ผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

พัชรินทร์ เปลี่ยนศรี

ศศิธร พวงสง่า

สมถวิล เมืองวุฒิ

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2548

NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

PATCHARIN PLIANSRI

SASITORN PUANGSANGA

SOMTHAWIN MUEANGWUT

A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE
FACULTY OF SCIENCE
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

ACADEMIC YEAR 2005

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพัชรินทร์ เปลี่ยนศรี 45050043
	นางสาวศศิธร พวงสง่า 45050055
	นางสาวสมถวิล เมืองวุฒิ 45050060
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2548

คณะกรรมการสอบ		ลายมือชื่อ
ประธานกรรมการ	รศ.ผ่องพรรณ รัตนธนาวันต์	
กรรมการ	อ.อาทิตย์ แข็งธัญการ	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข	
กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา	ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม	

(รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง)
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

หัวข้อปัญหาพิเศษ	ผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ
ชื่อนักศึกษา	นางสาวพัชรินทร์ เปลี่ยนศรี 45050043
	นางสาวศศิธร พวงสง่า 45050055
	นางสาวสมถวิล เมืองวุฒิ 45050060
ปริญญา	วิทยาศาสตรบัณฑิต
ภาควิชา	คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
สาขาวิชา	คณิตศาสตร์ประยุกต์
ปีการศึกษา	2548
อาจารย์ที่ปรึกษา	รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข
	ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุม

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษนี้ได้แก่การรวบรวมวิธีการคำนวณเชิงตัวเลข ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาและนักวิจัย วิธีการคำนวณเชิงตัวเลขเหล่านี้ได้แก่ ระเบียบวิธีออยเลอร์ ระเบียบวิธีเทย์เลอร์ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา วิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก วิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยวิธีนิวตัน-โค้ต และระเบียบวิธีการหาค่าปริพันธ์ พร้อมทั้งมีการนำเสนอตัวอย่างต่างๆ

Special Project Title	NUMERICAL SOLUTION OF INITIAL VALUE PROBLEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION	
Students	Miss Patcharin Pliansri	45050043
	Miss Sasitorn Puangsanga	45050055
	Miss Somthawim Mueangwut	45050060
Degree	Bachelor of Science	
Department	Mathematics and Computer Science, Faculty of Science	
Programme	Applied Mathematics	
Academic Year	2005	
Special Project Advisor	Assoc.Prof.Dr.Maitree Podisuk	
	Asst.Prof.Dr.Sarun Intakosum	

ABSTRACT

The purpose of this special problem is to collect existing numerical methods for finding the numerical solution of the initial value problem of ordinary differential equation so that it may be useful to students and researchers. These methods are Euler method, Taylor method, Runge-Kutta method, modified Runge-Kutta method by orthogonal polynomials, modified Runge-Kutta method by Newton-Cote method, and the integration method. Some examples are illustrated in this special problem.

กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญสามารถสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข และ ผศ.ดร.ศรัณย์ อินทโกสุมอาจารย์ผู้รับผิดชอบปัญหาพิเศษฉบับนี้ที่กรุณาให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆ รวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบ ความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้

นอกจากนี้คณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่ได้ให้ความสนับสนุนทางด้านกำลังใจและทุนทรัพย์ จนการทำปัญหาพิเศษนี้สำเร็จด้วยดี รวมทั้งเพื่อนๆ และน้องๆ ทุกคนเกี่ยวกับปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้

คณะผู้จัดทำ

กุมภาพันธ์ 2549

สารบัญ

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สารบัญรูป

รูปที่ **หน้า**

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ หน้า

สารบัญตาราง(ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง(ต่อ)

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาพิเศษ

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations) ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นเป็น

$$y(a) = c \tag{1.2}$$

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้เป็นปัญหาที่สำคัญในหลายสาขาวิชา ทั้งวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและสังคมศาสตร์ วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญมีมากมายหลายวิธี การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญต้องการที่จะหาค่าที่ใกล้เคียงกับค่าความจริงมากที่สุดและให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุด บางครั้งงานที่ต้องการความแม่นยำมากที่สุดนั้นจำเป็นที่จะต้องนำวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่คณะผู้จัดทำได้นำมารวบรวมไว้นี้ไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่องานนั้นๆ จึงเป็นที่มาของการจัดทำปัญหาพิเศษนี้

1.2 วัตถุประสงค์ของปัญหาพิเศษ

1). เพื่อศึกษาการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญโดยวิธีต่างๆ เพื่อให้ได้วิธีการที่ดีที่สุดที่สามารถหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญให้ได้ค่าใกล้เคียงค่าความจริงมากที่สุดและให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนน้อยที่สุดในวิธีการที่คณะผู้จัดทำได้นำเสนอ

2). เพื่อรวบรวมเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญให้สะดวกต่อการศึกษาค้นคว้าต่อไป

3). เพื่อนำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่ได้ศึกษามาประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ทางด้านการศึกษาในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญและทำเว็บเพื่อให้ง่ายและสะดวกต่อการค้นคว้าเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับปัญหาพิเศษนี้

1.3 ขอบเขตของปัญหาพิเศษ

ในการศึกษาครั้งนี้ได้รวบรวมวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญในรูปแบบของ

1.3.1 ระเบียบวิธีของออยเลอร์และเทย์เลอร์

1.3.2 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

1.3.3 การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉาก

1.3.4 การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยรูปแบบนิวตัน-โค้ต

1.3.5 การประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์

แสดงผลการทดลองเปรียบเทียบวิธีการที่ทางคณะผู้จัดทำได้นำเสนอ และนำผลการทดลองที่ได้มาสรุปหาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญว่าวิธีการที่คณะผู้จัดทำได้ทำการศึกษานั้นวิธีการใดสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ดีที่สุด

1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1). ผู้ที่ศึกษาสามารถนำรูปแบบที่คณะผู้จัดทำได้รวบรวมมานั้นไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้

2). ผู้ที่ศึกษามีความรู้ความสามารถในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเพิ่มขึ้น

3). ผู้ที่ศึกษาสามารถค้นคว้าจากทางเว็บที่คณะผู้จัดทำได้จัดทำขึ้น ทำให้การค้นคว้าง่ายและสะดวกต่อการสืบค้นข้อมูลในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับหัวข้อปัญหาพิเศษนี้

บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations) ที่อยู่ในรูป

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นเป็น

$$y(a) = c \tag{2.2}$$

เป็นปัญหาที่สำคัญในหลายสาขาวิชาทั้งวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีและสังคมศาสตร์ ซึ่งเป็นที่นิยมศึกษาของนักวิจัยจำนวนมาก โดยมีวิธีที่นิยมใช้อยู่หลายวิธีด้วยกันดังจะรวบรวมให้เห็นดังนี้

2.1 วิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

2.1.1 วิธีของเทย์เลอร์ (Tayler's Method)

วิธีของเทย์เลอร์เป็นวิธีของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบค่าเริ่มต้นจากการกระจายเทอม $(x_m + h)$ ตามอนุกรมกำลังเทย์เลอร์จะได้

$$y_m + h = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2!} y''(x_m) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_m) + \ldots \frac{h^k}{\kappa!} y^k(x_m) \tag{2.3}$$

สมการที่ (2.3) เรียกว่าเทย์เลอร์อันดับที่ k

สำหรับเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปรจะได้

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = {} & f(x,y) + \left(f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y\right) \\ & + \frac{1}{2!}\left((\Delta x)^2 f_{xx}(x,y) + 2\Delta x \Delta y f_{xy}(x,y) + (\Delta y)^2 f_{yy}(x,y)\right) \\ & + \frac{1}{3!}\left((\Delta x)^3 f_{xxx}(x,y) + 3(\Delta x)^2 \Delta y f_{xxy}(x,y)\right. \\ & \left. + 3\Delta x(\Delta y)^2 f_{xyy}(x,y) + (\Delta y)^3 f_{yyy}(x,y)\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.2 วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

วิธีของออยเลอร์เป็นวิธีของการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบค่าเริ่มต้น ซึ่งมีรูปแบบ

$$y_{m+1} = y_m + hf\left(x_m, y_m\right) \tag{2.5}$$

นั่นคือวิธีของออยเลอร์จะหา y_{m+1} โดยใช้เส้นตรงที่มีความชันเป็น $y'\left(x_m\right)$ และผ่านจุด $\left(x_m, y_m\right)$ เป็นตัวกำหนด

2.1.3 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา (Runge-Kutta Method)

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเป็นวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่นิยมใช้กันมากปรับปรุงมาจากวิธีของออยเลอร์ แต่สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(x_m, y_m\right)$ และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่หลายจุด เช่นในกรณีที่ใช้ความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่สองจุด จะได้รูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\left(k_1 + k_2\right) \tag{2.6}$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m, y_m\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + h, y_m + hk_1\right)$$

นั่นคือวิธีนี้ใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(x_m, y_m\right)$ และมีความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของ $y'\left(x_m\right)$ และ $f\left(x_m + \alpha h, y_m + \beta hk_1\right)$ รูปแบบของสมการที่ (2.6) เรียกว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง (Runge-Kutta method of second order) หรือ (RK-2) ซึ่งจะต้องหาค่าเหล่านี้จะกระทำโดยใช้ความรู้ของการขยายของอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ส่วนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สาม (Runge-Kutta method of third order) หรือ (RK-3) จะมีรูปแบบเป็น

$$y_{m+1} = y_m + h\left(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3\right) \tag{2.7}$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m, y_m\right) = y'\left(x_m\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_1 hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 hk_1 + \lambda_1 hk_2\right)$$

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สูงเกินกว่าสี่จะไม่ทำให้การหาผลเฉลยได้ผลดีขึ้น ดังนั้น โดยทั่วไปจึงใช้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ที่นิยมใช้จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) \tag{2.8}$$

โดยที่

$$k_1 = f\left(x_m, y_m\right)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x_m + h, y_m + hk_3\right)$$

2.1.4 ระเบียบวิธีรุงเง–คุตตา-เมอร์สัน (Runge-Kutta Merson Method)

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านทำการพัฒนารูปแบบระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา เพื่อให้ได้ผลลัพธ์ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้นที่มีความถูกต้องเพิ่มมากยิ่งขึ้นดังเช่นระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตา-เมอร์สัน ซึ่งมีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}k_1 + + \frac{4}{6}k_4 + \frac{1}{6}k_5 \tag{2.9}$$

โดยที่

$$k_1 = hf\left(x_m, y_m\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{1}{3}h, y_m + \frac{1}{3}hk_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_m + \frac{1}{3}h, y_m + \frac{1}{6}hk_1 + \frac{1}{6}k_2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{8}hk_1 + \frac{3}{8}hk_3\right)$$

$$k_5 = hf\left(x_m + h, y_m + \frac{1}{2}hk_1 - \frac{3}{2}hk_3 + 2hk_4\right)$$

2.1.5 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก (Runge-Kutta Fehlberg Method)

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก เสนอไว้เมื่อปี ค.ศ. 1969 โดยนักวิจัยชื่อไฟล์เบิร์ก (E.Fehlberg) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีการหนึ่งที่เป็นที่ยอมรับ โดยระเบียบวิธีดังกล่าวเป็นระเบียบวิธีที่ปรับปรุงรูปแบบมาจากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา กรณีที่ s=5 โดยการตัดเทอม k_2 ออกจากฟังก์ชันส่วนเพิ่มเมื่อทำการหาสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีแล้ว จะได้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \tag{2.10}$$

โดยที่

$$k_1 = hf\left(x_m, y_m\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \frac{1}{4}hk_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}hk_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}hk_1 - \frac{7200}{2197}hk_2 + \frac{7296}{2197}hk_3\right)$$
$$k_5 = hf\left(x_m + h, y_m + \frac{439}{216}hk_1 - 8hk_2 + \frac{3680}{513}hk_3 - \frac{845}{4104}hk_4\right)$$

กรณีที่ s=6 โดยการตัดเทอม k_2 ออกจากฟังก์ชันส่วนเพิ่มเมื่อทำการหาสัมประสิทธิ์ของระเบียบวิธีแล้วจะได้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา-ไฟล์เบิร์ก มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \qquad (2.11)$$

โดยที่ $k_1 = hf\left(x_m, y_m\right)$

$$k_2 = hf\left(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \frac{1}{4}k_1\right)$$
$$k_3 = hf\left(x_m + \frac{3}{8}h, y_m + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right)$$
$$k_4 = hf\left(x_m + \frac{12}{13}h, y_m + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right)$$
$$k_5 = hf\left(x_m + h, y_m + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4\right)$$
$$k_6 = hf\left(x_m + \frac{1}{2}h, y_m - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 + \frac{3544}{2565}k_3 - \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right)$$

2.2 รูปแบบการหาปริพันธ์

2.2.1 รูปแบบเกาส์-เลอจองด์(Gauss Legendre)

พหุพจน์ตั้งฉากเป็นพหุพจน์ตั้งฉากในช่วงปิด [-1,1] โดยมีฟังก์ชันจุดถ่วง $w(x)=1$ ดังนั้นรูปแบบการปริพันธ์แบบนี้คือ

$$\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f\left(x_k\right) + E\left[f\right] \qquad (2.12)$$

เมื่อจุดของรูปแบบ x_k ; k = 1,2,…,n เป็นจุดใดๆ ในช่วงปิด [-1,1] ซึ่งเป็นรากของพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ (Legendre orthogonal polynomial) $p_n(x_k)$ ซึ่ง

$$
P_n(x) = \begin{cases} 1\,;\, n = 0 \\ \\ x\,;\, n = 1 \\ \\ \dfrac{1}{n}[(2n-1)xp_{n-1}(x) - (n-1)p_{n-2}(x)]\,;\, n > 1 \end{cases}
$$

และ $\quad A_k = \dfrac{1}{p_n'(x_k)} \displaystyle\int_{-1}^{1} \dfrac{p_n(x)}{(x - x_k)} dx$

สำหรับค่าจุดของรูปแบบ(nodal point) x_k และค่าจุดถ่วง(weight point) A_k ของรูปแบบเกาส์–เลอจองด์ สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 แสดงค่าจุดของรูปแบบ และจุดถ่วงสำหรับรูปแบบของเกาส์–เลอจองด์

	$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{1} A_k f(x_k)$	
n	x_k	A_k
2	-0.577350269189626	1.0
	0.577350269189626	1.0
	-0.774596669241483	0.555555555555556
3	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454
5	-0.906179845938664	0.236926885056189
	-0.535469310105683	0.478628670499366
	0.0	0.568888888888889
	0.538469310105683	0.478628670499366
	0.906179845938664	0.236926885056189

2.2.2 นิวตัน-โค้ต(Newton-Cote)

รูปแบบการปริพันธ์ของนิวตัน-โค้ต

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + E[f] \tag{2.13}$$

เรียกรูปแบบที่ (2.13) ว่าการปริพันธ์ด้วยรูปแบบของนิวตัน-โค้ต x_k เรียกว่าจุดของรูปแบบ, A_k เรียกว่าจุดถ่วง, $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต้องการหาปริพันธ์และ $E[f]$ เป็นค่าความคลาดเคลื่อน

นิยาม 2.2.2 ถ้า $x_1 = a$ และ $x_n = b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน-โค้ตจาก (2.13) ว่า รูปแบบนิวตัน-โค้ตชนิดปิด

(closed Newton-Cote formula) และ ถ้า $x_1 > 1$ และ $x_n > b$ แล้วเรียกรูปแบบนิวตัน-โค้ตนี้ว่า

รูปแบบนิวตัน-โค้ตชนิดเปิด (open Newton-Cote formula)

ทฤษฎีบท 2.2.2 ถ้ากำหนดจุด $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นจุดต่างๆกันในช่วงปิด [a, b] ซึ่ง $x_i \neq x_j$ สำหรับ

$i \neq j$ และค่า $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n)$ และจะมีจำนวนจริง

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$

ที่ทำให้

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

สำหรับ $f(x)$ ที่เป็นพหุนามที่กำลังน้อยกว่าหรือเท่ากับ n-1

ตัวอย่างค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตแบ่งช่วงระหว่างจุดที่เท่ากัน แสดงดังตารางที่ 2.2

ตารางที่ 2.2 แสดงค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตชนิดปิด

จำนวนจุด	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
2	1/2	1/2					
3	1/6	4/6	1/6				
4	1/8	3/8	3/8	1/8			
5	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90		

ตารางที่ 2.2 (ต่อ) แสดงค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตชนิดปิด

6	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288	
7	41/840	216/840	27/840	272/840	27/840	216/840	41/840

นิยาม 2.3 ให้ $f : N \to R^{*}$

$O(f)$ เป็นเซตของฟังก์ชัน $g : N \to R^{*}$ ถ้ามี $\exists c \in R^{+}$ และ $\exists n_0 \in N$ ซึ่งทำให้ $g(n) \le cf(n)$ สำหรับ $n \ge n_0$

2.3 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูง

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสูงจะกระทำได้โดยเปลี่ยนสมการนั้นเป็นระบบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง แล้วหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งเหล่านั้นพร้อมกันทั้งระบบ โดยจะกระทำดังนี้

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}\right), a \le x \le b \tag{2.14}$$

โดยที่

$$y(a) = y_0, y'(a) = y'_0, y''(a) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}$$

โดยที่

$y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ เป็นค่าคงที่ (ค่าเริ่มต้น)

สมมติให้

$$y_1 = y \,,\; y_2 = y'_1 \,,\; y_3 = y'_2 \,, \ldots,\; y_n = y'_{n-1}$$

$\therefore$ จะได้ระบบสมการอนุพันธ์เชิงปกติอันดับหนึ่ง ดังนี้

$$\begin{aligned}
y'_1 &= y_2 && , y_1(a) = y_0 \\
y'_2 &= y_3 && , y_2(a) = y'_0 \\
y'_3 &= y_4 && , y_3(a) = y''_0 \\
&\;\;\vdots \\
y'_n &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) && , y_n(a) = y_0^{(n-1)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

นั่นคือการแก้ปัญหาสมการอนุพันธ์เชิงปกติของรูปแบบที่ (2.14) จะเปลี่ยนเป็นการแก้ระบบของสมการอนุพันธ์เชิงปกติอันดับหนึ่ง n สมการของรูปแบบที่ (2.14) หรือโดยปกติระบบของสมการอนุพันธ์เชิงปกติอันดับหนึ่งจะเป็น

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) && , y_1(a) = y_0 \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) && , y_2(a) = y_0' \\
y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, ..., y_n) && , y_3(a) = y_0'' \\
&. \\
&. \\
&. \\
y_m' &= f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) && , y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

ซึ่งรูปแบบที่ (2.15) และรูปแบบที่ (2.16) เป็นสมการแบบเดียวกัน ต่างกันที่ว่ารูปแบบที่ (2.16) อยู่ในรูปแบบทั่วๆ ไป สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งจะมีฟังก์ชัน $f_1, f_2, ..., f_n$ เป็นฟังก์ชันของ $n+1$ ตัวแปรคือ $x, y_1, y_2, ..., y_n$ แต่รูปแบบที่ (2.15) เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งแบบเฉพาะ โดยมี

$$
\begin{aligned}
& f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = y_2 \\
& f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) = y_3 \\
& . \\
& . \\
& . \\
& f_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n) = y_n \\
\text{และ}\quad & f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) = f(x, y_1, y_2, ..., y_n)
\end{aligned}
$$

สำหรับในที่นี้จะแสดงวิธีการหาผลเฉลยรูปแบบที่ (2.15) เมื่อ $n = 3$ โดยวิธี $RK-4$ เพื่อให้เข้าใจวิธีการหาผลเฉลยของสมการประเภทนี้

จาก

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) && , y_1(a) = y_0 \\
y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) && , y_2(a) = y_0' \\
y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, ..., y_n) && , y_3(a) = y_0''
\end{aligned}
$$

จาก $$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\therefore \quad y_{1,m+1} = y_{1,m} + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{12} + 2k_{13} + k_{14})$$

$$y_{2,m+1} = y_{2,m} + \frac{h}{6}(k_{21} + 2k_{22} + 2k_{23} + k_{24})$$

$$y_{3,m+1} = y_{3,m} + \frac{h}{6}(k_{31} + 2k_{32} + 2k_{33} + k_{34})$$

โดยที่ $$k_{11} = f_1(x_m, y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m})$$

$$k_{21} = f_2(x_m, y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m})$$

$$k_{31} = f_3(x_m, y_{1,m}, y_{2,m}, y_{3,m})$$

$$k_{12} = f_1(x_m + \frac{h}{2}, y_{1,m} + \frac{h}{2}k_{11}, y_{2,m} + \frac{h}{2}k_{21}, y_{3,m} + \frac{h}{2}k_{31})$$

$$k_{22} = f_2(x_m + \frac{h}{2}, y_{1,m} + \frac{h}{2}k_{11}, y_{2,m} + \frac{h}{2}k_{21}, y_{3,m} + \frac{h}{2}k_{31})$$

$$k_{32} = f_3(x_m + \frac{h}{2}, y_{1,m} + \frac{h}{2}k_{11}, y_{2,m} + \frac{h}{2}k_{21}, y_{3,m} + \frac{h}{2}k_{31})$$

$$k_{13} = f_1(x_m + \frac{h}{2}, y_{1,m} + \frac{h}{2}k_{12}, y_{2,m} + \frac{h}{2}k_{22}, y_{3,m} + \frac{h}{2}k_{32})$$

$$k_{23} = f_2(x_m + \frac{h}{2}, y_{1,m} + \frac{h}{2}k_{12}, y_{2,m} + \frac{h}{2}k_{22}, y_{3,m} + \frac{h}{2}k_{32})$$

$$k_{33} = f_3(x_m + \frac{h}{2}, y_{1,m} + \frac{h}{2}k_{12}, y_{2,m} + \frac{h}{2}k_{22}, y_{3,m} + \frac{h}{2}k_{32})$$

$$k_{14} = f_1(x_m + h, y_{1,m} + hk_{13}, y_{2,m} + hk_{23}, y_{3,m} + hk_{33})$$

$$k_{24} = f_2(x_m + h, y_{1,m} + hk_{13}, y_{2,m} + hk_{23}, y_{3,m} + hk_{33})$$

$$k_{34} = f_3(x_m + h, y_{1,m} + hk_{13}, y_{2,m} + hk_{23}, y_{3,m} + hk_{33})$$

จะเห็นได้ว่าค่า $y_{1,m+1}$, $y_{2,m+1}$ และ $y_{3,m+1}$ จะต้องหาไปพร้อมๆ กัน

2.4 ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีบทที่ 2.4.1 ถ้า T เป็นการหดตัว (contraction) บน R^n แล้วจะจุด $x \in R^n$ เพียงจุดเดียว ที่ทำให้ $Tx = x$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.2 ให้ $f(x)$ เป็นเซตย่อยของ $C[a,b]$ ที่มีขอบเขตจำกัดและต่อเนื่องสม่ำเสมอ จะได้ว่า

$f(x)$ เป็นเซต ที่มีขอบเขตจำกัดสมบูรณ์

ทฤษฎีบทที่ 2.4.3 ถ้า $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นอันดับใน $C[a,b]$ และถ้า $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ รวมกันเป็นเซตย่อยที่มีขอบเขต

จำกัดและต่อเนื่องสม่ำเสมอของ $C[a,b]$ แล้ว $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ จะมีอันดับย่อยที่ลู่เข้าหาฟังก์ชัน

$f \in C[a,b]$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน R กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\varepsilon -$ ผลเฉลยใกล้เคียงของ

สมการที่ $y'(x) = f(x,y)$ บน $|x-\xi| \le \alpha$ ที่ $\varphi(\xi) = \eta$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.5 ถ้า $f \in C(R)$ และจะ $\phi \in C^1$ ของสมการที่ $y'(x) = f(x,y)$ บน $|x-\xi| \le \alpha$

ที่ $\phi(\xi) = \eta$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.6 ให้ D เป็นโดเมนในระนาบ (x,y) และ $f \in\subset(D)$ จะฟังก์ชันϕ ซึ่งเป็นผลเฉลยของ

ปัญหาในสมการที่ $y'(x) = f(x,y)$ ในบางช่วงของ x ที่มี ξ อยู่ในช่วงนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.4.7 สมมติให้ $f \in (C, LiP)$ ใน D ส่วนค่าคงที่ลิพชิทซ์ L ให้ ϕ_1 เป็น ε_1 - ผลเฉลย

ใกล้เคียงและ ϕ_2 เป็น ε_2- ผลเฉลยใกล้เคียงของปัญหาของสมการที่ $y'(x) = f(x,y)$และ

อยู่ใน C_p^1 บนช่วง(a,b)ใดๆที่สำหรับบางξ ที่$a < \xi < b$และ

$$|\phi_1(x) - \varphi_2(\xi)| \le \delta \tag{2.17}$$

โดยδ เป็นค่าคงที่บวก ถ้า$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ แล้วสำหรับทุกๆ $x \in [a,b]$จะได้ว่า

$$|\phi_1(x) - \varphi_2(x)| \le \delta e^{L|x-\xi|} + \frac{\varepsilon}{L}\left(e^{L|x-\xi|} - 1\right) \tag{2.18}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.8 สมมุติให้ $f \in (C, LiP)$ บน

$$R = |x-\xi| \le a \text{ และ } |g-\eta \le b|, a,b > 0$$

และให้

$$M = \left\{ \max \left| f(x,y) \right|, (x,y) \in R \right\}$$

และ

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{M} \right)$$

และจะได้ว่ามีผลเฉลย ϕ เพียงหนึ่งใกล้เดียวของปัญหาของสมการที่

$$y'(x) = f(x,y)$$

โดยที่

$$|x-\xi| \le \alpha \text{ และ } \phi(\xi) = \eta$$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.9 ถ้า $f \in (C, Lip)$ บน R แล้วจะมีผลเฉลยย้ำ ϕ_k บน $|x-\xi| \le \alpha$ ซึ่งเป็นฟังก์ชัน

ต่อเนื่องและเข้าแบบสมบูรณ์หาผลเฉลยหนึ่งเดียว $\phi(x)$ ของปัญหาที่

$y'(x) = f(x,y)$

ที่ $\varphi(\xi = \eta)$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.10 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน R ในระนาบ (x,y) ซึ่งมีจุด (ξ,η) อยู่ใน R และมี

$L > 0$ ที่

$$\left| f(x_1 y_1) f(x_1 y_2) \right| \le L |y_1 - y_2| (x_1 y_1), (x_1 y_2) \in R \tag{2.19}$$

แล้วจะมี $S \to 0$ ที่ทำให้

$$\varphi(x) = y + \int_{\xi}^{x} +(s, \phi(s)) ds, |x-\xi| \le \delta \quad \text{เป็นจริง} \tag{2.20}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.4.11 ให้ D เป็นโดเมนบนระนาบ (x,y) และ $f \in C(D)$ โดยที่ f มีขอบเขตจำกัดบน D

ถ้า ϕ เป็นผลเฉลยของปัญหาของสมการที่ $y'(x) = f(x, y)$ บนช่วง (a,b) แล้ว

$\phi(a+0)$ และ $p(b-0)$ มีจริง และถ้า $(a,\phi(a+0))$ หรือ $(b,\phi(b-0))$ อยู่

ใน D แล้วผลเฉลย ϕ อาจจะต่อไปทางซ้าย a หรือไปทางขวาของ b ได้

บทที่ 3
ระเบียบวิธีของออยเลอร์และระเบียบวิธีเทย์เลอร์

3.1 วิธีของออยเลอร์

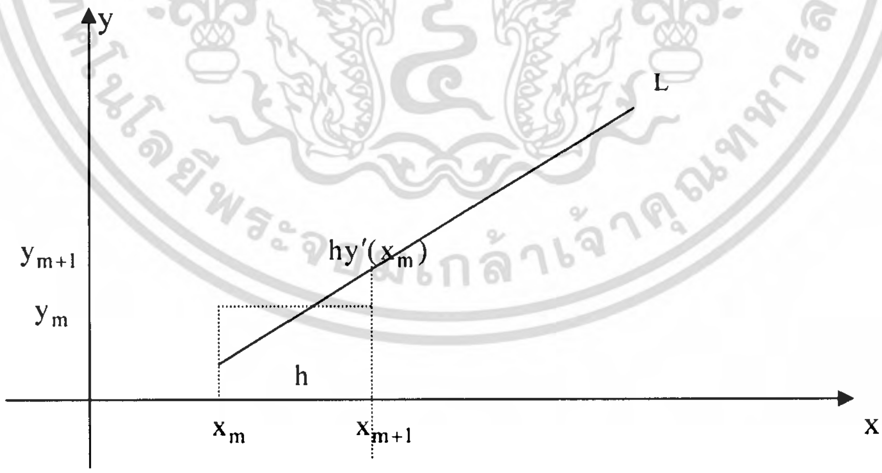
วัตถุประสงค์ของวิธีของออยเลอร์เป็นการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) \quad , \quad a \le t \le b \tag{3.1}$$

โดยมีค่าเริ่มต้นเป็น

$$y(a) = \alpha$$

อันดับแรกเราต้องแบ่งช่วงปิด [a, b] ออกเป็น n ส่วน ซึ่งมี $h = \dfrac{b-a}{n}$, $y_0 = c$ และ $x_k = a + kh$ โดยจะใช้ค่า y_m เพื่อหาค่า y_{m+1} วิธีการของออยเลอร์นี้ เราจะใช้ค่า y_m เพียงค่าเดียวเพื่อหาค่า y_{m+1} เรียกว่า " วิธีการชั้นเดียว" วิธีการของออยเลอร์จะหา y_{m+1} โดยใช้เส้นตรงที่มีความชันเป็น $y'(x_m)$ และผ่านจุด (x_m, y_m) เป็นตัวกำหนดดังรูป



รูปที่ 3.1 แสดงเส้นตรงที่มีความชันเป็น $y'(x_m)$ และผ่านจุด (x_m, y_m)

ซึ่งเราสามารถหาค่า y_{m+1} ได้จาก

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m)$$

3.2 วิธีของเทย์เลอร์

วิธีหาผลเฉลยของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญชั้นเดียวแบบค่าเริ่มต้นวิธีแรกที่จะศึกษาได้แก่วิธีของเทย์เลอร์ ซึ่งเป็นวิธีที่ให้ผลเป็นที่น่าพอใจและมีผู้นิยมใช้กันมาก เนื่องจากเป็นวิธีที่ง่าย สาเหตุที่เรียกว่าวิธีของเทย์เลอร์เพราะใช้อนุกรมกำลังเทย์เลอร์เป็นหลัก

จากสมการ

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)] \tag{3.2}$$

$y' = f(x, y), y(a) = c$ โดย $a \le x \le b$

โดยมี $h = \dfrac{b-a}{n}, y_0 = c$ และ $x_k = a + kh$

กระจายเทอม $y(x_m + h)$ ตามอนุกรมกำลังของเทย์เลอร์

$$y(x_m + h) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2} y''(x_m) + \frac{h^3}{6} y'''(x_m) + \ldots \tag{3.3}$$

ดังนั้น $y(x_m + h) = y_m + hf(x_m, y_m)$

จึงให้

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \tag{3.4}$$

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (3.4) ว่าวิธีของเทย์เลอร์อันดับหนึ่งหรือที่นิยมเรียกกันว่าวิธีของออยเลอร์ ในทำนองเดียวกันจากรูปแบบที่ (3.3)

$y(x_m + h) \cong y(x_m) + hy'(x_m) + \dfrac{h^2}{2} y''(x_m)$ แต่ $y'(x) = f(x, y)$

$$\therefore \qquad y'' = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = f_x + f_y y' = f_x + ff_y$$

$$\therefore \qquad y(x_m + h) = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}[f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)]$$

ดังนั้นให้

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}[f_x + ff_y](x_m, y_m) \tag{3.5}$$

เรียกวิธีการจากรูปแบบที่ (3.5) ว่าวิธีของเทย์เลอร์อันดับที่สอง

สำหรับวิธีของเทย์เลอร์แบบอันดับที่สาม ก็เป็นเช่นเดียวกันกับสองแบบแรก ซึ่งใช้รูปแบบที่ (3.3) โดยได้ว่า

$$y(x_m+h)=y(x_m)+hy'(x_m)+\frac{h^2}{2}y''(x_m)+\frac{h^3}{6}y'''(x_m)$$

$$y'=f(x,y)$$

$$y''=\left[f_x+ff_y\right](x_m,y_m)$$

$$y'''=\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+f\left[\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]+f_y\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

$$\therefore y'''=\left[f_{xx}+f_{xy}f+ff_{yx}+f^2f_{yy}+f_yf_x+ff_y^2\right](x_m,y_m)$$

ถ้า $f_{yx}=f_{xy}$ จะได้ว่า $y'''=f_{xx}+2ff_{xy}+f_xf_y+f^2f_{yy}+ff_y^2$

ดังนั้น รูปแบบของวิธีของเทย์เลอร์แบบอันดับที่สาม

$$y_{m+1}=y_m+h[f]_{(x_m,y_m)}+\frac{h^2}{2}[f_x+ff_y]_{(x_m,y_m)}$$
$$+\frac{h^3}{6}[f_{xx}+2ff_{xy}+f_xf_y+f^2f_{yy}+ff_y^2]_{(x_m,y_m)} \tag{3.6}$$

สำหรับวิธีของเทย์เลอร์แบบอันดับที่สี่ ก็เป็นเช่นเดียวกันกับอันดับที่หนึ่ง สองและสาม ซึ่งใช้รูปแบบที่ (3.3) โดยได้ว่า

$$y(x_m+h)=y(x_m)+hy'(x_m)+\frac{h^2}{2}y''(x_m)+\frac{h^3}{6}y'''(x_m)+\frac{h^4}{24}y^{IV}(x_m)$$

$$y'=f(x,y)$$

$$y''=\left[f_x+ff_y\right](x_m,y_m)$$

$$\therefore y'''=\left[f_{xx}+2ff_{xy}+f_xf_y+f^2f_{yy}+ff_y^2\right](x_m,y_m)$$

$$y^{IV}=\frac{\partial f_{xx}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_{xx}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+2f\left[\frac{\partial f_{xy}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_{xy}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]+2f_{xy}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

$$+f_x\left[\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]+f_y\left[\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]+f^2\left[\frac{\partial f_{yy}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_{yy}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

$$+f_{yy}\left[\frac{\partial f^2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f^2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]+f\left[\frac{\partial f_y^2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f_y^2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]+f_y^2\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

$$\begin{aligned} y^{IV} = {} & f_{xxx}+ff_{xxy}+2ff_{xyx}+2f^2f_{xyy}+2f_xf_{xy}+2ff_yf_{xy} \\ & +f_xf_{yx}+ff_xf_{yy}+f_yf_{xx}+ff_yf_{xy}+f^2f_{yyx}+ff^2f_{yyy} \\ & +2ff_xf_y+2fff_yf_{yy}+2ff_yf_{xy}+2fff_yf_{yy}+f_xf_y^2+ff_yf_y^2 \end{aligned}$$

ถ้า $f_{xxy}=f_{xyx}$ และ $f_{xyy}=f_{yyx}$ และ $f_{xy}=f_{yx}$

$$\begin{aligned} y^{IV} = {} & f_{xxx}+3ff_{xxy}+3f^2f_{xyy}+3f_xf_{xy}+5ff_yf_{xy}+3ff_xf_{yy}+f_yf_{xx} \\ & +f^3f_{yyy}+4f^2f_yf_{yy}+f_y^2f_x+ff_y^3 \end{aligned}$$

ดังนั้น รูปแบบของเทย์เลอร์อันดับที่สี่

$$\begin{aligned} y_{m+1} = {} & y_m+h[f](x_m,y_m)+\frac{h^2}{2}\left[f_x+ff_y\right](x_m,y_m) \\ & +\frac{h^3}{6}\left[f_{xx}+2ff_{xy}+f_xf_y+f^2f_{yy}+ff_y^2\right](x_m,y_m) \\ & +\frac{h^4}{24}\left[f_{xxx}+3ff_{xxy}+3f^2f_{xyy}+3f_xf_{xy}+5ff_yf_{xy}+3ff_xf_{yy}+f_yf_{xx}\right. \\ & \left.+f^3f_{yyy}+4f^2f_yf_{yy}+f_y^2f_x+ff_y^3\right](x_m,y_m) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ปัญหาที่ 3.1 $y'=\dfrac{4}{x(x-4)}, x\in[5,10]$ โดยที่ $y(5)=5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x)=5+\ln(5)-\ln(x)+\ln(x-4)$

ตารางที่ 3.1 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x=5.1, h=0.1$ $y=5.0755075525000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	5.0800000000000000000	$4.492447491855000\times10^{-3}$
Taylor2	5.0752000000000000000	$3.075525081450000\times10^{-4}$
Taylor3	5.0476906666666700000	$2.781688584147800\times10^{-2}$
Taylor4	5.0504801066666700000	$2.502744584147800\times10^{-2}$

ตารางที่ 3.2 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=5.1 และh=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	5.07558320327531200000	$4.353459371000000 \times 10^{-6}$
Taylor2	5.07557884952924600000	$2.867550000000000 \times 10^{-10}$
Taylor3	5.07557882676148200000	$1.908021464715630 \times 10^{-1}$
Taylor4	5.07557882676367500000	$2.305232500000000 \times 10^{-8}$

ตารางที่ 3.3 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=15 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
Euler	6.29932419705063600000	$3.878869761600000 \times 10^{-5}$
Taylor2	6.29928540676228800000	$1.590732000000000 \times 10^{-9}$
Taylor3	6.29928531721452400000	$2.333084828220000 \times 10^{-6}$
Taylor4	6.29928531722134000000	$9.113168000000000 \times 10^{-8}$

ปัญหาที่ 3.2 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0, 1.1]$ โดยที่ $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 3.4 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	1.00000000000000000000	$5.025188681312000 \times 10^{-3}$
Taylor2	1.00500000000000000000	$2.518868868131200 \times 10^{-5}$
Taylor3	1.00500000000000000000	$2.518868131200000 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 3.4 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
Taylor4	1.00502500000000000000	$1.886813120000000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 3.5 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	1.00502008745819300000	$5.101223119000000 \times 10^{-6}$
Taylor2	1.00502520537290200000	$1.669158900000000 \times 10^{-8}$
Taylor3	1.00502520538153300000	$1.670022100000000 \times 10^{-8}$
Taylor4	1.00502518883369400000	$1.523810000000000 \times 10^{-10}$

ตารางที่ 3.6 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
Euler	2.41263549212664900000	$1.578070245512000 \times 10^{-2}$
Taylor2	2.41433568183712800000	$1.221194649660000 \times 10^{-4}$
Taylor3	2.41433614037429100000	$1.225780021290000 \times 10^{-4}$
Taylor4	2.41495339520652100000	$7.398328343600000 \times 10^{-4}$

ปัญหาที่ 3.3 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 3.7 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
Euler	0.10010000000000000000	$1.502504380000000 \times 10^{-7}$
Taylor2	0.10010015000000000000	$2.504380000000000 \times 10^{-10}$
Taylor3	0.10010015025000000000	$4.380000000000000 \times 10^{-13}$
Taylor4	0.10010015025043800000	$1.000000000000000 \times 10^{-15}$

ตารางที่ 3.8 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	0.100100150099837000000	$1.506010000000000 \times 10^{-10}$
Taylor2	0.100100150250438000000	$5.043800000000000 \times 10^{-11}$
Taylor3	0.100100150250439000000	$5.043900000000000 \times 10^{-11}$
Taylor4	0.100100150250439000000	$5.043900000000000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 3.9 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ Euler และ Taylor ที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x=10.0, h=0.0001$ $y=0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	2.23087922976991800000	$5.188753688733000 \times 10^{-3}$
Taylor2	0.11180353862945800000	$2.80000000000000 \times 10^{-14}$
Taylor3	0.11180353862950100000	$1.50000000000000 \times 10^{-14}$
Taylor4	0.11180353862950100000	$1.50000000000000 \times 10^{-14}$

บทที่ 4
ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

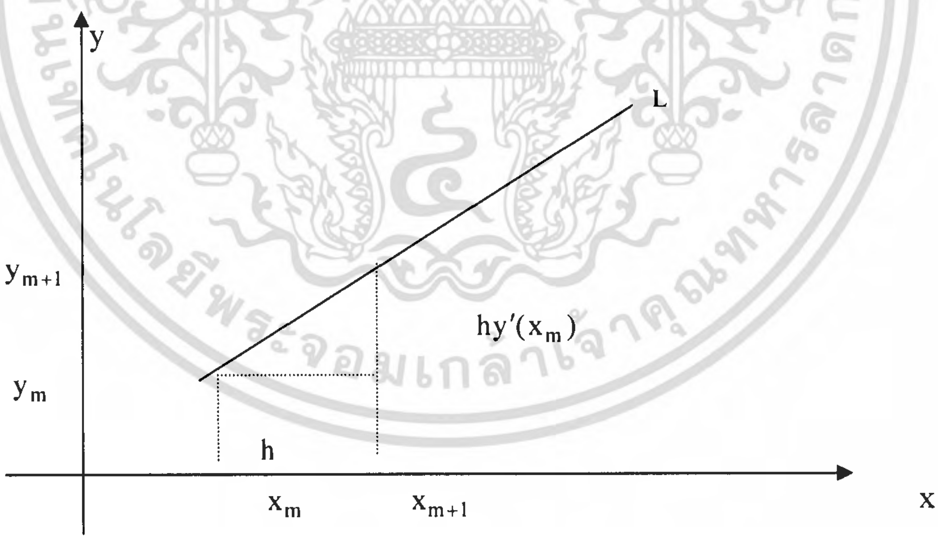
4.1 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเป็นระเบียบวิธีที่ใช้วิธีการทำซ้ำ เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอับดับ s จะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันปีนค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่จุดของรูปแบบ s จุด บนช่วง $[x_m, x_{m+1}]$ จากกระบวนการดังกล่าวทำให้ได้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s มีรูปแบบทั่วไปดังต่อไปนี้

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{4.1}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_{11}k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_{21}k_1 + h\beta_{22}k_2)$$
$$\vdots$$
$$k_s = f(x_m + h\alpha_{s-1}, y_m + h\beta_{s-1,1}k_1 + h\beta_{s-1,2}k_2 + \dots + h\beta_{s-1,s-1}k_{s-1})$$



รูปที่ 4.1 แสดงเส้นตรงที่มีความชันเป็น $y'(x_m)$ และผ่านจุด (x_m, y_m) (วิธีของออยเลอร์)

สำหรับระเบียบวิธีของรุงเง–คุตตา จะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่หลายจุด เช่นในกรณีใช้ความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่สองจุด จะได้รูปแบบ

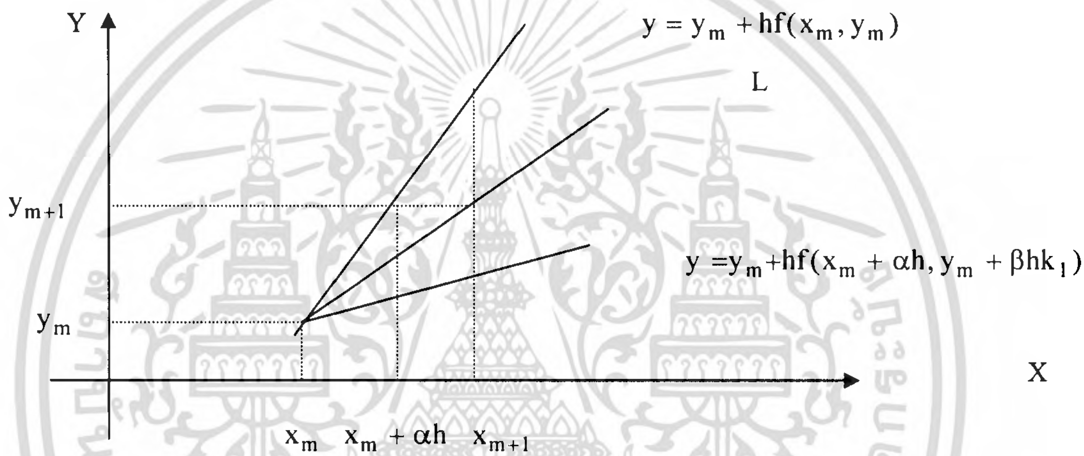
$$y_{m+1} = y_m + h(a_1 k_1 + a_2 k_2) \tag{4.2}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m) = y'(x_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$

กล่าวคือระเบียบวิธี (3.7) จะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีค่าความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของ $y'(x_m)$ และ $f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$ ดังในรูปที่ 4.2



รูปที่ 4.2 แสดงเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีค่าความชันเท่ากับค่าเฉลี่ยของ $y'(x_m)$ และ $f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$

จากรูปที่ 4.2 เส้นตรง L มีสมการเป็น

$$y = y_m + h(a_1 f(x_m, y_m) + a_2 f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h f(x_m, y_m)))$$

$$\therefore \quad y_{m+1} = y_m + h(a_1 f(x_m, y_m) + a_2 f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h f(x_m, y_m)))$$

เรียกว่าระเบียบวิธีรุงเง–คุตตาอันดับที่สอง ซึ่งจะต้องหาค่า a_1, a_2, α และ β วิธีการหาค่าเหล่านี้จะกระทำโดยใช้ความรู้ของการขยายของเทย์เลอร์ของฟังก์ชันสองตัวแปร ดังนี้

$$g(x+h,y+k) = g(x,y) + [h\frac{\partial g}{\partial x} + k\frac{\partial g}{\partial y}]_{(x,y)}$$
$$+\frac{1}{2}[h^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + k^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}]_{(x,y)} + \ldots \tag{4.3}$$

$$\therefore \quad k_2 = f(x_m + \alpha h, y_m + \beta h k_1)$$
$$= f(x_m, y_m) + \alpha h f_x(x_m, y_m) + \beta h k_1 f_y(x_m, y_m) + \ldots$$
$$\therefore \ y_{m+1} = y_m + h a_1 f(x_m, y_m) + h a_2 f(x_m, y_m) + h^2 \alpha a_2 f_x(x_m, y_m)$$
$$+ h^2 \beta a_2 k_1 f_y(x_m, y_m) + \ldots$$

แต่ $$y_{m+1} \cong y(x_{m+1}) = y(x_m + h) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2}y''(x_m) + \ldots$$
$$= y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}f_x(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}f(x_m, y_m)f_y(x_m, y_m) + \ldots$$

เทียบสัมประสิทธิ์ในเทอมของ h จากสมการข้างต้นสองสมการจะได้ว่า

$$a_1 + a_2 = 1, \alpha a_2 = \frac{1}{2} \text{ และ } \beta a_2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad a_1 + a_2 = 1, \alpha a_2 = \frac{1}{2} \text{ และ } \alpha = \beta$$

จะเห็นได้ว่า มีสมการ 3 สมการ แต่มีค่าที่จะต้องหา 4 ค่า ถ้าสมมติให้ $\alpha = \beta = 1$ จะได้

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น รูปแบบที่ (4.2) จะเป็น

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{4.4}$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + h, y_m + hk_1)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ จะได้ $a_2 = 1$ และ $a_1 = 0$

ดังนั้นรูปแบบที่ (4.2) จะเป็น

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1) \text{ โดย } k_1 = f(x_m, y_m) \tag{4.5}$$

ทั้งรูปแบบที่ (4.4) และ (4.5) เป็นวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง แต่รูปแบบที่นิยมใช้ คือ รูปแบบจากรูปแบบที่ (4.4)

ถ้าให้ $a_1 = 0$ และ $a_2 = 0$ จะได้เป็นรูปแบบของออยเลอร์ตามเดิม

ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาแบบสองขั้น ให้ค่าอนุพันธ์เฉลี่ยที่สองจุด เป็นความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) เพื่อหาค่าประมาณของ $y(x_{m+1})$ วิธีที่จะศึกษาต่อไปนี้เป็นระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สาม ซึ่งค่าอนุพันธ์เฉลี่ยที่สามจุดเป็นความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) เพื่อหาค่า y_{m+1} ดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3) \tag{4.6}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_1 hk_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2)$$

จากรูปแบบที่ (4.3) กระจาย k_2 และ k_3 ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
k_2 &= f + \alpha_1 hf_x + \beta_1 hk_1 f_y + \frac{\alpha_1^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha_1\beta_1 h^2 k_1 f_{xy} + \frac{\beta_1^2 h^2 k_1^2}{2} f_{yy} + \ldots \\
&= f + h(\alpha_1 f_x + \beta_1 ff_y) + h^2(\frac{1}{2}\alpha_1^2 f_{xx} + \alpha_1\beta_1 ff_{xy} + \frac{1}{2}\beta_1^2 f^2 f_{yy}) + \ldots \\
k_3 &= f + \alpha_2 hf_x + \beta_2 hk_1 f_y + \beta_3 hk_2 f_y + \frac{\alpha_1^2 h^2}{2} f_{xx} + \alpha_2\beta_2 h^2 k_1 f_{xy} \\
&\quad + \alpha_2\beta_3 h^2 k_2 f_{xy} + \frac{(\beta_2 hk_1 + \beta_3 hk_2)^2}{2} f_{yy} + \ldots \\
&= f + h(\alpha_2 f_x + \beta_2 ff_y + \beta_3 ff_y) + h^2(\alpha_1\beta_3 f_x f_y + \beta_1\beta_3 ff_y^2 + \frac{\alpha_2^2}{2} f_{xx}) \\
&\quad + \alpha_2\beta_2 ff_{xy} + \alpha_2\beta_3 ff_{xy} + \frac{1}{2}\beta_2^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2}\beta_3^2 f^2 f_{yy} + \beta_2\beta_3 f^2 f_{yy} + \ldots \\
&\qquad + \frac{h^3}{2} a_2\alpha_1^2 f_{xx} + h^3 a_2\alpha_1\beta_1 ff_{xy} + \frac{h^3}{2} a_2\beta_1^2 f^2 f_{yy} \\
&\quad + ha_3 f + h^2 a_3\alpha_2 f_x + h^2 a_3\beta_2 ff_y + h^2 a_3\beta_3 ff_y \\
&\quad + h^3 a_3\alpha_1\beta_3 f_x f_y + h^3 a_3\beta_1\beta_3 ff_y^2 + \frac{h^3}{2}\alpha_2^2 a_3 f_{xx} \\
&\quad + h^3 a_3\alpha_2\beta_2 ff_{xy} + h^3 a_3\alpha_2\beta_3 ff_{xy} + \frac{h^3}{2} a_3\beta_2 f^2 f_{yy} \\
&\quad + \frac{h^3}{2} a_3\beta_3 f^2 f_{yy} + h^3 a_3\beta_3 f^2 f_{yy} + \ldots \\
&= y_m + h(a_1 f + a_2 f + a_3 f) + h^2(a_2\alpha_1 f_x + a_3\alpha_2 f_x + a_2\beta_1 ff_y
\end{aligned}$$

$$+a_3\beta_2 ff_y + a_3\beta_3 ff_y) + h^3(\frac{1}{2}a_2\alpha_1^2 f_{xx} + a_2\alpha_1\beta_1 ff_{xy}$$
$$+\frac{1}{2}a_2\beta_1^2 f^2 f_{yy} + a_3\alpha_1\beta_3 f_x f_y + a_3\beta_1\beta_3 ff_y^2$$
$$+\frac{1}{2}a_3\beta_1^2 f^2 f_{yy} + a_3\alpha_2\beta_2 ff_{xy} + a_3\alpha_2\beta_3 ff_{xy}$$
$$+\frac{1}{2}a_3\beta_2^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2}a_3\beta_3^2 f^2 f_{yy} + a_3\beta_2\beta_3 f^2 f_{yy}) + \ldots$$

แต่ $y_{m+1} \cong y(x_{m+1}) = y(x_m + h)$

$$= y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2}y''(x_m) + \frac{h^3}{6}y'''(x_m) + \ldots$$
$$\cong y_m + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + ff_y] + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2f_{xy}f + f_x f_y + f_y^2 f + f^2 f_{yy}] + \ldots$$

โดยค่า $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$ แทนที่จุด (x_m, y_m) และสมมติว่า $f_{yx} = f_{xy}$

เทียบสัมประสิทธิ์ในเทอมของ h จากสมการข้างต้นสองสมการจะได้ว่า

$a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_2\alpha_1 + a_3\alpha_2 = \frac{1}{2}$

$a_2\beta_1 + a_3\beta_2 * a_3\beta_3 = \frac{1}{2}, a_2\alpha_1^2 + a_3\alpha_2^2 = \frac{1}{3}$

$a_3\beta_1\beta_3 = \frac{1}{6}$ และ $a_2\beta_1^2 + a_3\beta_2^2 + a_3\beta_3^2 + 2a_3\beta_2\beta_3 = \frac{1}{3}$

เมื่อลำดับสมการใหม่จะได้

$a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_2\alpha_1 + a_3\alpha_2 = \frac{1}{2}$

$a_2\alpha_1^2 + a_3\alpha_2^2 = \frac{1}{3}, \alpha_2 = \beta_2 + \beta_3$

$a_3\alpha_1\beta_3 = \frac{1}{6}$ และ $\alpha_1 = \beta_1$

ดังนั้นจะมี 6 สมการแต่มีค่าที่จะต้องหา 8 ค่า

$\therefore$ ถ้าให้ $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ และ $\alpha_2 = 1$

$$\therefore \beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = -1, \beta_3 = 2, a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{2}{3} \text{ และ } a_3 = \frac{1}{6}$$

$\therefore$ รูปแบบที่ (4.6) จะเป็น

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \tag{4.7}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h, y_m - hk_1 + 2hk_2)$$

หรือถ้าให้ $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$

$\therefore \alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, \beta_3 = 1, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}$ และ $a_3 = \frac{1}{6}$

$\therefore$ รูปแบบที่ (4.6) จะเป็น

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(3k_1 + 2k_2 + k_3) \tag{4.8}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + h, y_m + hk_2)$$

ทั้งรูปแบบที่ (4.7) และ (4.8) เป็นวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สามแต่วิธีที่นิยมที่สุดเป็นรูปแบบของรูปแบบที่ (4.7)

ในทำนองเดียวกันกับระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สองและอันดับที่สามอาจจะหาระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับสูงขึ้นเรื่อยๆ ได้แต่ทั้งในทางทฤษฎีและทางปฏิบัติระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันที่สูงเกินกว่าสี่จะไม่ทำให้การหาผลเฉลยได้ผลดีขึ้น ดังนั้นโดยทั่วไปจึงใช้ระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง อันดับที่สามและอันดับที่สี่และระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สี่ที่นิยมใช้จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{4.9}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2)$$

$k_4 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + hk_3)$ และ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{4.10}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \frac{h}{3}k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \frac{2h}{3}, y_m + \frac{2h}{3}k_2)$$
$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3)$$

โดยทั่วไปจะเขียน RK2, RK3 และ RK4 แทนระเบียบวิธีของรุงเง-คุตตาอันดับที่สอง อันดับที่สาม และอันดับที่สี่ตามลำดับ

ปัญหาที่ 4.1 $y' = \frac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RK2	5.07565062388591800000	$1.430713777730000 \times 10^{-4}$
RK3	5.07550761798868955000	$6.548054454214000 \times 10^{-8}$
RK4	5.07619676253339591000	$6.892100252509081 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RK2	5.07550752651501000000	$1.435200000000000 \times 10^{-10}$
RK3	5.07550755250815033000	$3.171418440000000 \times 10^{-13}$
RK4	5.07550827736833909000	$7.248603601794900 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 4.3 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RK2	6.29928540915291500000	$7.998950000000000 \times 10^{-10}$
RK3	6.29928298413277599000	$3.080202760000000 \times 10^{-12}$
RK4	6.29928944857987894000	$6.464450183152340 \times 10^{-6}$

ปัญหาที่ 4.2 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 4.4 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RK2	1.00497518595105000000	$5.000273026200000 \times 10^{-5}$
RK3	1.00503775749608848000	$1.256881477651461 \times 10^{-5}$
RK4	1.00418659383757025000	$8.385948437417134 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 4.5 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RK2	1.00501509268678900000	$1.279600000000000 \times 10^{-11}$
RK3	1.00502518868132396000	$1.176836000000000 \times 10^{-14}$
RK4	1.00502434692429476000	$8.417570174224000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 4.6 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RK2	2.41421341464646044000	$1.477257010051900\text{x}10^{-7}$
RK3	2.41421356236312956000	$9.031886350000000\text{x}10^{-12}$
RK4	2.41421356236957152000	$2.589928240000000\text{x}10^{-12}$

ปัญหาที่ 4.3 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 4.7 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RK2	0.10010015015005000000	$1.003880000000000\text{x}10^{-10}$
RK3	0.10010015025400768000	$3.752554000000000\text{x}10^{-14}$
RK4	0.10010015025043829400	0.000000000000000

ตารางที่ 4.8 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
RK2	0.10010049949838000000	$3.492983800000000\text{x}10^{-7}$
RK3	0.10010015025043861300	$3.191900000000000\text{x}10^{-16}$
RK4	0.10010015025043861300	$3.191900000000000\text{x}10^{-16}$

ตารางที่ 4.9 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RK ที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
RK2	0.11180339887497300000	$3.00000000000000\text{x}10^{-15}$
RK3	0.11180353862950073700	$1.45439200000000\text{x}10^{-14}$
RK4	0.11180353862950073700	$1.45439200000000\text{x}10^{-14}$

บทที่ 5
การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉาก

5.1 วิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ในหัวข้อนี้จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากที่เราได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 นั้น เราจะนำมาประยุกต์โดยการใช้จุดศูนย์ถ่วงที่แตกต่างกันและเราสามารถหาค่าของตัวแปร α และ β จากวิธีการที่นำมาใช้ได้ง่าย และทำให้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นไปได้ง่าย ทั้งยังพยายามที่จะทำให้เกิดค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

5.2 พหุนามต่างๆ

โดยในหัวข้อนี้จะมีวิธีการที่คณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษได้ศึกษาและนำมารวบรวมไว้ทั้งหมด 5 รูปแบบ โดยจะอธิบายรายละเอียดดังต่อไปนี้

5.2.1 รูปแบบที่ 1

วิธีนี้พัฒนามาจากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยการที่นำจุดของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้โดยจะใช้สัญลักษณ์ RKN แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาใหม่นี้

สำหรับรูปแบบที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชันให้อยู่ในรูปผลรวมของผลคูณระหว่างจุดศูนย์ถ่วง w_i กับค่าของฟังก์ชันที่จุดของรูปแบบ ξ_i ที่สอดคล้องกับ n จุดของเกาส์

รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์แสดงได้ดังสมการ (5.1)

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i) \tag{5.1}$$

เมื่อจุดของรูปแบบ $\xi_i; i = 1,2,...,n$ เป็นจุดใดๆ ในช่วงปิด $[-1,1]$ ซึ่งเป็นรากของพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ (Legendre orthogonal polynomials) $p_n(\xi)$ ซึ่ง

$$p_n(\xi) = \begin{cases} 1; n = 0 \\ x; n = 1 \\ \frac{1}{n}[(2n-1)\xi p_{n-1}(\xi) - (n-1)p_{n-2}(\xi)]; n > 1 \end{cases} \tag{5.2}$$

และ

$$A_i = \frac{1}{p_n'(\xi_i)} \int_{-1}^{1} \frac{p_n(\xi)}{(\xi - \xi_i)} d\xi \tag{5.3}$$

สำหรับค่าจุดของรูปแบบ ξ_i และค่าจุดถ่วง A_i ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์สามารถแสดงได้ดังตารางที่ 5.1

ตารางที่ 5.1 แสดงค่าจุดของรูปแบบและจุดถ่วงสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์

$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi \cong \sum_{i=1}^{n} A_i f(\xi_i)$		
n	ξ_i	A_i
2	-0.577350269189626	1.0
	0.577350269189626	1.0
3	-0.774596669241483	0.555555555555556
	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556
4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454
5	-0.906179845938664	0.236926885056189
	-0.535469310105683	0.478628670499366
	0.0	0.568888888888889
	0.53849310105683	0.478628670499366
	0.90617845938664	0.236926885056189

สำหรับการนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาใช้ในการปรับปรุงรูปแบบของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา จะได้ระเบียบวิธี RKN อันดับที่ S ที่มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + h\phi(x_m, y_m; h), m = 1, 2, ...$$

โดยที่ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม $\phi(x_m, y_m; h)$ เป็นค่าความชันที่แต่ละจุดของรูปแบบที่นำมาจากรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้ โดยกำหนดให้มีรูปแบบทั่วไปดังสมการ (5.4)

$$\phi(x_m, y_m; h) = \sum_{i=1}^{s} a_i k_i \tag{5.4}$$

$$\text{โดย } k_i = \begin{cases} f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\beta_{11} f(x_m, y_m)); i = 1 \\ f\left(x_m + h\alpha_i, y_m + h\sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\right); i = 2,3,\ldots,s \end{cases}$$

เมื่อ β_{ij} เป็นสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่าของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา, h เป็นความกว้างของช่วงในแต่ละชั้น และค่า a_j, α_i จะถูกกำหนดโดยรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์ที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงจุดของรูปแบบ $\xi_i \in [-1,1]$ และจุดถ่วง $w_i; i = 1,2,\ldots,s$ ของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ S จุด เป็นจุดของรูปแบบ $\psi_i \in [x_m, x_{m+1}]$ และจุดถ่วง $a_i; i = 1,2,\ldots,s$ สำหรับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่ S ซึ่งมีความสัมพันธ์สำหรับการแปลงจุดของรูปแบบคือ

$$\psi_i = x_m + \frac{h}{2}(\xi_i + 1); i = 1,2,\ldots,s \tag{5.5}$$

เมื่อ $h = x_{m+1} - x_m$

จากรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธี RKN ดังกล่าว นำมาใช้สำหรับการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับต่างๆ โดยมีขั้นตอนการสร้าง ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 สร้างรูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ มาปรับปรุงใช้เป็นจุดของรูปแบบและจุดถ่วงในระเบียบวิธี RKN ซึ่งเป็นไปตามความสัมพันธ์ของสมการ (5.5)

ขั้นตอนที่ 3 สร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี เพื่อนำมาใช้ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าของระเบียบวิธี โดยการนำรูปแบบที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 มากระจายให้อยู่ในรูปของอนุกรม

เทย์เลอร์ และเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอม h กับอนุกรมกำลังเทย์เลอร์ของเทอม $y(x_{m+1})$ ซึ่งแสดงดังต่อไปนี้

ระเบียบวิธี RKN อันดับ 2

สำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 3 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีซึ่งมีรูปแบบทั่วไปตามสมการ RKN อันดับ 2 กรณีที่ S=2 และมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่ 5.2

ตารางที่ 5.2 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ2

	รูปแบบเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ2	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง W_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
i=1	-2131/3691	1	$X_m + \frac{780}{3691}h$	1/2
2	213/3691	1	$X_m + \frac{780}{989}h$	1/2

สำหรับการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงจากรูปแบบเกาส์-เลอจองด์มาปรับปรุงใช้คือ แทนค่า k_1 และ k_2 ที่ได้จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ว่า

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}[(\alpha_1 + \alpha_2)f_x + (\beta_{11} + \beta_{21})ff_y] \tag{5.6}$$

แต่เนื่องจาก

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) \tag{5.7}$$

ดังนั้นสมการ (5.6) และ (5.7) นำมาเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอม h จะได้เงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธีคือ

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$
$$\beta_{11} + \beta_{21} = 1$$

จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าว ทำให้สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ยังไม่ทราบค่าของระเบียบวิธีโดยกำหนดให้ $\beta_{11} = \alpha_1$ จะได้ว่า $\beta_{21} = \alpha_2$ เพราะฉะนั้น รูปแบบของระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{5.8}$$

โดยที่
$$k_1 = f(x_m + \frac{780}{3691}h, y_m + \frac{780}{3691}hf(x_m, y_m))$$
$$k_2 = f(x_m + \frac{780}{989}h, y_m + \frac{780}{989}hk_1)$$

จากกระบวนการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับ 2 ดังกล่าวจะเป็นพื้นฐานในการสร้างระเบียบวิธี RKN ในอันดับสูงขึ้น และต่อไปคณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษจะแสดงการสร้างระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 ซึ่งมีรูปแบบของกระบวนการสร้างเช่นเดียวกันนี้

ระเบียบวิธี RKNอันดับ 3

สำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 3 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีซึ่งมีรูปแบบทั่วไปตามสมการ RKN อันดับ 3 กรณีที่ S=3 และมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่ 5.3

ตารางที่ 5.3 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 3

	รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ 3	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง w_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
$i=1$	-3409/4401	5/9	$x_m + \frac{63}{559}h$	5/18
2	0	8/9	$x_m + \frac{1}{2}h$	5/18
3	3409/4401	5/9	$x_m + \frac{496}{559}h$	5/18

จะได้ว่าระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 มีรูปแบบทั่วไป คือ

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{18}(5k_1+8k_2+5k_3)$$
$$\text{โดยที่ } k_1=f(x_m+\alpha_1h, y_m+\beta_{11}hf(x_m,y_m)) \tag{5.9}$$
$$k_2=f(x_m+\alpha_2h, y_m+\beta_{21}hk_1)$$
$$k_3=f(x_m+\alpha_3h, y_m+\beta_{31}hk_1+\beta_{32}hk_2)$$

เมื่อ $\alpha_1=\frac{63}{559},\alpha_2=\frac{1}{2}$ และ $\alpha_3=\frac{496}{559}$

สร้างเงื่อนไขของระเบียบวิธี เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า โดยการกระจาย k_1,k_2 และ k_3 ให้อยู่ในรูปแบบอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งสามารถแสดงดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
k_1&=f(x_m+\alpha_1h, y_m+\beta_{11}hf)\\
&=f+h[\alpha_1f_x+\beta_{11}ff_y]+\frac{h^2}{2}[\alpha_1^2f_{xx}+2\alpha_1\beta_{11}ff_{xy}+f^2f_{yy}]+O(h^3)\\
k_2&=f(x_m+\alpha_2h, y_m+\beta_{21}hk_1)\\
&=f+h[\alpha_2f_x+\beta_{21}ff_y]+\frac{h^2}{2}[\alpha_2^2f_{xx}+2\alpha_2\beta_{21}ff_{xy}+2\alpha_1\beta_2f_xf_y+\beta_{21}^2f^2f_{yy}\\
&\quad+\beta_{11}\beta_{21}ff_y^2]+O(h^3)\\
k_3&=f(x_m+\alpha_3h, y_m+\beta_{31}hk_1+\beta_{32}hk_2)\\
&=f+h[\alpha_3f_x+(\beta_{31}+\beta_{32})ff_y]+\frac{h^2}{2}[\alpha_3^2f_{xx}+2\alpha_3(\beta_{31}+\beta_{32})ff_{xy}\\
&\quad+2(\alpha_1\beta_{31}+\alpha_2\beta_{32})f_xf_y+(\beta_{31}+\beta_{32})^2f^2f_{yy}+2(\beta_{11}\beta_{31}+\beta_{21}\beta_{32})ff_y^2]+O(h^3)
\end{aligned}$$

แทนค่า k_1,k_2 และ k_3 ที่ได้จากการกระจายอนุกรมเทย์เลอร์ในสมการ (5.9) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
y_{m+1}&=y_m+[\frac{5}{18}+\frac{8}{18}+\frac{5}{18}]hf+h^2[(\frac{5}{18}\alpha_1+\frac{8}{18}\alpha_2+\frac{5}{18}\alpha_3)f_x+(\frac{5}{18}\beta_{11}+\frac{8}{18}\beta_{21}\\
&\quad+\frac{5}{18}(\beta_{31}+\beta_{32}))ff_y]+h^3[(\frac{5}{36}\alpha_1^2+\frac{8}{36}\alpha_2^2+\frac{5}{36}\alpha_3^2)f_{xx}+(\frac{5}{18}\alpha_1\beta_{11}\\
&\quad+\frac{8}{18}\alpha_2\beta_{21}+\frac{5}{18}\alpha_3(\beta_{31}+\beta_{32}))ff_{xy}+(\frac{5}{18}(\alpha_1\beta_{31}+\alpha_2\beta_{32})+\frac{8}{18}\alpha_1\beta_{21})f_xf_y+(\frac{5}{36}\beta_{11}^2\\
&\quad+\frac{8}{36}\beta_{21}^2+\frac{5}{36}(\beta_{31}+\beta_{32})^2f^2f_{yy}+(\frac{8}{18}\beta_{11}\beta_{21}+\frac{5}{18}(\beta_{11}\beta_{31}+\beta_{21}\beta_{32}))ff_y^2]+O(h^4)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

แต่เนื่องจาก

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + ff_y] + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2] + O(h^4) \tag{5.11}$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (5.10) และ (5.11) นำมาเทียบสัมประสิทธิ์ในเทอมของ h จะได้เงื่อนไขอันดับสำหรับระเบียบวิธี (5.9) คือ

$$\begin{aligned}
\frac{5}{18}\beta_{11} + \frac{8}{18}\beta_{21} + \frac{5}{18}(\beta_{31} + \beta_{32}) &= \frac{1}{2}\\
\frac{5}{18}\alpha_1\beta_{11} + \frac{8}{18}\alpha_2\beta_{21} + \frac{5}{18}\alpha_3(\beta_{31} + \beta_{32}) &= \frac{1}{3}\\
\frac{5}{18}(\alpha_1\beta_{31} + \alpha_2\beta_{32}) + \frac{8}{18}\alpha_1\beta_{21} &= \frac{1}{6}\\
\frac{5}{36}\beta_{11}^2 + \frac{8}{36}\beta_{21}^2 + \frac{5}{36}(\beta_{31} + \beta_{32})^2 &= \frac{1}{6}\\
\frac{8}{18}\beta_{11}\beta_{21} + \frac{5}{18}(\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{21}\beta_{32}) &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

คำนวณหาค่าของ $\beta_{11}, \beta_{21}, \beta_{31}$ และ β_{32} จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าวจะได้ว่า

$$\beta_{11} = \frac{63}{559}, \beta_{21} = \frac{1}{2}, \beta_{31} = -\frac{174}{433} \text{ และ } \beta_{32} = \frac{2491}{2354}$$

เพราะฉะนั้นระเบียบวิธี RKN อันดับ 3 มีรูปแบบคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_m + \frac{63}{559}h, y_m + \frac{63}{559}hf(x_m, y_m))\\
k_2 &= f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1)\\
k_3 &= f(x_m + \frac{496}{559}h, y_m - \frac{174}{433}hk_1 + \frac{2491}{2354}hk_2)
\end{aligned} \tag{5.12}$$

ระเบียบวิธี RKN อันดับ 4

สำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 ซึ่งได้จากการนำจุดของรูปแบบและจุดถ่วงของรูปแบบเกาส์-เลอจองด์แบบ 4 จุด มาปรับปรุงใช้ในระเบียบวิธีซึ่งมีรูปแบบทั่วไปตามสมการ RKN กรณีที่

$s = 4$ จะมีจุดของรูปแบบและจุดถ่วงแสดงดังตารางที่ 5.4 เมื่อ $h = x_{m+1} - x_m$ จะได้ว่าระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 มีรูปแบบทั่วไปคือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_4)$$

$$\text{โดยที่} \quad k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_{11} hf(x_m, y_m)) \tag{5.13}$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_{21} hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_{31} hk_1 + \beta_{32} hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_{41} hk_1 + \beta_{42} hk_2 + \beta_{43} hk_3)$$

เมื่อ $\alpha_1 = \dfrac{77}{1109}, \alpha_2 = \dfrac{364}{1103}, \alpha_3 = \dfrac{739}{1103}$ และ $\alpha_4 = \dfrac{1032}{1109}$

ตารางที่ 5.4 แสดงค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ กับค่าจุดถ่วงและจุดของรูปแบบสำหรับระเบียบวิธี RKN อันดับ 4

	รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์		ระเบียบวิธี RKN อันดับ 3	
	จุดของรูปแบบ ξ_i	จุดถ่วง w_i	จุดของรูปแบบ ψ_i	จุดถ่วง a_i
$i = 1$	-955/1109	527/1515	$x_m + \frac{77}{1109}h$	527/3030
2	-375/1103	988/1515	$x_m + \frac{364}{1103}h$	988/3030
3	375/1103	988/1515	$x_m + \frac{739}{1103}h$	988/3030
4	955/1109	527/1515	$x_m + \frac{1032}{1109}h$	527/3030

จากระเบียบวิธี (5.13) ขั้นตอนต่อไปคือทำการสร้างเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี ซึ่งขั้นตอนนี้คณะผู้จัดทำได้แสดงรายละเอียดต่างๆ ไว้ เพราะฉะนั้นในส่วนนี้จึงจะแสดงเฉพาะเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธีที่ได้จากขั้นตอนการสร้างเท่านั้น โดยเงื่อนไขอันดับของระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 แสดงดังต่อไปนี้

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3(\beta_3 + \beta_4) + a_4(\beta_5 + \beta_6 + \beta_7) = \frac{1}{2}$$

$$a_1\alpha_1\beta_1 + a_2\alpha_2\beta_2 + a_3\alpha_3(\beta_3+\beta_4) + a_4\alpha_4(\beta_5+\beta_6+\beta_7) = \frac{1}{3}$$

$$a_2\alpha_1\beta_2 + a_3(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4) + a_4(\alpha_1\beta_5+\alpha_2\beta_6+\alpha_3\beta_7) = \frac{1}{6}$$

$$a_1\beta_1^2 + a_2\beta_2^2 + a_3(\beta_3+\beta_4)^2 + a_4(\beta_5+\beta_6+\beta_7)^2 = \frac{1}{6}$$

$$a_1\alpha_1^2\beta_1 + a_2\alpha_2^2\beta_2 + a_3\alpha_3^2(\beta_3+\beta_4) + a_4\alpha_4^2(\beta_5+\beta_6+\beta_7) = \frac{1}{4}$$

$$a_2\alpha_1\alpha_2\beta_1 + a_3\alpha_3(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_4) + a_4\alpha_4(\alpha_1\beta_5+\alpha_2\beta_6+\alpha_3\beta_7) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2}(a_1\alpha_1\beta_1^2 + a_2\alpha_2\beta_2^2 + a_3\alpha_3(\beta_3+\beta_4)^2 + a_4\alpha_4(\beta_5+\beta_6+\beta_7)^2 = \frac{1}{8}$$

$$a_2\alpha_1^2\beta_2 + a_3(\alpha_2^2\beta_4+\alpha_1^2\beta_3) + a_4(\alpha_1^2\beta_5+\alpha_2^2\beta_6+\alpha_3^2\beta_7) = \frac{1}{24}$$

$$a_1\beta_1^3 + a_2\beta_2^3 + a_3(\beta_3+\beta_4)^3 + a_4(\beta_5+\beta_6+\beta_7)^3 = \frac{1}{4}$$

จากเงื่อนไขอันดับดังกล่าวคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ไม่ทราบค่า ได้ดังต่อไปนี้

$$\beta_{11} = \frac{77}{1109}, \beta_{21} = \frac{364}{1103}, \beta_{31} = -\frac{362}{1175}, \beta_{32} = \frac{803}{821},$$
$$\beta_{41} = \frac{1379}{1602}, \beta_{42} = -\frac{1249}{1742} \text{ และ } \beta_{43} = \frac{1664}{2115}$$

เพราะฉะนั้นระเบียบวิธี RKN อันดับ 4 จะมีรูปแบบ คือ

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3030}(527k_1 + 988k_2 + 988k_3 + 527k_4)$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m + \frac{77}{1109}h, y_m + \frac{77}{1109}hf(x_m, y_m))$ (5.14)

$$k_2 = f(x_m + \frac{364}{1103}h, y_m + \frac{364}{1103}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m - \frac{362}{1175}hk_1 + \frac{803}{821}hk_2)$$
$$k_4 = f(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m + \frac{1379}{1602}hk_1 - \frac{1249}{1742}hk_2 + \frac{1664}{2115}hk_3)$$

โดยในหัวข้อนี้เราจะใช้สัญลักษณ์ RKN2, RKN3 และ RKN4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 1 (ค่าจุดถ่วงใช้รูปแบบของเกาส์-เลอจองด์) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 ตามลำดับ

ปัญหาที่ 5.1 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 5.5 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	5.07550750776488879000	$4.474325621118000\text{x}10^{-8}$
RKN 3	5.07550755263528419000	$1.271391880700000\text{x}10^{-10}$
RKN 4	5.07550755255869834000	$5.055333929000000\text{x}10^{-11}$

ตารางที่ 5.6 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	5.07550755250696461000	$1.014299760000000\text{x}10^{-12}$
RKN 3	5.07550755250815211000	$1.731947900000000\text{x}10^{-13}$
RKN 4	5.07550755250815211000	$1.731947900000000\text{x}10^{-13}$

ตารางที่ 5.7 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	6.29861228865987304000	$7.459810550000000\text{x}10^{-12}$
RKN 3	6.29861228866733285000	$2.543742990000000\text{x}10^{-12}$
RKN 4	6.29861228866987659000	$2.543742990000000\text{x}10^{-12}$

ปัญหาที่ 5.2 $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0)=1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 5.8 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	1.00500724258395691000	$1.794609735505936 \times 10^{-5}$
RKN 3	1.00502907598948821000	$3.887308176242500 \times 10^{-6}$
RKN 4	1.00502523956748679000	$5.088174829400000 \times 10^{-8}$

ตารางที่ 5.9 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	1.00502518865249879000	$2.881339611000000 \times 10^{-11}$
RKN 3	1.00502518868129820000	$1.398881000000000 \times 10^{-14}$
RKN 4	1.00502118868129798000	$1.421085000000000 \times 10^{-14}$

ตารางที่ 5.10 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x = 1.0, h = 0.0001$ $y = 2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	2.41421307009709540000	$4.922750660441000 \times 10^{-7}$
RKN 3	2.41421356197544901000	$3.967124406800000 \times 10^{-10}$
RKN 4	2.41421356236957152000	$2.934616993900000 \times 10^{-10}$

ปัญหาที่ 5.3 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 5.11 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RKN 2	0.10010015012361170300	$1.268265909000000 \times 10^{-10}$
RKN 3	0.10010015025033453000	$1.037642200000000 \times 10^{-13}$
RKN 4	0.10010015025040773500	$3.055889000000000 \times 10^{-14}$

ตารางที่ 5.12 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.100100150200000000000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	0.100100150250386682000	$5.161149000000000 \times 10^{-14}$
RKN 3	0.100100150250438572000	$2.775600000000000 \times 10^{-16}$
RKN 4	0.100100150250438585000	$2.914300000000000 \times 10^{-16}$

ตารางที่ 5.13 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKN ที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	0.11180339886696243100	$1.31179500000000 \times 10^{-12}$
RKN 3	0.11180339887498208500	$6.53644000000000 \times 10^{-15}$
RKN 4	0.11180339887498382000	$8.271160000000000 \times 10^{-15}$

5.2.2 รูปแบบที่ 2

ในหัวข้อนี้เราจะใช้จุดถ่วง 2 จุด จากสมการพหุนามตั้งฉากบนช่วงปิด [a, b] โดยเราจะทำการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยใช้รูปแบบปริพันธ์ ค่าที่เราได้คือค่าของ α และ β

จุดถ่วงที่ 1 ให้ $w(x)=\sqrt{1+x^2}$, $a=0$ และ $b=1$ จะใช้ผลที่ได้จากรูปแบบปริพันธ์เพื่อนำมาหาทั้งหมดของสมการพหุนามตั้งฉากจะได้รูปแบบของสมการพหุนามตั้งฉากเป็นดังนี้

$$p_0(x)=1$$
$$p_1(x)=x-0.53099766515942$$
$$p_2(x)=x^2-1.02345230937945x+0.17739333799485$$
$$=(x-0.22108837437432287)(x-0.80236393495658)$$
$$p_3(x)=x^3-1.52300038892484x^2+0.622206970635352x-0.05333170485791$$
$$=(x-0.11628582909632)(x-0.51339554307087)(x-0.89331901675765)$$
$$p_4(x)=x^4-2.02276378124753x^3+1.31911343804688x^2-0.29854817682249x$$
$$+0.01525866120828$$
$$=(x-0.07109146809905)(x-0.33811204704820)(x-0.67992525677681)$$
$$(x-0.93363500932346)$$

จุดถ่วงที่ 2 ให้ $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $a=0$ และ $b=1$ จะใช้ผลที่ได้จากรูปแบบปริพันธ์เพื่อนำมาหาทั้งหมดของสมการพหุนามตั้งฉากจะได้รูปแบบของสมการพหุนามตั้งฉากเป็นดังนี้

$$q_0(x)=1$$
$$q_1(x)=x-0.46996366634245$$
$$q_2(x)=x^2-0.97630493269873x+0.15654968391483$$
$$=(x-0.20224488252526)(x-0.77406005017347)$$
$$q_3(x)=x^3-1.47697181467672x^2+0.57830576216521x-0.04686936811613$$
$$=(x-0.06783459130126)(x-0.32217747708542)(x-0.65990819565213)$$
$$(x-0.92730487502012)$$
$$q_4(x)=x^4-1.97722513905893x^3+1.25282311704177x^2-0.27335064745009x$$
$$+0.01337372701384$$
$$=(x-0.06783459130126)(x-0.32217747708542)(x-0.6599081565213)$$
$$(x-0.92730487502012)$$

จากสมการเกาส์-เลอจองด์ จะใช้สมการพหุนามตั้งฉากของจุดถ่วงทั้ง 2 ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นในการหาสมการเกาส์-เลอจองด์ ในการหาค่า A_k เราจะใช้ระบบสมการเชิงเส้นมาช่วยในการหาค่า ที่จะได้ค่าแสดงดังตารางที่ 5.14 และตารางที่ 5.15 โดยการหาค่า A_k ด้วยรูปแบบปริพันธ์บนช่วงปิด [0,1]

ในการหา $\int_a^b f(z)dz$ จะใช้การเปลี่ยนค่าการแปรผันของ $z=(b-a)x+a$ และ $dz=(b-a)dx$ เมื่อเราใช้ $f(z)=f[(b-a)x+a]$ และ

$$\int_a^b f(z)dz = (b-a)\int_0^1 f[(b-a)x+a]dx$$

$$\cong (b-a)\sum_{k=1}^{n} A_k f[(b-a)x_k+a]\frac{1}{w(x_k)}$$

ตารางที่ 5.14 แสดงค่าของ A_k, $k=1,2,3$ และ 4 ซึ่ง $w(x)=\sqrt{1+x^2}$, $a=0$, $b=1$

k	A_k
1	1.14779357469632
2	0.53584305392055
	0.61195052077577
3	0.28910379084198
	0.50332999254073
	0.35535979131361
4	0.17876737584616
	0.35113093172485
	0.38959234931697
	0.22830291780834

ตารางที่ 5.15 แสดงค่าของ A_k, $k=1,2,3$ และ 4 ซึ่ง $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $a=0$, $b=1$

k	A_k
1	0.88137358701954
2	0.46872230010818
	0.41265128691136

ตารางที่ 5.15 (ต่อ) แสดงค่าของ A_k , $k=1,2,3$ และ 4 ซึ่ง $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $a=0$, $b=1$

k	A_k
1	0.88137358701954
2	0.46872230010818 0.41265128691136
3	0.26731012407016 0.39566415693511 0.21839930601427
4	0.16933041102463 0.30411492618527 0.27496875203054 0.13295949777910

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

เราใช้จุดถ่วงของสมการพหุนามตั้งฉากในจุด α_k ของระเบียบวิธีรุงเง–คุตตา และคำนวณหาค่าของ A_k โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ RU1, RU2, RU3 และ RU4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\sqrt{1+x^2}$) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ

จุดถ่วงที่ 1 ให้ $w(x)=\sqrt{1+x^2}$ (U สำหรับจุดถ่วง $w(x)=\sqrt{1+x^2}$, R สำหรับระเบียบวิธีรุงเง–คุตตา และจำนวนเต็มด้านหลังแสดงอันดับของสมการ) และใช้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$RU1$;

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m)) \tag{5.15}$$

โดยที่

$$\alpha_1 = 0.53099766515942$$

$RU2$;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2) \tag{5.16}$$

โดยที่

$$A_1 = 0.5201731438$$

$$A_2 = 0.47982685762$$
$$k_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 k_1)$$
$$\alpha_1 = 0.22108837432287$$
$$\alpha_2 = 0.80236393495658$$
$$\beta_1 = -0.76871602879$$
$$\beta_2 = 1.5710799638$$

$RU3$;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3) \tag{5.17}$$

โดยที่

$$A_1 = 0.2871400241$$
$$A_2 = 0.4479894246$$
$$A_3 = 0.2648705513$$
$$k_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\beta_3 f(x_m, y_m) + h\beta_4 k_1 + h\beta_5 k_2)$$
$$\alpha_1 = 0.11628582909632$$
$$\alpha_2 = 0.51339554307087$$
$$\alpha_3 = 0.89331901675765$$
$$\beta_1 = -1.7184168107$$
$$\beta_2 = 2.2318124112$$
$$\beta_3 = 2.9074229420$$
$$\beta_4 = -3.0830772279$$
$$\beta_5 = 1.069667951$$

$RU4$;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + A_4k_4) \tag{5.18}$$

โดยที่

$$A_1 = 0.1697117412$$
$$A_2 = 0.3195268068$$

$$A_3 = 0.3294291261$$
$$A_4 = 0.1813323259$$
$$k_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$k_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 k_2)$$
$$k_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 k_3)$$
$$\alpha_1 = 0.07109146809905$$
$$\alpha_2 = 0.33811204704720$$
$$\alpha_3 = 0.67992525677681$$
$$\alpha_4 = 0.93363500932346$$

ปัญหาที่ 5.4 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 5.16 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RU1	5.07516793195846900000	3.396205496760000x10^{-4}
RU2	5.07550820363754300000	6.511293980000000x10^{-7}
RU3	5.07550756161066700000	9.102522000000000x10^{-9}
RU4	5.07539210066426800000	1.154518438770000x10^{-4}

ตารางที่ 5.17 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=5.1 และ h=0.001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RU1	5.07550728279629500000	2.697116840000000x10^{-7}
RU2	5.07550755261622300000	1.082440000000000x10^{-10}
RU3	5.07550755250824700000	2.680000000000000x10^{-13}
RU4	5.07550743606483100000	1.164431480000000x10^{-7}

ตารางที่ 5.18 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=15 และ h=0.001

	$x = 15, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RU1	6.29928057907154900000	$2.405058146000000 \times 10^{-6}$
RU2	6.29928298598254600000	$1.852850000000000 \times 10^{-9}$
RU3	6.29928298413355800000	$3.862000000000000 \times 10^{-12}$
RU4	6.29928194568442400000	$1.038445272000000 \times 10^{-6}$

ปัญหาที่ 5.5 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 5.19 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RU1	1.00530250647917800000	$2.773177978660000 \times 10^{-4}$
RU2	1.00502750467804900000	$2.315996737000000 \times 10^{-6}$
RU3	1.00501925513817300000	$5.933543139000000 \times 10^{-6}$
RU4	1.00516943671439900000	$1.442480330870000 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 5.20 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RU1	1.00502550420312600000	$3.162218140000000 \times 10^{-6}$
RU2	1.00502518868857500000	$7.263000000000000 \times 10^{-12}$
RU3	1.00502518869989700000	$1.858500000000000 \times 10^{-11}$
RU4	1.00502532526014300000	$1.365788310000000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 5.21 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=1.0 และ h=0.001

	$x=1, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RU1	2.41431123299940400000	$9.767062724200000 \times 10^{-5}$
RU2	2.41421357116107460000	$8.788913152810000 \times 10^{-9}$
RU3	2.41421396098765317000	$3.986154917257100 \times 10^{-7}$
RU4	2.41425591135437001000	$4.234898220856209 \times 10^{-5}$

ปัญหาที่ 5.6 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 5.22 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RU1	0.10010015938390200000	$9.133464000000000 \times 10^{-9}$
RU2	0.10010015025074100000	$3.030000000000000 \times 10^{-13}$
RU3	0.10010015030586900000	$5.543100000000000 \times 10^{-11}$
RU4	0.10010015429941900000	$4.048981000000000 \times 10^{-9}$

ตารางที่ 5.23 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
RU1	0.10010015025977500000 0	$9.336000000000000 \times 10^{-12}$
RU2	0.100100150250581000000	$1.430000000000000 \times 10^{-13}$
RU3	0.100100150250494000000	$5.600000000000000 \times 10^{-14}$
RU4	0.100100150254470000000	$4.032000000000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 5.24 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RU ที่ x=10 และ h=0.001

	$x=10, h=0.0001$ $y=0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
RU1	0.11180354007949200000	$1.450005000000000\text{x}10^{-9}$
RU2	0.11180353864934500000	$1.985800000000000\text{x}10^{-11}$
RU3	0.11180353863810900000	$8.622000000000000\text{x}10^{-12}$
RU4	0.11180353925569800000	$6.262000000000000\text{x}10^{-10}$

เราจะใช้สัญลักษณ์ RL1, RL2, RL3 และ RL4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ

จุดถ่วงที่ 2 ให้ $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (L สำหรับจุดถ่วง $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, R สำหรับระเบียบวิธีรุงเง--คุตตา และจำนวนเต็มด้านหลังแสดงอันดับของสมการ) และใช้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$RL1$;

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m)) \tag{5.19}$$

โดยที่

$$\alpha_1 = 0.46996366634245$$

$RL2$;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2) \tag{5.20}$$

โดยที่

$$A_1 = 0.4792808335$$
$$A_2 = 0.5207191665$$
$$k_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$k_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 k_1)$$
$$\alpha_1 = 0.20224488252526$$
$$\alpha_2 = 0.77406005017347$$
$$\beta_1 = -0.8085271359$$
$$\beta_2 = 1.5825871861$$

*RL*3;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3) \tag{5.21}$$

โดยที่

$$A_1 = 0.2688725123$$
$$A_2 = 0.4400775329$$
$$A_3 = 0.2910499548$$
$$k_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$k_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\beta_1 f(x_m, y_m) + h\beta_2 k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\beta_3 f(x_m, y_m) + h\beta_4 k_1 + h\beta_5 k_2)$$
$$\alpha_1 = 0.10929802929025$$
$$\alpha_2 = 0.48683135191378$$
$$\alpha_3 = 0.88084243347269$$
$$\beta_1 = -0.9679799779$$
$$\beta_2 = 1.4548117856$$
$$\beta_3 = -0.5684975641$$
$$\beta_4 = 0.3521413092$$
$$\beta_5 = 1.0971984638$$

*RL*4;

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + A_4k_4) \tag{5.22}$$

โดยที่

$$A_1 = 0.1783462971$$
$$A_2 = 0.3325714020$$
$$A_3 = 0.3222172415$$
$$A_4 = 0.1668650594$$
$$k_1 = f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1 f(x_m, y_m))$$
$$k_2 = f(x_m + h\alpha_2, y_m + h\alpha_2 k_1)$$
$$k_3 = f(x_m + h\alpha_3, y_m + h\alpha_3 k_2)$$
$$k_4 = f(x_m + h\alpha_4, y_m + h\alpha_4 k_3)$$
$$\alpha_1 = 0.06783459130126$$
$$\alpha_2 = 0.32217747708542$$

$$\alpha_3 = 0.65990819565213$$
$$\alpha_4 = 0.92730487502012$$

ปัญหาที่ 5.7 $y' = \frac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 5.25 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	5.07569755020548700000	$1.899976973422000\text{x}10^{-4}$
RL2	5.07550618453746000000	$1.767970680000000\text{x}10^{-6}$
RL3	5.07550754901386000000	$3.494285000000000\text{x}10^{-9}$
RL4	5.07562319333131200000	$1.156408231670000\text{x}10^{-4}$

ตารางที่ 5.26 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=5.1 และ h=0.001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	5.07550781371588800000	$2.612079090000000\text{x}10^{-7}$
RL2	5.07550755250667200000	$1.307000000000000\text{x}10^{-12}$
RL3	5.07550755250879600000	$8.170000000000000\text{x}10^{-13}$
RL4	5.07550766895204600000	$1.164440670000000\text{x}10^{-7}$

ตารางที่ 5.27 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=15.0 และ h=0.001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RL1	6.29928531382996100000	$2.329700266000000\text{x}10^{-6}$
RL2	6.29928298412457100000	$5.125000000000000\text{x}10^{-12}$
RL3	6.29928298413858300000	$8.888888880000000\text{x}10^{-12}$
RL4	6.29984022585524000000	$1.038455828000000\text{x}10^{-6}$

ปัญหาที่ 5.8 $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0)=1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 5.28 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=1.005025188700000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	1.00469445529856800000	$3.307338274400000 \times 10^{-4}$
RL2	1.00502648379740500000	$1.295116093000000 \times 10^{-6}$
RL3	1.00504205504215900000	$1.686636084700000 \times 10^{-5}$
RL4	1.00489719771565600000	$1.279909656560000 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 5.29 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=1.005025188700000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	1.00502488220380100000	$3.064775112000000 \times 10^{-7}$
RL2	1.00502518868118200000	$1.300000000000000 \times 10^{-13}$
RL3	1.00502518869134000000	$1.002800000000000 \times 10^{-11}$
RL4	1.00502505210873200000	$1.365725800000000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 5.30 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=1.0 และ h=0.001

	$x=1, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RL1	2.41811836608313468000	$9.519628902676658 \times 10^{-5}$
RL2	2.41421356132896747000	$1.043193975650000 \times 10^{-9}$
RL3	2.41421366425507378000	$1.018829123289300 \times 10^{-7}$
RL4	2.41417127904808204000	$4.228332407940627 \times 10^{-5}$

ปัญหาที่ 5.9 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 5.31 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RL1	0.10010014105537000000	$9.195068000000000 \times 10^{-9}$
RL2	0.10010015024976800000	$6.700000000000000 \times 10^{-13}$
RL3	0.10010015031356200000	$6.312300000000000 \times 10^{-11}$
RL4	0.10010014624039700000	$4.010042000000000 \times 10^{-9}$

ตารางที่ 5.32 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	0.10010015024139100000	$9.047000000000000 \times 10^{-12}$
RL2	0.10010015025043900000	$5.043900000000000 \times 10^{-11}$
RL3	0.10010015025043900000	$5.043900000000000 \times 10^{-11}$
RL4	0.10010015024640600000	$4.032000000000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 5.33 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RL ที่ x=10.0 และ h=0.001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	0.11180353722441500000	$1.405071000000000 \times 10^{-9}$
RL2	0.11180353862950100000	$1.500000000000000 \times 10^{-14}$
RL3	0.11180353862951500000	$2.900000000000000 \times 10^{-14}$
RL4	0.11180353800330500000	$6.261770000000000 \times 10^{-10}$

5.2.3 รูปแบบที่ 3

ในหัวข้อนี้เราสามารถใช้ค่า α , β และ A_k ได้จากรูปแบบของสมการพหุนามตั้งฉากเลอจองด์มาพัฒนาในระเบียบวิธีรุงเง–คุตตา รูปแบบของสมการพหุนามตั้งฉากเลอจองด์บนช่วงปิด [-1, 1] ซึ่งมีค่าจุดถ่วง $w(x) = 1$ นั่นคือ

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0, n \neq m \tag{5.23}$$

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_n(x)\right]^2 dx = c(n) \neq 0 \tag{5.24}$$

ค่าเริ่มต้นที่ได้จากรูปแบบของสมการพหุนามตั้งฉากเลอจองด์เป็นดังนี้

$$P_0 = 1$$
$$P_1 = x$$
$$P_2 = x^2 - \frac{1}{3}$$
$$P_3 = x^3 - \frac{3x}{5}$$
$$P_4 = x^4 - \frac{6x^2}{7} + \frac{3}{35}$$

ดังนั้นรูปแบบทั่วไปของความสัมพันธ์จะเป็นดังนี้

$$P_n(x) = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(x)$$

ตารางที่ 5.34 แสดงรากของรูปแบบสมการพหุนามตั้งฉากเลอจองด์และค่าจุดถ่วงของรูปแบบปริพันธ์

n	x_k	A_k
2	-0.577350269189626	1.0
	0.577350269189626	1.0
3	-0.774596669241483	0.555555555555556
	0.0	0.888888888888889
	0.774596669241483	0.555555555555556

ตารางที่ 5.34 (ต่อ) แสดงรากของรูปแบบสมการพหุนามตั้งฉากเลอจองด์และค่าจุดถ่วงของรูปแบบปริพันธ์

n	x_k	A_k
4	-0.861136311594053	0.347854845137454
	-0.339981043584856	0.652145154862546
	0.339981043584856	0.652145154862546
	0.861136311594053	0.347854845137454

เราใช้ α_k ได้จากรากของรูปแบบสมการพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ โดยที่ $\alpha_k = \dfrac{1+x_k}{2}$ และ $a_k = \dfrac{A_k}{2}$ เราจะใช้ค่า α_k และ a_k ดังแสดงดังตารางที่ 5.35

ตารางที่ 5.35 ค่าของ α_k และ a_k

n	α_k	a_k
2	0.21132486540519	0.5
	0.78867513459481	0.5
3	0.11270165871393	0.277777777777778
	0.5	0.444444444444444
	0.88729874776386	0.277777777777778
4	0.06943184629339	0.17392739273927
	0.33000949667616	0.32607260726073
	0.66999093381686	0.32607260726073
	0.93056807935077	0.17392739273927

ดังนั้นเราจะได้ค่าของระเบียบวิธีรุงเง–คุตตากับจุดถ่วงที่ได้จากสมการพหุนามตั้งฉากเลอจองด์ซึ่งสามารถแสดงได้ดังด้านล่างนี้ได้ดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2) \tag{5.25}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_1 hf)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 hk_1)$$

เมื่อเรากระจายในเทอมของเทย์เลอร์ของ k_1, k_2 ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_1 hf) \\ &= f + h[\alpha_1 f_x + \beta_1 ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_1^2 f_{xx} + 2\alpha_1\beta_1 ff_{xy} + \beta_1^2 f^2 f_{yy}] + O(h^3) \\ k_2 &= f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 hk_1) \\ &= f + h[\alpha_2 f_x + \beta_2 ff_y] + \frac{h^2}{2}[\alpha_2^2 f_{xx} + 2\alpha_2\beta_2 ff_{xy} + \beta_2^2 f^2 f_{yy}] + O(h^3) \end{aligned}$$

แทนค่า k_1, k_2 ลงในสมการ (5.25) เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m + hf(a_1 + a_2) + \frac{h^2}{2}[(2a_1\alpha_1 + 2a_2\alpha_2)f_x + (2a_1\beta_1 + 2a_2\beta_2)ff_y] \\ &\quad + \frac{h^3}{6}[(3a_1\alpha_1^2 + 3a_2\alpha_2^2)f_{xx} + (6a_1\alpha_1\beta_1 + 6a_2\alpha_2\beta_2)ff_{xy} \\ &\quad + (3a_1\beta_1^2 + 3a_2\beta_2^2)f^2 f_{yy}] + O(h^4) \end{aligned} \tag{5.26}$$

เมื่อ

$$y_{m+1} = y_m + hy'_m + \frac{h^2}{2}y''_m + \frac{h^3}{3!}y'''_m + \ldots \tag{5.27}$$

$$= y_m + hf + \frac{h^2}{2}[f_x + ff_y] + \frac{h^3}{6}[f_{xx} + 2ff_{xy} + f_x f_y + f^2 f_{yy} + ff_y^2] + O(h^4) \tag{5.28}$$

จากสมการ (5.27) และ (5.28) เราสามารถเปรียบเทียบค่าในเทอมของ h เมื่อเรามี

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= 1 \\ 2a_1\alpha_1 + 2a_2\alpha_2 &= 1 \\ 2a_1\beta_1 + 2a_2\beta_2 &= 1 \\ 3a_1\alpha_1^2 + 3a_2\alpha_2^2 &= 1 \\ 6a_1\alpha_1\beta_1 + 6a_2\alpha_2\beta_2 &= 2 \\ 3a_1\beta_1^2 + 3a_2\beta_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

และเราทราบว่า $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2$ เมื่อเราแก้สมการผลของสมการคือ

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}, \alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{2}$$

แล้วเราจะได้ระเบียบวิธีรุงเง–คุตตาอันดับ 2 โดยเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \tag{5.29}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hf)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1)$$

สมการรูปแบบใหม่ของระเบียบวิธีรุงเง–คุตตาอันดับ 3 สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3) \tag{5.30}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \beta_1 hf)$$

$$I_1 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \beta_2 hf + \beta_3 hk_1)$$

$$k_2 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \beta_4 hf + \beta_5 hk_1 + \beta_6 hI_1)$$

$$I_2 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \beta_7 hk_1 + \beta_8 hI_1 + \beta_9 hk_2)$$

$$k_3 = f(x_m + \alpha_5 h, y_m + \beta_{10} hI_1 + \beta_{11} hk_2 + \beta_{12} hI_2)$$

เราจะได้ค่า $\alpha_1 = \frac{496}{4401}, \alpha_2 = \frac{4400}{14457}, \alpha_3 = \frac{1}{2}, \alpha_4 = \frac{557}{803}, \alpha_5 = \frac{496}{559}$
และ $a_1 = \frac{5}{18}, a_2 = \frac{8}{18}, a_3 = \frac{5}{18}$

ทำคล้ายกับระเบียบวิธีรุงเง–คุตตาอันดับ 2 โดยการกระจายในเทอมของอนุกรมเทย์เลอร์จาก k_1, k_2, k_3 เมื่อเราเปรียบเทียบในเทอมของ h จะได้ว่า

$$\frac{5}{18}\alpha_1 + \frac{8}{18}\alpha_3 + \frac{5}{18}\alpha_5 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{18}\beta_1 + \frac{8}{18}(\beta_4 + \beta_5 + \beta_6) + \frac{5}{18}(\beta_{10} + \beta_{11} + \beta_{12}) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{36}\alpha_1^2 + \frac{8}{36}\alpha_3^2 + \frac{5}{36}\alpha_5^2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{18}\alpha_1\beta_1 + \frac{8}{18}\alpha_3(\beta_4 + \beta_5 + \beta_6) + \frac{5}{18}\alpha_5(\beta_{10} + \beta_{11} + \beta_{12}) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{5}{18}\alpha_1\beta_3 + \frac{8}{18}(\alpha_1\beta_5 + \alpha_2\beta_6) + \frac{5}{18}(\alpha_2\beta_{10} + \alpha_3\beta_{11} + \alpha_4\beta_{12}) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{36}\left(\beta_1^2\right) + \frac{8}{36}\left(\beta_4 + \beta_5 + \beta_6\right)^2 + \frac{5}{36}\left(\beta_{10} + \beta_{11} + \beta_{12}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{18}\beta_6\left(\beta_2+\beta_3\right)+\frac{5}{18}\left(\beta_{10}\left(\beta_2+\beta_3\right)\right)+\beta_{11}\left(\beta_4+\beta_5+\beta_6\right)$$
$$+\beta_{12}\left(\beta_7+\beta_8+\beta_9\right) = \frac{1}{6}$$

และเราทราบว่า

$$\alpha_1 = \beta_1$$
$$\alpha_2 = \beta_2+\beta_3$$
$$\alpha_3 = \beta_4+\beta_5+\beta_6$$
$$\alpha_4 = \beta_7+\beta_8+\beta_9$$
$$\alpha_5 = \beta_{10}+\beta_{11}+\beta_{12}$$

จากสมการเราสามารถหาค่า $\beta_1-\beta_{12}$ ได้ดังนี้

$$\beta_1 = \frac{496}{4401}$$
$$\beta_2 = -\frac{563}{803}$$
$$\beta_3 = \frac{538}{915}$$
$$\beta_4 = \frac{265}{367}$$
$$\beta_5 = -\frac{2657}{2534}$$
$$\beta_6 = \frac{281}{340}$$
$$\beta_7 = \frac{557}{803}$$
$$\beta_8 = 0$$
$$\beta_9 = 0$$
$$\beta_{10} = \frac{1193}{2032}$$
$$\beta_{11} = 0$$
$$\beta_{12} = \frac{782}{2605}$$

ดังนั้นเราจะได้สมการใหม่ของระเบียบวิธีรุงเง–คุตตาอันดับ 3 ดังรูปแบบต่อไปนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{18}(5k_1 + 8k_2 + 5k_3) \tag{5.31}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{496}{4401}h, y_m + \frac{496}{4401}hf)$$

$$I_1 = f(x_m + \frac{4400}{14457}h, y_m - \frac{563}{1985}hf + \frac{538}{915}hk_1)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{265}{367}hf - \frac{2657}{2534}hk_1 + \frac{281}{340}hI_1)$$

$$I_2 = f(x_m + \frac{557}{803}h, y_m + \frac{557}{803}hk_1 + 0hI_1 + 0hk_2)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{496}{559}h, y_m + \frac{1193}{2032}hI_1 + 0hk_2 + \frac{782}{2605}hI_2)$$

และเมื่อทำคล้ายกับระเบียบวิธีรุงเง–คุตตาอันดับ 3 จะได้ระเบียบวิธีรุงเง–คุตตาอันดับ 4 ใหม่ดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h\left(\frac{527}{3030}k_1 + \frac{988}{3030}k_2 + \frac{988}{3030}k_3 + \frac{527}{3030}k_4\right) \tag{5.32}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m + \frac{842}{12127}h, y_m + \frac{842}{12127}hf)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{695}{2106}h, y_m + \frac{1108}{847}hf - \frac{1029}{1052}hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{739}{1103}h, y_m + \frac{3874}{119}hf - \frac{21851}{962}hk_1 - \frac{3604}{393}hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{1032}{1109}h, y_m - \frac{9226}{101}hf + \frac{93381}{1115}hk_1 + \frac{5366}{635}hk_2 + \frac{772}{10035}hk_3)$$

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ RKG2, RKG3 และ RKG4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 3 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1$) ในอันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ

ปัญหาที่ 5.10 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5)=5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 5.36 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKG2	5.07543611504007500000	$7.143746807000000\text{x}10^{-5}$
RKG3	5.07550755157616695000	$9.131978050290000\text{x}10^{-10}$
RKG4	5.07550755142103771000	$1.087107293070000\text{x}10^{-9}$

ตารางที่ 5.37 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=5.1 และ h=0.001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKG2	5.07550755243647300000	$7.150600000000000\text{x}10^{-11}$
RKG3	5.07550755250716890000	$8.100187200000000\text{x}10^{-13}$
RKG4	5.07550755250703833000	$9.405809500000000\text{x}10^{-13}$

ตารางที่ 5.38 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=15.0 และ h=0.001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RKG2	6.29928298373417700000	$3.955190000000000\text{x}10^{-10}$
RKG3	6.29928298412402565000	$5.167013103000000\text{x}10^{-12}$
RKG4	6.29928298412291188000	$6.783906770000000\text{x}10^{-12}$

ปัญหาที่ 5.11 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 5.39 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKG2	1.00501251167491900000	$1.267706393000000 \times 10^{-5}$
RKG3	1.00502512940145650000	$5.927985546883000 \times 10^{-8}$
RKG4	1.00515335023352992000	$1.281615522179535 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 5.40 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKG2	1.00501506740329900000	$2.529628600000000 \times 10^{-8}$
RKG3	1.00502518868261249000	$1.300293210000000 \times 10^{-12}$
RKG4	1.00502518865464130000	$2.667088772000000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 5.41 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=1.0 และ h=0.001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RKG2	2.41367233240587264000	$2.614749350371400 \times 10^{-4}$
RKG3	2.41421360727975598000	$4.490759453191000 \times 10^{-8}$
RKG4	2.41421330089722641000	$4.228332407940627 \times 10^{-5}$

ปัญหาที่ 5.12 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 5.42 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RKG2	0.10010007503750600000	$7.521293200000000 \times 10^{-8}$
RKG3	0.10010015028167672200	$3.123842851000000 \times 10^{-11}$
RKG4	0.10010015008564220100	$1.647960934400000 \times 10^{-10}$

ตารางที่ 5.43 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
RKG2	0.10010015017513800000	$7.530100000000000 \times 10^{-11}$
RKG3	0.10010015025043879400	$4.996000000000000 \times 10^{-16}$
RKG4	0.10010015025043926500	$9.714500000000000 \times 10^{-16}$

ตารางที่ 5.44 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKG ที่ x=10.0 และ h=0.001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
RKG2	0.11180352693486900000	$1.169461700000000 \times 10^{-8}$
RKG3	0.11180353862953740200	$5.122291000000000 \times 10^{-14}$
RKG4	0.11180339887510443200	$1.288830200000000 \times 10^{-13}$

5.2.4 รูปแบบที่ 4

จากสมการพหุนามตั้งฉากอันดับที่ n บนช่วงปิด [a, b] เราจะได้ค่าจุดถ่วงในจากรูปแบบของ

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (5.33)$$

ที่มีคุณสมบัติ

$$\int_a^b w(x)q_m(x)p_n(x)dx = 0 \quad ; m \le n-1 \tag{5.34}$$

และถ้า $p_0(x), p_1(x), p_2(x),..., p_n(x)$ เป็นสมการพหุนามตั้งฉากบนช่วงปิด [a, b] กับจุดถ่วง $w(x)$ เมื่อ $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของสมการพหุนามตั้งฉากบนช่วงปิด [a, b] กับค่าจุดถ่วง $w(x)$

ในที่นี้เราจะใช้ค่าจุดถ่วง 2 ค่า คือ $w(x) = 1 + x^2$ และ $w(x) = \frac{1}{1+x^2}$ และเราจะใช้สมการ

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^{n-k}$$

และ

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} D_k x^{n-k}$$

ที่ P_n และ Q_n เราสามารถหามาได้จากจุดถ่วง $w_1(x)$ และจุดถ่วง $w_2(x)$ ดังนั้นจากค่าการแปรผัน $(x_u)_k^n$ และ $(x_d)_k^n$ และรากของสมการพหุนาม $P_n(x) = 0$ และ $Q_n(x) = 0$ ดังค่าที่แสดงดังตารางที่ 5.45

ตารางที่ 5.45 แสดงค่า n และ x_u และ x_d

n	x_u	x_d
1	0.562500000	0.441271200
2	0.231602017	0.193785467
	0.815126955	0.758539074
3	0.120065066	0.106061793
	0.526975829	0.473926138
	0.89832662	0.873923099
4	0.072817105	0.066296331
	0.346490283	0.314609924
	0.689691855	0.649700478
	0.936518836	0.92380906

การประยุกต์ใช้กับสมการเกาส์ ที่จุด n ของสมการเกาส์-เลอจองด์สำหรับการหาค่าในรูปแบบปริพันธ์บนช่วงปิด [a, b] จากสมการ

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k^n f(x_k^n)$$

ที่ค่าของ A_k^n สามารถได้จากสมการเชิงเส้น และ $f(x)$ ของสมการพหุนามที่มีดีกรีซึ่งน้อยกว่า $n-1$ ผลที่ได้แสดงดังตารางที่ 5.46

ตารางที่ 5.46 แสดงค่า n และ A_u และ A_d

n	A_u	A_d
1	1.333333333	0.785398163
2	0.577243436	0.441221804
	0.756089898	0.344176359
3	0.301401349	0.257604280
	0.574865467	0.355001816
	0.475066517	0.172792067
4	0.183871036	0.164957760
	0.379864871	0.284785615
	0.468955741	0.233637618
	0.300641686	0.102017202

การประยุกต์ใช้กับรูปแบบปริพันธ์ รูปแบบปริพันธ์เป็นการหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$y' = f(x,y)\ ;\ x \in [a,b] \tag{5.37}$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นเป็น

$$y(a) = c$$

ในการใช้รูปแบบปริพันธ์จะได้ว่า

$$y(x) = c + \int_a^x f(x,y)dx \tag{5.38}$$

ดังนั้นค่าของ y_{m+1} ที่คำนวณได้จาก

$$y_{m+1} = y_m + h\int_0^1 f(hx + x_m, y(hx + x_m))dx \tag{5.39}$$

ในกรณีนี้เราใช้ค่าจุดถ่วง 2 ค่าดังนั้น y_{m+1} จะหาได้จาก

กรณีที่ 1 ให้จุดถ่วง $w_1(x) = 1 + x^2$ จะได้สมการ

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k f(hx_k + x_m, y(hx_k + x_m))}{1 + (x_k)^2} \tag{5.40}$$

กรณีที่ 2 ให้จุดถ่วง $w_2(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ จะได้สมการ

$$y_{m+1} = y_m + h\sum_{k=1}^{n} A_k \left(1 + (x_k)^2\right) f(hx_k + x_m, y(hx_k + x_m)) \tag{5.41}$$

เมื่อ $y(hx + x_m) = y_m + hx_k f(x_m, y_m)$ เป็นสมการเทย์เลอร์อันดับ 1

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ RKYA1, RKYA2, RKYA3 และ RKYA4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x) = 1 + x^2$) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ และเราจะใช้สัญลักษณ์ RKYB1, RKYB2, RKYB3 และ RKYB4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ

ปัญหาที่ 5.13 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 5.47 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=5.1 และ h=0.001

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	5.07586012104703900000	$3.525685388940000 \times 10^{-4}$
RKYA2	5.07570196595446700000	$1.944134463220000 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 5.47 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=5.1 และ h=0.001

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKYA3	5.07549400799423000000	$1.354450872200000 \times 10^{-4}$
RKYA4	5.07550795704505900000	$4.045369140000000 \times 10^{-7}$
RKYB1	5.07126506837524400000	$4.242484132901000 \times 10^{-3}$
RKYB2	5.07550424985589600000	$3.302652249\ 00000 \times 10^{-6}$
RKYB3	5.07550755051373200000	$1.994413000000000 \times 10^{-9}$
RKYB4	5.07550755506886800000	$2.560723000000000 \times 10^{-9}$

ตารางที่ 5.48 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=5.1 และ h=0.001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	5.07647791984069800000	$9.703667332719000 \times 10^{-4}$
RKYA2	5.07566764035624800000	$1.600878482690000 \times 10^{-4}$
RKYA3	5.07549472790450600000	$1.282460347300000 \times 10^{-4}$
RKYA4	5.07550799069393400000	$4.381859550000000 \times 10^{-7}$
RKYB1	5.07085156462156300000	$4.655987886416000 \times 10^{-3}$
RKYB2	5.07550755244958900000	$5.839000000000000 \times 10^{-6}$
RKYB3	5.07550755246267800000	$4.530100000000000 \times 10^{-9}$
RKYB4	5.07550755493775800000	$2.429779000000000 \times 10^{-9}$

ตารางที่ 5.49 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	6.31598497545203300000	$1.670199132233700 \times 10^{-2}$

ตารางที่ 5.49 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RKYA2	6.30203738700942700000	$2.754402879731000 \times 10^{-3}$
RKYA3	6.29906231407899200000	$2.206700507030000 \times 10^{-4}$
RKYA4	6.29929052433888800000	$7.540209192000000 \times 10^{-6}$
RKYB1	6.21916191527546700000	$8.012106885422900 \times 10^{-2}$
RKYB2	6.29928298316662900000	$9.630670000000000 \times 10^{-10}$
RKYB3	6.29928298335053800000	$7.791580000000000 \times 10^{-10}$
RKYB4	6.29928302593873900000	$4.180904300000000 \times 10^{-8}$

ปัญหาที่ 5.14 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 5.50 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	1.00568833735518500000	$6.631486738730000 \times 10^{-4}$
RKYA2	1.00495908694440900000	$6.610173690300000 \times 10^{-5}$
RKYA3	1.00498769389566400000	$3.749478664800000 \times 10^{-5}$
RKYA4	1.00498761928247100000	$3.756939884100000 \times 10^{-5}$
RKYB1	1.00413655953396600000	$8.886291473460000 \times 10^{-4}$
RKYB2	1.00498805194569900000	$3.713673561300000 \times 10^{-4}$
RKYB3	1.00498756177808000000	$3.762690323200000 \times 10^{-5}$
RKYB4	1.00498756212552200000	$3.762655579000000 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 5.51 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	1.00509094484723900000	$6.575616592700000 \times 10^{-5}$
RKYA2	1.00503588135948700000	$1.069267817500000 \times 10^{-5}$
RKYA3	1.00502432977367800000	$8.589076340000000 \times 10^{-7}$
RKYA4	1.00502521806781400000	$2.938650100000000 \times 10^{-8}$
RKYB1	1.00471253763379600000	$3.126510475160000 \times 10^{-4}$
RKYB2	1.00502518865165700000	$2.965500000000000 \times 10^{-11}$
RKYB3	1.00502518865261600000	$2.869600000000000 \times 10^{-11}$
RKYB4	1.00502518881842200000	$1.368330000000000 \times 10^{-10}$

ตารางที่ 5.52 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x = 1.0, h = 0.0001$ $y = 2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	2.49304745393684701000	$7.883389156468556 \times 10^{-2}$
RKYA2	2.42664865439486910000	$1.243509202270765 \times 10^{-2}$
RKYA3	2.41322455654703338000	$9.903984373424989 \times 10^{-4}$
RKYA4	2.41424714844485067000	$3.358607268921787 \times 10^{-5}$
RKYB1	2.11915734019101443000	$0.295056222181147 \times 10^{-7}$
RKYB2	2.41421331319571975000	$2.491764417023000 \times 10^{-7}$
RKYB3	2.41421331630194524000	$2.460702162032600 \times 10^{-7}$
RKYB4	2.41421350726066652000	$5.511149492321000 \times 10^{-8}$

ปัญหาที่ 5.15 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 5.53 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=0.1 และ h=0.01

	$x=0.1, h=0.1$ $y=0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RKYA1	0.10010145687160500000	$1.306621167000000\text{x}10^{-8}$
RKYA2	0.10010036122024000000	$2.109698010000000\text{x}10^{-11}$
RKYA3	0.10010013312060800000	$1.712983000000000\text{x}10^{-10}$
RKYA4	0.10010015068208200000	$4.316440000000000\text{x}10^{-6}$
RKYB1	0.10009395738305900000	$6.192867380000000\text{x}10^{-7}$
RKYB2	0.10010015009870200000	$1.517370000000000\text{x}10^{-8}$
RKYB3	0.10010015009996500000	$1.504740000000000\text{x}10^{-10}$
RKYB4	0.10010015010324300000	$1.471950000000000\text{x}10^{-6}$

ตารางที่ 5.54 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	0.10010144001526800000	$1.289764829000000\text{x}10^{-6}$
RKYA2	0.10010036285795400000	$2.126075160000000\text{x}10^{-7}$
RKYA3	0.10010013321601800000	$1.703442000000000\text{x}10^{-8}$
RKYA4	0.10010015083253600000	$5.820980000000000\text{x}10^{-10}$
RKYB1	0.10093965379479000000	$6.184870960000000\text{x}10^{-6}$
RKYB2	0.10010015025036500000	$7.300000000000000\text{x}10^{-14}$
RKYB3	0.10010015025037700000	$6.100000000000000\text{x}10^{-14}$
RKYB4	0.10010015025366500000	$3.227000000000000\text{x}10^{-12}$

ตารางที่ 5.55 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKYA และ RKYB ที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x=10.0, h=0.0001$ $y=0.1118033980000000000$	
	Calculated y	Error
RKYA1	0.1119836819894810000 0	$1.801408776010000\text{x}10^{-4}$
RKYA2	0.11183317440750200000	$2.963577801600000\text{x}10^{-5}$
RKYA3	0.11180102545654200000	$2.373418434000000\text{x}10^{-6}$
RKYA4	0.11180347998178700000	$8.110681100000000\text{x}10^{-8}$
RKYB1	0.11095138786404000000	$8.520110109360000\text{x}10^{-4}$
RKYB2	0.11180353861929500000	$1.019100000000000\text{x}10^{-11}$
RKYB3	0.11180339886654900000	$8.427000000000000\text{x}10^{-12}$
RKYB4	0.11180339932462600000	$4.496500000000000\text{x}10^{-10}$

5.2.5 รูปแบบที่ 5

ในหัวข้อนี้จะเป็นการใช้สมการพหุนามตั้งฉากในการแก้ปัญหาในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา จากสมการพหุนามตั้งฉากอันดับที่ n โดยค่าจุดถ่วง $w(x)$ ในรูปแบบจากสมการ

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \tag{5.42}$$

ที่มีคุณสมบัติ

$$\int_a^b w(x)q_m(x)p_n(x)dx = 0$$

สำหรับทั้งหมดของสมการพหุนามตั้งฉาก $q_m(x)$ ของดีกรี $m \le n-1$ เราจะใช้ค่าจุดถ่วง 2 ค่าและจากลำดับที่ได้จากสมการพหุนามตั้งฉาก

จุดถ่วงที่ 1 ให้จุดถ่วง $w(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a=0$ และ $b=1$ สามารถหาค่าสมการพหุนามตั้งฉากได้ดังนี้

$p_1(x) = x - 0.4426950409$

$p_2(x) = x^2 - 0.9542080584x + 0.1437706959$

$\quad = (x - 0.1875223329)(x - 0.7666857255)$

$p_3(x) = x^3 - 1.45586023x^2 + 0.55586023x - 0.0426433717$

$$= (x-0.1201075693)(x-0.47555636)(x-0.8781963001)$$

$$p_4(x) = x^4 - 1.9564125459x^3 + 1.220333104x^2 - 0.259561813x + 0.0121063415$$

$$= (x-0.0639745619)(x-0.3125345809)(x-0.6538160142)$$

$$(x-0.9260873889)$$

จุดถ่วงที่ 2 ให้จุดถ่วง $w(x)=1+x$, $a=0$ และ $b=1$ สามารถหาค่าสมการพหุนามตั้งฉากได้ดังนี้

$$q_1(x) = x - 5/9$$

$$q_2(x) = x^2 - 1.0461538462x + 0.1923076923$$

$$= (x-0.2379422616)(x-0.8082115846)$$

$$q_3(x) = x^3 - 1.5442176871x^2 + 0.6462585034x - 0.0585034014$$

$$= (x-0.1246629457)(x-0.5240590673)(x-0.8954956741)$$

$$q_4(x) = x^4 - 2.0436137058x^3 + 1.353063341x^2 - 0.31390001394x + 0.0168372644$$

$$= (x-0.0755251964)(x-0.349782555)(x-0.6854382012)$$

$$(x-0.9346720527)$$

การประยุกต์ใช้กับสมการเกาส์ ที่จุด n ของสมการเกาส์-เลอจองด์สำหรับการหาค่าในรูปแบบปริพันธ์บนช่วงปิด [a, b] จากสมการ

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \cong \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{5.43}$$

ที่จุด x_k ที่ได้จากรากของสมการพหุนามตั้งฉาก $p_n(x)$ ที่ได้จากจุดถ่วง $w(x)$ และสามารถหาค่า A_k ได้จาก

$$A_k = \frac{1}{p_n'(x_k)}\int_a^b \frac{w(x)p_n(x)}{x-x_k}dx \tag{5.44}$$

จากสมการพหุนามตั้งฉากที่ค่าจุดถ่วงทั้งสองค่าสามารถหาค่าจากสมการเกาส์ได้จาก ที่จุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $a=0$ และ $b=1$ จะได้

ตารางที่ 5.56 แสดงค่า n และ A_k

n	A_k
1	0.693147806
2	0.3877545308 0.3053926497
3	0.2319457241 0.3026426227 0.1585588337
4	0.1518192973 0.2428050790 0.2027497073 0.0957730970

และ ที่จุดถ่วง $w(x)=1+x$ $,a=0$ และ $b=1$ จะได้

ตารางที่ 5.57 แสดงค่า n และ A_k

n	A_k
1	1.5
2	0.6645702798 0.8354297202
3	0.3388144440 0.6696725928 0.4915129632
4	0.2015128287 0.4476973456 0.5331714606 0.3176183650

จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเราจะใช้ค่าจุดถ่วงที่สูงกว่าสมการพหุนามตั้งฉากที่จุด α_k ของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญจะได้สมการดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hA_1 f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1) \quad (5.45)$$

ที่จุดถ่วง $w(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 0$ และ $b = 1$ จะได้ โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ RKDF1, RKDF2, RKDF3 และ RKDF4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x) = \dfrac{1}{1+x}$) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ

RKDF1

$$y_{m+1} = y_m + hA_1 f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1) \quad (5.46)$$

$$A_1 = 1.0$$

α_1 เป็นรากของ $p_1(x)$

RKDF2

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2) \quad (5.47)$$

$$A_1 = 0.4604671700 \ , \ A_2 = 0.5395328300$$

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$

α_k เป็นรากของ $p_2(x)$

RKDF3

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3) \quad (5.48)$$

$$A_1 = 0.2556291382 \ , \ A_2 = 0.4465662470$$

$$A_3 = 0.2978046148$$

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$$

α_k เป็นรากของ $p_3(x)$

RKDF4

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4) \quad (5.49)$$

$$A_1 = 0.1615318704 \ , \ A_2 = 0.3186900624$$

$$A_3 = 0.3353107130 \ , \ A_4 = 0.1844673542$$

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$
$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$$
$$K_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \alpha_4 hK_3)$$

α_k เป็นรากของ $p_4(x)$

และที่จุดถ่วง $w(x) = 1 + x$, $a = 0$ และ $b = 1$ จะได้ โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ RKDS1, RKDS2, RKDS3 และ RKDS4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x) = 1 + x$) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ

RKDS1

$$y_{m+1} = y_m + hA_1 f(x_m + h\alpha_1, y_m + h\alpha_1) \tag{5.50}$$
$$A_1 = 1.0$$

α_1 เป็นรากของ $q_1(x)$

RKDS2

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1 K_1 + A_2 K_2) \tag{5.51}$$
$$A_1 = 0.5404667096 \text{ , } A_2 = 0.4595332904$$
$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$

α_k เป็นรากของ $q_2(x)$

RKDS3

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1 K_1 + A_2 K_2 + A_3 K_3) \tag{5.52}$$
$$A_1 = 0.3015861030 \text{ , } A_2 = 0.4388992159$$
$$A_3 = 0.2595146811$$
$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$$
$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$
$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$$

α_k เป็นรากของ $q_3(x)$

RKDS4

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1K_1 + A_2K_2 + A_3K_3 + A_4K_4) \quad (5.53)$$

$$A_1 = 0.1873944613 \ , \ A_2 = 0.3320570442$$

$$A_3 = 0.3169371576 \ , \ A_4 = 0.1641513368$$

$$K_1 = f(x_m + \alpha_1 h, y_m + \alpha_1 hf(x_m, y_m))$$

$$K_2 = f(x_m + \alpha_2 h, y_m + \alpha_2 hK_1)$$

$$K_3 = f(x_m + \alpha_3 h, y_m + \alpha_3 hK_2)$$

$$K_4 = f(x_m + \alpha_4 h, y_m + \alpha_4 hK_3)$$

α_k เป็นรากของ $q_4(x)$

ปัญหาที่ 5.16 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 5.58 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	5.07593624434149800000	$4.286918333530000 \times 10^{-4}$
RKDF2	5.07550782411119880000	$2.716038430000000 \times 10^{-7}$
RKDF3	5.07546437745793900000	$4.317505020600000 \times 10^{-5}$
RKDF4	5.07550755250813200000	$1.300000000000000 \times 10^{-14}$
RKDS1	5.07495662232504300000	$5.509301831020000 \times 10^{-4}$
RKDS2	5.07550500530010900000	$2.547208036000000 \times 10^{-6}$
RKDS3	5.07550754167900100000	$1.082914400000000 \times 10^{-8}$
RKDS4	5.07550755245549600000	$5.264900000000000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 5.59 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	5.07550805092095600000	$4.984125770000000 \times 10^{-7}$
RKDF2	5.07550755250818400000	$2.050000000000000 \times 10^{-13}$
RKDF3	5.07550751247929500000	$4.002868300000000 \times 10^{-8}$
RKDF4	5.07550755250815000000	$1.710000000000000 \times 10^{-13}$
RKDS1	5.07550706917513000000	$4.833328490000000 \times 10^{-7}$
RKDS2	5.07550755250594100000	$2.038000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS3	5.07550755250815000000	$1.710000000000000 \times 10^{-13}$
RKDS4	5.07550755250059600000	$7.383000000000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 5.60 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	6.29928742922557900000	$4.445095883000000 \times 10^{-6}$
RKDF2	6.29928298413300200000	$3.307000000000000 \times 10^{-12}$
RKDF3	6.29928262716451400000	$3.569651820000000 \times 10^{-7}$
RKDF4	6.29928298413277400000	$3.078000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS1	6.29927873984810000000	$4.310144885000000 \times 10^{-6}$
RKDS2	6.29928298412060100000	$9.095000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS3	6.29928298413277600000	$3.080000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS4	6.29928298400276700000	$1.269290000000000 \times 10^{-10}$

ปัญหาที่ 5.17 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0, 1.1]$ โดยที่ $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 5.61 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	1.00503636615814300000	$1.117747683100000 \times 10^{-5}$
RKDF2	1.00500555570813800000	$1.963297317400000 \times 10^{-5}$
RKDF3	1.00507000061615500000	$4.481193484400000 \times 10^{-5}$
RKDF4	1.00503281066185800000	$7.621980546000000 \times 10^{-6}$
RKDS1	1.00652381455059800000	$1.498625869286000 \times 10^{-3}$
RKDS2	1.00500895749771700000	$1.623118359500000 \times 10^{-6}$
RKDS3	1.00502482129634800000	$3.673849640000000 \times 10^{-7}$
RKDS4	1.00503368677027400000	$8.498088962000000 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 5.62 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	1.00502522978154200000	$4.110023000000000 \times 10^{-8}$
RKDF2	1.00502518866757900000	$1.373300000000000 \times 10^{-11}$
RKDF3	1.00502523562346500000	$4.694215200000000 \times 10^{-8}$
RKDF4	1.00502518868438100000	$3.068000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS1	1.00502654096997600000	$1.352288664000000 \times 10^{-6}$
RKDS2	1.00502518866906800000	$1.224420000000000 \times 10^{-11}$
RKDS3	1.00502518867882200000	$2.490000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS4	1.00502518868430000000	$2.987000000000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 5.63 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	2.41365264198853513000	$5.609203836263176 \times 10^{-4}$
RKDF2	2.41421343266487520000	$1.297072862449500 \times 10^{-7}$
RKDF3	2.41422807617378776000	$1.451380162631466 \times 10^{-5}$
RKDF4	2.41421359135932612000	$2.898716466859000 \times 10^{-8}$
RKDS1	2.41391216181717638000	$3.010100549850651 \times 10^{-4}$
RKDS2	2.41421344693808804000	$1.1154340734110800 \times 10^{-7}$
RKDS3	2.41421353877160039000	$2.360050106099000 \times 10^{-8}$
RKDS4	2.41421359482019016000	$3.244802870839000 \times 10^{-8}$

ปัญหาที่ 5.18 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 5.64 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RKDF1	0.10030027807072300000	$2.001278202840000 \times 10^{-4}$
RKDF2	0.10010015016995600000	$8.048200000000000 \times 10^{-11}$
RKDF3	0.10010015161593600000	$1.365498000000000 \times 10^{-9}$
RKDF4	0.10010015026841200000	$1.797400000000000 \times 10^{-11}$
RKDS1	0.10037640603566500000	$2.762557852270000 \times 10^{-4}$
RKDS2	0.10010015017893800000	$7.15000000000000 \times 10^{-11}$
RKDS3	0.10010015023576600000	$1.467200000000000 \times 10^{-11}$
RKDS4	0.10010015027091700000	$2.047900000000000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 5.65 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	0.10010028329991000000	$1.33049472000000\text{x}10^{-7}$
RKDF2	0.10010015025043900000	0.000000000000000
RKDF3	0.10010015025182400000	$1.386000000000000\text{x}10^{-12}$
RKDF4	0.10010015025043900000	0.0000000000000000
RKDS1	0.10010031727680000000	$1.670263610000000\text{x}10^{-7}$
RKDS2	0.10010015025043900000	0.000000000000000
RKDS3	0.10010015025043900000	0.000000000000000
RKDS4	0.10010015025042800000	$1.000000000000000\text{x}10^{-14}$

ตารางที่ 5.66 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ RKDF และ RKDS ที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
RKDF1	0.11182098470696300000	$1.758583198700000\text{x}10^{-5}$
RKDF2	0.11180339887497600000	0.000000000000000
RKDF3	0.11180339909022900000	$2.152530000000000\text{x}10^{-10}$
RKDF4	0.11180353862950400000	$1.800000000000000\text{x}10^{-14}$
RKDS1	0.11182547728382400000	$2.207840884900000\text{x}10^{-5}$
RKDS2	0.11180339887497700000	$2.000000000000000\text{x}10^{-15}$
RKDS3	0.11180353862949800000	$1.200000000000000\text{x}10^{-14}$
RKDS4	0.11180353862810600000	$1.381000000000000\text{x}10^{-12}$

บทที่ 6
การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยใช้รูปแบบนิวตัน-โค้ต

6.1 วิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ในหัวข้อนี้จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากที่เราได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 นั้น เราจะนำมาประยุกต์โดยการใช้จุดศูนย์ถ่วงที่แตกต่างกันและเราสามารถหาค่าของตัวแปร α และ β จากวิธีการในรูปแบบนิวตัน-โค้ตที่นำมาใช้ได้ง่าย และทำให้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นไปได้ง่าย ทั้งยังพยายามที่จะทำให้เกิดค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

6.2 รูปแบบนิวตัน-โค้ต

โดยในหัวข้อนี้จะมีวิธีการที่คณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษได้ศึกษาและนำมารวบรวมไว้ทั้งหมด 2 รูปแบบ โดยจะอธิบายรายละเอียดดังด้านล่างต่อไปนี้

6.2.1 รูปแบบที่ 1

ในหัวข้อนี้จะแสดงการหาค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตที่จะนำมาปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสอง

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสองชนิดปิด สามารถหาได้โดยให้ x_1, x_2 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด $[0,1]$ จะได้ว่า $x_1 = 0, x_2 = 1$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 dx = 1 \tag{6.1}$$

$$A_2 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2} \tag{6.2}$$

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสองชนิดเปิด สามารถหาได้แต่ว่าจุด x_1, x_2 เป็นจุดที่กำหนดขึ้นมาเองเช่น

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{4}$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 dx = 1 \tag{6.3}$$

$$\frac{3}{4}A_2 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

ทำการแก้ระบบสมการได้

$$A_1 = \frac{1}{3}, A_2 = \frac{2}{3} \tag{6.4}$$

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 = \int_0^1 dx = 1 \tag{6.5}$$

$$\frac{1}{2}A_2 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

ทำการแก้ระบบสมการได้

$$A_1 = 0, A_2 = 1 \tag{6.6}$$

ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสาม

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสามชนิดปิด สามารถหาได้โดยให้ x_1, x_2, x_3 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด [0,1] จะได้ว่า

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{1}{2}A_2 + A_3 &= \int_0^1 xdx = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4}A_2 + A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{6.7}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้

$$A_1 = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{4}{6}, A_3 = \frac{1}{6} \tag{6.8}$$

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสามชนิดเปิด สามารถหาได้แต่ว่าจุด x_1, x_2, x_3 เป็นจุดที่กำหนดขึ้นมาเองเช่น

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{2}}{3}, x_3 = \frac{2}{3}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} A_2 + \frac{2}{3} A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{9} A_2 + \frac{4}{9} A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{6.9}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้ว่า

$$A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = 0, A_3 = \frac{3}{4} \tag{6.10}$$

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{1}{4} A_2 + \frac{1}{2} A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{16} A_2 + \frac{1}{4} A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{6.11}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้ว่า

$$A_1 = \frac{2}{3}, A_2 = -\frac{4}{3}, A_3 = \frac{5}{3} \tag{6.12}$$

ถ้า $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{1}{3}A_1 + \frac{2}{3}A_2 + A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9}A_1 + \frac{4}{9}A_2 + A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{6.13}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้ว่า

$$A_1 = \frac{3}{4}, A_2 = 0, A_3 = \frac{1}{4} \tag{6.14}$$

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{10}, x_3 = \frac{3}{5}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + A_3 &= \int_0^1 dx = 1 \\ \frac{3}{10}A_2 + \frac{3}{5}A_3 &= \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \\ \frac{9}{100}A_2 + \frac{9}{25}A_3 &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{6.15}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้ว่า

$$A_1 = \frac{19}{54}, A_2 = -\frac{10}{27}, A_3 = \frac{55}{54} \tag{6.16}$$

ค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสี่

การหาค่าจุดถ่วงในรูปแบบนิวตัน-โค้ตอันดับสี่ชนิดปิด สามารถหาได้โดยให้ x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นจุดที่มีระยะห่างเท่ากันในช่วงปิด [0,1] จะได้ว่า

ถ้า $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{3}, x_4 = 1$ ดังนั้น

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\frac{1}{3}A_2 + \frac{2}{3}A_3 + A_4 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2} \tag{6.17}$$

$$\frac{1}{9}A_2 + \frac{4}{9}A_3 + A_4 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{27}A_2 + \frac{8}{27}A_3 + A_4 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

ทำการแก้ระบบสมการจะได้ว่า

$$A_1 = \frac{1}{8}, A_2 = \frac{3}{8}, A_3 = \frac{3}{8}, A_4 = \frac{1}{8} \tag{6.18}$$

6.2.2 รูปแบบที่ 2

ในหัวข้อนี้จะแสดงการหาค่าจุดถ่วงของรูปแบบนิวตัน-โค้ตที่จะนำมาปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง กำหนดให้ $s = 2$ จะมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2) \tag{6.19}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + c_2h, y_m + \beta hk_1)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (6.4) มาแทนในสมการ (6.19) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \tag{6.20}$$

โดยที่ $k_1 = f(x_m, y_m)$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \beta hk_1)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย k_1 และ k_2 จะได้

$$k_1 = f \quad ; f \text{ คือ } f(x_m, y_m) \tag{6.21}$$

$$k_2 = f + \frac{3}{4}hf_x + \beta hff_y$$

สมการที่ (6.20) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + \frac{4}{3}\beta ff_y) \tag{6.22}$$

นำสมการที่ (6.22) ไปเทียบกับอนุกรมเทย์เลอร์ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y)$$

เทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ $\beta = \frac{3}{4}$ ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองแบบที่ 1 (N21) มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(k_1 + 2k_2) \tag{6.23}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{3}{4}h, y_m + \frac{3}{4}hk_1)$$

ในการสร้างระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองรูปแบบต่อไป ให้นำจุดถ่วงจากสมการ (6.6) มาแทนในสมการ (6.19) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + hk_2 \tag{6.24}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \beta hk_1)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย k_1 และ k_2 จะได้

$$k_1 = f \quad ; f \text{ คือ } f(x_m, y_m) \tag{6.25}$$

$$k_2 = f + \frac{1}{2}hf_x + \beta hff_y + \ldots$$

สมการที่ (6.24) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + 2\beta ff_y) \tag{6.26}$$

เทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้ $\beta = \frac{1}{2}$ ก็จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสอง แบบที่ 2 (N22) มีลักษณะดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hk_2 \tag{6.27}$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \frac{1}{2}hk_1)$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสองจำนวน 2 รูปแบบ

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสาม

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามได้ กำหนดให้ $s = 3$ จะได้รูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + h(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3) \tag{6.28}$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m + c_1, y_m + c_2 f(x_m, y_m))$$

$$k_2 = f(x_m + c_2h, y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + c_3h, y_m + \beta_2 hk_1 + \gamma_1 hk_2)$$

นำจุดถ่วงในสมการที่ (6.10) มาแทนในสมการ (6.28) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \tag{6.29}$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}h, y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \beta_2 hk_1 + \gamma_1 hk_2)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย k_1, k_2 และ k_3 จะได้

$$k_1 = f \qquad ; f \text{ คือ } f(x_m, y_m) \tag{6.30}$$
$$k_2 = f + \frac{\sqrt{2}}{3} hf_x + \beta_1 hff_y + \dots$$
$$k_3 = f + \frac{2}{3} hf_x + \beta_2 hff_y + \gamma_1 hff_y + \frac{\sqrt{2}}{3}\gamma_1 h^2 f_x f_y + \beta_1\gamma_1 h^2 ff_y^2$$
$$+\frac{2}{9}h^2 f_{xx} + \frac{2}{3}\beta_2 h^2 ff_{xy} + \frac{2}{3}\gamma_1 h^2 ff_{xy} + \beta_2^2 h^2 f^2 ff_{yy}$$
$$+\gamma_1^2 h^2 f^2 f_{yy} + \beta_2\gamma_1 h^2 f^2 f_{yy} + \dots$$

สมการที่ (6.29) จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + (\frac{3}{2}\beta_2 + \frac{3}{2}\gamma_1)ff_y)$$
$$+\frac{h^3}{6}(f_{xx} + (3\beta_2 + 3\gamma_1)ff_{xy} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\gamma_1 f_x f_y + \frac{9}{2}\beta_1\gamma_1 ff_y^2$$
$$+(\frac{9}{2}\beta_2^2 + \frac{9}{2}\gamma_1^2 + \frac{9}{2}\beta_2\gamma_1)f^2 f_{yy} \tag{6.31}$$

เทียบสัมประสิทธิ์กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้

$$\frac{3}{2}\beta_2 + \frac{3}{2}\gamma_1 = 1$$
$$3\beta_2 + 3\gamma_1 = 2$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{2}\gamma_1 = 1 \tag{6.32}$$
$$\frac{9}{2}\beta_1\gamma_1 = 1$$
$$\frac{9}{2}\beta_2^2 + \frac{9}{2}\gamma_1^2 + \frac{9}{2}\beta_2\gamma_1 = 1$$

จากการแก้สมการ (6.32) จะได้

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}, \beta_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}, \gamma_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} \tag{6.33}$$

นำไปแทนลงในสมการที่ (6.29) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3) \tag{6.34}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \frac{\sqrt{2}}{3}h, y_m + \frac{\sqrt{2}}{3}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \frac{(2-\sqrt{2})}{3}hk_1 + \frac{\sqrt{2}}{3}hk_2)$$

เป็นระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับที่สามแบบที่ 1 (N31)
ถ้านำจุดถ่วงจากสมการ (6.12) ไปแทนลงในสมการที่ (6.28) จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(k_1 - 4k_2 + 5k_3) \tag{6.35}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \beta_1 hk_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m + \beta_2 hk_1 + \gamma_1 hk_2)$$

ใช้อนุกรมเทย์เลอร์กระจาย k_1, k_2 และ k_3 แล้วทำตามวิธีการเดียวกันกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามแบบที่ 1 จะได้

$$\beta_1 = \frac{1}{4}, \beta_2 = -\frac{1}{30}, \gamma_1 = \frac{8}{15} \tag{6.36}$$

จะได้ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสามแบบที่ 2 (N32) ซึ่งมีรูปแบบดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{3}(2k_1 - 4k_2 + 5k_3) \tag{6.37}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$
$$k_2 = f(x_m + \frac{1}{4}h, y_m + \frac{1}{4}hk_1)$$
$$k_3 = f(x_m + \frac{1}{2}h, y_m - \frac{1}{30}hk_1 + \frac{8}{15}hk_2)$$

ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่

จากการนำจุดถ่วงจากรูปแบบนิวตัน-โค้ตจากสมการ (6.18) มาใส่ในระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่จะได้

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \tag{6.38}$$

โดยที่

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{3}, y_m + \beta_1 hk_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \beta_2 hk_1 + \gamma_1 hk_2)$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + \beta_3 hk_1 + \gamma_2 hk_2 + \lambda_1 hk_3)$$

กระจายโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์จะได้ค่าดังนี้

$$\begin{aligned} k_2 = {} & f + h(\frac{1}{3}f_x + \beta_1 ff_y) + h^2(\frac{1}{18}f_{xx} + \frac{1}{3}\beta_1 ff_{xy} + \frac{1}{2}\beta_1^2 f^2 f_{yy}) \\ & + h^3(\frac{1}{162}f_{xxx} + \frac{1}{18}\beta_1 ff_{xy} + \frac{1}{6}\beta_1^2 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{6}\beta_1^3 f^3 f_{yyy}) \\ & + h^4(\frac{1}{1944}f_{xxxx} + \frac{1}{162}\beta_1 ff_{xxxy} + \frac{1}{36}\beta_1^2 f^2 f_{xxyy} + \frac{1}{18}\beta_1^3 f^3 f_{xyyy} \\ & + \frac{1}{24}\beta_1^4 f^4 f_{yyyy}) + \ldots \end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned} k_3 = {} & f + h(\frac{2}{3}f_x + \beta_2 ff_y + \gamma_1 ff_y) + h^2(\frac{1}{3}\gamma_1 f_x f_y + \gamma_1\beta_1 ff_y^2 + \frac{2}{9}f_{xx} \\ & + \frac{2}{3}\beta_2 ff_{xy} + \frac{2}{3}\gamma_1 ff_{xy} + \frac{1}{2}\beta_2^2 f^2 f_{yy} + \beta_2\gamma_1 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2}\gamma_1^2 f^2 f_{yy}) \\ & + h^3(\frac{1}{18}\gamma_1 f_{xx} f_y + \frac{1}{3}\gamma_1\beta_1 ff_{xy} f_y + \frac{1}{2}\gamma_1\beta_1^2 f^2 f_{yy} f_y + \frac{2}{9}\gamma_1 f_x f_{xy} \\ & + \frac{2}{3}\gamma_1\beta_1 ff_y f_{xy} + \frac{1}{3}\beta_2\gamma_1 ff_x f_{yy} + \beta_1\beta_2\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6}\gamma_1^2 ff_x f_{yy} \\ & + \frac{1}{2}\gamma_1^2\beta_1 f^2 f_y f_{yy} + \frac{4}{81}f_{xxx} + \frac{2}{9}\beta_2 ff_{xxy} + \frac{2}{9}\gamma_1 ff_{xxy} + \frac{1}{3}\beta_2^2 f^2 f_{xyy} \\ & + \frac{2}{3}\beta_2\gamma_1 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{3}\gamma_1^2 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{6}\beta_2^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2}\beta_2^2\gamma_1 f^3 f_{yyy} \\ & + \frac{1}{2}\beta_2\gamma_1^2 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{6}\gamma_1^3 f^3 f_{yyy}) + \ldots \end{aligned} \tag{6.40}$$

$$
\begin{aligned}
k_4 &= f + h(f_x + \beta_3 ff_y + \lambda_1 ff_y) + h^2(\frac{1}{3}\gamma_2 f_x f_y + \gamma_2\beta_1 ff_y^2 \\
&+ \frac{2}{3}\lambda_1 f_x f_y + \lambda_1\beta_1 ff_y^2 + \gamma_1\lambda_1 ff_y^2 + \frac{1}{2}f_{xx} + \beta_3 ff_{xy} + \gamma_2 ff_{xy} + \lambda_1 ff_{xy} \\
&+ \frac{1}{2}\beta_3^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2}\gamma_2^2 f^2 f_{yy} + \frac{1}{2}\lambda_1^2 f^2 f_{yy} + \beta_3\gamma_2 f^2 f_{yy} + \beta_3\lambda_1 f^2 f_{yy} \\
&+ \gamma_2\lambda_1 f^2 f_{yy}) + h^3(\frac{1}{18}\gamma_2 f_{xx} f_y + \frac{1}{3}\gamma_2\beta_1 ff_{xy} f_y + \frac{1}{2}\gamma_2\beta_1^2 f^2 f_{yy} f_y \\
&+ \frac{1}{3}\lambda_1\gamma_1 f_x f_y^2 + \gamma_1\beta_1\lambda_1 ff_y^3 + \frac{2}{9}\lambda_1 f_{xx} f_y + \frac{2}{3}\lambda_1\beta_2 ff_{xy} f_y + \frac{2}{3}\gamma_1\lambda_1 ff_{xy} f_y \\
&+ \frac{1}{2}\beta_2^2\lambda_1 f^2 f_{yy} f_y + \beta_2\lambda_1\gamma_1 f^2 f_{yy} f_y + \frac{1}{2}\gamma_1^2\lambda_1 f^2 f_{yy} f_y + \frac{1}{3}\gamma_2 f_x f_{xy} \\
&+ \gamma_2\beta_1 ff_y f_{xy} + \frac{2}{3}\lambda_1 f_x f_{xy} + \lambda_1\beta_2 ff_y f_{xy} + \gamma_1\lambda_1 ff_y f_{xy} + \frac{1}{6}\gamma_2^2 ff_x f_{yy} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma_2^2\beta_1 f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{3}\lambda_1^2 ff_x f_{yy} + \frac{1}{2}\lambda_1^2\beta_2 f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{2}\lambda_1^2\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} \\
&+ \frac{1}{3}\beta_3\gamma_2 ff_x f_{yy} + \beta_1\beta_3\gamma_2 f^2 f_y f_{yy} + \frac{2}{3}\beta_3\lambda_1 ff_x f_{yy} + \beta_3\lambda_1\beta_2 f^2 f_y f_{yy} \\
&+ \beta_3\lambda_1\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{3}\gamma_2\lambda_1 ff_x f_{yy} + \gamma_2\lambda_1\beta_1 f^2 f_y f_{yy} + \frac{2}{3}\gamma_2\lambda_1 ff_x f_{yy} \\
&+ \gamma_2\lambda_1\beta_2 f^2 f_y f_{yy} + \gamma_2\lambda_1\gamma_1 f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{6}f_{xxx} + \frac{1}{2}\beta_3 ff_{xxy} + \frac{1}{2}\gamma_2 ff_{xxy} \\
&+ \frac{1}{2}\lambda_1 ff_{xxy} + \frac{1}{2}\beta_3^2 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{2}\gamma_2^2 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{2}\lambda_1^2 f^2 f_{xyy} + \beta_3\gamma_2 f^2 f_{xyy} \\
&+ \beta_3\lambda_1 f^2 f_{xyy} + \gamma_2\lambda_1 f^2 f_{xyy} + \frac{1}{6}\beta_3^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{6}\gamma_2^3 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{6}\lambda_1^3 f^3 f_{yyy} \\
&+ \frac{1}{2}\beta_3^2\gamma_1 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2}\beta_3^2\lambda_1 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2}\beta_3\lambda_1^2 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2}\beta_3\gamma_2^2 f^3 f_{yyy} \\
&+ \frac{1}{2}\gamma_2^2\lambda_1 f^3 f_{yyy} + \frac{1}{2}\gamma_2\lambda_1^2 f^3 f_{yyy} + \beta_3\gamma_2\lambda_1 f^3 f_{yyy}) + \ldots \qquad (6.41)
\end{aligned}
$$

แทนค่า k_1, k_2, k_3 และ k_4 ลงในสมการจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
y_{m+1} = y_m &+ h[(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8})f] + \frac{1}{2}h^2[(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})f_x + (\frac{3}{4}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_2 \\
&+ \frac{3}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\beta_3 + \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{4}\lambda_1)ff_y] + \frac{1}{6}h^3[(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8})f_{xx} + (\frac{3}{4}\gamma_1 \\
&+ \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{2}\lambda_1)f_x f_y + (\frac{9}{4}\gamma_1\beta_1 + \frac{3}{4}\gamma_2\beta_1 + \frac{3}{4}\lambda_1\beta_2 + \frac{3}{4}\gamma_1\lambda_1)ff_y^2 \\
&+ (\frac{9}{8}\beta_1^2 + \frac{9}{8}\beta_2^2 + \frac{9}{4}\beta_2\gamma_1 + \frac{9}{8}\gamma_1^2 + \frac{3}{8}\beta_3^2 + \frac{3}{8}\gamma_2^2 + \frac{3}{8}\lambda_1^2 + \frac{3}{4}\beta_3\gamma_2 \\
&+ \frac{3}{4}\beta_3\lambda_1 + \frac{3}{4}\gamma_2\lambda_1)f^2 f_{yy} + (\frac{3}{4}\beta_1 + \frac{3}{2}\beta_2 + \frac{3}{2}\gamma_1 + \frac{3}{4}\beta_3 + \frac{3}{4}\gamma_2 \\
&+ \frac{3}{4}\lambda_1)ff_{xy}]\frac{1}{24}h^4[(\frac{1}{18}+\frac{4}{9}+\frac{1}{2})f_{xxx} + (\frac{1}{2}\beta_1 + 2\beta_2 + 2\gamma_1 + \frac{3}{2}\beta_3 \\
&+ \frac{3}{2}\gamma_2 + \frac{3}{2}\lambda_1)ff_{xxy} + (2\gamma_1 + \gamma_2 + 2\lambda_1)f_x f_{xy} + (\frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{6}\gamma_2 \\
&+ \frac{2}{3}\lambda_1)f_{xx}f_y + (3\gamma_1\beta_1 + 6\gamma_1\beta_1 + \gamma_1\beta_1 + 2\lambda_1\beta_2 + 2\gamma_1\lambda_1 + 3\gamma_2\beta_1 \\
&+ 3\lambda_1\beta_2 + 3\gamma_1\lambda_1)ff_{xy}f_y + (\frac{3}{2}\beta_1^3 + \frac{3}{2}\beta_2^3 + \frac{9}{2}\beta_2^2\gamma_1 + \frac{9}{2}\beta_2^2\gamma_1^2 \\
&+ \frac{3}{2}\gamma_1^3 + \frac{1}{2}\beta_3^3 + \frac{1}{2}\gamma_2^3 + \frac{1}{2}\lambda_1^3 + \frac{3}{2}\beta_3^2\gamma_1 + \frac{3}{2}\beta_3^2\lambda_1 + \frac{3}{2}\beta_3^2\lambda_1^2 \\
&+ \frac{3}{2}\beta_3\gamma_2^2 + \frac{3}{2}\gamma_2^2\lambda_1 + \frac{3}{2}\gamma_2\lambda_1^2 + 3\beta_3\gamma_2\lambda_1)f^3 f_{yyy} + (3\beta_2\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_1^2 \\
&+ \frac{1}{2}\gamma_2^2 + \lambda_1^2 + \beta_3\gamma_2 + 2\beta_3\lambda_1 + 3\gamma_2\lambda_1)ff_x f_{yy} + (\frac{3}{2}\beta_1^2 + 3\beta_2^2 \\
&+ 6\beta_2\gamma_1 + 3\gamma_1^2 + \frac{3}{2}\beta_3^2 + \frac{3}{2}\gamma_2^2 + \frac{3}{2}\lambda_1^2 + 3\beta_3\gamma_2 + 3\beta_3\lambda_1 \\
&+ 3\gamma_2\lambda_1)f^2 f_{xyy} + (\frac{9}{2}\gamma_1\beta_1^2 + 9\beta_1\beta_2\gamma_1 + \frac{9}{2}\gamma_1^2\beta_1 + \frac{3}{2}\gamma_2\beta_1^2 \\
&+ \frac{3}{2}\beta_2^2\lambda_1 + 3\beta_2\lambda_1\gamma_1 + \frac{3}{2}\gamma_1^2\lambda_1 + \frac{3}{2}\gamma_2^2\beta_1 + \frac{3}{2}\lambda_1^2\beta_2 + \frac{3}{2}\lambda_1^2\gamma_1 \\
&+ 3\beta_1\beta_3\gamma_2 + 3\beta_2\beta_3\lambda_1 + 3\beta_3\lambda_1\gamma_1 + 3\gamma_2\lambda_1\beta_1 + 3\gamma_2\lambda_1\beta_2 \\
&+ 3\gamma_2\lambda_1\gamma_1)f^2 f_y f_{yy} + (\lambda_1\gamma_1)f_x f_y^2 + (\gamma_1\beta_1\lambda_1)ff_y^3 + \ldots \qquad (6.42)
\end{aligned}
$$

เทียบสัมประสิทธิ์ในเทอม h จากสมการ (6.42) กับอนุกรมเทย์เลอร์จะได้

$$\frac{3}{4}\beta_1 + \frac{3}{4}\beta_2 + \frac{1}{4}\beta_3 + \frac{3}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{4}\lambda_1 = 1$$

$$\frac{3}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{1}{2}\lambda_1 = 1$$

$$\frac{9}{4}\gamma_1\beta_1+\frac{3}{4}\gamma_2\beta_1+\frac{3}{4}\lambda_1\beta_2+\frac{3}{4}\gamma_1\lambda_1=1$$

$$\frac{9}{8}\beta_1^2+\frac{9}{8}\beta_2^2+\frac{3}{8}\beta_3^2+\frac{9}{8}\gamma_1^2+\frac{3}{8}\gamma_2^2+\frac{3}{8}\lambda_1^2+\frac{9}{8}\beta_2\gamma_1+\frac{3}{4}\beta_3\gamma_2+\frac{3}{4}\gamma_2\lambda_1=1$$

$$\frac{3}{4}\beta_1+\frac{3}{2}\beta_2+\frac{3}{2}\beta_3+\frac{3}{2}\gamma_1+\frac{3}{4}\gamma_2+\frac{3}{4}\lambda_1=2$$

$$\frac{1}{2}\beta_1+2\beta_2+\frac{3}{2}\beta_3+2\gamma_1+\frac{3}{2}\gamma_2+\frac{3}{2}\lambda_1=3$$

$$2\gamma_1+\gamma_2+2\lambda_1=3$$

$$\frac{1}{2}\gamma_1+\frac{1}{6}\gamma_2+\frac{2}{3}\lambda_1=1$$

$$9\gamma_1\beta_1+4\gamma_2\beta_1+5\lambda_1\beta_2+5\gamma_1\lambda_1=5$$

$$\frac{3}{2}\beta_1^3+\frac{3}{2}\beta_2^3+\frac{1}{2}\beta_3^3+\frac{3}{2}\gamma_1^3+\frac{1}{2}\gamma_2^3+\frac{1}{2}\lambda_1^3+\frac{9}{2}\beta_2^2\gamma_1+\frac{9}{2}\beta_2\gamma_1^2+\frac{3}{2}\beta_3^2\gamma_1$$

$$+\frac{3}{2}\beta_3^2\lambda_1+\frac{3}{2}\beta_3\lambda_1^2+\frac{3}{2}\beta_3\gamma_2^2+\frac{3}{2}\gamma_2^2\lambda_1+\frac{3}{2}\gamma_2\lambda_1^2+3\beta_3\gamma_2\lambda_1=1$$

$$\frac{3}{2}\beta_1^2+3\beta_2^2+\frac{3}{2}\beta_3^2+3\gamma_1^2+\frac{3}{2}\gamma_2^2+\frac{3}{2}\lambda_1^2+6\beta_2\gamma_1+3\beta_3\gamma_2+3\beta_3\lambda_1+3\gamma_2\lambda_1=3$$

$$3\beta_2\gamma_1+\frac{3}{2}\gamma_1^2+\frac{1}{2}\gamma_2^2+\lambda_1^2+\beta_3\gamma_2+3\beta_3\lambda_1+3\gamma_2\lambda_1=3$$

$$\frac{9}{2}\gamma_1\beta_1^2+\frac{9}{2}\gamma_1^2\beta_1+\frac{3}{2}\gamma_2\beta_1^2+\frac{3}{2}\beta_2^2\lambda_1+\frac{3}{2}\gamma_1^2\lambda_1+\frac{3}{2}\gamma_2^2\beta_1+\frac{3}{2}\lambda_1^2\beta_2$$

$$+\frac{3}{2}\lambda_1^2\gamma_1+9\beta_1\beta_2\gamma_1+3\beta_2\gamma_1\lambda_1+3\beta_1\beta_3\gamma_2+3\beta_2\beta_3\lambda_1+3\beta_3\lambda_1\gamma_1$$

$$+3\beta_1\gamma_2\lambda_1+3\beta_2\gamma_2\lambda_1+3\gamma_1\gamma_2\lambda_1=4$$

จากการแก้สมการจะได้

$$\beta_1=\frac{1}{3},\beta_2=-\frac{1}{3},\beta_3=1$$

$$\gamma_1=1,\gamma_2=-1,\lambda_1=1$$

เอาไปแทนค่าในสมการ (6.38) จะได้ ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับสี่ (N41)

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{8}(k_1+3k_2+3k_3+k_4) \tag{6.43}$$

โดยที่ $k_1=f(x_m,y_m)$

$$k_2=f(x_m+\frac{h}{3},y_m+\frac{h}{3}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{2}{3}h, y_m - \frac{h}{3}k_1 + hk_2)$$
$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_1 - hk_2 + hk_3)$$

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ N21, N22, N31, N32 และ N41 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยรูปแบบนิวตัน-โค้ต อันดับที่ 2 วิธีที่ 1, อันดับที่ 2 วิธีที่ 2, อันดับที่ 3 วิธีที่ 1, อันดับที่ 3 วิธีที่ 2 และอันดับที่ 4 วิธีที่ 1 ตามลำดับ

ปัญหาที่ 6.1 $y' = \frac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 6.1 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=5.1 และ h=0.1

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
N21	5.07554588154427755000	$3.832903613254501 \times 10^{-5}$
N22	5.07543611504007508000	$7.143746806992368 \times 10^{-5}$
N31	5.07550986842105267000	$2.315912907668860 \times 10^{-6}$
N32	5.07551288760370145000	$5.335095556446840 \times 10^{-6}$
N41	5.07550758163682314000	$2.912867813620000 \times 10^{-8}$

ตารางที่ 6.2 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
N21	5.07550755254399188000	$3.601297038000000 \times 10^{-11}$
N22	5.07550755243647256000	$7.150635639000000 \times 10^{-11}$
N31	5.07550755250815477000	$1.758593300000000 \times 10^{-13}$
N32	5.07550755250815655000	$1.776356800000000 \times 10^{-13}$
N41	5.07550755250815033000	$1.714184400000000 \times 10^{-13}$

ตารางที่ 6.3 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x=15.0, h=0.0001$ $y=6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
N21	6.29928298433793312000	$2.022373379900000 \times 10^{-10}$
N22	6.29928298373417661000	$3.955191729700000 \times 10^{-10}$
N31	6.29928298413279020000	$3.094413610000000 \times 10^{-12}$
N32	6.29928298413279908000	$3.103295400000000 \times 10^{-12}$
N41	6.29928298413277421000	$3.078426400000000 \times 10^{-12}$

ปัญหาที่ 6.2 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0)=1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 6.4 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
N21	1.00498599654944232000	$3.919213186964754 \times 10^{-5}$
N22	1.00499376169438914000	$3.142698692282231 \times 10^{-5}$
N31	1.00502222220171444000	$2.966479597521500 \times 10^{-6}$
N32	1.00502396972943187000	$1.218951880099790 \times 10^{-6}$
N41	1.00502526097501188000	$7.229369991535000 \times 10^{-8}$

ตารางที่ 6.5 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
N21	1.00502518865887636000	$2.243583097000000 \times 10^{-11}$
N22	1.00502518864925383000	$3.205835597000000 \times 10^{-11}$
N31	1.00502518868130841000	$3.774476000000000 \times 10^{-15}$
N32	1.00502518868984669000	$8.534506430000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 6.5 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
N41	1.00502518868131152000	$6.66130000000000\text{x}10^{-16}$

ตารางที่ 6.6 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
N21	2.41421334351819183000	$2.188153969613520\text{x}10^{-7}$
N22	2.41421327239291328000	$2.899192481692000\text{x}10^{-7}$
N31	2.41421356231524431000	$5.691713767000000\text{x}10^{-11}$
N32	2.41421364310000275000	$8.072784130064000\text{x}10^{-8}$
N41	2.41421356237274187000	$5.804246000000000\text{x}10^{-16}$

ปัญหาที่ 6.3 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0)=0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 6.7 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=0.1 และ h=0.1

	$x=0.1, h=0.1$ $y=0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
N21	0.10010015011252812500	$1.379101694000000\text{x}10^{-10}$
N22	0.10010015007501250900	$1.754257850100000\text{x}10^{-10}$
N31	0.10010015025029321600	$1.450783900000000\text{x}10^{-13}$
N32	0.10010015030026893400	$4.983063961000000\text{x}10^{-11}$
N41	0.10010015025043829400	0.000000000000000

ตารางที่ 6.8 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
N21	0.10010015075043848800	$1.942900000000000 \times 10^{-16}$
N22	0.10010015025043848800	$1.942900000000000 \times 10^{-16}$
N31	0.10010015025043861300	$3.191900000000000 \times 10^{-16}$
N32	0.10010015025043864100	$3.469400000000000 \times 10^{-16}$
N41	0.10010015025043861300	$3.191900000000000 \times 10^{-16}$

ตารางที่ 6.9 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ N ที่ x=10 และ h=0.0001

	$x = 10, h = 0.0001$ $y = 0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
N21	0.11180339887496612600	$9.423020000000000 \times 10^{-15}$
N22	0.11180339887495943700	$1.611211000000000 \times 10^{-14}$
N31	0.11180339887499010600	$1.455780000000000 \times 10^{-14}$
N32	0.11180339887499936300	$2.381428000000000 \times 10^{-14}$
N41	0.11180339887499010600	$1.455780000000000 \times 10^{-14}$

บทที่ 7
การประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์

7.1 การประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์

ในหัวข้อนี้จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากที่เราได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 นั้น เราจะหาบนช่วงปิดแต่ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นทั้งชนิดปิดและเปิด เราจะนำมาประยุกต์โดยการใช้จุดศูนย์ถ่วงที่แตกต่างกันและเราสามารถหาค่าของตัวแปร α และ β จากวิธีการที่นำมาใช้ได้ง่าย และทำให้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นไปได้ง่าย ทั้งยังพยายามที่จะทำให้เกิดค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด

7.2 รูปแบบการหาชนิดปิด- Successive approximation

โดยในหัวข้อนี้จะมีวิธีการที่คณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษได้ศึกษาและนำมารวบรวมไว้ทั้งหมด 2 รูปแบบ โดยจะอธิบายรายละเอียดดังด้านล่างต่อไปนี้

7.2.1 รูปแบบที่ 1 ชนิดปิด

เป็นการหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ในช่วงแบบเปิด โดยอยู่ในรูป

$$y' = f(x,y) \quad , \quad x \in [a,b] \tag{7.1}$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นเป็น

$$y(a) = c \tag{7.2}$$

ซึ่งเราจะประยุกต์การใช้การประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์มาปรับปรุงกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$y(x) = c + \int_a^x f(x,y)dx \tag{7.3}$$

ในที่นี้ระบบสมการแบบเปิดนี้เราจะทำการคิดที่หลายจุดตั้งแต่ 1 จุด ไปจนถึง 4 จุดด้วยกัน โดยเราจะแบ่งช่วงออกเป็น [a, b] โดยจะแบ่งออกเป็น n ส่วนด้วยกัน โดยมีความยาวคือ $h = \dfrac{b-a}{n}$

รูปแบบ 1 จุด (OP1)

จากจุดกึ่งกลางของสมการเราสามารถหาค่าจุดแรกได้โดยที่

$$y_{m+2} = y_m + 2hf(x_{m+1}, y_{m+1}) \tag{7.4}$$

ถ้าเราให้ $s = 2h$ ค่าความผิดพลาดจะมาจาก $O(s^3)$

รูปแบบ 2 จุด (OP2)

เราจะใช้จุด x_{m+1} และ x_{m+2} มาคำนวณหาค่าปริพันธ์ในช่วง $[x_m, x_{m+3}]$ เราจะได้จุดที่สองดังสมการ

$$y_{m+3} = y_m + 1.5h(f(x_{m+1}, y_{m+1}) + f(x_{m+2}, y_{m+2})) \tag{7.5}$$

ถ้าเราให้ $s = 3h$ ค่าความผิดพลาดจะมาจาก $O(s^3)$

รูปแบบ 3 จุด (OP3)

เราจะใช้จุด x_{m+1} , x_{m+2} และ x_{m+3} มาคำนวณหาค่าปริพันธ์ในช่วง $[x_m, x_{m+4}]$ เราจะได้

$$\begin{aligned} y_{m+4} = y_m + \frac{4}{3}h(2f(x_{m+1}, y_{m+1}) \\ -f(x_{m+2}, y_{m+2}) + 2f(x_{m+3}, y_{m+3})) \end{aligned} \tag{7.6}$$

ถ้าเราให้ $s = 4h$ ค่าความผิดพลาดจะมาจาก $O(s^5)$

รูปแบบ 4 จุด (OP4)

เราจะใช้จุด x_{m+1} , x_{m+2} , x_{m+3} และ x_{m+4} มาคำนวณหาค่าปริพันธ์ในช่วง $[x_m, x_{m+5}]$เราจะได้

$$\begin{aligned} y_{m+5} = \frac{5}{24}h(11f(x_{m+1}, y_{m+1}) \\ +f(x_{m+2}, y_{m+2}) + f(x_{m+3}, y_{m+3}) + 11f(x_{m+4}, y_{m+4}) \end{aligned} \tag{7.7}$$

ถ้าเราให้ $s = 5h$ ค่าความผิดพลาดจะมาจาก $O(s^5)$

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ OP1, OP2, OP3 และ OP4 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 1 (ชนิดเปิด) ในอันดับที่ 1, อันดับที่ 2, อันดับที่ 3 และอันดับที่ 4 ตามลำดับ

ปัญหาที่ 7.1 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 7.1 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=5.1 และ h=0.01

	$x = 5.1, h = 0.01$ $y = 5.075507552508143$	
	Calculated y	Error
OP1	5.07550468620320900000	$2.866304934000000\text{x}10^{-6}$
OP2	5.07550374200961585000	$3.810498528267200\text{x}10^{-6}$
OP3	5.07550755138630105000	$1.121843062890000\text{x}10^{-9}$
OP4	5.07550755000502374000	$2.503120377640000\text{x}10^{-9}$

ตารางที่ 7.2 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.075507552507980$	
	Calculated y	Error
OP1	5.07550755222149100000	$2.864890000000000\text{x}10^{-10}$
OP2	5.07550755207865301000	$4.293267963400000\text{x}10^{-10}$
OP3	5.07550755250815389000	$1.740829700000000\text{x}10^{-13}$
OP4	5.07550755250815122000	$1.714184400000000\text{x}10^{-16}$

ตารางที่ 7.3 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.299282984129696$	
	Calculated y	Error
OP1	6.29928298253905700000	$1.590639000000000\text{x}10^{-9}$
OP2	6.29928298174276602000	$2.386929764950000\text{x}10^{-9}$
OP3	6.29928298413270760000	$3.011813020000000\text{x}10^{-12}$
OP4	6.29928298413275289000	$3.057110120000000\text{x}10^{-12}$

ปัญหาที่ 7.2 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0)=1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 7.4 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=0.1 และ h=0.01

	$x=0.1, h=0.01$ $y=1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
OP1	1.00502518354819100	$5.1331210000000000 \times 10^{-9}$
OP2	1.00502518098241511	$7.6988968533700000 \times 10^{-9}$
OP3	1.00502319930608897	$1.9893752229993600 \times 10^{-6}$
OP4	1.00501962359906938	$9.5312094614175003 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 7.5 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x=0.1, h=0.001$ $y=1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
OP1	1.00502518862997900	$5.13330000000000 \times 10^{-11}$
OP2	1.00502518804315560	$7.69966312900000 \times 10^{-11}$
OP3	1.00502518843121075	$2.49901432880000 \times 10^{-10}$
OP4	1.00502518824985709	$1.009555027242648 \times 10^{-5}$

ตารางที่ 7.6 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.414213562372161$	
	Calculated y	Error
OP1	2.41421312981290700	$4.3255925400000000 \times 10^{-7}$
OP2	2.41412913533581690	$6.4883857975317000 \times 10^{-7}$
OP3	2.41421347443566559	$8.7936495862810000 \times 10^{-8}$
OP4	2.41421332671100242	$9.9409957152607475 \times 10^{-4}$

ปัญหาที่ 7.3 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 7.7 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.01$ $y = 0.100100150250438$	
	Calculated y	Error
OP1	0.100100141055370000	$2.50000000000000 \times 10^{-14}$
OP2	0.100100150249768000	$3.73590000000000 \times 10^{-14}$
OP3	0.100100134243220174	$1.600721812045000 \times 10^{-8}$
OP4	0.100100121435727260	$9.999975318974333 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 7.8 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.100100150250438$	
	Calculated y	Error
OP1	0.100100150250438000	0.000000000000000
OP2	0.100100250551340544	$2.498000000000 \times 10^{-16}$
OP3	0.100100150050435363	$2.000029308800 \times 10^{-10}$
OP4	0.100100149962500065	$1.0001266277648 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 7.9 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ OP ที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.111803398874976$	
	Calculated y	Error
OP1	0.11180339887494800000	$2.70000000000000 \times 10^{-14}$
OP2	0.11180339887492439500	$5.11535300000000 \times 10^{-14}$
OP3	0.11180337824699698700	$2.062797857527000 \times 10^{-8}$
OP4	0.11180336443849357700	$1.053175045784300 \times 10^{-7}$

7.2.2 รูปแบบที่ 2 ใช้รูปแบบ successive approximation

ในหัวข้อนี้เราจะใช้รูปแบบต่างๆ มาช่วยในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เป็นการหาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ในช่วงแบบปิด โดยอยู่ในรูป

$$y' = f(x,y) \quad , \quad x \in [a,b] \tag{7.8}$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นเป็น

$$y(a) = c \tag{7.9}$$

ซึ่งเราจะประยุกต์การใช้วิธีปริพันธ์มาปรับปรุงกับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเพื่อใช้ในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ โดยรูปแบบการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์

$$y(x) = c + \int_a^x f(x,y)dx \tag{7.10}$$

โดยวิธีการ successive approximation

$$y_{m+1}(x) = c + \int_a^x f(t, y_m(t))dt \tag{7.11}$$

Midpoint Formula

$$\int_a^b y(x)dx = (b-a)y\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{7.12}$$

Trapezoidal Formula

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\{y(a)+y(b)\} \tag{7.13}$$

Modified Trapezoidal Formula

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\{y(a)+y(b)\} + \frac{1}{12}(b-a)^2\{y'(a)-y'(b)\} \tag{7.14}$$

Simpson's Formula

$$\int_a^b y(x)dx = \frac{h}{6}\left[y(a)+4y\left(\frac{a+b}{2}\right)+y(b)\right] \tag{7.15}$$

จากสมการที่ (7.12), (7.13), (7.14) และ (7.15) เราจะได้สมการทั้งสี่จุดดังนี้

$$y_{m+1} = y_m + hf(x_m + \frac{h}{2}, y_m + bb) \tag{7.16}$$

โดยที่ $$bb = \frac{h}{2} f(x_m, y_m)$$

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ PS1 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 1

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\{k_1 + k_2\} \tag{7.17}$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ PS2 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 2

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}\{k_1 + k_2\} + \frac{h^2}{12}\{AA + BB\} \tag{7.18}$$

โดยที่ $$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))$$

$$AA = f_x(x_m, y_m) + f(x_m, y_m) f_y(x_m, y_m)$$

$$\begin{aligned} BB = {} & f_x(x_m, +h, y_m + hf(x_m, y_m)) + f(x_m + h, \\ & y_m + hf(x_m, y_m)) f_y(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m) \end{aligned}$$

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ PS3 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 3

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}[f(x_m, y_m) + 4f(x_m + \frac{h}{2},$$
$$y_m + \frac{h}{2} f(x_m, y_m)) + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))]$$

โดยเราจะใช้สัญลักษณ์ PS4 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 4

ปัญหาที่ 7.4 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 7.10 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=5.1 และ h=0.01

	$x = 5.1, h = 0.01$ $y = 5.075507552508143$	
	Calculated y	Error
PS1	5.07550683586262100000	$7.1664552200000\text{x}10^{-7}$
PS2	5.07550898581899400000	$1.4333108500000\text{x}10^{-6}$
PS3	5.07550755248174200000	$2.640100000000\text{x}10^{-11}$
PS4	5.07550755251474500000	$6.602000000000\text{x}10^{-12}$

ตารางที่ 7.11 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.075507552507980$	
	Calculated y	Error
PS1	5.07550755243647300000	$7.150600000000\text{x}10^{-11}$
PS2	5.07550755265150100000	$1.435220000000\text{x}10^{-10}$
PS3	5.07507552508150000000	$1.710000000000\text{x}10^{-13}$
PS4	5.07507552508150000000	$1.710000000000\text{x}10^{-13}$

ตารางที่ 7.12 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x=15.0, h=0.0001$ $y=6.299282984129696$	
	Calculated y	Error
PS1	6.29928298373417700000	$3.955190000000\times10^{-10}$
PS2	6.29928298492959100000	$7.998950000000\times10^{-10}$
PS3	6.29928298413277600000	$3.080000000000\times10^{-12}$
PS4	6.29928298413277600000	$3.080000000000\times10^{-12}$

ปัญหาที่ 7.5 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0)=1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 7.12 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=0.1 และ h=0.01

	$x=0.1, h=0.01$ $y=1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
PS1	1.00502486868644300000	$3.1999486900000000\times10^{-7}$
PS2	1.00502502281003200000	$1.6587128000000000\times10^{-7}$
PS3	1.00502477936959900000	$4.0931171300000000\times10^{-7}$
PS4	1.00502492006095600000	$2.6862035600000000\times10^{-7}$

ตารางที่ 7.13 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=0.1 และ h=0.001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=1.005025188700000000$	
	Calculated y	Error
PS1	1.00502518864925400000	$3.20580000000000\times10^{-11}$
PS2	1.00502518866849000000	$1.28220000000000\times10^{-11}$
PS3	1.00502518864283200000	$3.84800000000000\times10^{-11}$
PS4	1.00502518865566700000	$2.56450000000000\times10^{-11}$

ตารางที่ 7.14 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
PS1	2.41421327239291300	$2.8997924800000000\text{x}10^{-7}$
PS2	2.41421341464646000	$1.4772570100000000\text{x}10^{-7}$
PS3	2.41421319851834400	$3.6385381000000000\text{x}10^{-7}$
PS4	2.41421331981075800	$2.4256140300000000\text{x}10^{-7}$

ตัวอย่างที่ 7.6 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 7.15 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=0.1 และ h=0.01

	$x=0.1, h=0.01$ $y=0.100100150250438$	
	Calculated y	Error
PS1	0.100100150248680000	$1.7580000000000\text{x}10^{-12}$
PS2	0.100100150249433000	$1.0050000000000\text{x}10^{-12}$
PS3	0.100100150248177000	$2.2610000000000\text{x}10^{-12}$
PS4	0.100100150248931000	$1.50700000000000\text{x}10^{-12}$

ตารางที่ 7.16 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=0.100100150250438$	
	Calculated y	Error
PS1	0.10010015025043800000	0.000000000000000
PS2	0.10010015025043800000	0.000000000000000
PS3	0.10010015025043800000	0.000000000000000
PS4	0.10010015025043800000	0.000000000000000

ตารางที่ 7.17 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการ PS ที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.111803398874976$	
	Calculated y	Error
PS1	0.11180339887495900000	$1.600000000000 \times 10^{-14}$
PS2	0.11180339887497300000	$3.000000000000 \times 10^{-15}$
PS3	0.11180339887495100000	$2.400000000000 \times 10^{-14}$
PS4	0.11180339887496400000	$1.200000000000 \times 10^{-14}$

บทที่ 8
ผลงานวิจัย

ในบทนี้จะทำการแสดงผลของวิธีการต่างๆ ที่ปรับปรุงมาจากระเบียบวิธีการต่างๆ มาใช้กับระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งได้แสดงดังตารางข้างล่างต่อไปนี้

ปัญหาที่ 8.1 $y' = \dfrac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = 5 + \ln(5) - \ln(x) + \ln(x-4)$

ตารางที่ 8.1 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=5.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	5.08000000000000000000	$4.492447491855000\text{x}10^{-3}$
Taylor2	5.07520000000000000000	$3.075525081450000\text{x}10^{-4}$
Taylor3	5.04769066666666700000	$2.781688584147800\text{x}10^{-2}$
Taylor4	5.05048010666666700000	$2.502744584147800\text{x}10^{-2}$
RK2	5.07565062388591800000	$1.430713777730000\text{x}10^{-4}$
RK3	5.07550761798868955000	$6.548054454214000\text{x}10^{-8}$
RK4	5.07619676253339591000	$6.892100252509081\text{x}10^{-4}$
RKN 2	5.07550750776488879000	$4.474325621118000\text{x}10^{-8}$
RKN 3	5.07550755263528419000	$1.271391880700000\text{x}10^{-10}$
RKN 4	5.07550755255869834000	$5.055333929000000\text{x}10^{-11}$
RU1	5.07516793195846900000	$3.396205496760000\text{x}10^{-4}$
RU2	5.07550820363754300000	$6.511293980000000\text{x}10^{-7}$
RU3	5.07550756161066700000	$9.102522000000000\text{x}10^{-9}$
RU4	5.07539210066426800000	$1.154518438770000\text{x}10^{-4}$
RL1	5.07569755020548700000	$1.899976973422000\text{x}10^{-4}$

ตารางที่ 8.1 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=5.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x = 5.1, h = 0.1$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RL2	5.07550618453746000000	$1.767970680000000\times10^{-6}$
RL3	5.07550754901386000000	$3.494285000000000\times10^{-9}$
RL4	5.07562319333131200000	$1.156408231670000\times10^{-4}$
RKG2	5.07543611504007500000	$7.143746807000000\times10^{-5}$
RKG3	5.07550755157616695000	$9.131978050290000\times10^{-10}$
RKG4	5.07550755142103771000	$1.087107293070000\times10^{-9}$
RKDF1	5.07593624434149800000	$4.286918333530000\times10^{-4}$
RKDF2	5.07550782411119880000	$2.716038430000000\times10^{-7}$
RKDF3	5.07546437745793900000	$4.317505020600000\times10^{-5}$
RKDF4	5.07550755250813200000	$1.300000000000000\times10^{-14}$
RKDS1	5.07495662232504300000	$5.509301831020000\times10^{-4}$
RKDS2	5.07550500530010900000	$2.547208036000000\times10^{-6}$
RKDS3	5.07550754167900100000	$1.082914400000000\times10^{-8}$
RKDS4	5.07550755245549600000	$5.264900000000000\times10^{-11}$
RKYA1	5.07586012104703900000	$3.525685388940000\times10^{-4}$
RKYA2	5.07570196595446700000	$1.944134463220000\times10^{-4}$
RKYA3	5.07549400799423000000	$1.354450872200000\times10^{-4}$
RKYA4	5.07550795704505900000	$4.045369140000000\times10^{-7}$
RKYB1	5.07126506837524400000	$4.242484132901000\times10^{-3}$
RKYB2	5.07550424985589600000	$3.302652249 00000\times10^{-6}$
RKYB3	5.07550755051373200000	$1.994413000000000\times10^{-9}$
RKYB4	5.07550755506886800000	$2.560723000000000\times10^{-9}$
N21	5.07554588154427755000	$3.832903613254501\times10^{-5}$
N22	5.07543611504007508000	$7.143746806992368\times10^{-5}$
N31	5.07550986842105267000	$2.315912907668860\times10^{-6}$
N32	5.07551288760370145000	$5.335095556446840\times10^{-6}$
N41	5.07550758163682314000	$2.912867813620000\times10^{-8}$

ตารางที่ 8.1 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=5.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x = 5.1, h = 0.01$ $y = 5.075507552508143$	
	Calculated y	Error
OP1	5.07550468620320900000	$2.866304934000000 \times 10^{-6}$
OP2	5.07550374200961585000	$3.810498528267200 \times 10^{-6}$
OP3	5.07550755138630105000	$1.121843062890000 \times 10^{-9}$
OP4	5.07550755000502374000	$2.503120377640000 \times 10^{-9}$
PS1	5.07550683586262100000	$7.166455220000000 \times 10^{-7}$
PS2	5.07550898581899400000	$1.433310850000000 \times 10^{-6}$
PS3	5.07550755248174200000	$2.640100000000000 \times 10^{-11}$
PS4	5.07550755251474500000	$6.602000000000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 8.2 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	5.07558320327531200000	$4.353459371000000 \times 10^{-6}$
Taylor2	5.07557884952924600000	$2.867550000000000 \times 10^{-10}$
Taylor3	5.07557882676148200000	$1.908021464715630 \times 10^{-1}$
Taylor4	5.07557882676367500000	$2.305232500000000 \times 10^{-8}$
RK2	5.07550752651501000000	$1.435200000000000 \times 10^{-10}$
RK3	5.07550755250815033000	$3.171418440000000 \times 10^{-13}$
RK4	5.07550827736833909000	$7.248603601794900 \times 10^{-7}$
RKN 2	5.07550755250696461000	$1.014299760000000 \times 10^{-12}$
RKN 3	5.07550755250815211000	$1.731947900000000 \times 10^{-13}$
RKN 4	5.07550755250815211000	$1.731947900000000 \times 10^{-13}$
RU1	5.07550728279629500000	$2.697116840000000 \times 10^{-7}$
RU2	5.07550755261622300000	$1.082440000000000 \times 10^{-10}$
RU3	5.07550755250824700000	$2.680000000000000 \times 10^{-13}$
RU4	5.07550743606483100000	$1.164431480000000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 8.2 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	5.07550781371588800000	$2.612079090000000 \times 10^{-7}$
RL2	5.07550755250667200000	$1.307000000000000 \times 10^{-12}$
RL3	5.07550755250879600000	$8.170000000000000 \times 10^{-13}$
RL4	5.07550766895204600000	$1.164440670000000 \times 10^{-7}$
RKG2	5.07550755243647300000	$7.150600000000000 \times 10^{-11}$
RKG3	5.07550755250716890000	$8.100187200000000 \times 10^{-13}$
RKG4	5.07550755250703833000	$9.405809500000000 \times 10^{-13}$
RKDF1	5.07550805092095600000	$4.984125770000000 \times 10^{-7}$
RKDF2	5.07550755250818400000	$2.050000000000000 \times 10^{-13}$
RKDF3	5.07550751247929500000	$4.002868300000000 \times 10^{-8}$
RKDF4	5.07550755250815000000	$1.710000000000000 \times 10^{-13}$
RKDS1	5.07550706917513000000	$4.833328490000000 \times 10^{-7}$
RKDS2	5.07550755250594100000	$2.038000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS3	5.07550755250815000000	$1.710000000000000 \times 10^{-13}$
RKDS4	5.07550755250059600000	$7.383000000000000 \times 10^{-12}$
RKYA1	5.07647791984069800000	$9.703667332719000 \times 10^{-4}$
RKYA2	5.07566764035624800000	$1.600878482690000 \times 10^{-4}$
RKYA3	5.07549472790450600000	$1.282460347300000 \times 10^{-4}$
RKYA4	5.07550799069393400000	$4.381859550000000 \times 10^{-7}$
RKYB1	5.07085156462156300000	$4.655987886416000 \times 10^{-3}$
RKYB2	5.07550755244958900000	$5.839000000000000 \times 10^{-6}$
RKYB3	5.07550755246267800000	$4.530100000000000 \times 10^{-9}$
RKYB4	5.07550755493775800000	$2.429779000000000 \times 10^{-9}$
N21	5.07550755254399188000	$3.601297038000000 \times 10^{-11}$
N22	5.07550755243647256000	$7.150635639000000 \times 10^{-11}$
N31	5.07550755250815477000	$1.758593300000000 \times 10^{-13}$
N32	5.07550755250815655000	$1.776356800000000 \times 10^{-13}$

ตารางที่ 8.2 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=5.1 และ h=0.0001

	$x = 5.1, h = 0.0001$ $y = 5.07550755250000000000$	
	Calculated y	Error
N41	5.07550755250815033000	$1.714184400000000 \times 10^{-13}$
OP1	5.07550755222149100000	$2.864890000000000 \times 10^{-10}$
OP2	5.07550755207865301000	$4.293267963400000 \times 10^{-10}$
OP3	5.07550755250815389000	$1.740829700000000 \times 10^{-13}$
OP4	5.07550755250815122000	$1.714184400000000 \times 10^{-16}$
PS1	5.07550755243647300000	$7.150600000000000 \times 10^{-11}$
PS2	5.07550755265150100000	$1.435220000000000 \times 10^{-10}$
PS3	5.07507552508150000000	$1.710000000000000 \times 10^{-13}$
PS4	5.07507552508150000000	$1.710000000000000 \times 10^{-13}$

ตารางที่ 8.3 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
Euler	6.29932419705063600000	$3.878869761600000 \times 10^{-5}$
Taylor2	6.29928540676228800000	$1.590732000000000 \times 10^{-9}$
Taylor3	6.29928531721452400000	$2.333084828220000 \times 10^{-6}$
Taylor4	6.29928531722134000000	$9.113168000000000 \times 10^{-8}$
RK2	6.29928540915291500000	$7.998950000000000 \times 10^{-10}$
RK3	6.29928298413277599000	$3.080202760000000 \times 10^{-12}$
RK4	6.29928944857987894000	$6.464450183152340 \times 10^{-6}$
RKN 2	6.29861228865987304000	$7.459810550000000 \times 10^{-12}$
RKN 3	6.29861228866733285000	$2.543742990000000 \times 10^{-12}$
RKN 4	6.29861228866987659000	$2.543742990000000 \times 10^{-12}$
RU2	6.29928298598254600000	$1.852850000000000 \times 10^{-9}$
RU3	6.29928298413355800000	$3.862000000000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 8.3 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
RU4	6.29928194568442400000	$1.038445272000000 \times 10^{-6}$
RL1	6.29928531382996100000	$2.329700266000000 \times 10^{-6}$
RL2	6.29928298412457100000	$5.125000000000000 \times 10^{-12}$
RL3	6.29928298413858300000	$8.888888880000000 \times 10^{-12}$
RL4	6.29984022585524000000	$1.038455828000000 \times 10^{-6}$
RKG2	6.29928298373417700000	$3.955190000000000 \times 10^{-10}$
RKG3	6.29928298412402565000	$5.167013103000000 \times 10^{-12}$
RKG4	6.29928298412291188000	$6.783906770000000 \times 10^{-12}$
RKDF1	6.29928742922557900000	$4.445095883000000 \times 10^{-6}$
RKDF2	6.29928298413300200000	$3.307000000000000 \times 10^{-12}$
RKDF3	6.29928262716451400000	$3.569651820000000 \times 10^{-7}$
RKDF4	6.29928298413277400000	$3.078000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS1	6.29927873984810000000	$4.310144885000000 \times 10^{-6}$
RKDS2	6.29928298412060100000	$9.095000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS3	6.29928298413277600000	$3.080000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS4	6.29928298400276700000	$1.269290000000000 \times 10^{-10}$
RKYA1	6.31598497545203300000	$1.670199132233700 \times 10^{-2}$
RKYA2	6.30203738700942700000	$2.754402879731000 \times 10^{-3}$
RKYA3	6.29906231407899200000	$2.206700507030000 \times 10^{-4}$
RKYA4	6.29929052433888800000	$7.540209192000000 \times 10^{-6}$
RKYB1	6.21916191527546700000	$8.012106885422900 \times 10^{-2}$
RKYB2	6.29928298316662900000	$9.630670000000000 \times 10^{-10}$
RKYB3	6.29928298335053800000	$7.791580000000000 \times 10^{-10}$
RKYB4	6.29928302593873900000	$4.180904300000000 \times 10^{-8}$
N21	6.29928298433793312000	$2.022373379900000 \times 10^{-10}$
N22	6.29928298373417661000	$3.955191729700000 \times 10^{-10}$
N31	6.29928298413279020000	$3.094413610000000 \times 10^{-12}$

ตารางที่ 8.3 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=15.0 และ h=0.0001

	$x = 15.0, h = 0.0001$ $y = 6.29928298412969578000$	
	Calculated y	Error
N32	6.29928298413279908000	$3.103295400000000 \times 10^{-12}$
N41	6.29928298413277421000	$3.078426400000000 \times 10^{-12}$
OP1	6.29928298253905700000	$1.590639000000000 \times 10^{-9}$
OP2	6.29928298174276602000	$2.386929764950000 \times 10^{-9}$
OP3	6.29928298413270760000	$3.011813020000000 \times 10^{-12}$
OP4	6.29928298413275289000	$3.057110120000000 \times 10^{-12}$
PS1	6.29928298373417700000	$3.955190000000000 \times 10^{-10}$
PS2	6.29928298492959100000	$7.998950000000000 \times 10^{-10}$
PS3	6.29928298413277600000	$3.080000000000000 \times 10^{-12}$
PS4	6.29928298413277600000	$3.080000000000000 \times 10^{-12}$

ปัญหาที่ 8.2 $y' = \dfrac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0,1.1]$ โดยที่ $y(0) = 1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$

ตารางที่ 8.4 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	1.00000000000000000000	$5.025188681312000 \times 10^{-3}$
Taylor2	1.00500000000000000000	$2.518868868131200 \times 10^{-5}$
Taylor3	1.00500000000000000000	$2.518868131200000 \times 10^{-5}$
Taylor4	1.00502500000000000000	$1.886813120000000 \times 10^{-7}$
RK2	1.00497518595105000000	$5.000273026200000 \times 10^{-5}$
RK3	1.00503775749608848000	$1.256881477651461 \times 10^{-5}$
RK4	1.00418659383757025000	$8.385948437417134 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 8.4 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x=0.1, h=0.1$ $y=1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKN 2	1.00500724258395691000	$1.794609735505936 \times 10^{-5}$
RKN 3	1.00502907598948821000	$3.887308176242500 \times 10^{-6}$
RKN 4	1.00502523956748679000	$5.088174829400000 \times 10^{-8}$
RU1	1.00530250647917800000	$2.773177978660000 \times 10^{-4}$
RU2	1.00502750467804900000	$2.315996737000000 \times 10^{-6}$
RU3	1.00501925513817300000	$5.933543139000000 \times 10^{-6}$
RU4	1.00516943671439900000	$1.442480330870000 \times 10^{-4}$
RL1	1.00469445529856800000	$3.307338274400000 \times 10^{-4}$
RL2	1.00502648379740500000	$1.295116093000000 \times 10^{-6}$
RL3	1.00504205504215900000	$1.686636084700000 \times 10^{-5}$
RL4	1.00489719771565600000	$1.279909656560000 \times 10^{-4}$
RKG2	1.00501251167491900000	$1.267706393000000 \times 10^{-5}$
RKG3	1.00502512940145650000	$5.927985546883000 \times 10^{-8}$
RKG4	1.00515335023352992000	$1.281615522179535 \times 10^{-4}$
RKDF1	1.00503636615814300000	$1.117747683100000 \times 10^{-5}$
RKDF2	1.00500555570813800000	$1.963297317400000 \times 10^{-5}$
RKDF3	1.00507000061615500000	$4.481193484400000 \times 10^{-5}$
RKDF4	1.00503281066185800000	$7.621980546000000 \times 10^{-6}$
RKDS1	1.00652381455059800000	$1.498625869286000 \times 10^{-3}$
RKDS2	1.00500895749771700000	$1.623118359500000 \times 10^{-6}$
RKDS3	1.00502482129634800000	$3.673849640000000 \times 10^{-7}$
RKDS4	1.00503368677027400000	$8.498088962000000 \times 10^{-6}$
RKYA1	1.00568833735518500000	$6.631486738730000 \times 10^{-4}$
RKYA2	1.00495908694440900000	$6.610173690300000 \times 10^{-5}$
RKYA3	1.00498769389566400000	$3.749478664800000 \times 10^{-5}$
RKYA4	1.00498761928247100000	$3.756939884100000 \times 10^{-5}$
RKYB1	1.00413655953396600000	$8.886291473460000 \times 10^{-4}$

ตารางที่ 8.4 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKYB2	1.00498805194569900000	$3.713673561300000 \times 10^{-4}$
RKYB3	1.00498756177808000000	$3.762690323200000 \times 10^{-5}$
RKYB4	1.00498756212552200000	$3.762655579000000 \times 10^{-5}$
N21	1.00498599654944232000	$3.919213186964754 \times 10^{-5}$
N22	1.00499376169438914000	$3.142698692282231 \times 10^{-5}$
N31	1.00502222220171444000	$2.966479597521500 \times 10^{-6}$
N32	1.00502396972943187000	$1.218951880099790 \times 10^{-6}$
N41	1.00502526097501188000	$7.229369991535000 \times 10^{-8}$
	$x = 0.1, h = 0.01$ $y = 1.005025188681312$	
	Calculated y	Error
OP1	1.00502518354819100000	$5.133121000000000 \times 10^{-9}$
OP2	1.00502518098241511000	$7.698896853370000 \times 10^{-9}$
OP3	1.00502319930608897000	$1.989375222999360 \times 10^{-6}$
OP4	1.00501962359906938000	$9.531209461417500 3\times 10^{-4}$
PS1	1.00502486868644300000	$3.199948690000000 \times 10^{-7}$
PS2	1.00502502281003200000	$1.658712800000000 \times 10^{-7}$
PS3	1.00502477936959900000	$4.093117130000000 \times 10^{-7}$
PS4	1.00502492006095600000	$2.686203560000000 \times 10^{-7}$

ตารางที่ 8.5 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	1.00502008745819300000	$5.101223119000000 \times 10^{-6}$

ตารางที่ 8.5 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
Taylor2	1.00502520537290200000	$1.669158900000000\text{x}10^{-8}$
Taylor3	1.00502520538153300000	$1.670022100000000\text{x}10^{-8}$
Taylor4	1.00502518883369400000	$1.523810000000000\text{x}10^{-10}$
RK2	1.00501509268678900000	$1.279600000000000\text{x}10^{-11}$
RK3	1.00502518868132396000	$1.176836000000000\text{x}10^{-14}$
RK4	1.00502434692429476000	$8.41757017422400\text{x}10^{-7}$
RKN 2	1.00502518865249879000	$2.881339611000000\text{x}10^{-11}$
RKN 3	1.00502518868129820000	$1.398881000000000\text{x}10^{-14}$
RKN 4	1.00502118868129798000	$1.421085000000000\text{x}10^{-14}$
RU1	1.00502550420312600000	$3.162218140000000\text{x}10^{-6}$
RU2	1.00502518868857500000	$7.263000000000000\text{x}10^{-12}$
RU3	1.00502518869989700000	$1.858500000000000\text{x}10^{-11}$
RU4	1.00502532526014300000	$1.365788310000000\text{x}10^{-7}$
RL1	1.00502488220380100000	$3.064775112000000\text{x}10^{-7}$
RL2	1.00502518868118200000	$1.300000000000000\text{x}10^{-13}$
RL3	1.00502518869134000000	$1.002800000000000\text{x}10^{-11}$
RL4	1.00502505210873200000	$1.365725800000000\text{x}10^{-7}$
RKG2	1.00501506740329900000	$2.529628600000000\text{x}10^{-8}$
RKG3	1.00502518868261249000	$1.300293210000000\text{x}10^{-12}$
RKG4	1.00502518865464130000	$2.6670887720000000\text{x}10^{-11}$
RKDF1	1.00502522978154200000	$4.110023000000000\text{x}10^{-8}$
RKDF2	1.00502518866757900000	$1.373300000000000\text{x}10^{-11}$
RKDF3	1.00502523562346500000	$4.694215200000000\text{x}10^{-8}$
RKDF4	1.00502518868438100000	$3.068000000000000\text{x}10^{-12}$
RKDS1	1.00502654096997600000	$1.352288664000000\text{x}10^{-6}$
RKDS2	1.00502518866906800000	$1.224420000000000\text{x}10^{-11}$

ตารางที่ 8.5 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 1.00502518870000000000$	
	Calculated y	Error
RKDS3	1.00502518867882200000	$2.490000000000000 \times 10^{-12}$
RKDS4	1.00502518868430000000	$2.987000000000000 \times 10^{-12}$
RKYA1	1.00509094484723900000	$6.575616592700000 \times 10^{-5}$
RKYA2	1.00503588135948700000	$1.069267817500000 \times 10^{-5}$
RKYA3	1.00502432977367800000	$8.589076340000000 \times 10^{-7}$
RKYA4	1.00502521806781400000	$2.938650100000000 \times 10^{-8}$
RKYB1	1.00471253763379600000	$3.126510475160000 \times 10^{-4}$
RKYB2	1.00502518865165700000	$2.965500000000000 \times 10^{-11}$
RKYB3	1.00502518865261600000	$2.869600000000000 \times 10^{-11}$
RKYB4	1.00502518881842200000	$1.368330000000000 \times 10^{-10}$
N21	1.00502518865887636000	$2.243583097000000 \times 10^{-11}$
N22	1.00502518864925383000	$3.205835597000000 \times 10^{-11}$
N31	1.00502518868130841000	$3.774476000000000 \times 10^{-15}$
N32	1.00502518868984669000	$8.534506430000000 \times 10^{-12}$
N41	1.00502518868131152000	$6.661300000000000 \times 10^{-16}$
OP1	1.00502518862997900000	$5.13330000000000 \times 10^{-11}$
OP2	1.00502518804315560000	$7.69966312900000 \times 10^{-11}$
OP3	1.00502518843121075000	$2.49901432880000 \times 10^{-10}$
OP4	1.00502518824985709000	$1.009555027242648 \times 10^{-5}$
PS1	1.00502518864925400000	$3.20580000000000 \times 10^{-11}$
PS2	1.00502518866849000000	$1.28220000000000 \times 10^{-11}$
PS3	1.00502518864283200000	$3.84800000000000 \times 10^{-11}$
PS4	1.00502518865566700000	$2.56450000000000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 8.6 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x=1.0, h=0.0001$ $y=2.414213562372161000000$	
	Calculated y	Error
Euler	2.41263549212664900000	$1.578070245512000\text{x}10^{-2}$
Taylor2	2.41433568183712800000	$1.221194649660000\text{x}10^{-4}$
Taylor3	2.41433614037429100000	$1.225780021290000\text{x}10^{-4}$
Taylor4	2.41495339520652100000	$7.398328343600000\text{x}10^{-4}$
RK2	2.41421341464646044000	$1.477257010051900\text{x}10^{-7}$
RK3	2.41421356236312956000	$9.031886350000000\text{x}10^{-12}$
RK4	2.41421356236957152000	$2.589928240000000\text{x}10^{-12}$
RKN 2	2.41421307009709540000	$4.922750660441000\text{x}10^{-7}$
RKN 3	2.41421356197544901000	$3.967124406800000\text{x}10^{-10}$
RKN 4	2.41421356236957152000	$2.934616993900000\text{x}10^{-10}$
RU1	2.41431123299940400000	$9.767062724200000\text{x}10^{-5}$
RU2	2.41421357116107460000	$8.788913152810000\text{x}10^{-9}$
RU3	2.41421396098765317000	$3.986154917257100\text{x}10^{-7}$
RU4	2.41425591135437001000	$4.234898220856209\text{x}10^{-5}$
RL1	2.41811836608313468000	$9.519628902676658\text{x}10^{-5}$
RL2	2.41421356132896747000	$1.043193975650000\text{x}10^{-9}$
RL3	2.41421366425507378000	$1.018829123289300\text{x}10^{-7}$
RL4	2.41417127904808204000	$4.228332407940627\text{x}10^{-5}$
RKG2	2.41367233240587264000	$2.614749350371400\text{x}10^{-4}$
RKG3	2.41421360727975598000	$4.490759453191000\text{x}10^{-8}$
RKG4	2.41421330089722641000	$4.228332407940627\text{x}10^{-5}$
RKDF1	2.41365264198853513000	$5.609203836263176\text{x}10^{-4}$
RKDF2	2.41421343266487520000	$1.297072862449500\text{x}10^{-7}$
RKDF3	2.41422807617378776000	$1.451380162631466\text{x}10^{-5}$
RKDF4	2.41421359135932612000	$2.898716466859000\text{x}10^{-8}$
RKDS1	2.41391216181717638000	$3.010100549850651\text{x}10^{-4}$
RKDS2	2.41421344693808804000	$1.115434073411080\text{x}10^{-7}$

ตารางที่ 8.6 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=1.0 และ h=0.0001

	$x = 1.0, h = 0.0001$ $y = 2.41421356237216100000$	
	Calculated y	Error
RKDS3	2.41421353877160039000	2.360050106099000x10^{-8}
RKDS4	2.41421359482019016000	3.244802870839000x10^{-8}
RKYA1	2.49304745393684701000	7.883389156468556x10^{-2}
RKYA2	2.42664865439486910000	1.243509202270765x10^{-2}
RKYA3	2.41322455654703338000	9.903984373424989x10^{-4}
RKYA4	2.41424714844485067000	3.358607268921787x10^{-5}
RKYB1	2.11915734019101443000	0.295056222181147 x10^{-7}
RKYB2	2.41421331319571975000	2.491764417023000x10^{-7}
RKYB3	2.41421331630194524000	2.460702162032600x10^{-7}
RKYB4	2.41421350726066652000	5.511149492321000x10^{-8}
N21	2.41421334351819183000	2.1881539696135200x10^{-7}
N22	2.41421327239291328000	2.899192481692000x10^{-7}
N31	2.41421356231524431000	5.691713767000000x10^{-11}
N32	2.41421364310000275000	8.072784130064000x10^{-8}
N41	2.41421356237274187000	5.804246000000000x10
OP1	2.41421312981290700000	4.3255925400000000x10^{-7}
OP2	2.41412913533581690000	6.4883857975317000x10^{-7}
OP3	2.41421347443566559000	8.7936495862810000x10^{-8}
OP4	2.41421332671100242000	9.9409957152607475x10^{-4}
PS1	2.41421327239291300000	2.8997924800000000x10^{-7}
PS2	2.41421341464646000000	1.4772570100000000x10^{-7}
PS3	2.41421319851834400000	3.6385381000000000x10^{-7}
PS4	2.41421331981075800000	2.4256140300000000x10^{-7}

ปัญหาที่ 8.3 $y' = y^3, x \in [0,10]$ โดยที่ $y(0) = 0.1$

ผลเฉลยที่แท้จริงคือ $y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2(50-x)}}$

ตารางที่ 8.7 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
Euler	0.10010000000000000000	$1.502504380000000 \times 10^{-7}$
Taylor2	0.10010015000000000000	$2.504380000000000 \times 10^{-10}$
Taylor3	0.10010015025000000000	$4.380000000000000 \times 10^{-13}$
Taylor4	0.10010015025043800000	$1.000000000000000 \times 10^{-15}$
RK2	0.10010015015005000000	$1.003880000000000 \times 10^{-10}$
RK3	0.10010015025400768000	$3.752554000000000 \times 10^{-14}$
RK4	0.10010015025043829400	0.000000000000000
RKN 2	0.10010015012361170300	$1.268265909000000 \times 10^{-10}$
RKN 3	0.10010015025033453000	$1.037642200000000 \times 10^{-13}$
RKN 4	0.10010015025040773500	$3.055889000000000 \times 10^{-14}$
RU1	0.10010015938390200000	$9.133464000000000 \times 10^{-9}$
RU2	0.10010015025074100000	$3.030000000000000 \times 10^{-13}$
RU3	0.10010015030586900000	$5.543100000000000 \times 10^{-11}$
RU4	0.10010015429941900000	$4.048981000000000 \times 10^{-9}$
RL1	0.10010014105537000000	$9.195068000000000 \times 10^{-9}$
RL2	0.10010015024976800000	$6.700000000000000 \times 10^{-13}$
RL3	0.10010015031356200000	$6.312300000000000 \times 10^{-11}$
RL4	0.10010014624039700000	$4.010042000000000 \times 10^{-9}$
RKG2	0.10010007503750600000	$7.521293200000000 \times 10^{-8}$
RKG3	0.10010015028167672200	$3.123842851000000 \times 10^{-11}$
RKG4	0.10010015008564220100	$1.647960934400000 \times 10^{-10}$
RKYA1	0.10010145687160500000	$1.306621167000000 \times 10^{-8}$
RKYA2	0.10010036122024000000	$2.109698010000000 \times 10^{-11}$

ตารางที่ 8.7 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x=0.1, h=0.1$ $y=0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
RKYA3	0.10010013312060800000	$1.712983000000000\text{x}10^{-10}$
RKYA4	0.10010015068208200000	$4.316440000000000\text{x}10^{-6}$
RKYB1	0.10009395738305900000	$6.192867380000000\text{x}10^{-7}$
RKYB2	0.10010015009870200000	$1.517370000000000\text{x}10^{-8}$
RKYB3	0.10010015009996500000	$1.504740000000000\text{x}10^{-10}$
RKYB4	0.10010015010324300000	$1.471950000000000\text{x}10^{-6}$
RKDF1	0.10030027807072300000	$2.001278202840000\text{x}10^{-4}$
RKDF2	0.10010015016995600000	$8.048200000000000\text{x}10^{-11}$
RKDF3	0.10010015161593600000	$1.365498000000000\text{x}10^{-9}$
RKDF4	0.10010015026841200000	$1.797400000000000\text{x}10^{-11}$
RKDS1	0.10037640603566500000	$2.762557852270000\text{x}10^{-4}$
RKDS2	0.10010015017893800000	$7.150000000000000\text{x}10^{-11}$
RKDS3	0.10010015023576600000	$1.467200000000000\text{x}10^{-11}$
RKDS4	0.10010015027091700000	$2.047900000000000\text{x}10^{-11}$
N21	0.10010015011252812500	$1.379101694000000\text{x}10^{-10}$
N22	0.10010015007501250900	$1.754257850100000\text{x}10^{-10}$
N31	0.10010015025029321600	$1.450783900000000\text{x}10^{-13}$
N32	0.10010015030026893400	$4.983063961000000\text{x}10^{-11}$
N41	0.10010015025043829400	0.000000000000000
	$x=0.1, h=0.01$ $y=0.100100150250438$	
	Calculated y	Error
OP1	0.10010014105537000000	$2.500000000000000\text{x}10^{-14}$
OP2	0.10010015024976800000	$3.735900000000000\text{x}10^{-14}$
OP3	0.10010013424322017400	$1.600721812045000\text{x}10^{-8}$
OP4	0.10010012143572726000	$9.999975318974333\text{x}10^{-6}$

ตารางที่ 8.7 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.1 กับ h=0.01

	$x = 0.1, h = 0.1$ $y = 0.10010015025043829400$	
	Calculated y	Error
PS1	0.10010015024868000000	$1.758000000000000\text{x}10^{-12}$
PS2	0.10010015024943300000	$1.005000000000000\text{x}10^{-12}$
PS3	0.10010015024817700000	$2.261000000000000\text{x}10^{-12}$
PS4	0.10010015024893100000	$1.507000000000000\text{x}10^{-12}$

ตารางที่ 8.8 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	0.10010015009983700000	$1.506010000000000\text{x}10^{-10}$
Taylor2	0.10010015025043800000	$5.043800000000000\text{x}10^{-11}$
Taylor3	0.10010015025043900000	$5.043900000000000\text{x}10^{-11}$
Taylor4	0.10010015025043900000	$5.043900000000000\text{x}10^{-11}$
RK2	0.10010049949838000000	$3.492983800000000\text{x}10^{-7}$
RK3	0.10010015025043861300	$3.191900000000000\text{x}10^{-16}$
RK4	0.10010015025043861300	$3.191900000000000\text{x}10^{-16}$
RKN 2	0.10010015025038668200	$5.161149000000000\text{x}10^{-14}$
RKN 3	0.10010015025043857200	$2.775600000000000\text{x}10^{-16}$
RKN 4	0.10010015025043858500	$2.914300000000000\text{x}10^{-16}$
RU1	0.10010015025977500000	$9.336000000000000\text{x}10^{-12}$
RU2	0.10010015025058100000	$1.430000000000000\text{x}10^{-13}$
RU3	0.10010015025049400000	$5.600000000000000\text{x}10^{-14}$
RU4	0.10010015025447000000	$4.032000000000000\text{x}10^{-12}$
RL1	0.10010015024139100000	$9.047000000000000\text{x}10^{-12}$
RL2	0.10010015025043900000	$5.043900000000000\text{x}10^{-11}$
RL3	0.10010015025043900000	$5.043900000000000\text{x}10^{-11}$

ตารางที่ 8.8 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x = 0.1, h = 0.0001$ $y = 0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
RL4	0.10010015024640600000	$4.032000000000000 \times 10^{-12}$
RKG2	0.10010015017513800000	$7.530100000000000 \times 10^{-11}$
RKG3	0.10010015025043879400	$4.996000000000000 \times 10^{-16}$
RKG4	0.10010015025043926500	$9.714500000000000 \times 10^{-16}$
RKYA1	0.10010144001526800000	$1.289764829000000 \times 10^{-6}$
RKYA2	0.10010036285795400000	$2.126075160000000 \times 10^{-7}$
RKYA3	0.10010013321601800000	$1.703442000000000 \times 10^{-8}$
RKYA4	0.10010015083253600000	$5.820980000000000 \times 10^{-10}$
RKYB1	0.10093965379479000000	$6.184870960000000 \times 10^{-6}$
RKYB2	0.10010015025036500000	$7.300000000000000 \times 10^{-14}$
RKYB3	0.10010015025037700000	$6.100000000000000 \times 10^{-14}$
RKYB4	0.10010015025366500000	$3.227000000000000 \times 10^{-12}$
RKDF1	0.10010028329991000000	$1.33049472000000 \times 10^{-7}$
RKDF2	0.10010015025043900000	0.000000000000000
RKDF3	0.10010015025182400000	$1.386000000000000 \times 10^{-12}$
RKDF4	0.10010015025043900000	0.0000000000000000
RKDS1	0.10010031727680000000	$1.670263610000000 \times 10^{-7}$
RKDS2	0.10010015025043900000	0.000000000000000
RKDS3	0.10010015025043900000	0.000000000000000
RKDS4	0.10010015025042800000	$1.000000000000000 \times 10^{-14}$
N21	0.10010015075043848800	$1.942900000000000 \times 10^{-16}$
N22	0.10010015025043848800	$1.942900000000000 \times 10^{-16}$
N31	0.10010015025043861300	$3.191900000000000 \times 10^{-16}$
N32	0.10010015025043864100	$3.469400000000000 \times 10^{-16}$
N41	0.10010015025043861300	$3.191900000000000 \times 10^{-16}$
OP1	0.10010015025043800000	0.000000000000000

ตารางที่ 8.8 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=0.1 และ h=0.0001

	$x=0.1, h=0.0001$ $y=0.10010015020000000000$	
	Calculated y	Error
OP2	0.10010025055134054400	$2.498000000000\times10^{-16}$
OP3	0.10010015005043536300	$2.000029308800\times10^{-10}$
OP4	0.10010014996250006500	$1.0001266277648\times10^{-7}$
PS1	0.10010015025043800000	0.000000000000000
PS2	0.10010015025043800000	0.000000000000000
PS3	0.10010015025043800000	0.000000000000000
PS4	0.10010015025043800000	0.000000000000000

ตารางที่ 8.9 แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x=10.0, h=0.0001$ $y=0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
Euler	2.23087922976991800000	$5.188753688733000\times10^{-3}$
Taylor2	0.11180353862945800000	$2.800000000000000\times10^{-14}$
Taylor3	0.11180353862950100000	$1.500000000000000\times10^{-14}$
Taylor4	0.11180353862950100000	$1.500000000000000\times10^{-14}$
RK2	0.11180339887497300000	$3.000000000000000\times10^{-15}$
RK3	0.11180353862950073700	$1.454392000000000\times10^{-14}$
RK4	0.11180353862950073700	$1.454392000000000\times10^{-14}$
RKN 2	0.11180339886696243100	$1.311795000000000\times10^{-12}$
RKN 3	0.11180339887498208500	$6.536440000000000\times10^{-15}$
RKN 4	0.11180339887498382000	$8.271160000000000\times10^{-15}$
RU1	0.11180354007949200000	$1.450005000000000\times10^{-9}$
RU2	0.11180353864934500000	$1.985800000000000\times10^{-11}$
RU3	0.11180353863810900000	$8.622000000000000\times10^{-12}$
RU4	0.11180353925569800000	$6.262000000000000\times10^{-10}$

ตารางที่ 8.9 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.1118033398000000000$	
	Calculated y	Error
RL1	0.11180353722441500000	$1.405071000000000 \times 10^{-9}$
RL2	0.11180353862950100000	$1.500000000000000 \times 10^{-14}$
RL3	0.11180353862951500000	$2.900000000000000 \times 10^{-14}$
RL4	0.11180353800330500000	$6.261770000000000 \times 10^{-10}$
RKG2	0.11180352693486900000	$1.169461700000000 \times 10^{-8}$
RKG3	0.11180353862953740200	$5.122291000000000 \times 10^{-14}$
RKG4	0.11180339887510443200	$1.288830200000000 \times 10^{-13}$
RKYA1	0.11198368198948100000	$1.801408776010000 \times 10^{-4}$
RKYA2	0.11183317440750200000	$2.963577801600000 \times 10^{-5}$
RKYA3	0.11180102545654200000	$2.373418434000000 \times 10^{-6}$
RKYA4	0.11180347998178700000	$8.110681100000000 \times 10^{-8}$
RKYB1	0.11095138786404000000	$8.520110109360000 \times 10^{-4}$
RKYB2	0.11180353861929500000	$1.019100000000000 \times 10^{-11}$
RKYB3	0.11180339886654900000	$8.427000000000000 \times 10^{-12}$
RKYB4	0.11180339932462600000	$4.496500000000000 \times 10^{-10}$
RKDF1	0.11182098470696300000	$1.758583198700000 \times 10^{-5}$
RKDF2	0.11180339887497600000	0.000000000000000
RKDF3	0.11180339909022900000	$2.152530000000000 \times 10^{-10}$
RKDF4	0.11180353862950400000	$1.800000000000000 \times 10^{-14}$
RKDS1	0.11182547728382400000	$2.207840884900000 \times 10^{-5}$
RKDS2	0.11180339887497700000	$2.000000000000000 \times 10^{-15}$
RKDS3	0.11180353862949800000	$1.200000000000000 \times 10^{-14}$
RKDS4	0.11180353862810600000	$1.381000000000000 \times 10^{-12}$
N21	0.11180339887496612600	$9.423020000000000 \times 10^{-15}$
N22	0.11180339887495943700	$1.611211000000000 \times 10^{-14}$
N31	0.11180339887499010600	$1.455780000000000 \times 10^{-14}$
N32	0.11180339887499936300	$2.381428000000000 \times 10^{-14}$

ตารางที่ 8.9 (ต่อ) แสดงค่าที่คำนวณได้และค่าความผิดพลาดของวิธีการต่างๆที่ x=10.0 และ h=0.0001

	$x = 10.0, h = 0.0001$ $y = 0.11180339800000000000$	
	Calculated y	Error
N41	0.11180339887499010600	$1.455780000000000 \times 10^{-14}$
OP1	0.11180339887494800000	$2.700000000000000 \times 10^{-14}$
OP2	0.11180339887492439500	$5.115353000000000 \times 10^{-14}$
OP3	0.11180337824699698700	$2.062797857527000 \times 10^{-8}$
OP4	0.11180336443849357700	$1.053175045784300 \times 10^{-7}$
PS1	0.11180339887495900000	$1.600000000000000 \times 10^{-14}$
PS2	0.11180339887497300000	$3.000000000000000 \times 10^{-15}$
PS3	0.11180339887495100000	$2.400000000000000 \times 10^{-14}$
PS4	0.11180339887496400000	$1.200000000000000 \times 10^{-14}$

หมายเหตุ:

Euler แทนระเบียบวิธี Euler

Taylor2 แทนระเบียบวิธี Taylor อันดับ 2

Taylor3 แทนระเบียบวิธี Taylor อันดับ 3

Taylor4 แทนระเบียบวิธี Taylor อันดับ 4

RK2 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 2

RK3 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 3

RK4 แทนระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา อันดับ 4

RKN 2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 1 (ค่าจุดถ่วงของรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์) ในอันดับที่ 2

RKN 3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 1 (ค่าจุดถ่วงของรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์) ในอันดับที่ 3

RKN 4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 1 (ค่าจุดถ่วงของรูปแบบของเกาส์-เลอจองด์) ในอันดับที่ 4

RU1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x) = \sqrt{1+x^2}$) ในอันดับที่ 1

RU2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\sqrt{1+x^2}$) ในอันดับที่ 2

RU3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\sqrt{1+x^2}$) ในอันดับที่ 3

RU4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\sqrt{1+x^2}$) ในอันดับที่ 4

RL1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$) ในอันดับที่ 1

RL2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$) ในอันดับที่ 2

RL3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$) ในอันดับที่ 3

RL4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 2 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$) ในอันดับที่ 4

RKG2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 3 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1$) ในอันดับที่ 2

RKG3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 3 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1$) ในอันดับที่ 3

RKG4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 3 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1$) ในอันดับที่ 4

RKYA1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x^2$) ในอันดับที่ 1

RKYA2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x^2$) ในอันดับที่ 2

RKYA3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x^2$) ในอันดับที่ 3

RKYA4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x^2$) ในอันดับที่ 4

RKYB1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$) ในอันดับที่ 1

RKYB2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$) ในอันดับที่ 2

RKYB3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$) ในอันดับที่ 3

RKYB4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 4 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$) ในอันดับที่ 4

RKDF1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$) ในอันดับที่ 1

RKDF2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$) ในอันดับที่ 2

RKDF3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$) ในอันดับที่ 3

RKDF4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=\dfrac{1}{1+x}$) ในอันดับที่ 4

RKDS1 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x$) ในอันดับที่ 1

RKDS2 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x$) ในอันดับที่ 2

RKDS3 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x$) ในอันดับที่ 3

RKDS4 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 5 (ค่าจุดถ่วง $w(x)=1+x$) ในอันดับที่ 4

N21 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยรูปแบบนิวตัน-โค้ด อันดับที่ 2 วิธีที่ 1

N22 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยรูปแบบนิวตัน-โค้ด อันดับที่ 2 วิธีที่ 2

N31 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยรูปแบบนิวตัน-โค้ต อันดับที่ 3 วิธีที่ 1

N32 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยรูปแบบนิวตัน-โค้ต อันดับที่ 3 วิธีที่ 2

N41 แทนการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยรูปแบบนิวตัน-โค้ต อันดับที่ 4 วิธีที่ 1

OP1 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 1 ในอันดับที่ 1

OP2 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 1 ในอันดับที่ 2

OP3 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 1 ในอันดับที่ 3

OP4 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 1 ในอันดับที่ 4

PS 1 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 1

PS 2 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 2

PS 3 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 3

PS 4 แทนการประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์รูปแบบที่ 2 ในอันดับที่ 4

บทที่ 9
บทสรุปและข้อเสนอแนะ

9.1 สรุปผลการศึกษา

ปัญหาพิเศษเรื่องการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญนี้ ได้ทำการรวบรวมวิธีการต่างๆ ที่มีอยู่ในปัจจุบัน รวมทั้งทำการนำเสนอสูตรที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญของปัญหาค่าเริ่มต้น วิธีการสร้างสมการที่ใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และมีปัญหาแสดงผลเฉลยที่ได้จากรูปแบบต่างๆ ทั้งยังแสดงค่าความคลาดเคลื่อนของทุกรูปแบบด้วย จากนั้นได้ทำการเปรียบเทียบถึงวิธีการต่างๆ ว่าวิธีไหนสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่มีค่าผลเฉลยใกล้เคียงค่าจริงมากที่สุด

ซึ่งจากที่ได้ทำการศึกษาสามารถสรุปได้ว่า วิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉากรูปแบบที่ 3 (RKG) เป็นวิธีที่ได้ค่าผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าที่แท้จริงมากที่สุดหรือได้ค่าความผิดพลาดที่อยู่ในรูปแบบ $O(h^{s+2})$ ซึ่งวิธีอื่นๆ จะมีค่าความผิดพลาดเพียง $O(h^{s+1})$

โดยที่ h คือ ความกว้างของแต่ละช่วง

s คือ จำนวนจุดในรูปแบบ

ตัวอย่างที่นำเสนอมีรูปแบบที่คลอบคลุมของรูปแบบต่างๆ ของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญแบบค่าเริ่มต้นแล้ว นั่นคือมีทั้งรูปแบบทั่วไป รูปแบบชัดแจ้งและรูปแบบอิสระ

การรวบรวมวิธีการต่างๆ ที่ใช้สำหรับหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญทำให้ผู้รวบรวมมีความรู้ความเข้าใจเพิ่มในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์มากขึ้น รวมทั้งผู้ที่สนใจสามารถที่จะเข้าใจในรูปแบบวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาค่าเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์และยังสามารถนำไปพัฒนาต่อได้อีกด้วย

9.2 ข้อเสนอแนะ

1. ผู้พัฒนาสามารถหาอันดับของรูปแบบต่างๆ ให้ที่มีจำนวนจุดในรูปแบบมากขึ้น เนื่องจากจำนวนจุดยิ่งมากขึ้นจะยิ่งสามารถทำให้ค่าความผิดพลาดลดน้องลง

2. พัฒนาโดยหารูปแบบอื่นที่สามารถนำมาปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเพื่อให้ผลเฉลยที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าผลเฉลยที่แท้จริง

บรรณานุกรม

ผศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข. 2546. **การวิเคราะห์เชิงตัวเลขพื้นฐาน** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

ผศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข. 2546. **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

สิริรัตน์ ขันติดิลกวงษา. 2547. **การนำรูปแบบเกาส์-เลอจองด์ไปใช้ปรับปรุงระเบียบวิธีรูงเง-คุตตา**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

สมสกุล พุ่มมาก. 2547. **การนำรูปแบบนิวตัน-โค้ตไปใช้ในระเบียบวิธีรูงเง-คุตตา**. กรุงเทพฯ : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.

Mitree Podisuk and Sirikul Bunditsaovapak. 2547. **Some Orthogonal Polynomials**. Bangkok : King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

Mitree Podisuk Witchaya Rattanarneteewee and Decha Sarmana. 2547. **Applications of Orthogonal Polynamials**. Bangkok : King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

Mitree Podisuk and Somsakun Phummark. 2547. **Newton-Cote Formulas in Runge-Kutta**. Bangkok : King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

Mitree Podisuk and Wannaporn Sanprasert. 2547. **Open Formula of Integration Method**. Bangkok : King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

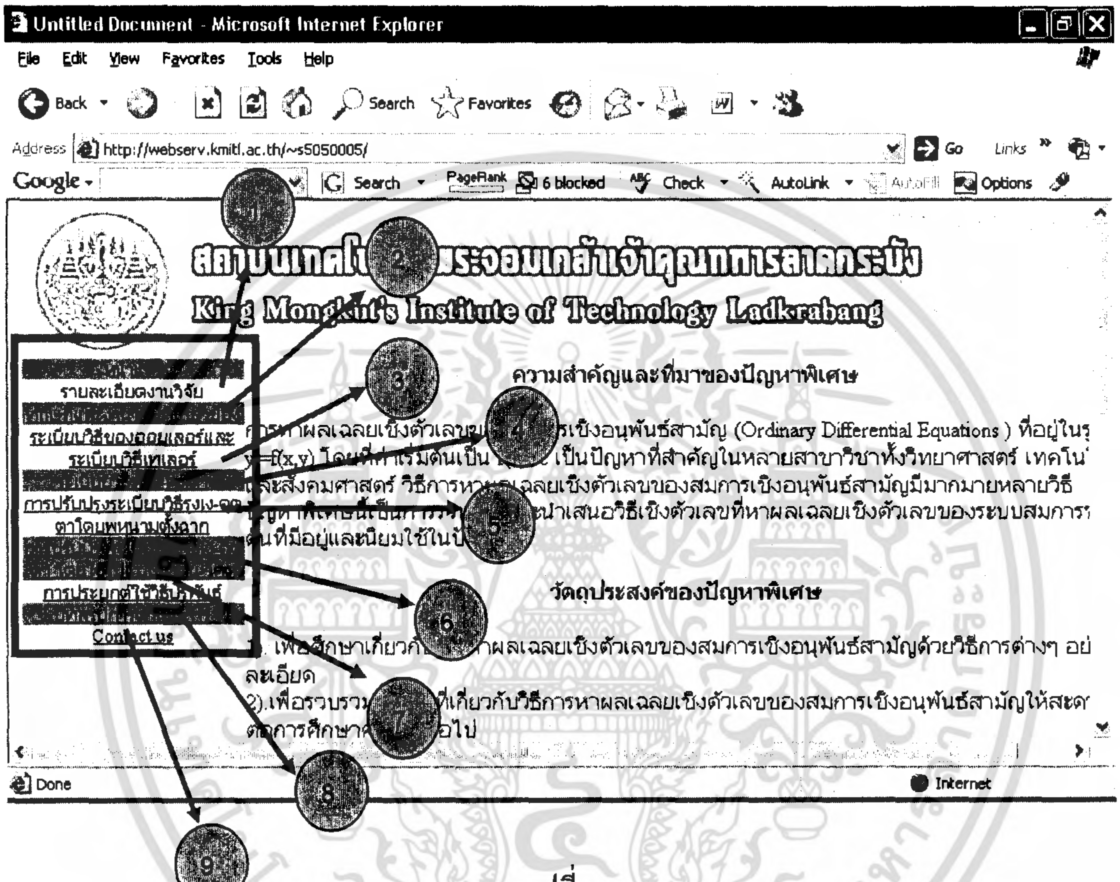
Ganokpan Songprasert. 2547. **Open Form of Runge-Kutta Method**. Bangkok : King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

Phimpraphai Phutthiwat. 2547. **Orthogonal Polynomials and Applications**. Bangkok : King Mongkut's Institute of Technology Chaokhuntaharn Ladkrabang.

ภาคผนวก

การใช้งานสามารถเข้าดูได้จากเว็บ http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005 โดยจะกล่าวถึงเนื้อหาของปัญหาพิเศษทั้งหมด โดยรูปแบบของหน้าหลักจะแสดงดังรูปที่ 1

ในหน้าแรกจะแสดงถึงความสำคัญและที่มา วัตถุประสงค์ ขอบเขต ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับและกิตติกรรมประกาศของการทำปัญหาพิเศษนี้ ทางด้านซ้ายมือจะสังเกตเห็นว่าจะมีปุ่มลิงค์ (Link) ไปยังหัวข้อต่างๆซึ่งเมื่อกดปุ่มนี้จะมีเนื้อหาของเรื่องนั้นแสดงขึ้นมา



รูปที่ 1

1. รายละเอียดงานวิจัย แสดงดังรูปที่ 1
2. ทฤษฎีงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง แสดงดังรูปที่ 2 ซึ่งแสดงเนื้อหาของปัญหาพิเศษในบทที่ 2
3. ระเบียบวิธีของออยเลอร์และระเบียบวิธีของเทย์เลอร์ แสดงดังรูปที่ 3 แสดงเนื้อหาของปัญหาพิเศษในบทที่ 3
4. ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา แสดงดังรูปที่ 4 แสดงเนื้อหาของปัญหาพิเศษในบทที่ 4
5. การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยพหุนามตั้งฉาก แสดงดังรูปที่ 5 แสดงเนื้อหาของปัญหาพิเศษในบทที่ 5
6. การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาโดยรูปแบบนิวตัน-โค้ต แสดงดังรูปที่ 6 แสดงเนื้อหาของ

ปัญหาพิเศษในบทที่ 6

7. การประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์ แสดงดังรูปที่ 7 แสดงเนื้อหาของปัญหาพิเศษในบทที่ 7
8. บทสรุปการดำเนินการ แสดงดังรูปที่ 8 แสดงเนื้อหาของปัญหาพิเศษในบทที่ 8
9. Contact us แสดงดังรูปที่ 9 เป็นส่วนที่ผู้ใช้ต้องการติดต่อกับผู้จัดทำ

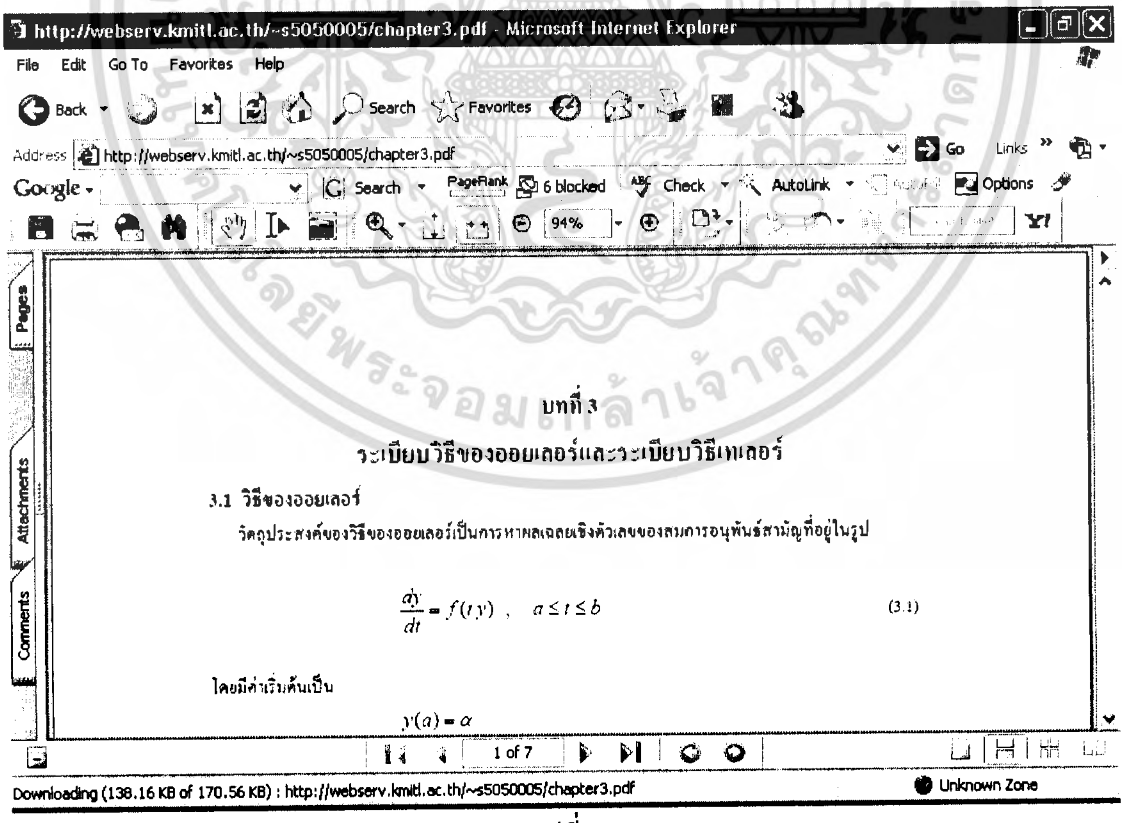
10. เชื่อมโยงไปยังระบบสารสนเทศของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง แสดง ดังรูปที่ 10
11. เชื่อมโยงไปยังการสืบค้นข้อมูลหอสมุดกลางของสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังแสดงดังรูปที่ 11
12. เชื่อมโยงไปสู่เว็บ http://www.math.com แสดงดังรูปที่ 12
13. เชื่อมโยงไปสู่เว็บ http://mathworld.wolfram.com แสดงดังรูปที่ 13
14. เชื่อมโยงไปสู่เว็บ http://www.planemath.com แสดงดังรูปที่ 14
15. เชื่อมโยงไปสู่เว็บ http://www.mathstories.com แสดงดังรูปที่ 15
16. เชื่อมโยงไปสู่เว็บ http://www.mathleague.com แสดงดังรูปที่ 16

*หมายเหตุ

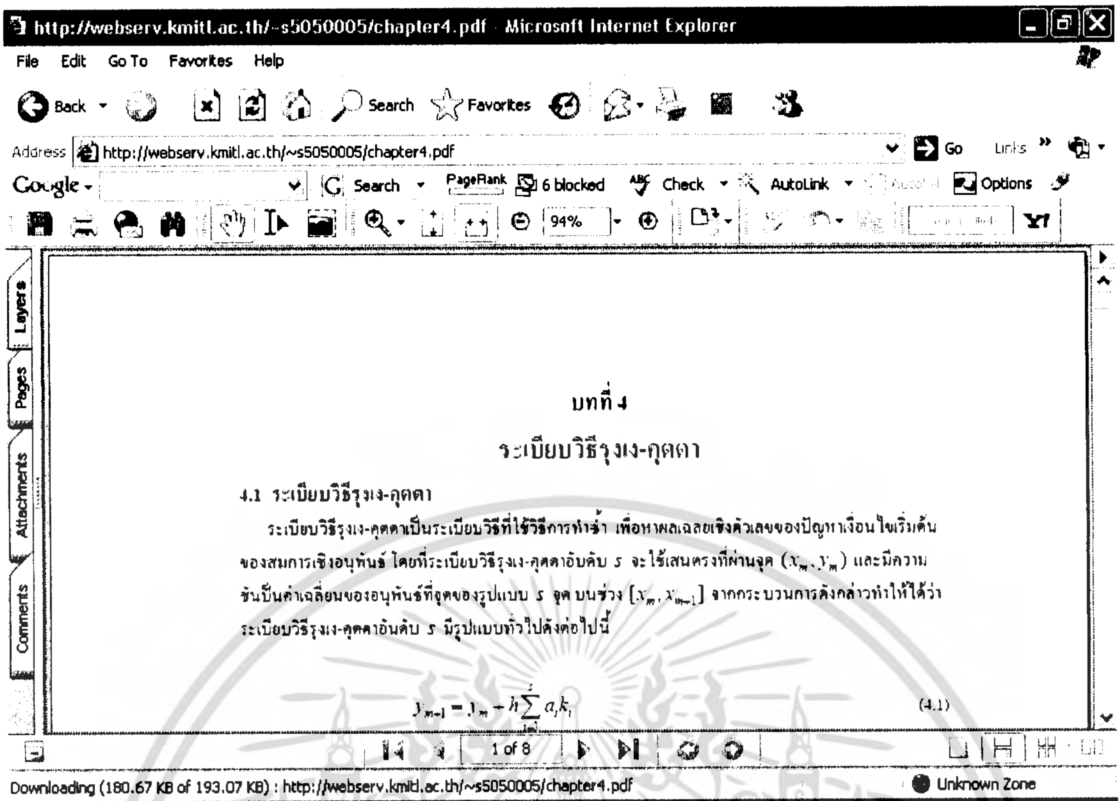
ในหัวข้อ 12- 16 เป็นเว็บที่หากผู้ใช้งานต้องการหาข้อมูลทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติม


http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter2.pdf - Microsoft Internet Explorer
File Edit Go To Favorites Help
Address http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter2.pdf
บทที่ 2
ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equations) ที่อยู่ในรูป
y' = f(x, y) (2.1)
โดยที่ค่าเริ่มต้นเป็น
y(a) = c (2.2)
1 of 10
Downloading (195.92 KB of 219.55 KB) : http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter2.pdf
Unknown Zone

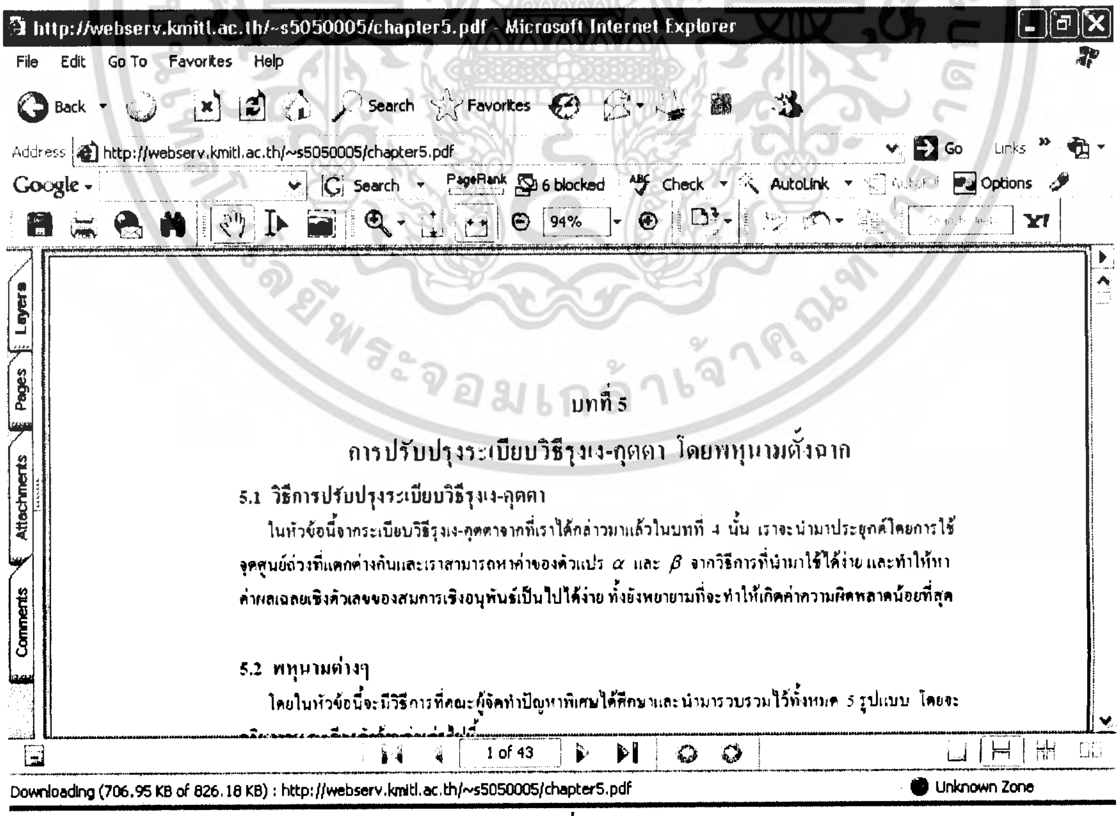
รูปที่ 2


http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter3.pdf - Microsoft Internet Explorer
File Edit Go To Favorites Help
Address http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter3.pdf
บทที่ 3
ระเบียบวิธีของออยเลอร์และระเบียบวิธีเทเลอร์
3.1 วิธีของออยเลอร์
วัตถุประสงค์ของวิธีของออยเลอร์เป็นการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการอนุพันธ์สามัญที่อยู่ในรูป
dy/dt = f(t, y) , a ≤ t ≤ b (3.1)
โดยมีค่าเริ่มต้นเป็น
y(a) = α
1 of 7
Downloading (138.16 KB of 170.56 KB) : http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter3.pdf
Unknown Zone

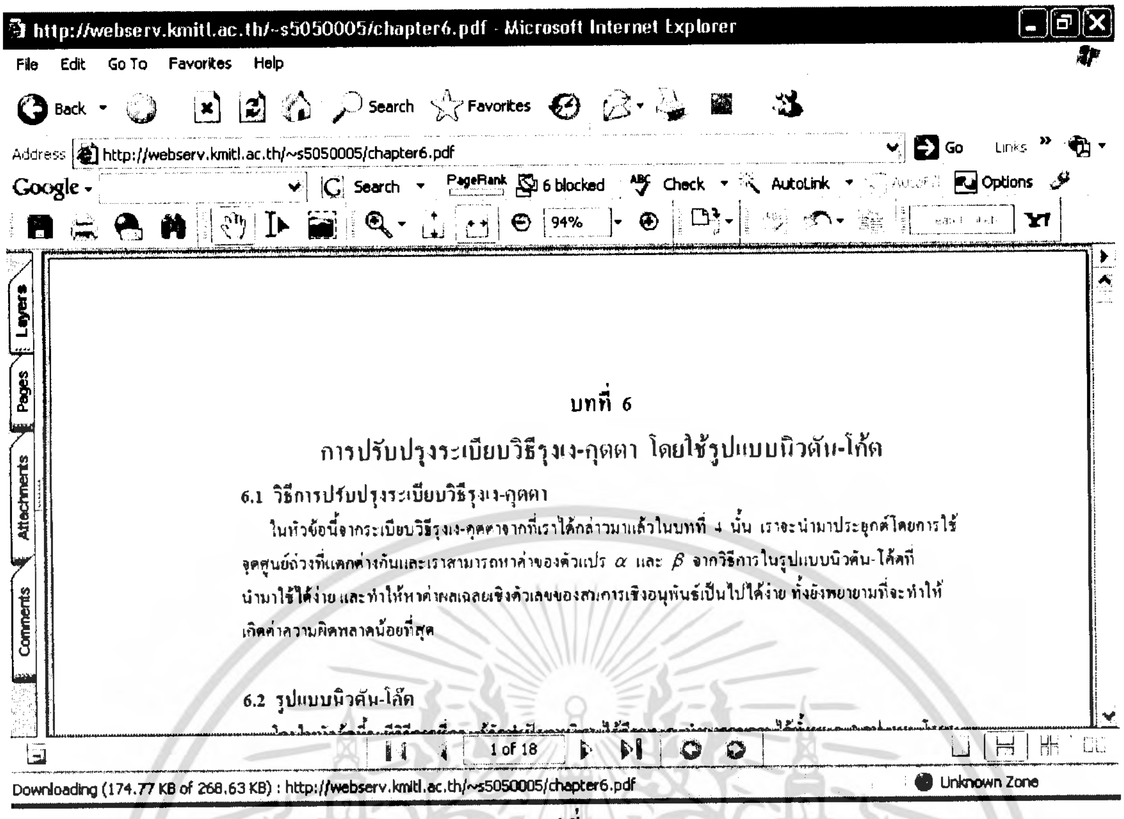
รูปที่ 3


http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter4.pdf - Microsoft Internet Explorer
Address http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter4.pdf
บทที่ 4
ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
4.1 ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาเป็นระเบียบวิธีที่ใช้วิธีการทำซ้ำ เพื่อหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ โดยที่ระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s จะใช้เส้นตรงที่ผ่านจุด (x_m, y_m) และมีความชันเป็นค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ที่จุดของรูปแบบ s จุด บนช่วง $[x_m, x_{m+1}]$ จากกระบวนการดังกล่าวทำให้ได้ว่าระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาอันดับ s มีรูปแบบทั่วไปดังต่อไปนี้
1 of 8
Downloading (180.67 KB of 193.07 KB) : http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter4.pdf
Unknown Zone

รูปที่ 4


http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter5.pdf - Microsoft Internet Explorer
Address http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter5.pdf
บทที่ 5
การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา โดยพหุนามตั้งฉาก
5.1 วิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-คุตตา
ในหัวข้อนี้จากระเบียบวิธีรุงเง-คุตตาจากที่เราได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 นั้น เราจะนำมาประยุกต์โดยการใช้จุดศูนย์ถ่วงที่แตกต่างกันและเราสามารถหาค่าของตัวแปร α และ β จากวิธีการที่นำมาใช้ได้ง่าย และทำให้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นไปได้ง่าย ทั้งยังพยายามที่จะทำให้เกิดค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด
5.2 พหุนามต่างๆ
โดยในหัวข้อนี้จะมีวิธีการที่คณะผู้จัดทำปัญหาพิเศษได้ศึกษาและนำมารวบรวมไว้ทั้งหมด 5 รูปแบบ โดยจะ
1 of 43
Downloading (706.95 KB of 826.18 KB) : http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter5.pdf
Unknown Zone

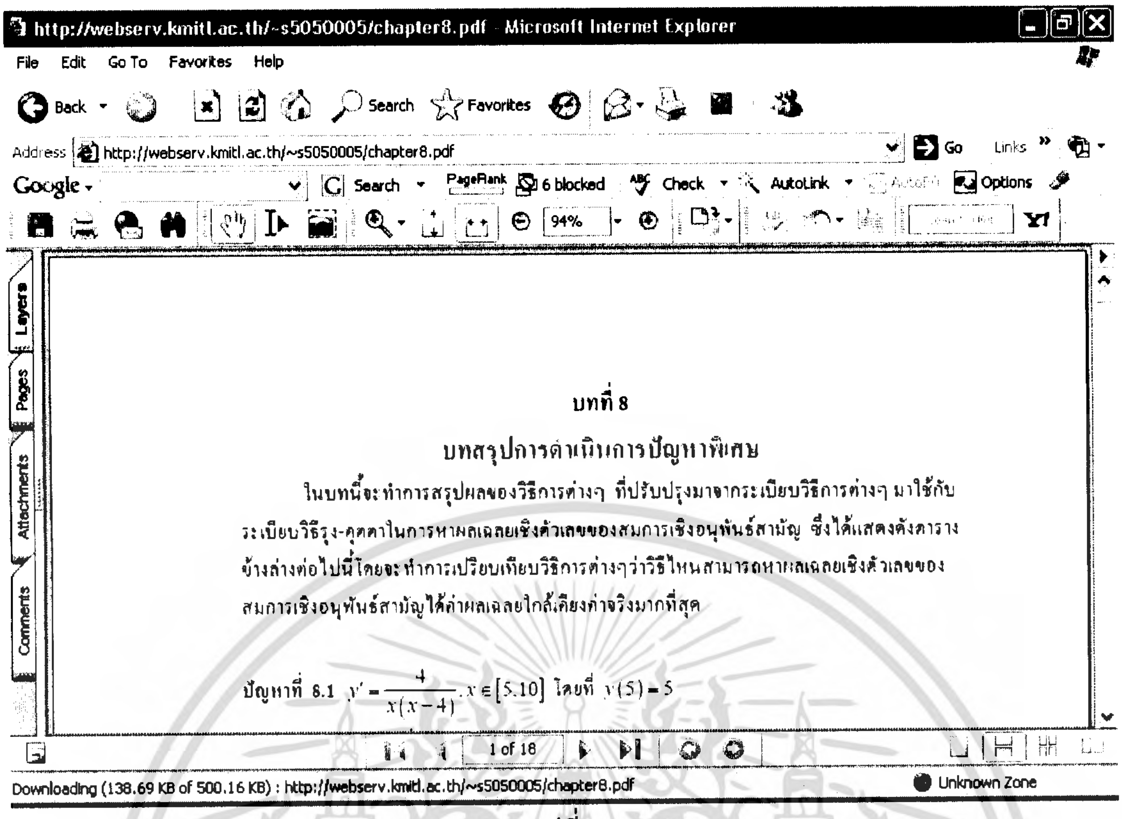
รูปที่ 5


http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter6.pdf - Microsoft Internet Explorer
File Edit Go To Favorites Help
Address http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter6.pdf
บทที่ 6
การปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา โดยใช้รูปแบบนิวตัน-โค้ต
6.1 วิธีการปรับปรุงระเบียบวิธีรุงเง-กุตตา
ในหัวข้อนี้จากระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาจากที่เราได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 นั้น เราจะนำมาประยุกต์โดยการใช้จุดศูนย์ถ่วงที่แตกต่างกันและเราสามารถหาค่าของตัวแปร α และ β จากวิธีการในรูปแบบนิวตัน-โค้ดที่นำมาใช้ได้ง่าย และทำให้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นไปได้ง่าย ทั้งยังพยายามที่จะทำให้เกิดค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด
6.2 รูปแบบนิวตัน-โค้ด
1 of 18
Downloading (174.77 KB of 268.63 KB) : http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter6.pdf
Unknown Zone

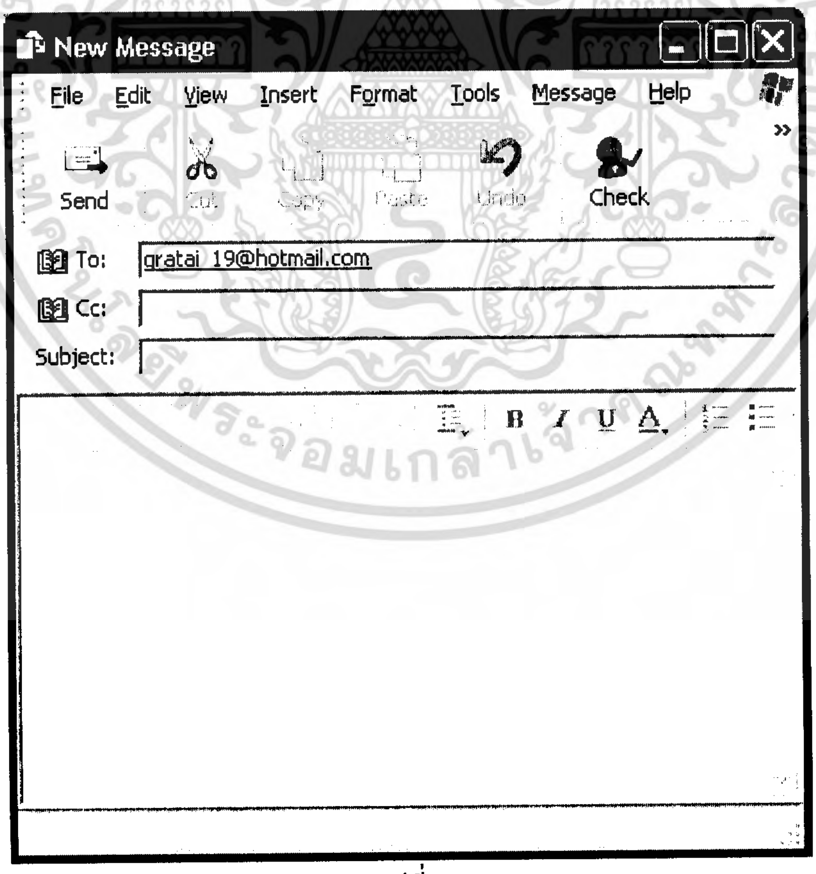
รูปที่ 6


http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter7.pdf - Microsoft Internet Explorer
File Edit Go To Favorites Help
Address http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter7.pdf
บทที่ 7
การประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์
7.1 การประยุกต์ใช้วิธีปริพันธ์
ในหัวข้อนี้จากระเบียบวิธีรุงเง-กุตตาจากที่เราได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 4 นั้น เราจะหาบนช่วงปิดแต่ในหัวข้อนี้จะแสดงให้เห็นทั้งชนิดปิดและเปิด เราจะนำมาประยุกต์โดยการใช้จุดศูนย์ถ่วงที่แตกต่างกันและเราสามารถหาค่าของตัวแปร α และ β จากวิธีการที่นำมาใช้ได้ง่าย และทำให้หาค่าผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์เป็นไปได้ง่าย ทั้งยังพยายามที่จะทำให้เกิดค่าความผิดพลาดน้อยที่สุด
7.2 รูปแบบการหาชนิดปิด-ชนิดเปิด
1 of 10
Downloading (140.52 KB of 229.20 KB) : http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter7.pdf
Unknown Zone

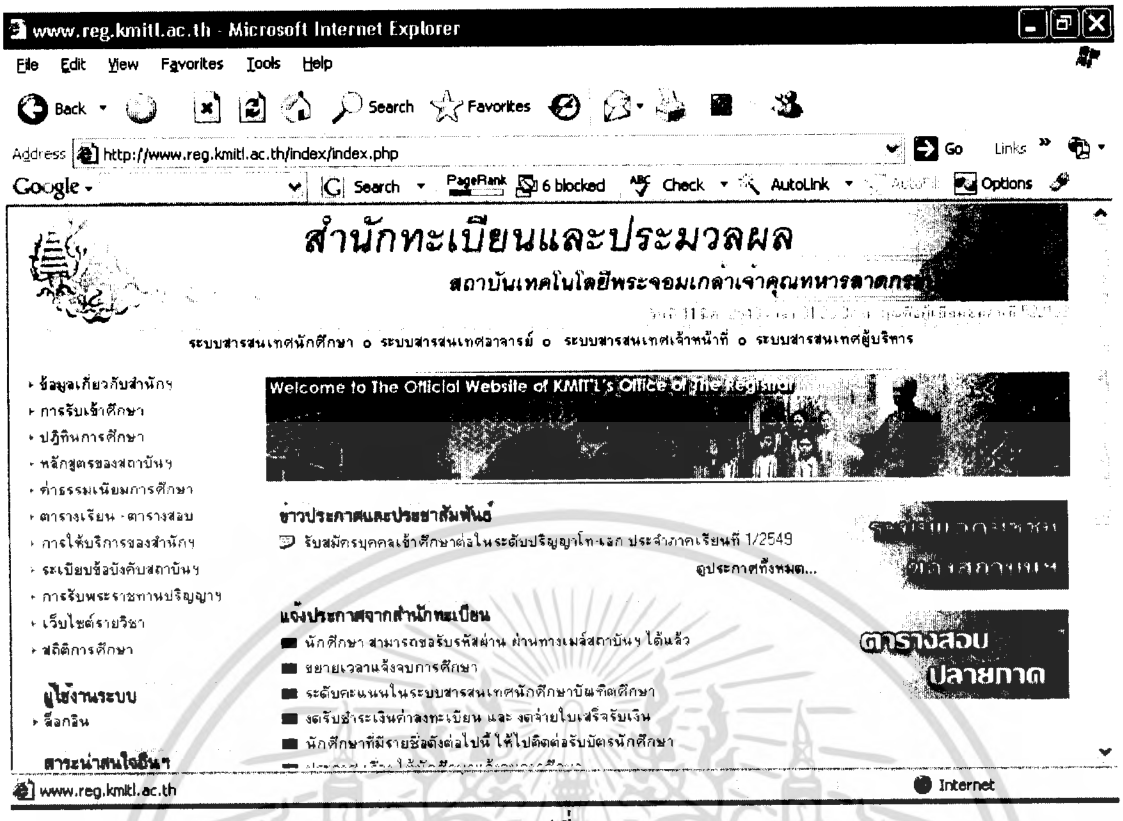
รูปที่ 7


http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter8.pdf - Microsoft Internet Explorer
File Edit Go To Favorites Help
Back Search Favorites
Address http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter8.pdf
Go Links
Google Search PageRank 6 blocked Check AutoLink Options
94%
Layers Pages Attachments Comments
บทที่ 8
บทสรุปการดำเนินการปัญหาพิเศษ
ในบทนี้จะทำการสรุปผลของวิธีการต่างๆ ที่ปรับปรุงมาจากระเบียบวิธีการต่างๆ มาใช้กับระเบียบวิธีรุง-คุตตาในการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งได้แสดงดังตารางข้างล่างต่อไปนี้โดยจะทำการเปรียบเทียบวิธีการต่างๆว่าวิธีไหนสามารถหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญได้ค่าผลเฉลยใกล้เคียงค่าจริงมากที่สุด
ปัญหาที่ 8.1 $y' = \frac{4}{x(x-4)}, x \in [5,10]$ โดยที่ $y(5) = 5$
1 of 18
Downloading (138.69 KB of 500.16 KB) : http://webserv.kmitl.ac.th/~s5050005/chapter8.pdf
Unknown Zone

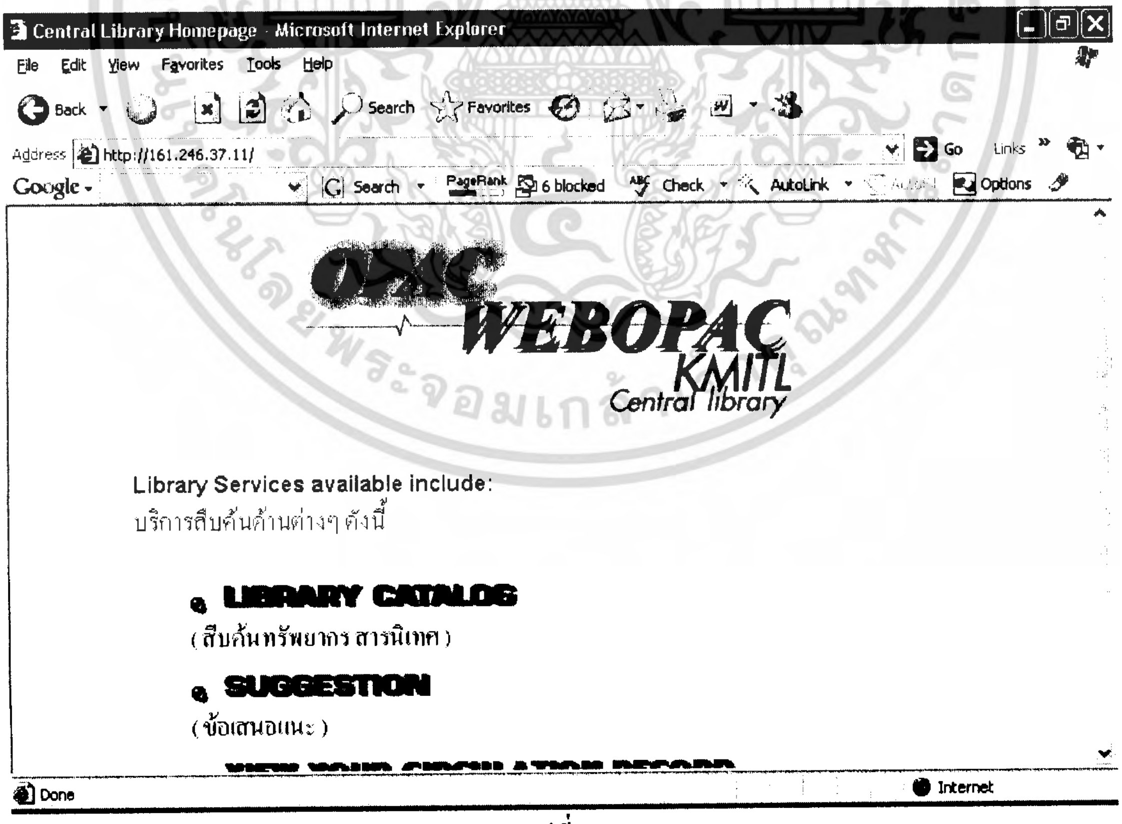
รูปที่ 8


New Message
File Edit View Insert Format Tools Message Help
Send
Cut
Copy
Paste
Undo
Check
To: gratai_19@hotmail.com
Cc:
Subject:

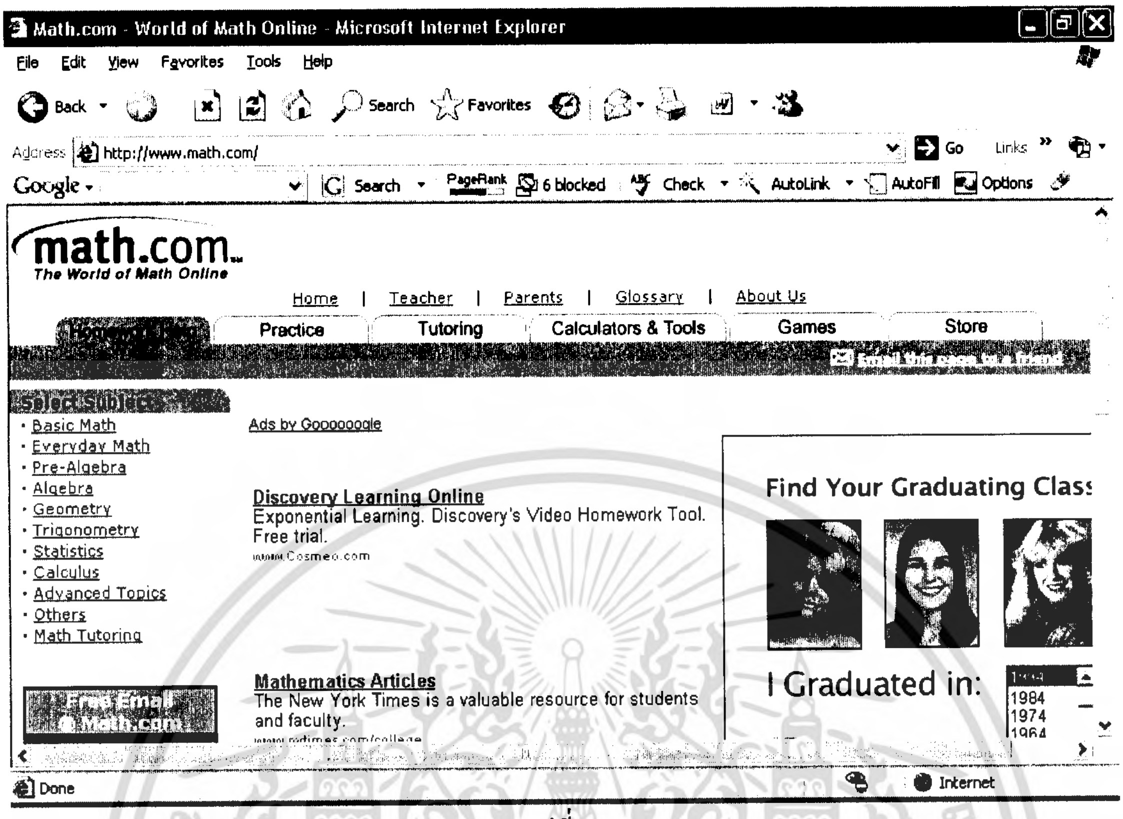
รูปที่ 9


www.reg.kmitl.ac.th - Microsoft Internet Explorer
File Edit View Favorites Tools Help
Address http://www.reg.kmitl.ac.th/index/index.php
สำนักทะเบียนและประมวลผล
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ระบบสารสนเทศนักศึกษา o ระบบสารสนเทศอาจารย์ o ระบบสารสนเทศเจ้าหน้าที่ o ระบบสารสนเทศผู้บริหาร
Welcome to The Official Website of KMITL's Office of the Registrar
ข้อมูลเกี่ยวกับสำนักฯ
การรับเข้าศึกษา
ปฏิทินการศึกษา
หลักสูตรของสถาบันฯ
ค่าธรรมเนียมการศึกษา
ตารางเรียน - ตารางสอบ
การให้บริการของสำนักฯ
ระเบียบข้อบังคับสถาบันฯ
การรับพระราชทานปริญญาฯ
เว็บไซต์รายวิชา
สถิติการศึกษา
ผู้ใช้งานระบบ
ล็อกอิน
สาระน่าสนใจอื่นๆ
ข่าวประกาศและประชาสัมพันธ์
รับสมัครบุคคลเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาโท-เอก ประจำภาคเรียนที่ 1/2549
ดูประกาศทั้งหมด...
แจ้งประกาศจากสำนักทะเบียน
นักศึกษา สามารถขอรับรหัสผ่าน ผ่านทางเมล์สถาบันฯ ได้แล้ว
ขยายเวลาแจ้งจบการศึกษา
ระดับคะแนนในระบบสารสนเทศนักศึกษาบัณฑิตศึกษา
งดรับชำระเงินค่าลงทะเบียน และ งดจ่ายใบเสร็จรับเงิน
นักศึกษาที่มีรายชื่อดังต่อไปนี้ ให้ไปติดต่อรับบัตรนักศึกษา
ตารางสอบ
ปลายภาค
www.reg.kmitl.ac.th
Internet

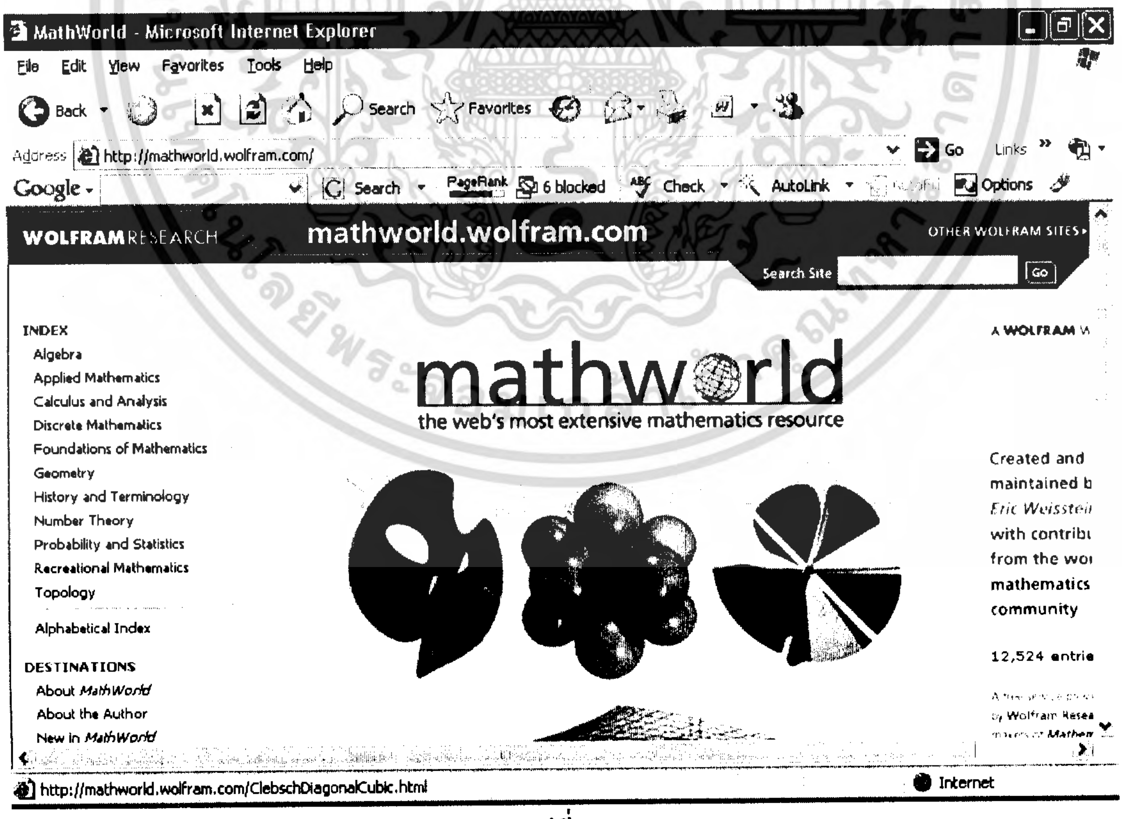
รูปที่ 10


Central Library Homepage - Microsoft Internet Explorer
File Edit View Favorites Tools Help
Address http://161.246.37.11/
WEBOPAC
KMITL
Central library
Library Services available include:
บริการสืบค้นด้านต่างๆ ดังนี้
LIBRARY CATALOG
(สืบค้นทรัพยากร สารนิเทศ)
SUGGESTION
(ข้อเสนอแนะ)
Done
Internet

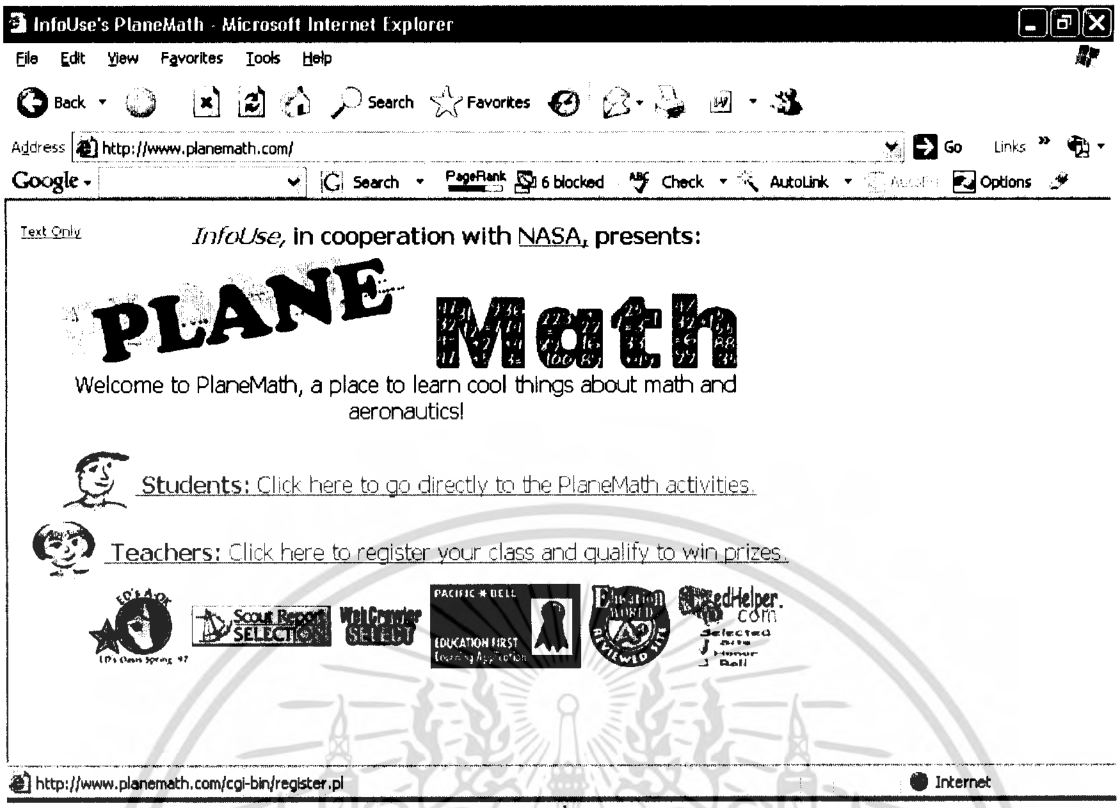
รูปที่ 11


Math.com - World of Math Online - Microsoft Internet Explorer
http://www.math.com/
math.com
The World of Math Online
Home | Teacher | Parents | Glossary | About Us
Practice
Tutoring
Calculators & Tools
Games
Store
Basic Math
Everyday Math
Pre-Algebra
Algebra
Geometry
Trigonometry
Statistics
Calculus
Advanced Topics
Others
Math Tutoring
Ads by Goooooogle
Discovery Learning Online
Exponential Learning. Discovery's Video Homework Tool. Free trial.
Mathematics Articles
The New York Times is a valuable resource for students and faculty.
Find Your Graduating Class
I Graduated in:
1984
1974
Done
Internet

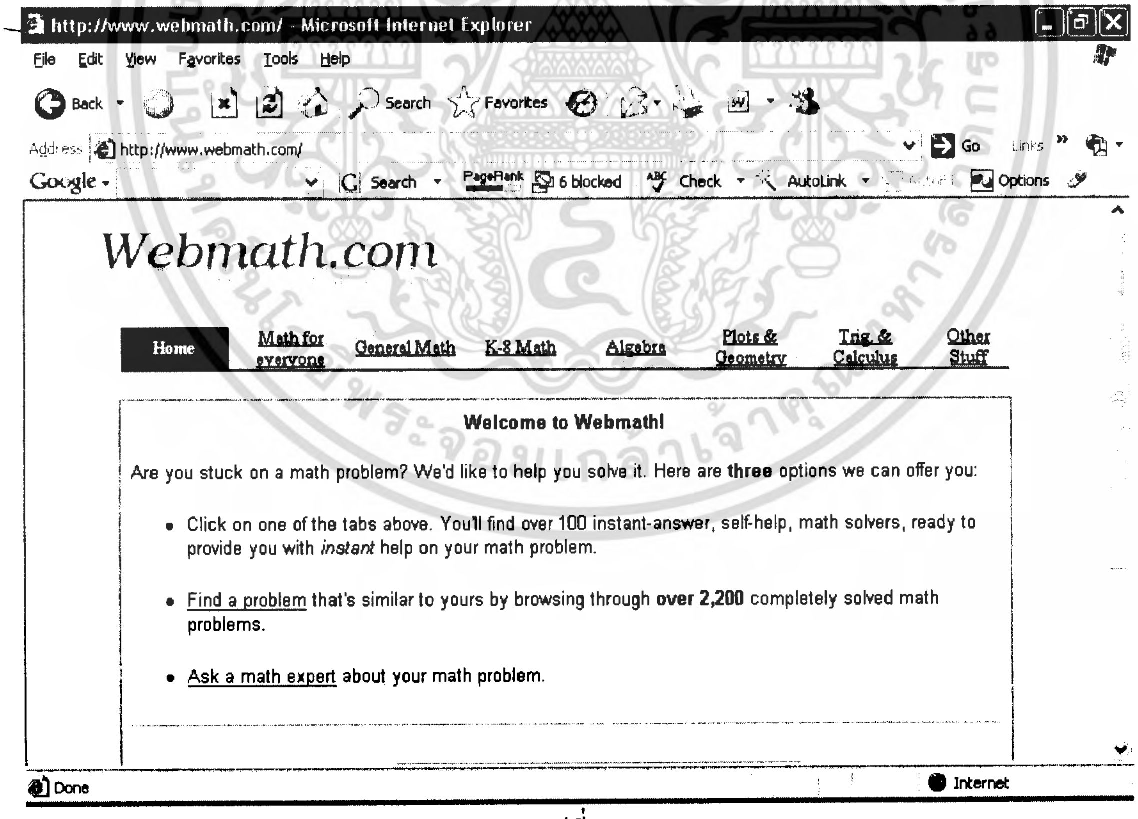
รูปที่ 12


MathWorld - Microsoft Internet Explorer
http://mathworld.wolfram.com/
WOLFRAM RESEARCH
mathworld.wolfram.com
OTHER WOLFRAM SITES
Search Site
INDEX
Algebra
Applied Mathematics
Calculus and Analysis
Discrete Mathematics
Foundations of Mathematics
Geometry
History and Terminology
Number Theory
Probability and Statistics
Recreational Mathematics
Topology
Alphabetical Index
DESTINATIONS
About MathWorld
About the Author
New in MathWorld
mathworld
the web's most extensive mathematics resource
12,524 entrie
http://mathworld.wolfram.com/ClebschDiagonalCubic.html
Internet

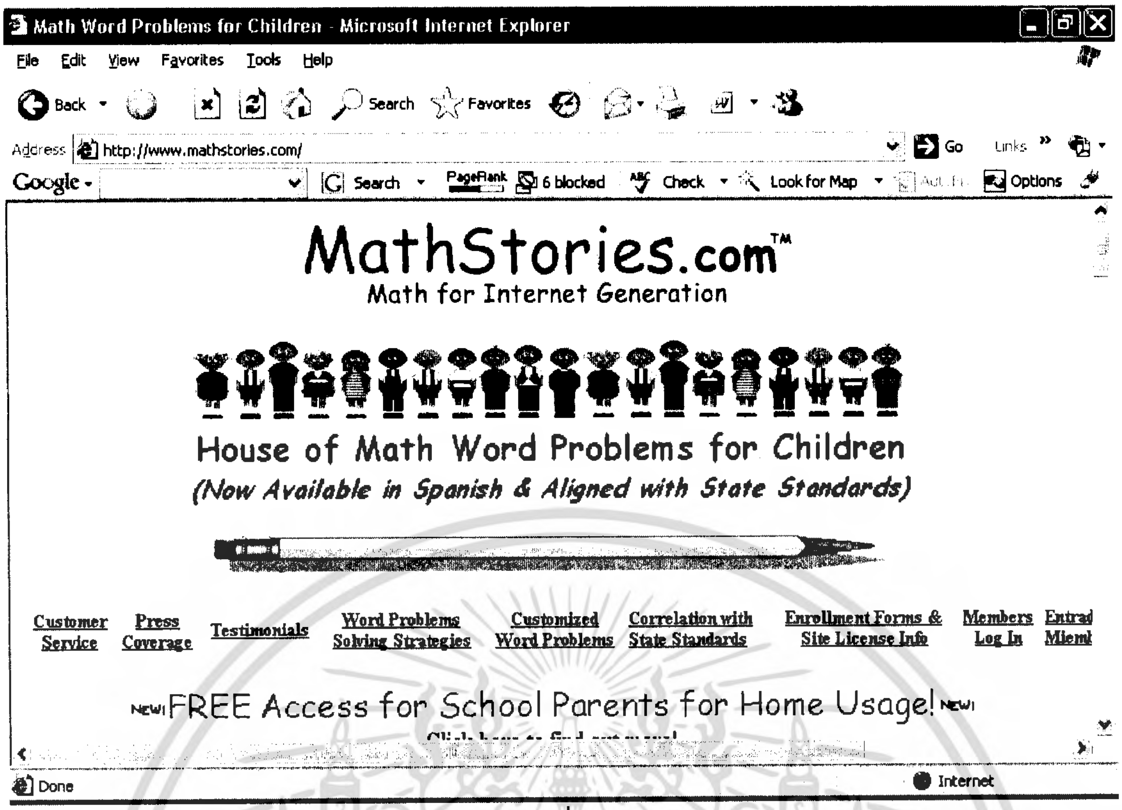
รูปที่ 13


InfoUse's PlaneMath - Microsoft Internet Explorer
http://www.planemath.com/
InfoUse, in cooperation with NASA, presents:
PLANE Math
Welcome to PlaneMath, a place to learn cool things about math and aeronautics!
Students: Click here to go directly to the PlaneMath activities.
Teachers: Click here to register your class and qualify to win prizes.
http://www.planemath.com/cgi-bin/register.pl

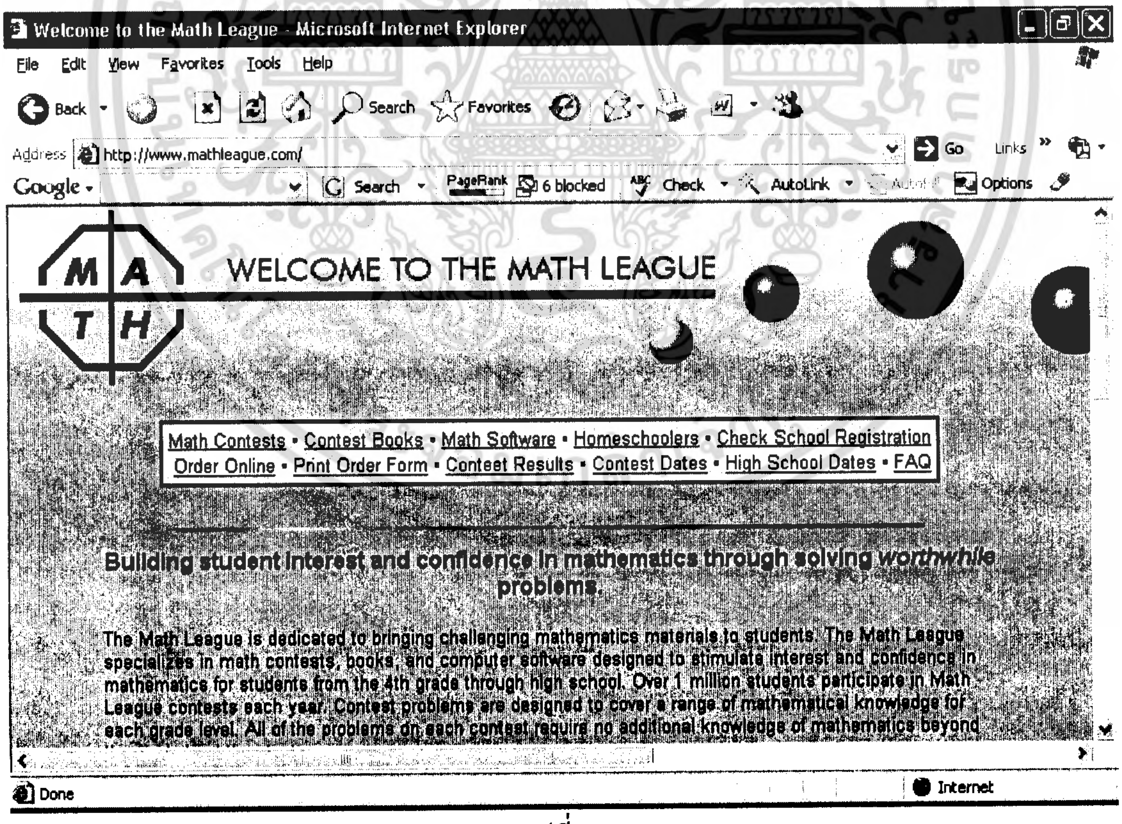
รูปที่ 14


http://www.webmath.com/ - Microsoft Internet Explorer
http://www.webmath.com/
Webmath.com
Home
Math for everyone
General Math
K-8 Math
Algebra
Plots & Geometry
Trig & Calculus
Other Stuff
Welcome to Webmath!
Are you stuck on a math problem? We'd like to help you solve it. Here are three options we can offer you:
Click on one of the tabs above. You'll find over 100 instant-answer, self-help, math solvers, ready to provide you with instant help on your math problem.
Find a problem that's similar to yours by browsing through over 2,200 completely solved math problems.
Ask a math expert about your math problem.

รูปที่ 15


Math Word Problems for Children - Microsoft Internet Explorer
http://www.mathstories.com/
MathStories.com™
Math for Internet Generation
House of Math Word Problems for Children
(Now Available in Spanish & Aligned with State Standards)
Customer Service
Press Coverage
Testimonials
Word Problems Solving Strategies
Customized Word Problems
Correlation with State Standards
Enrollment Forms & Site License Info
Members Log In
NEW! FREE Access for School Parents for Home Usage! NEW!

รูปที่ 16


Welcome to the Math League - Microsoft Internet Explorer
http://www.mathleague.com/
M A T H
WELCOME TO THE MATH LEAGUE
Math Contests • Contest Books • Math Software • Homeschoolers • Check School Registration
Order Online • Print Order Form • Contest Results • Contest Dates • High School Dates • FAQ
Building student interest and confidence in mathematics through solving worthwhile problems.
The Math League is dedicated to bringing challenging mathematics materials to students. The Math League specializes in math contests, books, and computer software designed to stimulate interest and confidence in mathematics for students from the 4th grade through high school. Over 1 million students participate in Math League contests each year. Contest problems are designed to cover a range of mathematical knowledge for each grade level. All of the problems on each contest require no additional knowledge of mathematics beyond

รูปที่ 17