

**สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง**

การจำลองการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตผ่านครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ด

**Simulation of Conjugate Heat Transfer through Louvered Fins**



เลขหมู่.....  
เลขทะเบียน.....62442  
วัน,เดือน,ปี...18...ค.ค...2549

b.....  
i.....

ปริญญานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต  
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ปีการศึกษา 2548

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปริญญานิพนธ์ปีการศึกษา 2548

ภาควิชา วิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

เรื่อง การจำลองการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตผ่านครีบริบายความร้อนแบบเกล็ด

**Simulation of Conjugate Heat Transfer through Louvered Fins**

ผู้จัดทำ

1. นาย กุลกิต รังสีปราการ รหัสประจำตัว 45010056
2. นายเกริกไกร ชูมิตร รหัสประจำตัว 45010061



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## การจำลองการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกต์ผ่านครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ด

นายกุลกิต	รังสิตปราวการ	รหัสประจำตัว 45010056
นายเกริกไกร	ยุวมิตร	รหัสประจำตัว 45010061
ผศ.ดร. มณฑล	ใจกุศล	อาจารย์ที่ปรึกษา
ผศ.ดร. จารุวัตร	เจริญสุข	อาจารย์ที่ปรึกษา
		ปีการศึกษา 2548

### บทคัดย่อ

งานวิจัยฉบับนี้นำเสนอผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของการไหลราบเรียบผ่านครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดโดยการจำลองได้ใช้โปรแกรมทางด้านการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (STAR-CD) งานวิจัยนี้เริ่มด้วยการตรวจสอบระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของโปรแกรม STAR-CD ด้วยปัญหาการถ่ายเทความร้อนของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบ ซึ่งปัญหาแบ่งออกเป็น 2 กรณี กรณีที่ 1 กำหนดค่าอุณหภูมิที่พื้นผิวของของไหลมีค่าคงที่ที่ 400K และใช้ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนของของไหลในการคำนวณ ในกรณีที่ 2 กำหนดค่าอุณหภูมิที่พื้นผิวของของแข็งมีค่าคงที่ที่ 400K และใช้ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกในการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนที่พื้นผิวควบคุมระหว่างของแข็งและของไหลในการคำนวณ หรือที่เรียกว่าการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกต์ การตรวจสอบความถูกต้องทำได้โดยเปรียบเทียบผลการจำลองกับผลเฉลยแน่นอนตรง พบว่าค่าเฉลี่ยการถ่ายเทความร้อนแตกต่างกันน้อยกว่า 5% หลังจากพบว่าโปรแกรมมีความน่าเชื่อถือจึงนำองค์ความรู้และหลักการที่ได้กล่าวมาแล้วไปประยุกต์ใช้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนของการไหลราบเรียบแบบคอนจูกต์ผ่านครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ด ซึ่งครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดทำจากวัสดุสองชนิด รูปร่างต่างกันแต่น้ำหนักเท่ากัน โดยกำหนดให้วัสดุทำจากอลูมิเนียมและทองแดง ผลการจำลองของอลูมิเนียมนำไปเปรียบเทียบกับผลการทดลอง พบว่าค่าเฉลี่ยการถ่ายเทความร้อนแตกต่างกันน้อยกว่า 5% ส่วนผลการจำลองของทองแดงนำไปเปรียบเทียบกับผลการจำลองของอลูมิเนียม พบว่าค่าเฉลี่ยการถ่ายเทความร้อนแตกต่างกันน้อยกว่า 5%

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## Simulation of Conjugate Heat Transfer through Louvered Fins

Kulakit	Rungsiparkan	45010056
Kirkrai	Yuvamitra	45010061
Assist.Prof. Dr.Montol Jaikusol		Advisor
Assist.Prof. Dr.Jaruwat Chareonsuk		Advisor

### ABSTRACT

This project is the simulation represents heat transfer in laminar flow trough louver fin using the calculating program for fluid dynamics (STAR-CD). The project starts with numerical verification of STAR-CD program in two conditions of heat transfer in laminar flow through flat plat: 1 Fixing the surface temperature of fluid at 400K and taking the conductivity coefficient into account in the calculation.2 Fixing the surface temperature of solid at 400K and in calculation, taking into account the conductivity coefficient of the control surface between solid and fluid,which is estimated by using the harmonic mean or this is so-called conjugated heat transfer. The verification is done by comparing the results between the simulation and the exact solution. It shows that the difference of two average heat transfer is less than 5%,which means this program is reliable. Thus, further more, the knowledge and principles are applied for the problems of conjugated heat transfer in laminar flow through louver fin. The fins are made of two different materials, Aluminium and Copper of same weight but in different shapes. The result shows that the difference of average heat transfer of Aluminium between simulation result and test result is less than 5% and the difference of average heat transfer of the simulation results between Copper and Aluminium is less than 5% as well.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## กิตติกรรมประกาศ

ปริญญาานิพนธ์ฉบับนี้คงไม่อาจเสร็จสมบูรณ์ได้ด้วยดี หากไม่ได้รับความช่วยเหลือและความร่วมมือจากหลาย ๆ ฝ่ายด้วยกัน ได้แก่ อาจารย์มณฑล ใจกุลส, อาจารย์จาวุฒิกร เจริญสุข อาจารย์ที่ปรึกษาปริญญาานิพนธ์ที่ให้คำแนะนำ เอาใจใส่ ให้คำปรึกษาและความช่วยเหลือเสมอมา ขอขอบคุณที่ภาสกร เวสสะโกศล พี่นิวัฒน์ ภูเจริญ คุณทิพาพร ทิพย์ธานี คุณบุโชค คุณสุธี ชุดิไพจิตร คุณกริชชัย ชัยสิทธิศักดิ์ คุณกิตติคุณ จันทร์เจริญ สำหรับคำปรึกษาข้อคิดเห็นและคำแนะนำต่าง ๆ รวมถึงเพื่อน ๆ ทุกคนที่มีส่วนช่วยเหลือในการทำโครงการนี้ ให้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

และต้องขอขอบพระคุณบุคคลสำคัญที่สุดทำให้ข้าพเจ้ามีวันนี้ ก็คือ บิดา มารดา อันเป็นที่เคารพรักยิ่ง เป็นผู้ทำให้โอกาสในการศึกษาอย่างเต็มที่และยังให้กำลังใจเอาใจใส่เสมอมาข้าพเจ้าขอระลึกในพระคุณอันสุดประมาณ และขอกราบขอบพระคุณมา ณ ที่นี้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	i
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ii
กิตติกรรมประกาศ	iii
สารบัญ	iv
สารบัญตาราง	vii
สารบัญภาพ	viii
บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความสำคัญและความเป็นมา	1
1.2 วัตถุประสงค์	1
1.3 ขอบเขตของ โครงการงาน	2
1.4 ประโยชน์ที่ได้รับจาก โครงการงาน	2
บทที่ 2 กฎการอนุรักษ์ของการเคลื่อนที่ของของไหล	3
2.1 สมการควบคุมของการไหลและการถ่ายเทความร้อน	3
2.1.1 การอนุรักษ์มวลในปัญหา 3 มิติ	5
2.1.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของอนุภาคการไหล ในเทอมของชิ้นส่วนย่อยของไหล	6
2.1.3 สมการโมเมนตัมแบบ 3 มิติ	8
2.1.4 สมการพลังงานในระบบ 3 มิติ	11
2.2 สมการสถานะ	17
2.3 สมการนาเวียร์-สโต๊ค สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน	18
2.4 รูปแบบอนุรักษ์สำหรับสมการควบคุมของการไหลของของไหล	21
2.5 รูปแบบเชิงอนุพันธ์และอินทิเกรตสำหรับสมการการเคลื่อนย้ายแบบปกติ	22
2.6 การแบ่งจำพวกของพฤติกรรมทางฟิสิกส์	24
2.7 บทบาทของลักษณะเฉพาะในสมการไฮเปอร์โบลิก	28
2.8 วิธีการแบ่งจำพวก สำหรับสมการอนุพันธ์ย่อยแบบง่าย	31
2.9 การแบ่งชนิดของสมการการไหลของของไหล	33
2.10 เงื่อนไขช่วยสำหรับสมการการไหลแบบไร้ความหนืด	35

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.11 ปัญหาในการไหลอัดตัวได้ที่ความเร็วเหนือเสียง	38
บทที่ 3 การถ่ายเทความร้อน	39
3.1 การนำความร้อน	39
3.2 การพาความร้อน	42
บทที่ 4 การไหลผ่านแผ่นเรียบ	44
4.1 บาวนด์รีเลเยอร์ของการพา	44
4.1.1 บาวนด์รีเลเยอร์ของความเร็ว	44
4.1.2 บาวนด์รีเลเยอร์ของความร้อน	45
4.2 สมการชั้นซิดผิวของแพนเดีท์ล และวิธีของบลูเชียส	47
บทที่ 5 แบบจำลองการวิเคราะห์	50
5.1 บทนำ	50
5.2 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนแบบราบเรียบผ่านแผ่นแบนราบ	50
5.2.1 กรณีที่อุณหภูมิที่ผิวด้านล่างของอากาศส่วนที่ติดกับแผ่นแบนราบคงที่	50
5.2.2 กรณีที่อุณหภูมิที่ผิวด้านล่างของแผ่นแบนราบคงที่และด้านข้างของแผ่นแบนราบกำหนดให้เป็นผิวอะเดียบาติก	60
5.3 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีประบายความร้อนแบบเกล็ด	65
บทที่ 6 ผลการจำลอง	74
6.1 ผลการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบ โดยอุณหภูมิของพื้นผิวของของไหลมีค่าคงที่	74
6.2 ผลจากการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นแบนราบแบบคอนจูเกต	74
6.3 การเปรียบเทียบจำลองการถ่ายเทความร้อนแบบราบเรียบผ่านแผ่นแบนราบกับผลเฉลยแม่นยำตรง	75
6.4 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากอลูมิเนียม	78
6.5 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากทองแดง	78
6.6 การทดสอบการถ่ายเทความร้อนของครีประบายความร้อนแบบเกล็ด	79
บทที่ 7 วิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง	81
บรรณานุกรม	82

## สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
2.1 สมการควบคุมการไหลของของไหลแบบนิวโทเนียนอัดตัวได้	21
2.2 การจำแนกชนิดของพฤติกรรมทางฟิสิกส์	31
2.3 ชนิดของสมการอนุพันธ์อันดับสองแบบเชิงเส้น	32
2.4 การจำแนกชนิดของพฤติกรรมการไหล	33
2.5 เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลแบบอัดตัวได้และมีความหนืด	36
6.1 แสดงการเปรียบเทียบ Total heat transfer ระหว่างการคำนวณแบบเบสิก และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบที่กำหนดพื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบคอนจูเกต	75
6.2 แสดงการเปรียบเทียบ Total heat transfer ของการถ่ายเทความร้อนระหว่างการวิเคราะห์เชิงตัวเลขกับการทดลองจริงของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุอลูมิเนียม	81
6.3 แสดงการเปรียบเทียบ Total heat transfer ระหว่างการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุอลูมิเนียมกับของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุทองแดง	81

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
2.1 ชั้นส่วนของของไหลสำหรับกฎการอนุรักษ์	4
2.2 การไหลของมวลเข้าและออกชั้นส่วนของไหล	5
2.3 องค์ประกอบของความเค้นบนผิวหน้าทั้ง 3 ทิศทางของชั้นส่วนของไหล	9
2.4 องค์ประกอบของความเค้นในทิศทาง $x$	10
2.5 องค์ประกอบของเวกเตอร์ฟลักซ์ความร้อน	13
2.6 การกระจายอุณหภูมิอย่างสภาวะคงที่บนก้านวัสดุแข็งที่หุ้มฉนวน	25
2.7 การกระจายอุณหภูมิอย่างสภาวะไม่คงที่บนก้านวัสดุแข็งที่หุ้มฉนวน	26
2.8 การสั่นของสปริงภายใต้แรงดึง	27
2.9 Domain of dependent และ Zone of influence สำหรับปัญหาแบบไฮเปอร์โบลิก	30
2.10 ขอบเขตของความอิสระสำหรับปัญหา (a) ไฮเปอร์โบลิก (b) พาราโบลิก และ (c) วงรี	30
2.11 ภาพแสดงการไหลรอบ air foil ที่ความเร็วเหนือเสียง	35
2.12 แสดงลักษณะขอบเขตที่เราใช้เงื่อนไขสมมาตรกับเงื่อนไขจำนวนรอบได้	37
2.13 ตัวอย่างของขอบเขตในเงื่อนไขสมมาตรกับเงื่อนไขจำนวนรอบได้	37
3.1 แสดงปริมาตรควบคุมเล็กๆ $d_x, d_y, d_z$	40
3.2 การพัฒนาขึ้นของขอบเขตในการพาความร้อน	43
4.1 ขาวน์คาร์เลเยอร์ของความเร็วนบนแผ่นแบนเรียบ	44
4.2 ขาวน์คาร์เลเยอร์ความร้อนบนแผ่นแบนเรียบ	45
4.3 แสดงการกระจายความเร็วสำหรับการไหลราบเรียบไปผ่านแผ่นราบ ที่ค่าความชันของความดันเป็นศูนย์	49
5.1 แสดงการสร้างปริมาตรควบคุมของของไหล	51
5.2 แสดงการกำหนดขอบเขตของของไหล	52
5.3 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของของไหล	53
5.4 แสดงการกำหนดพฤติกรรมของการไหล	54
5.5 แสดงการกำหนดสมการที่ใช้ในการคำนวณ	55
5.6 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆในของไหล	56
5.7 แสดงวิธีคำนวณ pressure link velocity	57

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
5.8 แสดงสมการที่เลือกใช้ในการคำนวณ	58
5.9 แสดงการสั่งให้โปรแกรมเริ่มคำนวณ	59
5.10 แสดงส่วนของปริมาตรควบคุมของของแข็งที่เพิ่มขึ้นมา	60
5.11 แสดงการสร้างขอบเขตของของแข็งและของไหล	61
5.12 แสดงการกำหนดให้มีการคำนวณ Heat Transfer On	62
5.13 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของของแข็ง	63
5.14 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆ	64
5.15 แสดงรูปการจำลองครีประบายความร้อนแบบเกล็ด	65
5.16 แสดงรูปการกำหนดทางเข้าของของไหลที่เป็นอากาศ	66
5.17 แสดงรูปการกำหนดทางออกของของไหลที่เป็นอากาศ	67
5.18 แสดงรูปการกำหนดให้ด้านข้างเป็นแบบ Cyclic	68
5.19 แสดงรูปการกำหนดทางเข้าของของไหลที่เป็นน้ำ	69
5.20 แสดงรูปการกำหนดทางออกของของไหลที่เป็นน้ำ	70
5.21 แสดงรูปการกำหนดให้ทั้ง 2 ด้านของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดเป็น Symplane	71
5.22 แสดงรูปครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากอลูมิเนียมพร้อมที่จะทำการ Simulation	72
5.23 แสดงรูปครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากทองแดงพร้อมที่จะทำการ Simulation	73
6.1 ผลการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบโดยอุณหภูมิของพื้นผิวของของไหลมีค่าคงที่	74
6.2 ผลจากการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบแบบคอนจูกต์	74
6.3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่า Local Heat Flux ระหว่างการคำนวณแบบเบสิก, การวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบที่กำหนดพื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบคอนจูกต์	76
6.4 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสัมประสิทธิ์การพาความร้อนระหว่างการคำนวณแบบเบสิก, การวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบที่กำหนดพื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบคอนจูกต์	77
6.5 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากอลูมิเนียม	78
6.6 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากทองแดง	78
6.7 แสดงการทดลองการถ่ายเทความร้อนของครีประบายความร้อนแบบเกล็ด	79
6.8 แสดงรูปหม้อน้ำระบายความร้อนของรถยนต์	79

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
6.9 แสดงรูปครีประบายความร้อนแบบเกล็ดภายในหม้อน้ำรถยนต์	80
6.10 แสดงรูปครีประบายความร้อนแบบเกล็ดภายในหม้อน้ำรถยนต์จำนวน 1 loop	80



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 1

### บทนำ

#### 1.1 ความสำคัญและที่มา

การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกตเป็นการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็งกับของไหล โดยพิจารณาการนำความร้อนในของแข็งและการพาความร้อนในของไหลควบคู่กัน ซึ่งวิธีการเชื่อมโยงระหว่างการนำความร้อน และการพาความร้อนโดยใช้หลักการที่ว่าปริมาณความร้อนที่เข้า และออกจากทั้งของแข็งและของไหลที่ผิวรอยต่อทั้งคู่ต้องมีค่าเท่ากัน ในอดีตเพื่อให้ปัญหามีความง่ายขึ้นจึงทำการตั้งสมมติฐานให้อุณหภูมิที่ผิวของแข็งมีค่าคงที่ ในการคำนวณการถ่ายเทความร้อนจากของแข็งสู่ของไหล ซึ่งในความเป็นจริงแล้วอุณหภูมิที่บริเวณดังกล่าวอาจมีค่าไม่คงที่ ทำให้การคำนวณการถ่ายเทความร้อนมีความคลาดเคลื่อนจากความเป็นจริง ดังนั้นวิธีการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกตจึงมีความสำคัญในการนำมาแก้ปัญหาการถ่ายเทความร้อนระหว่างของแข็ง และของไหลเพื่อให้ได้ผลการวิเคราะห์ที่สอดคล้องกับปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้น ตัวอย่างของปัญหาการวิเคราะห์การถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกตได้แก่ การถ่ายเทความร้อนออกจากครีบของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อน

ในปัจจุบันหม้อน้ำรถยนต์ถือว่าเป็นส่วนสำคัญส่วนหนึ่งของรถยนต์ในการระบายความร้อน และได้มีการพัฒนาปรับปรุงครีบระบายความร้อนของหม้อน้ำแบบใหม่ๆ ขึ้นมาอย่างต่อเนื่อง ซึ่งการปรับปรุงครีบระบายความร้อนหม้อน้ำรถยนต์ให้สามารถถ่ายเทความร้อนได้ดีขึ้นนั้น จะต้องทำการสร้างแม่แบบขึ้นมาใหม่ และทำการทดสอบการระบายความร้อนของหม้อน้ำที่ได้จากแม่พิมพ์แบบใหม่ซึ่งเป็นต้นทุนที่สูงมากสำหรับการพัฒนาผลิตภัณฑ์ โครงการนี้ได้เกิดขึ้นเพื่อนำแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ (Simulation) มาประยุกต์ใช้เพื่อลดต้นทุนในการผลิต และพัฒนาผลิตภัณฑ์ใหม่โดยการจำลองแบบครีบระบายความร้อนในรูปแบบ 2 มิติ ในการนำการจำลองทางคณิตศาสตร์นั้น เราต้องการทราบค่าต่างๆ ดังนี้ เช่น ค่าของอัตราการแลกเปลี่ยนความร้อนของครีบระบายความร้อนกับอากาศ และอุณหภูมิของการแลกเปลี่ยนความร้อน เป็นต้น

เราจึงต้องการทดสอบเพื่อหาค่าต่างๆ เหล่านี้และนำค่าต่างๆ เหล่านี้ไปกำหนดเป็นค่าเริ่มต้นของการวิเคราะห์ทางคอมพิวเตอร์ ซึ่งในการทดสอบยังเป็นตัวที่กำหนด และสรุปผลว่าโปรแกรมคอมพิวเตอร์ สามารถวิเคราะห์ปัญหาของการทดสอบสมรรถนะการแลกเปลี่ยนความร้อนของครีบระบายความร้อนหม้อน้ำรถยนต์ได้หรือไม่ ซึ่งเป็นผลที่อธิบายว่าทำไมถึงต้องมีการทำวิทยานิพนธ์ขึ้นมา

#### 1.2 วัตถุประสงค์

- 1.ศึกษาทฤษฎีเชิงวิเคราะห์ การถ่ายเทความร้อนของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบ
- 2.ศึกษาระเบียบวิธีเชิงตัวเลขการถ่ายเทความร้อนของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบ
- 3.ศึกษาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูกตของอุปกรณ์แลกเปลี่ยนความร้อนของหม้อน้ำรถยนต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 1.3 ขอบเขตของงาน

- 1.เปรียบเทียบผลการจำลองด้วยทฤษฎีเชิงวิเคราะห์
- 2.ประเมินการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกตด้วยทฤษฎีเชิงวิเคราะห์
- 3.เปรียบเทียบครีประบายความร้อนแบบเกล็ด (ทำจากอลูมิเนียม) ระหว่างการทดลองกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลข
- 4.เปรียบเทียบการระบายความร้อนระหว่างหม้อน้ำที่ทำจากอลูมิเนียม และทองแดงภายใต้เงื่อนไขน้ำหนักที่เท่ากัน

### 1.4 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับจากโครงการ

- 1.นำทฤษฎีเชิงวิเคราะห์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการถ่ายเทความร้อนผ่านแผ่นแบนราบและครีประบายความร้อน
- 2.ได้รับความรู้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในปัญหาการถ่ายเทความร้อนแบบคอนจูเกต
- 3.เพื่อประโยชน์แก่ผู้ที่ต้องการนำความรู้ด้านนี้ไปประยุกต์ใช้ในภาคอุตสาหกรรมได้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 2

### กฎการอนุรักษ์ของการเคลื่อนที่ของของไหล

ในบทนี้เราจะศึกษาสมการพื้นฐานทางคณิตศาสตร์สำหรับการไหลและการถ่ายเทความร้อน ที่ประกอบด้วย กฎการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน สิ่งนี้ได้นำไปสู่สมการควบคุมของการไหลรวมทั้งเงื่อนไขที่จำเป็นบางอย่างคือ เงื่อนไขเริ่มต้นและที่ขอบ เนื้อหาหลักที่ครอบคลุมในบทนี้ประกอบด้วย

- ระบบสมการ PDEs (Partial Differential Equations) ซึ่งควบคุมการไหลในพิกัดคาร์ทีเซียน  $(x, y, z)$
- สมการสถานะ
- แนวคิดเกี่ยวกับความหนืดในรูปของ Newtonian ซึ่งนำไปสู่สมการ Navier – Stokes
- ความเหมือนกันในเชิงหลักการระหว่างสมการ PDEs ของ การไหลกับสมการการเคลื่อนย้าย (Transport Equations)
- รูปแบบของสมการที่ถูกอินทิเกรตแล้ว ในช่วงคาบเวลาและปริมาตรหนึ่งๆ ของสมการการเคลื่อนย้าย
- การแบ่งลำดับกลุ่มของพฤติกรรมทางฟิสิกส์ออกเป็น 3 ชั้น คือ elliptic, parabolic, hyperbolic และเงื่อนไขขอบที่เหมาะสมในแต่ละรูปแบบการไหลนั้นๆ
- สภาวะเสริมสำหรับการไหลของของไหลที่มีความหนืด
- การกำหนดสภาวะที่ขอบในปัญหาการไหลแบบ Mach Number และ Reynolds number ที่มีค่าสูง

#### 2.1 สมการควบคุมของการไหลและการถ่ายเทความร้อน

สมการควบคุมของการไหลของของไหลแทนถึงสมการทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายกฎการอนุรักษ์ทางฟิสิกส์ ดังนี้

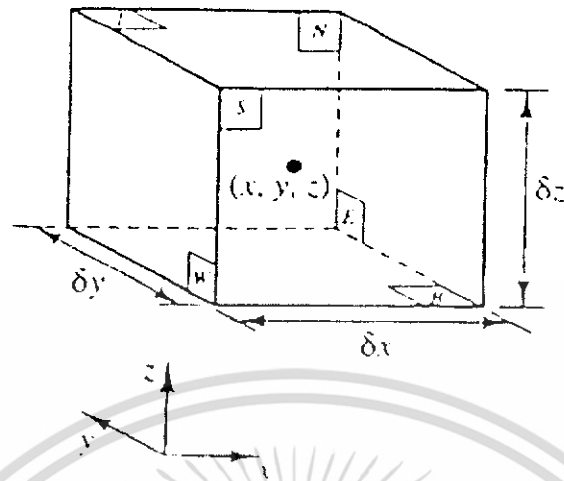
- มวลของไหลไม่สูญหายไปไหน
- อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเท่ากับผลรวมของแรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหล (กฎข้อที่สองของนิวตัน)
- อัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานเท่ากับผลรวมของอัตราการผลิตความร้อนกับอัตราของงานที่กระทำในอนุภาคของไหล (กฎข้อหนึ่งของเทอร์โมไดนามิกส์)

ของไหลจะถูกพิจารณาว่ามีความต่อเนื่องสำหรับการวิเคราะห์การไหลของของไหลที่ระดับมหภาค คือพิจารณาที่สเกลระดับ  $1\mu\text{m}$  ขึ้นไป โครงสร้างและการเคลื่อนที่ระดับโมเลกุล สามารถไม่นำมาพิจารณาได้ เราสนใจที่จะอธิบายพฤติกรรมของไหลในทอมของคุณสมบัติในระดับ มหภาค เช่น ความเร็ว ความดัน ความหนาแน่น อุณหภูมิ รวมทั้งอัตราการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติเหล่านี้ เป็นต้น สิ่งนี้อาจจะคิดเป็นค่าเฉลี่ยของกลุ่มโมเลกุลจำนวนมาก ดังนั้นจุดใดๆ ในของไหลนั้นจะมีคุณสมบัติของของไหลในระดับมหภาค ไม่ขึ้นกับอิทธิพลจากอนุภาคในระดับโมเลกุล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราพิจารณาชิ้นส่วนของไหลขนาดเล็กที่มีความยาวด้านเท่ากับ  $\delta x$ ,  $\delta y$  และ  $\delta z$  ดังรูปที่ 2.1



รูป 2.1 ชิ้นส่วนของของไหลสำหรับกฎการอนุรักษ์

ผิวหน้าทั้งหกด้านจะถูกแทนด้วย  $N, S, E, W, T, B$  ซึ่งแทนถึงทิศทางในแนว เหนือ ใต้ ตะวันออก ตะวันตก บน และล่าง ตามลำดับ ศูนย์กลางของชิ้นส่วนอยู่ที่ตำแหน่ง  $(x, y, z)$  เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นระบบของ มวล โมเมนตัม และพลังงานของชิ้นส่วนของไหล จะสามารถสร้างสมการไหลของของไหลได้

คุณสมบัติของของไหลทั้งหมดจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่งและเวลา ดังนั้นเราจำเป็นต้องเขียน  $\rho(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$ ,  $T(x, y, z, t)$  และ  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  สำหรับความหนาแน่น, ความดัน, อุณหภูมิและเวกเตอร์ความเร็ว ตามลำดับ เพื่อหลีกเลี่ยงความซับซ้อนในการเขียนคำสัญลักษณ์แสดงคุณสมบัติดังกล่าว เราจะไม่ระบุตำแหน่งและเวลา เช่น ความดันที่ศูนย์กลาง  $(x, y, z)$  ของชิ้นส่วนของไหลที่เวลา  $t$  จะถูกแทนโดย  $p$  หรือการเปลี่ยนแปลงในทิศทาง  $x$  ของความดันที่ศูนย์กลาง  $(x, y, z)$  ที่เวลา  $t$  หนึ่งๆ จะถูกแทนโดย  $\frac{\partial p}{\partial x}$  หลักการนี้จะถูกนำไปใช้ในสำหรับคุณสมบัติของไหลทั้งหมด

ชิ้นส่วนของไหลที่พิจารณานั้นมีขนาดเล็กมาก จนกระทั่งคุณสมบัติของไหลที่ผิวหน้าสามารถอธิบายได้อย่างแม่นยำด้วยสองพจน์แรกของสมการ Taylor ดังนั้น สำหรับตัวอย่างความดันที่ผิวหน้า  $e$  และ  $w$  ซึ่งทั้งคู่มีระยะห่างจากศูนย์กลางของชิ้นส่วนของไหลเท่ากับ  $\frac{1}{2} \cdot \delta x$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta x \quad \text{และ} \quad p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta x$$

### 2.1.1 การอนุรักษ์มวลในปัญหา 3 มิติ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นี้

ขั้นตอนแรกของการหาสมการอนุรักษ์มวลคือการพิจารณาถึงสมมูลมวลของชิ้นส่วนของไหลดังนี้

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลใน  
ชิ้นส่วนของไหล = อัตราการไหลสุทธิของมวล  
ที่เข้าไปในชิ้นส่วนของไหล

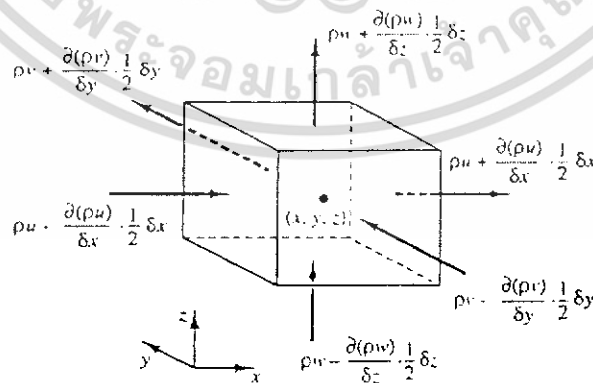
อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในชิ้นส่วนย่อยของของไหลคือ

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta x \delta y \delta z) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (2.1)$$

ต่อไปเราจำเป็นต้องหาอัตราการไหลโดยมวลผ่านพื้นผิวและชิ้นส่วนย่อยซึ่งถูกให้โดยผลคูณของความหนาแน่น พื้นที่และความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวนั้น จากรูปที่ 2.2 จะพบว่าอัตราการไหลสุทธิของมวลเข้าสู่ชิ้นส่วนย่อยผ่านพื้นผิวสามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} & \left( \rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z - \left( \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \delta y \delta z \\ & + \left( \rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z - \left( \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z \\ & + \left( \rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y - \left( \rho w + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y \end{aligned} \quad (2.2)$$

โดยการไหลเข้าสู่ชิ้นส่วนที่ทำให้มวลของชิ้นส่วนย่อยเพิ่มขึ้นถูกกำหนดให้เป็นบวก และมีค่าเป็นลบเมื่อมีการไหลออกจากชิ้นส่วนย่อย



รูปที่ 2.2 การไหลของมวลเข้าและออกชิ้นส่วนของไหล

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อัตราการเพิ่มขึ้นของมวลภายในชิ้นส่วนย่อยนั้น เท่ากับอัตราของมวลสุทธิจากการไหลออกผ่านพื้นผิวของชิ้นส่วนย่อย ซึ่งเมื่อย้ายข้างให้อยู่ในฝั่งเดียวกันเมื่อรวมกันแล้วจะหักล้างกันหมด เทอมทั้งหมดได้ถูกเรียบเรียงทางซ้ายของสมการและถูกหารด้วยปริมาตรของชิ้นส่วนย่อย  $\delta x \delta y \delta z$  ซึ่งจะได้

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

หรือในรูปแบบของเวกเตอร์

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

สมการ 2.4 นี้ คือสมการอนุรักษ์มวล หรือสมการความต่อเนื่อง 3 มิติ แบบการไหลไม่คงตัวและอัดตัวได้ เทอมแรกทางซ้ายมือคืออัตราการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น (มวลต่อปริมาตร) ต่อเวลา เทอมที่สองอธิบายถึงการไหลสุทธิของมวลข้ามผ่านขอบเขตของปริมาตรเล็ก ๆ นั้น มันจะถูกเรียกเป็นเทอมของการพา

สำหรับของไหลที่อัดตัวไม่ได้ (เช่น ของเหลว) ความหนาแน่นมีค่าคงที่และสมการที่ 2.4 จะกลายเป็น

$$\text{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.5)$$

หรือในรูปแบบเต็ม

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

### 2.1.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของอนุภาคของไหล ในเทอมของชิ้นส่วนย่อยของไหล

ในกฎของการอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงานนั้น จะมีการกล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติของอนุภาคของไหล คุณสมบัติแต่ละอย่างของอนุภาคจะเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง  $(x, y, z)$  ของอนุภาคและเวลา  $(t)$  ในการศึกษาี้เรากำหนดให้ค่าคุณสมบัติใดๆ ต่อหน่วยมวล ด้วยสัญลักษณ์  $\phi$  โดยการเปลี่ยนแปลงของ  $\phi$  เทียบกับเวลาของอนุภาคของไหล  $\frac{D\phi}{Dt}$  คือ

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

และโดยที่  $dx/dt = u$ ,  $dy/dt = v$  และ  $dz/dt = w$  หากแทนค่าดังกล่าวไปในสมการข้างบน จะได้ว่า

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + u \frac{\partial\phi}{\partial x} + v \frac{\partial\phi}{\partial y} + w \frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \text{grad}\phi \quad (2.7)$$

$D\phi/Dt$  เป็นนิยามของอัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติ  $\phi$  ต่อหน่วยมวล ในกรณีของสมการอนุกรมมวล เราสนใจที่จะพัฒนาสมการสำหรับอัตราการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยปริมาตร อัตราการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติ  $\phi$  สามารถถูกแปลงให้เป็นคุณสมบัติเชิงปริมาตรได้โดยการคูณความหนาแน่น  $\rho$  เข้าไปกับเทอม  $D\phi/Dt$  ดังนั้น

$$\rho \frac{D\phi}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \text{grad}\phi \right) \quad (2.8)$$

รูปแบบนี้ สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการอธิบายการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติของของไหล ในปริมาตรเล็กๆ ที่หยุดนิ่งหนึ่งๆ เป็นการนิยามความสัมพันธ์ระหว่าง: 1) อนุพันธ์ของคุณสมบัติ  $\phi$  ของอนุภาคของไหล กับ 2) อัตราเปลี่ยนของ  $\phi$  ในชิ้นส่วน หรือปริมาตรย่อยๆ ของของไหลนั้น

ต่อไปนี้หากเราหันมาพิจารณากฎการอนุรักษ์ของมวล ค่าของมวลต่อหน่วยปริมาตร (ในที่นี้คือความหนาแน่น  $\rho$ ) คือพารามิเตอร์ที่เรากำลังศึกษา เมื่อพิจารณาผลรวมของ: 1) อัตราการเปลี่ยนแปลงของความหนาแน่นในปริมาตรเล็กๆ และ 2) ผลของการเปลี่ยนแปลงอันเนื่องมาจากการพาในสมการอนุกรมมวล (2.4) ก็คือ

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v})$$

ดังนั้นรูปทั่วไปของ เทอมทั้งสองเทอมนี้ สำหรับคุณสมบัติใดๆ ของของไหล  $\phi$  สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi \mathbf{v}) \quad (2.9)$$

สมการที่ 2.9 เทอมแรก คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของคุณสมบัติ  $\phi$  ต่อหน่วยปริมาตรบวกกับเทอมที่สอง คือการไหลสุทธิของ  $\phi$  ต่อปริมาตรที่ออกจากชิ้นส่วนย่อยของไหล ซึ่งเราสามารถนำมาเขียนใหม่เพื่อให้ได้ภาพความสัมพันธ์ ระหว่างผลรวมของทั้งสองเทอมนี้กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของ  $\phi$  ในอนุภาคของไหล ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi \mathbf{v}) = \rho \left[ \frac{\partial\phi}{\partial t} + \text{grad}\phi \right] + \phi \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right] = \rho \frac{D\phi}{Dt} \quad (2.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เทอม  $\phi [\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{u})]$  เท่ากับศูนย์เนื่องจากสมการอนุรักษ์มวล (2.4) จากความสัมพันธ์ดังแสดงใน (2.10) จะได้ว่า

อัตราการผลิตของ $\phi$ สำหรับชิ้นส่วนของไหล	+ อัตราการไหลสุทธิของ $\phi$ ที่ออกจากชิ้นส่วนของไหล	= อัตราการผลิตของ $\phi$ สำหรับ อนุภาคของไหล
--	---	---

การเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมของอนุภาคของไหลทั้ง 3 ทิศทาง อ้างอิงแกนในพิกัดฉาก รวมถึงการเปลี่ยนแปลงของพลังงานซึ่งเป็นปริมาณสเกลลาร์นั้น สามารถแทนพารามิเตอร์  $\phi$  และอัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงของมันต่อหน่วยปริมาตร ตามที่นิยามไว้ใน (2.8) และ (2.10) สามารถแสดงได้ดังในตารางข้างล่างนี้

x-momentum	u	$\rho \frac{Du}{Dt}$	$\partial \left( \frac{\rho u}{\partial t} \right) + \text{div}(\rho u)$
y-momentum	v	$\rho \frac{Dv}{Dt}$	$\partial \left( \frac{\rho v}{\partial t} \right) + \text{div}(\rho v)$
z-momentum	w	$\rho \frac{Dw}{Dt}$	$\partial \left( \frac{\rho w}{\partial t} \right) + \text{div}(\rho w)$
Energy	E	$\rho \frac{DE}{Dt}$	$\partial \left( \frac{\rho E}{\partial t} \right) + \text{div}(\rho E)$

รูปแบบที่ให้ไว้ในตารางข้างบนนี้จะถูกนำไปใช้ในการสร้างสมการอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงานดังที่จะแสดงรายละเอียดในหัวข้อถัดจากนี้

### 2.1.3 สมการโมเมนตัมแบบ 3 มิติ

กฎข้อที่สองของนิวตันกล่าวไว้ว่า “อัตราการผลิตเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคของไหลเท่ากับผลรวมของแรง ที่กระทำต่ออนุภาค”

อัตราการผลิตโมเมนตัม ของอนุภาคของไหล	=	ผลรวมแรงที่กระทำ ต่ออนุภาคของไหล
---	---	-------------------------------------

อัตราการผลิตโมเมนตัมต่อหน่วยปริมาตรของอนุภาคของไหลในทิศ  $x$ ,  $y$  และ  $z$  กำหนดได้โดย

$$\rho \frac{Du}{Dt} \quad \rho \frac{Dv}{Dt} \quad \rho \frac{Dw}{Dt} \quad (2.11)$$

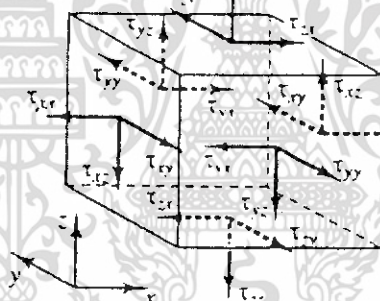
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เราแบ่งประเภทของแรงที่กระทำต่ออนุภาคของไหลเป็นสองแบบ คือ

- แรงกระทำที่ผิว (Surface forces) ได้แก่ แรงเนื่องจากความดัน แรงเนื่องจากความหนืด
- แรงกระทำในปริมาตร (Body forces) ของชิ้นส่วนย่อยของของไหล ได้แก่ แรงโน้มถ่วง แรงหมุนหนีศูนย์กลาง แรงแม่เหล็กไฟฟ้า Coriolis Force

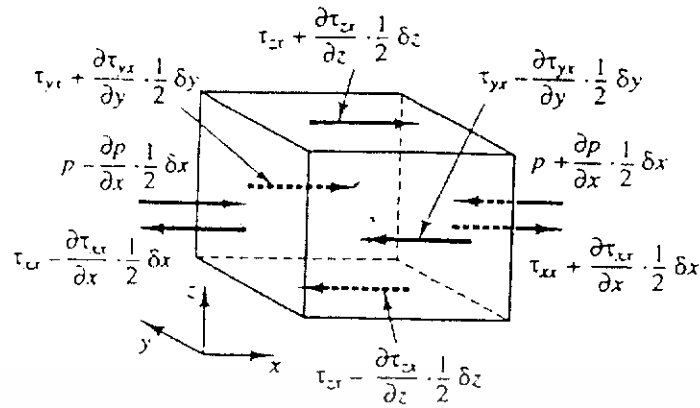
โดยทั่วไปเทอมของแรงกระทำที่ผิวจะถูกจัดกลุ่มแยกออกต่างหาก และเทอมของแรงกระทำภายในปริมาตรจะถูกพิจารณาเป็นเทอมของการเพิ่มและลดโมเมนตัมแยกออกมาอีกเทอมหนึ่ง

ความเค้นที่กระทำต่อชิ้นส่วนย่อยของไหล สามารถนิยามได้ด้วยเทอมของความดัน และเทอมความเค้นย่อยเนื่องจากความหนืด  $\mu$  ดังแสดงในรูปที่ 2.3 ความดันซึ่งมองว่าเป็นความเค้นตั้งฉาก ถูกแทนด้วย  $p$  ส่วนความเค้นเฉือนเนื่องจากความหนืดแทนโดย  $\tau$  สัญลักษณ์  $\tau_{ij}$  ถูกประยุกต์ใช้เพื่อชี้ให้เห็นถึงทิศทางของความเค้นเนื่องจากความหนืด ตัวห้อย  $i$  และ  $j$  ใน  $\tau_{ij}$  ชี้ให้เห็นถึงความเค้นย่อย ที่กระทำในทิศทาง  $j$  บนพื้นที่ที่มีเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง  $i$  นั่นเอง



รูปที่ 2.3 องค์ประกอบของความเค้นบนผิวหน้าทั้งสามทิศทาง ของชิ้นส่วนของไหล

เริ่มแรกเราพิจารณาแรงกระทำในทิศทาง  $x$  เนื่องจากความดันและความเค้นย่อย  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yx}$  และ  $\tau_{zx}$  ดังในรูปที่ 2.4 ขนาดของแรงที่กระทำบนพื้นผิวเกิดจากผลคูณของความเค้นและพื้นที่ และที่มีทิศทางเดียวกับแกนอ้างอิงโดยมีเครื่องหมายบวก และมีค่าเป็นเครื่องหมายลบเมื่อทิศทางตรงข้าม แรงสุทธิในทิศทาง  $x$  คือผลรวมของแรงย่อยที่กระทำบนชิ้นส่วนย่อยของไหล ในทิศทางดังกล่าว

รูปที่ 2.4 องค์ประกอบของความเค้นในทิศทาง  $x$ 

เมื่อพิจารณาผิวหน้าที่  $E, W$  เราได้ว่า

$$\left[ \left( p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z + \left[ - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = \left( - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (2.12a)$$

แรงสุทธิในทิศทาง  $x$  บนผิวหน้า  $N, S$  ได้ว่า

$$- \left( \tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.12b)$$

แรงสุทธิในทิศทาง  $x$  บนผิวหน้า  $T, B$  ได้ว่า

$$- \left( \tau_{xz} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.12c)$$

ผลรวมแรงต่อหน่วยปริมาตรทั้งหมดเนื่องจากความเค้นที่ผิวหน้าจะเท่ากับผลรวมของ (2.1.2a), (2.1.2b) และ (2.1.2c) ที่หารด้วยปริมาตรสุทธิ

$$\frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เทอมที่ปรากฏ ใน 2.13 นี้ ยังไม่รวมการพิจารณาแรงกระทำภายในชิ้นส่วนของของไหล ซึ่งสามารถถูกรวมได้โดยการพิจารณาเป็นแหล่งสร้างหรือทำลายโมเมนตัม เป็นหน่วยของโมเมนตัมต่อปริมาตรต่อเวลา ในทิศทาง  $x$

ในขั้นตอนนี้สมการ โมเมนตัมในทิศทาง  $x$  หาได้โดยการกำหนดให้อัตราการเปลี่ยนโมเมนตัมในทิศทาง  $x$  และ อนุภาคการไหล (2.11) เท่ากับผลรวมของแรงในทิศทาง  $x$  ที่กระทำต่อชิ้นส่วนของไหล โดยความดันที่ผิว บวกกับอัตราการสร้างหรือสูญสลายของโมเมนตัมในทิศทาง  $x$  เนื่องจากแรงภายในชิ้นส่วนของของไหลนั้นตามแนวแกน  $x$

$$p \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (2.14a)$$

ในทำนองเดียวกัน โมเมนตัมในทิศทาง  $y$  จะเขียนได้ว่า

$$p \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + S_{My} \quad (2.14b)$$

และ โมเมนตัมในทิศทาง  $z$  คือ

$$p \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz} \quad (2.14c)$$

ความดันมีลักษณะเป็นความเค้นอัดตั้งฉาก (Compressive normal stress) ซึ่งโดยทั่วไปมีเครื่องหมายเป็นลบ ในกรณีที่ความเค้นตั้งฉากเนื่องจากความหนืดมีลักษณะเป็นความเค้นดึง (Tensile normal Stress) จะมีเครื่องหมายบวก

เทอมของการสร้างหรือสูญสลายของโมเมนตัม  $S_{Mx} = 0$ ,  $S_{My} = 0$  และ  $S_{Mz}$  (2.14 a-e) คือแรงกระทำภายในของแต่ละทิศทาง ตัวอย่างเช่นแรงกระทำภายในเนื่องจากแรงโน้มถ่วงจะถูกกำหนดให้มีค่า

$$S_{Mx} = 0, S_{My} = 0 \text{ และ } S_{Mz} = -\rho g$$

#### 2.1.4 สมการพลังงานในระบบ 3 มิติ

สมการพลังงานถูกหาได้จากกฎข้อที่ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์ ที่กล่าวไว้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานของอนุภาคของไหล เท่ากับอัตราการเพิ่มความดันแก่อนุภาคบวกกับอัตราการทำงานของอนุภาคการไหล

อัตราการเพิ่มขึ้นของพลังงานของอนุภาคของไหลต่อหน่วยปริมาตร คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$p \frac{DE}{Dt} \quad (2.15)$$

งานที่กระทำโดยแรงบนพื้นผิว

อัตราการเกิดงานบนพื้นผิวของชิ้นส่วนของไหล จะเท่ากับผลคูณของแรงและความเร็วในทิศทางของแรง สำหรับแรงตามที่แสดงใน (2.12a – c) เฉพาะที่กระทำในทิศทาง  $x$  จะเกิดงานเท่ากับ

$$\begin{aligned} & \left[ \left( pu - \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( \tau_{xx}u - \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( pu + \frac{\partial(pu)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) + \left( \tau_{xx}u + \frac{\partial(\tau_{xx}u)}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z \\ & + \left[ - \left( \tau_{yx}u - \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) + \left( \tau_{yx}u + \frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \right] \delta x \delta z \\ & + \left[ - \left( \tau_{zx}u - \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) + \left( \tau_{zx}u + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \right] \delta x \delta y \end{aligned}$$

ดังนั้นเมื่อลดรูปแล้ว อัตราการเกิดงานสุทธิบนพื้นผิวเหล่านี้ ในทิศทาง  $x$  คือ

$$\left[ \frac{\partial[u(-p + \tau_{xx})]}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.16a)$$

ส่วนประกอบย่อยของแรงเนื่องจากความเค้นพื้นผิวในทิศทาง  $y$  และ  $z$  ก็จะทำงานบนอนุภาคดังกล่าวเช่นกัน ในกระบวนการคิดแบบข้างต้นอัตราการเกิดงานบนอนุภาคของไหลเนื่องจากการทำงานโดยแรงเหล่านี้สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\left[ \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial[v(-p + \tau_{yy})]}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.16b)$$

และ

$$\left[ \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial[w(-p + \tau_{zz})]}{\partial z} \right] \delta x \delta y \delta z \quad (2.16c)$$

อัตราการเกิดงานทั้งหมดต่อหน่วยปริมาตรของของไหลโดยแรงบนพื้นผิวทั้งหมด คือผลรวมของ (2.16 a – c) หากด้วยปริมาตร  $\delta x \delta y \delta z$  เทอมของ  $p$  สามารถถูกจัดรวบรวมและเขียนในรูปแบบของไดเวอร์เจนต์ ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

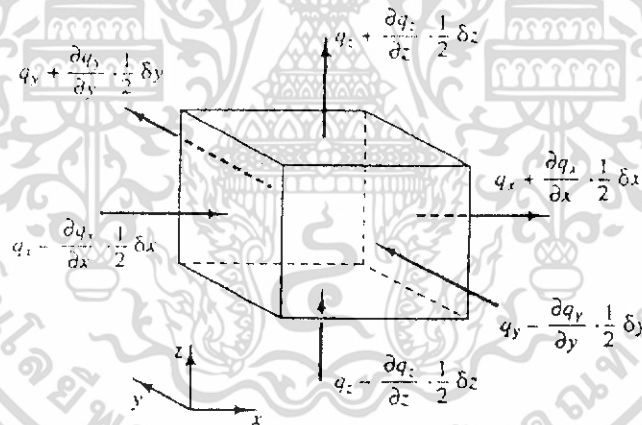
$$-\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} = -\text{div}(p.)$$

ดังนั้นอัตราการเกิดงานรวมทั้งหมดบนชิ้นส่วนของของไหลโดยความเค้นบนพื้นผิว มีหน่วยเป็นปริมาตรของพลังงานต่อหน่วยเวลาต่อหน่วยปริมาตร

$$\begin{aligned} [-\text{div}(p.)] + \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} \right. \\ \left. + \frac{\partial(v\tau_{xz})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

ฟลักซ์เนื่องจากการนำความร้อน

เวกเตอร์ฟลักซ์ความร้อนต่อหน่วยพื้นที่  $q$  ประกอบด้วยองค์ประกอบย่อย 3 ส่วนคือ  $q_x, q_y, q_z$  (รูปที่ 2.5)



รูปที่ 2.5 องค์ประกอบของเวกเตอร์ฟลักซ์ความร้อน

อัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิที่ชิ้นส่วนของไหล เนื่องจากฟลักซ์ของความร้อนที่ทิศทาง  $x$  ถูกกำหนดโดยผลต่างระหว่างอัตราความร้อนที่เข้าผ่านผิวหน้า  $W$  กับอัตราความร้อนที่ออกจากผิวหน้า  $E$

$$\left[ \left( q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left( q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (2.18a)$$

ในทำนองเดียวกันอัตราการถ่ายเทความร้อนสุทธิของไหลเนื่องจากฟลักซ์ของความร้อนในทิศทาง  $y$  และ  $z$  คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad \text{and} \quad -\frac{\partial q_z}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.18b-c)$$

อัตราการร้อนสุทธิที่เพิ่มขึ้นของอนุภาคของไหลต่อหน่วยปริมาตรครอบคลุมขอบเขตของชิ้นส่วนของไหล จะเท่ากับผลรวมของ (2.18a-c) หาด้วยปริมาตร  $\delta x \delta y \delta z$

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} = -\text{div} \quad (2.19)$$

กฎของ Fourier ของการนำความร้อนอธิบายความสัมพันธ์ของอัตราการถ่ายเทปริมาณความร้อนต่อพื้นที่ (Heat flux) กับ ความแตกต่างอุณหภูมิ ต่อหน่วยความยาว

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad q_z = -k \frac{\partial T}{\partial z}$$

สิ่งนี้สามารถเขียนในรูปแบบของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$q = -k \text{ grad } T \quad (2.20)$$

รวมสมการ (2.19) และ (2.20) ซึ่งจะได้ว่า อัตราการเพิ่มของความร้อนที่อนุภาคของไหลเนื่องจากการนำความร้อนผ่านพื้นผิวของชิ้นส่วนของของไหล

$$-\text{div} q = \text{div}(k \text{ grad } T) \quad (2.21)$$

#### สมการพลังงาน

ในหัวข้อนี้เราจะมากล่าวถึงพลังงานจลน์เฉพาะของของไหล ซึ่งแทนด้วย  $E$  พลังงานของของไหลถูกนิยามเป็นผลรวมของพลังงานความร้อนภายใน  $i$ , พลังงานจลน์  $1/2 (u^2 + v^2 + w^2)$  และพลังงานศักย์โน้มถ่วง โดยมองว่าชิ้นส่วนของไหลมีการสะสมพลังงานศักย์โน้มถ่วง พลังงานภายในอาจไม่มีการรวมเอาพลังงานศักย์เข้าไว้ในนิยามก็ได้ หากมองว่าวัตถุกำลังทำงานในขณะที่เคลื่อนที่ในสนามความโน้มถ่วงของโลกโดยงานในส่วนนี้เรียกว่า งานเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุซึ่งเป็น source term ในสมการพลังงาน มีหน่วยเป็นพลังงานต่อหน่วยปริมาตรต่อหน่วยเวลา

การอนุรักษ์พลังงานของชิ้นส่วนของไหล ทำได้โดยการกำหนดให้อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานของชิ้นส่วนของไหล (2.15) มีค่าเท่ากับ ผลรวมของการเกิดงานสุทธิบนชิ้นส่วนของไหล (2.17) และอัตราการร้อนสุทธิที่เพิ่มขึ้นของของไหลเนื่องจากพลักซ์ความร้อน (2.21) และอัตราการเพิ่มของพลังงานเนื่องจากเทอมของ Source ดังนั้นสมการพลังงาน คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\text{div}(p) + \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} + \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + \text{div}(k \text{ grad } T) + S_E \quad (2.22)$$

ในสมการ 2.22 เรามี  $E = i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$

แม้ว่า (2.22) คือสมการพลังงานที่สมบูรณ์ประกอบด้วย 2 ส่วน คือ พลังงานภายในที่สัมพันธ์กับอุณหภูมิของของไหล และพลังงานจลน์ที่สัมพันธ์กับความเร็วของของไหล เรามักจะพิจารณาพลังงานในแต่ละส่วนแยกจากกัน พลังงานจลน์ที่สัมพันธ์กับความเร็วของของไหลนั้นสามารถเขียนได้โดยการแปลงรูปของสมการโมเมนตัม กล่าวคือ ทำการคูณสมการโมเมนตัมในทิศทาง  $x$  (2.14 a) ด้วยความเร็ว  $u$  สมการโมเมนตัมในทิศทาง  $y$  ด้วยความเร็ว  $v$  และสมการโมเมนตัมในทิศทาง  $z$  (2.14c) ด้วยความเร็ว  $w$  และรวมผลลัพธ์เข้าด้วยกัน ก่อนทำการหารด้วย 2 สิ่งนี้ทำให้ได้สมการอนุพันธ์สำหรับพลังงานจลน์ดังข้างล่างนี้

$$\rho \frac{D\left[\frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right]}{Dt} = -\mathbf{u} \cdot \text{grad } p + u \left( \frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left( \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \right) + w \left( \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} \right) + \mathbf{u} \cdot S_M \quad (2.23)$$

ทำการลบ (2.23) จาก (2.22) และนิยาม source term ขึ้นใหม่เป็น  $S_i = S_E - \mathbf{u} \cdot S_M$  จึงทำให้ได้สมการพลังงานภายในดังนี้

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \text{ div } \mathbf{u} + \text{div}(k \text{ grad } T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S_i \quad (2.24)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ เรามี  $i = cT$ , ซึ่ง  $c$  คือค่าความร้อนจำเพาะและ  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  ซึ่งทำให้เรา จัดเรียงสมการ(2.24) ไปในรูปของอนุกรมวิธานได้คือ

$$\begin{aligned} \rho c \frac{DT}{Dt} &= \text{div}(k \text{ grad } T) + \tau_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \\ &+ \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \tau_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ \tau_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} + S, \end{aligned} \quad (2.25)$$

สำหรับสมการไหลที่อัดตัวได้ (2.22) ถูกจัดรูปเป็นสมการสำหรับค่า enthalpy และเนื่องจากค่า enthalpy จำเพาะ  $h$  และค่า enthalpy จำเพาะสัมบูรณ์  $h_0$  ของของไหลกำหนดได้โดย

$$h = i + p/\rho \quad \text{and} \quad h_0 = h + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)$$

รวมสองนิยามนี้กับนิยามของพลังงานจำเพาะ  $E$  เข้าด้วยกัน เราจะได้

$$h_0 = i + p/\rho + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = E + p/\rho \quad (2.26)$$

แทนค่า (2.26) ไปในสมการ (2.22) และจัดเรียบเรียงบางอย่างทำให้ได้สมการพลังงานรวม

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho h_0)}{\partial t} + \text{div}(\rho h_0 \mathbf{u}) &= \text{div}(k \text{ grad } T) \\ &+ \frac{\partial p}{\partial t} + \left[ \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right. \\ &+ \frac{\partial(v\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(v\tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial(v\tau_{zy})}{\partial z} \\ &\left. + \frac{\partial(w\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(w\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(w\tau_{zz})}{\partial z} \right] + S_h \end{aligned} \quad (2.27)$$

สมการ (2.24), (2.25) และ (2.26) ไม่ใช่สมการการอนุรักษ์พลังงานที่เพิ่มเติมเข้ามาใหม่ หากแต่เป็นอีกรูปแบบหนึ่งของสมการพลังงาน (2.22)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2 สมการสถานะ

การเคลื่อนที่ของของไหลใน 3 มิติถูกอธิบายโดยระบบของสมการอนุพันธ์ย่อย 5 สมการคือ สมการอนุรักษ์มวล (2.4) สมการโมเมนตัมในทิศทาง  $x, y, z$  (2.14a – c) และสมการพลังงาน (2.24) ตัวไม่รู้ค่าประกอบด้วยตัวแปรทางเทอร์โมไดนามิกส์ 4 ตัวคือ  $\rho, p, i$  และ  $T$  โดยต่อไปนี้จะจับประเด็นไปที่การเชื่อมโยงทางเทอร์โมไดนามิกส์ระหว่างตัวแปร 4 ตัวนี้

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจในเบื้องต้น ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทางเทอร์โมไดนามิกส์ต่างๆ จะอยู่ภายใต้สมมติฐานของสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์ ซึ่งหมายความว่าในปัญหาหนึ่งๆ ที่ถึงแม้ความเร็วของของไหลจะมีค่าสูง และมีการเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติอย่างรวดเร็ว แต่ก็สมมุติให้ ของไหลสามารถปรับเปลี่ยนสภาวะทางเทอร์โมไดนามิกส์ไปสู่สภาวะใหม่อย่างรวดเร็วจากตำแหน่งหนึ่งสู่ตำแหน่งหนึ่งเช่นกัน นั่นคือของไหลยังคงอยู่ในสภาวะสมดุลตลอดเวลา มีเพียงเงื่อนไขยกเว้นบางอย่างกับการไหลที่เป็นแบบ Strong shockwave แต่บางกรณีการไหลประเภทนี้ก็สามารถใช้สมมติฐานว่าของไหลอยู่ในสภาวะสมดุลได้ โดยไม่ผลการจำลองได้ดีพอสมควร

ด้วยสมมติฐานดังกล่าว เราจึงสามารถอธิบายสภาวะของสสารในสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์ได้ โดยใช้ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่างๆ หากเรารู้ค่าตัวแปร 2 ตัว เราจะสามารถหาค่าตัวแปรตัวที่เหลือได้ ถ้าเราใช้  $\rho$  และ  $T$  เป็นตัวแปรที่รู้ค่า เรามีสมการสถานะสำหรับความดัน  $p$  และพลังงานภายในจำเพาะ  $i$

$$p = p(\rho, T) \quad \text{and} \quad i = i(\rho, T) \tag{2.28}$$

สำหรับก๊าซสมบูรณ์สมการสถานะของมันซึ่งเป็นที่รู้จักกันดีคือ

$$p = \rho RT \quad \text{and} \quad i = C_v T \tag{2.29}$$

สมมติฐานของสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์นี้ เมื่อนำมาใช้พิจารณาการไหลของของไหลที่อัดตัวได้ ยังช่วยเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างสมการพลังงานกับสมการอนุรักษ์มวล และสมการโมเมนตัม ปฏิสัมพันธ์ระหว่างพลังงานกับการไหลนี้ เกิดขึ้นเนื่องจากความร้อนนั้นทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่นตามสมการสถานะ

การไหลของของไหลและก๊าซที่ความเร็วต่ำประพฤติตัวเป็นของไหลที่อัดตัวไม่ได้ เมื่อไม่มีการแปรเปลี่ยนของความหนาแน่น ก็จะทำให้ไม่มีการเชื่อมโยงระหว่างสมการพลังงานกับสมการอนุรักษ์มวลและสมการโมเมนตัม ในกรณีเช่นนี้เราสามารถหาค่าตอบของสมการโมเมนตัม คือสนามการไหลได้โดยง่าย โดยการพิจารณาเพียงสมการอนุรักษ์มวลและสมการโมเมนตัมเท่านั้น และสามารถหาค่าตอบของสมการพลังงาน คือการกระจายอุณหภูมิได้โดยแยกเทศหลังจากได้คำตอบของสนามการไหลแล้ว

### 2.3 สมการนาเวียร์-สโตค สำหรับของไหลแบบนิวโทเนียน

สมการควบคุมประกอบด้วยตัวที่ไม่รู้ค่าคือ ความเค้นเนื่องจากความหนืดในแนวแกนย่อย  $\tau_{ij}$  ในการไหลของของไหลนั้น ค่าความเค้นหนืดสามารถถูกอธิบายได้โดยอัตราการเสียรูปร่างที่ตำแหน่งใดๆ (หรืออัตราความเครียด) ในการไหล 3 มิติอัตราการเสียรูปร่างที่ตำแหน่งใดๆ ประกอบด้วยอัตราการเสียรูปร่างเชิงเส้นและอัตราเสียรูปร่างเชิงปริมาตร

ถ้าทุกชนิดโดยส่วนมากมีคุณสมบัติเป็นแบบ isotropic ในขณะที่ของไหลบางชนิดที่ประกอบด้วยโมเลกุลของโพลิเมอร์ ในจำนวนที่มากพออย่างมีนัยสำคัญอาจจะประพฤติตัวเป็น anisotropic หรือคุณสมบัติของความเค้นหนืดแบบขึ้นอยู่กัทิศทาง ซึ่งเป็นผลของการจัดเรียงตัวของโซ่โมเลกุลของโพลิเมอร์ ของไหลดังกล่าวอยู่นอกเหนือจากขอบเขตของหนังสือนี้และเราจะทำการศึกษาต่อไปโดยสมมุติว่าการไหลเป็น Isotropic

อัตราการเสียรูปร่างเชิงเส้นของชั้นส่วนของไหลมี 9 องค์ประกอบใน 3 มิติ ในจำนวนนั้น มี 6 องค์ประกอบที่เป็นอิสระในของไหลแบบ Isotropic (Schlichting, 1979) ซึ่งถูกเขียนโดยสัญลักษณ์  $e_{ij}$  ระบบการอ้างอิงในตัวห้อยต่อท้ายสัญลักษณ์ ทำให้เห็นองค์ประกอบซึ่งเป็นระบบเดียวกับระบบอ้างอิงของความเค้น (ดูในหัวข้อ 2.4) มีองค์ประกอบของการเสียรูปร่างเชิงเส้นแบบตั้งฉากอยู่ 3 ตัว

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.30a)$$

มีองค์ประกอบของการเสียรูปร่างเชิงเส้นแบบเฉือนทั้ง 6 ด้านของชั้นส่วนของไหลคือ

$$\begin{aligned} e_{xy} = e_{yx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & e_{xz} = e_{zx} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ e_{yz} = e_{zy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.30b)$$

การเสียรูปร่างเชิงปริมาตรถูกให้โดย

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } u \quad (2.30c)$$

ในของไหลแบบ Newtonian ความเค้นเนื่องจากความหนืดเป็นสัดส่วนโดยตรงกับอัตราของการเสียรูปร่างของของไหล ตามกฎที่ว่าด้วยความหนืดของนิวตันในปริภูมิ 3 มิติสำหรับของไหลที่อัดตัวได้นั้น การไหลจะมีความหนืดเชื่อมโยงอย่างแปรผันตามค่าพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ 1) ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดที่หนึ่ง (Dynamic viscosity),  $\mu$  ซึ่งจะเชื่อมโยงกับการเสียรูปร่างเชิงเส้นของของไหล และ 2) ความหนืดเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่สอง ,  $\lambda$  ก็จะเชื่อมโยงกับการเสียรูปเชิงปริมาตร ดังนั้นเราจะมืองค์ประกอบย่อยของความเค้นอยู่ทั้งหมด 9 ตัว โดยมี 6 ตัวในนั้นไม่ขึ้นแก่กันหรือเรียกว่ามีระดับอิสระ (degree of freedom) เท่ากับ 6

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} u & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} u & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} u \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)\end{aligned}\quad (2.31)$$

ภาพของความเค้นในส่วนที่สองนั้นไม่ชัดเจนนัก เนื่องจากผลของมันในทางปฏิบัติมีไม่มากนักสำหรับก๊าซ การประมาณค่าที่ดีคือ  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$  (Schlichting, 1979) และเนื่องจากเราสมมุติว่าของเหลวเป็นแบบที่อัดตัวไม่ได้ ซึ่งจากสมการอนุรักษ์มวลคือ  $\operatorname{div} u = 0$  ดังนั้นความเค้นหนีจะเป็น 2 เท่าของอัตราการเสียรูปเชิงเส้น

แทนค่าความเค้นเฉือนข้างบน (2.31) ไปใน (2.14a – c) ทำให้ได้สมการซึ่งเรียกตามชื่อ Navier-Stokes ซึ่งเป็นนักวิทยาศาสตร์ในศตวรรษที่ 19 ที่ได้ค้นพบดังนี้

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} u \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{Mx}\end{aligned}\quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} u \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{My}\end{aligned}\quad (2.32b)$$

$$\begin{aligned}\rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} u \right] + S_{Mz}\end{aligned}\quad (2.32c)$$

เราสามารถจัดเรียงเทอมของความเค้นหนีใหม่ ดังข้างล่างนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
&+ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{Mx}
\end{aligned}$$

ความเค้นหนืดในสมการที่เป็นองค์ประกอบในทิศทาง  $y$  และ  $z$  สามารถจัดใหม่ในลักษณะเดียวกัน เราจะสร้างสมการ โมเมนตัมอย่างง่าย โดยการซ้อนเทอมของความเค้นหนืดในเทอมของการเพิ่มขึ้นของโมเมนตัม (source term) ดังนั้นจึงนิยามเทอมของการเพิ่มขึ้นของโมเมนตัมใหม่โดย

$$S_M = S_{Mx} + S_{My} \quad (2.33)$$

สมการ Navier-Stokes สามารถถูกเขียนในรูปแบบที่ใช้สำหรับการพัฒนาวิธีปริมาตรสืบเนื่อง ดัง

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{Mx} \quad (2.34a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{My} \quad (2.34b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{Mz} \quad (2.34c)$$

ถ้าเราใช้แบบจำลอง Newtonian สำหรับความเค้นหนืดในสมการพลังงานภายใน (2.24) เราจะได้

$$\rho \frac{Di}{Dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \Phi + S_i \quad (2.35)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลกระทบทั้งหมดเนื่องจากความเค้นหนืดในสมการพลังงานภายในนี้ สามารถเขียนได้ในเทอมของ ฟังก์ชันการสลายตัว (Dissipation function)  $\phi$  ซึ่งหลังจากการปรับรูปแบบสมการ สามารถแสดงได้ ดังนี้

$$\Phi = \mu \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \lambda (\text{div } u)^2 \quad (2.36)$$

การสลายตัวนี้เป็นค่าบวกเสมอเนื่องจากประกอบด้วยเทอมยกกำลังสอง และแทนถึงการก่อกำเนิดของพลังงานภายในอันเป็นผลมาจากการเสียรูปทรงของชิ้นส่วนของไหล อีกนัยหนึ่งก็จะเป็นตัวลดทอนพลังงานจลน์จากการเคลื่อนที่ของอนุภาคของไหล และเปลี่ยนไปเป็นพลังงานภายในหรือความร้อนนั่นเอง

#### 2.4 รูปแบบอนุรักษ์สำหรับสมการควบคุมของการไหลของของไหล

ตารางที่ 2.1 แสดงสมการอนุรักษ์มวล โมเมนตัม และพลังงาน ในรูปแบบของไดเวอร์เจนต์ เป็นสมการแบบ 3 มิติที่ขึ้นกับเวลา ของของไหล Newtonian ที่อัดตัวได้

ตารางที่ 2.1 สมการควบคุมการไหลของของไหลแบบนิวโทเนียนอัดตัวได้

มวล	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0$	(2.4)
โมเมนตัม x	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \text{div}(\rho u u) = -\frac{\partial p}{\partial x} - \text{div}(\mu \text{grad } u) + S_{Mx}$	(2.37a)
โมเมนตัม y	$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \text{div}(\mu \text{grad } v) + S_{My}$	(2.37b)
โมเมนตัม z	$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \text{div}(\rho w u) = -\frac{\partial p}{\partial z} - \text{div}(\mu \text{grad } w) + S_{Mz}$	(2.37c)
โมเมนตัม x	$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \text{div}(\rho i u) = -p \text{div } u - \text{div}(k \text{grad } T) - \Phi - S_i$	(2.38)
สมการสถานะ	$p = p(\rho, T) \text{ and } i = i(\rho, T)$	(2.28)
	$p = \rho RT \text{ and } i = C_v T$	(2.29)

เทอมการก่อกำเนิดของโมเมนตัม  $S_{Mx}$  และฟังก์ชันการสลายตัว  $\phi$  แสดงใน 2.32 และ 2.36 ตามลำดับ เป็นที่น่าสนใจที่ว่าสมมติฐานสมดุลทางเทอร์โมไดนามิกส์ในหัวข้อ 2.2 ทำให้ได้สมการการไหล (PDEs)

5 สมการและสมการพีชคณิต 2 สมการรวมเป็น 7 สมการ ต่อมาเราใช้แนวคิดของของไหล Newtonian ซึ่งเอกลักษณะเป็นเอกลักษณ์ที่สงวนไว้สำหรับการแข่งขันเพื่อการศึกษาค้นคว้า ไม่น่าจะเห็นไปเสียเปรียบเชิงคุณค่าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อธิบายความเค้นเหน็ดในเทอมของความแตกต่างขององค์ประกอบความเร็วต่อหน่วยความยาว เป็นผลให้เกิดตัวไม่รู้ค่า 7 ตัว จำนวนที่เท่ากันของสมการและตัวที่ไม่รู้ค่าของระบบนี้ สามารถถูกแก้ปัญหาได้ด้วยเงื่อนไขที่ขอบและค่าเริ่มต้น (Boundary and Initial condition)

## 2.5 รูปแบบเชิงอนุพันธ์และอินทิเกรตสำหรับสมการการเคลื่อนย้ายแบบปกติ

จากตารางที่ 2.1 จะพบว่า มีโครงสร้างสมการหลายสมการที่มีความคล้ายคลึงกัน ถ้าเราพิจารณา  $\phi$  เป็นตัวแปรแสดงคุณสมบัติใดๆ ของของไหลแล้ว รูปแบบของสมการอนุรักษ์ที่ถูกสร้างขึ้นนั้นก็จะมีโครงสร้างคล้ายกับสมการข้างต้นเช่นกัน ทั้งนี้รวมทั้งสมการสำหรับปริมาณสเกลลาร์ เช่น อุณหภูมิและความเข้มข้นของสสาร สามารถถูกเขียนในรูปแบบดังนี้

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \text{div}(\rho\phi u) = \text{div}(T \text{grad } \phi) + S_\phi \quad (2.39)$$

หรืออธิบายได้ คือ

อัตราการเพิ่ม  $\phi$  ของชิ้นส่วนของไหล + การไหลสุทธิของ  $\phi$  ที่ออกจากชิ้นส่วนของไหล = อัตราการเพิ่มขึ้นของ  $\phi$  เนื่องจากการแพร่ + อัตราการเพิ่มขึ้นของ  $\phi$  เนื่องจากการกำเนิด

สมการ 2.39 ถูกเรียกว่าสมการการเคลื่อนย้ายของคุณสมบัติ  $\phi$  ซึ่งพบว่ามันสามารถอธิบายการเคลื่อนย้ายของปริมาณทางฟิสิกส์ที่แตกต่างกันได้ คือเทอมที่แสดงอัตราการเปลี่ยนแปลงและเทอมของการพาอยู่ด้านซ้ายมือของสมการ ส่วนเทอมของการแพร่ ( $\Gamma$  คือ สัมประสิทธิ์การแพร่) และเทอมของ Source อยู่ขวามือตามลำดับ โดยได้ซ่อนเทอมซึ่งไม่เหมือนกันไว้ในเทอมของ Source นั้นเอง

สมการ 2.39 ถูกใช้เป็นจุดเริ่มต้นสำหรับขั้นตอนการคำนวณในวิธีปริมาตรสืบเนื่องโดยกำหนด  $\phi$  เท่ากับ 1,  $u$ ,  $v$ ,  $w$  และ  $i$  (หรือ  $T$  หรือ  $h_p$ ) และเลือกค่าที่เหมาะสมสำหรับสัมประสิทธิ์การพา  $\Gamma$  และ Source terms เราได้รูปแบบพิเศษของตารางที่ 2.1 ในสมการ Partial Differential Equations ทั้ง 5 ชุด ซึ่งประกอบด้วยสมการอนุรักษ์มวล โมเมนตัมและพลังงาน ทั้งนี้ขั้นตอนหลักของวิธีปริมาตรสืบเนื่อง (ซึ่งจะอธิบายอย่างรายละเอียดในบทที่ 4 ต่อไป) คือการอินทิเกรตสมการ 2.39 เหนือปริมาตรควบคุม CV 3 มิติ ซึ่งทำให้ได้

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} \text{div}(\rho\phi u) dV = \int_{CV} \text{div}(T \text{grad } \phi) dV + \int_{CV} S_\phi dV \quad (2.40)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

การอินทิเกรตเชิงปริมาตรในเทอมที่สองด้านซ้ายมือ คือ เทอมการพา และในเทอมแรกทางขวามือคือเทอมของการแพร่ ถูกเขียนใหม่เป็นการอินทิเกรตเชิงพื้นผิวของปริมาตรควบคุมโดยใช้ทฤษฎี Gauss' divergence สำหรับเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  ใดๆ ทฤษฎีนี้กล่าวว่า

$$\int_{cv} \text{div } \mathbf{a} dV = \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} dA \quad (2.41)$$

ความหมายทางฟิสิกส์ของ  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}$  คือ องค์ประกอบย่อยของเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  ในทิศทางของเวกเตอร์  $\mathbf{n}$  ตั้งฉากต่อพื้นผิวของชิ้นส่วน  $dA$  ฉะนั้นการอินทิเกรตของ divergence ของเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  เหนือปริมาตร จะเท่ากับ องค์ประกอบย่อยของเวกเตอร์  $\mathbf{a}$  ในทิศทางตั้งฉากกับพื้นผิวตลอดทั้งขอบเขตของปริมาตรรวม (Integrated) ซึ่งก็คืออาณาบริเวณของพื้นผิว  $A$  ทั้งหมด การประยุกต์ทฤษฎี Gauss' divergence (สมการที่ 2.40) จะทำให้สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{cv} \rho \phi dV \right) + \int_A (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A (\mathbf{T} \cdot \text{grad } \phi) dA + \int_{cv} S_\phi dV \quad (2.42)$$

ลำดับขั้นของการอินทิเกรตและการอนุพันธ์ ได้ถูกเปลี่ยนแปลงในเทอมแรกของทางซ้ายมือของสมการ (2.42) เพื่อแสดงให้เห็นความหมายทางฟิสิกส์ เทอมนี้มีนัยถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงทั้งหมดของคุณสมบัติ  $\phi$  ในปริมาตรควบคุม ผลคูณ  $\mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u})$  บรรยายถึงฟลักซ์ขององค์ประกอบของคุณสมบัติ  $\phi$  เนื่องจากการไหลของของไหลตลอดเวกเตอร์ตั้งฉาก  $\mathbf{n}$  ในทิศออกจากพื้นผิว ดังนั้นเทอมที่สองบนด้านซ้ายมือของ 2.42 หรือเทอมการพา ก็อัตราการลดลงสุทธิของคุณสมบัติของไหล  $\phi$  ของชิ้นส่วนของไหลเนื่องจากการพา

ฟลักซ์การแพร่เป็นบวกในทิศทางของการเปลี่ยนแปลงต่อหน่วยความยาวของคุณสมบัติของไหล  $\phi$  ที่มีค่าลบ เช่น ตลอดแนวทิศทาง  $-\text{grad } \phi$  สำหรับตัวอย่างนี้ ความร้อนถูกนำหรือแพร่ไปในทิศทางของการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิต่อหน่วยความยาวที่เป็นลบ ดังนั้นผลคูณของ  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \text{grad } \phi)$  คือองค์ประกอบของฟลักซ์การแพร่ตลอดเวกเตอร์ตั้งฉากที่ทิศพุ่งออกไป และดังนั้นออกจากชิ้นส่วนของไหลในทำนองเดียวกันกับผลคูณ  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{T} \cdot \text{grad } \phi)$  ซึ่งเท่ากับ  $\mathbf{n} \cdot (-\mathbf{T} \cdot \text{grad } \phi)$  ด้วยซึ่งสามารถอธิบายได้เป็นฟลักซ์การแพร่ที่มีค่าบวกในทิศทางพุ่งเข้าหาเวกเตอร์ตั้งฉากหรือเข้าไปในชิ้นส่วนย่อยนั่นเอง เทอมแรกทางขวามือของ 2.42 คือเทอมการแพร่ ดังนั้นจะสอดคล้องกับฟลักซ์ที่ไหลเข้าไปในชิ้นส่วนและแทนอัตราการเพิ่มสุทธิของคุณสมบัติ  $\phi$  ของชิ้นส่วนของไหลเนื่องจากการแพร่ เทอมสุดท้ายทางขวามือของสมการนี้ได้ให้อัตราการเพิ่มของคุณสมบัติ  $\phi$  ที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากผลของ Sources ภายในชิ้นส่วนไหล

ในทำนองเดียวกัน ความสัมพันธ์ 2.4 ของของไหลในปริมาตรควบคุมสามารถอธิบายได้ดังนี้

อัตราการ                      อัตราลดลงสุทธิของ  $\phi$                       อัตราการเพิ่มขึ้นของ                      อัตราการสร้างสุทธิ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เพิ่ม  $\phi$  + เนื่องจากการพาที่ =  $\phi$  เนื่องจากการแพร่ + ของ  $\phi$   
 คร่อมผ่านขอบเขต

การอธิบายนี้ยืนยันได้ว่าการอินทิเกรตของสมการ Partial Differential ยังคงสภาพของการอนุรักษ์ปริมาณทางฟิสิกส์ของของไหล แม้ในระดับปริมาตรควบคุมที่มีขนาดจำกัด (Macroscopic)

ในปัญหาสภาวะคงตัว (Steady State) อัตราของเทอมที่การเปลี่ยนแปลงของ (2.42) เท่ากับศูนย์ สิ่งนี้นำไปสู่รูปแบบอินทิเกรตของสมการการเคลื่อนที่แบบสภาวะคงตัว

$$\int_A n_i (\rho \phi) dA = \int_A n_i (T \text{ grad } \phi) dA + \int_{cv} S_\phi dV \quad (2.43)$$

ในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเวลา จำเป็นต้องอินทิเกรตเทียบกับเวลา  $t$  ในช่วงเวลาน้อยๆ  $\Delta t$  จาก  $t$  จนกระทั่งถึง  $t + \Delta t$  ทำให้ได้รูปแบบอินทิเกรตทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่ คือ

$$\int_{\Delta t} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{cv} (\rho \phi) dV \right) dt + \int_{\Delta t} \int_A n_i (\rho \phi) dA dt = \int_{\Delta t} \int_A n_i (T_\phi \text{ grad } \phi) dA dt + \int_{\Delta t} \int_{cv} S_\phi dV dt \quad (2.44)$$

## 2.6 การแบ่งจำพวกของพฤติกรรมทางฟิสิกส์

ขณะนี้เราได้เรียนรู้สมการอนุรักษ์ของของไหล เราจะหันมาศึกษาลักษณะของเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบ ซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นเพื่อสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ครบถ้วน ในการกำหนดการไหลของของไหล เริ่มแรกเราจำแนกพฤติกรรมฟิสิกส์ออกเป็น 2 กลุ่มคือ

1. Equilibrium problems
2. Marching problems

### Equilibrium problems

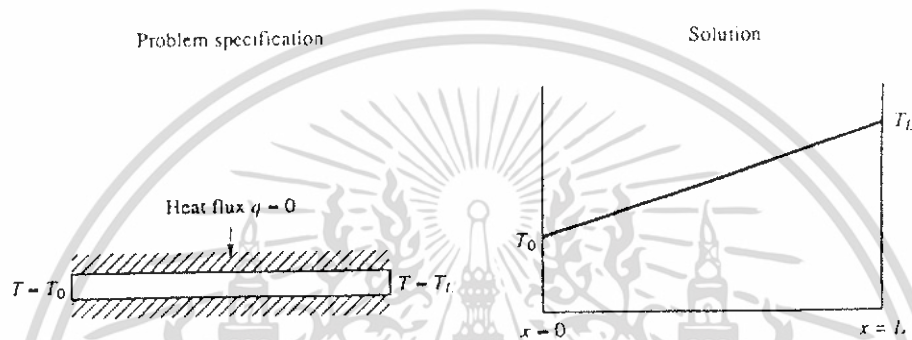
ปัญหาในกลุ่มแรกคือสถานการณ์ของสภาวะคงตัว (Steady state) เช่น การกระจายอุณหภูมิที่สถานะในคงที่ในวัสดุที่เป็นแท่งของแข็ง (Rod) การกระจายความเค้นที่สภาวะสมดุลภายใต้ภาระที่กำหนด หรือ การไหลของไหลในสภาวะคงตัว ในลักษณะต่างๆ เป็นต้น มีปัญหาสภาวะคงตัวจำนวนมากอธิบายได้ โดยสมการ elliptic equations สมการต้นแบบคือสมการลาปลาซ (Laplace's Equations) ซึ่งอธิบายการไหลแบบ irrotational และอัดตัวไม่ได้ และอธิบายการถ่ายเทความร้อนแบบการนำความร้อนที่สภาวะคงตัว ในสองมิติได้ ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.45)$$

ตัวอย่างง่ายที่สุดของปัญหาสมการคือ การถ่ายเทความร้อนแบบสภาวะคงตัว (ที่ซึ่ง  $\phi = T$  ในสมการ 2.45) ในก้านโลหะหุ้มฉนวนโดยรอบ ขณะที่ปลายของมันเป็นคือที่  $x = 0$  และ  $x = L$  มีการรักษาอุณหภูมิคงที่ไว้แต่มีค่าไม่เท่ากันโดยมีอุณหภูมิ  $T_0$  และ  $T_L$  ตามลำดับ (รูปที่ 2.6)

ปัญหานี้เป็นแบบ 1 มิติ และถูกควบคุมโดยสมการ  $k \frac{d^2 t}{dx^2} = 0$  ภายใต้เงื่อนไขที่ขอบที่ให้การกระจายอุณหภูมิในทิศทาง  $x$



รูปที่ 2.6 การกระจายอุณหภูมิอย่างสภาวะคงที่บนก้านวัสดุแข็งที่หุ้มฉนวน

แน่นอนซึ่งเป็นลักษณะเชิงเส้น คำตอบของปัญหานี้และปัญหาแบบ Elliptic ทั้งหมดหาได้โดยกำหนดเงื่อนไขตัวแปรตาม (ในที่นี้คือ อุณหภูมิ และการอนุพันธ์ของมัน, ฟลักซ์ความร้อน) บนขอบเขตทั้งหมดของบริเวณคำตอบ ปัญหานี้ต้องการข้อมูลบนขอบเขตทั้งหมดซึ่งถูกเรียกว่า ปัญหาค่าขอบ (boundary-value problem) คุณลักษณะเด่นที่สำคัญของปัญหาแบบ Elliptic คือ เมื่อเกิดการรบกวนภายในคำตอบสำหรับตัวอย่างเช่น การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเนื่องจากการเกิดแหล่งความร้อนที่ตำแหน่งใดๆ มันจะส่งผลให้มีการเปลี่ยนแปลงคำตอบทุกที่ในขอบเขต

กล่าวได้ว่าสัญญาณที่เปลี่ยนแปลงจะเกิดการรบกวน โดยเดินทางในทุกทิศทางตลอดภายในคำตอบ เพราะฉะนั้นคำตอบของปัญหาทางฟิสิกส์ที่ถูกอธิบายโดยสมการ Elliptic จะมีความราบเรียบ ถึงแม้ว่าเงื่อนไขที่ขอบจะไม่ต่อเนื่องก็ตาม ซึ่งสามารถพิจารณาเป็นข้อที่คัดต่อการออกแบบวิธีเชิงตัวเลข เพื่อให้แน่ใจว่าข้อมูลได้แพร่ในทุกทิศทาง เทคนิคเชิงตัวเลขสำหรับปัญหา Elliptic จำเป็นต้องให้ผลเฉลยที่แต่ละจุดใดๆ ได้รับอิทธิพลจากผลเฉลยที่ตำแหน่งรอบๆ จุดใดๆ นั้นนั่นเอง

### Marching problems

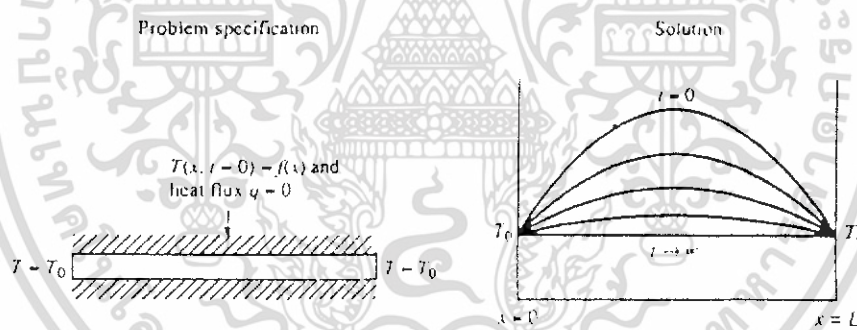
การถ่ายเทความร้อนในสภาวะไม่คงตัว การไหลที่สภาวะไม่คงตัว และปรากฏการณ์ของคลื่น เป็นตัวอย่างของปัญหาในกลุ่มนี้ ปัญหาแบบ Marching หรือ Propagation นี้ถูกอธิบายโดยสมการพาราโบลา เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ลิก (Parabolic) หรือไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic) อย่างไรก็ตามไม่ใช่ปัญหา Marching ทั้งหมดจะเป็นแบบไม่คงตัว ซึ่งเราจะเห็นต่อไปว่าการไหลแบบคงตัวบางแบบ ถูกอธิบายโดยสมการพาราโบลิก หรือไฮเปอร์โบลิก ในกรณีเหล่านี้ทิศทางการไหลมีบทบาทในเชิงโครงสร้างคล้ายกับเวลา (time-like co-ordinate along) ซึ่งทำให้เกิดรูปแบบ marching

**สมการพาราโบลิก** อธิบายปัญหาที่ขึ้นอยู่กับเวลาหรือปัญหาไม่คงตัวนั่นเอง โดยมีอิทธิพลของการแพร่กระจายเข้ามาเกี่ยวข้องกับพฤติกรรมการไหลอย่างมีนัยสำคัญ ตัวอย่างเช่น การไหลของของไหลที่มีความหนืดแบบไม่คงตัว และการนำความร้อนแบบไม่คงตัว สมการพาราโบลิกต้นแบบคือสมการการแพร่

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \tag{2.46}$$

ตัวอย่างปัญหาที่อธิบายได้โดยสมการการแพร่ เช่น การกระจายอุณหภูมิ ( $\phi = T$ ) แบบไม่คงตัว ในโลหะที่หุ้มฉนวนโดยรอบตรงปลายที่  $x = 0$  และ  $x = L$  ถูกรักษาอุณหภูมิให้คงที่ และเท่ากับอุณหภูมิ  $T_0$  ในทางปฏิบัติ ปัญหานี้จะเกิดขึ้นเมื่อก้านโลหะดังกล่าว มีแหล่งกำเนิดความร้อนที่สม่ำเสมอ ซึ่งทำให้เกิดการกระจายอุณหภูมิแบบพาราโบลาร์ขึ้น มีค่าอุณหภูมิสูงสุดที่  $x = L/2$  ต่อมา ที่เวลา  $t = 0$  แหล่งกำเนิดความร้อนถูกปิด (รูปที่ 2.7)



รูปที่ 2.7 การกระจายอุณหภูมิอย่างสภาวะไม่คงที่บนก้านวัสดุแข็งที่หุ้มฉนวน

ที่สภาวะสุดท้าย  $t \rightarrow \infty$  การกระจายอุณหภูมิ  $T$  จะเท่ากับ  $T_0$  ตลอดทั้งแท่ง ลักษณะของคำตอบของสมการ (2.46) เป็นการถดถอยของอุณหภูมิแบบ exponential ปัญหาแบบนี้ต้องมีทั้งเงื่อนไขที่ขอบเขตและค่าของอุณหภูมิในทุกจุดที่เวลาเริ่มต้น แบบของปัญหานี้เรียกว่า initial -boundary-value problem

การเกิดการรบกวนค่าที่จุดใดๆ ในขอบเขตของคำตอบ (เช่น  $0 < x < L$  ที่เวลา  $t_1 > 0$ ) จะก่อให้เกิดผลเปลี่ยนแปลงต่อคำตอบที่เวลาต่อมา  $t > t_1$  เท่านั้น ไม่ส่งผลต่อคำตอบที่เวลาก่อน  $t_1$  อิทธิพลของการแพร่จะส่งผลให้มีการกระจายอุณหภูมิที่เวลา  $t > 0$  อย่างต่อเนื่อง ถึงแม้จะมีการกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้นอย่างไม่ต่อเนื่องก็ตาม

ที่สภาวะคงตัว  $t \rightarrow \infty$  สมการจะถูกลดรูปโดยการเปลี่ยนแปลงตามเวลาเป็นศูนย์ คือ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \text{ สมการที่ (2.46) ก็คือสมการที่อธิบายการกระจายอุณหภูมิแบบคงตัวนั่นเอง}$$

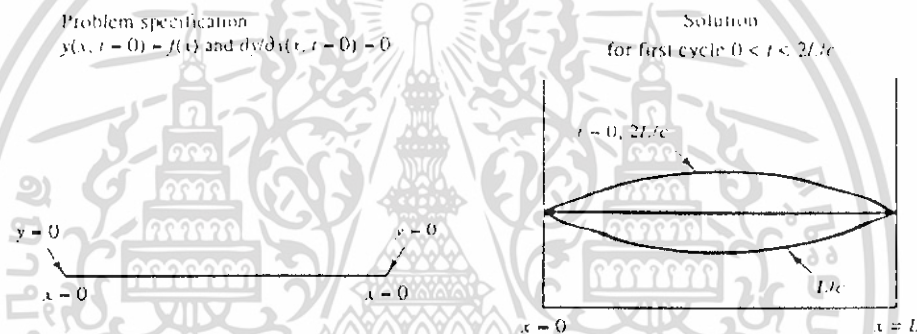
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการไฮเปอร์โบลิก มีอิทธิพลต่อการวิเคราะห์ปัญหาการสั่น โดยทั่วไปมันจะปรากฏในกระบวนการที่ขึ้นอยู่กับเวลา และอิทธิพลของการแพร่กระจายมีผลน้อย ต้นแบบของสมการไฮเปอร์โบลิกคือสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2.47)$$

รูปแบบข้างต้นของสมการอธิบายระยะเคลื่อนตัวในแนวขวาง ( $\phi = y$ ) ของเส้นเชือกภายใต้การดึง และมีการสั่นเล็กน้อย รวมทั้งการสั่นทำให้เกิดเสียง ค่าคงที่  $c$  คือความเร็วคลื่น การหาคำตอบของสมการนี้ก็ได้ในลักษณะเดียวกัน โดยจะได้เป็นระยะเบี่ยงเบนของเส้นเชือกของตำแหน่งต่างๆ ที่เวลาต่างๆ ของเส้นลวดที่มีความยาว  $L$  โดยใช้ (2.47)



รูปที่ 2.8 การสั่นของสปริงภายใต้แรงดึง

คำตอบของสมการคลื่น (2.47) และสมการไฮเปอร์โบลิกทั่วไป สามารถหาได้โดยกำหนดเงื่อนไข 2 แบบ คือค่าระยะเบี่ยงเบนของเส้นลวดที่ขอบเขตของปัญหาสองค่ากับระยะเบี่ยงเบนของเส้นลวดภายในทั้งหมดที่สภาวะเริ่มต้น ดังนั้นปัญหาไฮเปอร์โบลิกคือ Initial-boundary-value problem ด้วย เช่นกัน ถ้าแอมพลิจูดเริ่มต้นถูกให้โดย  $a$  คำตอบของปัญหานี้คือ

$$y(x, t) = a \cos\left(\frac{\pi ct}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

แสดงให้เห็นว่าแอมพลิจูดการสั่นยังคงที่เมื่อเวลาผ่านไป แสดงให้เห็นว่ายังไม่มี damping ในระบบภาวะดังกล่าวมีผลอย่างสำคัญ เพราะหากเราลองพิจารณาการสั่นที่มีสภาวะเริ่มต้นที่เป็นฟังก์ชันที่เกือบจะเป็นสามเหลี่ยม โดยที่มุมของสามเหลี่ยมสามารถมองได้ว่าเป็นส่วนของวงกลมที่มีรัศมีเล็กมาก (เหมือนการทำ fillet ในการลบมุม โดยให้รัศมีมีค่าน้อยมากๆ) ที่มุมนี้เรียกได้ว่าเกิดความไม่ต่อเนื่องขึ้น ทั้งนี้ฟังก์ชันค่าเริ่มต้นนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของอนุกรมฟูรีเยร์ได้ และเนื่องจากอนุกรมนี้เป็นการรวมเอกลีน่าเป็นเอกลักษณ์ที่ส่งคืนเวลาให้กับการเชิงเส้นเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่น่าจะเห็นประโยชน์ในการคำนวณว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กันของเทอมย่อยที่เป็นฟังก์ชัน sine ซึ่งเป็น periodic function มีรูปแบบแน่นอนไม่ขึ้นกับเวลา ดังนั้นภาวะไม่ต่อเนื่องของคำตอบที่เวลา  $t$  ใดๆ ยังคงอยู่ ซึ่งก็เป็นเพราะไม่มี damping ที่เป็นกลไกที่ทำให้เกิดการกระจายความไม่ต่อเนื่องนั้นนั่นเอง

การไหลของไหลแบบที่ความเร็วใกล้ความเร็วเสียงและสูงกว่านั้น จะเกิดคลื่นกระแทก (Shock wave) และรูปแบบของสมการการไหลก็มีลักษณะเป็น ไฮเปอร์โบลิก ที่ความเร็วยานี้การสร้างระเบียบวิธีในการคำนวณที่ถูกต้องแบบเพื่อรองรับปรากฏการณ์ดังกล่าว กล่าวคือจะอนุญาตให้มีความไม่ต่อเนื่องเกิดขึ้นในโดเมนของการไหล

ในลักษณะการไหลดังกล่าวนี้หากมีการรบกวนเกิดขึ้นในระบบ ผลของมันจะแพร่กระจายไปในโดเมนที่บริเวณใดบริเวณหนึ่งเท่านั้น อัตราการแพร่กระจายของสิ่งรบกวนนั้นเท่ากับความเร็วของคลื่น  $c$  ในขณะที่ปัญหาแบบ Parabolic และแบบ Elliptic จะมีอัตราการแพร่กระจายเป็นอนันต์

## 2.7 บทบาทของลักษณะเฉพาะในสมการไฮเปอร์โบลิก

สมการไฮเปอร์โบลิกมีพฤติกรรมที่ค่อนข้างพิเศษ กล่าวคือมันจะมีความเกี่ยวข้องกับความเร็วของการแพร่กระจาย หรือที่เรียกอีกนัยหนึ่งคือความเร็วของคลื่น ที่ทำให้สมการไฮเปอร์โบลิกมีความแตกต่างกับสมการที่กล่าวมาทั้งสองแบบข้างต้น เพื่อที่จะให้มองเห็นภาพที่ชัดเจนขึ้น เรามาลองพิจารณาปัญหาอย่างง่ายคือปัญหาของคลื่น (2.47) จากการพิสูจน์ (Open University, 1984) การเปลี่ยนแปลงตัวแปร ไปเป็น  $\zeta = x - ct$  และ  $\eta = x + ct$  จะทำให้สมการอนุพันธ์ 2.47 เปลี่ยนรูปไปเป็นแบบมาตรฐาน ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta \partial \eta} = 0 \quad (2.48)$$

การแปลงรูปข้างบนนี้เกิดขึ้นได้ เมื่อประยุกต์กฎลูกโซ่โดยแสดงสมการ 2.47 ในรูปของตัวแปรคู่ใหม่นี้ สมการ 2.48 นี้สามารถหาคำตอบได้อย่างง่ายดาย ซึ่งคำตอบของสมการอนุพันธ์ 2.48 นี้คือ  $\phi(\zeta, \eta) = F_1(\zeta) + F_2(\eta)$  โดยที่  $F_1$  กับ  $F_2$  เป็นฟังก์ชันใดๆ ก็ได้

นั่นคือฟังก์ชันคำตอบของสมการอนุพันธ์สามารถแสดงในรูปของตัวแปรเริ่มต้น  $x, t$  ซึ่งทำให้ได้คำตอบรูปทั่วไปของสมการ (2.47) คือ

$$\phi(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct) \quad (2.49)$$

ส่วนประกอบแรกของฟังก์ชันคำตอบคือ ฟังก์ชัน  $F_1$  จะเป็นค่าคงที่ ถ้าผลของ  $x - ct$  คงที่ และดังนั้น  $F_1$  จึงคงที่ตลอดแนวเส้นตรงที่มีความชัน  $\frac{dt}{dx} = 1/c$  ในระนาบ  $x - t$  ส่วนประกอบที่สองคือ ฟังก์ชัน  $F_2$  จะเป็นค่าคงที่ ถ้า  $x - ct$  คงที่ ดังนั้น  $F_2$  จึงคงที่ตลอดแนวของความชัน  $\frac{dt}{dx} = -1/c$  เส้นตรง 2 เส้น ที่  $x - ct =$  ค่าคงที่ และ  $x + ct =$  ค่าคงที่เหล่านี้เรียกว่าเส้นลักษณะเฉพาะตัว Characteristics ของสมการไฮเปอร์โบลิก

ลิต ฟังก์ชัน  $F_1$  และ  $F_2$  เราเรียกว่าคำตอบของสมการคลื่นอย่างง่าย (Simple wave solution) เป็นการแสดงว่าคลื่นมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว  $c$  และ  $-c$  โดยไม่มีการเปลี่ยนรูปร่างหรือขนาดแอมพลิจูด

รูปจำเพาะของฟังก์ชัน  $F_1$  และ  $F_2$  สามารถหาได้โดยกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นและขอบเขตของข้อมูล เช่น หากเราพิจารณาเส้นเชือกที่ยาวมากเส้นหนึ่ง ( $-\infty < x < \infty$ ) และกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น

$$\phi(x, 0) = f(x) \quad \text{and} \quad \partial\phi/\partial t(x, 0) = g(x) \quad (2.50)$$

รวมสมการ (2.49) และ (2.50) เราได้

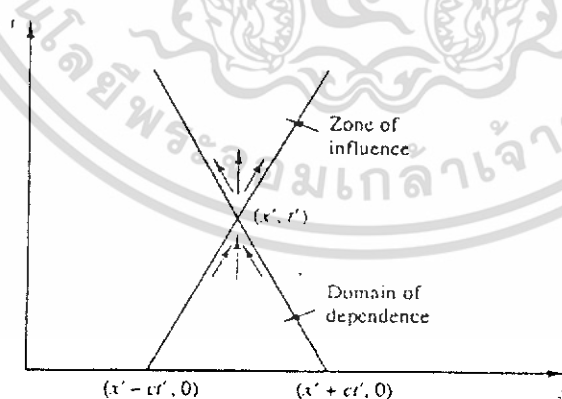
$$F_1(x) + F_2(x) = f(x) \quad \text{and} \quad -cF_1'(x) + cF_2'(x) = g(x) \quad (2.51)$$

คำตอบเฉพาะของสมการคลื่น (2.47) ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้น (2.50) ถูกให้โดย Bland, 1988 ดังนี้

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \quad (2.52)$$

พิจารณาฟังก์ชัน 2.52 ให้ดีจะพบว่าค่า  $\phi$  ที่จุด  $(x, t)$  ใดๆ ในขอบเขตของปัญหาที่สนใจ จะขึ้นกับเพียงเงื่อนไขเริ่มต้นที่อยู่ในช่วงระหว่างเส้น  $x-ct = \text{constant}$  กับ  $x+ct = \text{constant}$  เท่านั้น และไม่ขึ้นกับเงื่อนไขเริ่มต้นนอกช่วงนี้

รูป 2.9 นี้พยายามที่จะแสดงประเด็นที่กล่าวไว้ข้างบน สมมติว่าเส้นตรง 2 เส้นนี้ ตัดกันที่  $(x', t')$  และ ตัดกับแกน  $x$  ที่  $(x'-ct', 0)$  และ  $(x'+ct', 0)$  บริเวณที่อยู่ภายใน โคม เรียกว่า Domain of dependence ซึ่งฟังก์ชันคำตอบขึ้นอยู่กับพิกัดในบริเวณนี้



รูปที่ 2.9 Domain of dependence และ Zone of Influence สำหรับปัญหาแบบไฮเปอร์โบลิก

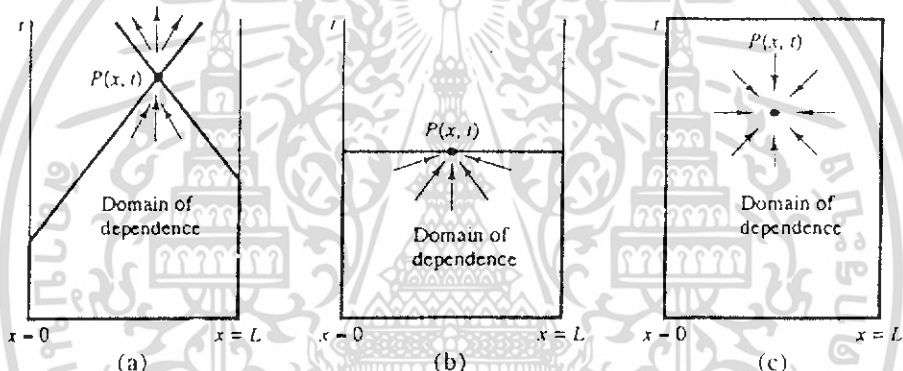
จากสูตร 2.52 คำตอบที่  $(x', t')$  ได้รับความอิทธิพลจากสิ่งรบกวนที่เกิดขึ้นที่ตำแหน่ง  $x$  ณ เวลา  $t$  ที่อยู่ใน Domain of Dependent เท่านั้น ทั้งนี้เนื่องจากการที่คลื่นมีความเร็วที่จำกัดนั่นเอง (เท่ากับความเร็วคลื่น  $c$ ) ในทำนองเดียวกัน ความเปลี่ยนแปลงหรือการรบกวนที่เกิดขึ้นที่พิกัด  $(x', t')$  จะมีอิทธิพลต่อ คำตอบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่  $x$  ณ เวลา  $t$  ที่อยู่ใน Zone of Influence ดังแสดงในรูป 2.9 ซึ่งอยู่ในขอบเขตภายในเส้นตรง 2 เส้นนี้เช่นกัน

รูปที่ 2.10 a. แสดงถึงลักษณะสำหรับการสั้นของเชือกซึ่งยึดไว้ที่  $x = 0$  และ  $x = L$  สำหรับจุดพิศัดใดๆ ที่ใกล้กับแกน  $x$  นั้น Domain of dependence อยู่ภายในขอบเขตที่ถูกรอไว้โดยเส้น Characteristics ทั้งสองเส้นนั้น ที่จุด  $P(x, t)$  เป็นจุดที่เส้น Characteristics ทั้งสอง ตัดกันทำให้  $x-ct = \text{const.}$  และ  $x+ct = \text{const.}$  พร้อมกันนั่นเอง Domain of dependence ของจุด  $P$  จำกัดอยู่ในเส้น characteristic 2 เส้นนี้ และ เส้น  $t=0, x=0$  และ  $x=L$

ลักษณะของ Domain of Dependence (ดูรูป 2.10b and c) ในปัญหาแบบ Parabolic และ แบบ Elliptic จะแตกต่างไปจากนี้ เนื่องจากอัตราการแผ่ของข้อมูลหรือคลื่นเป็นอนันต์ เส้นขอบที่หนาแสดงให้เห็นขอบเขตระหว่าง Domain of Dependence และเงื่อนไขค่าขอบที่จำเป็นที่จะทำให้สามารถหาคำตอบในรูปแบบของสมการแต่ละชนิด



รูปที่ 2.10 ขอบเขตของความอิสระสำหรับปัญหา (a) ไฮเปอร์โบลิก (b) พาราโบลิก และ (c) วงรี

ลักษณะที่การเปลี่ยนแปลงที่จุดหนึ่งจะมีผลกระทบกับจุดอื่นอย่างไรนั้น ขึ้นอยู่กับว่าปัญหานั้นเป็นปัญหาแบบคงตัว หรือแบบขึ้นกับเวลา และยังขึ้นกับอัตราการแผ่ขยายของสัญญาณรบกวนว่าเป็นแบบอนันต์หรือไม่ ทำให้เราสามารถจัดกลุ่มของปัญหาและสมการอนุพันธ์ที่อธิบายปัญหาเหล่านั้นได้ ไปในแต่ละแบบ คือ วงรี (elliptic) พาราโบล่า(parabola) และไฮเปอร์ลิค(hyperbolic) สรุปลักษณะหลักซึ่งให้ไว้ในตาราง 2.2

ตาราง 2.2 การจำแนกชนิดของพฤติกรรมทางฟิสิกส์

ชนิดของปัญหา	ชนิดของสมการ	สมการต้นแบบ	เงื่อนไข	โดเมนของคำตอบ	ความต่อเนื่องของคำตอบ
ปัญหาชนิดที่มีความสมดุล	Elliptic	$div grad \phi = 0$	ค่าขอบ	แบบปิด	ต่อเนื่องเสมอ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ปัญหาไม่คงตัว และมีอัตราการแผ่ขยายเป็นอนันต์	Parabolic	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi$	ค่าขอบ ค่าเริ่มต้น	แบบเปิด	ต่อเนื่องเสมอ
ปัญหาไม่คงตัว และมีอัตราการแผ่ขยายไม่เป็นอนันต์	Hyperbolic	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = c^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi$	ค่าขอบ ค่าเริ่มต้น	แบบเปิด	ไม่จำเป็น

## 2.8 วิธีการแบ่งจำพวก สำหรับสมการอนุพันธ์ย่อยแบบง่าย

ในทางปฏิบัติการแบ่งจำพวก PDEs อันดับสอง สามารถทำได้โดยพิจารณารูปทั่วไปของสมการในระบบพิกัดสองมิติ X และ Y ข้างล่างนี้

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial y} + f \phi + g = 0 \quad (2.53)$$

ในขั้นแรกเราจะสมมุติว่าสมการเป็นเชิงเส้นและ  $a, b, c, d, e, f, g$  คือค่าคงที่ การจำแนกชนิดของสมการเหล่านี้กำหนดโดยพจน์ที่มีอนุพันธ์อันดับสูงสุด ซึ่งในกรณีนี้คืออนุพันธ์อันดับที่สอง ทำการแทนค่าคำตอบด้วยสมการคลื่นอย่างง่ายเข้าไปในสมการ 2.53 หากผลเฉลยเป็นจริงนั้นหมายถึง สมการนั้นคือสมการไฮเปอร์โบลิก มิฉะนั้นแล้วสมการดังกล่าวจะเป็นสมการพาราโบลิกหรืออิลลิปติกนั่นเอง

คำตอบของคลื่นแบบง่ายจะเกิดขึ้น ถ้าสมการของคุณลักษณะจำเพาะ 2.54 ดังข้างล่างมีรากคำตอบที่แท้จริง 2 ค่า

$$a \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - b \left( \frac{dy}{dx} \right) + c = 0 \quad (2.54)$$

ตาราง 2.3 ชนิดของสมการอนุพันธ์อันดับสองแบบเชิงเส้น

$b^2 - 4ac$	ชนิดของสมการ	ลักษณะจำเพาะ
$> 0$	ไฮเปอร์โบลิก	คำตอบที่แท้จริง 2 ค่า
$= 0$	พาราโบลิก	คำตอบที่แท้จริง 1 ค่า
$< 0$	อิลลิปติก	ไม่มีคำตอบที่แท้จริง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากคำตอบของสมการคุณลักษณะที่เกิดขึ้น ขึ้นอยู่กับค่าของ  $(b^2 - 4ac)$  ตามตาราง 2.3 แสดงให้เห็นว่าจะเกิดขึ้น 3 กรณี

วิธีการจำแนกสมการดังที่แสดงไว้ในตาราง 2.3 สามารถนำไปใช้ได้ในกรณีที่  $a, b$  และ  $c$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $y$  หรือแม้แต่จะเป็นสมการไม่เชิงเส้นก็ตาม ซึ่งในกรณีที่ไม่เป็นเชิงเส้นนั้น ค่า  $a, b, c$  อาจเป็นฟังก์ชันของตัวแปรตาม  $\phi$  หรือค่าอนุพันธ์ลำดับแรกของมัน นั้นหมายถึงว่าชนิดของสมการอนุพันธ์อาจแตกต่างกันตามบริเวณของโดเมน ดังแสดงในตัวอย่างสมการข้างล่างนี้

$$y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.55)$$

หากเราพิจารณาพฤติกรรมในช่วง  $-1 < y < 1$  ดังนั้น  $a = a(x,y) = y, b = 0, c = 1$  ค่าของ  $(b^2 - 4ac)$  จะเท่ากับ  $-4y$  เราจำเป็นต้องให้ทั้ง 3 กรณีต่างกันไป

- ถ้า  $y < 0 : (b^2 - 4ac) > 0$       ดังนั้นสมการคือ ไฮเปอร์โบลิก  
 ถ้า  $y < 0 : (b^2 - 4ac) = 0$       ดังนั้นสมการคือ พาราโบลิก  
 ถ้า  $y < 0 : (b^2 - 4ac) < 0$       ดังนั้นสมการคือ อีลิปติก

สมการ (2.55) คือแบบผสม กล่าวคือเป็นสมการไฮเปอร์โบลิก พาราโบลิก หรืออีลิปติก ขึ้นอยู่กับค่าของ  $y$  สำหรับกรณีของความไม่เป็นเชิงเส้น เราสามารถใช้แนวคิดคล้ายกับที่แสดงไว้ข้างต้นได้ ดังนั้น ชนิดของสมการอนุพันธ์ย่อยสามารถจำแนกได้ตามค่า  $a, b, c$  ที่จุดหนึ่งในโดเมน

สำหรับสมการ PDEs อันดับ 2 ที่มีตัวแปรอิสระ  $N$  ตัว  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$  สามารถถูกจำแนกโดยเขียนให้อยู่ในรูปแบบข้างล่างนี้ โดยให้  $A_{jk} = A_{kj}$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_{jk} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_k} + H = 0 \quad (2.56)$$

Fletcher (1991) อธิบายว่าสมการสามารถจำแนกได้โดยใช้ค่าไอเกนของเมทริกซ์ที่มีสมาชิก  $A_{jk}$  ดังนั้น เราจำเป็นต้องหาค่า  $\lambda$  ที่ทำให้

$$\det [A_{jk} - \lambda I] = 0 \quad (2.57)$$

ในกรณีเช่นนี้ กฎการจำแนกจำพวกคือ

1. ถ้าค่าไอเกนของเมทริกซ์ เท่ากับ 0 สมการคือ พาราโบลิก

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2. ถ้าค่าไอเกนของเมทริกซ์ ไม่เท่ากับ 0 และสมาชิกของค่าไอเกนมีเครื่องหมายเดียวกันสมการจะเป็นอีลิปติก

3. ถ้าค่าไอเกนของเมทริกซ์ ไม่เท่ากับ 0 และสมาชิกของค่าไอเกนตัวใดตัวหนึ่งมีเครื่องหมายแตกต่างจากพวกแล้ว สมการนั้นจะเป็นไฮเปอร์โบลิก

สำหรับสมการลาปลาซ สมการการแพร่และสมการคลื่น เมื่อพิสูจน์โดยกระบวนการวิธีดังกล่าวข้างต้นแล้วจะให้ผลเหมือนกับคำตอบของสมการ 2.54

## 2.9 การแบ่งชนิดของสมการการไหลของของไหล

ระบบ PDEs อันดับ 1 ที่มีตัวแปรอิสระมากกว่าสองตัว สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมทริกซ์ได้ การจำแนกชนิดต้องใช้การหาค่าไอเกนดังที่กล่าวมาในหัวข้อที่แล้ว ระบบสมการอาจจะมาในรูปแบบผสมระหว่างสมการอันดับ 1 และอันดับ 2 ซึ่งสามารถหาค่าไอเกนได้เช่นกัน โดยมีตัวแปรช่วยที่แสดงความสัมพันธ์ของสมการอันดับ 2 ในรูปของสมการอันดับ 1 ข้อควรระวังมีเพียงว่า ต้องเลือกตัวแปรช่วยที่ไม่ทำให้เมทริกซ์เป็น non singular

สมการ Navier-Stokes และสมการสครูปของมัน สามารถถูกจำแนกโดยใช้วิธีเมทริกซ์ข้างต้นได้เช่นกันดังแสดงในตาราง 2.4 (Fletcher, 1991)

ตาราง 2.4 การจำแนกชนิดของพฤติกรรมการไหล

	การไหลแบบคงตัว	การไหลแบบไม่คงตัว
การไหลแบบมีความหนืด	อีลิปติก	พาราโบลิก
การไหลแบบไม่มีความหนืด	$M < 1$ อีลิปติก	ไฮเปอร์โบลิก
	$M > 1$ ไฮเปอร์โบลิก	ไฮเปอร์โบลิก
การไหลชั้นผิวบาง	พาราโบลิก	พาราโบลิก

การจำแนกชนิดในตาราง 2.4 เป็นการจำแนกชนิดอย่างคร่าวๆ ของการไหล ในความเป็นจริงแล้วการไหลมีพฤติกรรมที่ซับซ้อน

สำหรับการไหลแบบไม่มีความหนืดนั้นจะแตกต่างจากการไหลที่อธิบายด้วยสมการ Navier-Stokes และสมการพลังงาน เนื่องจากไม่มีความหนืดซึ่งเป็นทอมที่มีอันดับอนุพันธ์ที่สูง ถือเป็นอนุพันธ์อันดับสองของความเร็ว การจำแนกชนิดของสมการขึ้นอยู่กับลักษณะการอัดตัวได้และค่ามัคคัมเบอร์  $M$  พฤติกรรมของของไหลแบบไม่หนืดที่เป็นแบบอีลิปติก เมื่อการไหลมีค่ามัคคัมเบอร์ต่ำกว่าหนึ่งจะเกิดขึ้นเนื่องจากความดัน ถ้ามัคคัมเบอร์น้อยกว่าหนึ่งความดันจะส่งผลต่อการไหลที่อัดตัวเท่ากับความเร็วเสียง ซึ่งมากกว่าความเร็วของของไหลเอง แต่ถ้ามัคคัมเบอร์มากกว่าหนึ่งความเร็วของการไหลจะมากกว่าอัตรา

การกระจายอิทธิพลของความดัน ซึ่งจะทำให้ความดันไม่สามารถมีอิทธิพลต่อของไหลที่ตำแหน่งต้นน้ำ (upstream location) ข้อจำกัดนี้เป็นคุณลักษณะที่สำคัญของการไหลแบบไฮเปอร์โบลิก

ในของไหลชั้นผิวบางค่าอนุพันธ์ของความเร็วในทิศทางการไหลจะมีค่าน้อยกว่าอนุพันธ์ของความเร็วในทิศทางตั้งฉากกับแนวการไหลอย่างมาก ซึ่งจะเห็นได้จากลักษณะการไหลของชั้นขีดผิวหน้ การไหลแบบหัวฉีดลำเจ็ด การผสมกันของของไหลสองชนิดและการไหลในท่อแบบพัฒนาเต็มที่แล้ว (fully develop flow) สมการอธิบายการไหลมีเทอมของการแพร่แก่หนึ่งเทอม ดังนั้นจึงถูกจำแนกจำพวกเป็นแบบพาราโบลิก ต่อจากนี้เราจะแสดงให้เห็นตัวอย่างอย่างง่ายที่จะทำให้สังเกตเห็นพฤติกรรมที่ว่ามีได้เด่นชัดขึ้น

จากที่ผ่านมาเราจะพบว่า การไหลอาจเกิดความซับซ้อนขึ้นได้ เราจึงหันมาพิจารณาสมการศักย์ (potential equation) ที่อธิบายการไหลแบบคงตัว ข้อนกลับได้ ไร้ความหนืด และอัดตัวได้ ไหลผ่านวัตถุ รูปทรงเรียว (Shapiro, 1953) โดยมีความเร็วที่ free stream มีค่าเท่ากับมัคนัมเบอร์  $M_\infty$

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.58)$$

แทนค่า  $X_1 = X$  และ  $X_2 = Y$  ในสมการ (2.56) เราจะได้สมาชิกของเมทริก  $A_{11} = 1 - M_\infty^2$ ,  $A_{12} = A_{21} = 0$  และ  $A_{22} = 1$  เพื่อจำแนกชนิดสมการเราจะต้องหาค่า  $\lambda$  ที่ทำให้

$$\det \begin{pmatrix} (1 - M_\infty^2) - \lambda & 0 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

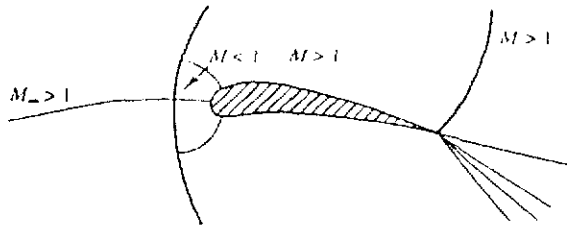
ได้คำตอบ 2 ค่า คือ  $\lambda_1 = 1$  และ  $\lambda_2 = 1 - M_\infty^2$  ถ้ามัคนัมเบอร์ที่ free stream น้อยกว่าหนึ่ง (การไหลต่ำกว่าเสียง) ค่าไอเกนจะมากกว่าศูนย์ ซึ่งการไหลจะเป็นแบบอิลิปติกถ้ามัคนัมเบอร์มากกว่าหนึ่งการไหลเหนือเสียง ค่าไอเกนที่สองจะเป็นลบและการไหลจะเป็นแบบไฮเปอร์โบลิก

เป็นที่น่าสังเกตว่าการไหลเป็นแบบไฮเปอร์โบลิก ถึงแม้ว่าจะเป็นการไหลแบบคงตัวในระนาบสองมิติซึ่งตัวแปรอิสระเป็นพิกัดที่อยู่บนระนาบนั้น ทิศทางของการไหลประพฤติตัวเหมือนการเพิ่มขึ้นของเวลาในสมการการไหลแบบไฮเปอร์โบลิก ซึ่งจะเป็นเช่นเดียวกันกับปัญหาการไหลในชั้นผิวบางด้วย ปัญหาลักษณะเหล่านี้สามารถใช้กระบวนการวิธีในการหาคำตอบลักษณะเดียวกับที่ใช้กับการหาคำตอบของสมการที่มีคาบเวลาเป็นตัวกำหนด

ตัวอย่างข้างต้นแสดงให้เห็นถึงอิทธิพลของความเร็วหรือมัคนัมเบอร์ที่มีต่อชนิดของการไหลแบบอัดตัวได้ รูปสมการทั่วไปของของไหลปราศจากความหนืดที่อัดตัวได้ (สมการออยเลอร์) ก็จะประพฤติตัวในลักษณะเดียวกัน แต่พารามิเตอร์ที่กำหนดชนิดการไหลสมการดังกล่าวจะได้รับอิทธิพลจากค่ามัคนัมเบอร์ที่จุดใดๆที่กำลังพิจารณาอยู่ ลักษณะเช่นนี้จะมีความซับซ้อนมากเมื่อเราพิจารณาการไหลที่มีค่ามัคนัมเบอร์ใกล้เคียงหนึ่ง การไหลเช่นนี้จะมีบริเวณที่เกิดคลื่นกระแทก (shock wave) และ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บริเวณการไหลแบบต่ำกว่าความเร็วเสียง (sub sonic) รวมทั้งการไหลแบบเหนือเสียง (super sonic) รูป 2.11 แสดงให้เห็นถึงย่านความเร็วที่ของไหลไหลรอบๆ air foil ที่มีคานัมเบอร์มากกว่าหนึ่ง



รูปที่ 2.11 ภาพแสดงการไหลรอบ air foil ที่ความเร็วเหนือเสียง

## 2.10 เงื่อนไขช่วยสำหรับสมการการไหลแบบไร้ความหนืด

ความซับซ้อนอันเนื่องมาจากพฤติกรรมการไหลหลายๆรูปแบบ ทั้งแบบอิลิปติก, พาราโบลิก และไฮเพอร์โบลิก ทำให้เราจำเป็นต้องกำหนดเงื่อนไขค่าขอบที่ตำแหน่งภายในของไหล ในทางทฤษฎีไม่มีผลวิเคราะห์ที่เพียงพอที่จะทำให้เรากำหนดเงื่อนไขค่าขอบได้อย่างถูกต้อง หรือมีก็ไม่มากนัก ตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นในหัวข้อนี้ได้มาจากประสบการณ์ที่กระบวนการที่กระบวนการวิธีทางด้าน CFD นำมาใช้แล้วประสบความสำเร็จ เงื่อนไขค่าขอบสำหรับของไหลหนืดที่อัดตัวได้แสดงให้เห็นในตาราง 2.5

ในตารางสัญลักษณ์  $\mu$  และ  $\rho$  บอกถึงทิศทางที่ตั้งฉาก (พุ่งออก) และทิศทางตามแนวสัมผัสกับพื้นผิวของขอบเขตการไหลตามลำดับ

นอกจากนี้เราจำเป็นต้องกำหนดทางออกหรือขอบเขตของผนังสำหรับตัวแปรที่เป็นความหนาแน่น เนื่องจากจำเป็นต้องให้การไหลเป็นไปตามกฎทรงมวล ที่ทางเข้าจำเป็นต้องรู้ค่าความหนาแน่น ในขณะที่จุดใดๆในโดเมนการไหลความหนาแน่นจะเป็นส่วนหนึ่งของคำตอบ โดยไม่จำเป็นต้องกำหนดค่าความหนาแน่นที่ขอบ สำหรับการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ที่มีความหนืดนั้น ไม่มีเงื่อนไขที่ต้องกำหนดสำหรับความหนาแน่น แต่เงื่อนไขอื่นๆที่ให้ในตาราง 2.5 จะเหมือนเดิม

### ตาราง 2.5 เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลแบบอัดตัวได้และมีความหนืด

เงื่อนไขเริ่มต้นสำหรับการไหลแบบไม่คงตัว

- ทุกๆจุดในคำตอบจะต้องมีค่าเริ่มต้นของ  $\rho$ ,  $u$  และ  $T$

เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลแบบไม่คงตัวและคงตัว

- บนผนัง  $u = u_w$  (no slip condition)  
 $T = T_w$  (fixed temperature) หรือ  $k \partial T / \partial n = -q_w$  (fixed heat flux)
- ที่ขอบเขตที่อยู่ในของไหล
  - ทางเข้า  $\rho$ ,  $u$  และ  $T$  กำหนดโดยเป็นฟังก์ชันของพิกัด
  - ทางออก  $-p + \mu \partial u_x / \partial n = F_n$  และ  $\mu \partial u_x / \partial n = F_t$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยทั่วไปแล้วขอบเขตที่จะให้ของไหลไหลออกจากโดเมนที่พิจารณานั้นจะต้องอยู่ในบริเวณที่การไหลมีการเรียงตัวสม่ำเสมอ และทราบค่าความดันที่ผิวของขอบเขตการไหลนั้น สำหรับการไหลที่มีค่าเรโนลด์ส์นัมเบอร์สูงและอยู่ห่างจากพื้นผิวของแข็ง เราจะสมมติว่าไม่มีความเปลี่ยนแปลงของความเร็วที่บริเวณขอบเขตของการไหลนั้น นอกจากนี้  $F_n = -p$  และ  $F_t = 0$  ดังนั้นเราจึงพบอยู่เสมอๆว่ามีการกำหนดเงื่อนไขที่ทางออกของโดเมนการไหล ดังนี้

$$\text{specified pressure, } \partial u_n / \partial n = 0 \quad \text{and} \quad \partial T / \partial n = 0$$

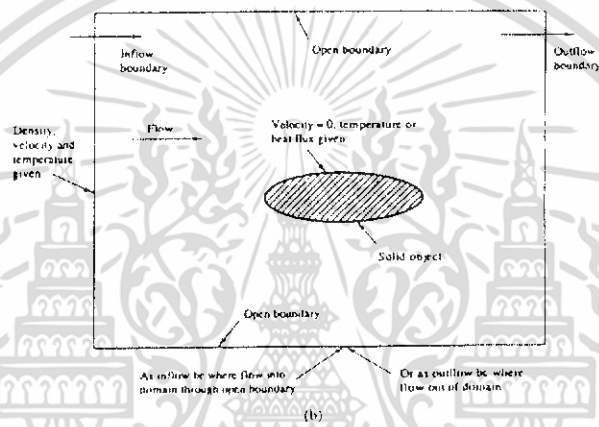
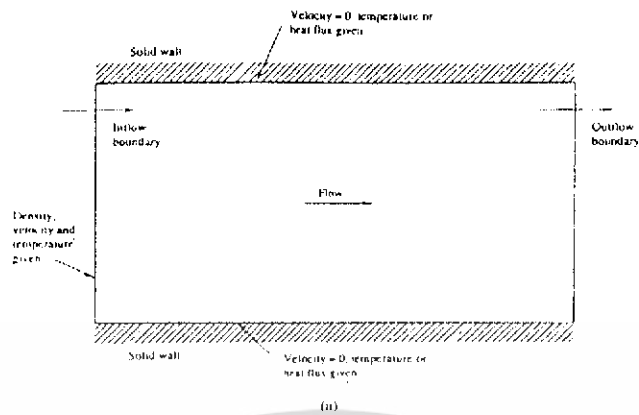
Gresho (1991) ได้ให้ข้อสังเกตในเชิงทฤษฎีเกี่ยวกับการกำหนดเงื่อนไขค่าขอบข้างต้นไว้กับปัญหาการไหลที่อัดตัวไม่ได้ อย่างไรก็ตามเมื่อนำเงื่อนไขค่าขอบนั้นมาใช้ในทางปฏิบัติแล้วก็ให้ผลการจำลองที่น่าพึงพอใจ ข้อสังเกตดังกล่าวจึงไม่ถูกนำมาใช้ในทางปฏิบัติ

รูปที่ 2.12 (a) แสดงการประยุกต์เงื่อนไขค่าขอบสำหรับการไหลในรูปแบบการไหลในช่องปิด และ รูปที่ 2.12 (b) แสดงการไหลของของไหลผ่านวัตถุ

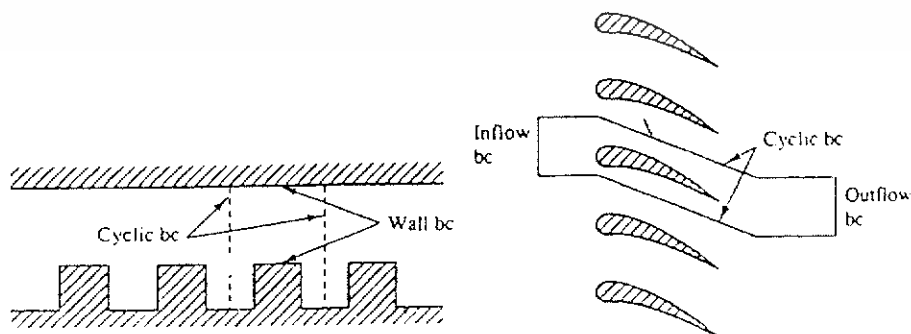
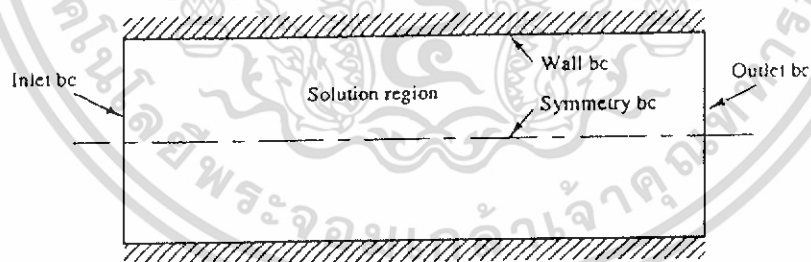
ในโปรแกรม CFD โดยทั่วไปมักจะรวมเงื่อนไขค่าขอบของความดันทั้งด้านขาเข้าและขาออก ความดันจะถูกกำหนดให้เป็นค่าคงที่ ในขณะที่มวลที่ทางเข้าจะถูกกำหนดที่ขอบเขตของโดเมนการไหล เพื่อให้แน่ใจได้ว่าการคำนวณเป็นไปตามกฎการอนุรักษ์มวล นอกจากนี้เรายังสามารถกำหนดเงื่อนไขค่าขอบในลักษณะที่เป็นแกนสมมาตรหรือเป็นค่าขอบที่มีความซ้ำ (cyclic boundary) ดังนี้

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตแบบสมมาตร } \partial \phi / \partial n = 0$$

$$\text{เงื่อนไขขอบเขตแบบซ้ำวนรอบ (cyclic boundary condition) } \phi_1 = \phi_2$$



รูปที่ 2.12 แสดงลักษณะของขอบเขตที่เราใช้เงื่อนไขสมมาตรกับเงื่อนไขจำนวนรอบได้



รูปที่ 2.13 ตัวอย่างของขอบเขตในเงื่อนไขสมมาตรกับเงื่อนไขจำนวนรอบได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.11 ปัญหาในการไหลอัดตัวได้ที่ความเร็วเหนือเสียง

ปัญหาจะมีความยุ่งยากขึ้นเมื่อทำการคำนวณหาค่าตอบของการไหลที่มีความเร็วใกล้หรือสูงกว่าความเร็วเสียง ที่ความเร็วเหล่านี้ค่าเรโนลด์นัมเบอร์จะมีค่าสูงมากและชั้นของไหลที่มีความหนืดจะบางมาก การไหลส่วนใหญ่จะมีพฤติกรรมเสมือนไม่มีความหนืด ซึ่งจะเป็นปัญหากับการไหลผ่านวัตถุเนื่องจากชั้นส่วนของการไหลที่มีการประยุกต์เงื่อนไขค่าขอบเข้าไป จะประพฤติตัวเป็นแบบไม่มีความหนืดซึ่งแตกต่างจากพฤติกรรมการไหลแบบไฮเปอร์โบลิก

ด้วยเหตุนี้กระบวนการวิเคราะห์ค่าความดันแบบ SIMPLE ในรูปแบบมาตรฐานจะต้องถูกปรับปรุง กล่าวคือจะต้องมีกระบวนการเพิ่มเติมเพื่อที่จะให้การแก้ค่าความดันสามารถกระทำได้ในรูปแบบการไหลแบบพาราโบลิกและแบบไฮเปอร์โบลิก และนอกจากนี้เพื่อที่จะรองรับปรากฏการณ์คลื่นกระแทกและการสะท้อนกลับของมันที่ขอบเขตหนึ่งของการไหล จึงจำเป็นต้องมีการหน่วงเทียม (artificial damping) ขึ้นในกระบวนการคำนวณ และยังคงแนะนำให้ได้ว่าบริเวณที่มีค่านัมเบอร์สูงกว่าหนึ่งจะมีการจำลองสมการการไหลไว้อย่างถูกต้อง Issa และ Lockwood (1977) และ McGuirk และ Page (1990) ได้ให้บทความที่เข้าใจง่ายซึ่งแยกแยะหัวข้อพิจารณาหลักที่เกี่ยวข้องกับวิธีปริมาตรสืบเนื่อง

การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบแบบเปิดจำเป็นต้องใส่ข้อมูลให้ครบถ้วน ซึ่งเป็นปัญหาที่ต้องการข้อมูลที่ขอบมากที่สุดในการกำหนดให้เหมาะสม ในการไหลของของไหลไร้ความหนืดแบบอัดตัวได้ที่มีความเร็วต่ำกว่าเสียงเราสามารถกำหนดเงื่อนไขค่าขอบที่ทางเข้า (กำหนดความหนาแน่นและความเร็ว) ที่ทางออกเราจะกำหนดเพียงหนึ่งเงื่อนไข (โดยทั่วไปแล้วคือค่าความดัน) โดยมีจำนวนเงื่อนไขค่าขอบน้อยกว่ากรณีการไหลเป็นแบบมีความหนืด ที่เป็นเช่นนี้เพราะของไหลที่ไม่มีความหนืดประพฤติตัวเป็นแบบไฮเปอร์โบลิกจึงไม่ต้องการเงื่อนไขการไหลที่ทางออก

### บทที่ 3 การถ่ายเทความร้อน

#### 3.1 การนำความร้อน (Conduction)

การนำความร้อน เป็นรูปแบบหนึ่งของการถ่ายเทความร้อน ในลักษณะของการแลกเปลี่ยนพลังงานจากบริเวณที่มีอุณหภูมิสูงไปยังบริเวณที่มีอุณหภูมิต่ำ โดยเคลื่อนแบบจลน์ (Kinetic motion) หรือการชนกันโดยตรงของโมเลกุลซึ่งเป็นลักษณะที่เกิดขึ้นในของไหลที่หยุดนิ่ง ส่วนในกรณีของโลหะนั้นจะเป็นการไหลของกระแสอิเล็กตรอน สำหรับของแข็งที่เป็นตัวนำไฟฟ้าที่ดี จะมีจำนวนอิเล็กตรอนอิสระมากมายที่เคลื่อนไหวยู่ภายในโครงสร้างของ โมเลกุล (Lattice) ซึ่งอาจกล่าวได้ว่าวัตถุที่เป็นตัวนำไฟฟ้าที่ดีจะเป็นตัวนำความร้อนที่ดีตามไปด้วย ยกตัวอย่างเช่น เงิน ทองแดง เหล็ก ฯลฯ อันเป็นผลจากการนำหรือถ่ายทอดพลังงานความร้อนโดยอิเล็กตรอนอิสระเหล่านี้

กฎสหสัมพันธ์ของการนำความร้อนโดยถือเกณฑ์การสังเกตจากการทดลอง กำหนดจากบิโธต์ (Biot) แต่ต่อมานักฟิสิกส์-คณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ชื่อ โจเซฟ ฟูริเยร์ (Joseph Fourier) นำหลักการนี้มาใช้วิเคราะห์เป็นทฤษฎีความร้อน กฎนี้กล่าวว่า อัตราการไหลของการนำความร้อนในทิศทางที่กำหนดเป็นสัดส่วนกับพื้นที่ตั้งฉากกับทิศทางการไหลของความร้อนและเกรเดียนต์ของอุณหภูมิในทิศทางนั้น สำหรับการไหลของความร้อนในทิศทาง X กฎของฟูริเยร์กำหนดเป็น

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} \quad \text{W} \quad \dots\dots(3.1a)$$

$$\text{หรือ} \quad q_x'' = \frac{q_x}{A} = -k \frac{dT}{dx} \quad \text{W/m}^2 \quad \dots\dots(3.1b)$$

โดยที่  $q_x$  คือ อัตราการนำความร้อนผ่านพื้นที่ A ในทิศทางบวก x

$q_x''$  คือ ฟลักซ์ความร้อนในทิศทางบวก x

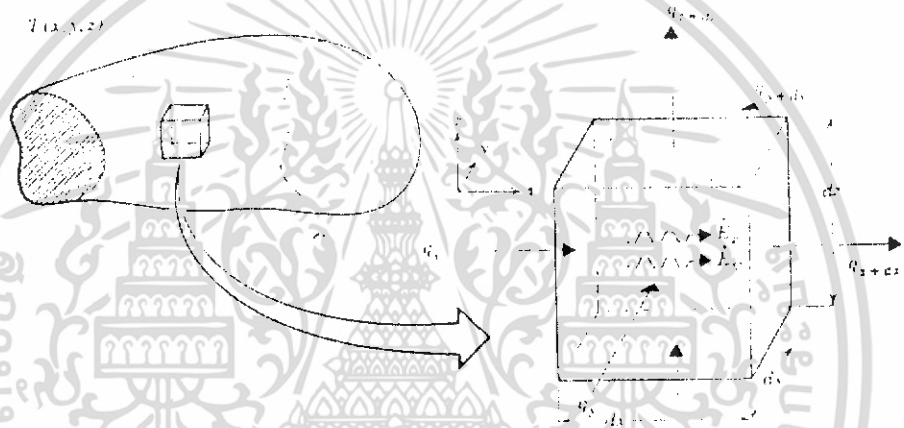
k คือ ค่าสภาพการนำความร้อนของวัตถุ (thermal conductivity of material) และเป็นค่าบวก จากสมการ (3.1a) ถ้าอุณหภูมิลดลงในทิศทางบวกของ x แล้ว  $dT/dx$  เป็นลบ ดังนั้น  $q_x''$  (หรือ  $q_x$ ) มีค่าเป็นบวก เนื่องจากสมการมีเครื่องหมายลบติดอยู่ เพราะฉะนั้นเครื่องหมายลบจึงต้องใส่ในสมการและเพื่อให้แน่ใจว่า  $q_x''$  (หรือ  $q_x$ ) เป็นปริมาณบวก เมื่อการไหลของความร้อนอยู่ในทิศทางบวกของ x ในทางกลับกันเมื่อทางด้านขวามือของสมการเป็นลบ แสดงว่าการไหลของความร้อนอยู่ในทิศทางลบของ x

จุดประสงค์หลัก ในการวิเคราะห์การนำความร้อนก็เพื่อที่จะหา สนามอุณหภูมิ (Temperature field) ในตัวกลางหนึ่งซึ่งเป็นผลจากเงื่อนไขซึ่งสอดคล้องกับขอบเขตของมัน นั่นคือ ต้องทราบการกระจายของอุณหภูมิ (temperature distribution) เมื่อทราบค่านี้ก็จะสามารถหาฟลักซ์ความร้อนที่จุดใด ๆ ในตัวกลางนั้น จากกฎของฟูริเยร์ (Fourier's Law) การหาค่านี้ทำโดยการ ใช้กฎของพลังงาน (energy

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

conservation) กับปริมาตรควบคุมดิฟเฟอเรนเชียลเฟอเรนเชียลซึ่งระบุกระบวนการถ่ายเทพลังงาน และใช้สมการอัตราที่เหมาะสม ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นสมการดิฟเฟอเรนเชียลซึ่งคำตอบของมันจะทำให้การกระจายอุณหภูมิในตัวกลางหรือวัตถุนั้น

พิจารณาตัวกลางเนื้อเดียวกันซึ่งมีเกรเดียนอุณหภูมิจริง และการกระจายของอุณหภูมิ  $T(x, y, z)$  กำหนดในพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinates) เรากำหนดปริมาตรควบคุมเล็กๆมากๆ  $d_x, d_y, d_z$  ตามที่แสดงในรูป 3.1 ถ้ามีเกรเดียนอุณหภูมิแล้วการนำความร้อนจะเกิดขึ้นข้ามแต่ละอันของผิวควบคุม อัตราการนำความร้อนที่จะตั้งฉากกับผิวควบคุมแต่ละอันที่ตำแหน่งโคออร์ดิเนต  $x, y, z$  ซึ่งแสดงโดยเทอม  $q_x, q_y, q_z$  ตามลำดับ อัตราการนำความร้อนที่ผิวตรงข้ามสามารถกระจายโดยอนุกรมเทลเลอร์ (Taylor series expansions) โดยไม่คิดเทอมลำดับสูงๆ (higher order terms) จะได้



รูปที่ 3.1 แสดงปริมาตรควบคุมเล็กๆ  $d_x, d_y, d_z$

: ที่มาของรูป ผศ. ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์, “การถ่ายเทความร้อน”, ภาควิชาเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad \dots (3.2a)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad \dots (3.2b)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad \dots (3.2c)$$

ภายในตัวกลางมีแหล่งพลังงานซึ่งสามารถผลิตอัตราพลังงานความร้อนได้ เทอมนีแทนด้วย

$$\dot{E}_g = \dot{q} dx dy dz \quad \dots (3.3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $\dot{q}$  คืออัตราพลังงานที่ผลิตขึ้นในตัวกลางต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ( $W/m^3$ ) นอกจากนี้ก็ยังมีพลังงานซึ่งเก็บไว้โดยวัตถุหรือตัวกลางในปริมาตรควบคุม ซึ่งคือ

$$\dot{E}_{st} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad \dots\dots (3.4)$$

โดยที่  $\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$  คืออัตราการเปลี่ยนแปลงพลังงานภายในของตัวกลางต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรต่อเวลาที่เปลี่ยนไป

เมื่อใช้กฎทรงพลังงานกับปริมาตรควบคุมจะได้

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = \dot{E}_{st} \quad \dots\dots (3.5)$$

ดังนั้นจะเห็นว่า อัตราการนำความร้อนประกอบด้วยการไหลเข้า ( $\dot{E}_{in}$ ) และไหลออก ( $\dot{E}_{out}$ ) ของพลังงานและแทนสมการ (3.3) และ (3.4) ได้

$$(q_x + q_y + q_z) + \dot{q} d_x d_y d_z - (q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz}) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad \dots\dots (3.6)$$

แทนด้วยสมการ (3.2) ได้

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q} d_x d_y d_z = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad \dots\dots (3.7)$$

จากกฎของฟูริเยร์ อัตราการนำความร้อนเป็น

$$q_x = -k dy dz \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k dx dz \frac{\partial T}{\partial y}, \quad q_z = -k dx dy \frac{\partial T}{\partial z} \quad \dots\dots (3.8)$$

โดยการแทน (3.8) และ (3.7) และหารตลอดด้วยมิติของปริมาตรควบคุม ( $d_x d_y d_z$ ) จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots (3.9)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการ (3.9) เป็นรูปทั่วไป (General form) ของสมการฟุ้งกระจายของความร้อน (heat diffusion equation) ในพิกัดคาร์ทีเซียน โดยทั่วไปสมการนี้เรียกว่า สมการความร้อน เป็นเครื่องมือพื้นฐานสำหรับวิเคราะห์การนำความร้อน จากคำตอบของมัน เราจะได้การกระจายของอุณหภูมิเป็นฟังก์ชันของเวลา จากสมการความร้อนสามารถกล่าวได้ว่า “ที่จุดใดๆ ในตัวกลางอัตราการนำความร้อนสุทธิในปริมาตรหนึ่งหน่วย รวมกับอัตราการผลิตความร้อนเชิงปริมาตร ต้องมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนของพลังงานความร้อนที่สะสมไว้ภายในปริมาตรนั้น”

สำหรับกรณี ค่า  $k =$  คงที่ จะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots(3.10)$$

โดยที่  $\alpha = k/\rho c_p$  เรียกว่า ค่าการฟุ้งกระจายของความร้อน (thermal diffusivity) ของวัสดุ คุณสมบัติทางเทอร์โมฟิสิกส์ที่สำคัญนี้ก็คือเป็นอัตราส่วนของค่าการนำความร้อน ( $k$ ) ของวัสดุต่อค่าความจุความร้อน ( $\rho c_p$ ) ค่า  $\alpha$  มาก (ค่า  $k$  มาก และ/หรือ  $\rho c_p$  น้อย) หมายความว่า วัสดุมีการถ่ายเทความร้อนโดยการนำมากกว่าที่พลังงานที่เก็บเอาไว้มากหรือความร้อนแพร่กระจายตลอดวัตถุอย่างรวดเร็ว มีหน่วยเป็น  $m^2/s$

### 3.2 การพาความร้อน (Convection heat transfer)

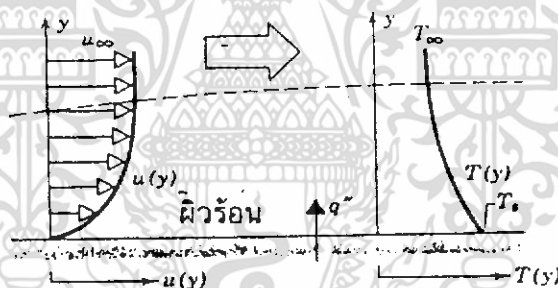
เมื่อของไหลไหลผ่านวัตถุที่เป็นของแข็งหรือไหลผ่านภายในช่องทางการไหล โดยที่อุณหภูมิของของไหลและผิวของแข็งมีค่าแตกต่างกัน การถ่ายเทความร้อนระหว่างของไหลและผิวของแข็งจะเกิดขึ้น เมื่อของไหลเคลื่อนที่สัมผัสกับผิวของของแข็ง กลไกของการถ่ายเทความร้อนแบบนี้เรียกว่า “การพาความร้อน” ถ้าการเคลื่อนที่ของของไหลเกิดขึ้นโดยการนำขึ้นเองโดยใช้ปั๊มหรือพัดลมเป็นตัวทำให้เกิดแรงกระทำให้ของไหลไหลผ่านบนพื้นผิว การถ่ายเทความร้อนแบบนี้เรียกว่า “การพาความร้อนแบบบังคับ” (forced convection) ถ้าการเคลื่อนที่ของของไหลเกิดจากแรงลอยตัว ซึ่งมีผลมาจากความแตกต่างของความหนาแน่นที่เกิดจากความแตกต่างของอุณหภูมิภายในของไหล การถ่ายเทความร้อนแบบนี้เรียกว่า การพาความร้อนแบบอิสระ หรือการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (free or natural convection) เช่น ปล่อยแผ่นวัตถุร้อนที่วางอยู่ในแนวตั้งไว้ในอากาศเย็นที่หยุดนิ่ง ชั้นของอากาศที่ติดกับพื้นผิวของแผ่นวัตถุจะมีการเคลื่อนที่เพราะเกรเดียนอุณหภูมิในอากาศเป็นผลทำให้เกรเดียนของความหนาแน่นเพิ่มขึ้น ซึ่งจะทำให้เกิดอากาศเกิดการเคลื่อนที่ โดยการเคลื่อนที่ของของไหลมีผลกระทบท่อสนามอุณหภูมิภายในของไหล การคำนวณหาการกระจายของอุณหภูมิและการถ่ายเทความร้อนแบบการพาในทางปฏิบัติเป็นเรื่องที่สลับซับซ้อนมากในทางวิศวกรรม เพื่อให้การคำนวณหาการถ่ายเทความร้อนง่ายขึ้นระหว่างผิวที่ร้อน  $T_w$  และอุณหภูมิของของไหลเย็นที่ไหลผ่านบนผิวที่อุณหภูมิ  $T$ , ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน ( $h$ ) ถูกกำหนดเป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$q'' = h(T_w - T_f) \quad \dots\dots(3.11a)$$

โดยที่  $q''$  เป็นฟลักซ์ความร้อนที่ถ่ายเทจากของไหลที่ร้อนไปยังผนังเย็น สมการ (3.11a) เป็นสมการที่ได้มาจากกฎการเย็นตัวของนิวตัน (Newton's law of Cooling) โดยที่อุณหภูมิมีหน่วยเป็นเซลเซียสหรือเคลวิน และค่าประสิทธิภาพการพาความร้อน  $h$  มีหน่วยเป็น  $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$

ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อน  $h$  (Convective heat transfer coefficient or film convective coefficient) จะมีค่าแปรเปลี่ยนไปตามชนิดของการไหล (เช่น ลามินาร์ หรือ เทอร์บูเลนซ์) รูปทรงของวัตถุ พื้นที่ที่ที่ของไหลไหลผ่าน คุณสมบัติทางฟิสิกส์ของของไหล อุณหภูมิเฉลี่ย และตำแหน่งต่างๆ ตามพื้นผิวของวัตถุ นอกจากนี้ยังขึ้นกับกลไกของการถ่ายเทความร้อนว่าเป็นการพาความร้อนแบบบังคับ (การเคลื่อนที่ของของไหลเกิดจากปั๊มหรือพัดลม) หรือเป็นการพาความร้อนแบบธรรมชาติ (การเคลื่อนที่ของของไหลเนื่องจากแรงลอยตัว) ค่าของ  $h$  จะแปรเปลี่ยนไปตามตำแหน่งต่างๆ ตามพื้นผิววัตถุ ดังนั้นในทางวิศวกรรมแล้ว เพื่อความสะดวกจะใช้ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนเฉลี่ยตลอดพื้นผิว ( $h_m$ ) แทนค่า  $h$  ที่ตำแหน่งนั้นๆ



รูปที่ 3.2 การพัฒนาชั้นของขอบเขตในการพาความร้อน

ที่มาของรูป ผศ. ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์, “การถ่ายเทความร้อน”, ภาควิชาเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ค่าสัมประสิทธิ์การพาความร้อนสามารถวิเคราะห์ได้จากการพิจารณาการไหลผ่านวัตถุซึ่งมีรูปทรงเรขาคณิตต่างๆ เช่น แผ่นเรียบ หรือการไหลภายในท่อทรงกระบอก สำหรับการไหลผ่านวัตถุที่มีรูปทรงสลับซับซ้อน ค่า  $h$  สามารถหาได้จากวิธีการทดลอง ซึ่งค่าที่ได้จะมีช่วงของความแตกต่างกันกว้างมากตามแต่ละรูปแบบ สำหรับการประยุกต์ต่างๆ

: เนื่องจากเนื้อหาของเนื้อหาและรูปภาพในบทนี้มาจาก, ผศ. ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์, “การถ่ายเทความร้อน”, ภาควิชาเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

ผู้ที่สนใจศึกษาเพิ่มเติมสามารถหาอ่านได้จากในเล่ม

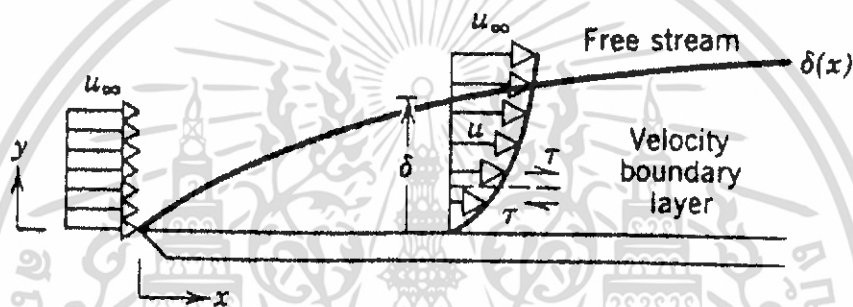
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 4 การไหลผ่านแผ่นเรียบ

### 4.1 บาวนด์ารีเลเยอร์ของการพา

เราได้เรียนรู้เกี่ยวกับบาวนด์ารีเลเยอร์(Boundary Layer) มาแล้วในวิชากลศาสตร์ของไหลเกี่ยวกับบาวนด์ารีเลเยอร์ของความเร็ว ดังนั้นจะสรุปเพียงสั้นๆ ซึ่งในที่นี้จะมีอยู่ 2 ชนิดที่เกี่ยวข้องคือ บาวนด์ารีเลเยอร์ของความเร็ว (Velocity Boundary Layer) และ บาวนด์ารีเลเยอร์ของความร้อน (Thermal Boundary Layer)

#### 4.1.1 บาวนด์ารีเลเยอร์ของความเร็ว



รูปที่ 4.1 บาวนด์ารีเลเยอร์ของความเร็วบนแผ่นแบนเรียบ

พิจารณากการไหลผ่านแผ่นเรียบของรูป 4.1 ถ้าของไหลมีความเร็ว  $U_{\infty}$  ไหลผ่านแผ่นแบนเรียบ ซึ่งอยู่หนึ่ง จะพบว่าความเร็วของของไหลที่ผิวของแผ่นเรียบจะเป็นศูนย์ (ถ้าสมมติว่าไม่มีการสั่นไหลในแผ่นแบนเรียบ) ในขณะที่ความของของไหลที่อยู่ใกล้ผิวของแผ่นแบนเรียบจะเปลี่ยนแปลงตามระยะห่างจากพื้นผิว (ตามแกน  $y$ ) และที่ระยะห่างจากพื้นผิวมากๆ ความเร็วจะเท่ากับ  $U_{\infty}$  ขอบเขตของบาวนด์ารีเลเยอร์ของความเร็วที่กำหนดไว้ว่า คือจุดที่ความเร็วของของไหล  $U = 0.99 U_{\infty}$  ที่จุดนี้กำหนดว่ามีระยะเป็น  $\delta$  จากผิวของแผ่นแบนเรียบ หลังจากนั้นค่า  $\delta$  จะเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ค่า  $\delta$  นี้เรียกว่า ค่าความหนาของบาวนด์ารีเลเยอร์ (Boundary Layer Thickness)

การเปลี่ยนแปลงของความเร็วของของไหลภายในบาวนด์ารีเลเยอร์เรียกว่า Boundary Layer Velocity Profile และความเร็วนี้อาจเปลี่ยนแปลงแบบลามินาร์หรือเทอร์บูเลนต์ก็ได้ ในกลศาสตร์ของไหล นัยสำคัญของมันคือ ความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับความเค้นเฉือนของผิว  $\tau_s$  และต่อความเสียดทานของผิว ซึ่งสำหรับการไหลผ่านภายนอกวัตถุแล้วให้เกณฑ์สำหรับค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานที่จุดใดๆ

(Friction Coefficient),  $C_f$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C_f \equiv \frac{\tau_s}{\rho U_\infty^2 / 2} \dots\dots\dots(4.1)$$

และค่าของ  $\tau_s$  หาได้จากเกรเดียนต์ของความเร็ว คือ

$$\tau_s = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \dots\dots\dots(4.2)$$

โดยที่  $\mu$  เป็นค่าความหนืดสมบูรณ์ของของไหล (Absolute Viscosity)

ดังนั้นสมการจาก 4.1 และ 4.2 จะได้

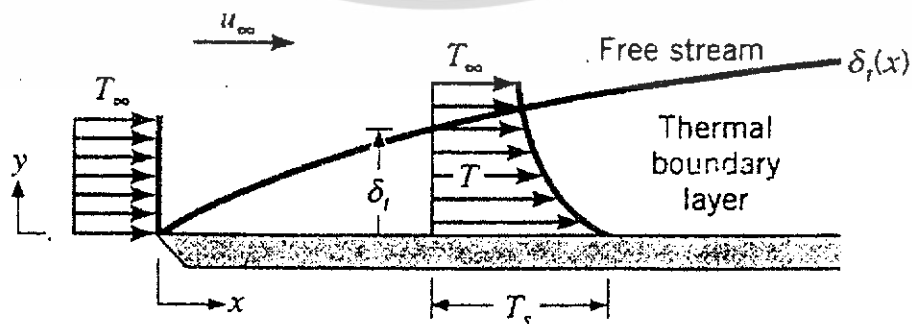
$$C_f = \frac{2\nu}{U_\infty^2} \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} \dots\dots\dots(4.3)$$

และค่า  $\bar{C}_f$  เฉลี่ยทั้งแผ่นตลอดช่วง  $x=0$  ถึง  $L$  นิยามเป็น

$$\bar{C}_f = (1/L) \int_0^L C_f dx \dots\dots\dots(4.4)$$

**4.1.2 บาวนด์รีเลเยอร์ของความร้อน**

ในขณะที่บาวนด์รีเลเยอร์ของความเร็วก่อตัวขึ้นเมื่อมีของไหลผ่านพื้นผิว บาวนด์รีเลเยอร์ของความร้อนก็ได้ก่อตัวตามเช่นกัน ถ้าอุณหภูมิของกระแสนิ่งและของพื้นที่ผิวมีค่าแตกต่างกัน พิจารณาการไหลผ่านแผ่นแบนเรียบ



รูปที่ 4.2 บาวนด์รีเลเยอร์ความร้อนบนแผ่นแบนเรียบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

พิจารณารูปที่ค่า 4.2 ซึ่งแสดงบาวนด์รีเลเยอร์ของความร้อนบนแผ่นเรียบ ที่ขอบด้านหน้า (Leading edge) นั้นรูปร่างของอุณหภูมิ(Temperature Profile)สม่ำเสมอคงที่คือ  $T(Y) = T_\infty$  อย่างไรก็ตาม อนุภาคของของไหลซึ่งมาสัมผัสกับแผ่นแบนเรียบจะได้รับการสมดุลความร้อนที่อุณหภูมิผิวของแผ่นแบนเรียบในอีกแง่ของอนุภาคเหล่านี้แลกเปลี่ยนพลังงานกับอนุภาคอื่นๆ ในชั้นของของไหลใกล้ๆ และการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิมีขึ้นในของไหล บริเวณของไหลซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเหล่านี้มีจริง เรียกว่า บาวนด์รีเลเยอร์ของความร้อน และมีความหนาของชั้นเป็น  $\delta_t$  ซึ่งนิยามตามค่าของ  $y$  เป็นที่ซึ่งมีอัตราส่วน  $[(T_s - T)/(T_s - T_\infty)] = 0.99$  ตามระยะทางที่เพิ่มขึ้นจากขอบด้านหน้าอิทธิพลของการถ่ายเทความร้อนจะเจาะผ่านเข้าไปในกระแสของไหลอิสระและบาวนด์รีเลเยอร์ของความร้อนก่อตัวโตขึ้น

ความสัมพันธ์ระหว่างสภาวะในบาวนด์รีเลเยอร์นี้ และสัมประสิทธิ์การพาความร้อนแสดงให้เห็นได้และที่ระยะใดจากขอบด้านหน้า ค่าฟลักซ์ความร้อนที่จุดใดๆ ( $q''$ ) หาได้โดยการประยุกต์กฎของฟูริเยร์ต่อของไหลที่  $y=0$  นั่นคือ

$$q''_s = -k_f \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \dots\dots\dots(4.5)$$

สมการนี้เหมาะสมเพราะว่าที่พื้นผิวไม่มีการเคลื่อนไหวของของไหล และการถ่ายเทพลังงานสามารถเกิดได้เฉพาะเพียงโดยการนำความร้อนเท่านั้น โดยการรวมสมการ (4.5) กับสมการ (4.1) จะได้

$$h = \frac{-k_f \partial T / \partial y \Big|_{y=0}}{T_s - T_\infty}$$

ดังนั้น เงื่อนไขสภาวะในบาวนด์รีเลเยอร์ของความร้อนซึ่งมีอิทธิพลสูงมากต่อเกร์เดียนอุณหภูมิของผิว

หนัง  $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$  จะใช้อัตราการถ่ายเทความร้อนผ่านบาวนด์รีเลเยอร์นี้ สังเกตว่าค่า  $(T_s - T_\infty)$  คง

ที่ไม่ขึ้นกับ  $x$  ในขณะที่  $\delta_t$  เพิ่มขึ้นตามระยะ  $X$  เกร์เดียนอุณหภูมิในบาวนด์รีเลเยอร์นี้ต้องลดลงตามค่า

$X$  ที่เพิ่มขึ้น ผลที่ตามมาคือขนาดของ  $\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0}$  ลดลงตามการเพิ่มขึ้นของ  $\delta_t$  ส่วนของ  $q''_s$  และ  $h$

ลดลง เมื่อระยะ  $X$  เพิ่มขึ้น

**4.2 สมการชั้นขีดผิวของแพนเดีทล์ และวิธีของเบลเชียส**

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ถ้าเราพิจารณาการไหลราบเรียบแบบไม่ขุ่นตัว ที่จำนวนเรย์โนลด์สูงๆ ผ่านแผ่นราบ สมการนาเวียร์-สโตคส์ลดรูปเป็น

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \dots\dots\dots(4.6)$$

โดยที่  $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$

$u$  และ  $v$  เป็นองค์ประกอบความเร็วในแนวแกน  $x$  และ  $y$  และมีค่าความหนืดคงที่ สมการนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยการวิเคราะห์ขนาดในสมการนาเวียร์-สโตคส์เต็มรูป

สมการเหล่านี้ใช้ได้กับระบบพิกัดคาร์ทีเซียน แม้จะเป็นพิกัดโค้งก็ตาม ตัวอย่างเช่น พิกัดของปีกเครื่องบิน ถ้าความหนาของชั้นซิกผิว  $\delta$  มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับรัศมีของความโค้ง กรณีเช่นนี้พบได้ทั่วไปในสภาพจริง ในที่นี้เราจะไม่กล่าวถึงการไหลของชั้นซิกผิวในแบบสองมิติ ซึ่งมันมีความซับซ้อนมาก แต่มีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการอธิบายการไหลบนวัตถุรูปทรงสามมิติ

ความชันของความดัน  $\frac{\partial p}{\partial y}$  ในทิศทางตั้งฉากกับแผ่นมีค่าน้อยมากเมื่อเปรียบเทียบกับ  $\frac{\partial p}{\partial x}$  ดังนั้นความดันในชั้นซิกผิวจึงเป็นเช่นเดียวกับกระแสการไหลอิสระที่ขอบชั้นซิกผิว โดยปรกติแล้ว  $p(x)$  สามารถหาได้โดยการแก้สมการการไหลศักย์ (การไหลไม่มีความหนืด) ผ่านวัตถุที่ขอบของชั้นซิกผิว โดยสมมติให้ชั้นซิกผิวมีความบางมากจนใช้ประมาณค่าความดันที่ผิวของวัตถุได้ วิธีการนี้ใช้ไม่ได้กับการแยกตัวของชั้นซิกผิว เนื่องจากการไหลศักย์จะได้รับอิทธิพลจากส่วนของการแยกไหลและรูปแบบของกระแสนวน ทำให้การไหลมีความซับซ้อนและต้องใช้การทดลองในการอธิบายการไหลได้อย่างสมบูรณ์

จากสมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(4.7)$$

จะเห็นได้ว่าปัญหาได้ลดลงเหลือเพียงสองสมการ และสองตัวไม่รู้ค่า  $u$  และ  $v$  ค่าความชันของความดันหาได้จากการไหลศักย์นอกชั้นซิกผิว ปัญหานี้จะกล่าวในบทต่อไป

พิจารณาการไหลผ่านแผ่นราบที่ค่าความชันของความดันเป็นศูนย์ สมการสำหรับการไหลนี้คือ

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(4.9)$$

ด้วยเงื่อนไขขอบเขต :  $u = v = 0$  ที่  $y = 0$ ;  $u = U$  ที่  $y = \infty$  เราสมมติว่าการกระจายความเร็วมีรูปร่างคล้ายคลึงกัน ที่แต่ละตำแหน่ง (ซึ่งเป็นจริงในกรณีเช่นนี้) ดังนั้นเราให้

$$u/U = g(y/\delta)$$

โดยที่  $g()$  เป็นสัญลักษณ์แสดงฟังก์ชัน

นอกจากนี้เราให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\eta = y\sqrt{U/\nu x}, \quad u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x, \quad \psi = \sqrt{\nu x U} f(\eta)$$

โดยที่  $\psi$  คือฟังก์ชันการไหล และ  $f$  เป็นฟังก์ชันที่ต้องทำการหา ในเทอมของฟังก์ชันการไหล  $\psi$  สมการโมเมนต์กลายเป็น

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} \quad \dots\dots\dots(4.10)$$

และในเทอมของ  $f$  เราได้สมการอนุพันธ์ปกติเป็น

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0$$

และเงื่อนไขขอบเขต:  $f = f' = 0$  ที่  $\eta = 0$ ;  $f' = 1$  ที่  $\eta = \infty$  สมการนี้ถูกแก้โดยเบเลเชียส โดยวิธีการกระจายแบบอนุกรม คำตอบคือ

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{\infty^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{(3n+2)} \quad \dots\dots\dots(4.11)$$

โดยที่  $\infty = 0.3320$  และค่าของ  $C_n$  สำหรับลำดับแรกๆคือ

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 11$$

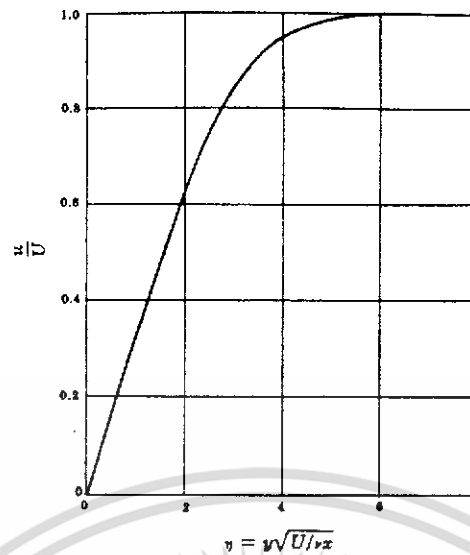
$$C_3 = 375$$

$$C_4 = 27,897$$

$$C_5 = 3,817,137$$

เรื่อนี้สมการ  $f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0$  (พร้อมทั้งเพิ่มเทอมความชันของความดัน) ได้รับการหาคำตอบ

อย่างละเอียดโดยใช้คอมพิวเตอร์ รูปข้างล่างแสดงการพล็อตค่าของ  $u/U$  ที่ได้รับ



รูปที่ 4.3 แสดงการกระจายความเร็วสำหรับการไหลราบเรียบ  
 ไปผ่านแผ่นราบที่ค่าความชันของความดันเป็นศูนย์

เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานที่ผิวมีนิยามว่า โดยที่  $\tau_0 = \mu \partial u / \partial y |_{y=0}$  เราได้ค่า  
 เป็น  $C_f$  เป็น

$$C_f = 2\sqrt{\nu/Ux} \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} \dots\dots\dots(4.12)$$

จากวิธีของเบสเซิล,  $\left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = 0.332$  เราได้

$$C_f = 0.664\sqrt{\nu/Ux} = 0.664/\sqrt{Re_x} \dots\dots\dots(4.13)$$

ทำการเปรียบเทียบค่าของ  $C_f$  กับที่เราได้รับก่อนหน้านี้ด้วยวิธีอินทิกรัล เราพบว่าการประมาณด้วยโพลิ  
 โนเมียลกำลังสาม มีความผิดพลาดของค่า  $C_f$  เพียง 2.7% ซึ่งชี้ให้เห็นถึงความแม่นยำของค่าที่ได้จากวิธี  
 การประมาณ

## บทที่ 5

### แบบจำลองการวิเคราะห์

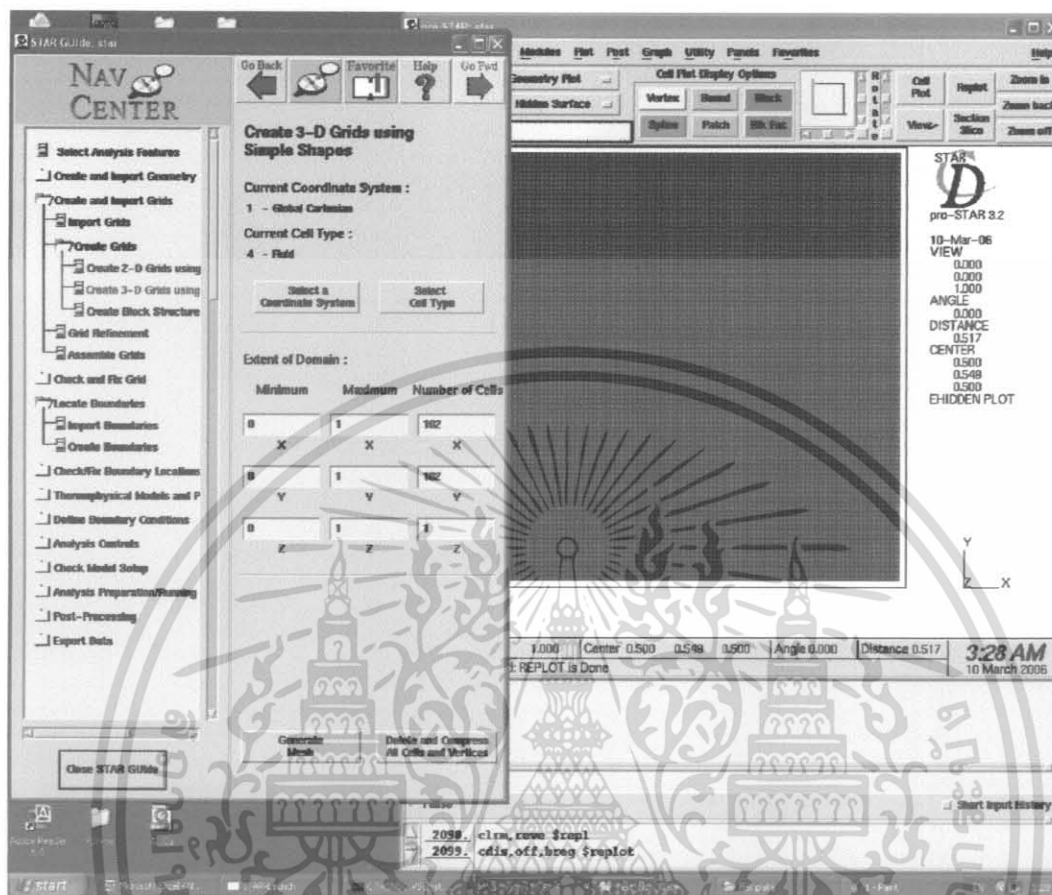
#### 5.1 บทนำ

ในบทนี้แสดงแบบจำลองการวิเคราะห์ในโปรแกรม Star CD ซึ่งเราได้แบ่งการจำลองสำหรับกรณีการไหลราบเรียบผ่านแผ่นแบนราบออกเป็น 2 กรณีคือ 1. กรณีที่อุณหภูมิที่ผิวด้านล่างของอากาศส่วนที่ติดกับแผ่นแบนราบคงที่เพื่อเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรงและกรณีที่ 2. คือกำหนดให้อุณหภูมิที่ผิวด้านล่างของแผ่นแบนราบคงที่และด้านข้างของแผ่นแบนราบกำหนดให้เป็นผิวอะเดียบาติก หลังจากนั้นได้จำลองการถ่ายเทความร้อนของครีบบรรยากาศความร้อนแบบเกล็ดออกเป็น 2 กรณี คือ 1. ครีบบรรยากาศความร้อนทำจากอลูมิเนียมเพื่อเปรียบเทียบกับกริดสองและกรณีที่ 2. จำลองการถ่ายเทความร้อนของครีบบรรยากาศความร้อนทำจากทองแดงเพื่อทำการเปรียบเทียบกับครีบบรรยากาศความร้อนที่ทำจากอลูมิเนียม โดยครีบบทั้งสองชนิดนี้มีการออกแบบต่างกันแต่อยู่ภายใต้เงื่อนไขให้น้ำหนักเท่ากัน และมีการถ่ายเทความร้อนต้องได้ใกล้เคียงกัน เหตุผลที่เราจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีบบรรยากาศความร้อนที่ทำจากทองแดงนั้นเนื่องมาจากปัจจุบันครีบบรรยากาศความร้อนในหม้อน้ำรถยนต์ทำจากอลูมิเนียม ซึ่งเมื่อมีเกิดการเสียหายไม่สามารถเชื่อมได้ แต่ทองแดงสามารถเชื่อมได้และมีค่าการนำความร้อนที่ดีกว่าอลูมิเนียมแต่ผลที่ตามมาคือทองแดงมีน้ำหนักมากกว่าอลูมิเนียมถึง 3 เท่าและราคาแพงกว่า เพื่อไม่ให้เป็นการเพิ่มต้นทุนของหม้อน้ำและเพิ่มน้ำหนักแก่รถยนต์ เราจึงต้องออกแบบหม้อน้ำให้มีน้ำหนักเท่ากับอลูมิเนียมแต่ยังต้องถ่ายเทความร้อนได้ใกล้เคียงกับหม้อน้ำที่ทำจากอลูมิเนียมหรือดีกว่า ซึ่งกลุ่มของข้าพเจ้าไม่ได้ทำการออกแบบหม้อน้ำเอง แต่ได้นำหม้อน้ำที่ออกแบบโดยบริษัทแห่งหนึ่งมาทำการจำลองการถ่ายเทความร้อนเพื่อศึกษาต่อไป

#### 5.2 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนแบบราบเรียบผ่านแผ่นแบนราบ

##### 5.2.1 กรณีที่อุณหภูมิที่ผิวด้านล่างของอากาศส่วนที่ติดกับแผ่นแบนราบคงที่

## 1. สร้างปริมาตรควบคุมของของไหล

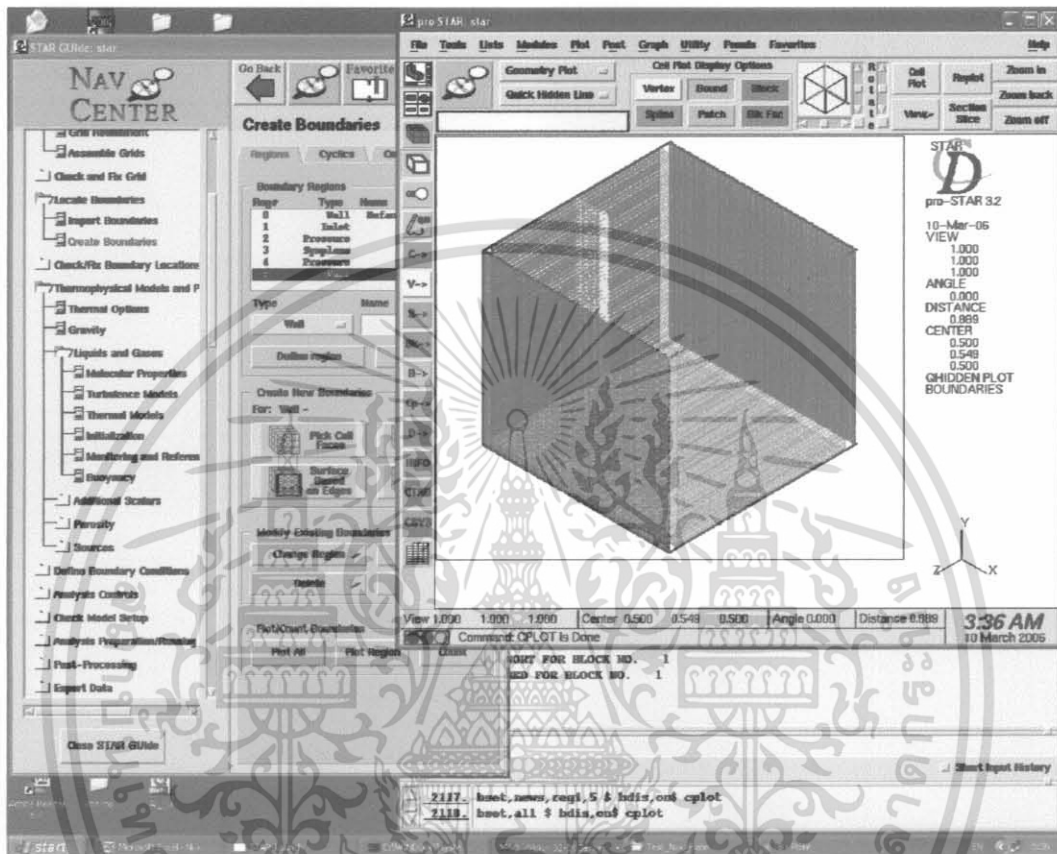


รูปที่ 5.1 แสดงการสร้างปริมาตรควบคุมของของไหล

สร้างปริมาตรควบคุมโดยมีมิติตามแนวแกน x, y, z คือ 1, 1, 1 m และมีจำนวน cell ในแนวแกน x, y, z เท่ากับ 102, 102, 1 ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2.สร้างขอบเขตของของไหล

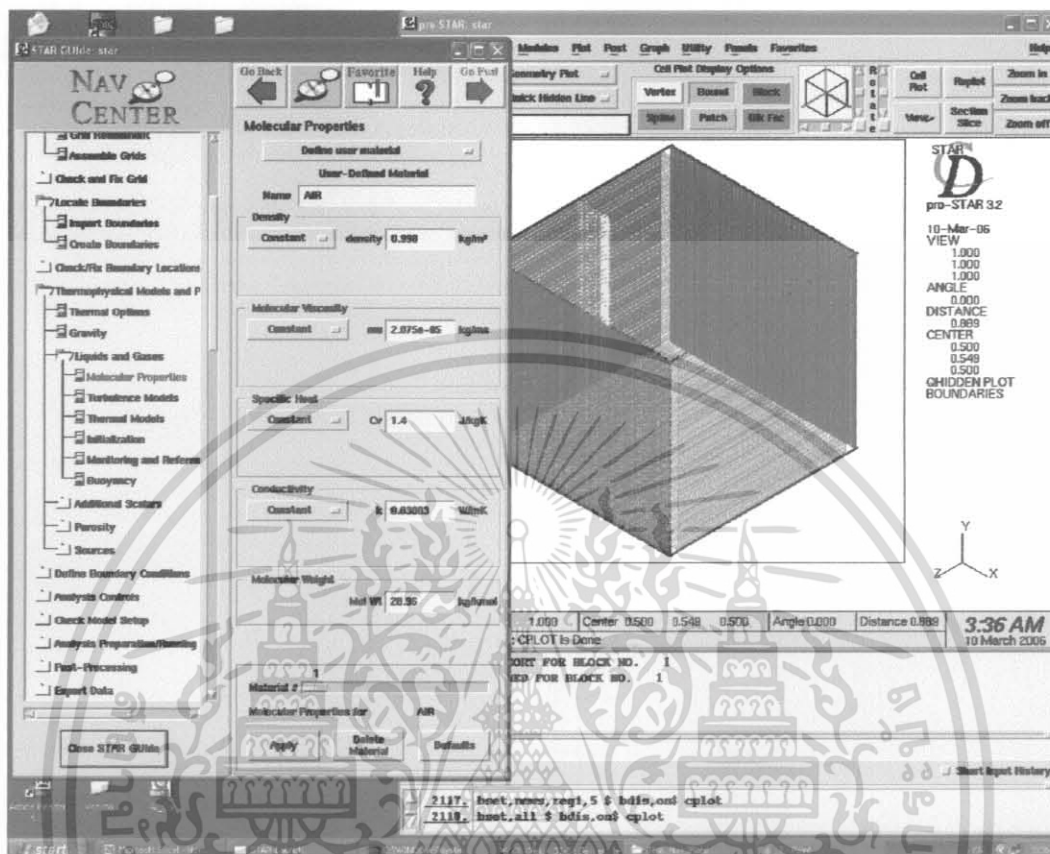


รูปที่ 5.2 แสดงการกำหนดขอบเขตของของไหล

กำหนดขอบเขตของของไหลให้หมายเลข 1 คือ ทางเข้าของของไหล(สีแดง) หมายเลข 2 คือ ความดันของของไหลทางออก หมายเลข 3 คือ การกำหนดให้ทั้ง 2 ด้านมีคุณสมบัติเหมือนกัน(สีน้ำเงิน) หมายเลข 4 คือ ความดันด้านบนของของไหล หมายเลข 5 คือ กำหนดให้เป็นพื้นผิวควบคุมด้านล่าง (wall)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3. กำหนดคุณสมบัติของของไหล

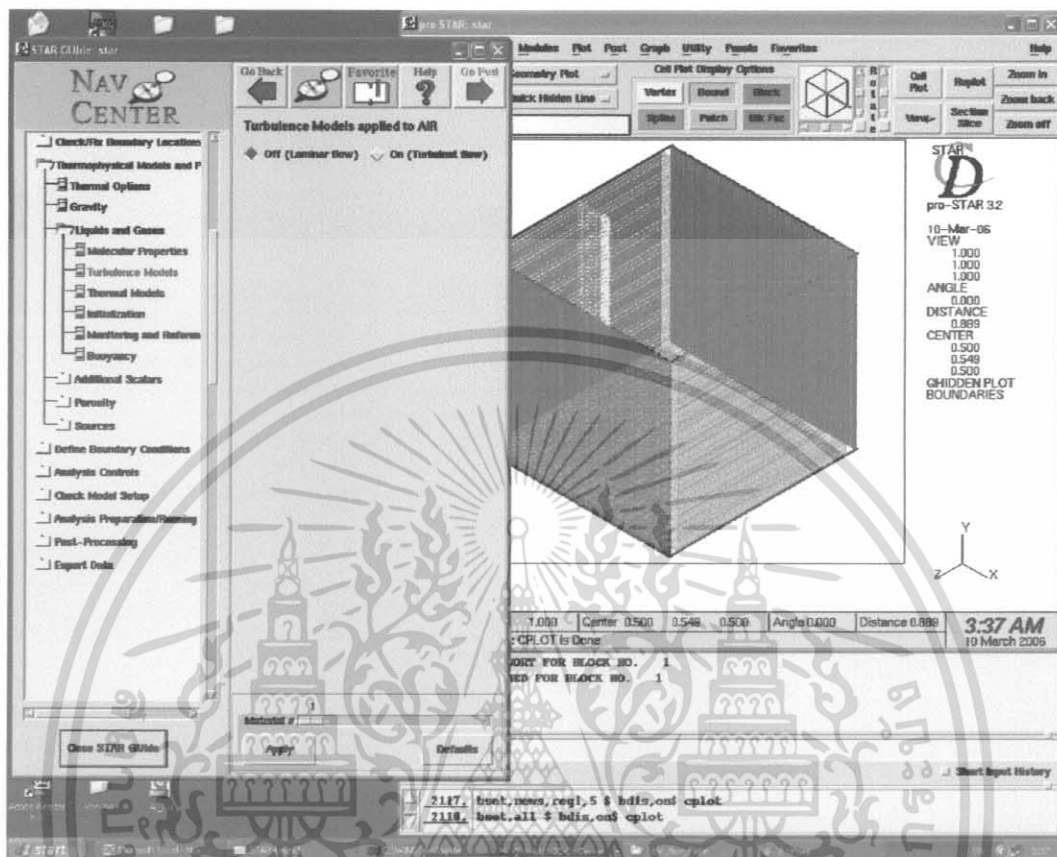


รูปที่ 5.3 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของของไหล

กำหนดคุณสมบัติของของไหลซึ่งมีการกำหนดคุณสมบัติต่างๆ  
 ความหนาแน่นอากาศ  $0.998 \text{ kg/m}^3$  ความหนืดอากาศ  $2.075 \text{ e-}05 \text{ kg/ms}$   
 ความจุความร้อนจำเพาะ  $1.4 \text{ J/kgK}$  สัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $0.03003 \text{ W/mK}$   
 มวลโมเลกุล  $28.96 \text{ Kg/Kmole}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4. กำหนดพฤติกรรมของการไหล

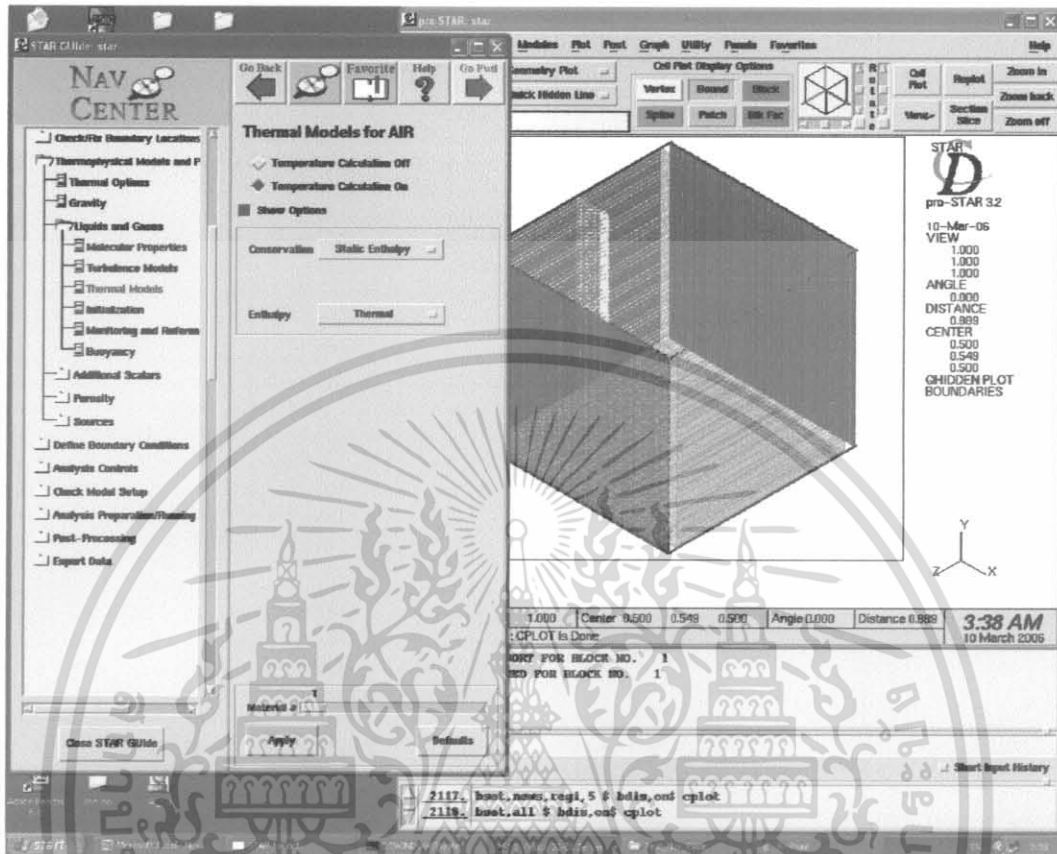


รูปที่ 5.4 แสดงการกำหนดพฤติกรรมของการไหล

กำหนดพฤติกรรมของการไหล ในที่นี้ให้เป็นการไหลแบบราบเรียบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5. กำหนดการคำนวณหาเอนทัลปีให้ใช้สมการอนุรักษ์เอนทัลปี



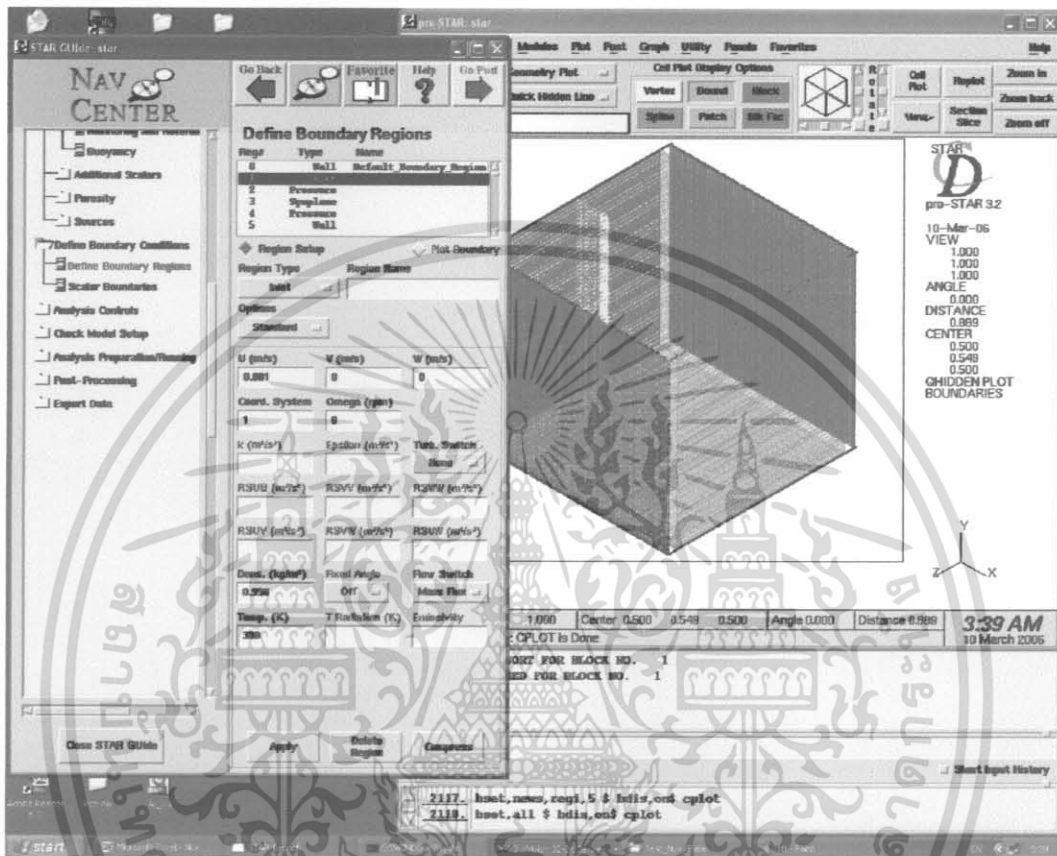
รูปที่ 5.5 แสดงการกำหนดสมการที่ใช้ในการคำนวณ

กำหนดสมการที่ใช้ในการคำนวณหาเอนทัลปีซึ่งก็คือสมการอนุรักษ์เอนทัลปี

$$\rho \frac{\partial(hu_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{h,j}}{\partial x_j} = u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 6. กำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆในของไหล



รูปที่ 5.6 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆในของไหล

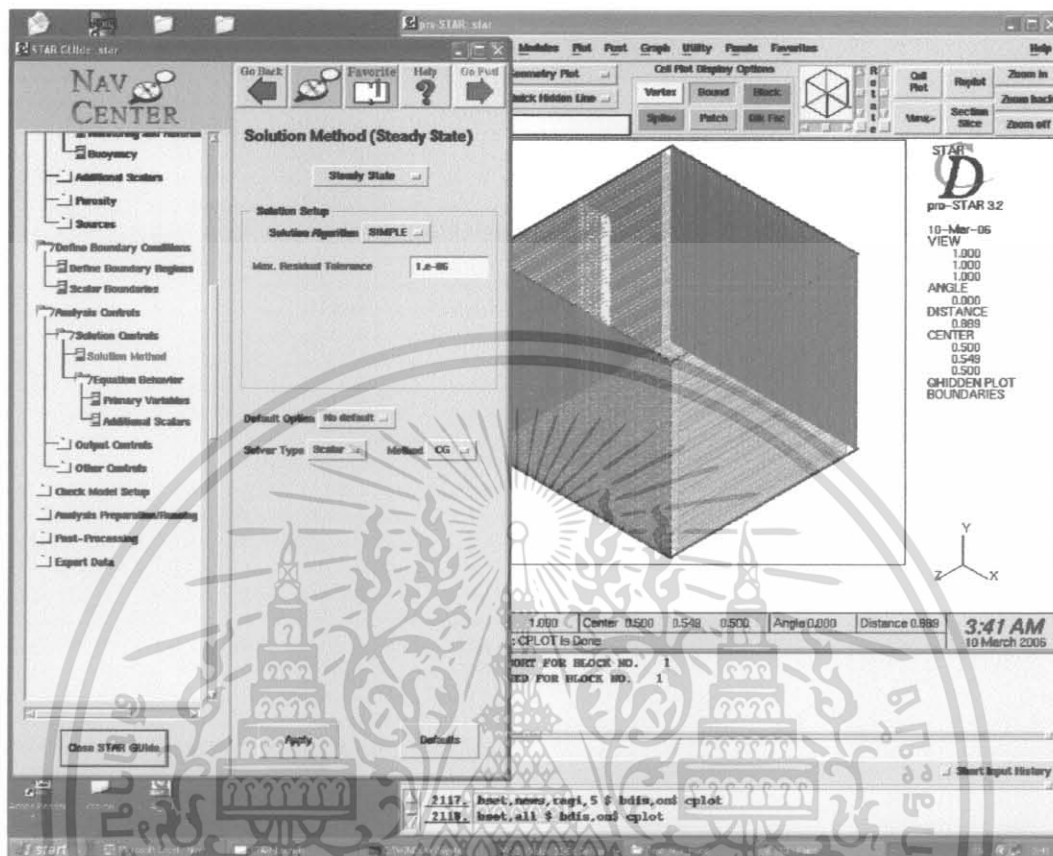
กำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆในของไหล

ความเร็วของอากาศ 0.001 m/s อุณหภูมิของอากาศ 300 K อุณหภูมิของพื้นผิวควบคุม 400 K

ความดันสัมพัทธ์ 0 Kpa

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 7. วิธีคำนวณ pressure link velocity



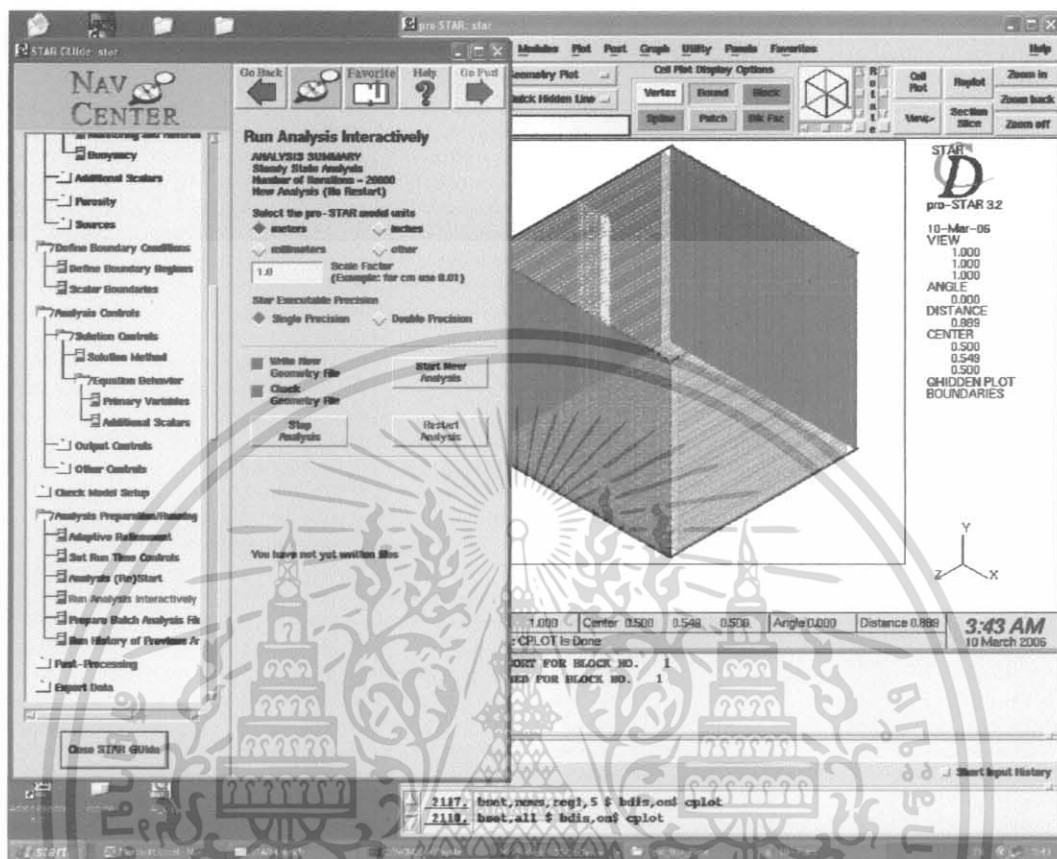
รูปที่ 5.7 แสดงวิธีคำนวณ pressure link velocity

กำหนดวิธีคำนวณ pressure link velocity โดยใช้วิธี SIMPLE

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



## 9.สั่งให้โปรแกรมเริ่มคำนวณ



รูปที่ 5.9 แสดงการสั่งให้โปรแกรมเริ่มคำนวณ

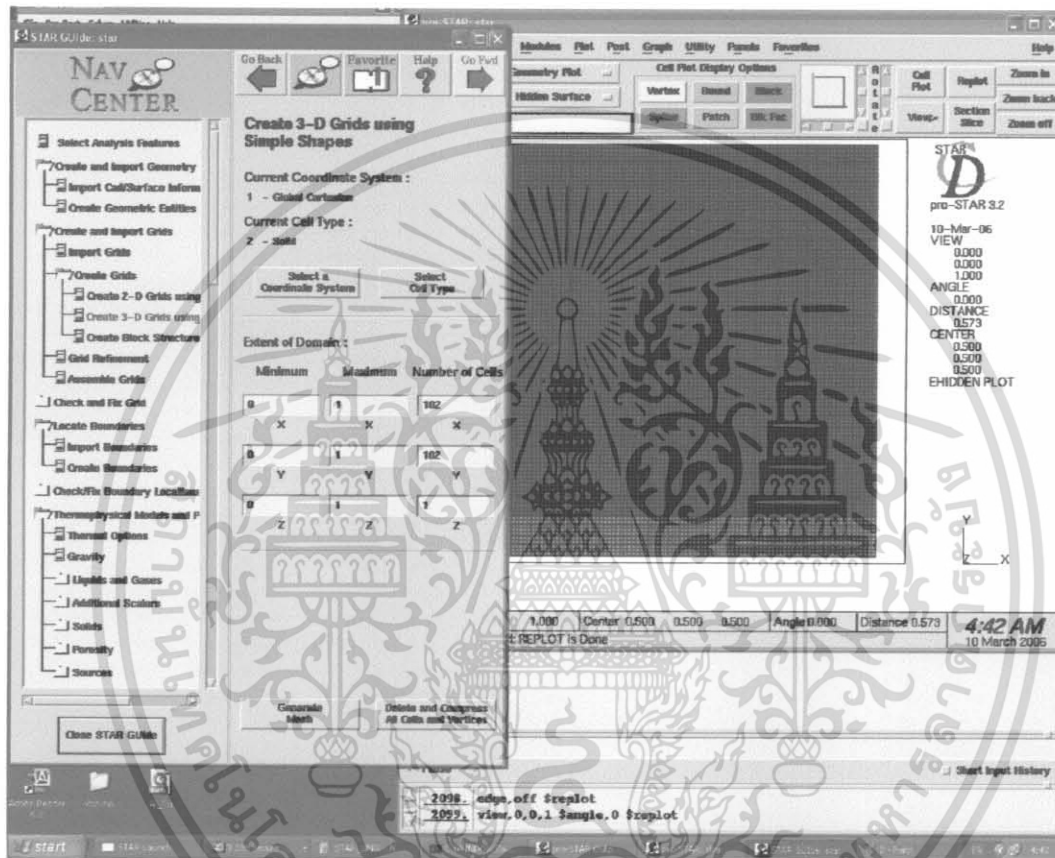
เลือก Start New Analysis เพื่อให้โปรแกรมเริ่มการคำนวณ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5.2.2 กรณีที่อุณหภูมิที่ผิวด้านล่างของแผ่นแบนราบคงที่และด้านข้างของแผ่นแบนราบกำหนดให้เป็นผิวอะเดียบาติก

การจำลองทำเหมือนกับหัวข้อ 5.2.1 แต่มีข้อแตกต่างดังนี้

1. มีการเพิ่มปริมาตรควบคุมในส่วนขอบของแข็งเพิ่มขึ้นมา

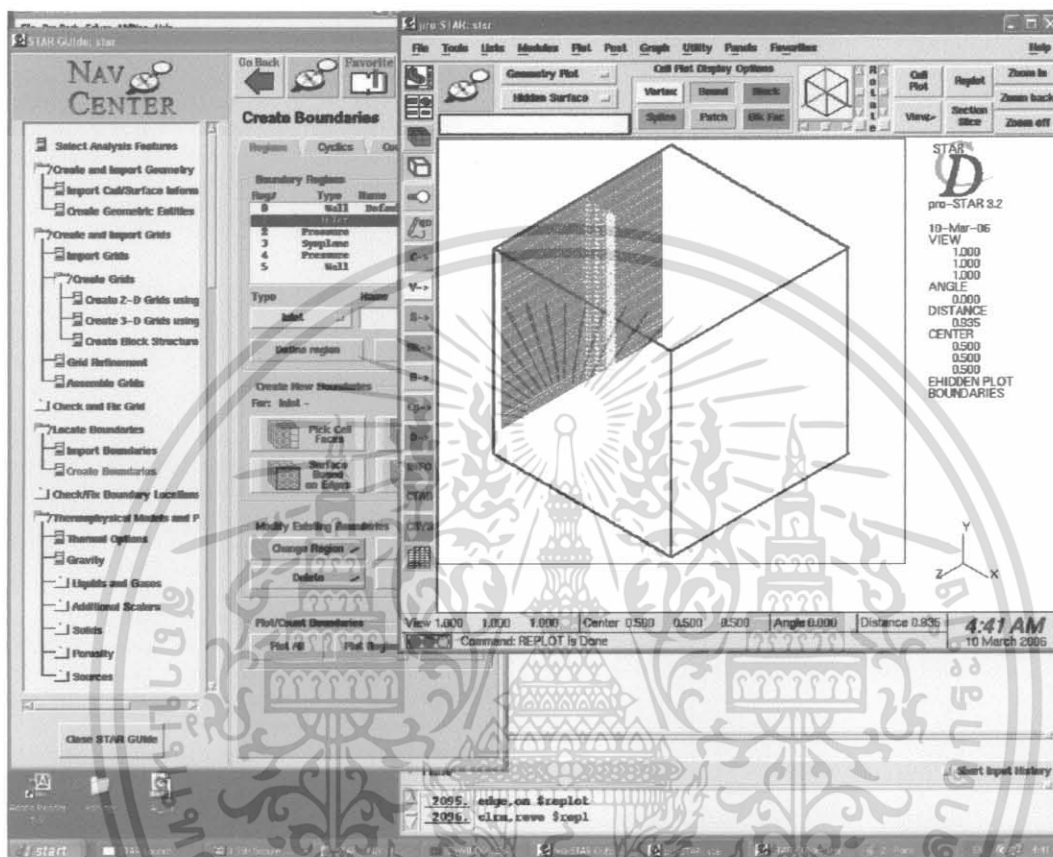


รูปที่ 5.10 แสดงส่วนของปริมาตรควบคุมของของแข็งที่เพิ่มขึ้นมา

ส่วนที่แตกต่างจากหัวข้อ 5.2.1 คือ มีการเพิ่มปริมาตรควบคุมของของแข็ง โดยให้มีความหนา 0.1 m แต่ความสูงรวมขอบเขตของของเหลวแล้วยังคงมีค่า 1 m เท่าเดิม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2. สร้างขอบเขตของของแข็งและของไหล

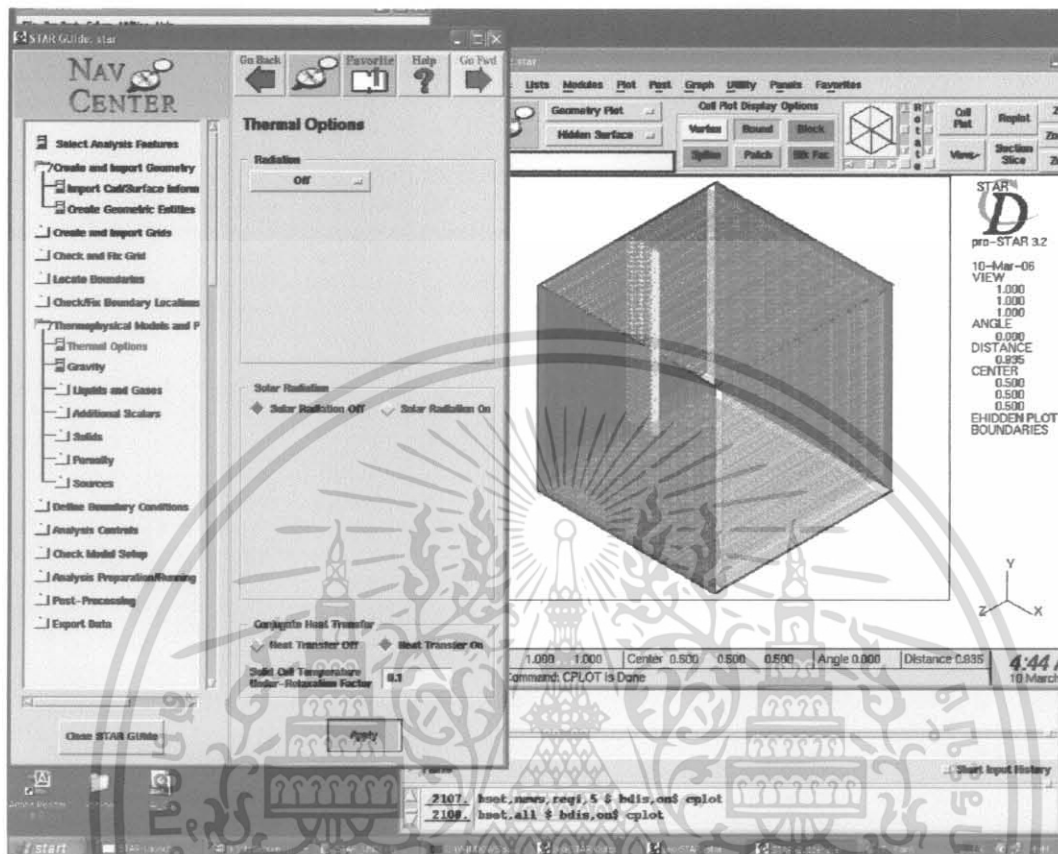


รูปที่ 5.11 แสดงการสร้างขอบเขตของของแข็งและของไหล

ส่วนที่แตกต่างจากหัวข้อ 5.2.1 คือ มีการกำหนดด้านล่างของขอบเขตของของแข็งให้มีอุณหภูมิคงที่ (กำหนดให้เป็น wall)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3.เพิ่มการคำนวณให้ Heat Transfer On

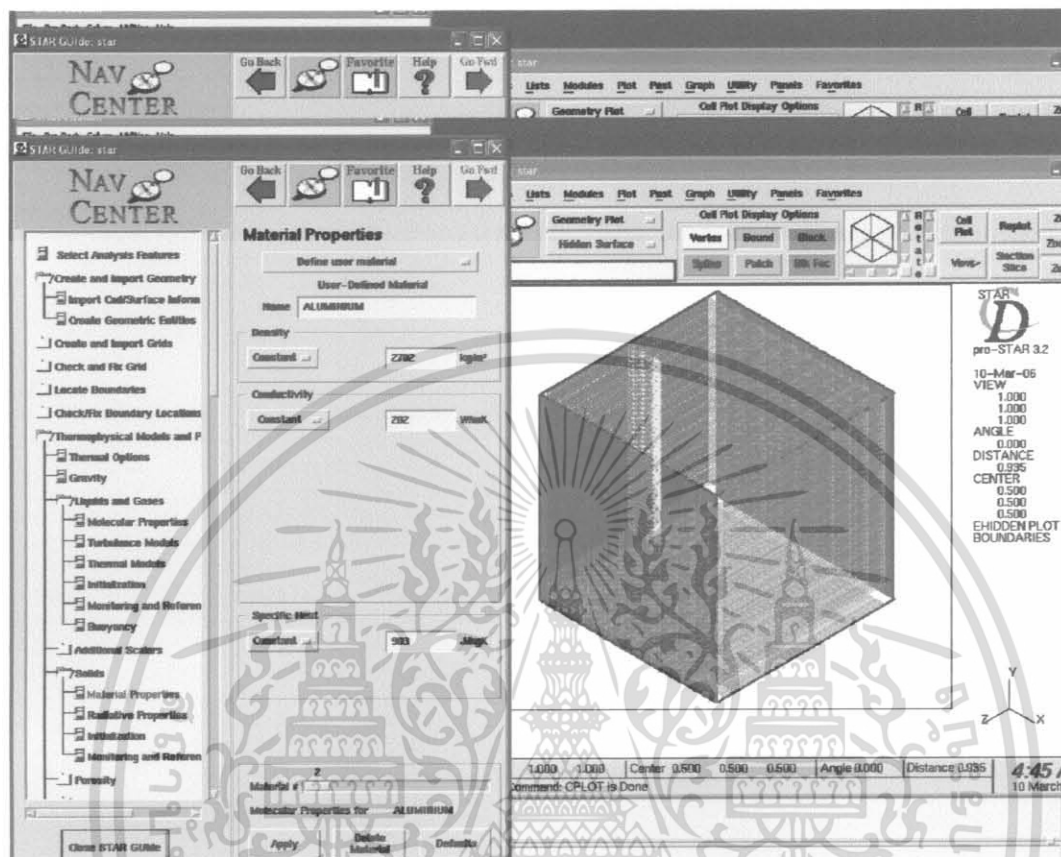


รูปที่ 5.12 แสดงการกำหนดให้มีการคำนวณ Heat Transfer On

ส่วนที่แตกต่างจากหัวข้อ 5.2.1 คือ มีการกำหนดในหัวข้อ Thermal Options ให้มีการคำนวณแบบ Conjugate คือ ให้เลือก Heat Transfer On

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3. กำหนดคุณสมบัติของของแข็ง

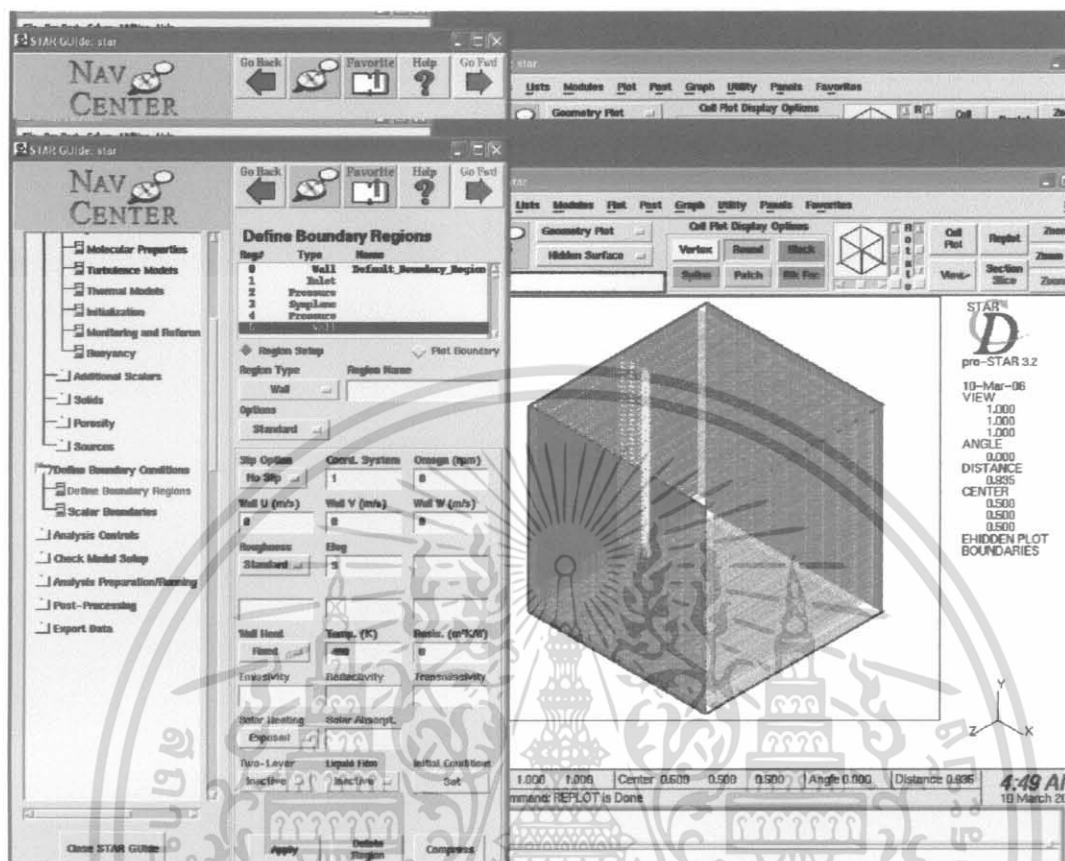


รูปที่ 5.13 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของของแข็ง

กำหนดคุณสมบัติของของแข็ง ในที่นี้ใช้ลูมิเนียม มีค่าต่างๆดังนี้  
 ความหนาแน่น  $2702 \text{ kg/m}^3$  สัมประสิทธิ์การนำความร้อน  $202 \text{ W/mK}$   
 ความจุความร้อนจำเพาะ  $903 \text{ J/KgK}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3. กำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆทั้งของแข็งและของเหลว



รูปที่ 5.14 แสดงการกำหนดคุณสมบัติของขอบเขตต่างๆ

ส่วนที่แตกต่างจากหัวข้อ 5.2.1 คือ มีการกำหนดอุณหภูมิที่ศูนย์กลางของขอบเขตของของแข็งให้มีอุณหภูมิ 400 K

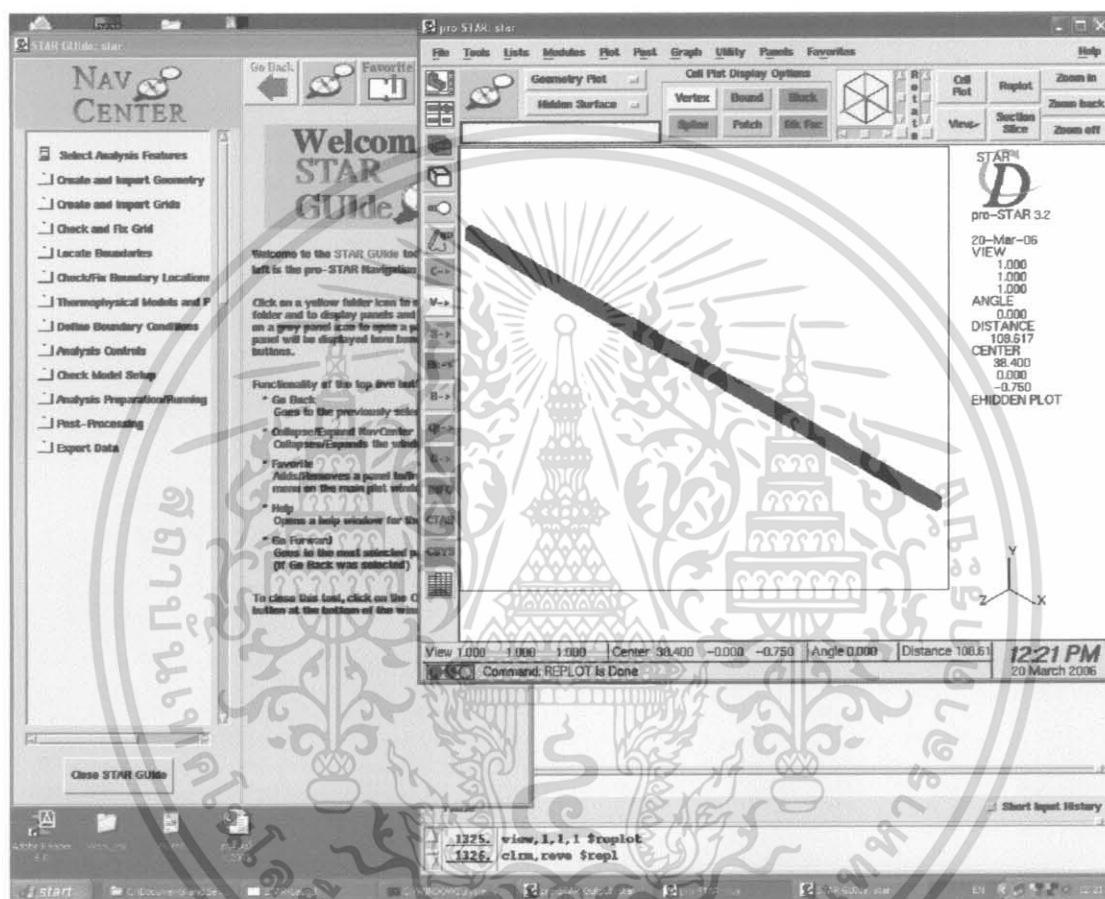
ส่วนต่างๆที่ไม่ได้กล่าวถึงให้ทำตามหัวข้อ 5.2.1

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 5.3 แบบจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีกระบายความร้อนแบบเกล็ด

ในกรณีที่ทำกรจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีระบายความร้อนแบบเกล็ดนั้นเราจะอธิบายในกรณีที่มีวัสดุทำจากอลูมิเนียมเพียงกรณีเดียวส่วนกรณีวัสดุทำจากทองแดงทำเหมือนกัน

#### 1.Import รูปที่เราต้องการจะทำการ simulation เข้ามาใน โปรแกรม Star CD

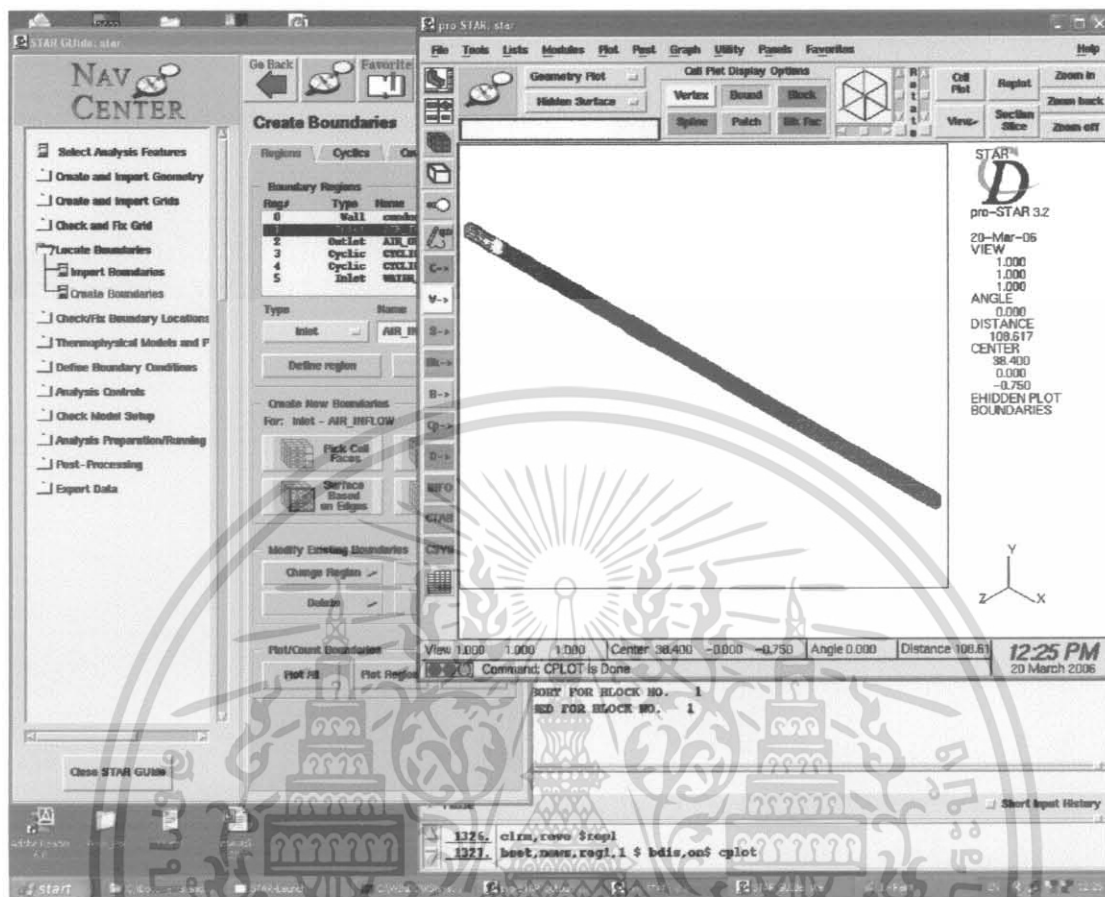


รูปที่ 5.15 แสดงรูปกรจำลองครีระบายความร้อนแบบเกล็ด

Import รูปโดยเข้าที่ File แล้วเลือก Import จากนั้นก็เลือกรูปที่เราต้องการส่งเข้ามาในที่นี้คือรูป ครีระบายความร้อนแบบเกล็ด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 2. สร้างขอบเขตทางเข้าของอากาศ

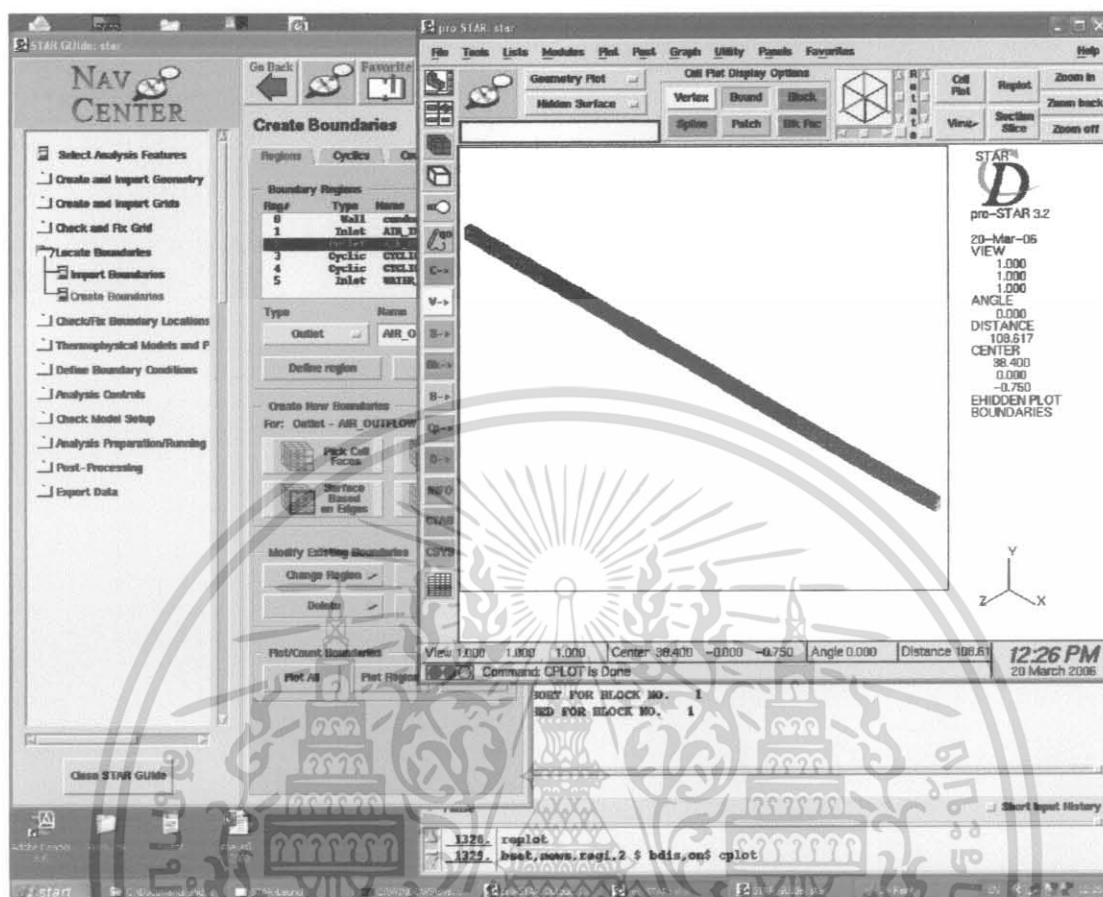


รูปที่ 5.16 แสดงรูปการกำหนดทางเข้าของของไหลที่เป็นอากาศ

เข้าที่ Locate Boundaries เลือก Create Boundaries อันดับแรกเลือกเป็น Inlet ทางเข้าของอากาศ แล้วเลือกด้านที่จะให้อากาศเข้า จะได้ดังรูป 5.16

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 3. สร้างขอบเขตทางออกของอากาศ

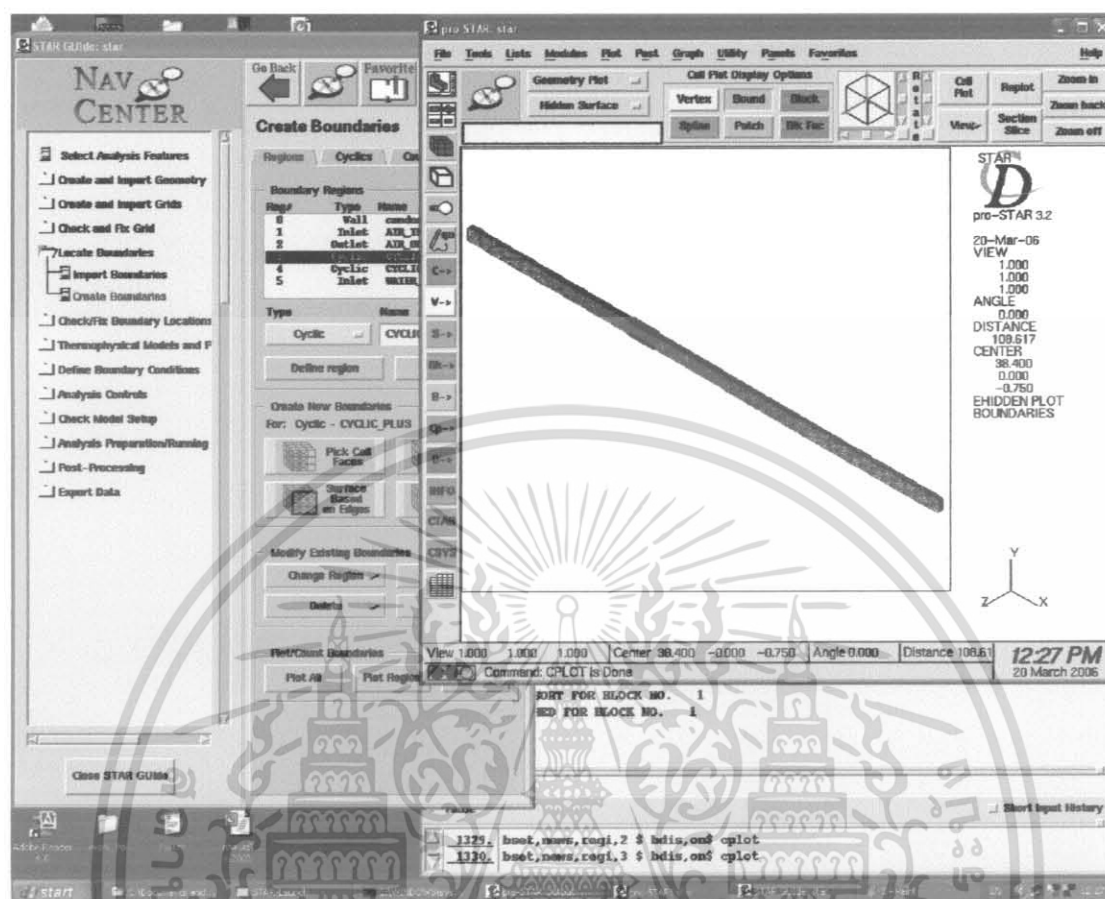


รูปที่ 5.17 แสดงรูปการกำหนดทางออกของของไหลที่เป็นอากาศ

เข้าที่ Locate Boundaries เลือก Create Boundaries เลือกเป็น Outlet ทางออกของอากาศ แล้วเลือกด้านที่จะให้อากาศออก จะได้ดังรูป 5.17

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 4. กำหนดให้ด้านข้างเป็นแบบ Cyclic คือมีการหมุนวนคู่กันและกัน

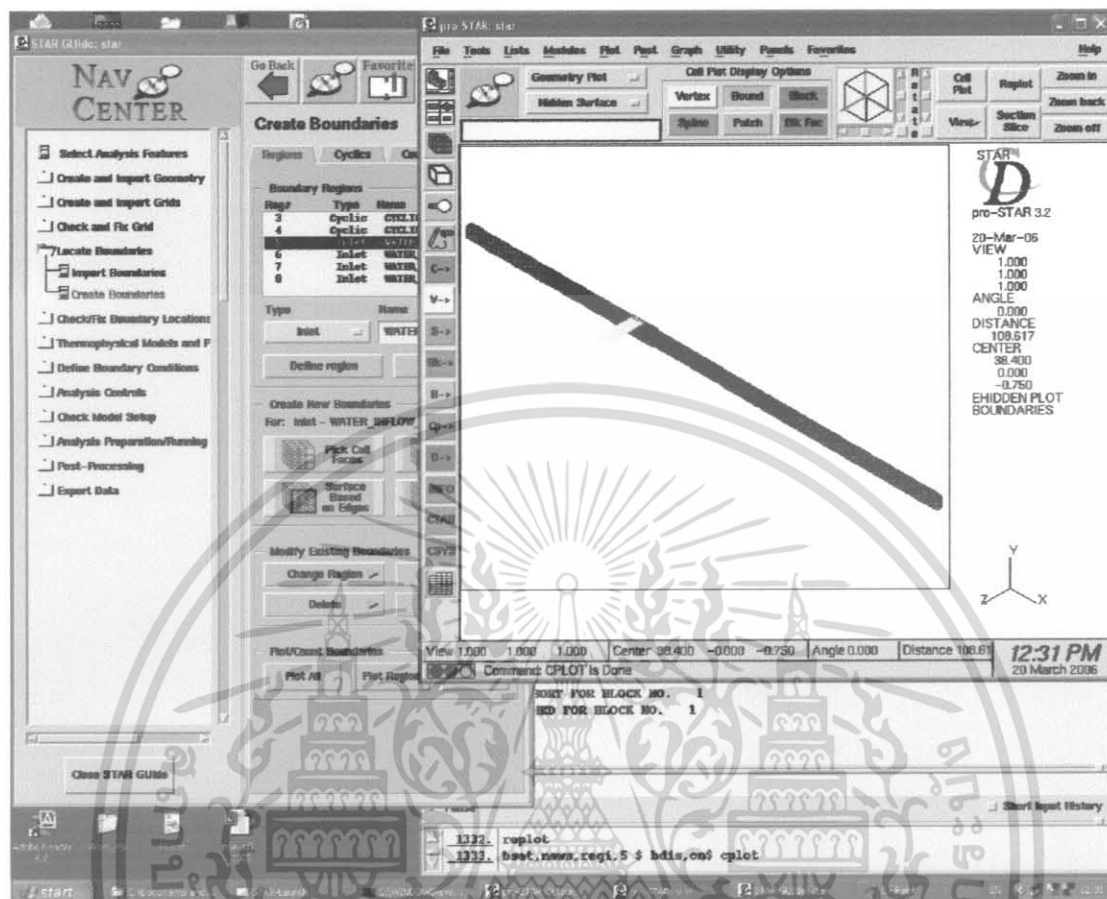


รูปที่ 5.18 แสดงรูปการกำหนดให้ด้านข้างเป็นแบบ Cyclic

เข้าที่ Locate Boundaries เลือก Create Boundaries เลือกเป็น Cyclic แล้วเลือกด้านข้าง จะได้ดังรูป 5.18 ส่วนอีกด้านหนึ่งให้ทำเป็น Cyclic เหมือนกัน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 5. กำหนดทางเข้าของของไหลที่เป็นน้ำ

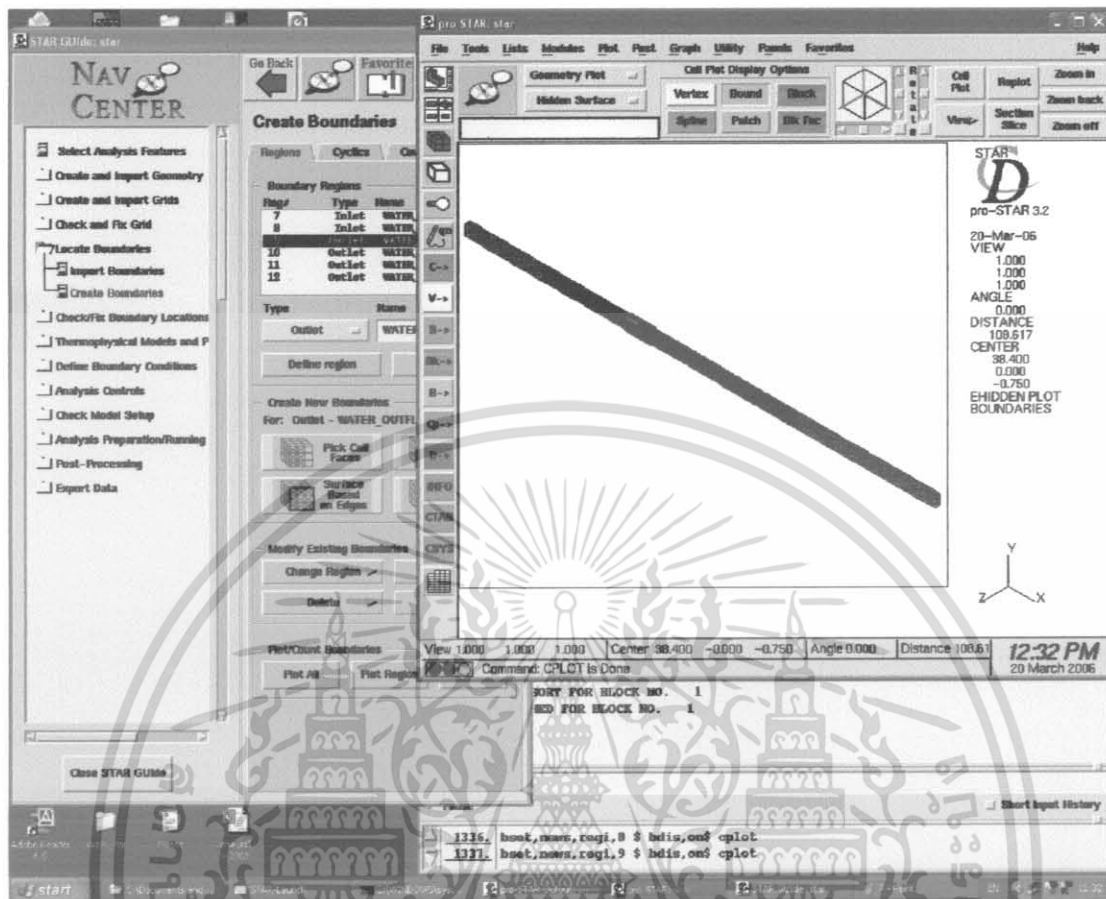


รูปที่ 5.19 แสดงรูปการกำหนดทางเข้าของของไหลที่เป็นน้ำ

เข้าที่ Locate Boundaries เลือก Create Boundaries เลือกเป็น Inlet ทางเข้าของน้ำ แล้วเลือกด้านที่จะให้น้ำเข้า จะได้ดังรูป 5.19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 6. กำหนดทางออกของของไหลที่เป็นน้ำ

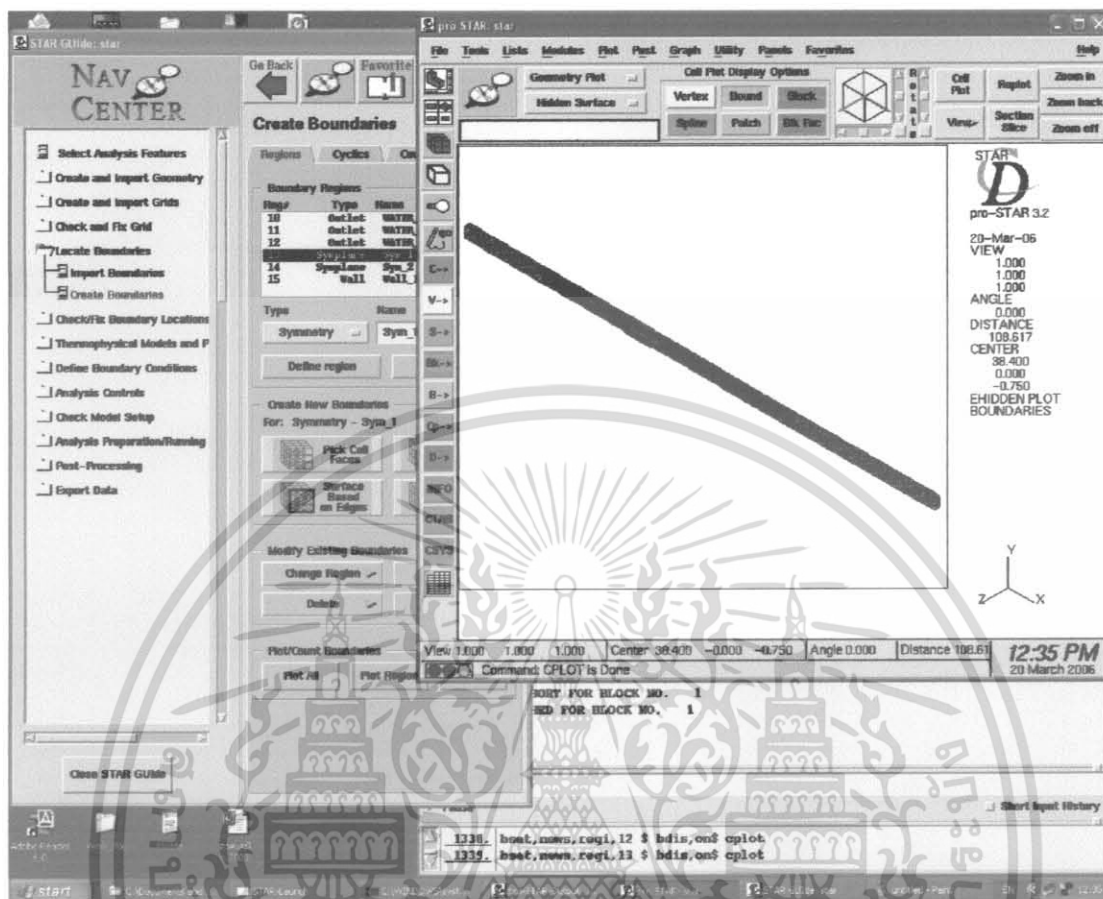


รูปที่ 5.20 แสดงรูปการกำหนดทางออกของของไหลที่เป็นน้ำ

เข้าที่ Locate Boundaries เลือก Create Boundaries เลือกเป็น Outlet ทางออกของน้ำ แล้วเลือกด้านที่จะให้น้ำออก จะได้ดังรูป 5.20

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 7. กำหนดให้ทั้ง 2 ด้านของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดเป็น Symplane

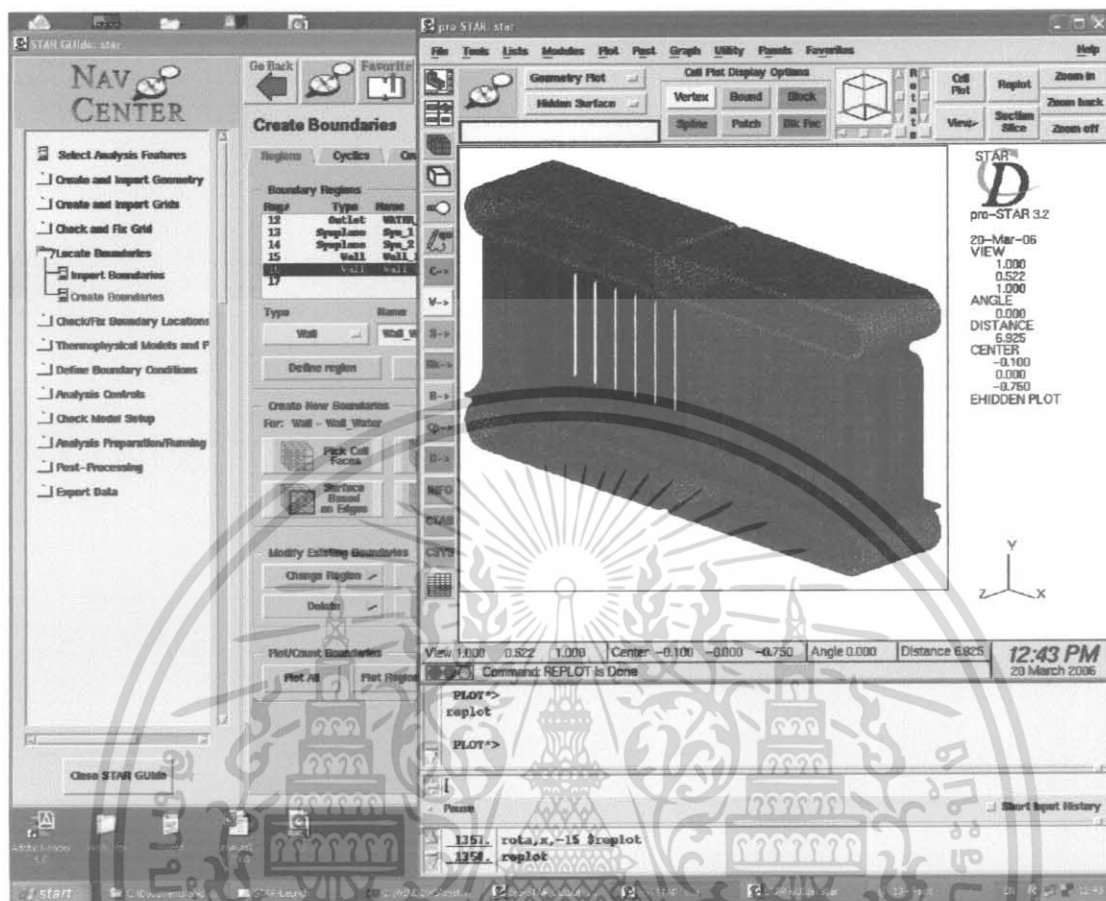


รูปที่ 5.21 แสดงรูปการกำหนดให้ทั้ง 2 ด้านของครีประบายความร้อนแบบเกล็ดเป็น Symplane

เข้าที่ Locate Boundaries เลือก Create Boundaries เลือกเป็น Symplane แล้วเลือกด้านทั้ง 2 ด้านของครีประบายความร้อนแบบเกล็ด จะได้ดังรูป 5.21

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

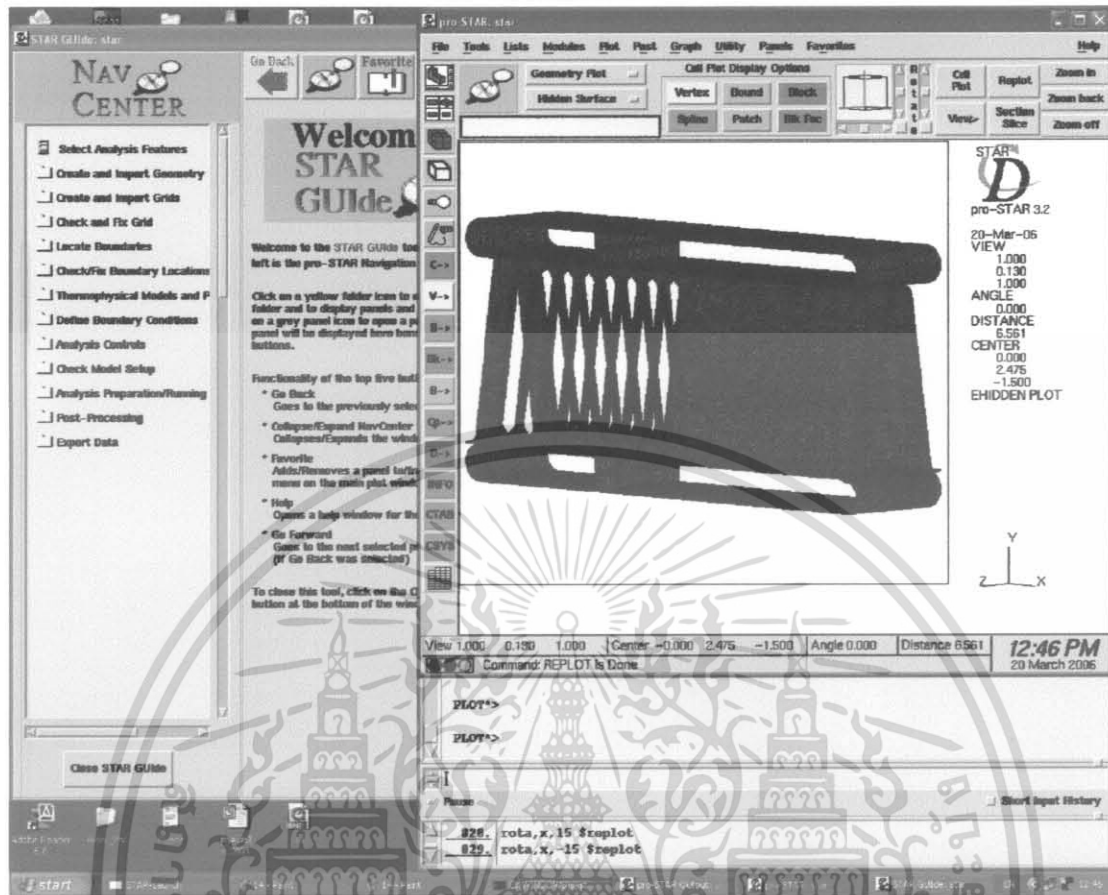
8. จะได้รับปริบะบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากอลูมิเนียมออกมาพร้อมที่จะทำการ Simulation



รูปที่ 5.22 แสดงรูปปริบะบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากอลูมิเนียมพร้อมที่จะทำการ Simulation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 8. รูปครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากทองแดงพร้อมที่จะทำการ Simulation

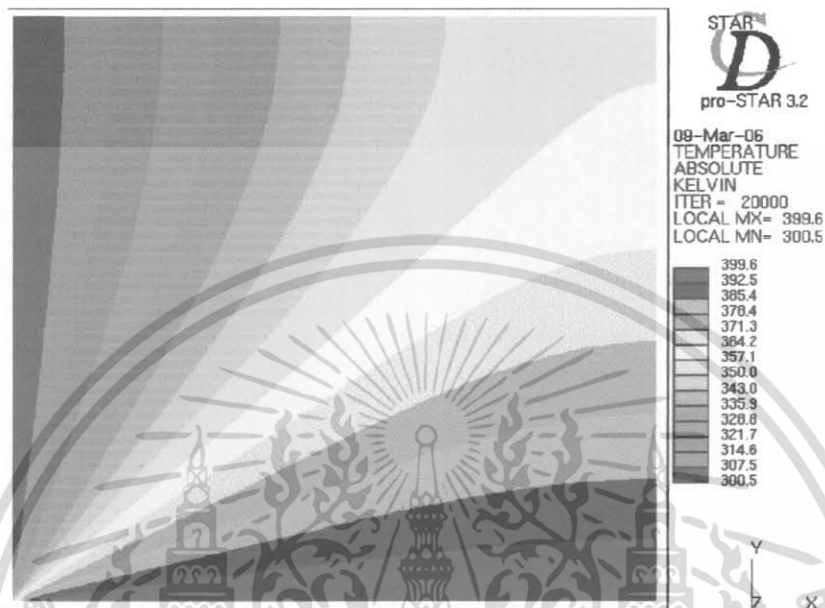


รูปที่ 5.23 แสดงรูปครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากทองแดงพร้อมที่จะทำการ Simulation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 6  
ผลการจำลอง

6.1 ผลการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบโดยอุณหภูมิของพื้นผิวของของไหลมีค่าคงที่



รูปที่ 6.1 ผลการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นราบโดยอุณหภูมิของพื้นผิวของของไหลมีค่าคงที่

6.2 ผลจากการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นแบบราบแบบคอนจูเกต



รูปที่ 6.2 ผลจากการจำลองการไหลแบบราบเรียบผ่านแผ่นแบบราบแบบคอนจูเกต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

6.3 การเปรียบเทียบจำลองการถ่ายเทความร้อนแบบราบเรียบผ่านแผ่นแบนราบกับ ผลเฉลยแม่นยำตรง  
เรานำค่าการถ่ายเทความร้อนที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขทั้ง 2 กรณีมาเปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำตรง  
โดยผลเฉลยแม่นยำตรงคำนวณจากสมการ

$$Nu_x = 0.332 Pr^{1/3} Re_x^{1/2}$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k}$$

$$q_x'' = h_x (T_w - T_\infty)$$

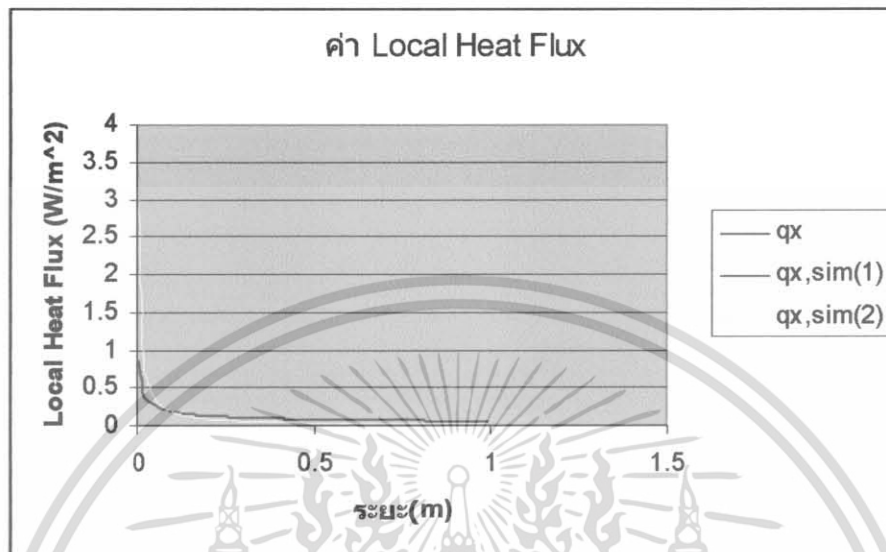
จะได้ผลเฉลยแม่นยำตรงรวมของการถ่ายเทความร้อนเท่ากับ 11.91081779 W  
และค่าการถ่ายเทความร้อนที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับกรณีอุณหภูมิที่พื้นผิวของของไหลมีค่า  
คงที่เท่ากับ 12.00674154 W  
สำหรับค่าการถ่ายเทความร้อนที่ได้จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับกรณีอุณหภูมิที่พื้นผิวของของไหลมีค่าเท่ากับ  
12.00976471 W  
นำผลทั้งสามที่ได้มาเปรียบเทียบกันดังตารางข้างล่าง

ตารางที่ 6.1 แสดงการเปรียบเทียบ Total heat transfer ระหว่างการคำนวณแบบบเลเชียส, การวิเคราะห์เชิง  
ตัวเลขแบบที่กำหนดพื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่ และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบคอนจูเกต

model	Total heat transfer (W)	error (%)	diff (%)
Blasius	11.91	ref.	
case 3.1	12.006	0.8	
case 3.2	12.009		0.83

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลการเปรียบเทียบค่า Local Heat Flux ระหว่างการคำนวณแบบเบสิก, การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบที่พื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่ และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบแบบคอนจูเกต ได้ดังกราฟ



รูปที่ 6.3 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่า Local Heat Flux ระหว่างการคำนวณแบบเบสิก, การวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบที่กำหนดพื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่ และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบคอนจูเกต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

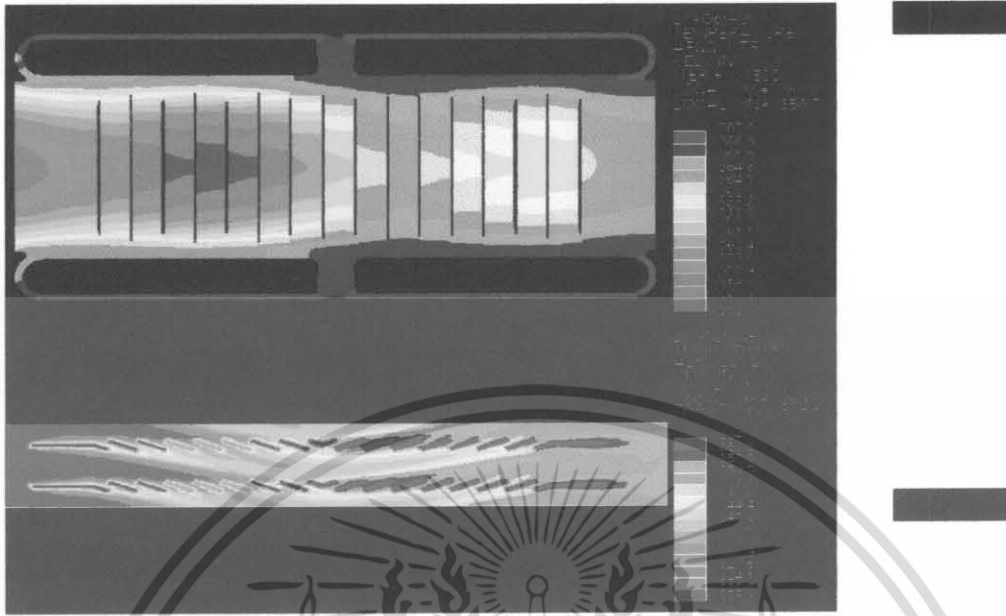
ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสัมประสิทธิ์การพาความร้อน ระหว่างการคำนวณแบบเฉลียงส, การวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบที่พื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่ และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบแบบคอนจูเกตได้ดังกราฟ



รูปที่ 6.4 กราฟแสดงการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยสัมประสิทธิ์การพาความร้อนระหว่างการคำนวณแบบเฉลียงส, การวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบที่กำหนดพื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่ และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขแบบคอนจูเกต

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

#### 6.4 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากอลูมิเนียม



รูปที่ 6.5 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากอลูมิเนียม

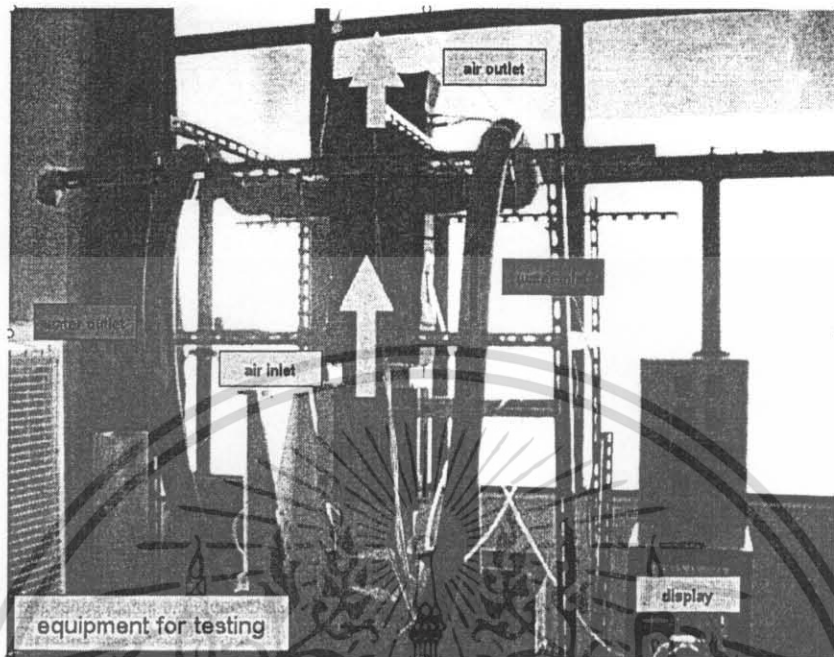
#### 6.5 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากทองแดง



รูปที่ 6.6 ผลการจำลองการถ่ายเทความร้อนของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากทองแดง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## 6.6 การทดลองการถ่ายเทความร้อนของเครื่องระบายความร้อนแบบเกล็ด

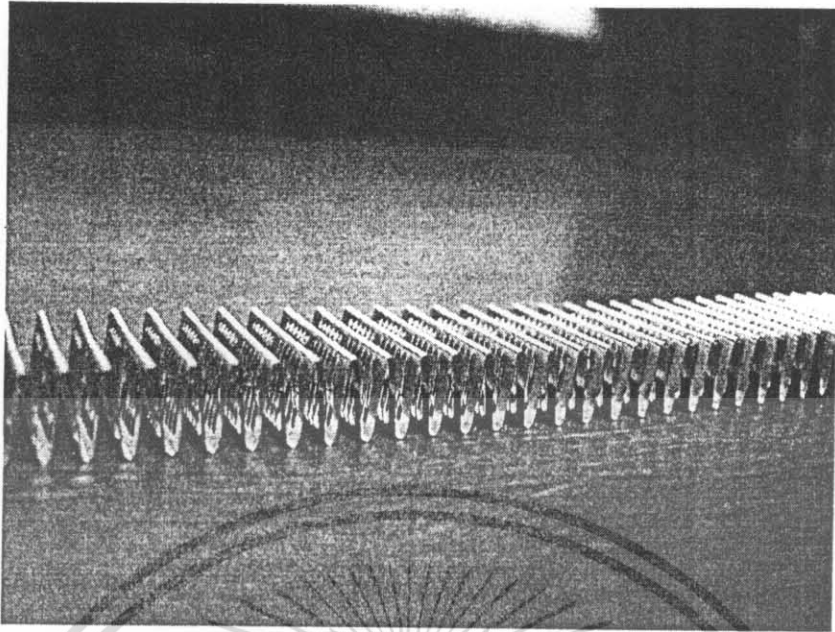


รูปที่ 6.7 แสดงการทดลองการถ่ายเทความร้อนของเครื่องระบายความร้อนแบบเกล็ด

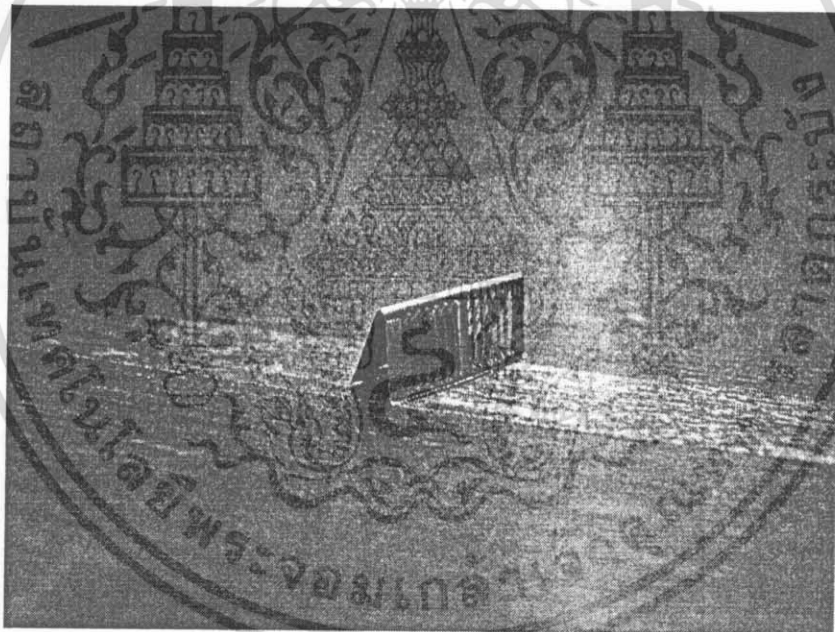


รูปที่ 6.8 แสดงรูปหม้อน้ำระบายความร้อนของรถยนต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 6.9 แสดงรูปครีประบายความร้อนแบบเกล็ดภายในหม้อน้ำรถยนต์



รูปที่ 6.10 แสดงรูปครีประบายความร้อนแบบเกล็ดภายในหม้อน้ำรถยนต์จำนวน 1 loop

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในการทดสอบควรที่จะใช้แผ่นระบายความร้อนเพียง 1 ครีบบนการทดสอบ แต่เนื่องจากมีข้อจำกัดทางด้านเครื่องมือวัดอุณหภูมิที่มีความละเอียดสูงๆ และมีขนาดเล็กมากๆ มีราคาสูงดังนั้นเพื่อให้เครื่องมือวัดอุณหภูมิอ่านค่าได้จึงใช้ครีบน้ำทั้งหมด 56 loop เพราะว่าได้มีการวิเคราะห์แล้วว่าอุณหภูมิทางเข้าและทางออกของน้ำมีค่าแตกต่างกัน 1 องศาซึ่งเพียงพอที่เครื่องวัดสามารถวัดได้ แต่ในการวิเคราะห์เชิงตัวเลขเราได้ใช้เพียงแค่ 1 Loop ในการวิเคราะห์แล้วจึงนำค่าการถ่ายเทความร้อนที่ได้มาคูณด้วย 56 อีกครั้งหนึ่งเพื่อเปรียบเทียบกับผลการทดลอง และการทดลองอาจมีความผิดพลาดเกิดขึ้นเนื่องจากอุปกรณ์การทดลองตัวของผู้ทำการทดลองเอง และปัจจัยด้านอื่นๆอีกหลายข้อ ดังนั้นการ Simulation จึงได้มีการนำค่าแก้ไขลงไปในตัวโปรแกรมบางส่วนด้วย ซึ่งได้ผลเปรียบเทียบดังตารางข้างล่าง

ตารางที่ 6.2 แสดงการเปรียบเทียบ Total heat transfer ของการถ่ายเทความร้อนระหว่างการวิเคราะห์เชิงตัวเลขกับการทดลองจริงของครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุอลูมิเนียม

Method	Total Heat Transfer (W) of 56 loops	Error (%)
Experiment (Al)	130.247	Ref.
Numerical (Non-isothermal, Al)	132.51	1.74

หลังจากนั้นเราได้เปลี่ยนวัสดุของครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดจากอลูมิเนียมเป็นทองแดงโดยจะต้องมีน้ำหนักเท่ากัน เนื่องจากทองแดงมีน้ำหนักมากกว่าอลูมิเนียม 3 เท่า ดังนั้นจึงมีโมเดลแตกต่างกันด้วย ซึ่งค่าการถ่ายเทความร้อนเปรียบเทียบกันได้ดังตารางข้างล่าง

ตารางที่ 6.3 แสดงการเปรียบเทียบ Total heat transfer ระหว่างการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุอลูมิเนียมกับของครีบบระบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุทองแดง

Material	Total Heat Transfer (W/kg) of 1 loop	Difference (W/kg)
Numerical (Non-isothermal, Al)	1979.141	2.266
Numerical (Non-isothermal, Cu)	1976.875	

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 7

### วิเคราะห์และสรุปผลการทดลอง

#### วิเคราะห์ผลการทดลอง

1. จากกราฟเปรียบเทียบระหว่างผลเฉลยแม่นยำตรงกับการจำลองทั้ง 2 กรณี พบว่าที่ทางเข้ามีค่าการถ่ายเทความร้อนเฉพาะที่สูงเนื่องจากความแตกต่างของค่าอุณหภูมิของของไหลกับแผ่นแบนราบมีค่าสูงและจะมีค่าลดลงเรื่อยๆตามทิศทางการไหล
2. จากตารางเปรียบเทียบค่าการถ่ายเทความร้อนของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดระหว่างการทดลองกับการจำลอง กรณีที่วัสดุทำจากอลูมิเนียมผลจากการจำลองของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุอลูมิเนียมมีค่าเฉลี่ยการถ่ายเทความร้อนแตกต่างจากผลการทดลอง 1.74 %
3. จากตารางเปรียบเทียบค่าการถ่ายเทความร้อนของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดระหว่างวัสดุที่ทำจากอลูมิเนียมกับวัสดุที่ทำจากทองแดง ผลจากการจำลองของครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดที่ทำจากวัสดุอลูมิเนียม และทำจากวัสดุทองแดง มีค่าเฉลี่ยการถ่ายเทความร้อนต่อมวลแตกต่างกัน 2.266 W/kg

#### สรุปผลการทดลอง

1. สำหรับการไหลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบที่พื้นผิวของของไหลมีค่าอุณหภูมิคงที่ และการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของการไหลราบเรียบผ่านแผ่นราบแบบคอนจูเกต พบว่าค่าเฉลี่ยฟลักซ์ความร้อนและค่าเฉลี่ยสัมประสิทธิ์การพาความร้อนใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรง
2. สำหรับครีบริบายความร้อนแบบเกล็ดทั้ง 2 วัสดุ พบว่าค่าเฉลี่ย ฟลักซ์ความร้อนใกล้เคียงกับผลการทดลอง
3. การเลือกใช้วิธีการประมาณค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อนระหว่างของแข็งและของไหล ให้เหมาะสมมีความสำคัญต่อการทำนายการถ่ายเทความร้อน

### บรรณานุกรม

- [1] ผศ. ดร. พงษ์เจต พรหมวงศ์, “การถ่ายเทความร้อน”, ภาควิชาเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
- [2] รักษัย คงสมฤทธิ์, วินิจ ใจบุญ, เอกชัย ธนาภิวัฒน์, 2547, การทดสอบสมรรถนะการแลกเปลี่ยนความร้อนของครีบบระบายความร้อนหม้อน้ำรถยนต์, ภาควิชาเครื่องกล, คณะวิศวกรรมศาสตร์, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
- [3] Holman, J.P. “Heat transfer”, McGraw-Hill, New York.1989.
- [4] Kim M – H , Bullard CW. “Air-side Thermal Hydraulic Performance of Multi-louvered Fin Aluminum Heat Exchangers”. International Journal of Refrigeration, 2002. pp. 390-400.
- [5] Robert W. Fox and Alan T. McDonald, “Introduction to Fluid Mechanical”, School of Mechanical Engineering Purdue University.
- [6] Shah R.K. and London A.L. “Laminar Flow Forced Convection in Ducts – A Source Book For Compact Heat Exchanger Analytical Data. Academic Press, 1978.
- [7] William F. Huges and John A. Brighton. “Theory and Problems of Fluid Dynamics, 2/ED”, McGraw-Hill, New York. 1991.
- [8] Patankar, S.V. “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Hemisphere/McGraw-Hill, Washington, DC. (Chapter 3). 1980.
- [9] Xi Chen and Peng Han, “A Note on the Solution of Conjugate Heat Transfer Problems Using SIMPLE-like algorithms”, Engineering Thermophysics Division, Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้