# ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้ง

# SHORTEST PATH ON SURFACE

การันต์ เรืองมัจฉา

ธนกร ตั้งพิทักษ์ธรรม

พรชัย หอประเสริฐวงศ์

ปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ปีการศึกษา 2548

# SHORTEST PATH ON SURFACE

**KARAN RUANGMATCHA**

**THANAKORN TANGPITUKTAM**

**PORNCHAI HORPRASERTWONG**

**A SPECIAL PROJECT SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT**

**OF THE REQUIRMENT FOR THE DEGREE OF BACHELOR OF SCIENCE**

**DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE**

**FACULTY OF SCIENCE**

**KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG**

**ACADEMIC YEAR 2005**

| | |
|---|---|
| **หัวข้อปัญหาพิเศษ** | ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้ง |
| | SHORTEST PATH ON SURFACE |
| **ชื่อนักศึกษา** | นายการันต์ เรืองมัจฉา 45050003 |
| | นายธนกร ตั้งพิทักษ์ธรรม 45050011 |
| | นายพรชัย หอประเสริฐวงศ์ 45050041 |
| **ภาควิชา** | คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ |
| **สาขาวิชา** | คณิตศาสตร์ประยุกต์ |
| **อาจารย์ที่ปรึกษา** | รศ.ภัคคินี ชิตสกุล |
| | อ.เทอดขวัญ ช้างเผือก |

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง อนุมัติให้นับปัญหาพิเศษนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ ประจำปีการศึกษา 2548

| คณะกรรมการสอบ | | ลายมือชื่อ |
|---|---|---|
| ประธานกรรมการ | รศ.ดร.ไมตรี โพธิ์สุข | |
| กรรมการ | อ.ศิริกุล บัณฑิตเสาวภาคย์ | |
| กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา | รศ.ภัคคินี ชิตสกุล | |
| กรรมการและอาจารย์ที่ปรึกษา | อ.เทอดขวัญ ช้างเผือก | เทอดขวัญ ช้างเผือก |

( รองศาสตราจารย์ ดร.วีระ บุญจริง )

*หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์*

| | |
|---|---|
| **หัวข้อปัญหาพิเศษ** | ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้ง |
| **ชื่อนักศึกษา** | นายการันต์ เรืองมัจฉา 45050003 |
| | นายธนกร ตั้งพิทักษ์ธรรม 45050011 |
| | นายพรชัย หอประเสริฐวงศ์ 45050041 |
| **ปริญญา** | วิทยาศาสตรบัณฑิต |
| **ภาควิชา** | คณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ |
| **สาขาวิชา** | คณิตศาสตร์ประยุกต์ |
| **ปีการศึกษา** | 2548 |
| **อาจารย์ที่ปรึกษา** | รศ.ภัคคินี ชิตสกุล |
| | อ.เทอดขวัญ ช้างเผือก |

## บทคัดย่อ

ปัญหาพิเศษฉบับนี้นำเสนอวิธีการในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิว วิธีการนี้จะใช้สมการออยเลอร์ในการหาสมการเส้นโค้งที่เป็นคำตอบซึ่งแทนระยะทางที่สั้นที่สุด ซึ่งมี 2 ขั้นตอน คือ 1) ทำการกำหนดสมการเส้นโค้งของพื้นผิวโดยใช้ระบบวัดพิกัดที่เกี่ยวข้องกับพื้นผิว 2) หาคำตอบของสมการจากขั้นตอนที่ (1) โดยใช้สมการออยเลอร์ ซึ่งพื้นผิวบางชนิดได้ถูกเลือกมาเป็นตัวอย่างในการศึกษาด้วยวิธีการนี้

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Special Project Title** | SHORTEST PATH ON SURFACE | | |
| **Students** | Mr. Karan | Ruangmatcha | 45050003 |
| | Mr. Tanagon | Tangpitaktum | 45050011 |
| | Mr. Pornchai | Horprasertwong | 45050041 |
| **Degree** | *Bachelor of Science* | | |
| **Department** | Mathematics and Computer Science, Faculty of Science | | |
| **Programme** | Applied Mathematics / Computer Science | | |
| **Academic year** | 2005 | | |
| **Special Project Advisor** | Assoc.Prof.Pakkinee Chitsakul | | |
| | Thurdkwun Changpuek | | |


## ABSTRACT

This special project proposes a method for finding a shortest path between two given points on surfaces. The method uses Euler's Equation to determine a solution curve representing the shortest path. It consists of 2 steps: 1) define a curve equation of surface using surface coordinate system and 2) find solution of equation in (1) using Euler's Equation. Some surfaces are chosen as case study using this method.

# กิตติกรรมประกาศ

ในการทำปัญหาพิเศษเรื่อง ระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้งสำเร็จลุล่วงไปด้วยดี ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบพระคุณ รศ.ภัคคินี ชิตสกุล และ อาจารย์เทอดขวัญ ช้างเผือก อาจารย์ที่ปรึกษาปัญหาพิเศษที่กรุณาคอยให้คำแนะนำและเป็นที่ปรึกษาในการแก้ปัญหาต่างๆรวมทั้งเป็นผู้ตรวจสอบความถูกต้องของปัญหาพิเศษฉบับนี้ด้วย

ขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประศาสน์วิชาความรู้ทั้งทางด้านทฤษฎีและภาคปฏิบัติแก่ทางคณะผู้จัดทำจนกระทั่งปัญหาพิเศษนี้สัมฤทธิ์ผลด้วยดีทุกประการ

ขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ที่คอยให้ความสะดวกในการใช้คอมพิวเตอร์ห้องปฏิบัติการคอมพิวเตอร์

นอกจากนี้ทางคณะผู้จัดทำต้องขอขอบคุณเพื่อนๆทุกคนที่ให้ความช่วยเหลือในด้านต่างๆที่เกี่ยวข้องปัญหาพิเศษไว้ ณ ที่นี้ด้วย

คณะผู้จัดทำ

มีนาคม 2549

# สารบัญ

# สารบัญ(ต่อ)

# สารบัญภาพ

**รูปที่** **หน้า**

# บทที่ 1

# บทนำ

## 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

ระยะทางระหว่างตำแหน่งสองตำแหน่งที่ได้ศึกษาในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ เมื่อพิจารณาในระบบพิกัดฉาก 2 มิติคำนวณค่าระยะทางระหว่างจุด 2 จุดได้จากสมการ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ระหว่าง $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ บนระนาบ $xy$ หรือเมื่อพิจารณาในปริภูมิ 3 มิติ ระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ซึ่งระบุตำแหน่งในปริภูมิ สามารถคำนวณระยะทางได้จาก $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ โดยที่ทั้งสองกรณี เป็นระยะของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดสองจุดดังกล่าวบนระนาบ แต่ถ้าทั้งสองจุดดังกล่าวอยู่บนผิวโค้งอื่นที่ไม่ใช่ระนาบ ระยะทางระหว่างสองจุดดังกล่าวจะไม่สามารถใช้สมการข้างต้นคำนวณได้ ค่าที่ได้จะผิดพลาดไป เช่น ถ้าต้องการทราบระยะทางระหว่างจุดสองตำแหน่งบนพื้นผิวโลก ซึ่งมีลักษณะคล้ายทรงกลม ความยาวจะมีค่ามากกว่าเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดบนระนาบ

## 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

เพื่อค้นหาสมการของเส้นโค้งและวิธีการคำนวณระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวโค้งที่น่าสนใจแบบต่างๆ

## 1.3 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในการศึกษา

นำแคลคูลัสของการแปรผันและใช้สมการออยเลอร์ มาช่วยในการศึกษาการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนผิวต่างๆ

## 1.4 ขอบเขตการศึกษา

พิจารณาเฉพาะสมการของเส้นโค้ง วิธีการคำนวณระยะทางและบทพิสูจน์หรือทฤษฎีที่เกี่ยวข้องโดยใช้สมการออยเลอร์เป็นหลัก

## 1.5 ขั้นตอนการศึกษา

1. ศึกษาและค้นคว้าทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง
2. นำทฤษฎีที่ได้ทำการค้นคว้ามาศึกษาและแก้ไขปัญหาทางเรขาคณิต

# บทที่ 2

# สมการออยเลอร์

**ทฤษฎีบท** ถ้าฟังก์ชันนอลกำหนดอยู่ในรูป

$$J[y(x)] = \int_a^b f(x,y,y')dx \qquad \text{------------ (1)}$$

สำหรับ $y(x) \in c^1[a,b]$ ( $c^1[a,b] = \{y(x) \mid y'(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ $\}$ )
เมื่อ $f(x,y,y')$ ต่อเนื่องเมื่อเทียบกับอาร์กิวเมนต์ $x, y(x)$ และ $y'(x)$
และ $f(x,y,y')$ มีอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องภายในโดเมน $x \in [a,b], y \in R, y' \in R$
แล้ว ฟังก์ชันนอล $J[y(x)] = \int_a^b f(x,y,y')dx$ หาอนุพันธ์ได้ในปริภูมิ $c^1[a,b]$
และมีการแปรผันอยู่ในรูป $\delta J[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right)dx$ ------------ (2)

**พิสูจน์**

กำหนดให้ $G = \int_a^b f(x,y,y')dx$

จากกฎลูกโซ่ $\delta J[y(x)] = \frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y + \frac{\partial G}{\partial y'}\delta y'$ จะได้

$$\begin{aligned}
\delta J[y(x)] &= \frac{\partial G}{\partial x}\delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\delta y + \frac{\partial G}{\partial y'}\delta y' \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y' \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y + \frac{\partial}{\partial y'}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta y'
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right]\delta x = 0$ เพราะ $\int_a^b f(x,y,y')dx = G(y,y')$

ดังนั้น $\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_a^b f(x,y,y')dx\right] = \frac{\partial G(y,y')}{\partial x} = 0$

และจากกฎของไลบ์นิซ (Leibniz's Rule)

จะได้ $\delta J[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx$

ดังนั้น $\delta J[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right) dx$

เป็นการแปรผันของฟังก์ชันนอล $J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')dx$

**ทฤษฎีบท** (เงื่อนไขจำเป็นสำหรับค่าสุดขีดของ ฟังก์ชันนอล)

ถ้า ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ นิยามบนกลุ่มของ $M$ สามารถหาอนุพันธ์ได้และมีค่าสุดขีดที่ $y_0(x)$ เมื่อ $y_0(x) \in M$ แล้ว $\delta J[y_0(x)] = 0$

จาก $\delta J[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' \right) dx$ เป็นการแปรผันของฟังก์ชันนอล $J\left[y(x)\right]$

$$\delta J[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y' dx$$

ทำการอินทิเกรตทีละส่วนในพจน์ที่ 2 โดย

ให้ $u = \frac{\partial f}{\partial y'}$ และ $dv = \delta y' dx$

$du = \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}dx$ และ $v = \delta y$

อินทิเกรตทีละส่วน $\delta J[y(x)] = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\delta y dx + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y dx$

สมมติ ถ้า $y(a) = A, y(b) = B$ เป็นเงื่อนไขขอบเขต จะได้ว่า $\delta y\big|_a = 0, \delta y\big|_b = 0$ ซึ่งส่งผลให้ $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y \Big|_a^b = 0$

ดังนั้น $\delta J[y(x)] = \int_a^b \left( \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \delta y dx$

จากทฤษฎีบท กำหนดให้ $\delta J[y(x)] = 0$ เพื่อหาฟังก์ชัน $y_0(x)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันนอล $J[y(x)]$ มีค่าสุดขีด ดังนั้น $\delta J[y(x)] = \int_a^b (\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'})\delta y dx = 0$

ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\delta J[y(x)] = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$ หรือ $f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0$ --------- (3)

จากกฎลูกโซ่

$$\frac{df_{y'}}{dx} = \frac{\partial f_{y'}}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} \qquad ; \ f = f(x, y, y')$$

$$= f_{y'x} + f_{y'y}y' + f_{y'y'}y''$$

นำไปแทนในสมการ (3) ได้

$$f_y - \left(f_{y'x} + y'f_{y'y} + y''f_{y'y'}\right) = 0$$

หรือ $$y''f_{y'y'} + y'f_{y'y} + f_{y'x} - f_y = 0 \qquad \text{------------ (4)}$$

เรียกสมการ (3) และ (4) ว่า สมการของออยเลอร์ (Euler's Equation)

ดังนั้นฟังก์ชัน $y(x)$ ที่ทำให้ ฟังก์ชันนอล $J[y(x)] = \int_a^b f(x, y, y')dx$ มีค่าสุดขีด

สามารถหาได้จากสมการของออยเลอร์ (Euler's Equation)

# บทที่ 3

# ปัญหาระยะทางสั้นที่สุด

## 3.1 ปัญหาระยะทางสั้นที่สุดบนระนาบ $xy$

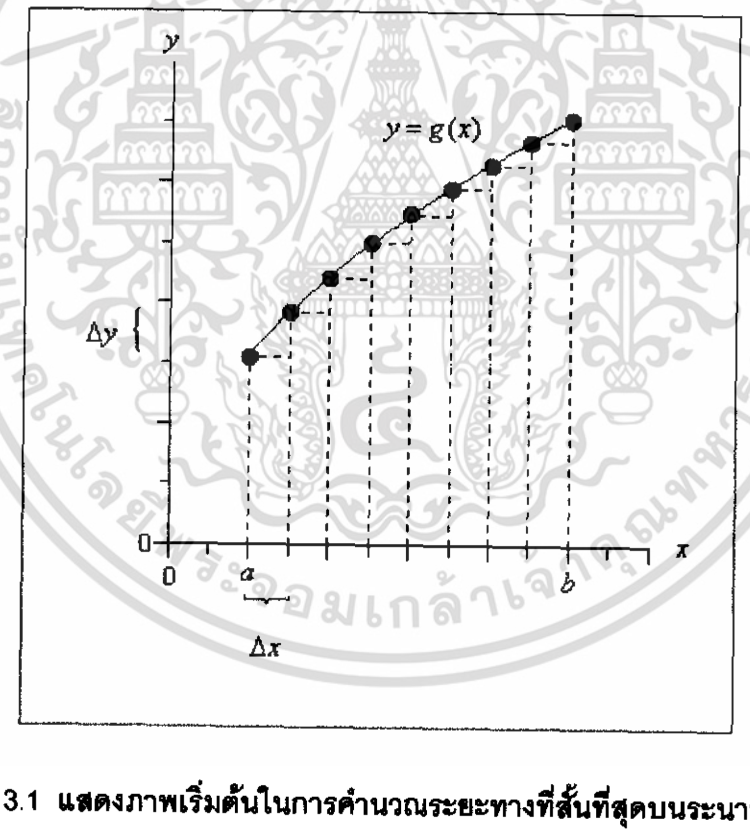
ในการคำนวณหาความยาวเส้นโค้งที่เชื่อมจุด $(a, A)$ กับจุด $(b, B)$ บนระนาบ $xy$ ใน 2 มิติ

กำหนดให้ $n$ คือ จำนวนช่องที่แบ่งย่อยบนช่วง $[a,b]$

$\Delta x_i$ คือ ความยาวของแต่ละช่อง ดังนั้น $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ และถ้าแบ่งจำนวนช่องเท่าๆกัน $n$ ช่องแล้ว จะได้ $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$

โดยที่ $x_i = a + i\Delta x$ เมื่อ $i = 0,1,2,3,\ldots,n$

$L(a,b)$ คือ ความยาวของเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = a$ ถึง $x = b$




**รูปที่ 3.1 แสดงภาพเริ่มต้นในการคำนวณระยะทางที่สั้นที่สุดบนระนาบ $xy$**

จะได้
$$L(a,b) \approx \sum_{i=0}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \qquad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_i = g(x_{i+1}) - g(x_i)$$

หรือ
$$L(a,b) \approx \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2}\,(\Delta x_i)$$

และเมื่อพิจารณาจำนวนช่อง $n \to \infty$ จะได้

$$L(a,b) \approx \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\sqrt{1+(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2}(\Delta x_i) = \int_a^b \sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,dx$$

เปรียบเทียบกับฟังก์ชันนอลในสมการ $J[y(x)] = \int_a^b f(x,y,y')dx$

กำหนดให้ $f(x,y,y') = (1+(y')^2)^{\frac{1}{2}} = f(y')$

$$f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{2}(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$f = f(y')$ ไม่ขึ้นกับ $x$ และ $y$ ดังนั้น $f_y = 0$

จากสมการ (3) $f_y - \frac{d}{dx}f_{y'} = 0$

เมื่อ $f_y = 0$ จะได้ $\frac{d}{dx}f_{y'} = 0$ หรือ $f_{y'} = C$

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C$$

$$(y') = C\sqrt{1+(y')^2}$$

$$(y')^2 = C_1(1+(y')^2) \qquad ; \; C_1 = C^2$$

$$= C_1 + C_1(y')^2$$

$$(y')^2(1-C_1) = C_1$$

$$(y')^2 = \frac{C_1}{(1-C_1)}$$

$$y' = k_1 \qquad ; \; k_1 = \sqrt{\frac{C_1}{1-C_1}}$$

$$y = k_1x + k_2$$

โดย $k_1, k_2$ เป็นค่าคงตัว

เมื่อ $y(a) = A$

$$A = k_1a + k_2 \qquad \text{------------- (5)}$$

เมื่อ $y(b) = B$

$$B = k_1b + k_2 \qquad \text{------------ (6)}$$

นำสมการ (6) – (5) จะได้

$$B - A = k_1(b-a)$$

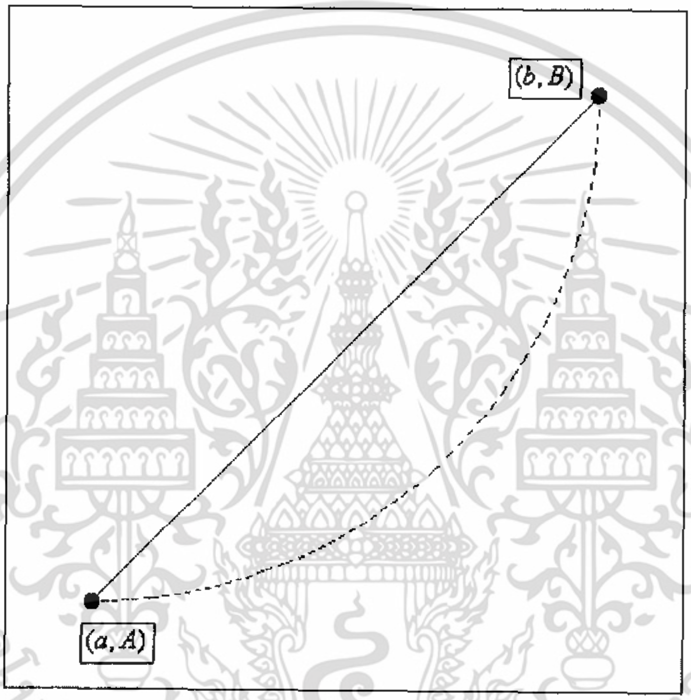
$$k_1 = \frac{B-A}{b-a}$$

นำไปแทนในสมการ (6)

$$\text{จะได้} \quad B = b\left[\frac{B-A}{b-a}\right] + k_2$$

$$k_2 = B - \frac{Bb-Ab}{b-a} = \frac{Bb-Ba-Bb+Ab}{b-a} = \frac{Ab-Ba}{b-a}$$

ดังนั้น $y = \left(\frac{B-A}{b-a}\right)x + \frac{Ab-Ba}{b-a}$ เป็นเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุด $(a, A)$ กับจุด $(b, B)$ บนระนาบ



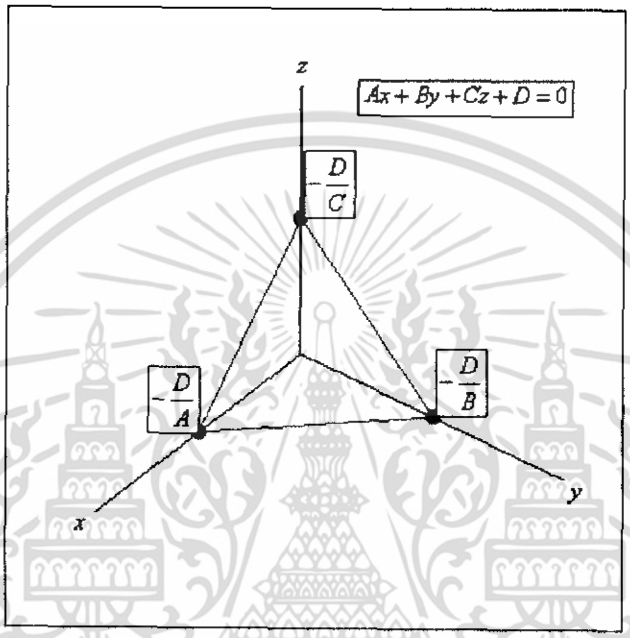

**รูปที่ 3.2 แสดงระยะทางที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุด 2 จุด**

สรุปได้ว่าบนระนาบ เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่เชื่อมจุด 2 จุด คือ ส่วนของเส้นตรงซึ่งเรียกว่า เซกเมนต์ และในกรณีที่ระนาบระบุพิกัดด้วยแกน $x$ และแกน $y$ เส้นตรงดังกล่าวที่เชื่อมจุด $(a, A)$ กับจุด $(b, B)$ จะมีค่าความชันเป็น $m = \left(\frac{B-A}{b-a}\right)$ และระยะตัดแกน $y$ ที่ $C = \frac{Ab-Ba}{b-a}$ เมื่อ $y = mx + c$

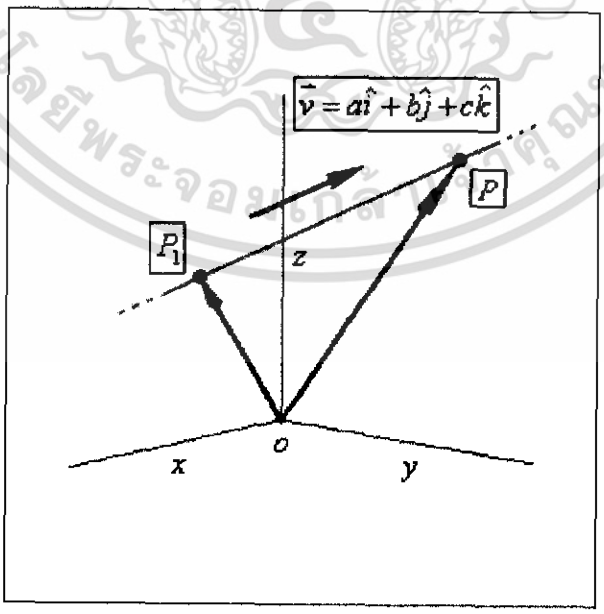
## 3.2 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนระนาบใด ๆ

### 3.2.1 องค์ประกอบของระนาบใด ๆ

บนระนาบ $xy$ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด คือ เซกเมนต์ ของเส้นตรงที่ผ่านจุดทั้ง 2 ดังกล่าว และเมื่อระนาบที่สนใจเป็นระนาบทั่วไปที่กำหนดด้วยสมการ $Ax + By + Cz + D = 0$ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนระนาบนี้ก็คือ เซกเมนต์ ของเส้นตรงที่ผ่านจุดทั้ง 2 บนระนาบดังกล่าวเช่นกัน ซึ่งในรูปที่ 3.3 แสดงบางส่วนของระนาบในกรณีทั่วไป




**รูปที่ 3.3 รูปแสดงบางส่วนของระนาบ $Ax + By + Cz + D = 0$ ซึ่งเป็นระนาบกรณีทั่วไป**




**รูปที่ 3.4 องค์ประกอบที่ใช้ในการสร้างเส้นตรง**

ขั้นตอนต่อไปจะแสดง วิธีการหาสมการเส้นตรงใน 3 มิติ จากรูปที่ 3.4

ให้ $P(x,y,z)$ เป็นจุดใดๆบนเส้นตรง $L$ ที่ลากผ่านจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ เมื่อพิจารณาจุด $P(x,y,z)$ ใดๆที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง $P_1P$

ดังนั้น $\overrightarrow{P_1P}$ ขนานกับ $\vec{v}$ หรือ $\overrightarrow{P_1P}=t\vec{v}$ เมื่อ $t$ เป็นสเกลาร์ $-\infty<t<\infty$

เนื่องจาก $\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_1}$

$$(x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k}=at\hat{i}+bt\hat{j}+ct\hat{k}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$x-x_1=at$$
$$y-y_1=bt$$
และ $$z-z_1=ct$$

ดังนั้นสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ คือ $x=x_1+at, y=y_1+bt, z=z_1+ct \quad ;-\infty<t<\infty$

ซึ่งเป็นสมการอิงตัวแปรเสริมหรืออยู่ในรูปสมการสมมาตรได้เป็น $\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$

จากผลลัพธ์ของสมการออยเลอร์ ทำให้ทราบแล้วว่า เซกเมนต์ของเส้นตรงที่เชื่อมจุด 2 จุด เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่าง 2 จุดนั้น โดยพิจารณาเฉพาะระนาบ $xy$ เท่านั้น ต่อไปนี้จะมาพิจารณาในกรณีที่ระนาบไม่ได้จำกัดเฉพาะแต่ระนาบ $xy$ เท่านั้น แต่ระนาบที่พิจารณาจะมีองค์ประกอบที่ถูกระบุไว้ด้วยสมการระนาบ พร้อมทั้งการหาค่าระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด ที่กำหนดให้ ซึ่งจุดทั้ง 2 นี้อยู่บนระนาบเดียวกัน

ระนาบทุกระนาบมีองค์ประกอบสำคัญ เช่นจุดตัดแกน $x$ แกน $y$ และแกน $z$ องค์ประกอบเหล่านี้ทราบได้จากสมการของระนาบ ซึ่งถูกสร้างขึ้นมาจากข้อมูลที่สำคัญ 2 อย่าง คือ จุดที่ระนาบผ่าน และเวกเตอร์ตั้งฉากกับระนาบ

ขั้นตอนต่อไปนี้จะแสดงวิธีการสร้างสมการระนาบ

สมมติระนาบผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\hat{N}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$

ขั้นที่ 1 สร้างเวกเตอร์ $\overrightarrow{P_0P}$ เมื่อจุด $P(x,y,z)$ อยู่บนระนาบ

ขั้นที่ 2 เนื่องจาก $\hat{N}\perp\overrightarrow{P_0P}$ ดังนั้น $\hat{N}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$

ดังนั้น $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$ เป็นสมการระนาบ

**3.2.1.1 การตรวจสอบการอยู่บนระนาบใด ๆ ของจุดที่สนใจ**

ถ้า $P_1(x_1,y_1,z_1)$ เป็นจุดบนระนาบ $Ax+By+Cx+D=0$ แล้ว

$Ax_1+By_1+Cx_1+D=0$

### 3.2.1.2 สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด 2 จุดบนระนาบใดๆ

ถ้า $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ อยู่บนระนาบ $Ax + By + Cx + D = 0$ แล้ว สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุดทั้ง 2 บนระนาบดังกล่าว คือ

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, y = y_1 + (y_2 - y_1)t, z = z_1 + (z_2 - z_1)t \quad ; -\infty < t < \infty$$

ซึ่งทั้ง $x, y$ และ $z$ อยู่บนระนาบนี้ด้วย

### 3.2.2 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนระนาบใดๆ

ถ้า $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ อยู่บนระนาบเดียวกันแล้ว ระยะทางสั้นที่สุดระหว่างจุด $P_1$ และ $P_2$ คือ เซกเมนต์ของเส้นตรง ซึ่งหาได้จาก $s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

## 3.3 ปัญหาระยะทางสั้นที่สุดบนผิวทรงกลม

### 3.3.1 องค์ประกอบของทรงกลม

ในระบบพิกัดทรงกลมจุดแต่ละจุดบนผิวทรงกลมจะถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 3 ค่าคือ $\phi, \theta$ และ $R$ เมื่อ

$\phi$ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน $z$ บวก

$\theta$ คือ องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน $x$ บวก บนระนาบ $xy$

$R$ คือ รัศมีของทรงกลม

สำหรับจุด $P(x, y, z)$ บนผิวของทรงกลม พิกัด $(x, y, z)$ ของจุด $P$ บนผิวทรงกลม มีความสัมพันธ์กับพารามิเตอร์ทั้ง 3 ค่า ดังนี้

$$x = R\sin\phi\cos\theta, y = R\sin\phi\sin\theta \quad \text{และ} \quad z = R\cos\phi$$

สมมติ $\vec{r}(\phi,\theta) = x(\phi,\theta)\hat{i} + y(\phi,\theta)\hat{j} + z(\phi,\theta)\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่งบนผิวของทรงกลม สิ่งที่เราสนใจในตอนนี้คือ สมการของเส้นโค้งที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุด 2 จุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกลม

สมมติให้ $\theta = \theta(\phi)$ เป็นสมการของเส้นโค้งเส้นที่ต้องการ

ในกรณีทั่วไปความยาวของเส้นโค้งในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ เมื่อระบุค่าด้วยเวกเตอร์

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \qquad ; a \le t \le b$$

จะได้ความยาวส่วนโค้งเป็น $L = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2}\, dt$ หรือ $L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| dt$

ในกรณีที่พิจารณา $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v)$ ซึ่งถูกระบุด้วยพารามิเตอร์ $u, v$ โดยที่ $u = u(t)$ และ $v = v(t)$ เมื่อ $t$ เป็นพารามิเตอร์ซึ่ง $a \le t \le b$ จะได้ความยาวของเส้นโค้งที่ระบุด้วยเวกเตอร์ $\vec{r}\left(u(t), v(t)\right)$ คือ

$$L=\int_a^b\sqrt{E(\frac{du}{dt})^2+2F(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt})+G(\frac{dv}{dt})^2}\,dt$$

เมื่อ $$E=(\frac{\partial x}{\partial u})^2+(\frac{\partial y}{\partial u})^2+(\frac{\partial z}{\partial u})^2$$
$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$
$$G=(\frac{\partial x}{\partial v})^2+(\frac{\partial y}{\partial v})^2+(\frac{\partial z}{\partial v})^2$$

ในกรณีทรงกลม

$x(\phi,\theta)=R\sin\phi\cos\theta$ , $y(\phi,\theta)=R\sin\phi\sin\theta$ และ $z(\phi,\theta)=R\cos\phi$

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-R\sin\phi\sin\theta \quad ,\frac{\partial y}{\partial\theta}=R\sin\phi\cos\theta \quad ,\frac{\partial z}{\partial\theta}=0$$
$$\frac{\partial x}{\partial\phi}=R\cos\phi\cos\theta \quad ,\frac{\partial y}{\partial\phi}=R\cos\phi\sin\theta \quad ,\frac{\partial z}{\partial\phi}=-R\sin\phi$$

$$E=R^2\sin^2\phi\sin^2\theta+R^2\sin^2\phi\cos^2\theta+0=R^2\sin^2\phi(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=R^2\sin^2\phi$$
$$F=-R^2\sin\phi\sin\theta\cos\phi\cos\theta+R^2\sin\phi\cos\theta\cos\phi\sin\theta=0$$
$$G=R^2\cos^2\phi\cos^2\theta+R^2\cos^2\phi\sin^2\theta+R^2\sin^2\phi$$
$$\therefore G=R^2\cos^2\phi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+R^2\sin^2\phi=R^2(\cos^2\phi+\sin^2\phi)=R^2$$

$$L=\int_a^b\sqrt{R^2\sin^2\phi(\theta')^2+R^2(\phi')^2}\,dt$$
$$=R\int_a^b\sqrt{\sin^2\phi(\theta')^2+(\phi')^2}\,dt$$

เมื่อ $\frac{d\theta}{dt}=\theta'$ ดังนั้น $d\theta=\theta'dt$ ในทำนองเดียวกัน $d\phi=\phi'dt$

เนื่องจาก $\theta=\theta(\phi)$

$$L=R\int_a^b\sqrt{\sin^2\phi(d\theta)^2+(d\phi)^2}$$

กำหนด $H=\sqrt{1+\sin^2\phi(\theta')^2}$

$$J[\theta(\phi)]=R\int_{\phi_a}^{\phi_b}\sqrt{\sin^2\phi(\theta')^2+1}\,d\phi$$

จากสมการของออยเลอร์ $H_\theta-\frac{dH_{\theta'}}{d\phi}=0$ ------------ (7)

$$H=\sqrt{1+\sin^2\phi(\theta')^2}\ ,\ H_\theta=0$$

$$H_{\theta'}=\frac{1}{2}\left(1+\sin^2\phi(\theta')^2\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot2\theta'\sin^2\phi=\frac{\theta'\sin^2\phi}{\sqrt{1+\sin^2\phi(\theta')^2}}$$

จะได้

$$\frac{dH_{\theta'}}{d\phi}=\frac{d}{d\phi}\frac{\theta'\sin^2\phi}{\sqrt{1+\sin^2\phi(\theta')^2}}=0$$

หรือ $$\frac{\theta'\sin^2\phi}{\sqrt{1+\sin^2\phi(\theta')^2}}=C_1$$ ; $C_1$ เป็นค่าคงตัว

$$\theta'\sin^2\phi=C_1\left(1+(\theta')^2\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(\theta')^2\left(\sin^2\phi\right)^2=C_1^2\left(1+(\theta')^2\sin^2\phi\right)$$

$$(\theta')^2\left(\sin^2\phi\right)^2=C_1^2+C_1^2(\theta')^2\sin^2\phi$$

$$(\theta')^2\left(\left(\sin^2\phi\right)^2-C_1^2\sin^2\phi\right)=C_1^2$$

$$(\theta')^2\sin^2\phi\left(\sin^2\phi-C_1^2\right)=C_1^2$$

$$(\theta')^2=\frac{C_1^2}{\sin^2\phi\left(\sin^2\phi-C_1^2\right)}$$

$$\theta'=\frac{C_1}{\sin\phi\sqrt{\left(\sin^2\phi-C_1^2\right)}}$$

$$\theta=C_1\int\frac{1}{\sin\phi\sqrt{\left(\sin^2\phi-C_1^2\right)}}d\phi$$

$$=\int\frac{\frac{C_1}{\sin^2\phi}}{\sqrt{1-\frac{C_1^2}{\sin^2\phi}}}d\phi$$

$$=\int\frac{C_1\csc^2\phi}{\sqrt{1-C_1^2\csc^2\phi}}d\phi$$

เนื่องจาก $\csc^2\phi = 1+\cot^2\phi$ และ $\dfrac{d\cot\phi}{d\phi} = -\csc^2\phi$ เราจะได้

$$\theta = \int \frac{C_1 d\left(-\cot\phi\right)}{\sqrt{1-C_1^2\left(1+\cot^2\phi\right)}}$$

$$= -\int \frac{d\left(C_1\cot\phi\right)}{\sqrt{\left(1-C_1^2\right)-C_1^2\cot^2\phi}}$$

$$= -\int \frac{d\left(\dfrac{C_1\cot\phi}{\sqrt{1-C_1^2}}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{C_1^2\cot^2\phi}{1-C_1^2}}}$$

$$\theta(\phi) = \cos^{-1}\left(\frac{C_1\cot\phi}{\sqrt{1-C_1^2}}\right)+C_2$$

$$\therefore \theta(\phi) = \cos^{-1}\left(C\cot\phi\right)+C_2 \qquad ;\ C = \frac{C_1}{\sqrt{1-C_1^2}} \qquad \text{------------ (8)}$$

จากสมการที่ (8) เมื่อนำมาปรับรูปสมการใหม่จะได้

$$C\cot\phi = \cos(\theta(\phi)-C_2)$$

$$C\cot\phi = \cos(\theta(\phi))\cos(C_2)+\sin(\theta(\phi))\sin(C_2)$$

$$\cot\phi = \frac{\cos(C_2)}{C}\cos(\theta(\phi))+\frac{\sin(C_2)}{C}\sin(\theta(\phi))$$

$$\left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right) = A\cos(\theta(\phi))+B\sin(\theta(\phi)) \qquad ;A = \frac{\cos C_2}{C}, B = \frac{\sin C_2}{C} \qquad \text{------------ (9)}$$

คูณ $R\sin\phi$ กับสมการ (9) จะได้

$$R\cos\phi = A(R\sin\phi\cos(\theta(\phi)))+B(R\sin\phi\sin(\theta(\phi)))$$

$$Z = Ax+By \qquad \text{เป็นสมการของระนาบ}$$

เมื่อ $y=0$ , $z=0$ $Ax=0$ แล้ว $x=0$ เป็นจุดตัดแกน $x$ ในทำนองเดียวกัน $y=0$ เป็นจุดตัดแกน $y$ และ $z=0$ เป็นจุดตัดแกน $z$ ของระนาบดังกล่าว จะได้ว่าระนาบ $Z = Ax+By$ ผ่านจุดกำเนิดเสมอ

ดังนั้น $Z = Ax + By$ เป็นสมการของระนาบที่ตัดทรงกลมและผ่านจุดศูนย์กลางโดยมีรอยตัดระหว่างทรงกลมกับระนาบดังกล่าวเป็นวงกลมที่ใหญ่ที่สุดหรือ วงกลมใหญ่(ของทรงกลม) และส่วนของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม) ที่เชื่อมโยงจุดทั้งสองจุด เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกลม

ในกรณีทั่วไปทรงกลมที่พิจารณาไม่จำเป็นจะต้องมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดของระบบพิกัดฉากเสมอไป จุดศูนย์กลางของทรงกลม และรัศมีของทรงกลมจะถูกระบุด้วยสมการในรูป $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-m)^2=R^2$ ซึ่งเป็นสมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(h,k,m)$ และมีรัศมียาว $R$ หน่วย สมการดังกล่าวเป็นสมการของทรงกลมในรูปมาตรฐาน และในกรณีที่สมการของทรงกลมเขียนอยู่ในรูปทั่วไปเป็น $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ เราสามารถปรับรูปสมการทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐานโดยวิธีกำลังสองสมบูรณ์ ดังนี้

จาก

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

$$x^2+ax+(\frac{a}{2})^2+y^2+by+(\frac{b}{2})^2+z^2+cz+(\frac{c}{2})^2+d=(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2+(\frac{c}{2})^2$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2+(z+\frac{c}{2})^2=(\frac{a}{2})^2+(\frac{b}{2})^2+(\frac{c}{2})^2-d$$

เป็นสมการของทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2},-\frac{c}{2})$ , รัศมี $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}$

จากทั้งหมดที่กล่าวมา ขั้นตอนการระบุองค์ประกอบของทรงกลม เป็นดังนี้

จากสมการพื้นผิวกำลังสอง

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0$$

ถ้า $A=B=C$ และ $D=E=F=0$ กล่าวคือ

สมการอยู่ในรูป $Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Kz+L=0$ หารตลอดด้วย $A$ จะได้

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0 \text{ เมื่อ } a=\frac{G}{A},b=\frac{H}{A},c=\frac{K}{A} \text{ และ } d=\frac{L}{A}$$

บวก $\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$ ทั้ง 2 ข้างของสมการเพื่อปรับเป็นกำลังสองสมบูรณ์ ได้เป็น

$$x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2+by+\left(\frac{b}{2}\right)^2+z^2+cz+\left(\frac{c}{2}\right)^2+d=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-d$$

เป็นสมการทรงกลมมาตรฐานที่ต้องการ

3.3.1.1 **การตรวจสอบการอยู่บนผิวทรงกลมของจุดที่สนใจ**

หลักการที่ใช้ในการตรวจสอบว่าจุดที่พิจารณาอยู่บนพื้นผิวทรงกลม คือ การนำพิกัดทั้งสามของจุดที่พิจารณาแทนค่าลงในสมการของทรงกลม นั่นคือ ถ้า $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-m)^2=R^2$ เป็นสมการมาตรฐานของทรงกลม โดยมี $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ เป็นจุดทั้งสองที่สนใจ

ซึ่งพบว่า $\quad (x_0-h)^2+(y_0-k)^2+(z_0-m)^2=R^2$

แต่ถ้า $\quad (x_1-h)^2+(y_1-k)^2+(z_1-m)^2 \neq R^2$

สรุปได้ว่า จุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ อยู่ แต่จุด $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ไม่อยู่บนผิวของทรงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-m)^2=R^2$

3.3.1.2 **การหาสมการของระนาบตัด**

เราได้ทราบมาแล้วว่า เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม) เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวของทรงกลมแต่ เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม) และวงกลมใหญ่(ของทรงกลม) ที่ได้มา ก็ได้มาจากการนำระนาบตัดของทรงกลมผ่านจุดที่สนใจทั้งสองบนผิวและจุดศูนย์กลางของทรงกลม และสิ่งที่เราสนใจในตอนนี้ คือ สมการของระนาบดังกล่าว

สมมติให้ $P_1(x_1,y_1,z_1)$ และ $P_2(x_2,y_2,z_2)$ เป็นจุดทั้งสองบนทรงกลม ที่มีสมการ $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-m)^2=R^2$ และจุดศูนย์กลาง $O(h,k,m)$

เมื่อนำระนาบตัดทรงกลมโดยผ่านจุด $P_1,P_2$ และ $O$ และสร้างเวกเตอร์

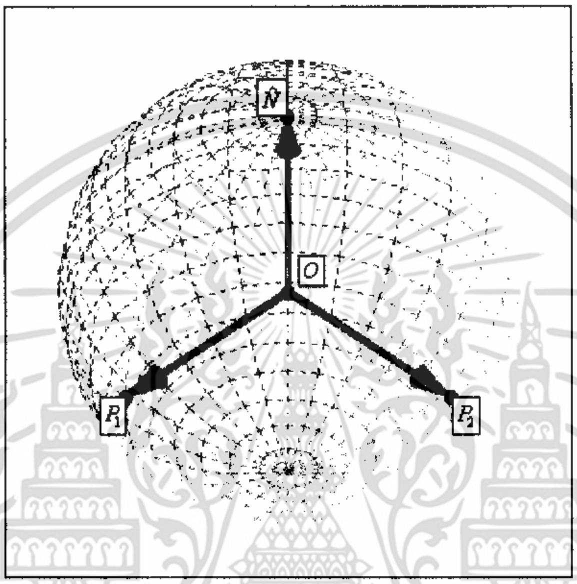
$$\overline{OP_1}=(x_1-h)\hat{i}+(y_1-k)\hat{j}+(z_1-m)\hat{k}=R^2$$
$$\overline{OP_2}=(x_2-h)\hat{i}+(y_2-k)\hat{j}+(z_2-m)\hat{k}=R^2$$

$$\hat{N}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ (x_1-h) & (y_1-k) & (z_1-m) \\ (x_2-h) & (y_2-k) & (z_2-m) \end{vmatrix}$$
$$=\hat{i}(y_1-k)(z_2-m)+\hat{j}(z_1-m)(x_2-h)+\hat{k}(x_1-h)(y_2-k)$$
$$-\hat{k}(x_2-h)(y_1-k)-\hat{i}(y_2-k)(z_1-m)-\hat{j}(z_2-m)(x_1-h)$$

$$r=(y_1-k)(z_2-m)-(y_2-k)(z_1-m)$$
$$=(y_1z_2-y_1m-kz_2+km)-(y_2z_1-y_2m-kz_1+km)$$
$$=y_1z_2-y_1m-kz_2-y_2z_1+y_2m+kz_1$$

$$
\begin{aligned}
s &= (z_1 - m)(x_2 - h) - (z_2 - m)(x_1 - h) \\
&= (z_1x_2 - z_1h - mx_2 + mh) - (z_2x_1 - z_2h - mx_1 + mh) \\
&= z_1x_2 - z_1h - mx_2 - z_2x_1 + z_2h + mx_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
t &= (x_1 - h)(y_2 - k) - (x_2 - h)(y_1 - k) \\
&= (x_1y_2 - x_1k - hy_2 + hk) - (x_2y_1 - x_2k - hy_1 + hk) \\
&= x_1y_2 - x_1k - hy_2 - x_2y_1 + x_2k + hy_1
\end{aligned}
$$




**รูปที่ 3.5 แสดงการหาสมการของระนาบตัด ระนาบ** $Ax + By + Cz + D = 0$

เนื่องจาก $\hat{N} = r\hat{i} + s\hat{j} + t\hat{k}$ เลือก $O(h,k,m)$ เป็นจุดผ่าน $P(x,y,z)$ เป็นจุดใดๆบนระนาบ สมการของระนาบที่ผ่านจุด $O$ และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\hat{N}$ คือ $\hat{N}\cdot\overline{OP} = 0$ หรือ

$$
\begin{aligned}
(r\hat{i} + s\hat{j} + t\hat{k})\cdot((x-h)\hat{i} + (y-k)\hat{j} + (z-m)\hat{k}) &= 0 \\
r(x-h) + s(y-k) + t(z-m) &= 0 \\
rx + sy + tz - (rh + sk + tm) &= 0 \\
rx + sy + tz + u &= 0
\end{aligned}
$$

โดยที่ $u = -(rh + sk + tm)$ หรือ $u = -\vec{\lambda}\cdot\hat{N}$ เมื่อ $\vec{\lambda}$ คือเวกเตอร์จากจุดกำเนิดที่ชี้ไปยังศูนย์กลางทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $O(h,k,m)$ นั่นคือ $\vec{\lambda} = h\hat{i} + k\hat{j} + m\hat{k}$

$Ax + By = -D$ ในทำนองเดียวกันรอยตัดระหว่างทรงกลมกับระนาบ ผลลัพธ์ที่ได้ก็เป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นวงกลมโดยที่วงที่ใหญ่ที่สุดซึ่งเกิดจากระนาบตัดผ่านศูนย์กลางของทรงกลมก็คือ วงกลมใหญ่(ของทรงกลม) ต่อไปนี้จะแสดงขั้นตอนการหาสมการภาพฉายของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม)

ทรงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-m)^2=R^2$ ถูกตัดด้วยระนาบ $rx+sy+tz+u=0$ หรือ $z=\alpha+\beta x+\gamma y$ ; $\|\bar{r}(t)\|=R$

เมื่อ $\alpha=-\dfrac{u}{t}, \beta=-\dfrac{r}{t}$ และ $\gamma=-\dfrac{s}{t}$

สมการของรอยตัดคือ $(x-h)^2+(y-k)^2+(\alpha+\beta x+\gamma y-m)^2=R^2$ หรือ

$$(x^2-2xh+h^2)+(y^2-2yk+k^2)+(\beta x+\gamma y)^2+2(\beta x+\gamma y)(\alpha-m)+(\alpha-m)^2=R^2$$

$$(x^2-2xh+h^2)+(y^2-2yk+k^2)+(\beta^2x^2+2\beta\gamma xy+\gamma^2y^2)+2\alpha\beta x+2\alpha\gamma y-2\beta mx-2\gamma my$$
$$+\alpha^2-2\alpha m+m^2-R^2=0$$

$$(1+\beta^2)x^2+(1+\gamma^2)y^2+2\beta\gamma xy+2(\alpha\beta-\beta m-h)x+2(\alpha\gamma-\gamma m-k)y$$
$$+(h^2+k^2+m^2-R^2+(\alpha^2-2\alpha m))=0$$

ดังนั้น สมการภาพฉายของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม) บนระนาบ $xy$ คือ

$$(1+\beta^2)x^2+(1+\gamma^2)y^2+2\beta\gamma xy+2(\alpha\beta-\beta m-h)x+2(\alpha\gamma-\gamma m-k)y$$
$$+(h^2+k^2+m^2-R^2+(\alpha^2-2\alpha m))=0$$

เทียบเคียงได้กับสมการเส้นโค้งกำลังสอง $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

ข้อสังเกตถ้า $(x', y')$ เป็นจุดใดๆ ที่อยู่เฉพาะบนระนาบที่ตัดทรงกลมซึ่งให้รอยตัดเป็น วงกลมใหญ่(ของทรงกลม) เมื่อ $R$ เป็นรัศมีของทรงกลม สมการของ วงกลมใหญ่(ของทรงกลม) บนระนาบตัดจะอยู่ในรูป $(x'-h)^2+(y'-k)^2=R^2$ สำหรับทรงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2+(z-m)^2=R^2$ อย่างไม่ต้องสงสัย แต่สมการของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม)ดังกล่าว จะไม่ได้มีรูปแบบเดียวกันเมื่อนำมาพิจารณาบนระนาบ $xy$ เพราะวงกลมดังกล่าวจะให้ "ภาพฉาย" (Projection) บนระนาบ $xy$ โดยรูปร่างของภาพฉายนั้นขึ้นอยู่กับมุมที่ระนาบตัดทำกับระนาบ $xy$ หรือองค์ประกอบของระนาบตัดนั่นเอง และในกรณีทั่วไป ภาพฉายที่เกิดขึ้นมักจะเป็นรูปวงรีบนระนาบ $xy$ ที่มีการย้ายและเลื่อนแกนตามองค์ประกอบของทรงกลมและระนาบตัด โดยกรณีที่ระนาบตัดขนานกับระนาบ $xy$ ภาพฉายจะเป็นวงกลม ซึ่งวงกลมเป็นรูปแบบเฉพาะของวงรีที่มีแกนเอกเท่ากับแกนโท และสมการของทั้งวงกลมและวงรีก็เป็นส่วนหนึ่งของสมการเส้นโค้งกำลังสอง

### 3.3.2 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดทั้งสองบนผิวทรงกลม

ได้กล่าวมานานแล้วว่า เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม) เป็นระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงกลม ทั้งนี้เนื่องมาจากผลลัพธ์ของสมการออยเลอร์ ซึ่งพบว่า ฟังก์ชัน

$$\theta(\phi) = \arccos\left(\frac{C_1 \cot\phi}{\sqrt{1-C_1^2}}\right) + C_2$$

เป็นคำตอบและเมื่อปรับสมการเสร็จแล้ว เราก็พบว่า แนวเส้นโค้ง $\theta(\phi)$ ดังกล่าวสามารถมองได้อีกแง่มุมได้ว่า เป็นแนวเส้นโค้งบนพื้นผิวของทรงกลมที่เกิดจากการนำระนาบตัดผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมและด้วยความรู้ในเรื่องเรขาคณิตเชิงทรงกลม ก็สรุปได้ว่า แนวเส้นโค้งดังกล่าว คือ วงกลมใหญ่(ของทรงกลม) วงกลมที่ใหญ่ที่สุด ในสองมิติ จะมีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวที่ผ่านจุด 2 จุด ส่วนจุด 3 จุด ในสามมิติ จะมีระนาบเพียง 1 ระนาบเท่านั้นที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด เมื่อจุดทั้ง 3 ไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน แต่บางกรณีอาจสรุปไม่ได้ว่าระนาบที่ให้วงกลมใหญ่ (ของทรงกลม) จะมีเพียงหนึ่งเดียวที่ผ่านจุดศูนย์กลางของทรงกลมและอีก 2 จุดบนผิวทรงกลม คือกรณีที่จุด 2 จุดบนผิวเป็นจุดคู่เล็งยัน คือ จุดปลายทั้ง 2 ของเส้นผ่านศูนย์กลางของทรงกลม

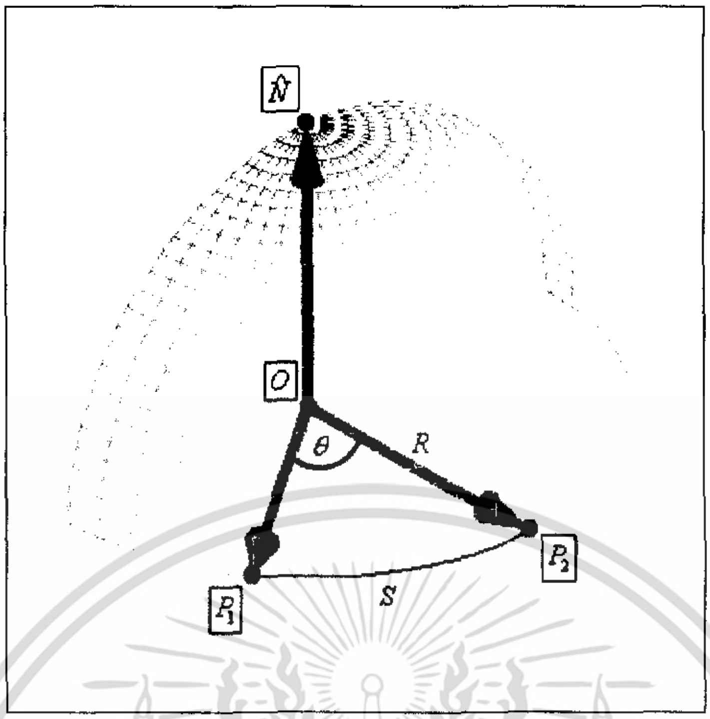
ในกรณีที่จุดทั้ง 2 เป็นจุดคู่เล็งยัน เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม)จะยาว $\pi R$ ซึ่งเป็นระยะทางสั้นที่สุดระหว่างจุดคู่เล็งยัน เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม)เป็นฐานของ เซกเตอร์ที่มีเวกเตอร์ $\overline{OP_1}$ และ $\overline{OP_2}$ เป็นแขนของเซกเตอร์

ดังนั้น $S = \theta R$

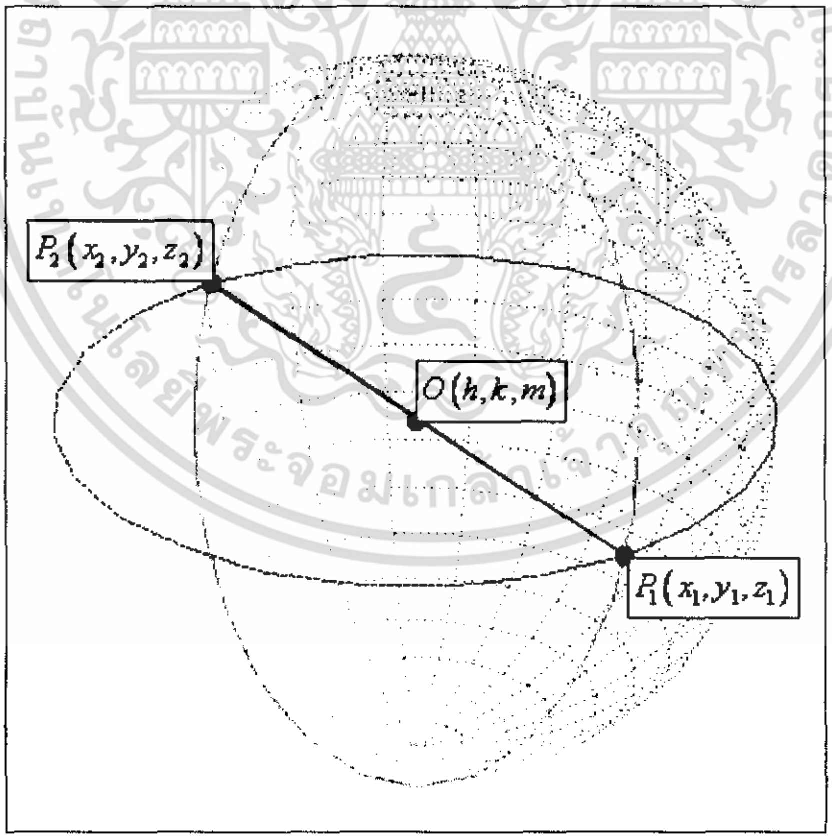
เมื่อ $\theta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}}{R^2}\right)$ จาก $\overline{OP_1}\cdot\overline{OP_2} = \left|\overline{OP_1}\right|\left|\overline{OP_2}\right|\cdot\cos\theta$

และ $\left|\overline{OP_1}\right| = \left|\overline{OP_2}\right| = R$ , $\overline{OP_1}\cdot\overline{OP_2} = (x_1-h)(x_2-h)+(y_1-k)(y_2-k)+(z_1-m)(z_2-m)$

เพราะฉะนั้น $S = R\arccos\left(\frac{\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}}{R^2}\right)$




**รูปที่ 3.6 แสดงระยะทางระหว่างจุด 2 จุดบนผิวทรงกลมบนระนาบ $\hat{N}.\widehat{OP} = 0$**




**รูปที่ 3.7 แสดงตำแหน่งจุดคู่เส้นผ่านศูนย์กลาง $P_1$ และ $P_2$ มุม $\theta = \pi$ บนทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $O(h,k,m)$**

## 3.4. ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกระบอก

### 3.4.1 องค์ประกอบของทรงกระบอก

ในระบบพิกัดทรงกระบอกจุดแต่ละจุดบนผิวทรงกระบอก $x^2 + y^2 = r^2$ ถูกระบุตำแหน่งด้วยพารามิเตอร์ 3 ค่า คือ $z$ , $\theta$ และ $r$ เมื่อ

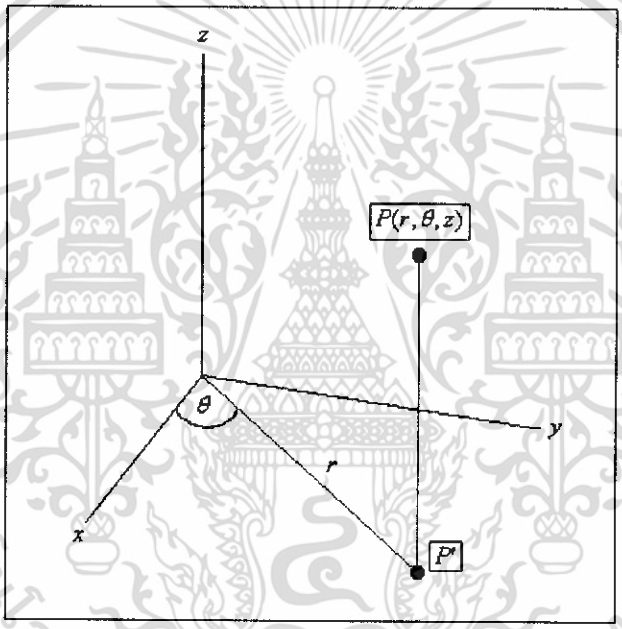
$z$ = ระยะห่างของจุด $P(r,\theta,z)$ เมื่อเทียบกับระนาบ $xy$

$\theta$ = องศาของมุมที่วัดเทียบกับแกน x บวกบนระนาบ $xy$

$r$ = รัศมีของทรงกระบอก

ความสัมพันธ์ระหว่างพารามิเตอร์ในระบบทรงกระบอกกับระบบมุมฉาก เป็นดังนี้

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z, r^2 = x^2 + y^2, \tan\theta = \frac{y}{x}$$




**รูปที่ 3.8 แสดงระบบพิกัดทรงกระบอก**

### 3.4.2 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนผิวทรงกระบอก

เราจะทำการหาเส้นโค้งเส้นที่สั้นที่สุด ซึ่งเชื่อมจุด 2 จุดที่แตกต่างกันบนผิวทรงกระบอก สมมติ $\theta = \theta(z)$ เป็นเส้นโค้งที่ต้องการ

ให้ $\vec{r}(\theta,z) = x(\theta,z)\hat{i} + y(\theta,z)\hat{j} + z(\theta,z)\hat{k}$ เป็นฟังก์ชันเวกเตอร์ของเส้นโค้ง $\theta = \theta(z)$

$$L = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{E\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 2F\left(\frac{d\theta}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dz}\right) + G\left(\frac{dz}{dz}\right)^2}\, dz$$

เมื่อ $$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2$$

เนื่องจาก

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial\theta}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial y}{\partial z}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial z}=1$$

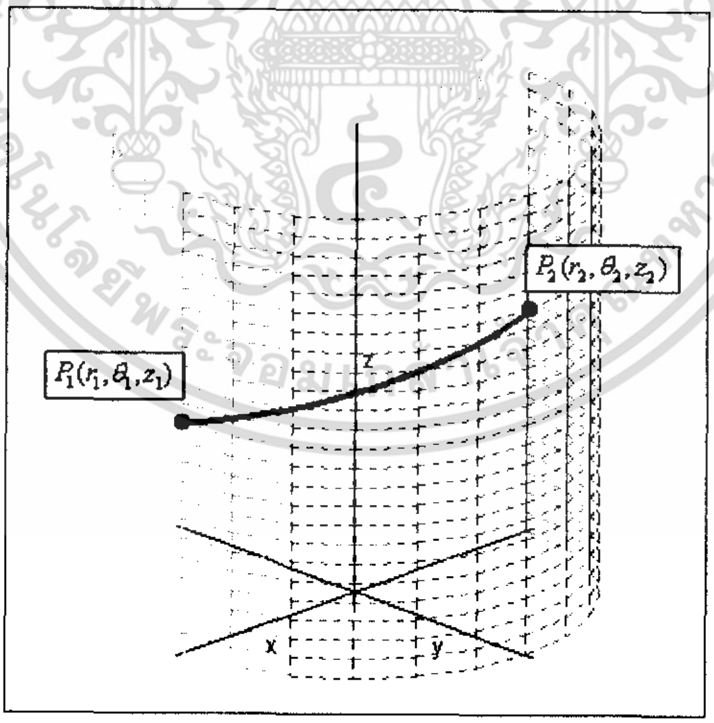
เพราะฉะนั้น

$$E=r^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta+0^2=r^2$$

$$F=(-r\sin\theta)(0)+(r\cos\theta)(0)+(0)(1)=0$$

$$G=(0)^2+(0)^2+(1)^2=1$$

ดังนั้น $L=\int_{z_1}^{z_2}\sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2+1}\,dz$ เป็นความยาวของเส้นโค้ง $\theta=\theta(z)$ บนผิวทรงกระบอก $x^2+y^2=r^2$




**รูปที่ 3.9 แสดงเส้นทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด $P_1(r_1,\theta_1,z_1)$ กับ $P_2(r_2,\theta_2,z_2)$ บนผิวทรงกระบอก**

จากจุด $P_1(r_1,\theta_1,z_1)$ ถึงจุด $P_2(r_2,\theta_2,z_2)$ และสมการของเส้นโค้ง $\theta=\theta(z)$ ที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมจุดทั้ง 2 ดังกล่าว หาได้จากสมการออยเลอร์

จากสมการออยเลอร์ $H_\theta - \dfrac{dH_{\theta'}}{dz} = 0$

กำหนดให้ $H=\sqrt{1+r^2(\theta')^2}$ ; $r$ เป็นค่าคงที่

เนื่องจาก $H_\theta = 0$ , $H_{\theta'} = \frac{1}{2}\left(1+r^2(\theta')^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2r^2(\theta')\right)$

นำไปแทนในสมการออยเลอร์ จะได้ว่า

$$0-\frac{d}{dz}\frac{r^2\theta'}{\sqrt{1+r^2\theta'^2}}=0$$

$$\frac{r^2\theta'}{\sqrt{1+r^2\theta'^2}}=C_1$$

$$r^2\theta'=C_1\sqrt{1+r^2(\theta')^2}$$

$$r^4(\theta')^2=C_1^2\left(1+r^2(\theta')^2\right)$$

$$r^4(\theta')^2-C_1^2r^2(\theta')^2=C_1^2$$

$$(\theta')^2\left(r^4-C_1^2r^2\right)=C_1^2$$

$$(\theta')^2=\frac{C_1^2}{r^4-C_1^2r^2}$$

$$\theta'=\frac{C_1}{r\sqrt{r^2-C_1^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dz}=\frac{\left(\dfrac{C_1}{r^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{C_1}{r}\right)^2}}$$

$$d\theta = \frac{\left(\frac{C_1}{r^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{C_1}{r}\right)^2}}dz$$

ดังนั้น $\theta(z) = mz + C_2$ เป็นเส้นโค้งที่ต้องการ เมื่อ $m = \frac{\left(\frac{C_1}{r^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{C_1}{r}\right)^2}}$

*เรามีอีกวิธีหนึ่งในการหาความยาว L ของเส้นโค้ง $\theta = \theta(z)$ ด้วยวิธีผลบวกแบบรีมันน์* (Riemann's Sum)

*การหาค่าความยาวส่วนของเส้นโค้ง $\theta = \theta(z)$ โดยวิธีผลบวกแบบรีมันน์ เริ่มต้นด้วยการแบ่งส่วนของเส้นโค้ง $\theta = \theta(z)$ ออกเป็น $n$ ส่วนที่เท่ากัน*

เมื่อ $P_1 = P_1(r_1, \theta_1, z_1)$ , $P_2 = P_2(r_2, \theta_2, z_2)$

ดังนั้น $\Delta\theta_i = \frac{\theta_2 - \theta_1}{n}$ ทุกๆ $i = 0,1,2,\ldots,n$

จากรูปแต่ละส่วนย่อย $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta s_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$

เนื่องจาก $\Delta s_i = r\Delta\theta_i$

$$\Delta l_i = \sqrt{(r\Delta\theta_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$$

เมื่อนำแต่ละส่วนมารวมกัน

$$L \approx \sum_{i=0}^{n} \sqrt{r^2(\Delta\theta_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$$

จากนิยามของผลบวกแบบรีมันน์ (Riemann's Sum)

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{r^2(\Delta\theta_i)^2 + (\Delta z_i)^2} = \int \sqrt{r^2(d\theta)^2 + (dz)^2}$$

หรือ $$L = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 1}\,dz$$

ซึ่งได้สูตรเดียวกัน

แต่เนื่องจากทรงกระบอกเป็นรูปทรงสมมาตร การระบุพิกัดของจุดบนพื้นผิวของทรงกระบอกด้วยค่ามุม $\theta$ จึงอยู่ระหว่าง 0 ถึง 180 องศา หรือสำหรับ $P(r,\theta,z); 0 \le \theta \le \pi$

ขั้นตอนในการคำนวณระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนพื้นผิวทรงกระบอกกลม ทำได้โดยการกำหนดค่า $r$ ของทรงกระบอกและทำการกำหนดพิกัดจุดที่ต้องการหาระยะทางที่สั้นที่สุด 2 จุด คือ $(\theta_1, z_1)$ และ $(\theta_2, z_2)$ และจึงคำนวณหาสัมประสิทธิ์ $m$ และ $C$ และจึงคำนวณหาค่า $L = \sqrt{1+r^2m^2}\,(z_2 - z_1)$

กำหนดให้เส้นโค้งผ่านจุด $(\theta_1, z_1)$ และ $(\theta_2, z_2)$ จะได้ระบบสมการ

$$\theta_1 = mz_1 + C \qquad \text{------------ (1)}$$

$$\theta_2 = mz_2 + C \qquad \text{------------ (2)}$$

นำสมการ (2) – (1)

$$\theta_2 - \theta_1 = m(z_2 - z_1)$$

$$m = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{(z_2 - z_1)}$$

$$C = \theta_1 - mz_1 \quad \text{หรือ} \quad C = \theta_2 - mz_2$$

จาก $L = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2 + 1}\,dz$

และ $\frac{d\theta}{dz} = m$

$$L = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1+r^2m^2}\,dz$$

$$= \sqrt{1+r^2m^2}\int_{z_1}^{z_2} dz$$

เพราะฉะนั้นระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกระบอกจะมีค่าเท่ากับ $L = \sqrt{1+r^2m^2}\,(z_2 - z_1)$

## 3.5 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงกรวยกลม

### 3.5.1 องค์ประกอบของผิวทรงกรวยกลม

จากระบบพิกัดทรงกลม กำหนดให้ มุม $\phi$ มีค่าคงที่ ดังนั้น จุด $P(x, y, z)$ บนผิวของกรวยหาได้จาก $x = R\sin\phi\cos\theta$ $y = R\sin\phi\sin\theta$ และ $z = R\cos\phi$ เมื่อ $\phi$ คงตัว

หรือ $x(R,\theta) = R\sin\phi\cos\theta$ $y(R,\theta) = R\sin\phi\sin\theta$ และ $z(R,\theta) = R\cos\phi$

### 3.5.2 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนผิวทรงกรวยกลม

กำหนดให้

$R = R(\theta)$ เป็นสมการของเส้นโค้ง และ $\theta = \theta(t)$

$$\frac{\partial x}{\partial R} = \sin\phi\cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial R} = \sin\phi\sin\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial R} = \cos\phi$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -R\sin\phi\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = R\sin\phi\cos\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

$$E = \sin^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi = 1$$

$$F = -R\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta + R\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta + 0 = 0$$

$$G = R^2\sin^2\phi\sin^2\theta + R^2\sin^2\phi\cos^2\theta = R^2\sin^2\phi$$

$$L = \int_a^b \sqrt{(R')^2 + R^2\sin^2\phi(\theta')^2}\,dt$$

เนื่องจาก $R = R(\theta)$ $\frac{dR}{dt} = R'$ แล้ว $dR = R'dt$ และ $d\theta = \theta' dt$

$$L = \int_a^b \sqrt{(dR)^2 + R^2\sin^2\phi(d\theta)^2}$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + R^2\sin^2\phi}\,d\theta \quad \text{หรือ} \quad J\left[R(\theta)\right] = R\sin\phi\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}\,d\theta$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}$$

จากสมการของออยเลอร์ $H_R - \frac{dH}{d\theta}R' = 0$

$$H_R = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2\left(-\frac{2}{R^3}\right) = -\frac{\frac{1}{R^3}\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}}$$

$$H_{R'} = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2R'}{(R\sin\phi)^2}\right) = \frac{\frac{R'}{(R\sin\phi)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}}$$

แต่เนื่องจาก $H=\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}$ ไม่ขึ้นกับ $\theta$ สมการออยเลอร์จึงเปลี่ยนรูปเป็น $H-R'H_{R'}=C$ เมื่อนำมาแทนในสมการ จะได้ $H-R'H_{R'}=C_1$

$$\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}-R'\cdot\left(\frac{\frac{R'}{(R\sin\phi)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}}\right)=C_1$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}-\frac{\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}}=C_1$$

$$\frac{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}}-\frac{\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}}=C_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}}=C_1$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2}=\frac{1}{C_1}$$

$$\left(\frac{R'}{R\sin\phi}\right)^2=C_2 \qquad ;\ C_2=\frac{1}{C_1^2}-1$$

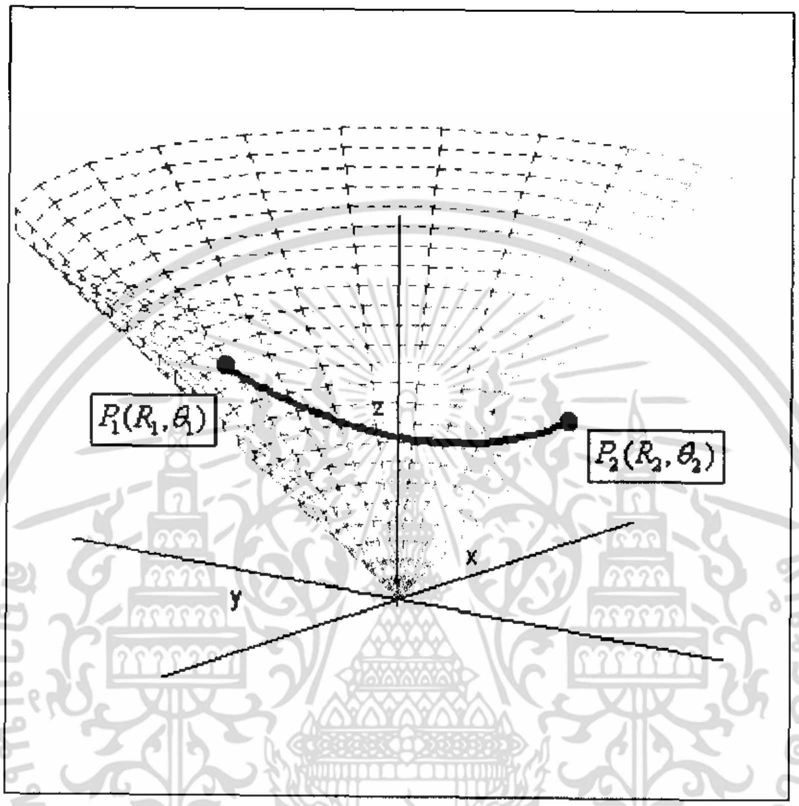
$$\frac{R'}{R\sin\phi}=\sqrt{C_2}$$

$$\int\frac{1}{R}\,dR=C_3\int\sin\phi\, d\theta \qquad ;\ C_3=\sqrt{C_2}$$

$$\ln R = (C_3 \sin\phi)\theta + \ln C_4$$

$$R = e^{(C_3 \sin\phi)\theta + \ln C_4}$$

ดังนั้น $R = Ae^{(B\sin\phi_0)\theta}$ เป็นสมการเส้นโค้งคำตอบ $\quad (A = e^{\ln C_4}, B = C_3)$




**รูปที่ 3.10 แสดงเส้นทางที่สั้นที่สุดระหว่าง $P_1(R_1,\theta_1)$ กับ $P_2(R_2,\theta_2)$ บนผิวกรวยกลม**

กำหนดให้ เส้นโค้งสั้นที่สุดบนผิวกรวยกลมที่ผ่านจุด $(R_1,\theta_1)$ และ $(R_2,\theta_2)$ ทำให้ได้สมการ

$$R_1 = Ae^{(B\sin\phi_0)\theta_1} \qquad \text{-------- (1)}$$

$$R_2 = Ae^{(B\sin\phi_0)\theta_2} \qquad \text{-------- (2)}$$

นำ (2)/(1)

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{Ae^{(B\sin\phi_0)\theta_2}}{Ae^{(B\sin\phi_0)\theta_1}} = e^{(B\sin\phi_0)(\theta_2-\theta_1)}$$

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = (B\sin\phi_0)(\theta_2-\theta_1)$$

$$B = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\sin\phi_0(\theta_2-\theta_1)}$$

นำ (2)-(1)

$$R_2 - R_1 = A\left(e^{(B\sin\phi_0)\theta_2} - e^{(B\sin\phi_0)\theta_1}\right)$$

$$A = \frac{R_2 - R_1}{e^{(B\sin\phi_0)\theta_2} - e^{(B\sin\phi_0)\theta_1}}$$

เนื่องจากกรวยเป็นรูปทรงสมมาตร ดังนั้น $0 \le \theta_2 - \theta_1 \le \pi$

ขั้นตอนในการคำนวณหาระยะทางระหว่างจุดบนพื้นผิวกรวยกลม เราต้องกำหนดค่า $\phi$ ของกรวยกลม โดยที่ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ หลังจากนั้นกำหนดพิกัดของจุดทั้ง 2 บนผิวกรวยกลม คือ จุด $P_1(R_1, \theta_1)$ และ $P_2(R_2, \theta_2)$ ต่อมาจึงคำนวณหาสัมประสิทธิ์ $A$ และ $B$ เมื่อกำหนดสมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนผิวกรวยที่ผ่านจุดทั้งสอง เราจะได้ได้สมการ $R = Ae^{(B\sin\phi_0)\theta}$ นำมาคำนวณด้วยสูตร $L(P_1, P_2) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + (R')^2}\, d\theta$ ก็จะได้คำตอบ

## 3.6 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงพาราโบลอยด์

### 3.6.1 องค์ประกอบของผิวทรงพาราโบลอยด์

ในกรณีของผิวทรงพาราโบลอยด์ เราได้นำแนวคิดจากนิยาม "พื้นผิวของการหมุน" มาประยุกต์ใช้ในการระบุตำแหน่งจุดบนพื้นผิวทรงพาราโบลอยด์ เนื่องจากผิวทรงพาราโบลอยด์ไม่มีระบบวัดพิกัดตำแหน่ง

**นิยาม** พื้นผิวของการหมุน

"พื้นผิวของการหมุน" แทนด้วย $M(f)$ โดย

$M(f) = \left\{\left(x, y, f(\sqrt{x^2 + y^2})\right) \middle| (x, y) \in R^2\right\}$ สำหรับฟังก์ชัน $C^\infty\ f : [0, \infty) \to R$

ที่ทำให้ฟังก์ชัน $(x, y) \in R^2 \to f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \in R$ เป็น $C^\infty$

สมการอีลิปติคพาราโบลอยด์ $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

กำหนดให้ $a = b$

$$\therefore z = \frac{1}{a^2}\left(x^2 + y^2\right)$$

จากระบบพิกัดเชิงขั้ว $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

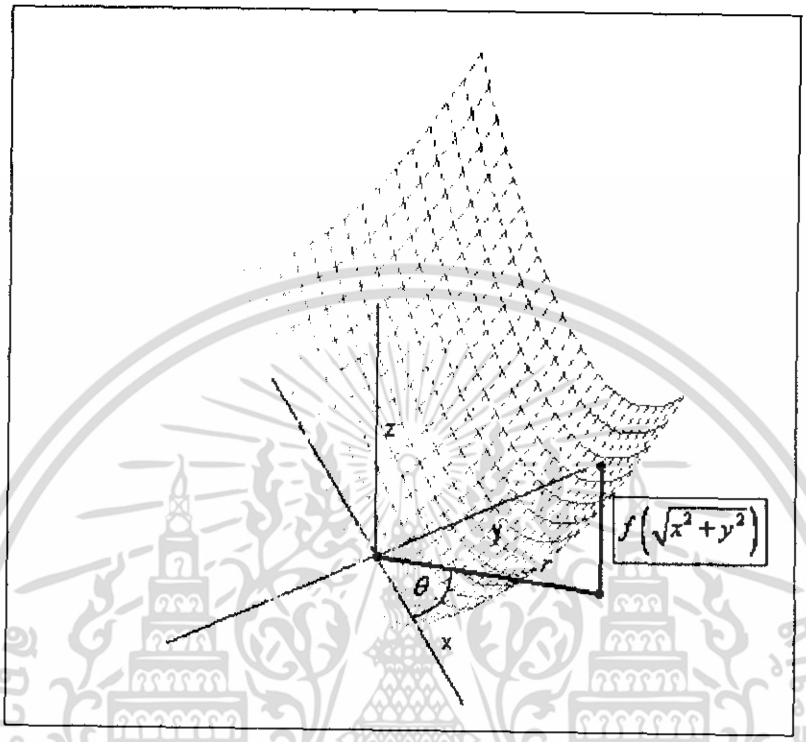
กำหนดให้ $\vec{u} = x\hat{i} + y\hat{j} + f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ระบุตำแหน่ง

$$\vec{u} = \vec{u}(r, \theta) = x(r, \theta)\hat{i} + y(r, \theta)\hat{j} + z(r, \theta)\hat{k}$$

$$\because x^2 + y^2 = r^2 \qquad \therefore z = z(r, \theta) = \frac{r^2}{a^2}$$

$$\vec{u}(r,\theta) = r\cos\theta\hat{i} + r\sin\theta\hat{j} + \frac{r^2}{a^2}\hat{k}$$

เราจะแสดงการวัดพิกัดของจุดบนผิวทรงพาราโบลอยด์ ดังรูปที่ 3.11




**รูปที่ 3.11 แสดงระบบพิกัดของทรงพาราโบลอยด์**

### 3.6.2 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนผิวทรงพาราโบลอยด์

กำหนดให้ $r = r(\theta)$ และ $\theta = \theta(t)$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{2r}{a^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

เมื่อ $E = \cos^2\theta + \sin^2\theta + \frac{4r^2}{a^4} = 1 + \frac{4r^2}{a^4}$

$$F = -r\cos\theta\sin\theta + r\cos\theta\sin\theta = 0$$

$$G = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(1 + \frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2 + \left(r^2\right)(\theta')^2}\,dt$$

เนื่องจาก $r = r(\theta)$ $\frac{dr}{dt} = r'$ แล้ว $dr = r'dt$ และ $d\theta = \theta' dt$

$$L = \int_{a}^{b} \sqrt{\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(dr)^2 + \left(r^2\right)(d\theta)^2}$$

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta \text{ หรือ } J[r] = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2 + r^2}\, d\theta$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2} \text{ ซึ่งไม่ขึ้นกับตัวแปร } \theta$$

สมการออยเลอร์จะอยู่ในรูป $H - r'H_{r'} = C$

$$H_{r'} = \frac{1}{2}\left(r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)r' = \frac{\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)r'}{\sqrt{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}}$$

นำมาแทนในสมการออยเลอร์

จะได้ $H - r'H_{r'} = C_1$

$$\sqrt{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2} - r'\left(\frac{\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)r'}{\sqrt{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}}\right) = C_1$$

$$\frac{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}{\sqrt{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}} - \frac{\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}{\sqrt{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}} = C_1$$

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}} = C_1$$

$$\sqrt{r^2+\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2}=\frac{r^2}{C_1}$$

$$r^2+\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)(r')^2=\frac{r^4}{(C_1)^2}$$

$$(r')^2=r^2\frac{\left(\frac{r^2}{C_1^2}-1\right)}{\left(1+\frac{4r^2}{a^4}\right)}$$

$$r'=\frac{\frac{C_1}{C_1}(r)\left(\sqrt{\frac{r^2}{C_1^2}-1}\right)}{\sqrt{1+\frac{4r^2}{a^4}}}$$

$$r'=\frac{r\sqrt{r^2-C_1^2}}{C_1}\cdot\frac{a^2}{\sqrt{a^4+4r^2}}$$

$$r'=\frac{a^2}{C_1}\cdot\frac{r\sqrt{r^2-C_1^2}}{\sqrt{a^4+4r^2}}$$

$$r'=\frac{a^2}{2C_1}\cdot\frac{r\sqrt{r^2-C_1^2}}{\sqrt{r^2+\left(\frac{a^2}{2}\right)^2}}$$

$$\int\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2+\left(\frac{a^2}{2}\right)^2}{r^2-C_1^2}}dr=\int\frac{a^2}{2C_1}d\theta$$

กำหนดให้ $m=\frac{a^2}{2}$ และ $n=C_1$

จะได้ $$\int\frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2+m^2}{r^2-n^2}}dr=\frac{a^2}{2n}\theta+C$$

$$\int \frac{1}{r}\sqrt{\frac{r^2-n^2+m^2+n^2}{r^2-n^2}}dr = \frac{a^2}{2n}\theta + C$$

$$\int \frac{1}{r}\sqrt{1-\frac{m^2+n^2}{r^2-n^2}}dr = \frac{a^2}{2n}\theta + C$$

กำหนดให้ $r = n\cos\phi \quad dr = n\sec\phi\tan\phi d\phi$

จะได้ $$\int \frac{1}{n\sec\phi}\sqrt{1+\frac{m^2+n^2}{n^2\tan^2\phi}}\left(n\sec\phi\tan\phi d\phi\right) = \frac{a^2}{2n}\theta + C$$

$$\int \frac{1}{n\sec\phi\tan\phi}\sqrt{n^2\tan^2\phi+\left(m^2+n^2\right)}\left(n\sec\phi\tan\phi d\phi\right) = \frac{a^2}{2n}\theta + C$$

$$\int n\sqrt{\tan^2\phi+\left(\frac{m^2+n^2}{n^2}\right)}d\phi = \frac{a^2}{2n}\theta + C$$

$$n\int\sqrt{\tan^2\phi+\left(\frac{m^2}{n^2}+1\right)}d\phi = \frac{a^2}{2n}\theta + C$$

$$n\int\sqrt{\sec^2\phi+\left(\frac{m}{n}\right)^2}d\phi = \frac{a^2}{2n}\theta + C$$

แต่เนื่องจาก $\int\sqrt{\sec^2\phi+\left(\frac{m}{n}\right)^2}d\phi$ ไม่สามารถอินทิเกรตโดยตรงได้ จึงจำเป็นต้องติดในรูปอินทิกรัล

## 3.7 ปัญหาระยะทางที่สั้นที่สุดบนผิวทรงทอรัส

### 3.7.1 องค์ประกอบของผิวทรงทอรัส

ในกรณีของทอรัส เราอาจจะพิจารณารูปทรงได้ว่าเกิดขึ้นจากการนำแผ่นวงกลมรัศมี $r$ มาหมุนรอบแกน $z$ โดยให้จุดศูนย์กลางของวงกลมดังกล่าวหมุนเป็นระยะห่างที่คงที่จากแกน $z$ ซึ่งระยะห่างดังกล่าวคือรัศมีของทอรัส นั่นคือ

ถ้ากำหนดให้ $R$ เป็นรัศมีของทอรัส (ระยะห่างจากจุดกำเนิดไปยังจุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี $r$ )

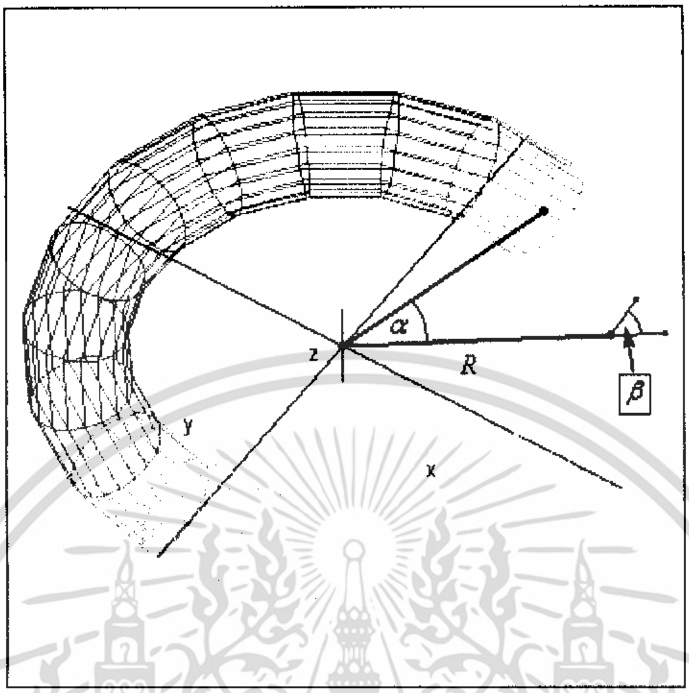
$r$ เป็นรัศมีของวงกลม

$\alpha$ เป็นมุมระหว่าง 2 วงกลมที่ต่างกันบนระนาบ $xy$

$\beta$ เป็นมุมที่รัศมีของวงกลมทำกับระนาบ $xy$

พิกัด $x, y$ และ $z$ หาได้จากความสัมพันธ์

$$x = (R + r\cos\beta)\cos\alpha \quad y = (R + r\cos\beta)\sin\alpha \quad z = r\sin\beta$$




**รูปที่ 3.12 แสดงระบบวัดพิกัดบนผิวทรงทอรัส**

**3.7.2 ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุด 2 จุด บนผิวทรงทอรัส**

กำหนดให้ $\alpha = \alpha(\beta)$ และ $\beta = \beta(t)$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -(R + r\cos\beta)\sin\alpha \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = (R + r\cos\beta)\cos\alpha \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial \beta} = -r\cos\alpha\sin\beta \qquad \frac{\partial y}{\partial \beta} = -r\sin\alpha\sin\beta \qquad \frac{\partial z}{\partial \beta} = r\cos\beta$$

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 \\ &= (R + r\cos\beta)^2 \sin^2\alpha + (R + r\cos\beta)^2 \cos^2\alpha \\ &= (R + r\cos\beta)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 \\ &= r^2\sin^2\beta\cos^2\alpha + r^2\sin^2\beta\sin^2\alpha + r^2\cos^2\beta \\ &= r^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial x}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial z}{\partial \beta} \\ &= r\cos\alpha\sin\beta(R + r\cos\beta)\sin\alpha - r\sin\alpha\sin\beta(R + r\cos\beta)\cos\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore L = \int_a^b \sqrt{E\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + G\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(R + r\cos\beta)^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_a^b \sqrt{(R + r\cos\beta)^2 (d\alpha)^2 + r^2 (d\beta)^2}$$

$$= \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{(R + r\cos\beta)^2\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + r^2}\, d\beta$$

$$= r\int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\left(\frac{R + r\cos\beta}{r}\right)^2\left(\frac{d\alpha}{d\beta}\right)^2 + 1}\, d\beta$$

หรือ $$L = r\int_{\beta_1}^{\beta_2} \sqrt{\left(\frac{R + r\cos\beta}{r}\right)^2 (\alpha')^2 + 1}\, d\beta$$

กำหนดให้

$$H = \sqrt{\left(\frac{R + r\cos\beta}{r}\right)^2 (\alpha')^2 + 1}$$

จากสมการ Euler's $H_\beta - \dfrac{dH}{d\alpha}\beta'$

แต่เนื่องจาก $H = H(\beta, \alpha')$ ไม่ขึ้นกับ $\beta'$

สมการ Euler's จะอยู่ในรูป $H_{\alpha'} = C_1$

$$H_{\alpha'} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{R + r\cos\beta}{r}\right)^2 (\alpha')^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2\left(\frac{R + r\cos\beta}{r}\right)^2 \cdot \alpha'$$

เมื่อนำไปแทนในสมการจะได้ $H_{\alpha'} = C_1$

$$\frac{\left(\frac{R + r\cos\beta}{r}\right)^2 \cdot \alpha'}{\sqrt{\left(\frac{R + r\cos\beta}{r}\right)^2 (\alpha')^2 + 1}} = C_1$$

$$\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 \cdot \alpha' = C_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 (\alpha')^2 + 1}$$

$$\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^4 \cdot (\alpha')^2 = C_1^2 \cdot \left(\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 (\alpha')^2 + 1\right)$$

$$\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^4 \cdot (\alpha')^2 = C_1^2 + C_1^2 \cdot \left(\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 (\alpha')^2\right)$$

$$\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 \left(\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 - C_1^2\right)(\alpha')^2 = C_1^2$$

$$\alpha' = \frac{C_1}{\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)\sqrt{\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 - C_1^2}}$$

$$\alpha = \int \frac{C_1}{\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)\sqrt{\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 - C_1^2}}\, d\beta$$

แต่เนื่องจาก $\int \frac{C_1}{\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)\sqrt{\left(\frac{R+r\cos\beta}{r}\right)^2 - C_1^2}}\, d\beta$ ไม่สามารถอินทิเกรตโดยตรงได้ จึงจำเป็นต้องติดในรูปอินทิกรัล

# บทที่ 4

# ผลการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล

จากผลการศึกษาค้นคว้าด้วยวิธีแคลคูลัสของการแปรผัน ซึ่งใช้สมการของออยเลอร์เป็นพื้นฐานในการศึกษาและรูปทรงที่ได้นำมาศึกษาในโครงงานปัญหาพิเศษนี้ ได้พบข้อจำกัดจำแนกตามกรณี ได้ดังนี้

**สำหรับทรงกระบอก**

สมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวรูปทรงกระบอกจะอยู่ในรูปของความสัมพันธ์เชิงเส้น ดังนี้

$$\theta(z) = Mz + C$$

ภายใต้การวัดตำแหน่งด้วยระบบพิกัดทรงกระบอก $(r, \theta, z)$

เมื่อ $M = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{z_2 - z_1}$

และ $C = \theta_1 - Mz_1$ หรือ $C = \theta_2 - Mz_2$

ในกรณีของทรงกระบอกความยาวของเส้นโค้ง $\theta = \theta(z)$ สามารถหาได้จาก

สมการ

$$L = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2}\, dz$$

เนื่องจาก

$$\theta(z) = Mz + C \text{ และ } \frac{d\theta}{dz} = M$$

ดังนั้น

$$L = \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dz}\right)^2} \int_{z_1}^{z_2} dz$$

หรือ

$$L = (z_2 - z_1)\sqrt{1 + r^2 M^2}$$

จากการพิจารณาสังเกตพบว่า ถ้า $z_1 = z_2$ สัมประสิทธิ์ $M$ จะไม่สามารถหาค่าได้ ซึ่งก็จะส่งผลให้ไม่สามารถคำนวณหาค่าความยาว $L$ ได้ แต่เพราะว่าในกรณีที่ $z_1 = z_2$ จุด $(\theta_1, z_1)$ และ $(\theta_2, z_2)$ อยู่ในระดับเดียวกัน

ดังนั้น จึงพิจารณาได้ว่า จุดทั้ง 2 อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ $r$ และการคำนวณความยาวสามารถคำนวณได้จากสมการ $L = r(\theta_2 - \theta_1)$

**สำหรับกรวยกลม**

สมการเส้นโค้งที่สั้นที่สุดบนพื้นผิวรูปทรงกรวยกลม จะอยู่ในรูป ดังนี้

$$R(\theta) = Ae^{(B\sin\phi_0)\theta}$$

ภายใต้การวัดด้วยระบบพิกัดทรงกลม $(R,\theta,\phi)$ สำหรับ $\phi = \phi_0$ ที่คงที่

เมื่อ $$B = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\sin\phi_0(\theta_2 - \theta_1)}$$

และ $$A = \frac{R_2 - R_1}{e^{(B\sin\phi_0)\theta_2} - e^{(B\sin\phi_0)\theta_1}}$$

ในกรณีของกรวยกลม ความยาวของเส้นโค้ง $R = R(\theta)$ สามารถหาได้จาก

สมการ

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + (R')^2}\, d\theta$$

เนื่องจาก

$$R(\theta) = Ae^{(B\sin\phi_0)\theta} \text{ และ } \frac{dR}{d\theta} = (AB\sin\phi_0)e^{(B\sin\phi_0)\theta}$$

ดังนั้น

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1 + (AB\sin\phi_0)^2 e^{2(B\sin\phi_0)\theta}}\, d\theta$$

จากการพิจารณาจะสังเกตพบว่า

1. ถ้า $R_1 = R_2$ สัมประสิทธิ์ $B = 0$ เนื่องจาก $\ln 1 = 0$ ซึ่งจะส่งผลให้ไม่สามารถคำนวณหาสัมประสิทธิ์ $A$ ได้
2. ถ้า $\theta_1 = \theta_2$ สัมประสิทธิ์ $B$ จะไม่สามารถคำนวณหาค่าได้
3. ถ้า $\phi_0 = 0$ สัมประสิทธิ์ $A$ จะไม่สามารถคำนวณหาค่าได้

ดังนั้นจึงจำกัดอยู่ในกรณีที่

1. $\Delta\theta \neq 0$ และ $\Delta R \neq 0$
2. $\phi_0 \neq 0$ ; $0 < \theta < \pi$ และ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

**สำหรับพาราโบลอยด์และทอรัส**

รูปทรงพาราโบลอยด์และรูปทรงทอรัสนั้น ไม่สามารถทำการอินทิเกรตได้โดยตรง หากจะทำการคำนวณต้องทำการคำนวณแบบประมาณค่าเชิงตัวเลขต่อไป

# บทที่ 5

# สรุปผลการจัดทำปัญหาพิเศษและข้อเสนอแนะ

## 5.1 บทสรุปผลการวิจัย

ในการศึกษาวิเคราะห์เพื่อค้นคว้าเกี่ยวกับเส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของรูปทรงทางเรขาคณิตด้วยวิธีการฟังก์ชันนอลโดยใช้สมการออยเลอร์เป็นเครื่องมือในการศึกษา พบว่าวิธีการดังกล่าวมีข้อจำกัดในการศึกษา ด้วยเนื่องจากวิธีการฟังก์ชันนอลที่ใช้สมการออยเลอร์นั้นจำกัดอยู่เฉพาะในกรณีที่รูปทรงทางเรขาคณิตนั้นสามารถระบุตำแหน่งได้ด้วยระบบพิกัดชนิดใดชนิดหนึ่งเท่านั้น เช่น ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ $(x, y, z)$ ระบบพิกัดทรงกระบอก $(r,\theta,z)$ และระบบพิกัดทรงกลม $(\rho,\theta,\phi)$ จากเหตุผลดังกล่าว รูปทรงทางเรขาคณิตที่ศึกษาเพื่อหาสมการโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของรูปทรงทางเรขาคณิตจึงจำกัดเฉพาะอยู่ที่ระนาบทรงกลม ทรงกระบอกกลมและทรงกรวยกลมเท่านั้น

ในกรณีของระนาบ เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของระนาบ คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดที่ต่างกันบนระนาบ ซึ่งกรณีของระนาบเป็นกรณีพื้นฐานที่สุดในการศึกษาและเราทราบกันดีอยู่แล้วว่า ระยะทางที่สั้นที่สุดซึ่งเชื่อมโยงระหว่างจุดสองจุดที่ต่างกันบนระนาบคือส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างสองจุดดังกล่าว

ส่วนกรณีของทรงกลม และทรงกระบอกนั้นสามารถใช้ระบบพิกัดวัดตำแหน่งของจุดบนพื้นผิวได้โดยตรง ซึ่งสำหรับทรงกลมนั้นหลังจากได้ทำการศึกษาแล้ว พบว่า เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของทรงกลมนั้น คือ เซกเมนต์ของวงกลมใหญ่(ของทรงกลม)

สำหรับทรงกระบอก เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของทรงกระบอกนั้น คือ ส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเกลียวหรือฮีลิกซ์ (Helix)

สำหรับทรงกรวยกลมนั้น เส้นโค้งที่สั้นที่สุดที่พาดผ่านบนพื้นผิวของทรงกรวยกลม คือ ส่วนของเส้นโค้งที่มีลักษณะเป็นเส้นเวียนก้นหอยหรือสไปรัล (Spiral)

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

การศึกษาปัญหาระยะทางสั้นที่สุดบนพื้นผิวของรูปทรงใดๆด้วยแคลคูลัสของการแปรผัน โดยใช้สมการออยเลอร์เป็นเครื่องมือศึกษา มีข้อจำกัดอยู่ที่จุดทุกจุดบนพื้นผิวของรูปทรงที่พิจารณาสามารถวัดตำแหน่งได้ด้วยระบบพิกัดชนิดใดชนิดหนึ่ง ดังนั้นรูปทรงที่จะศึกษาจึงถูกจำกัด เช่น ระนาบ ทรงกลม ทรงกระบอกและกรวยกลม แต่ถึงแม้รูปทรงที่พิจารณาจะมีพิกัดวัดตำแหน่ง การศึกษาปัญหานี้ด้วยแคลคูลัสของการแปรผันก็ยังมีข้อจำกัด เช่น รูปทรงทอรัสหรือรูปทรงพาราโบลอยด์ ซึ่ งถึงแม้จะมีระบบพิกัดวัดตำแหน่ง แต่การคำนวณก็ยังมีจุดที่ติดขัดอยู่ ซึ่งทางคณะผู้จัดทำเห็นว่าการศึกษาปัญหาในลักษณะแบบนี้บนรูปทรงต่างๆ ควรลองศึกษาด้วย Differential Geometry ซึ่งในปัจจุบันมีผู้ที่สนใจค้นคว้าเป็นแนวทางอยู่บ้างแล้ว

# เอกสารอ้างอิง


1. Minoru Tanaka. **Behaviors Of Geodesics on a Surface of Revolution** : Department Of Mathematics Tokai University 2000.
2. รศ.ภัคคินี ชิตสกุล. **เอกสารประกอบการสอน วิชา Mathematical Modeling** : สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง 2004.
3. John Oprea. **Differential Geometry and Its Applications**. New Jersey : Prentice-Hall, Inc. 1997