทเทคเกอร์

พหุนามลาแกร์สมทบ เป็นลำดับเชฟเฟอร์ เมื่อ

$$g(t) = (1-t)^{-k-1}$$
$$f(t) = \frac{t}{t-1},$$

ได้ให้ฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$g(x,z) = \frac{\exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right)}{(1-z)^{k+1}}$$
$$= 1+(k+1-x)z+\frac{1}{2}\left[x^2-2(k+2)x+(k+1)(k+2)\right]z^2+\ldots$$

$$L_n^k(x)=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}\binom{k+n}{n-i}(-x)^i,$$

เมื่อ $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ เป็นสัมประสิทธิ์ทวินาม และจะได้เอกลักษณ์เซฟเฟอร์

$$\frac{1}{n!}L_n^k(x+y)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{1}{i!}L_i^k(x)\frac{1}{(n-i)!}L_{n-i}^{-1}(y)$$

พหุนามลาแกร์สมทบ ซึ่งตั้งฉากบนช่วง $[0,\infty)$ เมื่อเทียบกับฟังก์ชันถ่วง e^{-x}

$$\int_0^\infty e^{-x}x^kL_n^k(x)L_m^k(x)\,dx=\frac{(n+k)!}{n!}\delta_{mn},$$

เมื่อ δ_{mn} คือ ฟังก์ชันเดลตาโครเนกเกอร์

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{k+1}\left[L_n^k(x)\right]^2dx=\frac{(n+k)!}{n!}(2n+k+1).$$

ความสัมพันธ์ซ้ำคือ

$$\sum_{\nu=0}^{n}L_\nu^k(x)=L_n^{k+1}(x)$$

และ

$$L_n^k(x)=L_n^{k+1}(x)-L_{n-1}^{k+1}(x).$$

อนุพันธ์มีดังนี้

$$\frac{d}{dx}L_n^k(x) = -L_{n-1}^{(k+1)}(x)$$
$$= x^{-1}\left[nL_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)\right].$$

โดยมีเอกลักษณ์ที่น่าสนใจ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^k(x)}{\Gamma(n+k+1)} w^n = e^w (x w)^{-k/2} J_k\left(2\sqrt{x w}\right),$$

เมื่อ $\Gamma(z)$ เป็นฟังก์ชันแกมมา และ $J_k(z)$ เป็นฟังก์ชันเบสเซล ชนิดแรกแสดงโดยปริพันธ์

$$e^{-x} x^{k/2} L_n^k(x) = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+k/2} J_k\left(2\sqrt{t x}\right) dt$$

สำหรับ $n = 0,1,...$ และ $k > -1$ พหุนามดิสคริมิแนนต์คือ

$$D_n^k = \prod_{\nu=1}^{n} \nu^{\nu-2n+2} (\nu+k)^{\nu-1}$$

พหุนามเคอร์เนล คือ

$$K_n^k(x, y) = \frac{n+1}{\Gamma(k+1)} \binom{n+k}{n}^{-1} \frac{L_n^k(x) L_{n+1}^k(y) - L_{n+1}^k(x) L_n(k)(y)}{x-y},$$

เมื่อ $\binom{n}{k}$ เป็นสัมประสิทธิ์ทวินาม

ตัวอย่างพหุนามลาแกร์ที่เกี่ยวเนื่อง

$$\begin{aligned}
L_0^k(x) &= 1 \\
L_1^k(x) &= -x + k + 1 \\
L_2^k(x) &= \frac{1}{2}\left[x^2 - 2(k+2)x + (k+1)(k+2)\right] \\
L_3^k(x) &= \frac{1}{6}\left[-x^3 + 3(k+3)x^2 - 3(k+2)(k+3)x + (k+1)(k+2)(k+3)\right].
\end{aligned}$$

กรณีทั่วไปของพหุนามลาแกร์สมทบ ที่ k ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็ม นี้เรียกว่าฟังก์ชันลาแกร์ กรณีทั่วไป พหุนามลาแกร์สามารถนิยามโดย

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \, {}_1F_1(-n; \alpha+1; x),$$

เมื่อ $(a)_n$ เป็นสัญลักษณ์พอชแฮมเมอร์ และ ${}_1F_1(a;b;x)$ เป็นฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก

3.5 พหุนามแอร์มิต

พหุนามแอร์มิต $H_n(x)$ เป็นเซตของพหุนามเชิงตั้งฉากบนโดเมน $(-\infty,\infty)$ กับฟังก์ชันถ่วง e^{-x^2} อธิบายได้โดย $x\in[0,1]$ และ $n=1,2,3$ และ 4

พหุนามแอร์มิต $H_n(x)$ สามารถนิยามโดยปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ

$$H_n(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint e^{-t^2+2tz}\,t^{-n-1}\,dt, \tag{3.5.1}$$

ซึ่งโอบรอบเส้นรอบขอบที่จุดเริ่มต้นและอยู่ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

พหุนามแอร์มิตลำดับต้นๆเพียง 11 อันดับ

$$H_0(x)=1$$
$$H_1(x)=2x$$
$$H_2(x)=4x^2-2$$
$$H_3(x)=8x^3-12x$$
$$H_4(x)=16x^4-48x^2+12$$
$$H_5(x)=32x^5-160x^3+120x$$
$$H_6(x)=64x^6-480x^4+720x^2-120$$
$$H_7(x)=128x^7-1344x^5+3360x^3-1680x$$
$$H_8(x)=256x^8-3584x^6+13440x^4-13440x^2+1680$$
$$H_9(x)=512x^9-9216x^7+48384x^5$$
$$H_{10}(x)=1024x^{10}-23040x^8+161280x^6+403200x^4+302400x^2-30240$$

ค่า $H_0(x)$ อาจเรียกว่าจำนวนแอร์มิต

พหุนามแอร์มิตเป็นลำดับเชฟเฟอร์กับ

$$g(t)=e^{t^2/4}$$
$$f(t)=\frac{1}{2}t$$
$$\exp(2xt-t^2)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)\,t^n}{n!}.$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์แสดงได้ดังนี้

$$H_n(x) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n \exp\left(2xt - t^2\right)\right]_{t=0}$$
$$= \left[e^{x^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}$$

ตั้งแต่ $\partial f(x-t)/\partial t = -\partial f(x-t)/\partial x$

ดังนั้น

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n e^{-(x-t)^2}\right]_{t=0}$$
$$= (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

จะได้

$$\tilde{O}_1 \equiv -e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2}$$
$$\tilde{O}_2 \equiv e^{x^2/2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)e^{-x^2/2}.$$

$$\tilde{O}_1 f = -e^{x^2}\frac{d}{dx}\left[f e^{-x^2}\right] = 2xf - \frac{df}{dx}$$
$$\tilde{O}_2 f = e^{x^2/2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)\left[f e^{-x^2/2}\right]$$
$$= xf + xf - \frac{df}{dx} = 2xf - \frac{df}{dx},$$

และ

$$-e^{x^2}\frac{d}{dx}e^{-x^2} = e^{x^2/2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)e^{-x^2/2}$$

จากบทนิยามที่ผ่านมาจะสมมูลกับ

$$\exp(2xt - t^2) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)\,t^n}{n!}$$
$$H_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$$
$$H_n(x) \equiv e^{x^2/2}\left(x - \frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2/2}$$

พหุนามแอร์มิตอาจจะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} H_n(z) &= (2z)^n {}_2F_0\left(-\tfrac{1}{2}n, -\tfrac{1}{2}(n-1); ; -z^{-2}\right) \\ &= 2^n z^n (z^2)^{-n/2} U\left(-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}, z^2\right) \end{aligned}$$

ซึ่ง $U(a, b, z)$ เป็นไปตามฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริกชนิดที่สอง ซึ่งจะได้

$$H_n(z) = 2^n U\left(-\tfrac{1}{2}n, \tfrac{1}{2}, z^2\right)$$

ในทางด้านขวาของสมการ $\mathbb{R}[z] > 0$

พหุนามแอร์มิตสัมพันธ์กับอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าคลาดเคลื่อนโดย

$$H_n(z) = \tfrac{1}{2}(-1)^n \sqrt{\pi}\, e^{z^2} \frac{d^{n+1}}{d z^{n+1}} \operatorname{erf}(z).$$

สมการเหล่านั้นมีตัวแปรปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบ

$$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint e^{-t^2+2tx}\, t^{-n-1}\, dt.$$

เหล่านั้นเป็นเชิงตั้งฉากในพิสัย $(-\infty, \infty)$ สอดคล้องกับฟังก์ชันถ่วง e^{-x^2}

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2}\, dx = \delta_{mn} 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

เงื่อนไขการสมมาตรของพหุนามแอร์มิต

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

จะได้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \\ H_n'(x) &= 2n H_{n-1}(x). \end{aligned}$$

อนุกรมที่ได้จากสมการเชิงอนุพันธ์แอร์มิต คือ

$$H_{2k}(x)=(-1)^k 2^k (2k-1)!!\times\left[1+\sum_{j=1}^{k}\frac{(-4k)(-4k+4)...(-4k+4j-4)}{(2j)!}x^{2j}\right]$$
$$H_{2k+1}(x)=(-1)^k 2^{k+1} (2k+1)!!\times\left[x+\sum_{j=1}^{k}\frac{(-4k)(-4k+4)...(-4k+4j-4)}{(2j+1)!}\right]$$

ซึ่งผลคูณในตัวเศษเท่ากับ

$$(-4k)(-4k+4)...(-4k+4j-4)=4^j(-k)_j$$

กับ $(x)_n$ สัญลักษณ์พอชแฮมเมอร์

ให้เซตของการรวมกลุ่มฟังก์ชันจะได้

$$u_n(x)\equiv\sqrt{\frac{\alpha}{\pi^{1/2}\,n\,!\,2^n}}\;H_n(\alpha x)\,e^{-\alpha^2 x^2/2},$$

เมื่อ u_n เป็นเงือนไขเชิงตั้งฉาก

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_n(x)\frac{du_m}{dx}dx = \begin{cases}\alpha\sqrt{\frac{n+1}{2}} & m=n+1\\ -\alpha\sqrt{\frac{n}{2}} & m=n-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_m(x)\,u_n(x)\,dx = \delta_{mn}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_m(x)\,x\,u_n(x)\,dx = \begin{cases}\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n+!}{2}} & m=n+1\\ \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{n}{2}} & m=n-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}u_m(x)\,x^2\,u_n(x)\,dx = \begin{cases}\frac{2n+1}{2\alpha^2} & m=n\\ \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{2\alpha^2} & m=n+2\\ 0 & m\neq n\neq n\pm 2\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}H_\alpha(x)\,H_\beta(x)\,H_\gamma(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,\frac{2^s\,\alpha!\,\beta!\,\gamma!}{(s-\alpha)!\,(s-\beta)!\,(s-\gamma)!},$$

ถ้า$\alpha+\beta+\gamma=2s$เป็นจำนวนคู่และ$s\geq\alpha s\geq\beta$ และ $s\geq\gamma$มิฉะนั้น ปริพันธ์สุดท้ายเป็น 0

ดิสคริมิแนนต์พหุนาม คือ

$$D_n = 2^{3n(n-1)/2} \prod_{k=1}^{n} k^k$$

เอกลักษณ์ที่สนใจสองตัวที่เกี่ยวกับ $H_n(x+y)$ จะได้

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x) H_{n-k}(y) = 2^{n/2} H_n(2^{-1/2}(x+y))$$

และ

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} H_k(x) (2y)^{n-k} = H_n(x+y)$$

พหุนามแอร์มิตอยู่ในรูปแบบทั่วไป $\gamma_n^m(x)$ จะได้

$$e^{mxt-t^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^m(x) t^n$$

ได้ทำการศึกษาโดย Subramanyan ในปี 1990 คลาสของความสัมพันธ์พหุนามกำหนดเป็น

$$h_{n,m} = \gamma_n^m \left(\frac{2x}{m} \right)$$

และกับฟังก์ชันก่อกำเนิด

$$e^{2xt-t^m} = \sum_{n=0}^{\infty} h_{n,m}(x) t^n$$

Djordjevic ทำการศึกษาในปี1996 จะได้

$$H_n(x) = n!\, h_{n,2}(x).$$

ในปี1984 Roman กำหนดให้พหุนามแอร์มิต $H_n^{(\nu)}(x)$ กับความแปรปรวน ν

รูปแบบที่ดัดแปลงของพหุนามแอร์มิตบางครั้งกำหนดเป็น

$$\mathrm{He}_n(x) \equiv 2^{-n/2} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)$$

พหุนามอันดับแรกๆให้เป็น

$$
\begin{aligned}
He_1(x) &= x \\
He_2(x) &= x^2 - 1 \\
He_3(x) &= x^3 - 3x \\
He_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\
He_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x.
\end{aligned}
$$

เมื่ออันดับที่เล็กที่สุดของกำลังที่มากที่สุด สัมประสิทธิ์ไม่เป็นศูนย์คือ 1; 1; -1, 1; -3, 1; 3, -6, 1; 15, -10, 1;

3.6 พหุนามเชิงตั้งฉากรูปแบบอื่นๆ

3.6.1 พหุนามเชิงตั้งฉากที่ $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$ ที่นำเสนอในPodisuk [6]

ในวิธีการนี้ เราจะแนะนำลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากโดยมีฟังก์ชันถ่วงสองตัวบนช่วงปิด [0,1] จะแสดงตัวอย่างถึงพหุนามอันดับที่ 7 โดยเราจะใช้วิธีการของเกาส์เซียนเพื่อหาค่าประมานของพหุนามเชิงตั้งฉากทั้ง 14 พจน์

พหุนามเชิงตั้งฉากกำลัง n บนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ มีรูปแบบคือ

(1) $p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

(2) $\int_a^b w(x) p_k(x) q_m(x) dx = 0$

เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใดๆที่กำลัง $0 \le m \le n$

ถ้าพหุนามทั้งหมดในลำดับเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ลำดับของพหุนาม $p_0(x), p_1(x), p_2(x),\ldots, p_k(x),\ldots$ จะเรียกลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[-1,1]$ 2 ลำดับที่เรารู้จักกันดีคือพหุนามเชิงตั้งฉากของเลอจองด์ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x) = 1$ และพหุนามเชิงตั้งฉากของเชบีเชฟ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก คือ

$w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ และ $w(x) = \sqrt{1+x^2}$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวแรก $w(x)=\sqrt{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$

$p_1(x)=x-0.5309976652$

$p_2(x)=x^2-1.0234523093x+0.1773933380$
$=(x-0.2210883743)(x-0.8023639350)$

$p_3(x)=x^3-1.523000388x^2+0.6222069705x-0.0533317048$
$=(x-0.1162858009)(x-0.5133956005)(x-0.8933189873)$

$p_4(x)=x^4-2.0227637825x^3+1.3191134400x^2-0.2985481776x+0.0152586613$
$=(x-0.0710914682)(x-0.3381120474)(x-0.6799252579)(x-0.9336350090)$

$p_5(x)=x^5-2.5226535516x^4+2.2667965962x^3-0.8612858775x^2$
$+0.1250047782x-0.0042423780$
$=(x-0.9548402718)(x-0.2355290535)(x-0.5085089505)$
$(x-0.7759675012)(x-0.9548402718)$

$p_6(x)=x^6-3.0225935016x^5+3.4648487766x^4-1.8668649143x^3$
$+0.4723294550x^2-0.0478919716x+0.0011577601$
$=(x-0.0343070657)(x-0.1720591917)(x-0.3890126914)$
$(x-0.6210277770)(x-0.8421390033)(x-0.9640477726)$

$p_7(x)=x^7-3.5225450748x^6+4.9130663975x^5-3.4403639879x^4$
$+1.2630157827x^3-0.229883075x^2-0.0172345366x-0.0003118397$
$=(x-0.0257937474)(x-0.1311433199)(x-0.3014895668)(x-0.5062299305)$
$(x-0.7086365759)(x-0.8739788305)(x-0.9752731038)$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวที่สอง $W(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x)=1.0$$

$$p_1(x)=x-0.4699636663$$

$$\begin{aligned}p_2(x)&=x^2-0.9763049327x+0.1565476839\\&=(x-0.2022448825)(x-0.7740600502)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3(x)&=x^3-1.4769718145x^2+0.5783057699x-0.0468693681\\&=(x-0.1092977949)(x-0.4868318107)(x-0.8808422089)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_4(x)&=x^4-1.9772251490x^3+1.2528232316x^2-0.2733506531x+0.013373275\\&=(x-0.0678345926)(x-0.3221774801)(x-0.6599082002)(x-0.9273048762)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_5(x)&=x^5-2.4773413906x^4+2.1781537053x^3-0.8061026564x^2\\&\quad+0.1133515676x-0.0037116587\\&=(x-0.0460398287)(x-0.2261561871)(x-0.4915842851)\\&\quad(x-0.7623195614)(x-0.9512415283)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_6(x)&=x^6-2.9774060935x^5+3.3538442639x^4-1.7704776001x^3+0.4373512645x^2\\&\quad-0.0431352995x+0.0010116466\\&=(x-0.0332404393)(x-0.1665436383)(x-0.3745844495)\\&\quad(x-0.6120702823)(x-0.8258727200)(x-0.9650945641)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_7(x)&=x^7-3.4775224362x^6+4.7799443380x^5-3.2918678641x^4+1.1857046505x^3\\&\quad-0.2111263103x^2-0.01545005x-0.0002723320\\&=(x-0.0251083272)(x-0.1273823530)(x-0.2927935326)(x-0.4938380488)\\&\quad(x-0.6982797175)(x-0.8654225718)(x-0.9749328658)\end{aligned}$$

3.6.2 พหุนามเชิงตั้งฉากที่ $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $w(x)=1+x$ โดยที่ $a=1$ และ $b=1$ ที่นำเสนอ ในPodisuk [7]

ในวิธีการนี้ เราจะแนะนำลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉาก 2 ตัวบนช่วงปิด [0,1] จะแสดงตัวอย่างถึงพหุนามอันดับที่ 7 โดยเราจะใช้วิธีการของเกาส์เซียนเพื่อหาค่าประมานของพหุนามเชิงตั้งฉากทั้ง 14 พจน์ การประยุกต์มี 2 แบบ คือ 1. หาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตบนช่วงปิด [0,1] 2. แก้ปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธีรุงเง-คุตตา
พหุนามเชิงตั้งฉากกำลัง n บนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ มีรูปแบบคือ

(1) $p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

(2) $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx=0$

เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใดๆที่กำลัง $0\le m\le n$

ถ้าพหุนามทั้งหมดในลำดับเป็นพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ลำดับของพหุนาม $p_0(x),p_1(x),p_2(x),\ldots,p_k(x),\ldots$ จะเรียกลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[-1,1]$ 2 ลำดับที่เรารู้จักกันดีคือพหุนามเชิงตั้งฉากของเลอจองด์ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)=1$ และพหุนามเชิงตั้งฉากของเชบีเชฟ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก คือ $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ และ $w(x)=\sqrt{1-x^2}$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวแรก $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ **ปริพันธ์**ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$

$p_1(x)=x-0.4426950409$

$p_2(x)=x^2-0.9542080584x+0.1437706959$

$\quad=(x-0.1875223329)(x-0.7666857255)$

$p_3(x)=x^3-1.45586023x^2+0.55586023x-0.0426433717$

$\quad=(x-0.1201075693)(x-0.47555636)(x-0.8781963001)$

$p_4(x)=x^4-1.9564125459x^3+1.220333104x^2-0.259561813x+0.0121063415$

$\quad(x-0.0639745619)(x-0.3125345809)(x-0.6538160142)(x-0.9260873889)$

$p_5(x)=x^5-2.4566590551x^4+2.1355403359x^3-0.7776092666x^2$

$\quad+0.106664494x-0.003349097$

$\quad=(x-0.0437685388)(x-0.2189388636)(x-0.484477712)$

$\quad(x-0.7588883922)(x-0.9505855484)$

$p_6(x)=x^6-2.9566155936x^5+3.3006299909x^4-1.7217722270x^3+0.4183619162x^2$

$\quad-0.04028976641x+0.009100924$

$\quad=(x-0.0317937746)(x-0.1612506469)(x-0.3678556979)$

$\quad(x-0.6072541695)(x-0.8237650184)(x-0.9646962864)$

$p_7(x)=x^7-3.4505175086x^6+4.6977099607x^5-3.1967034225x^4$

$\quad+1.1338163328x^3-0.1977908682x^2-0.0140682856x-0.0002378395$

$\quad=(x-0.0239181439)(x-0.1225788814)(x-0.285455718)$

$\quad(x-0.4869781073)(x-0.6926762671)(x-0.8654888719)$

$\quad(x-0.9734215189)$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวสอง $w(x)=1+x$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ **ปริพันธ์**ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$

$p_1(x)=x-0.5555555556$

$p_2(x)=x^2-1.0461538462x+0.1923076923$

$=(x-0.2379422616)(x-0.8082115846)$

$p_3(x)=x^3-1.5442176871x^2+0.6462585034x-0.0585034014$

$=(x-0.1246629457)(x-0.5240590673)(x-0.8954956741)$

$p_4(x)=x^4-2.0436137058x^3+1.3530633416x^2-0.31390001394x+0.0168372644$

$=(x-0.0755251964)(x-0.3479782555)(x-0.6854382012)(x-0.9346720527)$

$p_5(x)=x^5-2.5433478572x^4+2.310808495x^3-0.89198572618x^2$

$+0.1326545105x-0.0046981132$

$=(x-0.0503722277)(x-0.2431410918)(x-0.5153615917)$

$(x-0.7790588782)(x-0.9554141644)$

$p_6(x)=x^6-3.0432049788x^5+3.5189761239x^4-1.9180200925x^3+0.49308357123x^2$

$-0.0511858546545x+0.0012852315$

$=(x-0.0359032117)(x-0.1779330612)(x-0.3936011651)$

$(x-0.6310140364)(x-0.8370816759)(x-0.9676718227)$

$p_7(x)=x^7-3.5430806493x^6+4.97772551647x^5-3.516979401x^4+1.3064011368x^3$

$-0.24152023596x^2-0.01852185x-0.0003467331$

$=(x-0.0268513306)(x-0.13525091)(x-0.3073502987)$

$(x-0.5112719338)(x-0.7116468084)(x-0.8752079132)$

$(x-0.9755014545)$

3.6.3 พหุนามเชิงตั้งฉาก $w(x)=1+x^2, w(x)=\frac{1}{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ที่นำเสนอใน Podisuk [8]

ในวิธีการนี้จะแสดงลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากโดยใช้ปริพันธ์จำกัดเขตเชิงตัวเลขและผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นในสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในการหาคำตอบ พหุนามเชิงตั้งฉากนี้อยู่บนช่วงปิด $[0,1]$ สอดคล้องกับฟังก์ชันถ่วง $w(x)=1+x^2$ และ $w(x)=\frac{1}{1+x^2}$

พหุนามเชิงตั้งฉากกำลัง n บนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ มีรูปแบบคือ

(1) $p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$

(2) $\int_a^b w(x)p_k(x)q_m(x)dx=0$

เมื่อ $q_m(x)$ เป็นพหุนามกำลัง m ใดๆที่กำลัง $0\le m\le n$

ถ้า $p_0(x), p_1(x), p_2(x),..., p_k(x),...$ เป็นพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ แล้ว $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของพหุนามเชิงตั้งฉากบนช่วงปิด $[a,b]$ ซึ่งมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวแรก $w(x)=1+x^2$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$

$p_1(x)=x-0.562500000$

$p_2(x)=(x-0.2210883743)(x-0.8023639350)$

$p_3(x)=(x-0.120065066)(x-0.526975829)(x-0.898932662)$

$p_4(x)=(x-0.072817105)(x-0.346490283)(x-0.689691855)(x-0.936518836)$

$p_5(x)=(x-0.048731794)(x-0.240453518)(x-0.517100155)(x-0.782515439)$
$(x-0.956500972)$

$p_6(x)=(x-0.034855425)(x-0.175352887)(x-0.393276017)(x-0.633693895)$
$(x-0.839646562)(x-0.968360026)$

$p_7(x)=(x-0.026152331)(x-0.133115438)(x-0.306025653)(x-0.512533058)$
$(x-0.714295655)(x-0.877103726)(x-0.975965003)$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวที่สอง $w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$
$p_1(x)=x-0.441271200$
$p_2(x)=(x-0.193785467)(x-0.758539074)$
$p_3(x)=(x-0.106061793)(x-0.473926138)(x-0.873923099)$
$p_4(x)=(x-0.066296331)(x-0.314609924)(x-0.649700478)(x-0.923830906)$
$p_5(x)=(x-0.045195026)(x-0.221694947)(x-0.483271116)(x-0.755225545)$
$\quad(x-0.949289170)$
$p_6(x)=(x-0.032728268)(x-0.163771835)(x-0.368603807)(x-0.604811966)$
$\quad(x-0.82099857)(x-0.963898678)$
$p_7(x)=(x-0.024787058)(x-0.125615801)(x-0.288639812)(x-0.487798470)$
$\quad(x-0.691361285)(x-0.864072856)(x-0.973029236)$

3.6.4 ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(t)=1+sin(1/t) บนช่วง[0,1] นำเสนอโดย Gautschi[4]

การสร้างพหุนามเชิงตั้งฉากที่มีความสัมพันธ์กับฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก (ที่ใกล้จุด(0,0)) จากเชบีเชฟทำให้ได้ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด

$$\mu_k = \int_0^1 t^k [1+\sin(1/t)]dt, k = 0,1,2,... \tag{3.6.4.1}$$

เป็นที่รู้กันดีว่าสภาวะที่เกิดการคาดเคลื่อนของการเข้าใกล้นี้ ต้องมีความเที่ยงตรงในการคำนวณ ให้การคำนวณสมการที่(3.6.4.1) เราพิจารณาอันดับแรกที่หลักโคนโมเมนต์ $\mu_k^0 = \int_0^1 t^k \sin(1/t)dt$ โดยเปลี่ยนตัวแปรจาก $1/t$ เป็น t จะได้

$$\mu_k^0 = \int_1^\infty t^{-(k+2)} \sin t dt$$

และการหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนสองครั้งแล้วจะได้ค่า μ_k^0 ดังนี้

$$\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}(\cos 1 - \mu_{k-1}^0) + \sin 1\right], k = 0,1,2,... \tag{3.6.4.2}$$

โดยที่

$$\mu_{-1}^0 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - Si(1), \mu_0^0 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt = \sin 1 - Ci(1) \tag{3.6.4.3}$$

ที่ซึ่ง Si และ Ci เป็น sine และ cosine ปริพันธ์ ในพจน์ของโคนโมเมนต์ จะได้

$$\mu_k = \frac{1}{k+1} + \mu_k^0, k = 0,1,2,... \tag{3.6.4.4}$$

ขั้นตอนวิธีเชบีเชฟ ทำให้ได้ว่า อันดับที่หนึ่งของ 2n โมเมนต์ μ_k เมื่อ k=0,1,...,2n-1 และจากนั้นทำให้ n อันดับที่หนึ่งของสัมประสิทธิ์ซ้ำคือ μ_k , μ_k เมื่อ k=0,1,...,n-1 ในนี้มีความสัมพันธ์ซ้ำสามพจน์ดังนี้

$$\pi_{k+1}(t) = (t-\alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), k = 0,1,...,n-1$$

$$\pi_{-1}(t) = 0, \pi_0(t) = 1 \qquad (3.6.4.5)$$

ให้ $W(x) = 1+\sin(1/t)$, $a = 0$ และ $b = 1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก โดยเราจะใช้ค่าของ $Ci(1) = 0.3374039229$ และ $Si(1) = 0.9460830704$ นำไปคำนวณในสมการที่ให้มาเพื่อใช้ในการหาปริพันธ์

$\boxed{\text{จาก} \quad \mu_k = \frac{1}{k+1} + \mu_k^0}$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

เมื่อ k=0

$\mu_0 = \frac{1}{0+1} + \mu_0^0 = 1 + \mu_0^0$

จาก $\mu_0^0 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt = \sin 1 - Ci(1)$ เมื่อ $Ci(1) = 0.3374039229$

$\mu_0^0 = \sin 1 - 0.3374039229 = 0.50406706190789$

$\mu_0 = 1 + 0.50406706190789 = 1.5040670619078965$

เมื่อ k=1

$\mu_1 = \frac{1}{1+1} + \mu_1^0 = \frac{1}{2} + \mu_1^0$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=0</u> $\mu_1^0 = \frac{1}{0+2}\left[\frac{1}{0+1}\left(\cos 1 - \mu_{-1}^0\right) + \sin 1\right]$

และจาก $\mu_{-1}^0 = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - Si(1) = 0.62471325639490$ เมื่อ $Si(1) = 0.9460830704$

$\mu_1^0 = \frac{1}{0+2}\left[\frac{1}{0+1}\left(\cos 1 - 0.624713256\right) + \sin 1\right] = 0.37853001733802$

$\mu_1 = \frac{1}{2} + 0.37853001733802 = 0.87853001733802$

เมื่อ k=2

$$\mu_2 = \frac{1}{2+1} + \mu_2^0 = \frac{1}{3} + \mu_2^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=1</u> $\mu_2^0 = \frac{1}{1+2}\left[\frac{1}{1+1}\left(\cos 1 - \mu_0^0\right) + \sin 1\right] = 0.28652953559601$

$$\mu_2 = \frac{1}{3} + 0.28652953559601 = 0.61986286892934$$

เมื่อ k=3

$$\mu_3 = \frac{1}{3+1} + \mu_3^0 = \frac{1}{4} + \mu_3^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=2</u> $\mu_3^0 = \frac{1}{2+2}\left[\frac{1}{2+1}\left(\cos 1 - \mu_1^0\right) + \sin 1\right] = 0.22384877024615$

$$\mu_3 = \frac{1}{4} + 0.22384877024615 = 0.47384877024615$$

เมื่อ k=4

$$\mu_4 = \frac{1}{4+1} + \mu_4^0 = \frac{1}{5} + \mu_4^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=3</u> $\mu_4^0 = \frac{1}{3+2}\left[\frac{1}{3+1}\left(\cos 1 - \mu_2^0\right) + \sin 1\right] = 0.18098283547519$

$$\mu_4 = \frac{1}{5} + 0.18098283547519 = 0.38098283547519$$

เมื่อ k=5

$$\mu_5 = \frac{1}{5+1} + \mu_5^0 = \frac{1}{6} + \mu_5^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=4</u> $\mu_5^0 = \frac{1}{4+2}\left[\frac{1}{4+1}\left(\cos 1 - \mu_3^0\right) + \sin 1\right] = 0.15079361532205$

$$\mu_5 = \frac{1}{6} + 0.15079361532205 = 0.31746028198872$$

เมื่อ k=6

$$\mu_6 = \frac{1}{6+1} + \mu_6^0 = \frac{1}{7} + \mu_6^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,13$

<u>เมื่อ k=5</u> $\mu_6^0 = \frac{1}{5+2}\left[\frac{1}{5+1}\left(\cos 1 - \mu_4^0\right) + \sin 1\right] = 0.12876536617239$

$$\mu_6 = \frac{1}{7} + 0.12876536617239 = 0.27162250902953$$

เมื่อ k=7

$$\mu_7 = \frac{1}{7+1} + \mu_7^0 = \frac{1}{8} + \mu_7^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,13$

<u>เมื่อ k=6</u> $\mu_7^0 = \frac{1}{6+2}\left[\frac{1}{6+1}\left(\cos 1 - \mu_5^0\right) + \sin 1\right] = 0.11213938543217$

$$\mu_7 = \frac{1}{8} + 0.11213938543217 = 0.23713938543217$$

เมื่อ k=8

$$\mu_8 = \frac{1}{8+1} + \mu_8^0 = \frac{1}{9} + \mu_8^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,13$

<u>เมื่อ k=7</u> $\mu_8^0 = \frac{1}{7+2}\left[\frac{1}{7+1}\left(\cos 1 - \mu_6^0\right) + \sin 1\right] = 0.09921256691887$

$$\mu_8 = \frac{1}{9} + 0.09921256691887 = 0.21032367802100$$

เมื่อ k=9

$$\mu_9 = \frac{1}{9+1} + \mu_9^0 = \frac{1}{10} + \mu_9^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^0\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,13$

<u>เมื่อ k=8</u> $\mu_9^0 = \frac{1}{8+2}\left[\frac{1}{8+1}\left(\cos 1 - \mu_7^0\right) + \sin 1\right] = 0.088904464263412$

$$\mu_9 = \frac{1}{10} + 0.088904464263412 = 0.188904464263412$$

เมื่อ k=10

$$\mu_{10} = \frac{1}{10+1} + \mu_{10}^{0} = \frac{1}{11} + \mu_{10}^{0}$$

จาก $\mu_{k+1}^{0} = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^{0}\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

เมื่อ k=9 $\mu_{10}^{0} = \frac{1}{9+2}\left[\frac{1}{9+1}\left(\cos 1 - \mu_{8}^{0}\right) + \sin 1\right] = 0.08050726897298$

$$\mu_{10} = \frac{1}{11} + 0.08050726897298 = 0.17141635988207$$

เมื่อ k=11

$$\mu_{11} = \frac{1}{11+1} + \mu_{11}^{0} = \frac{1}{12} + \mu_{11}^{0}$$

จาก $\mu_{k+1}^{0} = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^{0}\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

เมื่อ k=10 $\mu_{11}^{0} = \frac{1}{10+2}\left[\frac{1}{10+1}\left(\cos 1 - \mu_{9}^{0}\right) + \sin 1\right] = 0.07354226268554$

$$\mu_{11} = \frac{1}{12} + 0.07354226268554 = 0.15687559601888$$

เมื่อ k=12

$$\mu_{12} = \frac{1}{12+1} + \mu_{12}^{0} = \frac{1}{13} + \mu_{12}^{0}$$

จาก $\mu_{k+1}^{0} = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^{0}\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

เมื่อ k=11 $\mu_{12}^{0} = \frac{1}{11+2}\left[\frac{1}{11+1}\left(\cos 1 - \mu_{10}^{0}\right) + \sin 1\right] = 0.06767594137557$

$$\mu_{12} = \frac{1}{13} + 0.06767594137557 = 0.14459901829865$$

เมื่อ k=13

$$\mu_{13} = \frac{1}{13+1} + \mu_{13}^{0} = \frac{1}{14} + \mu_{13}^{0}$$

จาก $\mu_{k+1}^{0} = \frac{1}{k+2}\left[\frac{1}{k+1}\left(\cos 1 - \mu_{k-1}^{0}\right) + \sin 1\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

เมื่อ k=12 $\mu^{0} = \frac{1}{12+2}\left[\frac{1}{12+1}\left(\cos 1 - \mu_{11}^{0}\right) + \sin 1\right] = 0.06266968596530$

$$\mu_{13} = \frac{1}{14} + 0.06266968596530 = 0.13409825739388$$

นำผลลัพท์ที่ได้จากการหาปริพันธ์แทนค่าในพหุนามเชิงตั้งฉากจะได้ดังนี้

$P_0(x) = 1.0$

$P_1(x) = x - 0.58411158915971$

$P_2(x) = (x^2 - 1.0475504276x + 0.19975281328)$

$= (x - 0.25066779663372143017933592550803)(x - 0.79688263096627856982066407449197)$

$P_3(x) = x^3 - 1.5453133879x^2 + 0.64226383703x - 0.053331691216$

$= (x - 0.11014763253225962983751411680908)(x - 0.54225045181748092993063183964436)$

$(x - 0.89291530355025944023185404354655)$

$P_4(x) = x^4 - 2.0809723570x^3 + 1.4145459603x^2 - 0.33924918030x + 0.017485542076$

$= (x - 0.06988045332383385950927972990598)(x - 0.38953709443750893986222856780907)$

$(x - 0.68827923194711035034420664104089](x - 0.93327557729154685028428506124945)$

$P_5(x) = x^5 - 2.5478870542x^4 + 2.3235876385x^3 - 0.90299274239x^2 + 0.13568352985x$

$- 0.0048259647129$

$= (x - 0.05039837206752205600004218025811 0)(x - 0.24938655795857394122593023830712)$

$(x - 0.51972000381183520014976428880353)(x - 0.77458566579359322044425870268495)$

$(x - 0.95379645456847558218000458994629)$

$P_6(x) = x^6 - 3.0428985420x^5 + 3.5121950160x^4 - 1.9020626509x^3 + 0.479942251797x^2 -$

$0.047352564962x + 0.0011190032598$

$= (x - 0.03369472845247311963602636461725 3)(x - 0.15549991211152837925117627528172)$

$(x - 0.41650309118098299460019962872368)(x - 0.63459975975126969045155620408811)$

$(x - 0.83553961803771040435132861877510)(x - 0.96706143246603541170971290851413)$

$\mathrm{P}_7(\mathrm{x}) = x^7 - 3.5765134367x^6 + 5.0800707555x^5 - 3.6338966329x^4 + 1.3651153144x^3 -$

$0.25301565376x^2 + 0.018807724545x - 0.00032753741720$

$= (x - 0.02447813238424463967046638189515 0)(x - 0.12225516034772502465708530024606)$

$(x - 0.34398640427472470120951815872160)(x - 0.52353754295161328368898118511876)$

$(x - 0.71299667070910623037665675016524)(x - 0.87413969597381684621231879820281)$

$(x - 0.97511983005876927418497342565038)$

3.6.5ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก w(t)=1+cos(1/t) **บนช่วง [0,1] นำเสนอโดย Gautschi[4]**

เปรียบเทียบกับตอนที่ 2.1 เรากำหนดให้

$$\mu_k = \int_0^1 t^k [1+\cos(1/t)]dt, k = 0,1,2,... \quad (3.6.5.1)$$

และ $\mu_k^0 = \int_0^1 t^k \cos(1/t)dt$ และ หาความสัมพันธ์เวียนบังเกิด μ_k^0

$$\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}(\sin 1 + \mu_{k-1}^0)\right], k = 0,1,2,... \quad (3.6.5.2)$$

กับ

$$\mu_{-1}^0 = -Ci(1), \mu_0^0 = \cos 1 + Si(1) - \frac{\pi}{2} \quad (3.6.5.3)$$

$W(x) = 1+\cos(1/t)$, $a = 0$ และ $b = 1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก โดยเราจะใช้ค่าของ $Ci(1) = 0.3374039229$ และ $Si(1) = 0.9460830704$ นำไปคำนวณในสมการที่ให้มาเพื่อใช้ในการหาปริพันธ์

จาก $\boxed{\mu_k = \frac{1}{k+1} + \mu_k^0}$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

เมื่อ k=0

$\mu_0 = \frac{1}{0+1} + \mu_0^0 = 1 + \mu_0^0$

จาก $\mu_0^0 = \cos 1 + Si(1) - \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $Si(1) = 0.9460830704$

$\mu_0^0 = -0.084410950526756901$

$\mu_0 = 1 + (-0.0844109505267569) = 0.9155890494732431$

เมื่อ k=1

$$\mu_1 = \frac{1}{1+1} + \mu_1^0 = \frac{1}{2} + \mu_1^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,13$

เมื่อ k=0 $\mu_1^0 = \frac{1}{0+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{0+1}\left(\sin 1 + \mu_{-1}^0\right)\right] =$

และจาก $\mu_{-1}^0 = -Ci(1) = -0.3374039229$ เมื่อ $Ci(1) = 0.3374039229$

$$\mu_1^0 = \frac{1}{0+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{0+1}\left(\sin 1 + (-0.3374039229)\right)\right] = 0.018117621980122$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} + 0.018117621980122 = 0.518117621980122$$

เมื่อ k=2

$$\mu_2 = \frac{1}{2+1} + \mu_2^0 = \frac{1}{3} + \mu_2^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,13$

เมื่อ k=1 $\mu_2^0 = \frac{1}{1+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{1+1}\left(\sin 1 + \mu_0^0\right)\right] = 0.053924096242523$

$$\mu_2 = \frac{1}{3} + 0.053924096242523 = 0.387257429575866$$

เมื่อ k=3

$$\mu_3 = \frac{1}{3+1} + \mu_3^0 = \frac{1}{4} + \mu_3^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\ldots,13$

เมื่อ k=2 $\mu_3^0 = \frac{1}{2+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{2+1}\left(\sin 1 + \mu_1^0\right)\right] = 0.063443192568033$

$$\mu_3 = \frac{1}{4} + 0.063443192568033 = 0.313443192568033$$

เมื่อ k=4

$$\mu_4 = \frac{1}{4+1} + \mu_4^0 = \frac{1}{5} + \mu_4^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=3</u> $\mu_4^0 = \frac{1}{3+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{3+1}\left(\sin 1 + \mu_2^0\right)\right] = 0.063290707121107$

$$\mu_4 = \frac{1}{5} + 0.063290707121107 = 0.263290707121107$$

เมื่อ k=5

$$\mu_5 = \frac{1}{5+1} + \mu_5^0 = \frac{1}{6} + \mu_5^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=4</u> $\mu_5^0 = \frac{1}{4+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{4+1}\left(\sin 1 + \mu_3^0\right)\right] = 0.059886578398826$

$$\mu_5 = \frac{1}{6} + 0.059886578398826 = 0.226553245065492$$

เมื่อ k=6

$$\mu_6 = \frac{1}{6+1} + \mu_6^0 = \frac{1}{7} + \mu_6^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=5</u> $\mu_6^0 = \frac{1}{5+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{5+1}\left(\sin 1 + \mu_4^0\right)\right] = 0.055644098649520$

$$\mu_6 = \frac{1}{7} + 0.055644098649520 = 0.1985012415066627$$

เมื่อ k=7

$$\mu_7 = \frac{1}{7+1} + \mu_7^0 = \frac{1}{8} + \mu_7^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=6</u> $\mu_7^0 = \frac{1}{6+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{6+1}\left(\sin 1 + \mu_5^0\right)\right] = 0.051442117461969$

$$\mu_7 = \frac{1}{8} + 0.051442117461969 = 0.176442117461969$$

เมื่อ k=8

$$\mu_8 = \frac{1}{8+1} + \mu_8^0 = \frac{1}{9} + \mu_8^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=7</u> $\mu_8^0 = \frac{1}{7+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{7+1}\left(\sin 1 + \mu_6^0\right)\right] = 0.047573657826218$

$$\mu_8 = \frac{1}{9} + 0.047573657826218 = 0.158684768937329$$

เมื่อ k=9

$$\mu_9 = \frac{1}{9+1} + \mu_9^0 = \frac{1}{10} + \mu_9^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=8</u> $\mu_9^0 = \frac{1}{8+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{8+1}\left(\sin 1 + \mu_7^0\right)\right] = 0.044108973894927$

$$\mu_9 = \frac{1}{10} + 0.044108973894927 = 0.144108973894927$$

เมื่อ k=10

$$\mu_{10} = \frac{1}{10+1} + \mu_{10}^0 = \frac{1}{11} + \mu_{10}^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=9</u> $\mu_{10}^0 = \frac{1}{9+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{9+1}\left(\sin 1 + \mu_8^0\right)\right] = 0.041036167418612$

$$\mu_{10} = \frac{1}{11} + 0.041036167418612 = 0.131945258327703$$

เมื่อ k=11

$$\mu_{11} = \frac{1}{11+1} + \mu_{11}^0 = \frac{1}{12} + \mu_{11}^0$$

จาก $\mu_{k+1}^0 = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^0\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,...,13$

<u>เมื่อ k=10</u> $\mu_{11}^0 = \frac{1}{10+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{10+1}\left(\sin 1 + \mu_9^0\right)\right] = 0.038316253074596$

$$\mu_{11} = \frac{1}{12} + 0.038316253074596 = 0.121649586407930$$

เมื่อ k=12

$$\mu_{12} = \frac{1}{12+1} + \mu_{12}^{0} = \frac{1}{13} + \mu_{12}^{0}$$

จาก $\mu_{k+1}^{0} = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^{0}\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\dots,13$

<u>เมื่อ k=11</u> $\mu_{12}^{0} = \frac{1}{11+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{11+1}\left(\sin 1 + \mu_{10}^{0}\right)\right] = 0.035904618706354$

$$\mu_{12} = \frac{1}{13} + 0.035904618706354 = 0.112827695629431$$

เมื่อ k=13

$$\mu_{13} = \frac{1}{13+1} + \mu_{13}^{0} = \frac{1}{14} + \mu_{13}^{0}$$

จาก $\mu_{k+1}^{0} = \frac{1}{k+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{k+1}\left(\sin 1 + \mu_{k-1}^{0}\right)\right]$ เมื่อ $k = 0,1,2,\dots,13$

<u>เมื่อ k=12</u> $\mu_{13}^{0} = \frac{1}{12+2}\left[\cos 1 - \frac{1}{12+1}\left(\sin 1 + \mu_{11}^{0}\right)\right] = 0.033759026035183$

$$\mu_{13} = \frac{1}{14} + 0.033759026035183 = 0.105187597463755$$

นำผลลัพท์ที่ได้จากการหาปริพันธ์แทนค่าในพหุนามเชิงตั้งฉากจะได้ดังนี้

$P_0(x) = 1.0$

$P_1(x) = x - 0.56588446779690$

$P_2(x) = x^2 - 1.0025531762x + 0.14437123802$

$= (x - 0.17431025992968662513010612771657)(x - 0.82824291627031337486989387228343)$

$P_3(x) = x^3 - 1.5824780708x^2 + 0.67308939494x - 0.053909500391$

$= (x - 0.10373301777822315508964367748270)(x - 0.57512568516024958877787855736580)$

$(x - 0.90361936786152725613247776515149)$

$P_4(x) = x^4 - 2.0076378803x^3 + 1.2840862156x^2 - 0.27811299492x + 0.013996674327$

$= (x - 0.071245702984702891835316043879885)(x - 0.29958275566851716279985443857906)$

$(x - 0.70000051298413039539025757287773)(x - 0.93680890866264954997457194466333)$

$P_5(x) = x^5 - 2.5449446465x^4 + 2.2864412946x^3 - 0.84721948143x^2 + 0.11202998832x$

$- 0.0034038523254$

$= (x - 0.042606870630256823864869747375654)(x - 0.18650689639698773687849271576842)$

$(x - 0.56158130377969163741570594913558)(x - 0.79591164526503740199239781398089)$

$(x - 0.95833793042802639984853377373945)$

$$P_6(x) = x^6 - 3.0923378873x^5 + 3.6348966522x^4 - 2.0092008317x^3 + 0.51848325821x^2$$

$$-0.052316088766x + 0.0012385722196$$

$$= (x - 0.0333643522433295788272841551519 23)(x - 0.1614814683370561403025651189128 9)$$

$$(x - 0.4292401258738872935322588698171 2)(x - 0.6535888990603594033835264127009 0)$$

$$(x - 0.8455077877148247611220030060890 2)(x - 0.9691552540705428228323624373281 5)$$

$$P_7(x) = x^7 - 3.5473940562x^6 + 4.9742231281x^5 - 3.4905806059x^4 + 1.2776224130x^3$$

$$-0.23076198036x^2 + 0.017442871855x - 0.00033263143225$$

$$= (x - 0.0278846338818165355968285558896 35)(x - 0.1364725480349205284405058719569 6]$$

$$(x - 0.2588521809128617051975889973262 7)(x - 0.5404326356270729856760431998853 8)$$

$$(x - 0.7264808632381858463156984866896 5)(x - 0.8807735572079091769874899012064 0)$$

$$(x - 0.9764976372972332217858449870457 1)$$

บทที่ 4
การนำพหุพนามเชิงตั้งฉากไปใช้ในการคำนวณเชิงตัวเลข

4.1 รูปแบบการประมาณค่าปริพันธ์โดยวิธีของเกาส์-ควอตเดรเจอร์

สูตรนิวตันโค้ต n จุดที่ปริพันธ์บนช่วง $[a,b]$ รูปแบบคือ

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{4.1.1}$$

ซึ่งน้ำหนัก A_k และจุด x_k ได้มาจากสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \dots + A_n &= b - a \\ A_1x_1 + A_2x_1 + \dots + A_nx_n &= \int_a^b x\,dx \\ &\vdots \\ A_1x_1^{n-1} + A_2x_2^{n-1} + \dots + A_nx_n^{n-1} &= \int_a^b x^{n-1}dx \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

รูปแบบที่ (4.1.1) จะไม่มีค่าคลาดเคลื่อน เมื่อ $f(x)$ เป็นพหุนาม $0 \le m \le n-1$

รูปแบบเกาส์-ควอตเดรเจอร์ n จุดสำหรับการหาค่าของปริพันธ์จำกัดเขตบนช่วงปิด [a,b] โดยมีรูปแบบของสมการดังนี้

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{4.1.3}$$

ซึ่ง x_k คือค่ารากของพหุนามเชิงตั้งฉาก $p_n(x)$ ของดีกรี n บนช่วงปิด [a,b] ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ และ A_k สามารถหาได้จากสูตรดังนี้

$$A_k = \frac{1}{p_n'(x_k)} \int_a^b \frac{w(x)p_n(x)}{x - x_k}dx \tag{4.1.4}$$

รูปแบบที่ (4.1.3) จะไม่มีค่าคลาดเคลื่อน เมื่อ $f(x)$ เป็นพหุนาม $0 \le m \le 2n-1$

4.1.1 รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์

พหุนามตั้งฉากเลอจองด์เป็นพหุนามตั้งฉากในช่วงปิด $[-1,1]$ โดยมีฟังก์ชันถ่วง $w(x)=1$ ดังนั้นรูปแบบของการหาปริพันธ์แบบนี้คือ

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f]$$

การหาจุด x_k และจุดถ่วง A_k เป็นไปตามที่ได้ศึกษามาแล้ว

ตารางที่4.1 เป็นตารางค่าของ x_k และ A_k จากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ เพื่อสะดวกในการใช้รูปแบบในการหาปริพันธ์

Roo ts (z_i)	$\int_{-1}^{1} F(z)dz = \sum_{i=0}^{n} w_i F(z_i)$	Weight Factors (w_i)
± 0.57735 02691 89626	Two-Point Formula n = 1	1.00000 00000 00000
0.00000 00000 00000 ± 0.77459 66692 41483	Three-Point Formula n = 2	0.88888 88888 88889 0.55555 55555 55556
± 0.33998 10435 84856 ± 0.86113 63115 94053	Four-Point Formula n = 3	0.65214 51548 62546 0.34785 48451 37454
0.00000 00000 00000 ± 0.53846 93101 05683 ± 0.93246 95142 03152	Five-Point Formula n = 4	0.56888 88888 88889 0.47862 86704 99366 0.23692 68850 56189

4.1.2 รูปแบบของพหุนามลาแกร์

พหุนามตั้งฉากลาแกร์ที่ $w(x) = e^{-x}$ โดยที่ a = 0 และ b = ∞ ดังนั้นรูปแบบของการหาปริพันธ์แบบนี้จะเป็น

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f]$$

ตารางที่4.2 ค่ารากของพหุนามลาแกร์และตัวประกอบถ่วงน้ำหนักของเกาส์-ลาแกร์

Roots (z_i)	$\int_0^\infty e^{-z} F(z) dz = \sum_{i=0}^{n} w_i F(z_i)$	Weight Factors (w_i)
0.58578 64376 27	Two-Point Formula	085355 33905 93
3.41421 35623 73	n = 1	0.14644 66094 07
0.41577 45567 83	Three-Point Formula	0.71109 30099 29
2.29428 03602 79	n = 2	0.27851 77335 69
6.28994 50829 37		0.(1)10389 25650 16
0.32254 76896 19	Four-Point Formula	0.60315 41043 42
1.74576 11011 58	n = 3	0.35741 86924 38
4.53662 02969 21		0.(1) 38887 90851 50
9.39507 09123 01		0.(3) 53929 47055 61
.26356 03197 18	Five-Point Formula	0.52175 56105 83
1.41340 30591 07	n = 4	0.39866 68110 83
3.59642 57710 41		0.(1)75942 44968 17
7.08581 00058 59		0.(2)36117 58679 92
12.64080 08442 76		0.(4)23369 97238 58

4.1.3 รูปแบบของพหุนามแอร์มิต

พหุนามตั้งฉากแอร์มิต $w(x) = e^{-x^2}$ ดังนั้นรูปแบบของการหาปริพันธ์แบบนี้จะเป็น

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f]$$

ตารางที่4.3 ค่ารากของพหุนามแอร์มิต $H_{n+1}(x)$ และตัวประกอบถ่วงน้ำหนักของเกาส์-แอร์มิต

Roots (x_i)	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} F(x)dz = \sum_{i=0}^{n} w_i F(x_i)$	Weight Factors (w_i)
± 0.70710 67811	Two-Point Formula n = 1	0.88622 69255
± 1.22474 48714 0.00000 00000	Three-Point Formula n = 2	0.29540 89752 1.18163 59006
± 1.65068 01239 ± 0.52464 76233	Four-Point Formula n = 3	0.08131 28354 0.80491 40900
± 2.02018 28705 ± 0.95857 24646 0.00000 00000	Five-Point Formula n = 4	0.01995 32421 0.39361 93232 0.94530 87205

4.1.4 พหุนามเชิงตั้งฉาก $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $w(x)=\sqrt{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ที่นำเสนอโดยPodisuk [6]

จากฟังก์ชันถ่วงตัวแรก $w(x)=\sqrt{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหา พหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x)=1.0$$

$$p_1(x)=x-0.5309976652$$

$$\begin{aligned}p_2(x)&=x^2-1.0234523093x+0.1773933380\\&=(x-0.2210883743)(x-0.8023639350)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3(x)&=x^3-1.523000388x^2+0.6222069705x-0.0533317048\\&=(x-0.1162858009)(x-0.5133956005)(x-0.8933189873)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_4(x)&=x^4-2.0227637825x^3+1.3191134400x^2-0.2985481776x\\&\quad+0.0152586613\\&=(x-0.0710914682)(x-0.3381120474)(x-0.6799252579)\\&\quad(x-0.9336350090)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_5(x)&=x^5-2.5226535516x^4+2.2667965962x^3-0.8612858775x^2\\&\quad+0.1250047782x-0.0042423780\\&=(x-0.9548402718)(x-0.2355290535)(x-0.5085089505)\\&\quad(x-0.7759675012)(x-0.9548402718)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_6(x)&=x^6-3.0225935016x^5+3.4648487766x^4-1.8668649143x^3\\&\quad+0.4723294550x^2-0.0478919716x+0.0011577601\\&=(x-0.0343070657)(x-0.1720591917)(x-0.3890126914)\\&\quad(x-0.6210277770)(x-0.8421390033)(x-0.9640477726)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_7(x)&=x^7-3.5225450748x^6+4.9130663975x^5-3.4403639879x^4\\&\quad+1.2630157827x^3-0.229883075x^2-0.0172345366x\\&\quad-0.0003118397\\&=(x-0.0257937474)(x-0.1311433199)(x-0.3014895668)\\&\quad(x-0.5062299305)(x-0.7086365759)(x-0.8739788305)\\&\quad(x-0.9752731038)\end{aligned}$$

ตารางที่ 4.4 ค่าของ A_n เมื่อ n = 1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\sqrt{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

n	A_n
1	1.1477935747
2	0.5358430511 0.6119505236
3	0.2891038080 0.5033299843 0.3553597823
4	0.1786775386 0.3512635205 0.3895324751 0.2283200405
5	0.1209662749 0.2508646114 0.3207202074 0.2972290388 0.1580134395
6	0.0851762636 0.1934604315 0.2405142322 0.2883510506 0.2249841592 0.1153074375
7	0.0656730956 0.1432560463 0.2020365663 0.2351217586 0.2318378479 0.1819149536 0.0879533063

จากฟังก์ชันถ่วงตัวที่สอง $W(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x)=1.0$$

$$p_1(x)=x-0.5555555556$$

$$\begin{aligned}p_2(x)&=x^2-1.0461538462x+0.1923076923\\&=(x-0.2379422616)(x-0.8082115846)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3(x)&=x^3-1.5442176871x^2+0.6462585034x-0.0585034014\\&=(x-0.1246629457)(x-0.5240590673)(x-0.8954956741)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_4(x)&=x^4-2.0436137058x^3+1.3530633416x^2-0.31390001394x\\&\quad+0.0168372644\\&=(x-0.0755251964)(x-0.3479782555)(x-0.6854382012)\\&\quad(x-0.9346720527)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_5(x)&=x^5-2.5433478572x^4+2.310808495x^3-0.89198572618x^2\\&\quad+0.1326545105x-0.0046981132\\&=(x-0.0503722277)(x-0.2431410918)(x-0.5153615917)\\&\quad(x-0.7790588782)(x-0.9554141644)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_6(x)&=x^6-3.0432049788x^5+3.5189761239x^4-1.9180200925x^3\\&\quad+0.49308357123x^2\\&\quad-0.0511858546545x+0.0012852315\\&=(x-0.0359032117)(x-0.1779330612)(x-0.3936011651)\\&\quad(x-0.6310140364)(x-0.8370816759)(x-0.9676718227)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_7(x)&=x^7-3.5430806493x^6+4.97772551647x^5-3.516979401x^4\\&\quad+1.3064011368x^3\\&\quad-0.24152023596x^2-0.01852185x-0.0003467331\\&=(x-0.0268513306)(x-0.13525091)(x-0.3073502987)\\&\quad(x-0.5112719338)(x-0.7116468084)(x-0.8752079132)\\&\quad(x-0.9755014545)\end{aligned}$$

ตารางที่ 4.5 ค่าของ A_n เมื่อ n = 1,2,3,...,7 จาก $W(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ โดยที่ $a = 0$ และ $b = 1$

n	A_n
1	0.8813735872
2	0.4687223003
	0.4126512869
3	0.2673101166
	0.3956641601
	0.2183993053
4	0.1693304129
	0.3041149290
	0.2749687503
	0.1329594948
5	0.1160525478
	0.2287920095
	0.2537321224
	0.1937894909
	0.0890074164
6	0.0842410462
	0.1748097707
	0.2165103552
	0.2002244676
	0.1419545688
	0.0636306786
7	0.0638402913
	0.1366261926
	0.1808261471
	0.1865650683
	0.1579689428
	0.1078426909
	0.0477042542

4.1.5 พหุนามเชิงตั้งฉากที่ $w(x)=\frac{1}{1+x}$, $w(x)=1+x$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ที่นำเสนอโดยPodisuk[7]

จากฟังก์ชันถ่วงตัวแรก $w(x)=\frac{1}{1+x}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ปริพันธ์ในการหา พหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$

$p_1(x)=x-0.4426950409$

$$
\begin{aligned}
p_2(x)&=x^2-0.9542080584x+0.1437706959\\
&=(x-0.1875223329)(x-0.7666857255)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_3(x)&=x^3-1.45586023x^2+0.55586023x-0.0426433717\\
&=(x-0.1201075693)(x-0.47555636)(x-0.8781963001)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_4(x)&=x^4-1.9564125459x^3+1.220333104x^2-0.259561813x+0.0121063415\\
&\quad(x-0.0639745619)(x-0.3125345809)(x-0.6538160142)\\
&\quad(x-0.9260873889)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_5(x)&=x^5-2.4566590551x^4+2.1355403359x^3-0.7776092666x^2\\
&\quad+0.106664494x-0.003349097\\
&=(x-0.0437685388)(x-0.2189388636)(x-0.484477712)\\
&\quad(x-0.7588883922)(x-0.9505855484)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_6(x)&=x^6-2.9566155936x^5+3.3006299909x^4-1.7217722270x^3\\
&\quad+0.4183619162x^2\\
&\quad-0.04028976641x+0.009100924\\
&=(x-0.0317937746)(x-0.1612506469)(x-0.3678556979)\\
&\quad(x-0.6072541695)(x-0.8237650184)(x-0.9646962864)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_7(x)&=x^7-3.4505175086x^6+4.6977099607x^5-3.1967034225x^4\\
&\quad+1.1338163328x^3-0.1977908682x^2-0.0140682856x\\
&\quad-0.0002378395\\
&=(x-0.0239181439)(x-0.1225788814)(x-0.285455718)\\
&\quad(x-0.4869781073)(x-0.6926762671)(x-0.8654888719)\\
&\quad(x-0.9734215189)
\end{aligned}
$$

ตารางที่ 4.6 ค่าของ A_n เมื่อ n = 1,2,3,...,7 จาก $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

n	A_n
1	$A_1 = 0.6931471806$
2	$A_1 = 0.3877545308$ $A_2 = 0.3053926497$
3	$A_1 = 0.2319457241$ $A_2 = 0.3026426227$ $A_3 = 0.1585588337$
4	$A_1 = 0.1518192973$ $A_2 = 0.2428050790$ $A_3 = 0.2027497073$ $A_4 = 0.0957730970$
5	$A_1 = 0.1063770448$ $A_2 = 0.1899308127$ $A_3 = 0.1923481582$ $A_4 = 0.1406443733$ $A_5 = 0.0638467916$
6	$A_1 = 0.0783982853$ $A_2 = 0.1497747410$ $A_3 = 0.1694242950$ $A_4 = 0.1477770260$ $A_5 = 0.1022402124$ $A_6 = 0.0455326209$
7	$A_1 = 0.0595720288$ $A_2 = 0.1194339275$ $A_3 = 0.1457598224$ $A_4 = 0.1411057007$ $A_5 = 0.1153590887$ $A_6 = 0.0776782011$ $A_7 = 0.0342384114$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวที่สอง $w(x)=1+x$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$p_0(x)=1.0$$

$$p_1(x)=x-0.5555555556$$

$$\begin{aligned}p_2(x)&=x^2-1.0461538462x+0.1923076923\\&=(x-0.2379422616)(x-0.8082115846)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3(x)&=x^3-1.5442176871x^2+0.6462585034x-0.0585034014\\&=(x-0.1246629457)(x-0.5240590673)(x-0.8954956741)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_4(x)&=x^4-2.0436137058x^3+1.3530633416x^2-0.31390001394x\\&\quad+0.0168372644\\&=(x-0.0755251964)(x-0.3479782555)(x-0.6854382012)\\&\quad(x-0.9346720527)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_5(x)&=x^5-2.5433478572x^4+2.310808495x^3-0.89198572618x^2\\&\quad+0.1326545105x-0.0046981132\\&=(x-0.0503722277)(x-0.2431410918)(x-0.5153615917)\\&\quad(x-0.7790588782)(x-0.9554141644)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_6(x)&=x^6-3.0432049788x^5+3.5189761239x^4-1.9180200925x^3\\&\quad+0.49308357123x^2\\&\quad-0.0511858546545x+0.0012852315\\&=(x-0.0359032117)(x-0.1779330612)(x-0.3936011651)\\&\quad(x-0.6310140364)(x-0.8370816759)(x-0.9676718227)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_7(x)&=x^7-3.5430806493x^6+4.97772551647x^5-3.516979401x^4\\&\quad+1.3064011368x^3\\&\quad-0.24152023596x^2-0.01852185x-0.0003467331\\&=(x-0.0268513306)(x-0.13525091)(x-0.3073502987)\\&\quad(x-0.5112719338)(x-0.7116468084)(x-0.8752079132)\\&\quad(x-0.9755014545)\end{aligned}$$

ตารางที่ 4.7 ค่าของ A_n เมื่อ n = 1,2,3,...,7 จาก $w(x)=1+x$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

n	A_n
1	$A_1=1.5$
2	$A_1=0.6645702798$ $A_2=0.8354297202$
3	$A_1=0.3388144440$ $A_2=0.6696725928$ $A_3=0.4915129632$
4	$A_1=0.2015128287$ $A_2=0.4476973456$ $A_3=0.5331714606$ $A_4=0.3176183650$
5	$A_1=0.1328921374$ $A_2=0.3067464033$ $A_3=0.4282332940$ $A_4=0.4115700284$ $A_5=0.2205581369$
6	$A_1=0.0940450312$ $A_2=0.2200386900$ $A_3=0.3284251085$ $A_4=0.3753700260$ $A_5=0.3205651549$ $A_6=0.1615559894$
7	$A_1=0.0700013581$ $A_2=0.1645530785$ $A_3=0.2533903427$ $A_4=0.3144010405$ $A_5=0.3202306328$ $A_6=0.2541998448$ $A_7=0.1232237026$

4.1.6 พหุนามเชิงตั้งฉากที่ $w(x)=1+x^2, w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ ที่นำเสนอในPodisuk [8]

จากฟังก์ชันถ่วงตัวแรก $w(x)=1+x^2$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ในการหาพหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$

$p_1(x)=x-0.562500000$

$p_2(x)=(x-0.2210883743)(x-0.8023639350)$

$p_3(x)=(x-0.120065066)(x-0.526975829)(x-0.898932662)$

$p_4(x)=(x-0.072817105)(x-0.346490283)(x-0.689691855)(x-0.936518836)$

$p_5(x)=(x-0.048731794)(x-0.240453518)(x-0.517100155)(x-0.782515439)$
$(x-0.956500972)$

$p_6(x)=(x-0.034855425)(x-0.175352887)(x-0.393276017)(x-0.633693895)$
$(x-0.839646562)(x-0.968360026)$

$p_7(x)=(x-0.026152331)(x-0.133115438)(x-0.306025653)(x-0.512533058)$
$(x-0.714295655)(x-0.877103726)(x-0.975965003)$

ตารางที่ 4.8 ค่าของ A_n เมื่อ $n=1,2,3,...,7$ จาก $w(x)=1+x^2$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

n	A_n
1	$A_1=1.333333333$
2	$A_1=0.577243436$ $A_2=0.756089898$
3	$A_1=0.301401349$ $A_2=0.574865467$ $A_3=0.457066517$
4	$A_1=0.183871036$ $A_2=0.379864871$ $A_3=0.468955741$ $A_4=0.300641686$
5	$A_1=0.123565973$ $A_2=0.263583592$ $A_3=0.363769366$ $A_4=0.371216675$ $A_5=0.211197727$
6	$A_1=0.088633223$ $A_2=0.192737152$ $A_3=0.276294160$ $A_4=0.324850557$ $A_5=0.294890749$ $A_6=0.155927492$
7	$A_1=0.066634511$ $A_2=0.146856753$ $A_3=0.214333954$ $A_4=0.265733414$ $A_5=0.282863978$ $A_6=0.237315183$ $A_7=0.119595541$

จากฟังก์ชันถ่วงตัวที่สอง $w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$ เราจะใช้ ปริพันธ์ใน การหา พหุนามเชิงตั้งฉาก

$p_0(x)=1.0$

$p_1(x)=x-0.441271200$

$p_2(x)=(x-0.193785467)(x-0.758539074)$

$p_3(x)=(x-0.106061793)(x-0.473926138)(x-0.873923099)$

$p_4(x)=(x-0.066296331)(x-0.314609924)(x-0.649700478)(x-0.923830906)$

$p_5(x)=(x-0.045195026)(x-0.221694947)(x-0.483271116)(x-0.755225545)$
$(x-0.949289170)$

$p_6(x)=(x-0.032728268)(x-0.163771835)(x-0.368603807)(x-0.604811966)$
$(x-0.82099857)(x-0.963898678)$

$p_7(x)=(x-0.024787058)(x-0.125615801)(x-0.288639812)(x-0.487798470)$
$(x-0.691361285)(x-0.864072856)(x-0.973029236)$

ตารางที่ 4.9 ค่าของ A_n เมื่อ $n=1,2,3,\ldots,7$ จาก $w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ โดยที่ $a=0$ และ $b=1$

n	A_n
1	$A_1 = 0.785398163$
2	$A_1 = 0.441221804$ $A_2 = 0.344176359$
3	$A_1 = 0.257604280$ $A_2 = 0.355001816$ $A_3 = 0.172792067$
4	$A_1 = 0.164957760$ $A_2 = 0.284785615$ $A_3 = 0.233637618$ $A_4 = 0.102017202$
5	$A_1 = 0.113728026$ $A_2 = 0.219178309$ $A_3 = 0.227607164$ $A_4 = 0.157853484$ $A_5 = 0.067031181$
6	$A_1 = 0.082860012$ $A_2 = 0.169594485$ $A_3 = 0.201088923$ $A_4 = 0.172314831$ $A_5 = 0.112201451$ $A_6 = 0.047338461$
7	$A_1 = 0.062540805$ $A_2 = 0.134769664$ $A_3 = 0.170204190$ $A_4 = 0.168473431$ $A_5 = 0.130531342$ $A_6 = 0.083807940$ $A_7 = 0.035070793$

4.1.7 พหุนามเชิงตั้งฉาก นำเสนอโดย Gautschi [4]

จากฟังก์ชันถ่วง $W(x) = 1 + \sin(1/t)$, $a = 0$ และ $b = 1$
เรานำค่าของ $W(x) = 1 + \sin(1/t)$ ลงไปแทนในสมการที่ (3.1.2) จะได้

$$\int_a^b [1 + \sin(1/t)](a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).1dx = 0$$
$$\int_a^b [1 + \sin(1/t)](a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).xdx = 0$$
$$\int_a^b [1 + \sin(1/t)](a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).x^2dx = 0$$
$$\vdots$$
$$\int_a^b [1 + \sin(1/t)](a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).x^{k-1}dx = 0$$

ถ้าให้ $c_i = \int_a^b [1 + \sin(1/t)]x^i dx$ เมื่อ $i = 0,1,2,\ldots,2k-1$

$$\left.\begin{aligned}
a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_{k-1}c_{k-1} &= -c_k \\
a_0c_1 + a_1c_2 + a_2c_3 + \ldots + a_{k-1}c_k &= -c_{k+1} \\
a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_4 + \ldots + a_{k-1}c_{k+1} &= -c_{k+2} \\
&\vdots \\
a_0c_{k-1} + a_1c_k + a_2c_{k+1} + \ldots + a_{k-1}c_{2k-2} &= -c_{2k-1}
\end{aligned}\right\} \quad (4.1.5)$$

เราสามารถหาค่าของ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ จากระบบของสมการเชิงเส้น (4.1) นั้น ทำให้เราสามารถหาพหุนามเชิงเส้นดีกรี1 ถึง ดีกรี 7 บนช่วง [0,1] ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันถ่วง $W(x) = 1 + \sin(1/t)$ ได้ โดยเราจะใช้รากของ $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_7(x)$ มาคำนวณหา

$P_0(x) = 1.0$

$P_1(x) = x - 0.58411158915971$

$P_2(x) = (x^2 - 1.0475504276x + 0.19975281328)$

$= (x - 0.25066779663372143017933592550803)(x - 0.79688263096627856982066407449197)$

$P_3(x) = x^3 - 1.5453133879x^2 + 0.64226383703x - 0.053331691216$

$= (x - 0.11014763253225962983751411680908)(x - 0.54225045181748092993063183964436)$

$(x - 0.89291530355025944023185404354655)$

$P_4(x) = x^4 - 2.0809723570x^3 + 1.4145459603x^2 - 0.33924918030x + 0.017485542076$

$= (x - 0.0069880453323833859509279729900598)(x - 0.38953709443750893986222856780907)$

$(x - 0.68827923194711035034420664104089](x - 0.93327557729154685028428506124945)$

$P_5(x) = x^5 - 2.5478870542x^4 + 2.3235876385x^3 - 0.90299274239x^2 + 0.13568352985x$

$- 0.0048259647129$

$= (x - 0.050398372067522056000042180258110)(x - 0.24938655795857394122593023830712)$

$(x - 0.51972000381183520014976428880353)(x - 0.77458566579359322044425870268495)$

$(x - 0.95379645456847558218000458994629)$

$P_6(x) = x^6 - 3.0428985420x^5 + 3.5121950160x^4 - 1.9020626509x^3 + 0.479942251797x^2 -$

$0.047352564962x + 0.0011190032598$

$= (x - 0.033694728452473119636026364617253)(x - 0.15549991211152837925117627528172)$

$(x - 0.41650309118098299460019962872368)(x - 0.63459975975126969045155620408811)$

$(x - 0.83553961803771040435132861877510)(x - 0.96706143246603541170971290851413)$

$\mathrm{P}_7(\mathrm{x}) = x^7 - 3.5765134367x^6 + 5.0800707555x^5 - 3.6338966329x^4 + 1.3651153144x^3 -$

$0.25301565376x^2 + 0.018807724545x - 0.00032753741720$

$= (x - 0.024478132384244639670466381895150)(x - 0.12225516034772502465708530024606)$

$(x - 0.34398640427472470120951815872160)(x - 0.52353754295161328368898118511876)$

$(x - 0.71299667070910623037665675016524)(x - 0.87413969597381684621231879820281)$

$(x - 0.97511983005876927418497342565038)$

ตารางที่ 4.10 ค่าของ A_n เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$ จาก $W(x) = 1 + \sin(1/t)$, $a = 0$ และ $b = 1$

n	A_n
1	1.504067062
2	0.58591396718 0.91815309482
3	0.25798890647 0.74863683409 0.49744132135
4	0.12362608315 0.51345984499 0.53665233820 0.33032879557
5	0.12864294741 0.19461309524 0.51041166551 0.45300256637 0.21739678737
6	0.084865287644 0.14221920257 0.34786821082 0.43826468426 0.33558850322 0.15526117339
7	0.061978423256 0.13458652536 0.20016241540 0.37088796114 0.36051392970 0.25869869987 0.11723910719

จากฟังก์ชันถ่วง $W(x) = 1 + \cos(1/t)$, $a = 0$ และ $b = 1$

เรานำค่าของ $W(x) = 1 + \cos(1/t)$ ลงไปแทนในสมการที่ (3.1.2) จะได้

$$\int_a^b [1 + \cos(1/t)](a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).1dx = 0$$

$$\int_a^b [1 + \cos(1/t)](a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).xdx = 0$$

$$\int_a^b [1 + \cos(1/t)](a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).x^2dx = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\int_a^b [1 + \cos(1/t)](a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + x^k).x^{k-1}dx = 0$$

ถ้าให้ $c_i = \int_a^b [1 + \cos(1/t)]x^i dx$ เมื่อ $i = 0,1,2,\ldots,2k-1$

$$\left.\begin{aligned}
a_0c_0 + a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_{k-1}c_{k-1} &= -c_k \\
a_0c_1 + a_1c_2 + a_2c_3 + \ldots + a_{k-1}c_k &= -c_{k+1} \\
a_0c_2 + a_1c_3 + a_2c_4 + \ldots + a_{k-1}c_{k+1} &= -c_{k+2} \\
\vdots \qquad\qquad & \vdots \\
a_0c_{k-1} + a_1c_k + a_2c_{k+1} + \ldots + a_{k-1}c_{2k-2} &= -c_{2k-1}
\end{aligned}\right\} \; 2.2$$

เราสามารถหาค่าของ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ จากระบบของสมการเชิงเส้น 2.2 นั้น ทำให้เราสามารถหาพหุนามเชิงเส้นดีกรี1 ถึง ดีกรี 7 บนช่วง [0,1] ซึ่งสอดคล้องกับฟังก์ชันถ่วง $W(x) = 1 + \cos(1/t)$ โดยเราจะใช้รากของ $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_7(x)$ มาคำนวณหา

$P_0(x) = 1.0$

$P_1(x) = 0.56588446779690$

$P_2(x) = x^2 - 1.0025531762x + 0.14437123802$

$= (x - 0.17431025992968662513010612771657)(x - 0.82824291627031337486989387228343)$

$P_3(x) = x^3 - 1.5824780708x^2 + 0.67308939494x - 0.053909500391$

$= (x - 0.10373301777822315508964367748270)(x - 0.57512568516024958877787855736580)$

$(x - 0.90361936786152725613247776515149)$

$P_4(x) = x^4 - 2.0076378803x^3 + 1.2840862156x^2 - 0.27811299492x + 0.013996674327$

$= (x - 0.07124570298470289183531604387988 5)(x - 0.29958275566851716279985443857906)$

$(x - 0.70000051298413039539025757287773)(x - 0.93680890866264954997457194466333)$

$P_5(x) = x^5 - 2.5449446465x^4 + 2.2864412946x^3 \quad - 0.84721948143x^2 + 0.11202998832x$

$- 0.0034038523254$

$= (x - 0.04260687063025682386486974737565 4)(x - 0.18650689639698773687849271576842)$

$(x - 0.56158130377969163741570594913558)(x - 0.79591164526503740199239781398089)$

$(x - 0.95833793042802639984853377373945)$

$P_6(x) = x^6 - 3.0923378873x^5 + 3.6348966522x^4 - 2.0092008317x^3 + 0.51848325821x^2$

$- 0.052316088766x + 0.0012385722196$

$= (x - 0.03336435224332957882728415515192 3)(x - 0.16148146833705614030256511891289)$

$(x - 0.42924012587388729353225886981712)(x - 0.65358889906035940338352641270090)$

$(x - 0.84550778771482476112200300608902)(x - 0.96915525407054282283236243732815)$

$\mathrm{P}_7(\mathrm{x}) = x^7 - 3.5473940562x^6 + 4.9742231281x^5 - 3.4905806059x^4 + 1.2776224130x^3$

$- 0.23076198036x^2 + 0.017442871855x - 0.00033263143225$

$= (x - 0.02788463388181653559682855588963 5)(x - 0.13647254803492052844050587195696]$

$(x - 0.25885218091286170519758899732627)(x - 0.54043263562707298567604319988538)$

$(x - 0.72648086323818584631569848668965)(x - 0.88077355720790917698748990120640)$

$(x - 0.97649763729723322178584498704571)$

ตารางที่ 4.11 ค่าของ A_n เมื่อ $n = 1,2,3,...,7$ จาก $W(x) = 1 + \cos(1/t)$, $a = 0$ และ $b = 1$

n	A_n
1	0.91558904947
2	0.36733526018 0.54825378929
3	0.25703737432 0.31545717438 0.34309450077
4	0.18090648905 0.16129134290 0.33887858354 0.23451263398
5	0.1495298167 0.18349260702 0.19370888841 0.27542841299 0.15800615939
6	0.08280492170 0.18601804982 0.08106184443 0.22104183420 0.22629205264 0.11837034668
7	0.068912976917 0.155210721030 0.069304779449 0.139169418550 0.208958799610 0.183171235040 0.090861118882

4.2 การปรับปรุงรูปแบบวิธีรุงเง-คุตตา

ในปี ค.ศ. 1895 นักคณิตศาสตร์ชื่อ รุงเง ได้สร้างระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้น ต่อมาในปี ค.ศ. 1901 นักคณิตศาสตร์ชื่อ คุตตา ได้ปรับปรุงวิธีการของรุงเง และให้ชื่อระเบียบวิธีใหม่นี้ว่า ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการที่นิยมใช้กันอย่างมากในการประมาณค่าคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.2.1}$$

1.ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่2 ซึ่งเราจะกำหนดโดย RK2 ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \tag{4.2.2}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m, y_m)$$
$$K_2 = f(x_m + h, y_m + hK_1)$$

2.ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่3 ซึ่งเราจะกำหนดโดย RK3ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3) \tag{4.2.3}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m, y_m),$$
$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1),$$
$$K_3 = f(x_m + h, y_m - hK_1 + 2hK_2),$$

3.ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่4 ซึ่งเราจะกำหนดโดย RK4 ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{4.2.4}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m, y_m),$$
$$K_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_1),$$
$$K_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}K_2),$$
$$K_4 = f(x_m + h, y_m + hK_3),$$

4.ระเบียบรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก ซึ่งกำหนดให้เป็น FB อยู่ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + h(\frac{25}{216}K_1 + \frac{1408}{2565}K_3 + \frac{2191}{4104}K_4 - \frac{1}{5}K_5) \qquad (4.2.5)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(x_m, y_m),\\
K_2 &= f(x_m + \frac{h}{4}, y_m + \frac{h}{4}K_1),\\
K_3 &= f(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}hK_1 + \frac{9}{32}hK_2),\\
K_4 &= f(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}hK_1 - \frac{7200}{2197}hK_2 + \frac{7296}{2197}K_3),\\
K_5 &= f(x_m + h, y_m + \frac{439}{216}hK_1 - 8hK_2 + \frac{3680}{513}hK_3 - \frac{854}{4104}hK_4),
\end{aligned}$$

5.ระเบียบรุงเง-คุตตาของ Goeken และ Johnson ซึ่งกำหนดให้เป็น GJ อยู่ในรูปของ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{5}{48}K_1 + \frac{27}{56}K_2 + \frac{125}{336}K_3 + \frac{1}{24}K_4) \qquad (4.2.6)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
K_1 &= hf(y_m),\\
K_2 &= hf(y_m + \frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{18}hf_yK_1),\\
K_3 &= hf(y_m - \frac{152}{125}K_1 + \frac{252}{125}K_2 - \frac{44}{125}hf_yK_1),\\
K_4 &= hf(y_m + \frac{19}{2}K_1 + \frac{22}{7}K_2 + \frac{25}{14}K_3 - \frac{5}{2}hf_yK_1),
\end{aligned}$$

เราจะปรับปรุงสูตรวิธีรุงเง-คุตตา สำหรับการหาค่าสมการเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 1 RK1

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f) \qquad (4.2.7)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 2 RK2

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2) \qquad (4.2.8)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)\\
K_2 &= f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_1 hf + \beta_2 hK_1)
\end{aligned}$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 3 RK3

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3) \tag{4.2.9}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_1 hf + \beta_2 hK_1)$$
$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_3 hf + \beta_4 hK_1 + \beta_5 hK_2)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 4 RK4

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4) \tag{4.2.10}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 5 RK5

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5) \tag{4.2.11}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 6 RK6

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6) \tag{4.2.12}$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

โดยระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับที่ 7 RK7

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7) \qquad (4.2.13)$$

โดยที่

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$
$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$
$$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$$

และจากค่าของอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + +hy_m' + \frac{1}{2}h^2 y_m'' + \frac{1}{6}h^3 y_m''' + \frac{1}{24}h^4 y_m'''' + \frac{1}{120}h^5 y_m''''' + \ldots \\ &= y_m + hf + \frac{1}{2}h^2(f_x + ff_y) + \frac{1}{6}h^3(f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + ff_y^2 + f^2 f_{yy}) \qquad (4.2.14) \\ &+ \frac{1}{24}h^4(f_{xxx} + 3ff_{xxy} + 3f_x f_{xy} + f_x f_y^2 + ff_y^3 + f_{xx} f_y + 5ff_{xy} f_y \\ &+ 3ff_x f_{yy} + 3f^2 f_{xyy} + 4f^2 f_y f_{yy} + f^3 f_{yyy}) + \ldots \end{aligned}$$

ขั้นตอนวิธีการหาค่าโดยวิธีรุงเง-คุตตา

ขั้นที่1 เราใช้ค่ารากของ $p_1(x)$ มาคำนวณในสมการที่ (4.2.7) และมาเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ (4.2.14) ซึ่งการกระจายอนุกรมของเทเลอร์

ขั้นที่2 เราใช้ค่ารากของ $p_2(x)$ มาคำนวณในสมการที่ (4.2.8) และมาเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ (4.2.14) ซึ่งการกระจายอนุกรมของเทเลอร์และทำการแก้สมการหาค่า $AR_1, AR_2, \beta_1, \beta_2$ ออกมา(ค่า AR_1, AR_2 ในที่นี้คือค่าของ A_1, A_2 ใหม่ที่ได้จากการแก้สมการ)

ขั้นที่3 เราใช้ค่ารากของ $p_3(x)$ มาคำนวณในสมการที่ (4.2.9) และมาเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์กับสมการ (4.2.14) ซึ่งการกระจายอนุกรมของเทเลอร์และทำการแก้สมการหาค่า $AR_1, AR_2, AR_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ออกมา (ค่า AR_1, AR_2, AR_3 ในที่นี้คือค่าของ A_1, A_2, A_3 ใหม่ที่ได้จากการแก้สมการ)

ขั้นที่4 เราใช้ค่ารากของ $p_4(x), p_5(x), p_6(x), p_7(x)$ นำมาคำนวณในสมการเพื่อหาค่าของ AR_k ได้เลย (ค่า AR_k ในที่นี้คือค่าของ A_k เมื่อ k=1,2,3,4,5,6,7 ใหม่ที่ได้จากการแก้สมการ)

เราจะใช้วิธีการประมาณค่าของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเพื่อใช้ในการหาค่าRK1,RK2,…,RK7 โดยใช้สมการจาก (3.2.7) ถึง (3.2.13) เพื่อใช้ในการหาสมการเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

เมื่อ

RK1 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 1
RK2 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 2
RK3 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 3
RK4 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 4
RK5 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 5
RK6 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 6
RK7 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ 7
FB แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาFehlberg
GJ แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาGoeken และ Johnson

4.2.1 จาก $w(x)=\sqrt{1+x^2}$, $a=0$ **และ** $b=1$

RU1;

$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$
$\alpha_1 = 0.5309976652$

RU2;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$
$A_1 = 0.5201731438$ $A_2 = 0.47982685762$
$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$
$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_1 hf + \beta_2 hK_1)$
$\alpha_1 = 0.22108837430$ $\alpha_2 = 0.8023639350$
$\beta_1 = -0.76871602879$ $\beta_2 = 1.5710799638$

RU3;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$
$A_1 = 0.2871400241$ $A_2 = 0.4479894246$ $A_3 = 0.2648705513$
$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$
$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_1 hf + \beta_2 hK_1)$
$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_3 hf + \beta_4 hK_1 + \beta_5 hK_2)$
$\alpha_1 = 0.1162858009$ $\alpha_2 = 0.5133956005$ $\alpha_3 = 0.8933189873$
$\beta_1 = -1.7184168107$ $\beta_2 = 2.2918124112$ $\beta_3 = 2.9074229420$
$\beta_4 = -3.0830772279$ $\beta_5 = 1.0689667951$

RU4;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$
$A_1 = 0.1697117412$ $A_2 = 0.3195268068$ $A_3 = 0.3294291261$
$A_4 = 0.1813323259$
$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$
$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$
$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$
$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$
$\alpha_1 = 0.0678345926$ $\alpha_2 = 0.3221774801$ $\alpha_3 = 0.6599082002$
$\alpha_4 = 0.9273048762$

RU5;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$$

$A_1 = 0.1208313117 \quad A_2 = 0.2441735458 \quad A_3 = 0.2858942056$

$A_4 = 0.2348146379 \quad A_5 = 0.1142862989$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

$\alpha_1 = 0.0478070192 \quad \alpha_2 = 0.2355290535 \quad \alpha_3 = 0.5085089505$

$\alpha_4 = 0.7759675012 \quad \alpha_5 = 0.9548402718$

RU6;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$$

$A_1 = 0.0855708639 \quad A_2 = 0.1891526028 \quad A_3 = 0.2267118304$

$A_4 = 0.2422708229 \quad A_5 = 0.1739637797 \quad A_6 = 0.0823237477$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$
$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

$\alpha_1 = 0.0343070657 \quad \alpha_2 = 0.1720591917 \quad \alpha_3 = 0.3890126914$

$\alpha_4 = 0.621077770 \quad \alpha_5 = 0.8421390033 \quad \alpha_6 = 0.9640477726$

RU7;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$$

$A_1 = 0.0656510379 \quad A_2 = 0.1420403669 \quad A_3 = 0.1934358158$

$A_4 = 0.2097744694 \quad A_5 = 0.1891579442 \quad A_6 = 0.1369744354$

$A_7 = 0.0629659303$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$

$\alpha_1 = 0.0257937474$ $\alpha_2 = 0.1311433199$ $\alpha_3 = 0.3014895668$

$\alpha_4 = 0.5062299305$ $\alpha_5 = 0.7086365759$ $\alpha_6 = 0.8739788305$

$\alpha_7 = 0.9752731038$

เมื่อ

RU1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ ในอันดับที่1

RU2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ ในอันดับที่2

RU3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ ในอันดับที่3

RU4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ ในอันดับที่4

RU5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ ในอันดับที่5

RU6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ ในอันดับที่6

RU7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \sqrt{1+x^2}$ ในอันดับที่7

4.2.2 จาก $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $a = 0$ **และ** $b = 1$

RL1;

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$\alpha_1 = 0.4699636663$$

RL2;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$$
$$A_1 = 0.4792808335 \quad A_2 = 0.5207191665$$
$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_1 hf + \beta_2 hK_1)$$
$$\alpha_1 = 0.20224488250 \quad \alpha_2 = 0.7740600050$$
$$\beta_1 = -0.8085271359 \quad \beta_2 = 1.5825871861$$

RL3;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$$
$$A_1 = 0.2688725123 \quad A_2 = 0.4400775329 \quad A_3 = 0.2910499548$$
$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf)$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_1 hf + \beta_2 hK_1)$$
$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_3 hf + \beta_4 hK_1 + \beta_5 hK_2)$$
$$\alpha_1 = 0.10929297749 \quad \alpha_2 = 0.4868318107 \quad \alpha_3 = 0.8808422089$$
$$\beta_1 = -0.9679799779 \quad \beta_2 = 1.4548117856 \quad \beta_3 = -0.5684975641$$
$$\beta_4 = 0.3521413092 \quad \beta_5 = 1.0971984638$$

RL4;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$$
$$A_1 = 0.1783462971 \quad A_2 = 0.3325714020 \quad A_3 = 0.3222172415$$
$$A_4 = 0.1668650594$$
$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$\alpha_1 = 0.0710914682 \quad \alpha_2 = 0.3381120474 \quad \alpha_3 = 0.6799252579$$
$$\alpha_4 = 0.9336350090$$

RL5;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$$

$A_1 = 0.1161751255 \quad A_2 = 0.2345712317 \quad A_3 = 0.2827308505$

$A_4 = 0.2436781873 \quad A_5 = 0.1228446051$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$\alpha_1 = 0.0460398287 \quad \alpha_2 = 0.2261561871 \quad \alpha_3 = 0.4915842851$

$\alpha_4 = 0.7623195614 \quad \alpha_5 = 0.9512415283$

RL6;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$$

$A_1 = 0.0842877510 \quad A_2 = 0.1772170084 \quad A_3 = 0.2312051785$

$A_4 = 0.2347551724 \quad A_5 = 0.1841077043 \quad A_6 = 0.0884306333$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f)$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

$\alpha_1 = 0.0332404393 \quad \alpha_2 = 0.1665436383 \quad \alpha_3 = 0.3745844495$

$\alpha_4 = 0.6120702823 \quad \alpha_5 = 0.8258727200 \quad \alpha_6 = 0.9650945641$

RL7;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$$

$A_1 = 0.0635764842 \quad A_2 = 0.1387433068 \quad A_3 = 0.1863686269$

$A_4 = 0.2117808855 \quad A_5 = 0.1880555469 \quad A_6 = 0.1453030881$

$A_7 = 0.0661720616$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$

$\alpha_1 = 0.0251083272 \quad \alpha_2 = 0.1273823530 \quad \alpha_3 = 0.2927935326$

$\alpha_4 = 0.4938380488 \quad \alpha_5 = 0.6982797175 \quad \alpha_6 = 0.8654225718$

$\alpha_7 = 0.9749328658$

เมื่อ

RL1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ในอันดับที่1

RL2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ในอันดับที่2

RL3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ในอันดับที่3

RL4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ในอันดับที่4

RL5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ในอันดับที่5

RL6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ในอันดับที่6

RL7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ในอันดับที่7

4.2.3 จาก $w(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ **และ** $b = 1$

RD1

$y_{m+1} = y_m + hA_1 f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1)$

$A_1 = 1.0$ และ α_1 คือ รากของ $p_1(x)$

RD2

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$

$A_1 = 0.4604671700 \quad A_2 = 0.5395328300$

$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_{m,}, y_m))$

$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$

α_k คือ รากของ $p_2(x)$

RD3

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$

$A_1 = 0.2556291382 \quad A_2 = 0.4465662470 \quad A_3 = 0.2978046148$

$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$

$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$

α_k คือ รากของ $p_3(x)$

RD4

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$

$A_1 = 0.1615318704 \quad A_2 = 0.3186900624 \quad A_3 = 0.3353107130$

$A_4 = 0.1844673542$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

α_k คือ รากของ $p_4(x)$

RD5

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$

$A_1 = 0.1110330126 \quad A_2 = 0.2315140491 \quad A_3 = 0.2855365536$

$A_4 = 0.247377756 \quad A_5 = 0.1245386290$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

α_k คือ รากของ $p_5(x)$

RD6

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$

$A_1 = 0.0808899340 \quad A_2 = 0.1739292491 \quad A_3 = 0.2317413884$

$A_4 = 0.2375284589 \quad A_5 = 0.1864574834 \quad A_6 = 0.0894534851$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

α_k คือ รากของ $p_6(x)$

RD7

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$

$A_1 = 0.0609968815 \quad A_2 = 0.1340740035 \quad A_3 = 0.1873677992$

$A_4 = 0.2098210853 \quad A_5 = 0.1952655594 \quad A_6 = 0.1449078184$

$A_7 = 0.0675668183$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$

α_k คือ รากของ $p_7(x)$

เมื่อ

RD1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น

$w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ในอันดับที่1

RD2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น

$w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ในอันดับที่2

RD3 ทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น

$w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ในอันดับที่3

RD4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น

$w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ในอันดับที่4

RD5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น

$w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ในอันดับที่5

RD6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น

$w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ในอันดับที่6

RD7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น

$w(x)=\dfrac{1}{1+x}$ ในอันดับที่7

4.2.4 จาก $w(x)=1+x$, $a=0$ และ $b=1$

RA1

$y_{m+1}=y_m+hA_1f\left(x_m+h\alpha_1,y_m+h\alpha_1\right)$

$A_1=1.0$ และ α_1 คือ รากของ $q_1(x)$

RA2

$y_{m+1}=y_m+h(A_1K_1+A_2K_2)$

$A_1=0.5404667096$ $A_2=0.4595332904$

$K_1=f(x_m+\alpha_1h,y_m+\alpha_1hf\left(x_{m,},y_m\right))$

$K_2=f(x_m+\alpha_2h,y_m+\alpha_2hK_1)$

α_k คือ รากของ $q_2(x)$

RA3

$y_{m+1}=y_m+h(A_1K_1+A_2K_2+A_3K_3)$

$A_1=0.3015861030$ $A_2=0.4388992159$ $A_3=0.2595146811$

$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$
$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$
$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$
α_k คือ รากของ $q_3(x)$

RA4

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$
$A_1 = 0.1873944613 \quad A_2 = 0.3320570442 \quad A_3 = 0.3163971576$
$A_4 = 0.1641513368$
$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$
$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$
$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$
$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$
α_k คือ รากของ $q_4(x)$

RA5

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$
$A_1 = 0.1265225411 \quad A_2 = 0.2467424693 \quad A_3 = 0.2826044220$
$A_4 = 0.2313348103 \quad A_5 = 0.1127957572$
$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$
$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$
$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$
$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$
$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$
α_k คือ รากของ $q_5(x)$

RA6

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$
$A_1 = 0.0907866950 \quad A_2 = 0.1867964637 \quad A_3 = 0.2356771561$
$A_4 = 0.2301432712 \quad A_5 = 0.1744898822 \quad A_6 = 0.0821065311$
$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$
$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$
$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

α_k คือ รากของ $q_6(x)$

RA7

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$

$A_1 = 0.0681709284 \quad A_2 = 0.1449484991 \quad A_3 = 0.1938199840$

$A_4 = 0.2080371557 \quad A_5 = 0.1870893740 \quad A_6 = 0.1355581162$

$A_7 = 0.0623759426$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$

$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$

α_k คือ รากของ $q_7(x)$

เมื่อ

RA1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + x$ ในอันดับที่1

RA2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + x$ ในอันดับที่2

RA3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + x$ ในอันดับที่3

RA4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + x$ ในอันดับที่4

RA5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + x$ ในอันดับที่5

RA6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + x$ ในอันดับที่6

RA7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + x$ ในอันดับที่7

4.2.5 จาก $W(x) = 1+\sin(1/t)$ **,** $a = 0$ **และ** $b = 1$

RS1;

$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

จากรากของ $P_1(x)$ $\alpha_1 = 0.58411158915971$

ได้ $AR_1 = 1.0$

RS2;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$

จากรากของ $P_2(x)$ $\alpha_1 = 0.25066779663372143017933592550803$

$\alpha_2 = 0.79688263096627856982066407449197$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 K_1)$

ได้ $AR_2 = 0.54352722098632112926514378599019$

$AR_3 = 0.45647277901367887073485621400981$

$\beta_1 = -0.65970065365488748979534120648465$

$\beta_2 = 1.4565832846211660596160052809766$

RS3;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$

จากรากของ $P_3(x)$ $\alpha_1 = 0.11014763253225962983751411680908$

$\alpha_2 = 0.54225045181748092993063183964436$

$\alpha_3 = 0.89291530355025944023185404354655$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\beta_3 f(x_m, y_m) + h\beta_4 K_1 + h\beta_5 K_2)$

ได้ $AR_1 = 0.29545686361137274941569156507376$

$AR_2 = 0.46095644241550574268183517062568$

$AR_3 = 0.24358669397312150790247326430056$

$\beta_1 = -0.79557727381929813969862514596934$

$\beta_2 = 1.3378277256367790696292569856137$

$\beta_3 = 1.6787613787366759404927559811134$

$\beta_4 = -1.9242813445947356502103864201152$

$\beta_5 = 1.13843526940831914994948448254 83$

RS4;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$

จากรากของ $P_4(x)$ $\alpha_1 = 0.0069880453323833859509279729 9005$

$\alpha_2 = 0.3895370944375089398622285678 0907$

$\alpha_3 = 0.6882792319471103503442066410 4089$

$\alpha_4 = 0.9332755772915468502842850612 4945$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

ได้ $AR_1 = 0.19675053914$

$AR_2 = 0.36851436922$

$AR_3 = 0.25725558085$

$AR_4 = 0.17747951079$

RS5;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$

จากรากของ $P_5(x)$ $\alpha_1 = 0.0503983720675220560000421802 5811$

$\alpha_2 = 0.2493865579585739412259302383 0712$

$\alpha_3 = 0.5197200038118352001497642888 0353$

$\alpha_4 = 0.7745856657935932204442587026 8495$

$\alpha_5 = 0.9537964545684755821800045899 4629$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$

$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$

$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$

ได้ $\mathrm{AR}_1 = 0.12833926351$

$\mathrm{AR}_2 = 0.25390394613$

$\mathrm{AR}_3 = 0.27155875025$

$$AR_4 = 0.22948004055$$
$$AR_5 = 0.11671799955$$

RS6;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$$

จากรากของ $P_6(x)$

$$\alpha_1 = 0.033694728452473119636026364617 25$$
$$\alpha_2 = 0.15549991211152837925117627528172$$
$$\alpha_3 = 0.41650309118098299460019962872368$$
$$\alpha_4 = 0.63459975975126969045155620408811$$
$$\alpha_5 = 0.83553961803771040435132861877510$$
$$\alpha_6 = 0.96706143246603541170971290851413$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$
$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

ได้

$$AR_1 = 0.073133012696$$
$$AR_2 = 0.19836084018$$
$$AR_3 = 0.27536699857$$
$$AR_4 = 0.18433747733$$
$$AR_5 = 0.18954075785$$
$$AR_6 = 0.079260913375$$

RS7;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$$

จากรากของ $P_7(x)$

$$\alpha_1 = 0.02447813238424463967046638189515$$
$$\alpha_2 = 0.12222551603477250246570853002460 6$$
$$\alpha_3 = 0.34398640427472470120951815872160$$
$$\alpha_4 = 0.52353754295161328368898118511876$$
$$\alpha_5 = 0.71299667070910623037665675016524$$
$$\alpha_6 = 0.87413969597381684621231879820281$$

$$\alpha_7 = 0.975119830058769274184973425650 38$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$
$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$
$$K_7 = f(x_m + h\alpha_7, y_m + h\alpha_7 K_6)$$

$$\mathrm{AR}_1 = 0.054373922427$$
$$\mathrm{AR}_2 = 0.16413158234$$
$$\mathrm{AR}_3 = 0.24002922276$$
$$\mathrm{AR}_4 = 0.14443314504$$
$$\mathrm{AR}_5 = 0.20705089613$$
$$\mathrm{AR}_6 = 0.12352217637$$
$$\mathrm{AR}_7 = 0.066459054938$$

เมื่อ

RS1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \sin\theta$ ในอันดับที่1

RS2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \sin\theta$ ในอันดับที่2

RS3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \sin\theta$ ในอันดับที่3

RS4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \sin\theta$ ในอันดับที่4

RS5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \sin\theta$ ในอันดับที่5

RS6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \sin\theta$ ในอันดับที่6

RS7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \sin\theta$ ในอันดับที่7

4.2.6 จาก $W(x) = 1 + \cos(1/t)$, $a = 0$ **และ** $b = 1$

RC1;

$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

จากรากของ $P_1(x)$ $\quad \alpha_1 = 0.56588446779690$

ได้ $\quad AR_1 = 1.0$

RC2;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2)$

จากรากของ $P_2(x)$ $\quad \alpha_1 = 0.17431025992968662513010612771657$

$\alpha_2 = 0 .82824291627031337486989387228343$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 K_1)$

ได้ $\quad AR_1 = 0.50195217059069005796333199792217$

$AR_2 = 0.49804782940930994203666800207783$

$\beta_1 = -1.09155160264669859861571947309 85$

$\beta_2 = 1.91979451891701197348561334538 20$

RC3;

$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3)$

จากรากของ $P_3(x)$ $\quad \alpha_1 = 0.10373301777822315508964367748270$

$\alpha_2 = 0.57512568516024958877787855736580$

$\alpha_3 = 0.90361936786152725613247776515149$

$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$

$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 K_1)$

$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\beta_3 f(x_m, y_m) + h\beta_4 K_1 + h\beta_5 K_2)$

ได้ $\quad AR_1 = 0.30142509425320164438713389468061$

$AR_2 = 0.49472351510516819566325957671645$

$AR_3 = 0.20385139064163015994960652860294$

$\beta_1 = -0.94363076410602508005191748811885$

$\beta_2 = 1.51875644926627466882979604548 47$

$\beta_3 = 2.13833937261030849567037086464 26$

$\beta_4 = -2.42974605440739074498037955988 77$

$$\beta_5 = 1.1950260496586095054424864603966$$

RC4;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4)$$

จากรากของ $P_4(x)$ $\alpha_1 = 0.07124570298470289183531604387988$

$\alpha_2 = 0.29958275566851716279985443857906$

$\alpha_3 = 0.70000051298413039539025757287773$

$\alpha_4 = 0.93680890866264954997457194466333$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$

ได้ $\mathrm{AR}_1 = 0.15174690469$

$\mathrm{AR}_2 = 0.34531949748$

$\mathrm{AR}_3 = 0.36069564263$

$\mathrm{AR}_4 = 0.14223795520$

RC5;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5)$$

จากรากของ $P_5(x)$ $\alpha_1 = 0.04260687063025682386486974737565$

$\alpha_2 = 0.18650689639698773687849271576842$

$\alpha_3 = 0.56158130377969163741570594913558$

$\alpha_4 = 0.79591164526503740199239781398089$

$\alpha_5 = 0.95833793042802639984853377373945$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$

ได้ $\mathrm{AR}_1 = 0.072627138541$

$\mathrm{AR}_2 = 0.28532866826$

$\mathrm{AR}_3 = 0.37273972353$

$\mathrm{AR}_4 = 0.14602641111$

$\mathrm{AR}_5 = 0.12327805856$

RC6;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6)$$

จากรากของ $P_6(x)$ $\alpha_1 = 0.033364352243329578827284155515192$

$\alpha_2 = 0.16148146833705614030256511891289$

$\alpha_3 = 0.42924012587388729353225886981712$

$\alpha_4 = 0.65358889906035940338352641270090$

$\alpha_5 = 0.84550778771482476112200300608902$

$\alpha_6 = 0.96915525407054282283236243732815$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$
$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

ได้ $\mathrm{AR}_1 = 0.075077645055$

$\mathrm{AR}_2 = 0.20542325271$

$\mathrm{AR}_3 = 0.28450401811$

$\mathrm{AR}_4 = 0.18062340188$

$\mathrm{AR}_5 = 0.18097103103$

$\mathrm{AR}_6 = 0.07340065122$

RC7;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4 + A_5K_5 + A_6K_6 + A_7K_7)$$

จากรากของ $P_7(x)$ $\alpha_1 = 0.027884633881816535596828555588963$

$\alpha_2 = 0.13647254803492052844050587195696$

$\alpha_3 = 0.25885218091286170519758899732627$

$\alpha_4 = 0.54043263562707298567604319988538$

$\alpha_5 = 0.72648086323818584631569848668965$

$\alpha_6 = 0.88077355720790917698748990120640$

$$\alpha_7 = 0.97649763729723322178584498704571$$

$$K_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 K_1)$$
$$K_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 K_2)$$
$$K_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 K_3)$$
$$K_5 = f(x_m + h\alpha_5, y_m + h\alpha_5 K_4)$$
$$K_6 = f(x_m + h\alpha_6, y_m + h\alpha_6 K_5)$$

ได้

$$AR_1 = 0.080613516179$$
$$\mathrm{AR}_2 = 0.082521931462$$
$$\mathrm{AR}_3 = 0.22906351916$$
$$\mathrm{AR}_4 = 0.27494330969$$
$$\mathrm{AR}_5 = 0.12739781360$$
$$\mathrm{AR}_6 = 0.15226028622$$
$$\mathrm{AR}_7 = 0.053199623690$$

เมื่อ

RC1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \cos\theta$ ในอันดับที่1

RC2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \cos\theta$ ในอันดับที่2

RC3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \cos\theta$ ในอันดับที่3

RC4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \cos\theta$ ในอันดับที่4

RC5 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \cos\theta$ ในอันดับที่5

RC6 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \cos\theta$ ในอันดับที่6

RC7 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก ที่มีจุดถ่วงเป็น $w(x) = 1 + \cos\theta$ ในอันดับที่7

4.3 การประมาณค่าของฟังก์ชัน

เมื่อเราได้ศึกษาถึงพหุนามเชิงตั้งฉากแล้ว สิ่งแรกที่เราได้ประโยชน์จากการศึกษานี้คือ การหาค่าใกล้เคียงวิธีกำลังสองน้อยที่สุดด้วยพหุนามเชิงตั้งฉากซึ่งมีวิธีการดังนี้

สมมติให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าแน่นอนในช่วงเปิด (a,b) และต้องการหาพหุพจน์ $p(x)$ ที่กำลังไม่เกิน k มาเป็นฟังก์ชันเพื่อใช้ในการแทนค่า $f(x)$

โดยให้ $\int_a^b [f(x) - p(x)]^2 w(x)dx$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $w(x)$ เป็นฟังก์ชันถ่วงของพหุนามเชิงตั้งฉากตามช่วงปิด $[a,b]$

ถ้า $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), ..., p_k(x)$ เป็นอันดับของพหุนามเชิงตั้งฉากตามฟังก์ชันถ่วง $w(x)$ ในช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว

$$p(x) = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + d_2 p_2(x) + d_3 p_3(x) + ... + d_k p_k(x)$$

โดยค่าของ $d_0, d_1, d_2, d_3, ..., d_k$ จะเป็นเซตของจำนวนจริงเพียงเซตเดียวเท่านั้นเนื่องจาก $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), ..., p_k(x)$ เป็นอันดับของพหุนามเชิงตั้งฉาก

$$\therefore \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 w(x)dx = \int_a^b [f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - d_2 p_2(x) - ... - d_k p_k(x)]^2 w(x)dx$$

ดังนั้นสิ่งที่เราต้องการหาคือ $d_0, d_1, d_2, d_3, ..., d_k$ ที่ทำให้ค่าที่ได้จากการหาปริพันธ์น้อยที่สุด กำหนดให้ $g(d_0, d_1, d_2, d_3, ..., d_k) = \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 w(x)dx$

ดังนั้นจะต้องหา $d_0, d_1, d_2, d_3, ..., d_k$ ที่ทำให้เกิดค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน g จากแคลคูลัสของฟังก์ชันหลายตัวแปร จะต้องหาค่า $d_0, d_1, d_2, d_3, ..., d_k$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial g}{\partial d_0} = \frac{\partial g}{\partial d_1} = ... = \frac{\partial g}{\partial d_k} = 0$$

แต่ $\dfrac{\partial g}{\partial d_i} = \dfrac{\partial}{\partial d_i} \int_a^b [f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - ... - d_k p_k(x)]^2 w(x)dx$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial d_i} \left[[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - ... - d_k p_k(x)]^2 w(x)\right] dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial}{\partial d_i}\left[\ w(x) - d_i\left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - ... - d_k p_k(x)\right]^2 + \right.$$

$$\left.\left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - ... - d_k p_k(x)\right]^2\ \right]\frac{\partial}{\partial d_i} w(x)dx$$

$$= \int_a^b w(x).2\left[f(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - ... - d_k p_k(x)\right]\left(-p_i(x)\right)dx$$

$$= -2\int_a^b w(x)[f(x)p_i(x) - d_0 p_0(x) - d_1 p_1(x) - ... - d_k p_1(x) p_i(x) - ...$$

$$- d_i p_i(x) p_i(x) - ... - d_k p_k(x) p_i(x)]dx$$

$$= \begin{bmatrix} \int_a^b w(x) f(x) p_i(x)dx - d_0 \int_a^b w(x) p_0(x) p_i(x)dx - d_1 \int_a^b w(x) p_i(x) p_i(x)dx \\ - ... - d_i \int_a^b w(x) p_i^2(x)dx - ... - d_k \int_a^b w(x) p_k(x) p_i(x)dx \end{bmatrix}$$

$$= 2\left[\int_a^b w(x) f(x) p_i(x)dx - d_i \int_a^b w(x) p_i^2(x)dx\right]$$

แต่ต้องการ $\frac{\partial g}{\partial d_i} = 0$ สำหรับทุกๆ i

$$\left[\int_a^b w(x) f(x) p_i(x)dx - d_i \int_a^b w(x) p_i^2(x)dx\right] = 0$$

$$\therefore d_i = \frac{\int_a^b w(x) f(x) p_i(x)dx}{\int_a^b w(x) p_i^2(x)dx}$$

นั่นคือถ้าให้ g(x) มีค่าน้อยสุด d_i จะต้องมีค่าดังข้างต้นสำหรับๆค่าของ $i = 0,1,2,...,k$

บทที่ 5

ผลงานวิจัย

ในบทนี้จะเป็นการนำเสนอตัวอย่างต่าง ๆ ในการนำพหุนามตั้งฉากไปประยุกต์ใช้ใน 3 รูปแบบที่ได้กล่าวมาแล้ว

5.1 การหาค่าปริพันธ์

<u>ตัวอย่างที่1</u> หาค่า $\int_{-1}^{1}\frac{1}{2+x}dx$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.3

ตารางที่5.1 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

n	Integral Value	Calculated Value	Error
1	1.09861 22886 68109	1.09090 90909 09090	0.00770 31977 59019
2	1.09861 22886 68109	1.54248 36601 31076	0.00057 30729 81477
3	1.09861 22886 68109	1.09863 03504 92114	0.00001 80618 24005
4	1.09861 22886 68109	1.38305 36862 56915	0.00000 30468 55583

<u>ตัวอย่างที่2</u> หาค่า $\int_{0}^{1}\frac{1}{x+1}dx$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.6

ตารางที่5.2 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

N	Integral value	Calculated value	Error
1	0.69314718056	0.6621437350	$3.1003445542\times10^{-2}$
2	0.69314718056	0.6932971639	$1.4998328970\times10^{-4}$
3	0.69314718056	0.6931118790	$3.5301552998\times10^{-5}$
4	0.69314718056	0.6931792087	$3.2028166061\times10^{-5}$
5	0.69314718056	0.6931470023	$1.8669197743\times10^{-8}$
6	0.69314718056	0.6931444392	$2.7414162105\times10^{-6}$
7	0.69314718056	0.6931471811	$5.3205440054\times10^{-10}$

<u>ตัวอย่างที่3</u> หาค่า $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.7

ตารางที่5.3 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

N	Integral value	Calculated value	error
1	0.69314718056	0.6625023205	$3.0644860056\times10^{-2}$
2	0.69314718056	0.6919115389	$1.2356416883\times10^{-3}$
3	0.69314718056	0.6931206507	$2.6523603962\times10^{-5}$
4	0.69314718056	0.6931461165	$1.0640487744\times10^{-6}$
5	0.69314718056	0.6931471503	$3.0247065297\times10^{-8}$
6	0.69314718056	0.6931450821	$2.0984662115\times10^{-6}$
7	0.69314718056	0.6931471806	$8.0945028458\times10^{-10}$

<u>ตัวอย่างที่4</u> หาค่า $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.10

ตารางที่5.4 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

n	Integral value	Calculated value	error
1	0.69314718056	0.64822948	4.491770056×10^{-2}
2	0.69314718056	0.69509772	1.95053944×10^{-3}
3	0.69314718056	0.69303975	1.0743056×10^{-4}
4	0.69314718056	0.69314676	4.2056×10^{-7}
5	0.69314718056	0.69314737	1.8944×10^{-8}
6	0.69314718056	0.69314717	1.0560×10^{-8}
7	0.69314718056	0.69314718	5.60×10^{-10}

<u>ตัวอย่างที่5</u> หาค่า $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.11

ตารางที่5.5 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

n	Integral value	Calculated value	error
1	0.69314718056	0.651044097	$4.210308356\times^{-2}$
2	0.69314718056	0.691807659	1.33952156×10^{-3}
3	0.69314718056	0.693106484	4.069656×10^{-5}
4	0.69314718056	0.693145992	1.18856×10^{-6}
5	0.69314718056	0.693147144	3.6560×10^{-8}
6	0.69314718056	0.693147179	1.560×10^{-9}
7	0.69314718056	0.693145507	3.245×10^{-10}

<u>ตัวอย่างที่6</u> หาค่า $I=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.8

โดยค่าของ $I = 0.62322524014$

ตารางที่5.6 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

n	Integral value	Calculated value	error
1	0.62322524014	0.6338167356	1.05914955×10^{-2}
2	0.62322524014	0.6234709211	2.456896×10^{-4}
3	0.62322524014	0.6231960539	2.91862×10^{-5}
4	0.62322524014	0.6232264363	1.9615×10^{-6}
5	0.62322524014	0.6232252249	1.5200×10^{-8}
6	0.62322524014	0.6232252388	1.3260×10^{-9}
7	0.62322524014	0.6232252403	1.0034×10^{-10}

<u>ตัวอย่างที่7</u> หาค่า $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.9

โดยค่าของ $I = 0.6338167356$

ตารางที่5.7 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

n	Integral value	Calculated value	error
1	0.62322524014	0.5418883115	$8.13369287 \times 10^{-2}$
2	0.62322524014	0.6205956284	2.6296118×10^{-3}
3	0.62322524014	0.6230874359	1.378043×10^{-4}
4	0.62322524014	0.6232194640	5.77620×10^{-6}
5	0.62322524014	0.6232251134	1.26720×10^{-7}
6	0.62322524014	0.6232252321	8.01210×10^{-9}
7	0.62322524014	0.6232252399	2.01431×10^{-10}

<u>ตัวอย่างที่8</u> หาค่า $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.1

ตารางที่5.8 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

N	Integral value	Calculated value	error
1	0.69314718056	0.641882197665974	$5.1264982894026 \times 10^{-2}$
2	0.69314718056	0.699719082907203	$6.571902347203 \times 10^{-3}$
3	0.69314718056	0.703097933574516	$9.950753014516 \times 10^{-3}$
4	0.69314718056	0.691387538130486	$1.759642429514 \times 10^{-3}$
5	0.69314718056	0.703214868225765	$1.0067687665765 \times 10^{-2}$
6	0.69314718056	0.703215022754461	$1.0067842194461 \times 10^{-2}$
7	0.69314718056	0.703222450115926	$1.0075269555 \times 10^{-2}$

<u>ตัวอย่างที่9</u> หาค่า $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ โดยใช้ค่ารากและค่า A_k จากตารางที่ 4.2

ตารางที่5.9 เปรียบเทียบค่าที่ได้จากการหาค่าปริพันธ์กับผลบวกของการแทนค่ารากและ A_k

n	Integral value	Calculated value	error
1	0.69314718056	0.632569413654	6.057776691×10^{-2}
2	0.69314718056	0.698489615635	5.342435075×10^{-3}
3	0.69314718056	0.696532189251	3.385008691×10^{-3}
4	0.69314718056	0.691347569213	1.799611347×10^{-3}
5	0.69314718056	0.690456879513	2.690301047×10^{-3}
6	0.69314718056	0.691456879235	1.690301325×10^{-3}
7	0.69314718056	0.691452987637	1.694192923×10^{-3}

5.2 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

ตัวอย่างที่1

$y'(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{2y}{x}, x \in [2,10]$ โดยที่ $y(2) = 1$ ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \frac{4 + \cos 2 - \cos x}{x^2}$

ตารางที่5.10 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าของวิธีรุงเง-คุตตา

	x=2.1,h=0.1,y=0.92714269116842	
	Calculated value	Error
RK2	0.92721353231188	$7.084114346000980 \times 10^{-5}$
RK3	0.92714095685372	$1.734314699963768 \times 10^{-6}$
RK4	0.92714273418440	$4.301598000022722 \times 10^{-8}$
RS1	0.928073524576296	$9.30833407880 \times 10^{-4}$
RS2	0.927538449669944	$3.95758501528 \times 10^{-4}$
RS3	0.927142676071994	1.5096423×10^{-5}
RS4	0.927012929300408	$1.29761868008 \times 10^{-4}$
RS5	0.927101555017691	$4.1136150725 \times 10^{-5}$
RS6	0.927090221562898	$5.2469606903 \times 10^{5}$
RS7	0.927078321533773	$6.4369634643 \times 10^{-5}$
RC1	0.927911468161318	$7.68776992902 \times 10^{-4}$
RC2	0.927148740707597	$6.049539180 \times 10^{-6}$
RC3	0.927142390047748	$3.01120668 \times 10^{-6}$
RC4	0.927133968316651	$8.722851765 \times 10^{-6}$
RC5	0.927116076866906	$2.6614301511 \times 10^{-5}$
RC6	0.927090743567850	$5.1947600566 \times 10^{-5}$
RC7	0.927084427496148	$5.8263672269 \times 10^{-5}$

ตัวอย่างที่2

$y' = -\frac{1}{2}y^3, x \in [25,88]$ โดยที่ $y(25) = 1$ ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x-24}}$

ตารางที่5.11 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าของวิธีรุงเง-คุตตา

	x=25.1,h=0.1,y=0.953462589245592	
	Calculated value	Error
RK2	0.95356562500000	$1.030357544099525\times10^{-4}$
RK3	0.95346026518590	$2.324059690028690\times10^{-6}$
RK4	0.95346259567426	$6.428669929725572\times10^{-9}$
RS1	0.95425413760610	$7.91548360511\times10^{-4}$
RS2	0.95376486528080	$3.01789407216\times10^{-4}$
RS3	0.95346267120554	8.1959947×10^{-5}
RS4	0.95335515371662	$1.07435528973\times10^{-4}$
RS5	0.95341667512982	$4.5914115775\times10^{-5}$
RS6	0.95340438116444	$5.8208081149\times10^{-5}$
RS7	0.95346258924559	$7.1232603381\times10^{-5}$
RC1	0.95412518161242	$6.62592366827\times10^{-4}$
RC2	0.95346356754346	9.78297867×10^{-7}
RC3	0.95346226201609	3.27229503×10^{-7}
RC4	0.95345261569857	9.973547022×10^{-6}
RC5	0.95343341388922	$2.9175356375\times10^{-6}$
RC6	0.95340438116444	$5.8208081149\times10^{-6}$
RC7	0.95339812643992	$6.4462805668\times10^{-6}$

ตัวอย่างที่3

$y' = x\cos x + y, x \in [0,20]$ โดยที่ $y(0) = 0$ ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \frac{1}{2}(x+1)$

ตารางที่5.12 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าของวิธีรุงเง-คุตตา

	x=0.1,h=0.1,y=0.00515817089185	
	Calculated value	Error
RK2	0.00497502082639	$1.831500654600003\times10^{-4}$
RK3	0.00515396618685	$4.204705000000059\times10^{-6}$
RK4	0.00515812764626	$4.324559000051104\times10^{-8}$
RS1	0.00583115417940	$6.72983287546\times10^{-4}$
RS2	0.00565978932731	$5.01618435459\times10^{-4}$
RS3	0.00515817222761	1.335753×10^{-6}
RS4	0.00505191652758	$1.06254364273\times10^{-4}$
RS5	0.00521119309016	$5.3022198310\times10^{-5}$
RS6	0.00522847399612	$7.0303104262\times10^{-5}$
RS7	0.00524581632054	$8.7645428688\times10^{-5}$
RC1	0.00564978657133	$4.9165679479\times10^{-4}$
RC2	0.00517909618214	$2.0925290281\times10^{-5}$
RC3	0.00515803484321	1.36048641×10^{-7}
RC4	0.00516688238299	8.711491131×10^{-6}
RC5	0.00519446694576	$3.6296053902\times10^{-5}$
RC6	0.00522847399612	$7.0303104262\times10^{-5}$
RC7	0.00523781004179	$7.9639149939\times10^{-5}$

ตัวอย่างที่4

$$y'(x) = \frac{x+\ln(1+x)}{(1+x)^2} \quad \text{โดยที่} \quad y(0)=0 \quad \text{ผลเฉลยที่แท้จริงคือ} \quad y(x)=\frac{1}{2}(x+1)$$

ตารางที่5.13 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าของวิธีรุงเง-คุตตา

	x=0.1 h=0.1 y=0.0086645618	
	Calculated value	Error
RK2	0.0080706686	5.9389×10^{-4}
RK3	0.0086639289	6.3287×10^{-7}
RK4	0.0086639289	6.3287×10^{-7}
FB	0.0086645736	1.1766×10^{-8}
GJ	0.0	8.6646×10^{-3}

	x=0.1 h=0.0001 y=0.0086645618	
	Calculated value	Error
RK2	0.0086645612	5.9715×10^{-10}
RK3	0.0086645618	7.9581×10^{-13}
RK4	0.0086645618	7.9581×10^{-13}
FB	0.0086645618	7.8160×10^{-13}
GJ	0.0086564905	8.0727×10^{-6}

	x=100 h=0.0001 y=4.5694262543	
	Calculated value	Error
RK2	4.5694272615	1.0072×10^{-6}
RK3	4.5694272931	1.0088×10^{-6}

RK4	4.5694272931	1.0088×10^{-6}
FB	4.5694262543	1.0088×10^{-6}
GJ	4.5694267518	4.9753×10^{-7}

	x=0.1 h=0.1 y=0.0086645618	
	Calculated value	Error
RU1	0.0094531950	7.8863×10^{-4}
RU2	0.0086625300	2.0318×10^{-6}
RU3	0.0086640006	6.1743×10^{-8}
RU4	0.0086645618	2.0825×10^{-10}
RU5	0.0086645618	3.1264×10^{-13}
RU6	0.0086645618	3.3111×10^{-12}
RU7	0.0086645618	8.2423×10^{-13}
RL1	0.0092905901	6.2603×10^{-4}
RL2	0.0086005178	5.4900×10^{-6}
RL3	0.0086645920	3.0222×10^{-8}
RL4	0.0086645618	1.9170×10^{-11}
RL5	0.0086645618	1.1369×10^{-13}
RL6	0.0086645627	9.1276×10^{-10}
RL7	0.0083108018	3.8369×10^{-13}

	x=0.1 h=0.0001 y=0.0086645618	
	Calculated value	Error
RU1	0.0084531950	7.8863×10^{-7}
RU2	0.0086645618	4.4480×10^{-12}
RU3	0.0086645618	7.8160×10^{-13}
RU4	0.0086645618	7.8160×10^{-13}

RU5	0.0086645618	1.6342×10^{-12}
RU6	0.0086645618	7.5981×10^{-13}
RU7	0.0086645618	1.6342×10^{-12}
RL1	0.0086649665	3.3473×10^{-7}
RL2	0.0086645618	5.4428×10^{-12}
RL3	0.0086645618	7.8160×10^{-13}
RL4	0.0086645618	1.2790×10^{-13}
RL5	0.0086645618	9.9476×10^{-14}
RL6	0.0086645624	5.7146×10^{-10}
RL7	0.0086645618	7.8160×10^{-13}

	x=100 h=0.0001 y=4.5694262543	
	Calculated value	Error
RU1	4.5694272965	1.0422×10^{-6}
RU2	4.5694272631	1.0088×10^{-6}
RU3	4.5694272631	1.0088×10^{-6}
RU4	4.5694272631	1.0088×10^{-6}
RU5	4.5694272631	1.0088×10^{-6}
RU6	4.5694272631	1.0088×10^{-6}
RU7	4.5694272631	1.0083×10^{-6}
RL1	4.5694275856	1.0313×10^{-6}
RL2	4.5694272631	1.0088×10^{-6}
RL3	4.5694272631	1.0088×10^{-6}
RL4	4.5694272637	1.0094×10^{-6}
RL5	4.5694262381	1.6174×10^{-8}
RL6	4.5694275650	1.3107×10^{-6}
RL7	4.5694272631	1.0088×10^{-6}

ตัวอย่างที่5

$y'(x) = y^3, x \in [0,10]$, $y(0) = 0.1$ ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่5.14 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าของวิธีรุงเง-คุตตา

	x=0.1 h=0.1 y=0.10010015025043829400	
	Calculated value	Error
RD1	0.1000694068	0.0000307435
RD2	0.1001001502	0.0000000001
RD3	0.1001001502	0.0000000001
RD4	0.1001001352	0.0000000151
RD5	0.1001001501	0.0000000002
RD6	0.1000911792	0.0000089711
RD7	0.1001001501	0.0000000002
RA1	0.1001503375	0.0000501872
RA2	0.1001001503	0.0
RA3	0.1001001502	0.0000000001
RA4	0.1000836890	0.0000164613
RA5	0.1001001503	0.0
RA6	0.1000919157	0.0000082346
RA7	0.1001001051	0.0000000452

	x=1.0 h=0.1 y=0.10101525450000000000	
	Calculated value	Error
RD1	0.1007006428	0.0003146117
RD2	0.1010152545	0.0
RD3	0.1010152543	0.0000000002
RD4	0.1010150978	0.0000001567

RD5	0.1010152523	0.0000000022
RD6	0.1009231747	0.0000920798
RD7	0.1010152529	0.0000000016
RA1	0.1015346072	0.0005193527
RA2	0.1010152545	0.0
RA3	0.1010152545	0.0
RA4	0.1008464678	0.0001687867
RA5	0.1010152549	0.0000000004
RA6	0.1009307260	0.0000845285
RA7	0.1010152529	0.0000000016

5.3 การประมาณค่าของฟังก์ชัน

<u>**ตัวอย่างที่ 1**</u> จงหาพหุนามกำลัง 6 เพื่อใช้หาค่าประมาณของ $\ln(x+2)$ ในช่วงปิด $[-1,1]$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดด้วยพหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์

<u>วิธีทำ</u>

จาก พหุนามเลอจองด์ $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$, $p_3(x)=x^3-\frac{3x}{5}$

$p_4(x)=x^4-\frac{6x^2}{7}+\frac{3}{35}$, $p_5(x)=x^5-\frac{10x^3}{9}+\frac{5x}{21}$, $p_6(x)=x^6-\frac{15x^4}{11}+\frac{5x^2}{11}-\frac{5}{231}$

และ $p(x)=d_0p_0(x)+d_1p_1(x)+d_2p_2(x)+d_3p_3(x)+...+d_kp_k(x)$

$$\therefore d_i=\frac{\int_a^b w(x)f(x)p_i(x)dx}{\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx} \quad , \quad w(x)=1$$

$$\int_{-1}^{1} In(x+2)dx = 3In3-2$$

$$\int_{-1}^{1} xIn(x+2)dx = 2-\frac{3}{2}In3$$

$$\int_{-1}^{1} x^2In(x+2)dx = 3In3-\frac{26}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3In(x+2)dx = \frac{13}{3}-\frac{15}{4}In3$$

$$\int_{-1}^{1} x^4In(x+2)dx = \frac{33}{5}In3-\frac{526}{75}$$

$$\int_{-1}^{1} x^5In(x+2)dx = \frac{526}{45}-\frac{21}{2}In3$$

$$\int_{-1}^{1} x^6In(x+2)dx = \frac{129}{7}In3-\frac{14758}{735}$$

$$\int_{-1}^{1} p_0^2(x)dx = \int_{-1}^{1} dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} p_1^2(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} p_2^2(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^2-\frac{1}{3})^2dx = \frac{8}{45}$$

$$\int_{-1}^{1} p_3^2(x)dx = \int_{-1}^{1} (x^3-\frac{3x}{5})^2dx = \frac{8}{175}$$

$$\int_{-1}^{1} p_4^2(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{6x^2}{7} + \frac{3}{35})^2 dx = \frac{128}{11025}$$

$$\int_{-1}^{1} p_5^2(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^5 - \frac{10x^3}{9} + \frac{5x}{21})^2 dx = \frac{128}{43659}$$

$$\int_{-1}^{1} p_6^2(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^6 - \frac{15x^4}{11} + \frac{5x^2}{11} - \frac{5}{231})^2 dx = \frac{273512}{693693}$$

$$\int_{-1}^{1} p_0(x)In(x+2)dx = \int_{-1}^{1} In(x+2)dx = 3In3 - 2$$

$$\int_{-1}^{1} p_1(x)In(x+2)dx = \int_{-1}^{1} xIn(x+2)dx = 2 - \frac{3}{2}In3$$

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)In(x+2)dx = \int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})In(x+2)dx = 2In3 - \frac{20}{9}$$

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)In(x+2)dx = \int_{-1}^{1}(x^3 - \frac{3x}{5})In(x+2)dx = \frac{47}{15} - \frac{57}{20}In3$$

$$\int_{-1}^{1} p_4(x)In(x+2)dx = \int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{6x^2}{7} + \frac{3}{35})In(x+2)dx = \frac{30}{7}In3 - \frac{824}{175}$$

$$\int_{-1}^{1} p_5(x)In(x+2)dx = \int_{-1}^{1}(x^5 - \frac{10x^3}{9} + \frac{5x}{21})In(x+2)dx = \frac{6946}{945} - \frac{281}{42}In3$$

$$\int_{-1}^{1} p_6(x)In(x+2)dx = \int_{-1}^{1}(x^6 - \frac{15x^4}{11} + \frac{5x^2}{11} - \frac{5}{231})In(x+2)dx = \frac{118}{11}In3 - \frac{285848}{24255}$$

$$\therefore d_0 = \frac{\int_{-1}^{1} p_0(x)In(x+2)dx}{\int_{-1}^{1} p_0^2(x)dx} = \frac{3In3-2}{2} = \frac{3}{2}In3 - 1$$

$$\therefore d_1 = \frac{\int_{-1}^{1} p_1(x)In(x+2)dx}{\int_{-1}^{1} p_1^2(x)dx} = \frac{2-\frac{3}{2}In3}{\frac{2}{3}} = 3 - \frac{9}{4}In3$$

$$\therefore d_2 = \frac{\int_{-1}^{1} p_2(x)In(x+2)dx}{\int_{-1}^{1} p_2^2(x)dx} = \frac{2In3-\frac{20}{9}}{\frac{8}{45}} = \frac{45}{4}In3 - \frac{25}{2}$$

$$\therefore d_3 = \frac{\int_{-1}^{1} p_3(x)In(x+2)dx}{\int_{-1}^{1} p_3^2(x)dx} = \frac{\frac{47}{15}-\frac{57}{20}In3}{\frac{8}{175}} = \frac{1645}{24} - \frac{1995}{32}In3$$

$$\therefore d_4=\frac{\int_{-1}^{1}p_4(x)In(x+2)dx}{\int_{-1}^{1}p_4^2(x)dx}=\frac{\frac{30}{7}In3-\frac{824}{175}}{\frac{128}{11025}}=\frac{23625}{64}In3-\frac{6489}{16}$$

$$\therefore d_5=\frac{\int_{-1}^{1}p_5(x)In(x+2)dx}{\int_{-1}^{1}p_5^2(x)dx}=\frac{\frac{6946}{945}-\frac{281}{42}In3}{\frac{128}{43659}}=\frac{802263}{230}-\frac{584199}{256}In3$$

$$\therefore d_6=\frac{\int_{-1}^{1}p_6(x)In(x+2)dx}{\int_{-1}^{1}p_6^2(x)dx}=\frac{\frac{118}{11}In3-\frac{285848}{24255}}{\frac{273512}{693693}}=\frac{3720717}{136756}In3-\frac{5109533}{170945}$$

จาก $\therefore p(x)=d_0p_0(x)+d_1p_1(x)+d_2p_2(x)+d_3p_3(x)+...+d_kp_k(x)$

$$p(x)=(\frac{3}{2}In3-1)+(3-\frac{9}{4}In3)x+(\frac{45}{4}In3-\frac{25}{2})(x^2-\frac{1}{3})+(\frac{1645}{24}-\frac{1995}{32}In3)(x^3-\frac{3x}{5})+$$
$$(\frac{23625}{64}In3-\frac{6489}{16})(x^4-\frac{6x^2}{7}+\frac{3}{35})+(\frac{802263}{230}-\frac{584199}{256}In3)(x^5-\frac{10x^3}{9}+\frac{5x}{21})+$$
$$(\frac{3720717}{136756}In3-\frac{5109533}{170945})(x^6-\frac{15x^4}{11}+\frac{5x^2}{11}-\frac{5}{231})$$

$$\therefore p(x)=0.693068624+0.500133701x-0.123409534x^2+0.0405115353x^3$$
$$-0.020063273x^4+0.008590824x^5-0.00000717490912x^6$$

จากอนุกรมเทย์เลอร์เราจะได้ค่าของ

$$In(x+2)\cong g(x)=In2+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{64}+\frac{x^5}{160}-\frac{x^6}{384}$$

เราจะนำค่าของ $\ln(x+2)$ มาเปรียบเทียบ กับค่าของ $p(x)$ ที่ทำจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดด้วยพหุนามเชิงตั้งฉากและค่าของ $g(x)$ ที่หาได้จากอนุกรมเทย์เลอร์โดยให้ E_p และ E_g เป็นค่าสัมบูรณ์ของค่าคลาดเคลื่อนของ $p(x)$ และ $g(x)$ ตามลำดับ

ตารางที่5.15 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าของ $p(x)$ และ $g(x)$

x	ln(x+2)	$p(x)$	$g(x)$	E_p	E_g
-1.0	0.000000000	0.000352709	0.002001347	0.000352709	0.002001347
-0.5	0.405465108	0.405476282	0.405562922	0.000011439	0.000097814
0.5	0.916290732	0.916283574	0.916361426	0.000007158	0.000070694
1.0	1.098612290	1.098824580	1.097834680	0.000212289	0.000777608

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาพหุนามกำลัง 6 เพื่อใช้หาค่าประมาณของ e^x ในช่วงปิด $[-1,1]$ โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดด้วยพหุนามเชิงตั้งฉากเลอจองด์

<u>วิธีทำ</u>

จาก พหุนามเลอจองด์ $p_0(x)=1$, $p_1(x)=x$, $p_2(x)=x^2-\frac{1}{3}$, $p_3(x)=x^3-\frac{3x}{5}$

$p_4(x)=x^4-\frac{6x^2}{7}+\frac{3}{35}$, $p_5(x)=x^5-\frac{10x^3}{9}+\frac{5x}{21}$, $p_6(x)=x^6-\frac{15x^4}{11}+\frac{5x^2}{11}-\frac{5}{231}$

และ $p(x)=d_0p_0(x)+d_1p_1(x)+d_2p_2(x)+d_3p_3(x)+\ldots+d_kp_k(x)$

$$\therefore d_i=\frac{\int_a^b w(x)f(x)p_i(x)dx}{\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx} \quad , \quad w(x)=1$$

$$\int_{-1}^{1}e^x dx=e-\frac{1}{e}$$

$$\int_{-1}^{1}xe^x dx=\frac{2}{e}$$

$$\int_{-1}^{1}x^2e^x dx=e-\frac{5}{e}3$$

$$\int_{-1}^{1}x^3e^x dx=-2e+\frac{16}{e}$$

$$\int_{-1}^{1}x^4e^x dx=9e-\frac{65}{e}$$

$$\int_{-1}^{1}x^5e^x dx=-44e+\frac{326}{e}$$

$$\int_{-1}^{1}x^6e^x dx=256e-\frac{1957}{e}$$

$$\int_{-1}^{1}p_0^2(x)dx=\int_{-1}^{1}dx=2$$

$$\int_{-1}^{1}p_1^2(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1}p_2^2(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^2-\frac{1}{3})^2dx=\frac{8}{45}$$

$$\int_{-1}^{1}p_3^2(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^3-\frac{3x}{5})^2dx=\frac{8}{175}$$

$$\int_{-1}^{1}p_4^2(x)dx=\int_{-1}^{1}(x^4-\frac{6x^2}{7}+\frac{3}{35})^2dx=\frac{128}{11025}$$

$$\int_{-1}^{1} p_5^2(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^5 - \frac{10x^3}{9} + \frac{5x}{21})^2 dx = \frac{128}{43659}$$

$$\int_{-1}^{1} p_6^2(x)dx = \int_{-1}^{1}(x^6 - \frac{15x^4}{11} + \frac{5x^2}{11} - \frac{5}{231})^2 dx = \frac{273512}{693693}$$

$$\int_{-1}^{1} p_0(x)e^x dx = \int_{-1}^{1} e^x dx = e - \frac{1}{e}$$

$$\int_{-1}^{1} p_1(x)e^x dx = \int_{-1}^{1} xe^x dx = \frac{2}{e}$$

$$\int_{-1}^{1} p_2(x)e^x dx = \int_{-1}^{1}(x^2 - \frac{1}{3})e^x dx = \frac{2e}{3} - \frac{14}{3e}$$

$$\int_{-1}^{1} p_3(x)e^x dx = \int_{-1}^{1}(x^3 - \frac{3x}{5})e^x dx = -2e + \frac{74}{5e}$$

$$\int_{-1}^{1} p_4(x)e^x dx = \int_{-1}^{1}(x^4 - \frac{6x^2}{7} + \frac{3}{35})e^x dx = \frac{288e}{35} - \frac{2128}{35e}$$

$$\int_{-1}^{1} p_5(x)e^x dx = \int_{-1}^{1}(x^5 - \frac{10x^3}{9} + \frac{5x}{21})e^x dx = -\frac{376e}{9} + \frac{19448}{63e}$$

$$\int_{-1}^{1} p_6(x)e^x dx = \int_{-1}^{1}(x^6 - \frac{15x^4}{11} + \frac{5x^2}{11} - \frac{5}{231})e^x dx = \frac{58480e}{231} - \frac{432112}{231e}$$

$$\therefore d_0 = \frac{\int_{-1}^{1} p_0(x)e^x dx}{\int_{-1}^{1} p_0^2(x)dx} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = 1.175201194$$

$$\therefore d_1 = \frac{\int_{-1}^{1} p_1(x)e^x dx}{\int_{-1}^{1} p_1^2(x)dx} = \frac{\frac{2}{e}}{\frac{2}{3}} = 1.103638324$$

$$\therefore d_2 = \frac{\int_{-1}^{1} p_2(x)e^x dx}{\int_{-1}^{1} p_2^2(x)dx} = \frac{\frac{2e}{3} - \frac{14}{3e}}{\frac{8}{45}} = 0.53672151531631$$

$$\therefore d_3 = \frac{\int_{-1}^{1} p_3(x)e^x dx}{\int_{-1}^{1} p_3^2(x)dx} = \frac{\frac{-10e^2 + 74}{5e}}{\frac{8}{175}} = 0.17613921193221$$

$$\therefore d_4 = \frac{\int_{-1}^{1} p_4(x)e^x dx}{\int_{-1}^{1} p_4^2(x)dx} = \frac{\frac{288e^2 - 2128}{35e}}{\frac{128}{11025}} = 0.04359536747805$$

$$\therefore d_5 = \frac{\int_{-1}^{1} p_5(x)e^x dx}{\int_{-1}^{1} p_5^2(x)dx} = \frac{\frac{-2632e^2 + 19448}{63e}}{\frac{128}{43659}} = 0.00870082299455$$

$$\therefore d_6 = \frac{\int_{-1}^{1} p_6(x)e^x dx}{\int_{-1}^{1} p_6^2(x)dx} = \frac{\frac{58480e^2 - 432112}{231e}}{\frac{273512}{693693}} = 0.0000008142416433$$

จาก $\therefore\ p(x) = d_0 p_0(x) + d_1 p_1(x) + d_2 p_2(x) + d_3 p_3(x) + ... + d_k p_k(x)$

$$p(x) = 1.175201194 + 1.103638324x + 0.53672151531631(x^2 - \frac{1}{3})$$
$$+ 0.17613921193221(x^3 - \frac{3x}{5}) + 0.04359536747805(x^4 - \frac{6x^2}{7} + \frac{3}{35})$$
$$+ 0.00870082299455(x^5 - \frac{10x^3}{9} + \frac{5x}{21}) + 0.0000008142416433(x^6 - \frac{15x^4}{11} + \frac{5x^2}{11} - \frac{5}{231})$$

$$\therefore\ p(x) = 1.00003075038744 + 1.00002642136324x + 0.49925442758798x^2$$
$$+ 0.1664716231039x^3 + 0.04359425714805x^4 + 0.00870082299455x^5$$
$$- 0.000000814242x^6$$

จากอนุกรมเทย์เลอร์เราจะได้ค่าของ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$$

เราจะนำค่าของ e^x มาเปรียบเทียบ กับค่าของ $p(x)$ ที่ทำจากวิธีกำลังสองน้อยที่สุดด้วยพหุนามเชิงตั้งฉากและค่าของ $g(x)$ ที่หาได้จากอนุกรมเทย์เลอร์โดยให้ E_p และ E_g เป็นค่าสัมบูรณ์ของค่าคลาดเคลื่อนของ $p(x)$ และ $g(x)$ ตามลำดับ

ตารางที่5.16 เปรียบเทียบค่าจริงกับค่าของ $p(x)$ และ $g(x)$

x	e^x	$p(x)$	$g(x)$	E_p	E_g
-1.0	x	e^x	$p(x)$	$g(x)$	E_p
-0.5	-1.0	0.367879441	3.67816841	0.366666667	0.000062600
0.5	-0.5	0.606530662	0.606488715	0.606510417	0.000020243
1.0	0.5	1.648721273	1.64867622	1.64869792	0.000023354

บทที่ 6
บทสรุปการดำเนินการปัญหาพิเศษ

วิธีการเชิงตัวเลขได้ถูกนำมาใช้เพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ไม่สามารถหาคำตอบโดยตรงได้ และได้มีการนำวิธีการเชิงตัวเลขมาใช้เพื่อประมาณค่าคำตอบของผลเฉลยของปัญหาที่ไม่สามารถปรับลดรูปให้อยู่ในรูปอย่าง่ายได้ เช่น ผลเฉลยของปัญหาที่อยู่ในรูปสมการปริพันธ์ เป็นต้น นอกจากนี้วิธีการเชิงตัวเลขยังได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้เพื่อช่วยในการหาคำตอบทางคอมพิวเตอร์อีกทางหนึ่งซึ่งเป็นประโยชน์อย่างยิ่ง สำหรับการหาคำตอบที่ไม่สามารถหาได้ด้วยวิธีการเดิมและรวดเร็วอีกด้วย ในบทนี้จะทำการสรุปวิธีการและแนวคิดในหัวข้อต่างๆที่ได้ทำการศึกษา ดังนี้

6.1 การหาค่าปริพันธ์

ผลลัพท์ที่หามาได้จากการปริพันธ์และค่าที่ได้จากการหาผลบวกของการแทนค่ารากและค่า A_k จะมีค่าใกล้เคียงกันมากและยิ่งถ้าค่า n มากขึ้นเรื่อยๆก็จะได้ค่าที่ใกล้เคียงกันมากขึ้นอีกตามลำดับ

6.2 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

การคำนวณของวิธีการของรุงเง-คุตตามีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากเมื่ออันดับสูงขึ้น ดังตัวอย่างที่ได้แสดงมาเราได้แสดงวิธีการหาค่าของรุงเง-คุตตาในรูปแบบโจทย์ต่างๆและฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักที่แตกต่างกันด้วย จึงทำให้ผู้ที่สนใจสามารถมาศึกษาและนำไปใช้ได้

6.3 การประมาณค่าของฟังก์ชัน

ค่าที่เราคำนวณด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะมีความคลาดเคลื่อนน้อยกว่าค่าที่ได้จากการหาโดยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยในตัวอย่างที่ได้นำเสนอมาได้ใช้ ค่าของพหุนามเลอจองด์นำมาคำนวณและในทำนองเดียวกันพหุนามตัวอื่นก็น่าจะหาค่าได้เหมือนกัน

ผู้ที่สนใจต้องการค้นคว้าศึกษาเพิ่มเติม ขอแนะนำว่า ลองนำฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักแต่ละตัวมาเปรียบเทียบกันโดยใช้โจทย์ปัญหาเดียวกัน เพื่อที่จะได้ทราบว่าฟังก์ชันถ่วงน้ำหนักตัวไหนให้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด และเหมาะสมกับการนำไปใช้ได้ดีที่สุด

เอกสารอ้างอิง

[1]ไมตรี โพธิ์สุข. 2529. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน**. กรุงเทพฯ : โครงการตำรา คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรมและวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

[2] Brice Carnahan, H.A. LUTHER and James O.Wilkes. **Applied Numerical Methods.** The United States of America.1969.

[3] Eric W.Weisstein. 1999. **Orthogonal Polynomials**. [Online] Available : http://www.mathwold.wolfram.com/Orthogonal Polynomials.html.

[4] Walter Gautschi . 2004. **Computing polynomials orthogonal with respect to densely oscillating and exponentially decaying weight functions and related integrals**. [Online] Available : http://www.elsevier.com/locate/cam.

[5] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun. **Handbook of mathematical function with formulas graphs and mathematical tables.** New York.1965.

[6] Maitree Podisuk, Pongpan Rattanathanawan and Phimpraphai Phutthiwat. "Sequences of Orthogomal Polynomials and Applications." Department of Mathematics and Computer Science. King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

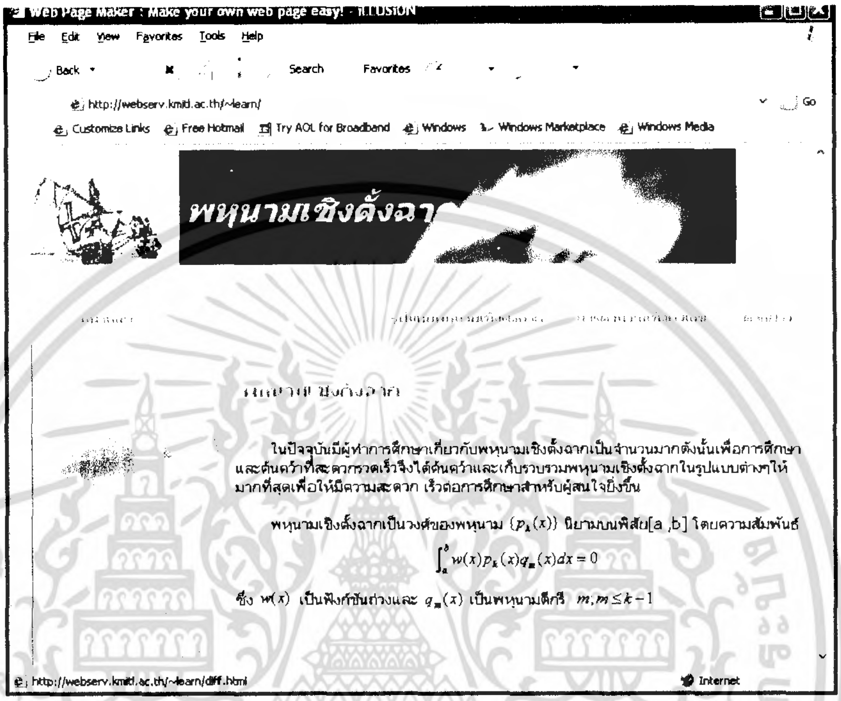
[7] Maitree Podisuk, Witchaya Rattanametawee and Decha Samana, "Applications of Orthogonal Polynomials.", Department of Mathematics and Computer Science. King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

[8] Maitree Podisuk ,Sirikul Bunditsaovapak, "Some Orthogonal Polynomials.", Department of Mathematics and Computer Science. King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

ภาคผนวก

คู่มือการเข้าใช้เว็บไซต์ของพหุนามเชิงตั้งฉาก

1. พิมพ์ Address ตรงอินเตอร์เน็ตว่า http://webserv.kmitl.ac.th/~learn และเมื่อพิมพ์เสร็จกดปุ่ม "Enter" จะได้รูปร่างหน้าจอของ เรื่องพหุนามเชิงตั้งฉาก ดังรูปที่ 1



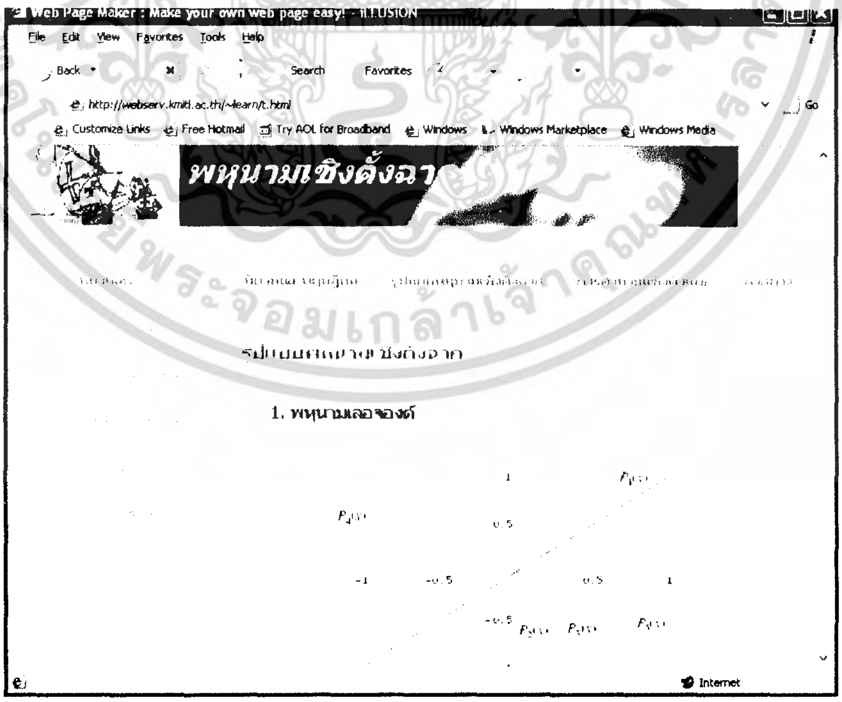
รูปที่ 1.

2. ในหน้าเว็บไซต์นี้จะมีลิงค์ที่ช่วยให้ไปสู่เนื้อหาของเรื่องอื่นๆได้ตามหัวข้อใหญ่บนลิงค์ ได้แก่ หน้าหลัก นิยาม และ ทฤษฎีบท รูปแบบของพหุนามเชิงตั้งฉาก การคำนวณเชิงตัวเลข ตัวอย่าง

3. ในส่วนของหัวข้อหลักหน้านี้คือ นิยามและทฤษฎีบทของพหุนามเชิงตั้งฉาก ดังรูปที่ 2.

รูปที่ 2.

4. ในส่วนของหัวข้อหลักหน้านี้คือ รูปแบบพหุนามเชิงตั้งฉากแบบต่างๆ ดังรูปที่ 3.

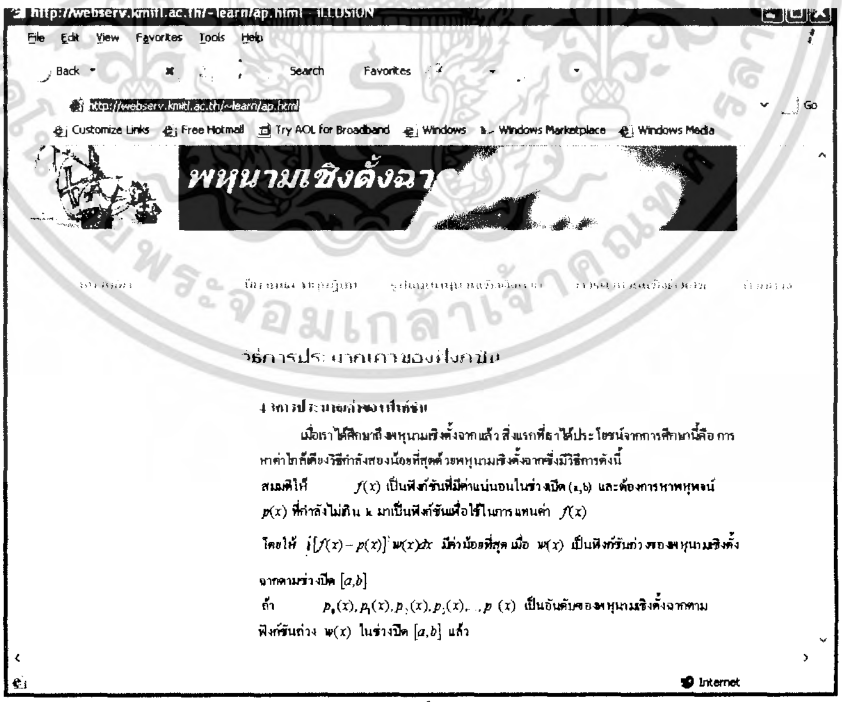


รูปที่ 3.

5. ในส่วนของหัวข้อหลักหน้านี้คือการคำนวณเชิงตัวเลขของวิธีการเกาส์-ควอตเดรเจอร์ ดังรูปที่ 4

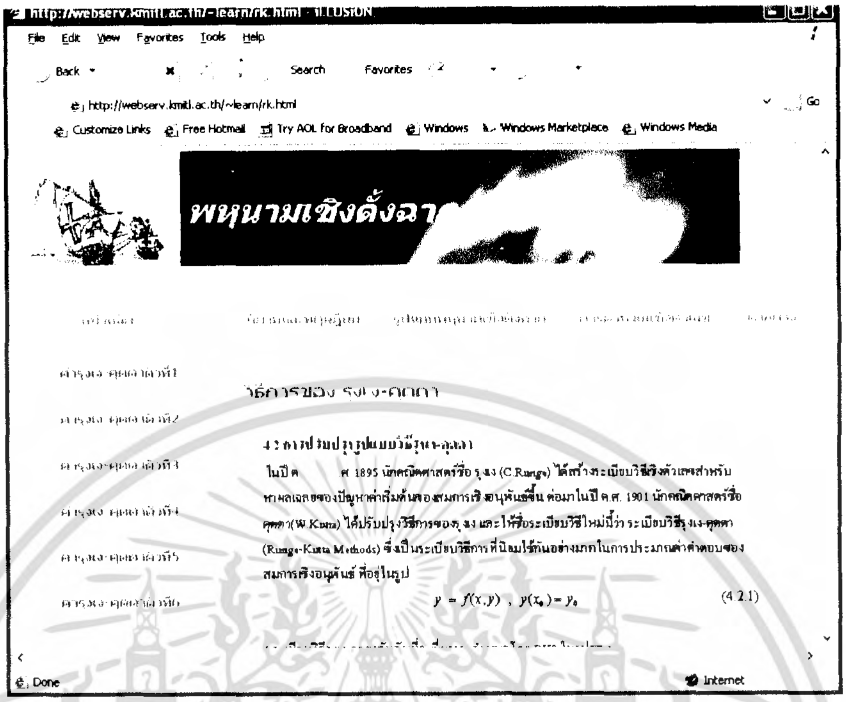
รูปที่ 4.

6. ในส่วนของหัวข้อหลักหน้านี้คือ การคำนวณเชิงตัวเลข ของวิธีการประมาณค่าของฟังก์ชัน ดังรูปที่ 2.



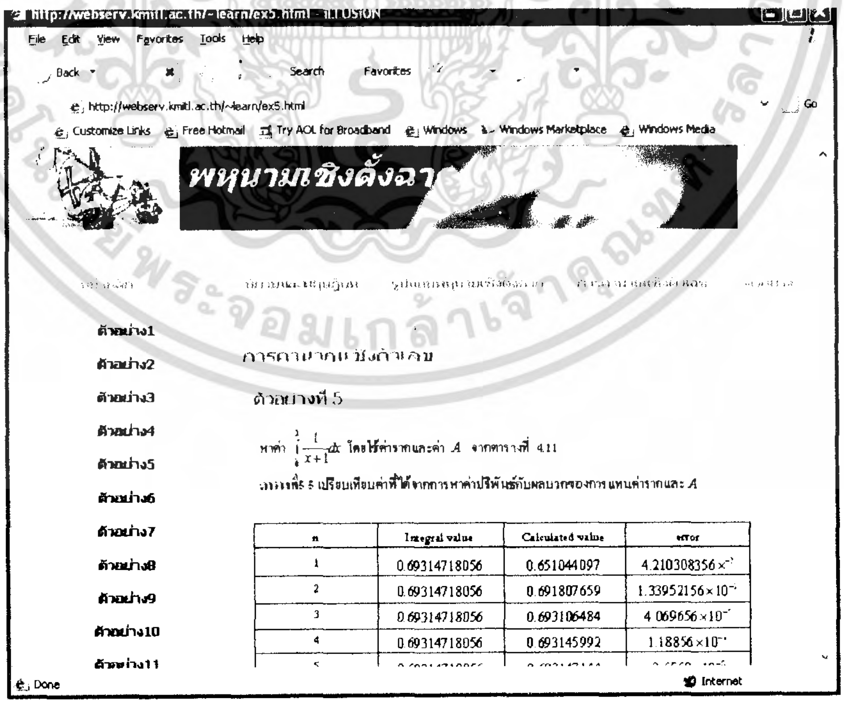
รูปที่ 5.

7. ในส่วนของหัวข้อหลักหน้านี้คือ การคำนวณเชิงตัวเลข ของวิธี รุงเง-คุตตา ดังรูปที่ 6.



รูปที่ 6.

8. ในส่วนของหัวข้อหลักหน้านี้คือ ตัวอย่างซึ่งจะมี 15 ตัวอย่าง ดังรูปที่ 7.



รูปที่ 7.

ตารางศัพท์

คำศัพท์		หน้า
ปริพันธ์ตามเส้นรอบขอบหรือคอนทัวร์อินทิกรัล	Contour integral	6
กระบวนการกราม-ชมิดต์	Gram-Schmidt process	6
ฟังก์ชันเดลตาโครเนกแคร์	Kronecker dalta	7
อัลตร้าสฟิริคัล	Ultraspherical	7
พหุนามจาโคเบียน	Jacobi polynomial	7
ฟังก์ชันไฮเพอร์จีออเมตริก	Hypergeometric function	7
เมอร์ฟีส์	Murphy	7
ฟังก์ชันก่อกำเนิด	Generating function	7
เฮเน-กรีนสไตน์	Heyney-Greenstein	8
ความสัมพันธ์ซ้ำ ความสัมพันธ์เวียนบังเกิด	Recurrence relations	8
ปริพันธ์สเลไฟล	Schlafli integral	8
ฟังก์ชันแกมมา	Gamma function	9
ฟังก์ชันเฟอเรอ	Ferrer function	10
รูปแบบมุมพหุคูณ	Multiple-Angle formulas	11
รอบเส้นรอบขอบ	Contour encloses	12
ฟังก์ชันพื้นฐานหรือฟังก์ชันจำนวนเต็มมากสุด	Floor function	12
สมการดีเทอร์มิแนนต์ครูเรียร์	Curious Determinant equation	13
เอ็กทรีม่า	Extrema	13
ตัวแปรอินทิกรัลเชิงซ้อน	Complex Integral representation	14
ตัวแปรโรดริกส์	Rodrigue Representation	14
การแปลงไฟโบแนนซีอย่างเร็ว	Fast Fibonacci transform	14
กราม-ชมิดต์ ออนอมอไรด์เซชัน	Gram-Schmidt orthonormalization	14
ฟังก์ชันจำนวนเต็มน้อยสุด	Ceiling function	17
ฟังก์ชันวิทเทคเกอร์	Whittaker function	18
ลำดับเซฟเฟอร์	Sheffer sequence	19
ดิสคริมิแนนต์	Discriminant	19

ตารางศัพท์ (ต่อ)

คำศัพท์		หน้า
พหุนามเคอร์เนล	Kernel polynomial	20
สัญลักษณ์พอชแฮมเมอร์	Pochhammer symbol	20
โคนโมเมนต์	Core moment	32
ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา	Runge-Kutta Methods	66