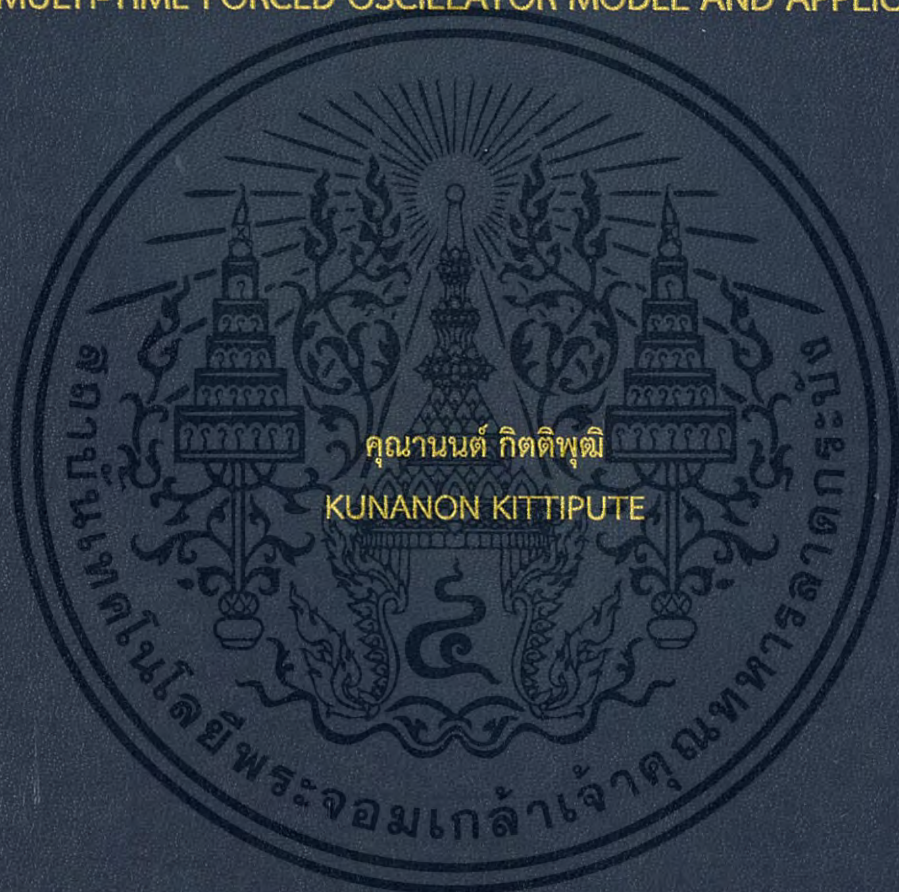


การอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณ  
ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาและการประยุกต์ใช้

THE EXPLANATION OF HOMODYNE PHENOMENON  
IN ELECTRICAL OSCILLATOR

BY MULTI-TIME FORCED OSCILLATOR MODEL AND APPLICATIONS



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2560

KMITL-2017-EN-D-018-172

สำนักหอสมุดกลาง พระจอมเกล้าลาดกระบัง

การอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณ  
ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาและการประยุกต์ใช้

THE EXPLANATION OF HOMODYNE PHENOMENON  
IN ELECTRICAL OSCILLATOR  
BY MULTI-TIME FORCED OSCILLATOR MODEL AND APPLICATIONS



เลขที่ 148668  
วันที่ 14 พ.ย. 2560

b. 00267445  
l. ....

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
พ.ศ. 2560

KMITL-2017-EN-D-018-172

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

THE EXPLANATION OF HOMODYNE PHENOMENON  
IN ELECTRICAL OSCILLATOR  
BY MULTI-TIME FORCED OSCILLATOR MODEL AND APPLICATIONS



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENT FOR THE DEGREE OF  
DOCTOR OF ENGINEERING IN ELECTRICAL ENGINEERING  
FACULTY OF ENGINEERING  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
2017

KMITL-2017-EN-D-018-172

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2017


FACULTY OF ENGINEERING

KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ การอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา และการประยุกต์ใช้  
Thesis Title The Explanation of Homodyne Phenomenon in Electrical Oscillator by Multi-Time Forced Oscillator Model and Applications  
นักศึกษา นายคุณานนต์ กิตติพิศุทธิ์  
รหัสประจำตัว 54610137  
ปริญญา วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต  
สาขาวิชา วิศวกรรมไฟฟ้า  
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน  
หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2017-EN-D-018-172

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
รศ.ดร.มนตรี	ศิริปรัชญานันท์	
ผศ.ดร.สมเกียรติ	ฤกษ์วีรณูญ	
รศ.ดร.วิภา	แสงพิสิทธิ์	
ผศ.ดร.ศรวัฒน์	ชีวปรีชา	
รศ.ดร.ปราโมทย์	วาดเขียน	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันศุกร์ที่ 14 กรกฎาคม พ.ศ. 2560 เวลา 13.00-15.00 น.  
สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 5 ห้องประชุม 3

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร.คมสัน มาลีสี)

คณบดี คณะวิศวกรรมศาสตร์

วันที่ 14 กรกฎาคม พ.ศ. 2560

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณด้วย โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาและการประยุกต์ใช้
นักศึกษา	นายคุณานนต์ กิตติพิฒิ
รหัสประจำตัว	54610137
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	2560
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รองศาสตราจารย์ ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน

## บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการนำเสนอการอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ (Homodyne Phenomenon) ที่เกิดขึ้นเมื่อมีการป้อนอินพุตให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ โดยการอธิบายได้อาศัยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา (Multi-Time Forced Oscillator: MTFO) ที่สามารถอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ได้ทั้งระบบการสั่นบังคับ (Forced Oscillation System) และระบบการสั่นตนเอง (Self-Oscillation System) นอกเหนือจากนี้ยังได้นำเสนอวิธีการประยุกต์ใช้ปรากฏการณ์โฮโมไดน์สำหรับสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเปลอร์ (Short-Range Doppler Radar) การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสภายในวงจรกำเนิดสัญญาณ และการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ โดยสามารถยืนยันหลักการได้ด้วยผลการทดลองที่ได้จากวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์

Thesis	The Explanation of Homodyne Phenomenon in Electrical Oscillator by Multi-Time Forced Oscillator Model and Applications
Student	Mr.Kunanon Kittipute
Student ID.	54610137
Degree	Doctor of Engineering
Program	Electrical Engineering
Year	2017
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Paramote Wardkein

## ABSTRACT

This thesis proposes the explanation of the homodyne phenomenon, which occurred while apply input through oscillator circuit. By using the Multi-Time Forced Oscillator (MTFO) model, the homodyne phenomenon in the forced oscillation system and self-oscillation system can be analyzed in the same pattern. Moreover, the homodyne phenomenon which described by MTFO model can be applied for the short-range Doppler radar, the explanation of phase noise in the oscillator circuit, and the FM bandwidth scaling by injecting an FM signal to oscillator circuit. The principle affirmed by experimental result, which obtained from Colpitts oscillators.

# กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาจาก รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์, รศ.ดร.จิรสุดา โกษียามภรณ์ และ ดร.ปานวิทย์ ฐะระนุติ ข้าพเจ้า รู้สึกทราบซึ่งในความอนุเคราะห์จากท่านอาจารย์ทั้งสามท่าน และขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบังทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอกราบพระคุณ Prof.Dr.Sergey Smolskiy, Prof.Dr.Vladislav Noskov และ ศ.นท.ดร. สรวุฒิ สุจิตจร ที่ให้คำแนะนำด้านวิชาการให้กับข้าพเจ้า

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอกราบพระคุณ พล.อ.อ.ฤกษ์ฤทธิ พวงทอง, พล.อ.ต.ณรงค์ศักดิ์ สุขมา, น.อ.ชาตรี พรหมพันธุภรณ์, นท.หญิง ดร.ศรีพนา ศรีเชื้อ และ นท. อัครชัย สละชีพ ในคำปรึกษาและให้การช่วยเหลือในด้านต่างๆ และคอยให้กำลังใจเสมอมา ในช่วงที่ข้าพเจ้าทำงานในกองทัพอากาศไทย

ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ในภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกคนที่ให้คำแนะนำและช่วยเหลือในด้านต่างๆ

ขอขอบคุณน้องๆ ในภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ทุกคนที่ให้คำแนะนำและช่วยเหลือในหลายด้าน รวมถึงคำปรึกษาเชิงวิชาการ

ขอขอบคุณบัณฑิตศึกษาและบัณฑิตวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ที่ให้ความช่วยเหลือและให้คำแนะนำในด้านเอกสาร

ขอขอบคุณ นายธีรวัฒน์ ชูคำ (พี่เน็ด) และเพื่อนๆ ศิษย์เก่าที่เรียนโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยรามคำแหงและโรงเรียนอนุบาลพิบูลเวศม์ทุกคน ที่ให้กำลังใจและสร้างสรรค์เสมอมา

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ บิดาผู้ล่วงลับ มารดา น้องชาย และครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจ และให้การสนับสนุนในทุกเรื่อง ทำให้ข้าพเจ้าสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมาจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบแด่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

คุณานนต์ กิตติพิฒิ

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณด้วย โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาและการประยุกต์ใช้
นักศึกษา	นายคุณานนต์ กิตติพิฒิ
รหัสประจำตัว	54610137
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรดุษฎีบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมไฟฟ้า
พ.ศ.	2560
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน

### บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้เป็นการนำเสนอการอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ (Homodyne Phenomenon) ที่เกิดขึ้นเมื่อมีการป้อนอินพุตให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ โดยการอธิบายได้อาศัยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา (Multi-Time Forced Oscillator: MTFO) ที่สามารถอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ได้ทั้งระบบการสั่นบังคับ (Forced Oscillation System) และระบบการสั่นตนเอง (Self-Oscillation System) นอกจากนี้ยังได้นำเสนอวิธีการประยุกต์ใช้ปรากฏการณ์โฮโมไดน์สำหรับสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเปลอร์ (Short-Range Doppler Radar) การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสภายในวงจรกำเนิดสัญญาณ และการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอพเอ็มด้วยการป้อนสัญญาณเอพเอ็มให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ โดยสามารถยืนยันหลักการได้ด้วยผลการทดลองที่ได้จากวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้拿去ไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Thesis	The Explanation of Homodyne Phenomenon in Electrical Oscillator by Multi-Time Forced Oscillator Model and Applications
Student	Mr.Kunanon Kittipute
Student ID.	54610137
Degree	Doctor of Engineering
Program	Electrical Engineering
Year	2017
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Dr.Paramote Wardkein

### ABSTRACT

This thesis proposes the explanation of the homodyne phenomenon, which occurred while apply input through oscillator circuit. By using the Multi-Time Forced Oscillator (MTFO) model, the homodyne phenomenon in the forced oscillation system and self-oscillation system can be analyzed in the same pattern. Moreover, the homodyne phenomenon which described by MTFO model can be applied for the short-range Doppler radar, the explanation of phase noise in the oscillator circuit, and the FM bandwidth scaling by injecting an FM signal to oscillator circuit. The principle affirmed by experimental result, which obtained from Colpitts oscillators.

## กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จได้อย่างดี ด้วยคำแนะนำและคำปรึกษาจาก รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน ซึ่งเป็นอาจารย์ผู้ควบคุมวิทยานิพนธ์, รศ.ดร.จิรัสสา โกษียาภรณ์ และ ดร.ปานวิทย์ ฐะวะนุติ ข้าพเจ้า รู้สึกทราบบ้างในความอนุเคราะห์จากท่านอาจารย์ทั้งสามท่าน และขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอกราบพระคุณ Prof.Dr.Sergey Smolskiy, Prof.Dr.Vladislav Noskov และ ศ.นท.ดร. สราวุฒิ สุจิตจร ที่ให้คำแนะนำด้านวิชาการให้กับข้าพเจ้า

ขอกราบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ทุกท่าน ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้กับข้าพเจ้า

ขอกราบพระคุณ พล.อ.อ.ฤกษ์ฤทธิ พวงทอง, พล.อ.ต.ณรงค์ศักดิ์ ศุขมา, น.อ.ชาติรี พรหมพันธกรณ์, นท.หญิง ดร.ศรีพนา ศรีเชื้อ และ นท. อัครชัย สละชีพ ในคำปรึกษาและให้การช่วยเหลือในด้านต่างๆ และคอยให้กำลังใจเสมอมา ในช่วงที่ข้าพเจ้าทำงานในกองทัพอากาศไทย

ขอขอบคุณเพื่อนๆ พี่ๆ น้องๆ ในภาควิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ทุกคนที่ให้คำแนะนำและช่วยเหลือในด้านต่างๆ

ขอขอบคุณน้องๆ ในภาควิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ทุกคนที่ให้คำแนะนำและช่วยเหลือในหลายด้าน รวมถึงคำปรึกษาเชิงวิชาการ

ขอขอบคุณบัณฑิตศึกษาและบัณฑิตวิทยาลัย คณะวิศวกรรมศาสตร์ที่ให้ความช่วยเหลือและให้คำแนะนำในด้านเอกสาร

ขอขอบคุณ นายธีรวัฒน์ ชูคำ (พีเน็ต) และเพื่อนๆศิษย์เก่าที่เรียนโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยรามคำแหงและโรงเรียนอนุบาลพิบูลเวศม์ทุกคน ที่ให้กำลังใจและสร้างสรรค์เสมอมา

สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอกราบขอบพระคุณ บิดาผู้ล่วงลับ มารดา น้องชาย และครอบครัวของข้าพเจ้าที่เป็นกำลังใจ และให้การสนับสนุนในทุกเรื่อง ทำให้ข้าพเจ้าสามารถทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์อันพึงมาจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอบแต่ผู้มีพระคุณทุกท่าน

คุณานนต์ กิตติพิฒิ

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	II
กิตติกรรมประกาศ	III
สารบัญ	IV
สารบัญรูป	VII

บทที่ 1 บทนำ	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ในการทำวิทยานิพนธ์	6
1.3 สมมติฐานของการศึกษา	6
1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย	6
1.5 ขอบเขตการวิจัย	6
1.6 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์	8
บทที่ 2 ทฤษฎีพื้นฐานที่ใช้ในการวิจัย	9
2.1 เกริ่นนำ	9
2.2 การสั่นธรรมชาติ	9
2.3 การสั่นบังคับ	12
2.3.1 ระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา	12
2.3.1.1 เครื่องมือทางคณิตศาสตร์	13
2.3.1.2 การวิเคราะห์ระบบด้วยการแปลงลาปลาซ	14
2.3.1.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ	16
2.3.1.4 การวิเคราะห์ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบและการแปลงฟูเรียร์	19
2.3.2 การสั่นบังคับแบบทั่วไป	22
2.3.3 การสั่นบังคับหลายเวลา	24
2.3.3.1 ระบบเพนดูลัมบังคับ	25

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
2.3.3.2 ระบบสปริงบังคับ	29
2.3.4 ปรากฏการณ์การสั้นพ้อง	32
2.4 การสั้นตนเอง	35
2.4.1 วงจรกำเนิดสัญญาณที่ควบคุมความถี่ด้วยแรงดันไฟฟ้า	41
2.4.2 สัญญาณรบกวนในวงจรกำเนิดสัญญาณ	43
2.4.2.1 สัญญาณรบกวนจากแหล่งภายนอก	44
2.4.2.2 สัญญาณรบกวนจากแหล่งภายใน	45
2.4.2.3 สัญญาณรบกวนแบบการบวม	47
2.4.2.4 สัญญาณรบกวนแบบการคูณ	47
2.4.2.5 สัญญาณรบกวนระหว่างสัญลักษณ์	48
2.4.2.6 ผลกระทบของสัญญาณรบกวนภายในวงจรกำเนิดสัญญาณ	48
2.4.2.7 ความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัมของสัญญาณรบกวน	52
2.4.3 ปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอค	54
2.5 ระบบการสั้นทางไฟฟ้าด้วยมุมมองการสั้นบังคับ	59
2.5.1 การควบคุมขนาดของสัญญาณด้วยสัญญาณอินพุตไฟตรง	59
2.5.1.1 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์	59
2.5.1.2 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟส	61
2.5.1.3 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที	63
2.5.2 การมอดูเลตทางขนาดด้วยสัญญาณอินพุตที่แปรเปลี่ยนตามเวลา	65
2.6 ระบบเรดาร์และการตรวจจับแบบไฮโมไดน์	68
2.6.1 การพัฒนาและหลักการเรดาร์เบื้องต้น	68
2.6.2 ปรากฏการณ์ดอปเลอร์	64
2.6.3 การตรวจจับแบบไฮโมไดน์	71
2.7 สรุป	72
บทที่ 3 การอธิบายปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณ ด้วยโมเดลการสั้นบังคับหลายเวลาและการประยุกต์ใช้	74

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.1 เกริ่นนำ	74
3.2 ปราบกฏการณ์ไฮโมไดน์	74
3.2.1 เรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์	79
3.2.2 การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟส	85
3.3 การควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการสั่นบังคับ	89
บทที่ 4 ผลการทดลอง	96
4.1 เกริ่นนำ	96
4.2 ปราบกฏการณ์ไฮโมไดน์ในเรดาร์ระยะสั้น	96
4.3 การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟส	102
4.4 การควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็ม	104
4.5 สรุป	108
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ	109
5.1 สรุปผลการวิจัย	109
5.2 ข้อเสนอแนะ	110
เอกสารอ้างอิง	112

## สารบัญญรูป

รูปที่		หน้า
2.1	ระบบการสันถรรพชาติ (ก) ระบบแพนดูลัม (ข) ระบบสปริง	10
2.2	ตัวอย่างการแสดงค่าโพลและค่าซีโรในระนาบเชิงซ้อน	15
2.3	บริเวณค่าโพลในระนาบเชิงซ้อนของระบบที่มีเสถียรภาพ	18
2.4	การแสดงค่าซีโรในรูปแบบเวกเตอร์ลัพธ์	20
2.5	ระบบเพนดูลัมบังคับ	21
2.6	การทดลองจริงของระบบเพนดูลัมบังคับ	28
2.7	ผลตอบสนองสมบูรณที่ได้จากการทดลองของระบบเพนดูลัมบังคับ	28
2.8	ระบบสปริงบังคับ	29
2.9	การทดลองจริงของระบบสปริงบังคับ	30
2.10	ผลตอบสนองสมบูรณที่ได้จากการทดลองของระบบสปริงบังคับ	31
2.11	วงจรถูกสันตนเองตัวอย่าง	36
2.12	แผนภาพระบบการป้อนกลับ	38
2.13	แผนภาพระบบการป้อนกลับเทียบกับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ	39
2.14	วงจรถูกกำเนิดสัญญาณตามโมเดลของ Adler	54
2.15	โมเดลการป้อนกลับสำหรับปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคของ Paciorek	55
2.16	วงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์	60
2.17	ผลการทดลองเมื่อป้อนอินพุตสัญญาณไฟตรงให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์	61
2.18	วงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเล็อน-เฟส	62
2.19	ผลการทดลองเมื่อป้อนอินพุตสัญญาณไฟตรงให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเล็อน-เฟส	63
2.20	วงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที	64
2.21	ผลการทดลองเมื่อป้อนอินพุตสัญญาณสี่เหลี่ยมให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที	65
2.22	วงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์	66
2.23	ผลการทดลองของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์ที่ถูกป้อนอินพุตแบบ ไซน์ซวยดอล	67
2.24	ตัวอย่างปรากฏการณ์ดอปเลอร์	70
3.1	องค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากมิกเซอร์ในโดเมนความถี่	75

## VII

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.2	องค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ด้วย โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา 76
3.3	วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด 80
3.4	วงจรมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด 81
3.5	วงจรมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงลดรูปของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบ โคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด 81
3.6	วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ใช้เจเฟต 86
3.7	วงจรมมูลสัญญาณขนาดเล็กของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ใช้เจเฟต 86
3.8	สัญญาณเอาต์พุตของวงจรกำเนิดสัญญาณที่มีสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในโดเมนความถี่ 89
3.9	โมเดลการบังคับของวงจรกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ 90
3.10	โมเดลสมมูลการบังคับของวงจรกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ 91
3.11	เงื่อนไขการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการสั่นบังคับ 92
3.12	วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว 93
3.13	วงจรมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูก ดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว 93
3.14	วงจรมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงลดรูปของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบ โคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว 94
4.1	สเปกตรัมผลตอบสนองของธรรมชาติของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูก ดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด 96
4.2	สัญญาณเอาต์พุตเมื่อรับสัญญาณเล็นอนตอปเลอร์ที่ขาเบสในย่านความถี่ธรรมชาติ 98
4.3	สัญญาณเอาต์พุตเมื่อรับสัญญาณเล็นอนตอปเลอร์ที่ขาเบสในย่านความถี่ต่ำ 98
4.4	เอาต์พุตที่ได้จากวงจรมเมื่อรับสัญญาณเล็นอนตอปเลอร์ที่ขาอิมิตเตอร์ใน ย่านความถี่ธรรมชาติ 99
4.5	เอาต์พุตที่ได้จากวงจรมเมื่อรับสัญญาณเล็นอนตอปเลอร์ที่ขาอิมิตเตอร์ในย่านความถี่ต่ำ 100
4.6	เอาต์พุตที่ได้จากวงจรมเมื่อป้อนสัญญาณเล็นอนตอปเลอร์ที่ขาคอลเล็กเตอร์ ในย่านความถี่ธรรมชาติ 101

## VIII

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่		หน้า
4.7	เอาต์พุตที่ได้จากวงจรเมื่อป้อนสัญญาณเลียนตอปเลอร์ที่ขาคอลเล็กเตอร์ ในย่านความถี่ต่ำ	101
4.8	สัญญาณอินพุต (บน) เทียบกับเอาต์พุต (ล่าง) ในโดเมนเวลา	103
4.9	สเปกตรัมสัญญาณเอาต์พุตที่มีอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์รวมอยู่กับสัญญาณรบกวน	103
4.10	สัญญาณอินพุตในรูปแบบสัญญาณรบกวน (บน) สเปกตรัมสัญญาณเอาต์พุตที่มี อินพุตเป็นสัญญาณรบกวน (ล่าง)	104
4.11	สเปกตรัมผลตอบสนองของธรรมชาติที่มีฮาร์มอนิกจำนวนเท่าของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ แบบโคลทิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว	105
4.12	สัญญาณอินพุตแบบเอฟเอ็มที่ความถี่คลื่นพาห์ตรงกับความถี่ธรรมชาติมูลฐาน	105
4.13	สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องในย่านความถี่ธรรมชาติมูลฐาน	106
4.14	สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องในย่านฮาร์มอนิกที่สอง	106
4.15	สัญญาณอินพุตแบบเอฟเอ็มที่ความถี่คลื่นพาห์ตรงกับฮาร์มอนิกที่สอง	107
4.16	สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกใน ย่านความถี่ฮาร์มอนิกที่สอง	107
4.17	สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกใน ย่านความถี่ธรรมชาติมูลฐาน	108

# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โดยทั่วไปในธรรมชาติ ลักษณะของคลื่นการสั่นหรือการเคลื่อนที่ที่เป็นคาบนั้นมีหลากหลายรูปแบบ ดังเช่นการเคลื่อนที่ของดวงดาว การแกว่งของเพนดูลัม การยืดหดของของสปริง การผลิตคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในย่านความถี่ไมโครเวฟหรือแม้กระทั่งในย่านความถี่แสง ซึ่งการอธิบายพฤติกรรมของระบบเหล่านี้สามารถแบ่งแยกตามลักษณะของแรงพื้นฐานทางฟิสิกส์ เช่นการเคลื่อนที่ของดวงดาว การแกว่งของเพนดูลัม และการยืดหดของของสปริงอยู่บนพื้นฐานของแรงโน้มถ่วง ในขณะที่การผลิตคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่บนพื้นฐานของแรงแม่เหล็กไฟฟ้า แต่อย่างไรก็ตามโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่นำมาอธิบายพฤติกรรมระบบนั้น มีรูปแบบที่เหมือนกันนั่นคืออยู่ในรูปแบบสมการอนุพันธ์ จึงทำให้การวิเคราะห์ลักษณะของคลื่นการสั่นหรือการเคลื่อนที่ที่เป็นคาบถูกมองรวมเป็นระบบการสั่น และเนื่องจากระบบการสั่นในธรรมชาติทั่วไปนั้น ไม่ได้อยู่ในรูปแบบของระบบที่ถูกแยกออกเป็นอิสระ ไม่มีอันตรกิริยากับแรงหรือปัจจัยภายนอก ดังนั้นการศึกษาปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเมื่อระบบการสั่นมีอันตรกิริยากับแรงหรือปัจจัยภายนอกนั้นจึงเป็นสิ่งสำคัญ โดยผู้ที่ได้เริ่มสังเกตถึงอันตรกิริยาระหว่างระบบการสั่นเป็นคนแรกคือนักวิทยาศาสตร์ชาวดัตช์ Christiaan Huygens [43] ในปี ค.ศ. 1665 ซึ่งเขาได้สังเกตจากการแกว่งของนาฬิกาเพนดูลัมสองเรือนที่เป็นอิสระจากกัน เมื่อนำนาฬิกาเพนดูลัมที่แกว่งด้วยความถี่ที่ใกล้เคียงกันทั้งสองเรือนมาแขวนอยู่บนผนังเดียวกันแล้ว นาฬิกาเพนดูลัมทั้งสองจะแกว่งด้วยเฟสที่ตรงกัน โดย Christiaan Huygens ได้อธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนี้คือปรากฏการณ์ซิงโครไนซ์หรือปรากฏการณ์การสั่นพ้อง อย่างไรก็ตามในยุคสมัยของ Christiaan Huygens ยังไม่มีการอธิบายในเชิงคณิตศาสตร์ เนื่องจากวิชาแคลคูลัสยังไม่ได้ถูกสร้างขึ้น ในเวลาต่อมาในปี ค.ศ. 1697 หลังจากวิชาแคลคูลัสได้ถูกสร้างขึ้นโดยนักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ Isaac Newton [44] จึงมีการอธิบายปรากฏการณ์การสั่นพ้องด้วยสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นที่เป็นรากฐานของมุมมองระบบการสั่นบังคับขึ้น แต่อย่างไรก็ตามวิธีการวิเคราะห์ด้วยสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้นนี้ยังคงไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์การสั่นพ้องได้ครอบคลุม (รายละเอียดในบทที่ 2 หัวข้อที่ 2.3.4) ในเวลาต่อมาในปี ค.ศ. 1748 นักฟิสิกส์ชาวสวิส Leonhard Euler [45] ได้พยายามพัฒนาวิชาแคลคูลัสให้อยู่ในรูปแบบสมการอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้น เพื่ออธิบายวงโคจรการเคลื่อนที่ของดวงดาวที่มีการรบกวนซึ่งกันและกันระหว่างดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ หลังจากนั้นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส Louis Lagrange [45] ได้พัฒนาแนวคิดนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นในระหว่าง ค.ศ. 1778 ถึง 1783 สำหรับอธิบายวงโคจรของดวงดาวที่ถูกรบกวนด้วยดาวหาง และในปี ค.ศ. 1808 ถึง 1810

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สมการอนุพันธ์แบบไม่เป็นเชิงเส้นแบบสมบูรณ์อันเป็นรากฐานสำคัญของทฤษฎีการรบกวนได้ถูกพัฒนาขึ้นสำเร็จ (รายละเอียดในภาคผนวก ข.) จึงทำให้มุมมองที่ใช้อธิบายอันตรกิริยาระหว่างระบบการสั่นกับแรงหรือปัจจัยภายนอกถูกแบ่งออกเป็นสองมุมมองได้แก่มุมมองการบังคับระบบ และมุมมองการรบกวนระบบ ซึ่งความหมายทางฟิสิกส์ของการบังคับระบบคือการที่เอาต์พุตถูกแปลงจากสัญญาณอินพุตด้วยระบบ โดยที่พารามิเตอร์ของระบบไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ในขณะที่การรบกวนระบบหมายถึงการที่อินพุตเข้าไปเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ของระบบ ดังนั้นเอาต์พุตที่ได้จะเกิดจากการที่ระบบได้สร้างสัญญาณขึ้นมาใหม่ด้วยการเปลี่ยนแปลงของพารามิเตอร์ในระบบ

หลังจากนั้นการศึกษาที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ชิงโครโนสหรือปรากฏการณ์การสั่นพ้องก็ได้รับความสนใจอย่างต่อเนื่องในระบบการสั่นหลายรูปแบบ เช่นในปี ค.ศ. 1898 นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ Oliver Lodge [46] ค้นพบว่าวงจรไฟฟ้าก็สามารถเกิดปรากฏการณ์ชิงโครโนสได้ นอกเหนือจากนี้เขายังพบว่าหากป้อนสัญญาณอินพุตให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ ที่ความถี่อินพุตเข้าใกล้ค่าสองเท่าของความถี่ธรรมชาติของวงจรกำเนิดสัญญาณ ก็สามารถเกิดปรากฏการณ์ชิงโครโนสได้เช่นกัน และเขาได้เรียกปรากฏการณ์นี้ว่าปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติก ซึ่งในปี ค.ศ. 1918 วิศวกรชาวอเมริกัน Edwin Armstrong [47] หลังจากที่เขาคิดค้นเครื่องรับส่งสัญญาณแบบเฮเทอโรไดน์ที่เป็นเทคนิคการย้ายย่านความถี่หลายครั้ง ต่อมาเขาได้ลองป้อนสัญญาณที่ถูกมอดูเลตทางขนาดให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบหลอดสูญญากาศ ที่มีเงื่อนไขคือให้ความถี่คลื่นพาห้มีความแตกต่างจากความถี่ธรรมชาติของวงจรเพียงเล็กน้อย เขาพบว่าวงจรกำเนิดสัญญาณสามารถการติมอดูเลตได้ เขาได้เรียกวิธีการติมอดูเลตแบบนี้ว่า ออโตเมติกเฮเทอโรไดน์ ที่เรียกโดยย่อว่าออโตไดน์ ซึ่งความแตกต่างระหว่างเทคนิคเฮเทอโรไดน์กับออโตไดน์คือเทคนิคออโตไดน์ใช้เพียงวงจรกำเนิดสัญญาณเพียงวงจรเดียวเท่านั้น แต่เทคนิคเฮเทอโรไดน์ต้องอาศัยวงจรคูณแยกออกมาจากด้วย หลังจากนั้นในปี ค.ศ. 1924 นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ Francis Colebrook [48] ก็ได้นำเสนอวิธีการที่มีความคล้ายคลึงกับออโตไดน์ขึ้นมาใหม่ ซึ่งเขาเสนอว่าเมื่อความถี่คลื่นพาห้ชิงโครโนสกับความถี่ธรรมชาติของวงจรกำเนิดสัญญาณ จะทำให้สามารถติมอดูเลตทางขนาดด้วยการใช้วงจรกำเนิดสัญญาณเพียงวงจรเดียวได้ และเรียกเทคนิคนี้ว่าโฮโมไดน์ อย่างไรก็ตามโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายทั้งเทคนิคออโตไดน์และโฮโมไดน์ของ Edwin Armstrong และ Francis Colebrook ยังไม่ได้รับการพัฒนาขึ้นมา จึงทำให้เวลาต่อมาในปี ค.ศ. 1934 นักฟิสิกส์ชาวดัตช์ Balthasar van der Pol [39] ได้นำแนวคิดสมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นมาอธิบายปรากฏการณ์ชิงโครโนสในวงจรกำเนิดสัญญาณที่สร้างจากไดโอด และได้จัดตั้งทฤษฎีพื้นฐานของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบไม่เป็นเชิงเส้นขึ้น (รายละเอียดในภาคผนวก ก. หัวข้อที่ ก.5) โดยต่อมาเขาได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นกับนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย Aleksandr Andronov [49] เพื่อพัฒนาทฤษฎีวงจรกำเนิดสัญญาณแบบไม่เป็นเชิงเส้น โดย Balthasar van der Pol ได้พัฒนาสมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นในแนวทางของทฤษฎีโกลาหล แต่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Aleksandr Andronov ได้พัฒนาทฤษฎีวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบไม่เป็นเชิงเส้นต่อ และนิยามให้วงจรถูกกำเนิดสัญญาณเป็นระบบการสั่นตนเองในปี ค.ศ. 1937 [12] ที่มีนิยามแตกต่างจากมุมมองระบบการสั่นบังคับของ Isaac Newton โดยจุดที่แตกต่างอย่างเด่นชัดคือค่าขนาดของสัญญาณเอาต์พุตที่ถูกผลิตออกมาจากวงจรต้องไม่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ซึ่งนิยามที่แตกต่างนี้ทำให้ความหมายทางฟิสิกส์ของระบบการสั่นบังคับและระบบการสั่นตนเองมีความแตกต่างกัน นั่นคือในระบบการสั่นบังคับ ระบบจะทำการแปลงสัญญาณอินพุตให้กลายเป็นเอาต์พุต โดยที่ขนาดของเอาต์พุตขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขขอบเขตหรือเงื่อนไขเริ่มต้น ในขณะที่เอาต์พุตที่ได้จากระบบการสั่นตนเองนั้น เกิดจากการที่ระบบผลิตสัญญาณเอาต์พุตขึ้นมาใหม่อันเนื่องมาจากผลของการรบกวนระบบ จึงทำให้ขนาดของเอาต์พุตไม่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น แต่ขึ้นอยู่กับความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบ จากรากฐานระบบการสั่นตนเองที่ Aleksandr Andronov ได้วางไว้ จึงทำให้นักฟิสิกส์ชาวอเมริกัน Robert Adler [18] ได้พัฒนาทฤษฎีปรากฏการณ์ซิงโครไนซ์ในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในปี ค.ศ. 1946 โดย Robert Adler ได้นิยามปรากฏการณ์ซิงโครไนซ์ในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณขึ้นใหม่ว่าเป็นปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอค อย่างไรก็ตามปรากฏการณ์ซิงโครไนซ์ในชื่อของปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคยังคงไม่ได้รับความนิยม สังเกตได้จากในปีถัดมา ค.ศ. 1947 วิศวกรชาวอังกฤษ David Tucker [50] ได้นำเสนอการใช้ประโยชน์จากการซิงโครไนซ์สำหรับการตีความดูเลตทางขนาดด้วยวงจรถูกกำเนิดสัญญาณร่วมกับกระบวนการซิงโครไนซ์ที่แยกออกมาเป็นอิสระ และเรียกวิธีการนี้ว่าเทคนิคซิงโครไดน์ โดยเทคนิคซิงโครไดน์นี้ มีความคล้ายคลึงกับเทคนิคโฮโมไดน์ แตกต่างกันที่มีการแยกกระบวนการซิงโครไนซ์ออกมาเป็นอิสระ ในเวลาต่อมาปี ค.ศ. 1965 ปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคได้ถูกนำมาพิจารณาใหม่อีกครั้งโดยวิศวกรชาวอเมริกัน Larry Paciorek [19] ได้อธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคให้สมบูรณ์มากขึ้น ซึ่งเขาได้เชื่อมโยงแนวคิดของ Robert Adler เข้ากับแนวคิดการอธิบายวงจรถูกกำเนิดสัญญาณด้วยแผนภาพการป้อนกลับของนักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน Heinrich Barkhausen [51] ที่ได้นำเสนอไว้ในปี ค.ศ. 1921 ซึ่งในปี ค.ศ. 1973 วิศวกรชาวญี่ปุ่น Kaneyuki Kurokawa [41] ได้นำแนวคิดของ Larry Paciorek ไปประยุกต์ใช้อธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณย่านความถี่ไมโครเวฟ อย่างไรก็ตามแนวคิดที่ Robert Adler ได้วางรากฐานไว้นี้เป็นแนวคิดที่อธิบายกรณีที่มีความถี่ของสัญญาณอินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติที่วงจรถูกกำเนิดสัญญาณผลิตออกมา จนเกิดปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคเท่านั้น ดังนั้นจึงมีการขยายผลแนวคิดของ Robert Adler ออกมาเพื่ออธิบายผลของการป้อนอินพุตให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณออกมาอีกสองรูปแบบ ได้แก่ปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชั่นลอค [21-23] และมิกเซอร์แบบสั่นตนเอง [42] โดยปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชั่นลอคเป็นปรากฏการณ์ที่เทียบเคียงได้กับปรากฏการณ์สั่นพ้องแบบซิมพาเทติกที่ Oliver Lodge ค้นพบและโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนาจากแนวคิดของ Robert Adler และ Larry Paciorek เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชั่นลอคมีอยู่หลายรูปแบบ [21-23] ขึ้นอยู่กับโครงสร้างของวงจร

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับมิกเซอร์แบบสั่นตนเองนั้น เป็นปรากฏการณ์ที่ก่อให้เกิดการคูณกันระหว่างสัญญาณอินพุตที่ป้อนเข้ามากับสัญญาณที่ความถี่ธรรมชาติของวงจร หรือกล่าวได้ว่ามิกเซอร์แบบสั่นตนเองคือวงจรถัดที่ประพจน์ตัวเป็นวงจรถัดกำเนิดสัญญาณและวงจรถัดในเวลาเดียวกันนั่นเอง ซึ่งเป็นปรากฏการณ์ที่เทียบเคียงได้กับโฮโมไดน์และซิงโครไดน์ที่ยังไม่มีโมเดลทางคณิตศาสตร์อธิบายไว้อย่างชัดเจนในอดีตสำหรับโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้อธิบายมิกเซอร์แบบสั่นตนเองก็มีความหลากหลาย และอยู่บนพื้นฐานตามแนวคิดของ Robert Adler และ Larry Paciorek เช่นเดียวกัน อย่างไรก็ตามยังมีการอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในกรณีที่มีความถี่อินพุตที่ป้อนให้กับวงจรถัดกำเนิดสัญญาณไม่ซิงโครไนซ์กับความถี่ธรรมชาติของวงจรถัดไม่อยู่บนพื้นฐานตามแนวคิดของ Robert Adler และ Larry Paciorek อยู่อีกแนวทางหนึ่ง ซึ่งแนวทางดังกล่าวถูกพัฒนาในปี ค.ศ. 1973 โดยวิศวกรชาวรัสเซีย Sergey Smolskiy [52] ซึ่งเขาได้พัฒนาทฤษฎีวงจรถัดกำเนิดสัญญาณแบบไม่เป็นเชิงเส้นของ Balthasar van der Pol ให้อยู่ในรูปแบบสมการอนุพันธ์เชิงสัญลักษณ์แบบย่อ [52] ซึ่งการอธิบายด้วยวิธีนี้มีองค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากวงจรถัดกำเนิดสัญญาณแตกต่างจากมิกเซอร์แบบสั่นตนเอง (รายละเอียดในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.2.1) โดย Sergey Smolskiy ได้นิยามวงจรถัดกำเนิดสัญญาณที่มีปรากฏการณ์แตกต่างจากมิกเซอร์แบบสั่นตนเองนี้ว่าเป็นวงจรถัดโฮโมไดน์

จากข้างต้นสังเกตได้ว่าโมเดลคณิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นที่ใช้อธิบายวงจรถัดกำเนิดสัญญาณในกรณีที่มีการป้อนอินพุตให้กับวงจรถัดนั้น มีความหลากหลายขึ้นอยู่กับสถานการณ์ อีกทั้งภายใต้สถานการณ์เดียวกันก็ยังมีอธิบายที่หลากหลายเช่นในกรณีของมิกเซอร์แบบสั่นตนเองกับวงจรถัดโฮโมไดน์ ด้วยเหตุนี้เองจึงก่อให้เกิดความสับสนสำหรับผู้เริ่มต้นการศึกษาพฤติกรรมของอันตรกิริยาระหว่างอินพุตกับวงจรถัดกำเนิดสัญญาณ นอกจากนี้ยังไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเหมือนกันภายใต้กรอบของโมเดลทางคณิตศาสตร์เดียวกันได้อย่างครอบคลุม แม้ว่าข้อเด่นของการวิเคราะห์ความไม่เป็นเชิงเส้นในวงจรถัดกำเนิดสัญญาณจะสามารถอธิบายพฤติกรรมเชิงลึกของระบบได้ แต่ไม่สามารถทำนายเอาต์พุตของวงจรถัดกำเนิดสัญญาณที่มีอันตรกิริยากับอินพุตได้ เนื่องจากโมเดลทางคณิตศาสตร์แบบไม่เป็นเชิงเส้นเป็นการอธิบายผลที่เกิดขึ้นในรูปแบบการประมาณค่า

อย่างไรก็ตามในปี ค.ศ. 2005 แนวคิดระบบการสั่นบังคับได้ถูกนำมาตรวจสอบและพัฒนาขึ้นมาใหม่อีกครั้งโดย Thongchai Maneechukate และคณะ [3] โดยจุดที่ยังคงรูปแบบของการสั่นบังคับแบบเดิมไว้นั้นคือสัญญาณเอาต์พุตของระบบการสั่นบังคับต้องประกอบไปด้วยผลตอบสนองธรรมชาติรวมอยู่กับผลตอบสนองบังคับ และปรัชญาที่พวกเขาได้นำเสนอเพิ่มเติมเข้ามาคือค่าขนาดของผลตอบสนองบังคับส่งผลกระทบต่อขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติผ่านค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในเวลาใดๆ ไม่ใช่แค่เวลาเริ่มต้นตามที่ Isaac Newton [44] ได้เสนอไว้เท่านั้น และเรียกโมเดลทางคณิตศาสตร์นี้ว่าโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา โดยผลลัพธ์ของโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลามีจุดที่น่าสนใจและแตกต่างจากแนวคิดการสั่นบังคับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แบบเดิม นั่นคือการก่อให้เกิดผลคูณกันระหว่างผลตอบสนองธรรมชาติกับผลตอบสนองบังคับในเวลาใดๆ และจากจุดนี้เองทำให้ Thongchai Maneechukate และคณะ ได้นำการวิเคราะห์ห้วงจรกำเนิดสัญญาณที่มีการป้อนอินพุตบังคับด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ไปประยุกต์ใช้สำหรับมอดูเลตทางขนาดด้วย วงจรกำเนิดสัญญาณเพียงวงจรวางจรเดียวในปีถัดมา [6] ต่อมาในปี ค.ศ. 2008 Thongchai Maneechukate และคณะ ได้นำเสนอหลักฐานที่ชัดเจนมากขึ้นถึงผลของค่าเงื่อนไขเริ่มต้นที่มีต่อขนาดของสัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณ [4] จุดที่น่าสนใจของทั้งสามบทความ [3] [4] [6] ของ Thongchai Maneechukate และคณะคือพวกเขาได้ใช้การวิเคราะห์ห้วงจรกำเนิดสัญญาณที่มีการป้อนอินพุตบังคับด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาสำหรับวิเคราะห์ห้วงจรกำเนิดสัญญาณที่มีโครงสร้างแตกต่างกันหลายรูปแบบ ได้แก่ วงจรกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์ วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวกนบริดจ์ วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟส และวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที โดยที่ผลการวิเคราะห์และผลการทดลองจริงที่ได้จากทุกวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณที่กล่าวมานั้น มีทิศทางไปในแนวเดียวกัน นอกเหนือจากนี้ในปี ค.ศ. 2012 Kriangsak Prompak และคณะ [1-2] ได้นำโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาไปวิเคราะห์ระบบการสั่นบังคับเชิงกล ทั้งในรูปแบบระบบสปริงบังคับ [2] และระบบเพนดูลัมบังคับ [1] ซึ่งผลการทดลองที่ได้แสดงถึงการมีอยู่ของการคูณกันระหว่างผลตอบสนองธรรมชาติกับผลตอบสนองบังคับในเวลาใดๆ ที่เป็นตามทำนองเดียวกันกับวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณที่มีการป้อนอินพุตบังคับ

จากข้างต้น ในวิทยานิพนธ์นี้จึงนำเสนอการใช้โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาเพื่ออธิบายปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ ที่มีพฤติกรรมคูณกันของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณการสั่นที่เกิดขึ้นโดยตัวระบบเอง ซึ่งโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาสามารถทำนายและอธิบายขนาดขององค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณเอาต์พุต ในกรณีที่มีอินพุตป้อนให้กับวงจรได้ตรงกว่ามุมมองการรบกวนระบบ (รายละเอียดในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.2.1 และ 3.2.2) อีกทั้งสามารถอธิบายปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นเหมือนกันสำหรับทุกระบบการสั่นภายใต้กรอบของโมเดลทางคณิตศาสตร์เดียวกันได้ รวมถึงยังสามารถนำผลการทำนายจากโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาไปประยุกต์ใช้งานในเชิงวิศวกรรมได้ โดยวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้ผลของปรากฏการณ์ไฮโมไดน์โดยตรงสำหรับสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์ที่ยกตัวอย่างด้วยวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ดัดแปลงให้ป้อนอินพุตสามจุด (รายละเอียดในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.2.3) อีกทั้งยังสามารถนำไปอธิบายการเกิดสัญญาณรบกวนเชิงเฟสที่เกิดขึ้นในวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณที่ยกตัวอย่างด้วยวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ใช้เจเฟต (รายละเอียดในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.2.4) นอกเหนือจากนี้ยังอาศัยปรากฏการณ์ไฮโมไดน์เพื่ออธิบายปรากฏการณ์การสั่นพ้องและปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา (รายละเอียดในบทที่ 2 หัวข้อที่ 2.3.4) มาประยุกต์ใช้ร่วมกับแนวคิดความไม่เป็นอุดมคติของวงจรวางจรกำเนิดสัญญาณเพื่อสร้างวิธีการควบคุมแบนด์วิดท์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สัญญาณเอฟเอ็ม (รายละเอียดในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.3) ที่ยกตัวอย่างด้วยวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ดัดแปลงให้ป้อนอินพุตจุดเดียว

## 1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

จากปัญหาในข้างต้น จึงทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้มุ่งเน้นการแยกแยะความแตกต่างของการนิยามระบบการสั่น และนำเสนอวิธีการที่นำไปสู่การอธิบายปรากฏการณ์ไฮโมโดรน์ที่เกิดขึ้นจากการป้อนอินพุตให้กับระบบการสั่นทั้งในระบบการสั่นเชิงกลและการสั่นทางไฟฟ้า ให้อยู่ภายใต้โมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบเดียวกัน นอกเหนือจากนี้ยังต้องสามารถนำโมเดลดังกล่าวไปประยุกต์ใช้งานในเชิงวิศวกรรมได้อีกด้วย

## 1.3 สมมุติฐานของการศึกษา

การที่ปรากฏการณ์ไฮโมโดรน์เกิดขึ้นทั้งในระบบการสั่นเชิงกลและระบบการสั่นทางไฟฟ้านั้น เป็นการสื่อว่าต้องมีโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่นำไปสู่การวิเคราะห์อันตรกิริยาระหว่างอินพุตกับระบบภายใต้กรอบเดียวกัน อีกทั้งโมเดลดังกล่าวนี้ต้องสามารถนำไปประยุกต์ใช้งานต่อได้จริง

## 1.4 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย

จากการศึกษาในขั้นต้น โมเดลทางคณิตศาสตร์ที่ได้มีการใช้สำหรับวิเคราะห์ระบบการสั่นเชิงกลและระบบการสั่นทางไฟฟ้าได้อย่างสอดคล้องกับผลการทดลองจริงนั้นคือโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา [1-8] โดยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลานั้นมีแนวคิดพื้นฐานและเทคนิคคณิตศาสตร์มาจากการนิยามให้เป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่อยู่ในทฤษฎีสัญญาณและระบบ [9-11] ดังนั้นหากมองวงจรถูกกำเนิดสัญญาณเป็นระบบประเภทหนึ่งไม่ว่าโครงสร้างของวงจรถูกอยู่ในรูปแบบใดก็ตาม จึงสามารถนำโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลามาประยุกต์ใช้ได้สำหรับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณทุกรูปแบบโครงสร้าง นอกเหนือจากนี้ยังสามารถนำโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาไปประยุกต์ใช้ได้อย่างหลากหลายเช่นการสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์ การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ และการควบคุมแบนด์วิดท์ของสัญญาณเอฟเอ็มได้

## 1.5 ขอบเขตการวิจัย

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ใช้ปรากฏการณ์ไฮโมโดรน์ที่อธิบายด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา มาประยุกต์ใช้งานในสามรูปแบบ ได้แก่การสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์ การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ และการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็ม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์ ได้ใช้วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ดัดแปลงให้ป้อนอินพุตได้สามจุดให้กับวงจร ซึ่งวงจรได้ผลิตสัญญาณคลื่นรูปไซน์ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิร์ตซ์ โดยการป้อนอินพุตทั้งสามจุดให้กับวงจร ได้ป้อนให้กับขาอิมิตเตอร์ ขาคอลเล็กเตอร์ และขาเบสของทรานซิสเตอร์ตามลำดับ สำหรับสถานการณ์ที่จำลองนั้น ได้จำลองสถานการณ์ให้เรดาร์ระยะสั้นติดอยู่บนปลายหัวรบที่จุดระเบิดแบบพรีอกซิมีตี โดยกำหนดให้หัวรบนี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสัมพัทธ์ 3 มัคกับวัตถุเป้าหมาย จึงทำให้สัญญาณสะท้อนจากวัตถุที่เป็นสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ มีความถี่เลื่อนไปจากความถี่ธรรมชาติที่ 20.34 กิโลเฮิร์ตซ์ โดยวัตถุเป้าหมายเป็นโลหะรูปสี่เหลี่ยม มีพื้นที่หน้าตัดขนาดประมาณ 0.328 ตารางเมตร ซึ่งวัตถุเป้าหมายนี้อยู่ห่างจากหัวรบอยู่ 5 เมตร ที่คำนวณค่าสูญเสียในที่ว่างได้เท่ากับ -61.29 เดซิเบล ทำให้สามารถออกแบบการทดลองที่สมมูลกับสถานการณ์ที่จำลองได้ โดยสร้างสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ด้วยเครื่องกำเนิดสัญญาณ แพร่ ออกอากาศด้วยสายอากาศแบบโมนโพลอรัลขยายที่ -5.19 เดซิเบลซี ไปยังวงจรกำเนิดสัญญาณ ที่รับสัญญาณด้วยการต่อสายอากาศแบบเดียวกันเข้ากับจุดป้อนอินพุตที่ต้องการพิจารณาที่ละหนึ่งจุด โดยสองจุดที่เหลือต่อเข้ากับโหลดเทียม เช่นหากต้องการพิจารณาการป้อนอินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ ให้ทำการต่อสายอากาศเข้ากับจุดป้อนอินพุตขาอิมิตเตอร์ และต่อโหลดเทียมเข้ากับจุดป้อนอินพุตขาเบส และคอลเล็กเตอร์ตามลำดับ โดยวัตถุเป้าหมายที่ได้จากวงจรกำเนิดสัญญาณจากการต่อขาเอาต์พุตของวงจรเข้ากับเครื่องสเปกตรัมอนาลิซเซอร์

สำหรับการอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรกำเนิดสัญญาณ ได้ยกตัวอย่างด้วยการจำลองวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ใช้เจเพตด้วยโปรแกรม PSPICE โดยวงจรได้กำเนิดสัญญาณคลื่นรูปไซน์ที่ความถี่ 3.15 เมกะเฮิร์ตซ์ และตั้งสมมุติฐานว่าสัญญาณรบกวนเป็นสัญญาณอินพุตบังคับที่ป้อนให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ ซึ่งพิสูจน์สมมุติฐานด้วยการป้อนอินพุตสองรูปแบบให้กับวงจรผ่านขาเกตของเจเพต อินพุตรูปแบบแรกได้จากการรวมกันของสัญญาณคลื่นรูปไซน์ที่มีขนาด 0.5 โวลต์ ความถี่ 100 กิโลเฮิร์ตซ์ เข้ากับสัญญาณรบกวนที่สร้างจากแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวนในโปรแกรม PSPICE และอินพุตรูปแบบที่สองเป็นสัญญาณรบกวนที่สร้างจากแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวนเพียงอย่างเดียว โดยตรวจวัดสัญญาณเอาต์พุตที่ขาซอร์สของวงจร ทั้งในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่

สำหรับการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็ม เป็นการป้อนสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณเอฟเอ็มให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ โดยยกตัวอย่างด้วยวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้ป้อนอินพุตตรงขาอิมิตเตอร์ของทรานซิสเตอร์ได้จุดเดียว และวัดเอาต์พุตด้วยเครื่องสเปกตรัมอนาลิซเซอร์ ซึ่งวงจรกำเนิดสัญญาณผลิตความถี่ธรรมชาติที่ความถี่ฮาร์โมนิคมูลฐาน 588.8 เมกะเฮิร์ตซ์ และความถี่ฮาร์โมนิคอันดับสอง 1.1778 กิกะเฮิร์ตซ์ สามารถแสดงการขยายแบนด์วิดท์ด้วยการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มที่มีแบนด์วิดท์ 850 กิโลเฮิร์ตซ์ และกำหนดความถี่คลื่นพาห์ให้ตรงกับความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์โมนิคมูลฐานของวงจร เพื่อให้เกิดปรากฏการณ์การสั้นพ้องขึ้น สำหรับการย่อแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็ม ทำได้ด้วย

การเปลี่ยนคลื่นพาห์ของสัญญาณอินพุตแบบเอพเอ็มที่มีแบนด์วิดท์ 850 กิโลเฮิร์ตซ์ ให้มีความถี่คลื่นพาห์ ตรงกับความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์มอนิกอันดับสอง เพื่อให้เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกขึ้น

## 1.6 โครงสร้างของวิทยานิพนธ์

ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ประกอบไปด้วยเนื้อหาดังต่อไปนี้

บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมา วัตถุประสงค์ สมมติฐาน ทฤษฎีที่ใช้โดยสรุป ขอบเขต และโครงสร้างของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 กล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง ได้แก่ การสั่นธรรมชาติ การสั่นบังคับ การสั่นตนเอง ระบบการส่งทางไฟฟ้าด้วยมุมมองการสั่นบังคับ และระบบเรดาร์และการตรวจจับแบบโฮโมไดน์ โดยในแต่ละหัวข้อ นั้นได้แสดงรายละเอียดในเชิงการอธิบายร่วมกับคณิตศาสตร์ที่สำคัญเป็นหลัก ในส่วนรายละเอียดทางคณิตศาสตร์และการอธิบายในบางส่วนได้มีการอธิบายอยู่ในภาคผนวก

บทที่ 3 กล่าวถึงการอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ที่สามารถนำปรากฏการณ์โฮโมไดน์ที่เกิดขึ้นไปประยุกต์ใช้สำหรับสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบคอปเลอร์และการอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสได้ นอกเหนือจากนี้ยังสามารถประยุกต์ใช้ปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในการอธิบายปรากฏการณ์การสั่นพ้องและปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติก ร่วมกับความเป็นฮาร์มอนิกของระบบกำเนิดสัญญาณ เพื่อประยุกต์ใช้สำหรับควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอพเอ็มด้วยการสั่นบังคับได้

บทที่ 4 เป็นการแสดงผลการทดลองเพื่อยืนยันหลักการที่ได้นำเสนอในบทที่ 3 ได้แก่ ผลการทดลองจริงของเรดาร์ระยะสั้นแบบคอปเลอร์ ผลการจำลองจากโปรแกรม PSPICE เพื่ออธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟส และผลการทดลองจริงของการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอพเอ็มด้วยการสั่นบังคับ

บทที่ 5 กล่าวถึงบทสรุปและข้อเสนอแนะที่สามารถนำไปวิจัยพัฒนาต่อยอดองค์ความรู้ได้ในอนาคต

## บทที่ 2

### ทฤษฎี

#### 2.1 เกริ่นนำ

ระบบการสั่นนั้นถูกจำแนกตามนิยามของระบบที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งนิยามที่แตกต่างนี้ นำไปสู่การวิเคราะห์ที่แตกต่างกันออกไป ซึ่งสามารถจำแนกออกเป็นสามประเภทใหญ่ [12] ได้แก่ การสั่นธรรมชาติ (Natural oscillation) การสั่นบังคับ (Forced oscillation) และ การสั่นตนเอง (Self-oscillation) และเนื่องจากการนิยามการสั่นทางไฟฟ้าหรือวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นถูกนิยามเป็นการสั่นตนเอง จึงได้แสดงถึงรายละเอียดเกี่ยวกับอีกมุมมองของการสั่นทางไฟฟ้าที่สามารถมองเป็นการสั่นบังคับ แล้วกล่าวถึงการนำวงจรกำเนิดสัญญาณไปประยุกต์ใช้ในเทคโนโลยีการตรวจจับแบบโฮโมไดน์ (Homodyne detection) และกล่าวสรุปรวมในตอนท้าย

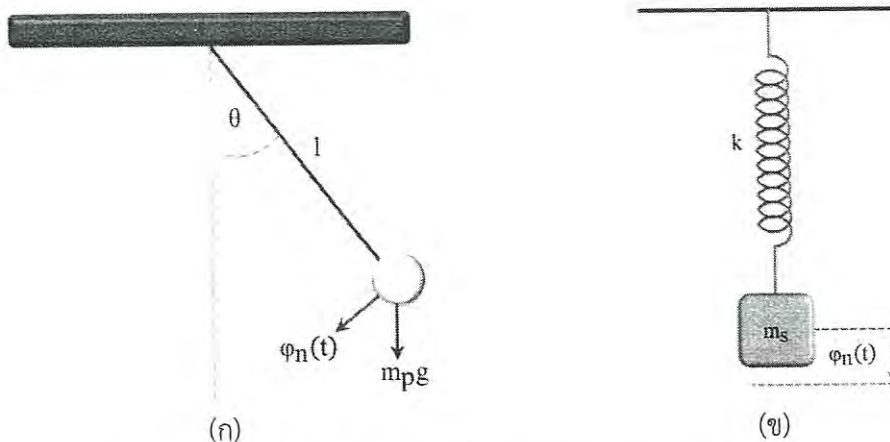
#### 2.2 การสั่นธรรมชาติ

ในการนิยามแล้ว ระบบที่มีพลวัต (Dynamic) แบบการสั่นธรรมชาตินั้นต้องเป็นระบบที่มีพลวัตแบบการสั่นที่เป็นอิสระต่อแหล่งกำเนิดพลังงานภายในระบบ และค่าขนาด (Amplitude) นั้นขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขขอบเขต (Boundary condition) หรือเงื่อนไขเริ่มต้น (Initial condition) เท่านั้น [12] ซึ่งสามารถยกตัวอย่างที่เป็นเชิงกายภาพอย่างชัดเจนได้เช่นระบบเพนดูลัมและระบบสปริงในรูปที่ 2.1 โดยค่าขนาดของระบบเพนดูลัมนั้นขึ้นอยู่กับตำแหน่งเริ่มต้นที่ปล่อยมวล และสำหรับระบบสปริงค่าขนาดนั้นขึ้นอยู่กับระยะหดเริ่มต้น ซึ่งสิ่งเหล่านี้เองเป็นการแสดงอย่างชัดเจนว่าค่าขนาดของระบบการสั่นธรรมชาตินั้นขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบที่พิจารณา

โดยทั่วไปแล้วระบบการสั่นธรรมชาตินั้นสามารถแสดงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ได้ดังสมการที่ (2.1)

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_n(t) + \alpha \frac{d}{dt} \varphi_n(t) + \omega_n^2 \varphi_n(t) = 0 \quad (2.1)$$

โดยที่  $\varphi_n(t)$  คือผลตอบสนองธรรมชาติที่แปรเปลี่ยนตามเวลาของระบบ  $\alpha$  คือสัมประสิทธิ์การลดทอนของระบบ และ  $\omega_n$  คือความถี่ธรรมชาติที่ระบบผลิตออกมาในกรณีที่ไม่มีการลดทอน ซึ่งวิธีการแก้ไขสมการที่ (2.1)



รูปที่ 2.1 ระบบการสั่นธรรมชาติ (ก) ระบบเพนดูลัม (ข) ระบบสปริง

นั้นสามารถทำได้ด้วยวิธีการสมมุติค่าคำตอบ (Undetermined coefficients method) [13] โดยสามารถสมมุติค่าคำตอบเป็นฟังก์ชันไอเกน (Eigen function) ดังสมการที่ (2.2)

$$\varphi_n(t) = e^{mt} \quad (2.2)$$

เมื่อแทนค่าคำตอบในสมการที่ (2.2) ลงในสมการที่ (2.1) จึงได้สมการคุณลักษณะ (Characteristic equation) [13] เป็นไปดังนี้

$$m^2 + \alpha m + \omega_n^2 = 0 \quad (2.3)$$

โดยที่ค่ารากของ  $m$  เป็นไปดังสมการที่ (2.4)

$$m = \frac{-\alpha \pm j\sqrt{4\omega_n^2 - \alpha^2}}{2} \quad (2.4)$$

เมื่อให้ปัจจัยการลดทอน  $\alpha_d = \frac{\alpha}{2}$  และ  $\omega_0 = \frac{\sqrt{4\omega_n^2 - \alpha^2}}{2}$  ค่าคำตอบที่เป็นผลตอบสนองธรรมชาติของระบบจึงแสดงได้ดังนี้

$$\varphi_n(t) = e^{-\alpha_d t} (A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t}) \quad (2.5)$$

จากสมการที่ (2.5) เมื่ออาศัยความสัมพันธ์ของออยเลอร์  $e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$  จะสามารถจัดรูปสมการที่ (2.5) ได้ใหม่เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\varphi_n(t) = e^{-\alpha t} ((A_1 + A_2) \cos(\omega_0 t) + j(A_1 - A_2) \sin(\omega_0 t)) \quad (2.6)$$

สำหรับค่าขนาดของ  $A_1$  และ  $A_2$  นั้นสามารถหาได้จากนิยามเริ่มต้นนั้นคือต้องอาศัยการกำหนดสมการเงื่อนไขขอบเขต โดยทางคณิตศาสตร์แล้วสมการเงื่อนไขขอบเขตนั้นมีสองสมการนั้นคือเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet (Dirichlet boundary condition) และเงื่อนไขขอบเขต Neumann (Neumann boundary condition) [13] ดังเช่นในสมการที่ (2.7) และ (2.8) ตามลำดับ ดังนั้นหากกำหนดให้ค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet มีค่าเป็น  $X_n$  และกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขต Neumann เป็น  $Y_n$  (สังเกตได้ว่าค่าเงื่อนไขขอบเขตนั้นไม่ได้ตั้งให้เป็นจำนวนเชิงซ้อน เนื่องจากไม่สอดคล้องกับสภาพจริงในเชิงปฏิบัติ) และแก้สมการที่ (2.6) ให้ตรงตามเงื่อนไขของสมการที่ (2.7) และ (2.8) จึงได้สมการที่ (2.9) และ (2.10) ตามลำดับ

$$\varphi_n(t) \Big|_{t=0} = X_n \quad (2.7)$$

$$\frac{d\varphi_n(t)}{dt} \Big|_{t=0} = Y_n \quad (2.8)$$

$$A_1 + A_2 = X_n \quad (2.9)$$

$$A_1 - A_2 = j \frac{Y_n}{\omega_0} \quad (2.10)$$

เมื่อแก้สมการที่ (2.9) และ (2.10) จึงได้ว่าค่าขนาดของ  $A_1 = \frac{1}{2} \left( X_n - j \frac{Y_n}{\omega_0} \right)$  และ  $A_2 = \frac{1}{2} \left( X_n + j \frac{Y_n}{\omega_0} \right)$  ดังนั้นคำตอบของสมการของระบบจึงสามารถจัดรูปได้ใหม่เป็น

$$\varphi_n(t) = e^{-\alpha t} \left( X_n \cos(\omega_0 t) + \left( \frac{Y_n}{\omega_0} \right) \sin(\omega_0 t) \right) \quad (2.11)$$

โดยสมการที่ (2.11) นั้นสอดคล้องกับระบบการสั่นธรรมชาติในทางปฏิบัติทั่วไป นั่นคือค่าขนาดของการสั่นต้องลดลงตามเวลา ถ้าเทียบกับระบบเพนดูลัมหรือระบบสปริงนั้นคือการสั่นของระบบเหล่านี้ต้องมีขนาดลดลงจนหยุดนิ่งในที่สุด

### 2.3 การสั่นบังคับ

การนิยามระบบการสั่นบังคับนั้นมีความคล้ายคลึงกับระบบการสั่นธรรมชาติ นั่นคือพลวัตของการสั่นแบบบังคับนั้นต้องเป็นอิสระต่อแหล่งกำเนิดพลังงานภายในระบบเช่นเดียวกัน [12] และค่าเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขนาดของการสั่นยังคงขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขขอบเขตหรือเงื่อนไขเริ่มต้น จุดที่ต่างกันคือระบบการสั่น บังคับนั้นคือการที่มีแรงจากภายนอกเข้ามากระทำกับระบบทั้งหมดด้วย โดยผลตอบสนองสมบูรณ ของระบบนั้นเป็นการทับซ้อน (Superposition) ระหว่างผลตอบสนองธรรมชาติกับผลตอบสนอง บังคับของระบบ ซึ่งมีความคล้ายคลึงกับมุมมองของทฤษฎีสัญญาณและระบบ (Signal and system theory) ซึ่งเป็นมุมมองที่กล่าวไว้ว่าปริมาณทางฟิสิกส์ใด ๆ นั้นเป็นเป็นข้อมูลข่าวสาร (Information) ที่ สามารถแทนค่าอยู่ในรูปแบบของสัญญาณ (Signal) ได้ และสัญญาณนี้สามารถถูกแปลง (Transform) ด้วยระบบ (System) หรือสามารถตีความในอีกนัยหนึ่งว่าแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบเป็นสัญญาณ อินพุต (Input) และอันตรกิริยาใดๆของแรงทางฟิสิกส์ที่กระทำระหว่างแรงภายนอกกับระบบคือ กระบวนการที่ระบบได้แปลงสัญญาณอินพุตให้กลายเป็นสัญญาณเอาต์พุต (Output) และสัญญาณ เอาต์พุตนี้เองคือผลของอันตรกิริยาใดๆของแรงทางฟิสิกส์ที่กระทำระหว่างแรงภายนอกกับระบบ โดย การอธิบายพลวัตของระบบนั้นยังคงอาศัยสมการเชิงอนุพันธ์ ที่เป็นการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง เอาต์พุตและอินพุต อีกทั้งยังเป็นตัวแทนของกฎการเคลื่อนที่ (Law of motion) ของระบบที่พิจารณา เช่น ในระบบเชิงกล (Mechanical system) ได้อาศัย กฎของนิวตัน (Newton's laws) เป็นพื้นฐาน สำหรับวงจรไฟฟ้า (Electrical circuit's) ได้อาศัย กฎของเคอร์ชอฟฟ์ (Kirchhoff's laws) และ กฎ ของส่วนประกอบภายในวงจร (The laws of the circuit's constitutive element) เป็นต้น [11]

การอธิบายพฤติกรรมส่วนใหญ่ของระบบด้วยทฤษฎีสัญญาณและระบบมักตั้งสมมุติฐานให้ ระบบสั่นบังคับเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา (Linear Time Invariant system: LTI system) เพื่อความเข้าใจในวิธีการวิเคราะห์ระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาอย่างสมบูรณ์ จึง กล่าวถึงรายละเอียดในลำดับถัดไป

### 2.3.1 ระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา

แนวคิดหลักของระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลานั้นคือระบบที่ทำการแปลงสัญญาณอินพุต ที่เป็นสัญญาณไซน์ซวยดอล (Sinusoidal signal) ให้กลายเป็นสัญญาณเอาต์พุตที่ยังคงอยู่ในรูปไซน์ ซวยดอลและความถี่เท่าเดิม โดยขนาดและการเลื่อนเฟสของสัญญาณเอาต์พุตที่เกิดขึ้นนั้นขึ้นอยู่กับ ระบบ ซึ่งในบางกรณีอาจไม่มีการเลื่อนเฟสและขนาดเท่าเดิมได้ ซึ่งแนวคิดนี้เป็นแนวคิดที่สามารถ นำไปประยุกต์ใช้ได้กับการวิเคราะห์ระบบในหลากหลายรูปแบบ แม้ว่า การวิเคราะห์ด้วยแนวคิดระบบ เชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลานั้นสอดคล้องอย่างสมบูรณ์กับกายภาพของระบบที่วิเคราะห์เพียงบาง ระบบเท่านั้น แต่อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ด้วยแนวคิดนี้นั้นสอดคล้องเป็นอย่างดีในขอบเขตการ ทำงานของระบบส่วนใหญ่ [9-11]

#### 2.3.1.1 เครื่องมือทางคณิตศาสตร์

นอกเหนือจากนี้แนวคิดระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลานั้นยังง่ายต่อความเข้าใจ สามารถทำนายพฤติกรรมของระบบได้อย่างแม่นยำและสามารถวิเคราะห์ระบบได้อย่างเรียบง่าย เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เนื่องจากสามารถวิเคราะห์สัญญาณและระบบได้ทั้งโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ จึงส่งผลให้เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญในแนวคิดนี้คือการแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform) และการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ดังสมการที่ (2.12) และ (2.13) ตามลำดับ

$$F\{f(t)\}=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \quad (2.12)$$

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \quad (2.13)$$

โดยที่  $f(t)$  คือฟังก์ชันใดๆที่อยู่ในโดเมนเวลา  $F\{\}$  คือตัวดำเนินการแปลงฟูเรียร์ที่มีผลของการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชัน  $f(t)$  อยู่ในโดเมนความถี่  $\omega$  เป็น  $F(\omega)$  สำหรับ  $L\{\}$  คือตัวดำเนินการแปลงลาปลาซ โดยที่  $s=p+j\omega$  เมื่อ  $p$  และ  $j\omega$  คือจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพใดๆตามลำดับ โดยกำหนดให้ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน  $f(t)$  ที่อยู่ในโดเมน  $s$  เป็น  $F(s)$

สำหรับการแปลงกลับฟูเรียร์  $F^{-1}\{\}$  และลาปลาซ  $L^{-1}\{\}$  นั้นสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2.14) และ (2.15) ตามลำดับ

$$F^{-1}\{F(\omega)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (2.14)$$

$$L^{-1}\{F(s)\}=f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma-j\infty}^{\gamma+j\infty} F(s)e^{st}ds \quad (2.15)$$

สังเกตได้ว่าการแปลงลาปลาซนั้นมีความคล้ายคลึงกับการแปลงฟูเรียร์มาก จุดที่แตกต่างคือการแปลงฟูเรียร์นั้นมีเพียงส่วนของจินตภาพ ในขณะที่การแปลงลาปลาซนั้นมีทั้งส่วนจินตภาพกับส่วนจริง และจุดที่แตกต่างกันนี้เองที่ทำให้การใช้งานแตกต่างกัน

สำหรับกรณีของการวิเคราะห์สัญญาณ การแปลงฟูเรียร์ถูกนำไปใช้สำหรับการวิเคราะห์สัญญาณที่ขนาดไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลา แต่ในขณะที่การแปลงลาปลาซถูกนำไปใช้สำหรับการวิเคราะห์สัญญาณที่มีขนาดที่แปรเปลี่ยนตามเวลา ในกรณีของผลตอบสนองของระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่ประกอบไปด้วยผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับนั้น ผลตอบสนองบังคับที่ได้จากการตอบสนองของระบบที่มีต่ออินพุตเป็นผลตอบสนองเชิงขนาดและเฟสที่ไม่ขึ้นอยู่กับเวลาดังนั้นผลตอบสนองธรรมชาติจึงเป็นผลตอบสนองของระบบที่มีโอกาสสำหรับการมีขนาดแปรเปลี่ยนตามเวลาที่มีผลต่อเสถียรภาพ (Stability) ของระบบ จึงส่งผลให้การแปลงลาปลาซเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่วิเคราะห์ผลตอบสนองได้อย่างครอบคลุมมากกว่าการแปลงฟูเรียร์ (แม้ว่าในสภาวะคง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตัว (Steady state) ของระบบการแปลงลาปลาซนั้นได้ถูกลดรูปให้เหมือนกับการแปลงฟูเรียร์ ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดได้ในลำดับถัดไป

### 2.3.1.2 การวิเคราะห์ระบบด้วยการแปลงลาปลาซ

เพื่อยกตัวอย่างการวิเคราะห์ระบบด้วยการแปลงลาปลาซ จึงได้กำหนดให้ระบบนั้นถูกอธิบายด้วยสมการอนุพันธ์อันดับสองดังสมการที่ (2.16)

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} x_{of}(t) + a_1 \frac{d}{dt} x_{of}(t) + a_0 x_{of}(t) = b_2 \frac{d^2}{dt^2} x_i(t) + b_1 \frac{d}{dt} x_i(t) + b_0 x_i(t) \quad (2.16)$$

เมื่อ  $a_n$  และ  $b_n$  เมื่อ  $n=1,2,3$  คือค่าคงที่ใดๆ สำหรับ  $x_{of}(t)$  คือผลตอบสนองบังคับของระบบ และ  $x_i(t)$  คืออินพุตที่ป้อนให้กับระบบตามลำดับ สำหรับการแปลงลาปลาซอนุพันธ์อันดับหนึ่งและสองของฟังก์ชัน  $f(t)$  โดยนั้นเป็นไปดังสมการที่ (2.17) และ (2.18) ตามลำดับ

$$L \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = sF(s) - f(0) \quad (2.17)$$

$$L \left\{ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} e^{-st} dt = s^2 F(s) - sf(0) - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad (2.18)$$

เนื่องจากนิยามการวิเคราะห์ผลตอบสนองของระบบด้วยการแปลงลาปลาซคือการวิเคราะห์ผลตอบสนองสถานะศูนย์ (Zero state response) ซึ่งหมายถึงการกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้น  $f(0)$  และ  $\left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0}$  เป็นศูนย์ ดังนั้นเมื่ออาศัยคุณสมบัติในสมการที่ (2.17) และ (2.18) จึงสามารถจัดรูปสมการที่ (2.16) ได้ใหม่ดังนี้

$$a_2 s^2 X_{of}(s) + a_1 s X_{of}(s) + a_0 X_{of}(s) = b_2 s^2 X_i(s) + b_1 s X_i(s) + b_0 X_i(s) \quad (2.19)$$

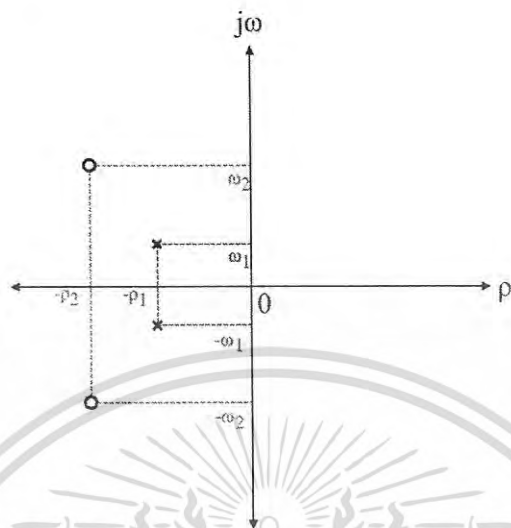
เมื่อจัดรูปสมการที่ (2.19) ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอน  $H(s)$  (Transfer function) จึงได้

$$H(s) = \frac{X_{of}(s)}{X_i(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.20)$$

หากกำหนดให้  $p_1 = \frac{-a_1}{2a_2}$   $\omega_1 = \frac{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_2}$  และ  $p_2 = \frac{-b_1}{2b_2}$   $\omega_2 = \frac{\sqrt{4b_0 b_2 - b_1^2}}{2b_2}$  จึงจัดรูปสมการที่ (2.20) ได้ใหม่ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$H(s) = \frac{(s + (\rho_2 + j\omega_2))(s + (\rho_2 - j\omega_2))}{(s + (\rho_1 + j\omega_1))(s + (\rho_1 - j\omega_1))} \quad (2.21)$$



รูปที่ 2.2 ตัวอย่างการแสดงค่าโพลและค่าซีโรในระนาบเชิงซ้อน

จากสมการที่ (2.21) ค่าที่ทำให้ตัวเศษทางขวามือของสมการเป็นศูนย์นั้นได้ถูกนิยามให้เรียกว่าซีโร (Zero) นั้นหมายถึง  $s = -\rho_2 \pm j\omega_2$  นั้นเอง และค่าที่ทำให้ตัวส่วนทางขวามือของสมการเป็นศูนย์ถูกนิยามให้เรียกว่าโพล (Pole) จึงทำให้ค่าโพลคือ  $s = -\rho_1 \pm j\omega_1$  ซึ่งค่าโพลและซีโรนี้สามารถแสดงความหมายในระนาบเชิงซ้อน (Complex plane) ได้ดังรูปที่ 2.2 โดยแกนแนวดิ่งและแนวนอนของระนาบเชิงซ้อนคือแกนของค่าจินตภาพและค่าจริงที่ค่า  $\omega$  และ  $\rho$  ใดๆ ตามลำดับ สำหรับสัญลักษณ์ที่แทนค่าโพลคือ  $x$  โดยสัญลักษณ์  $o$  เป็นการแสดงแทนค่าซีโร ซึ่งการพิกัดค่าโพลและค่าซีโรลงในระนาบเชิงซ้อนนี้สามารถนำไปบ่งบอกเสถียรภาพของระบบและผลตอบสนองทางความถี่ของระบบได้ ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดเกี่ยวกับเสถียรภาพและผลตอบสนองทางความถี่ของระบบด้วยการพิกัดค่าโพลและค่าซีโรในระนาบเชิงซ้อนได้ในหัวข้อ 2.3.1.3 และ 2.3.1.4 ตามลำดับ

### 2.3.1.3 การวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบ

โดยทั่วไปแล้วการนิยามเสถียรภาพของระบบนั้นได้นิยามเป็นสองลักษณะได้แก่ เสถียรภาพจากภายใน (Internal stability) และเสถียรภาพจากภายนอก (Bounded-Input Bounded-Output stable: BIBO stable) ซึ่งในหัวข้อนี้ได้แสดงรายละเอียดเกี่ยวกับเสถียรภาพภายในก่อน แล้วอธิบายรายละเอียดเกี่ยวกับเสถียรภาพภายนอกตามลำดับ

ในส่วนของเสถียรภาพจากภายในโดยนิยามแล้วคือการพิจารณาผลตอบสนองอินพุตศูนย์ (Zero-input response) ต้องมีค่าไม่ลู่ออก นั่นคือ ซึ่งสื่อความหมายได้ว่าเมื่อระบบมีการทำงานและยังไม่มีอินพุตให้กับระบบ ค่าขนาดผลตอบสนองของระบบต้องไม่ลู่ออก นั่นคือ จากนิยามเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

นี่จึงยกตัวอย่างผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบของระบบ  $x_o(t)$  ให้อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (2.22) ที่เป็นผลตอบสนองที่ได้จากระบบทั้งในกรณีที่ไม่มีการป้อนอินพุต  $x_{on}(t)$  และผลตอบสนองในกรณีที่มีการป้อนอินพุต  $x_{of}(t)$  ดังสมการที่ (2.23) และ (2.24) ตามลำดับ

$$x_o(t) = \frac{(e^{-\rho_1 t} X_n \cos(\omega_0 t))}{x_{on}(t)} + \frac{(-e^{-\rho_1 t} x_{of}(0) \cos(\omega_0 t) + x_{of}(t))}{x_{of}(t)} \quad (2.22)$$

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} x_{on}(t) + a_1 \frac{d}{dt} x_{on}(t) + a_0 x_{on}(t) = 0 \quad (2.23)$$

$$a_2 \frac{d^2}{dt^2} x_{of}(t) + a_1 \frac{d}{dt} x_{of}(t) + a_0 x_{of}(t) = b_2 \frac{d^2}{dt^2} x_i(t) + b_1 \frac{d}{dt} x_i(t) + b_0 x_i(t) \quad (2.24)$$

โดยที่  $\rho_1$  คือค่าปัจจัยการลดทอนที่มีค่าเท่ากับ  $\frac{a_1}{2a_2}$  ที่มีค่าความถี่  $\omega_0$  เท่ากับ  $\frac{\sqrt{4a_2a_0 - a_1^2}}{2a_2}$  สำหรับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของผลตอบสนองธรรมชาติที่มีค่า  $X_n$

ดังนั้นหากไม่มีการป้อนอินพุตให้กับระบบ ค่าผลตอบสนองบังคับต้องมีค่าเป็นศูนย์ จึงทำให้ผลตอบสนองของระบบมีเพียงแค่พจน์  $x_{on}(t)$  เท่านั้น โดยกรณีทั่วไปของขนาดผลตอบสนองธรรมชาติที่ไม่ลู่เข้าสู่ค่าอนันต์นั้นคือค่าขนาดมีการแปรเปลี่ยนตามเวลาในรูปแบบที่ลดลงจนเข้าสู่ศูนย์เพื่ออธิบายในโดเมน  $s$  จึงทำการแปลงลาปลาซสมการที่ (2.23) ได้เป็นสมการที่ (2.25)

$$a_2 s^2 X_o(s) + a_1 s X_o(s) + a_0 X_o(s) = 0 \quad (2.25)$$

สังเกตได้ว่าหากสมมติให้  $x_o(t) = e^{mt}$  แล้วแทนลงในสมการที่ (2.23) เพื่อหาสมการคุณลักษณะ จึงสามารถจัดรูปสมการที่ (2.23) ได้ใหม่ดังสมการที่ (2.26) และสำหรับสมการที่ (2.25) นั้นได้ทำการจัดรูปให้อยู่ในรูปที่สามารถหาค่าโพลได้ดังในสมการที่ (2.27)

$$a_2 m^2 + a_1 m + a_0 = (m + (\rho_1 + j\omega_0))(m + (\rho_1 - j\omega_0)) = 0 \quad (2.26)$$

$$(s + (\rho_1 + j\omega_0))(s + (\rho_1 - j\omega_0)) = 0 \quad (2.27)$$

จากสมการที่ (2.26) และ (2.27) สังเกตได้ว่าค่ารากที่หาได้จากสมการคุณลักษณะของสมการอนุพันธ์เอกพันธ์มีค่าเท่ากับค่าโพล หากพิจารณาค่าโพลเฉพาะที่  $s + (\rho_1 - j\omega_0)$  จึงได้ค่าผลตอบสนองธรรมชาติเป็น

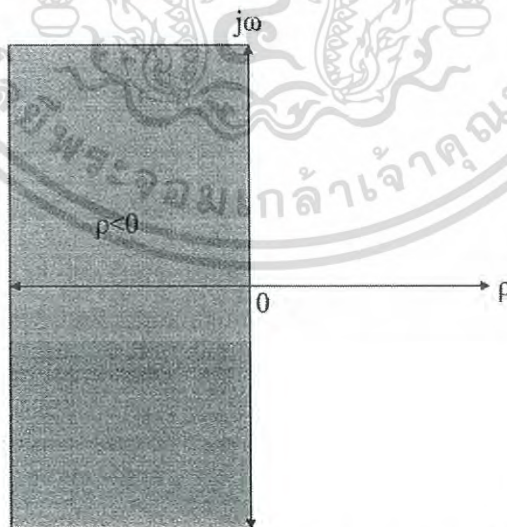
$$x_o(t) = e^{-\rho_1 t} e^{j\omega_0 t} \quad (2.28)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (2.28) พจน์ค่าจินตภาพ  $e^{j\omega t}$  นั้นสามารถใช้ความสัมพันธ์ออยเลอร์แปลงให้กลายเป็นฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ได้ โดยฟังก์ชันไซน์และโคไซน์นั้นมีค่าจำกัดที่  $\pm 1$  และพจน์ค่าจริง  $e^{-\rho t}$  ก็เป็นค่าจำกัด เนื่องจากเมื่อเวลามีค่ามากขึ้นพจน์ค่าจริงต้องมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ แต่อย่างไรก็ตามในกรณีที่ค่าจริงมีค่าเป็นบวกเช่น  $e^{\rho t}$  อันเนื่องมาจากมีค่าโพลที่  $s-(\rho_1-j\omega_0)$  หรือ  $s-(\rho_1+j\omega_0)$  จากระบบที่พิจารณา เมื่อเวลามีค่ามากขึ้นพจน์ค่าจริงต้องมีค่าเข้าสู่อนันต์ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าระบบจะมีเสถียรภาพภายในได้ก็ต่อเมื่อค่าโพลต้องมีค่าจริง  $\rho < 0$  หรือค่าโพลต้องอยู่บริเวณด้านซ้ายในระนาบเชิงซ้อนดังรูปที่ 2.3 อย่างไรก็ตามกรณีขนาดผลตอบสนองธรรมชาติที่ไม่ลู่เข้าสู่ค่าอนันต์นั้นยังมีอีกกรณีหนึ่งคือขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติเป็นค่าคงที่ ซึ่งนั่นหมายถึงระบบมีค่าโพลที่  $s-j\omega_0$  หรือ  $s+j\omega_0$  ที่ส่งผลให้โพลมีค่าจริงที่  $\rho=0$  ก็สามารถกล่าวได้ว่าระบบมีเสถียรภาพเช่นกัน โดยนิยามกรณีนี้ว่าระบบมีเสถียรภาพอย่างมีขอบเขต (Marginally stable)

สำหรับนิยามของเสถียรภาพจากภายนอกคือการพิจารณาผลตอบสนองสถานะศูนย์ต้องมีค่าไม่ลู่เข้าสู่อนันต์หรือค่าเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์นั่นเอง จึงทำให้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของผลตอบสนองธรรมชาติ  $X_n$  เป็นศูนย์ ส่งผลให้ผลตอบสนองของระบบจึงมีเพียงแค่ว่า  $x_{of}(t)$  ดังนั้นหากรูปแบบของค่าอินพุตไม่ลู่เข้าสู่อนันต์ (Bound in) ค่าเอาต์พุตต้องไม่ลู่เข้าสู่อนันต์ (Bound out) เช่นกัน สำหรับการทดสอบเสถียรภาพจากภายนอกนั้นทำได้โดยการป้อนอินพุต  $x_i(t)$  เป็นแบบอิมพัลส์  $\delta(t)$  ให้กับระบบที่สถานะศูนย์ดังสมการที่ (2.29)

$$x_i(t)|_{t=0} = \delta(t) = \begin{cases} 1; & t=0 \\ 0; & t \neq 0 \end{cases} \quad (2.29)$$



รูปที่ 2.3 บริเวณค่าโพลในระนาบเชิงซ้อนของระบบที่มีเสถียรภาพ

โดยการแปลงลาปลาซฟังก์ชันอิมพัลส์เป็นไปดัง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$L\{\delta(t)\}=X_i(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-st}dt=e^0=1 \quad (2.30)$$

เพื่อหาผลตอบสนองบังคับของระบบ  $X_{of}(s)$  จึงต้องทำการแปลงลาปลาซสมการที่ (2.24) และจัดรูปให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอน  $H(s)=\frac{X_{of}(s)}{X_i(s)}$  และแทนค่า  $X_i(s)$  ที่ได้ในสมการที่ (2.30) ลงไปจึงได้

$$H(s)=X_{of}(s)=\frac{(s+(\rho_2+j\omega_2))(s+(\rho_2-j\omega_2))}{(s+(\rho_1+j\omega_1))(s+(\rho_1-j\omega_1))} \quad (2.31)$$

จากสมการที่ (2.31) สามารถตีความได้ว่าค่าผลตอบสนองบังคับของระบบมีค่าเท่ากับค่าฟังก์ชันถ่ายโอน และจากจุดนี้จึงเป็นที่กล่าวกันว่าหากต้องการรู้ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบต้องป้อนอินพุตที่เป็นอิมพัลส์ให้กับระบบ โดยผลตอบสนองทางขนาด  $|H(\omega)|$  ที่ได้จากฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ (2.31) นั้นมีค่าเท่ากับสมการที่ (2.32) (รายละเอียดในการหาค่าผลตอบสนองทางขนาดจากฟังก์ชันถ่ายโอนสามารถแสดงได้ในหัวข้อ 2.3.1.4)

$$|H(\omega)|=\sqrt{\frac{\rho_2^4+2\rho_2^2(\omega^2+\omega_2^2)+(\omega^2-\omega_2^2)^2}{\rho_1^4+2\rho_1^2(\omega^2+\omega_1^2)+(\omega^2-\omega_1^2)^2}} \quad (2.32)$$

ดังนั้นขนาดของผลตอบสนองบังคับจึงไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาจึงทำให้ระบบที่ยกตัวอย่างนี้มีเสถียรภาพจากภายนอก

โดยทั่วไปแล้วหากระบบอยู่ในรูปแบบที่สามารถอธิบายได้ด้วยสมการอนุพันธ์แบบเชิงเส้น ผลตอบสนองเชิงขนาดที่ระบบตอบสนองกับอินพุตนั้นต้องไม่ขึ้นอยู่กับเวลา ดังนั้นการวิเคราะห์เสถียรภาพของระบบต้องพิจารณาระบบที่สถานะอินพุตเป็นศูนย์ จึงกล่าวได้ว่าทั้งกรณีของการวิเคราะห์เสถียรภาพจากภายในหรือการวิเคราะห์เสถียรภาพจากภายนอกนั้น ระบบจะมีเสถียรภาพได้ก็ต่อเมื่อค่าโพลที่พิกัดอยู่บริเวณด้านซ้ายของระนาบเชิงซ้อนนั่นเอง

#### 2.3.1.4 การวิเคราะห์ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบและการแปลงฟูเรียร์

จากการพิกัดค่าโพลและค่าซีโรตัวอย่างจากสมการที่ (2.19) บนระนาบเชิงซ้อนดังรูปที่ 2.2 นั้นสามารถบ่งบอกผลตอบสนองทางความถี่ของระบบได้ โดยผลตอบสนองทางความถี่ของระบบนั้นหมายถึงผลตอบสนองของระบบที่มีต่อความถี่ของสัญญาณอินพุตที่ป้อนเข้ามา ซึ่งผลตอบสนองทางความถี่ของระบบนั้นประกอบไปด้วยสองส่วนนั้นคือผลตอบสนองเชิงขนาด  $|H(\omega)|$  และผลตอบสนองเชิงเฟส  $\angle H(\omega)$  ที่หาได้จากสมการที่ (2.33) และ (2.34) ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$|H(\omega)| = \sqrt{(\text{Re})^2 + (\text{Im})^2} \quad (2.33)$$

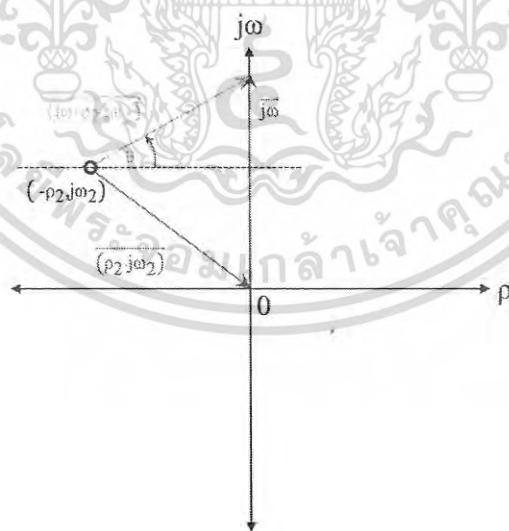
$$\angle H(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right) \quad (2.34)$$

เมื่อ Re คือค่าจริง และ Im คือค่าจินตภาพตามลำดับ ดังนั้นหากวิเคราะห์ฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ (2.31) อีกครั้ง จากการนิยามถึงการตอบสนองของระบบที่มีต่อความถี่ของอินพุตในข้างต้น จึงทำให้กำหนดค่า s ให้มีแต่ค่าจินตภาพ  $s=j\omega$  ดังนั้นจึงสามารถแสดงฟังก์ชันถ่ายโอนในสมการที่ (2.31) ได้ใหม่ดังสมการที่ (2.35)

$$H(\omega) = \frac{(j\omega + p_2 + j\omega_2)(j\omega + p_2 - j\omega_2)}{(j\omega + p_1 + j\omega_1)(j\omega + p_1 - j\omega_1)} \quad (2.35)$$

จุดที่น่าสนใจเกี่ยวกับสมการที่ (2.35) คือเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนที่สามารถวิเคราะห์ได้จากการแปลงฟูเรียร์ของระบบเช่นเดียวกัน เนื่องจากคุณลักษณะหลายอย่างในการแปลงลาปลาซและการแปลงฟูเรียร์มีความคล้ายคลึงมาก เช่นคุณสมบัติการทำอนุพันธ์ที่กำลัง  $n$  ใดๆ สำหรับฟังก์ชัน  $f(t)$  เป็นไปดังสมการที่ (2.36)

$$F \left\{ \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right\} = (j\omega)^n F(\omega) \quad (2.36)$$



รูปที่ 2.4 การแสดงค่าซีโรในรูปแบบเวกเตอร์ลิฟท์

หากเทียบเคียงกับสมการที่ (2.12) และ (2.13) เมื่อกำหนดให้  $s=j\omega$  จึงสามารถสรุปได้ว่าการแปลงฟูเรียร์คือการแปลงลาปลาซที่ถูกลดรูปให้วิเคราะห์เฉพาะค่าจินตภาพเท่านั้น ดังนั้นการสังเคราะห์ค่าโพลและค่าซีโรเพื่อหาผลตอบสนองทางความถี่ของระบบจึงเป็นวิธีที่เหมือนกับการหาเอกสารนเป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการเรียนเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมออนุญาตให้นำไปเผยแพร่บนดานการค่าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ผลตอบสนองทางความถี่ของระบบด้วยการแปลงฟูเรียร์ ดังนั้นเมื่อทำการสังเคราะห์พจน์ซีโร  $s+(p_2-j\omega_2)=0$  ด้วยการพิกัดค่าซีโรนี้ลงในระนาบเชิงซ้อน และเปลี่ยนมุมมองให้เป็นแบบเวกเตอร์ [38] ที่มีจุดกำเนิดที่จุด  $(0,0)$  ดังรูปที่ 2.4 เมื่อวาดเวกเตอร์ค่าซีโรที่พิกัด  $(-p_2,j\omega_2)$  ให้พุ่งเข้าสู่จุดกำเนิด และเนื่องจากค่า  $j\omega$  นั้นสามารถเปลี่ยนแปลงได้ตามความถี่อินพุต  $\omega$  ที่ป้อนเข้ามาให้กับระบบ จึงทำให้สามารถแทนค่า  $j\omega$  ด้วยเวกเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงค่าได้ตาม  $\omega$  เมื่อนำเวกเตอร์ทั้งสองบวกกันจึงได้เวกเตอร์ลัพธ์ที่พุ่งเข้าหาแกน  $j\omega$  ขึ้น โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ลัพธ์ในรูปแบบระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian coordinate) กับระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate) ที่ประกอบไปด้วยขนาดและเฟสของเวกเตอร์ลัพธ์ได้ดังด้านขวาของสมการที่ (2.37)

$$j\omega+p_2-j\omega_2=\sqrt{p_2^2+(\omega-\omega_2)^2}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\omega_2}{p_2}\right)} \quad (2.37)$$

สังเกตได้ว่าขนาดและเฟสของเวกเตอร์ลัพธ์ในสมการที่ (2.37) ตรงกับนิยามผลตอบสนองเชิงขนาดและเฟสที่แสดงในสมการที่ (2.33) และ (2.34) ตามลำดับ ดังนั้นจึงสามารถแสดงฟังก์ชันส่งผ่านในสมการที่ (2.35) ในรูปแบบของเวกเตอร์ลัพธ์ของแต่ละค่าซีโรและค่าโพลกระทำกันอยู่เช่นในสมการที่ (2.38)

$$H(\omega)=\frac{\left(|H_{z_1}(\omega)|\angle H_{z_1}(\omega)\right)\left(|H_{z_2}(\omega)|\angle H_{z_2}(\omega)\right)}{\left(|H_{p_1}(\omega)|\angle H_{p_1}(\omega)\right)\left(|H_{p_2}(\omega)|\angle H_{p_2}(\omega)\right)} \quad (2.38)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} |H_{z_1}(\omega)|\angle H_{z_1}(\omega) &= \sqrt{p_2^2+(\omega+\omega_2)^2}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\omega_2}{p_2}\right)} \\ |H_{z_2}(\omega)|\angle H_{z_2}(\omega) &= \sqrt{p_2^2+(\omega-\omega_2)^2}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\omega_2}{p_2}\right)} \\ |H_{p_1}(\omega)|\angle H_{p_1}(\omega) &= \sqrt{p_1^2+(\omega+\omega_1)^2}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega+\omega_1}{p_1}\right)} \\ |H_{p_2}(\omega)|\angle H_{p_2}(\omega) &= \sqrt{p_1^2+(\omega-\omega_1)^2}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{\omega-\omega_1}{p_1}\right)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

จึงทำให้ผลตอบสนองเชิงขนาด  $|H(\omega)|$  และผลตอบสนองเชิงเฟส  $\angle H(\omega)$  รวมของระบบนี้เป็นไปตามสมการที่ (2.40) และ (2.41) ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$|H(\omega)| = \frac{|H_{z_1}(\omega)||H_{z_2}(\omega)|}{|H_{p_1}(\omega)||H_{p_2}(\omega)|} = \frac{\sqrt{\rho_2^4 + 2\rho_2^2(\omega^2 + \omega_2^2) + (\omega^2 - \omega_2^2)^2}}{\sqrt{\rho_1^4 + 2\rho_1^2(\omega^2 + \omega_1^2) + (\omega^2 - \omega_1^2)^2}} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \angle H(\omega) &= \angle H_{z_1}(\omega) + \angle H_{z_2}(\omega) - \angle H_{p_1}(\omega) - \angle H_{p_2}(\omega) \\ \angle H(\omega) &= e^{j(\tan^{-1}(\frac{\omega + \omega_2}{\rho_2}) + \tan^{-1}(\frac{\omega - \omega_2}{\rho_2}) - \tan^{-1}(\frac{\omega + \omega_1}{\rho_1}) - \tan^{-1}(\frac{\omega - \omega_1}{\rho_1}))} \end{aligned} \quad (2.41)$$

สังเกตได้ว่าผลตอบสนองเชิงขนาดของระบบในสมการที่ (2.40) นี้ตรงกับสมการที่ (2.32) และเนื่องจากการแปลงฟูเรียร์ของฟังก์ชันอิมพัลส์มีค่าเท่ากับ  $F\{\delta(t)\}=1$  ดังนั้นผลตอบสนองทางความถี่อันเนื่องมาจากฟังก์ชันอิมพัลส์จึงสื่อความหมายได้อีกนัยหนึ่งว่าเป็นผลตอบสนองต่อความถี่ใดๆของระบบ ขึ้นอยู่กับความถี่ที่พิจารณา ดังนั้นหากสัญญาณที่พิจารณานั้นประกอบไปด้วยหลายองค์ประกอบทางความถี่ การวิเคราะห์ผลการตอบสนองทางความถี่จึงต้องพิจารณาที่ละความถี่ จากความหมายนี้เองจึงสามารถตีความเป็นในเชิงคณิตศาสตร์ได้ว่าผลตอบสนองทางความถี่คือผลตอบสนองต่อฟังก์ชันไอเกนขนาดคงที่  $e^{j\omega t}$  ที่ความถี่  $\omega$  ใดๆ และจากความสัมพันธ์ของออยเลอร์ที่สามารถแปลงฟังก์ชันไอเกนให้กลายเป็นฟังก์ชันไซน์ซายด์อล จึงเรียกผลตอบสนองทางความถี่นี้ว่าผลตอบสนองสถานะคงตัวไซน์ซายด์อล (Sinusoidal steady state response) ดังนั้นจึงสามารถนิยามได้ว่าระบบการสั่นที่มีการบ่อนอินพุตนั้นเป็นระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่มีเสถียรภาพอย่างมีขอบเขต

จากรายละเอียดเกี่ยวกับทฤษฎีสัญญาณและระบบที่แสดงในข้างต้นเป็นองค์ความรู้พื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ระบบการสั่นบังคับทั้งในทั่วไปและโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา (Multi-Time Forced Oscillation model: MTFO model) [1-8] ซึ่งเป็นโมเดลที่ถูกพัฒนาจากการสั่นบังคับแบบทั่วไปมาประยุกต์ใช้และเป็นแนวคิดหลักที่ใช้ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ในลำดับถัดไปจึงเป็นการแสดงรายละเอียดเกี่ยวกับหลักการของการสั่นบังคับแบบทั่วไป แล้วแสดงการวิเคราะห์ด้วยโมเดลการสั่นแบบบังคับหลายเวลาตามลำดับ

### 2.3.2 การสั่นบังคับแบบทั่วไป

จากผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบการสั่นบังคับ  $\varphi_c(t)$  คือการทับซ้อนกันระหว่างผลตอบสนองธรรมชาติ  $\varphi_n(t)$  กับผลตอบสนองบังคับ  $\varphi_f(t)$  ที่เป็นอิสระจากกัน จึงทำให้สามารถแสดงสมการผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบได้ดังนี้

$$\varphi_c(t) = \varphi_n(t) + \varphi_f(t) \quad (2.42)$$

เนื่องจากผลตอบสนองธรรมชาติของระบบการสั่นบังคับยังคงมีรูปแบบเหมือนกับผลตอบสนองธรรมชาติในระบบการสั่นธรรมชาติดังในสมการที่ (2.6) จึงทำให้วิธีการหาขนาดของผลตอบสนองเอกสารเป็นเอกลักษณ์ที่สงวนไว้ซึ่งการเชิง นพโยการศกษ เ้าอนน ไมอญู เตเห็นาไปเชอระเขยบนด นการค้ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ธรรมชาติในระบบการสั่นบังคับต้องอาศัยสมการเงื่อนไขขอบเขตเช่นเดียวกัน เมื่อกำหนดให้ค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet มีค่าเป็น  $X_c$  และกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขต Neumann เป็นศูนย์ และแก้สมการที่ (2.42) ให้ตรงตามเงื่อนไขของสมการที่ (2.43) และ (2.44) จึงได้สมการที่ (2.45) และ (2.46) ตามลำดับ

$$\varphi_c(t)|_{t=0} = X_c \quad (2.43)$$

$$\left. \frac{d\varphi_c(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\varphi_f(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad (2.44)$$

$$A_1 + A_2 = X_c - \varphi_f(0) \quad (2.45)$$

$$A_1 - A_2 = 0 \quad (2.46)$$

ดังนั้นผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบจึงสามารถจัดรูปได้ใหม่เป็น

$$\varphi_c(t) = e^{-\alpha t} \left( (X_c - \varphi_f(0)) \cos(\omega_0 t) \right) + \varphi_f(t) \quad (2.47)$$

โดยผลตอบสนองธรรมชาติของระบบยังคงสามารถวิเคราะห์ได้จากสมการที่ (2.1) และสามารถหาผลตอบสนองบังคับได้จากความสัมพันธ์ระหว่างผลตอบสนองบังคับและฟังก์ชันบังคับ  $f(\varphi_i(t))$  ที่ขึ้นอยู่กับอินพุต  $\varphi_i(t)$  จากสมการที่ (2.48)

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_f(t) + \alpha \frac{d}{dt} \varphi_f(t) + \omega_n^2 \varphi_f(t) = f(\varphi_i(t)) \quad (2.48)$$

จากสมการที่ (2.48) สามารถตีความได้ว่าผลตอบสนองบังคับนั้นเกิดจากผลของการกระทำของระบบที่แปลงอินพุต ดังนั้นรูปแบบของผลตอบสนองบังคับจึงขึ้นอยู่กับรูปแบบอินพุตที่เข้ามากระทำกับระบบ โดยทั่วไปแล้วสัญญาณใดๆนั้นคือสัญญาณที่ประกอบไปด้วยสัญญาณไซน์ซวยดอลเดี่ยว (Single sinusoidal) หลายความถี่รวมตัวกันอยู่ ซึ่งรูปแบบของสัญญาณที่แตกต่างกันนั้นขึ้นอยู่กับค่าขนาดของสัญญาณไซน์ซวยดอลเดี่ยวของแต่ละความถี่ที่ต่างกัน ดังนั้นผลตอบสนองบังคับของระบบจึงสามารถแจกแจงได้เป็นแต่ละการตอบสนองของระบบที่กระทำต่ออินพุตที่เป็นสัญญาณไซน์ซวยดอลเดี่ยว ณ สภาวะคงตัวซึ่งผลตอบสนองต่อสัญญาณไซน์ซวยดอลเดี่ยวนั้นมีสองส่วน นั่นคือผลตอบสนองเชิงขนาดต่ออินพุต  $|H(\omega)|$  และผลตอบสนองเชิงเฟสต่ออินพุต  $\angle H(\omega)$  ซึ่งสอดคล้อง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กับทฤษฎีสัญญาณและระบบ (ดังที่แสดงรายละเอียดในหัวข้อ 2.3.1.4) หากกำหนดให้อินพุต  $\varphi_i(t)=A_i \cos(\omega_i t)$  รูปแบบทั่วไปของผลตอบสนองบังคับจึงอยู่ในรูปแบบดัง

$$\varphi_f(t)=|H(\omega_i)|A_i \cos(\omega_i t+\angle H(\omega_i)) \quad (2.49)$$

อย่างไรก็ตามผลตอบสนองสมบูรณ์ที่ได้ในสมการที่ (2.49) นั้นมีความหมายโดยนัยว่าค่าขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติของระบบการสั่นบังคับนั้นขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับที่เวลาเริ่มต้นเท่านั้น ซึ่งผลการทดลองของระบบการสั่นบังคับในทางปฏิบัติกลับไม่สอดคล้องกับทางทฤษฎี จึงทำให้มีการพัฒนาโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับผลการทดลอง ซึ่งได้อธิบายในหัวข้อถัดไป

### 2.3.3 การสั่นบังคับหลายเวลา

โมเดลนี้ได้ถูกพัฒนาโดย ริงชยและคณะ ซึ่งมาจากแนวคิดพื้นฐานที่ว่าขนาดของผลตอบสนองธรรมชาตินั้นไม่ได้ขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับที่เวลาเริ่มต้น  $t=0$  เท่านั้น แต่ขึ้นอยู่กับผลตอบสนองบังคับที่เวลาใดๆ  $\tau$  ด้วย [3] ดังนั้นผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบการสั่นบังคับ  $\varphi_c(t,\tau)$  คือการทับซ้อนกันระหว่างผลตอบสนองธรรมชาติ  $\varphi_n(t)$  กับผลตอบสนองบังคับ  $\varphi_f(\tau)$  ที่เป็นอิสระจากกัน เช่นเดียวกัน จึงทำให้สามารถแสดงสมการผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบได้ดังนี้

$$\varphi_c(t,\tau)=\varphi_n(t)+\varphi_f(\tau) \quad (2.50)$$

ซึ่งผลตอบสนองธรรมชาติของระบบยังคงสามารถวิเคราะห์ได้จากสมการที่ (2.1) เช่นเดียวกัน และสมการที่ใช้อธิบายผลตอบสนองบังคับดังในสมการที่ (2.48) จึงถูกเปลี่ยนตัวแปรเวลาเป็น

$$\frac{d^2}{dt^2}\varphi_f(\tau)+\alpha\frac{d}{dt}\varphi_f(\tau)+\omega_n^2\varphi_f(\tau)=f(\varphi_f(\tau)) \quad (2.51)$$

และสมการเงื่อนไขเริ่มต้นดังในสมการที่ (2.43) และ (2.44) จึงถูกเปลี่ยนตัวแปรเป็นไปดังสมการที่ (2.52) และ (2.53) โดยที่  $X_{ct}$  คือค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet และจากกำหนดให้ค่าเงื่อนไขขอบเขต Neumann  $\left.\frac{d\varphi_f(\tau)}{dt}\right|_{\tau=0}=0$  จึงทำให้ได้ค่า  $A_1+A_2$  และ  $A_1-A_2$  เปลี่ยนแปลงไปเป็นดังสมการที่ (2.54) และ (2.55) ตามลำดับ ส่งผลให้ผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบของการสั่นบังคับหลายเวลาเป็นไปดังสมการที่ (2.56)

$$\varphi_c(t,\tau)\Big|_{\tau=0}=X_{ct} \quad (2.52)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left. \frac{d\varphi_c(t,\tau)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.53)$$

$$A_1 + A_2 = X_{cr} - \varphi_f(\tau) \quad (2.54)$$

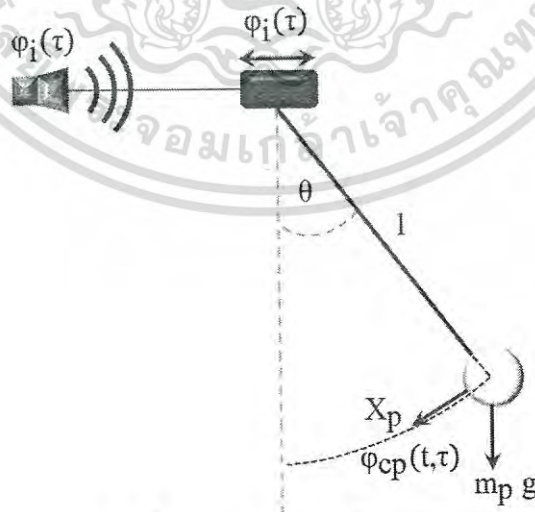
$$A_1 - A_2 = 0 \quad (2.55)$$

$$\varphi_c(t,\tau) = e^{-\alpha_d t} (X_{cr} - \varphi_f(\tau)) \cos(\omega_0 t) + \varphi_f(\tau) \quad (2.56)$$

เพื่อทำการยืนยันโมเดลคณิตศาสตร์นี้ เกรียงศักดิ์และคณะ [1-2] จึงได้ทำการทดลองจริงกับระบบการสั่นบังคับเชิงกลเช่นระบบเพนดูลัมบังคับและระบบสปริงบังคับด้วยวิธีการวิเคราะห์แบบการสั่นบังคับหลายเวลา โดยสามารถแสดงรายละเอียดการวิเคราะห์และผลการทดลองได้ในลำดับถัดไป

### 2.3.3.1 ระบบเพนดูลัมบังคับ

ในการทดลองระบบเพนดูลัมบังคับนี้ [1] ได้อาศัยมุมมองที่ให้การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของวัตถุที่พิจารณาแปรเปลี่ยนตามเวลาให้กลายเป็นสัญญาณที่แปรเปลี่ยนตามเวลา และแรงกระทำจากภายนอกให้เป็นสัญญาณอินพุต  $\varphi_i(\tau)$  ที่ป้อนให้กับระบบ ซึ่งตำแหน่งของวัตถุที่พิจารณาหลังจากมีแรงกระทำจากภายนอกให้กับระบบนั้นคือผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบ  $\varphi_{cp}(t,\tau)$  ซึ่งสามารถกำหนดสัญญาณอินพุตได้จากลำโพงที่ต่อเชื่อมกับระบบดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ระบบเพนดูลัมบังคับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยผลตอบสนองธรรมชาติของระบบเพนดูลัมนี้  $\varphi_{np}(t)$  เป็นอิสระต่ออินพุตบังคับ ดังนั้นสมการอนุพันธ์ของผลตอบสนองธรรมชาติที่ได้จากกฎของนิวตันในระบบนี้จึงเป็นไปดัง

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_{np}(t) + \frac{\alpha}{m_p} \frac{d}{dt} \varphi_{np}(t) + \frac{g}{l} \varphi_{np}(t) = 0 \quad (2.57)$$

โดยที่  $m_p$  คือมวล  $l$  คือความยาวของท่อนแข็งมวลเบาที่ยึดติดระหว่างมวลกับจุดตรึงอ้างอิง  $g$  คือค่าคงที่ของความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วง และ  $\alpha$  คือสัมประสิทธิ์การลดทอน เมื่อแก้ไขสมการที่ (2.57) ระบบนี้จึงสั้นด้วยค่าความถี่  $\omega_0 = \frac{\sqrt{4(\frac{g}{l}) - \alpha^2}}{2}$  และปัจจัยการลดทอน  $\alpha_d = \frac{\alpha}{2m_p}$  ซึ่งผลตอบสนองธรรมชาติของระบบเพนดูลัมบังคับนี้  $\varphi_{np}(t)$  เป็นไปดังสมการ

$$\varphi_{np}(t) = e^{-\alpha_d t} \left( (A_{1p} + A_{2p}) \cos(\omega_0 t) + j(A_{1p} - A_{2p}) \sin(\omega_0 t) \right) \quad (2.58)$$

สำหรับผลตอบสนองบังคับของระบบ  $\varphi_{fp}(\tau)$  นั้นเกิดจากที่จุดตรึงอ้างอิงมีการขยับเลื่อนเนื่องจากลำโพง ส่งผลให้ฟังก์ชันบังคับของระบบนี้มีค่าเท่ากับอินพุต  $f(\varphi_i(\tau)) = \varphi_i(\tau)$  เมื่อกำหนดสัญญาณอินพุตที่ส่งออกมาจากลำโพงนั้นเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์  $\varphi_i(\tau) = A_{fp} \cos(\omega_{fp} \tau)$  ที่มีขนาด  $A_{fp}$  และความถี่  $\omega_{fp}$  ส่งผลให้สมการอนุพันธ์ที่ใช้สำหรับอธิบายผลตอบสนองบังคับเป็นไปดัง (2.59)

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \varphi_{fp}(\tau) + \frac{\alpha}{m_p} \frac{d}{d\tau} \varphi_{fp}(\tau) + \frac{g}{l} \varphi_{fp}(\tau) = \frac{A_{fp}}{m_p} \cos(\omega_{fp} \tau) \quad (2.59)$$

โดยที่รูปแบบของผลตอบสนองบังคับเป็นไปดัง

$$\varphi_{fp}(\tau) = |H(\omega_{fp})| A_{fp} \cos(\omega_{fp} \tau + \angle H(\omega_{fp})) \quad (2.60)$$

ที่มีผลตอบสนองเชิงขนาดและเฟสเป็นไปดังสมการที่ (2.60) และ (2.61) ตามลำดับ

$$|H(\omega_{fp})| = \frac{1}{m_p \sqrt{(\omega_n^2 - \omega_{fp}^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m_p}\right)^2 \omega_{fp}^2}} \quad (2.61)$$

$$\angle H(\omega_{fp}) = -\tan^{-1} \frac{\alpha \omega_{fp}}{m_p(\omega_n^2 - \omega_{fp}^2)} \quad (2.62)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบเพนดูลัมบังคับภายใต้หลักการการสั่นบังคับหลายเวลาจึงเป็นไปดัง

$$\varphi_{cp}(t,\tau) = e^{-\alpha t} \left( (A_1 + A_2) \cos(\omega_0 t) + j(A_1 - A_2) \sin(\omega_0 t) \right) + \varphi_{fp}(\tau) \quad (2.63)$$

สำหรับการวิเคราะห์พลวัตของระบบนั้น การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตนั้นคือการกำหนดขอบเขตการพิจารณา ซึ่งเป็นการตีความจากกรอบเงื่อนไขทางฟิสิกส์ของระบบสู่คณิตศาสตร์ ยกตัวอย่างเช่น หากในสถานะเริ่มต้นของระบบเพนดูลัมบังคับนั้น มวลของเพนดูลัมถูกดึงไว้ที่ระยะ  $X_p$  (ค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet) และค่าความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ (ค่าเงื่อนไขขอบเขต Neumann) จากเงื่อนไขที่กำหนดทางฟิสิกส์ของระบบนี้สามารถนำมาจัดรูปในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่เป็นค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet และ Neumann ได้ดังสมการที่ (2.64) และ (2.65) ตามลำดับ เมื่อพิจารณาค่าเงื่อนไขเหล่านี้ร่วมกับ (2.63) จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่าง  $A_{1p}$  และ  $A_{2p}$  ดังสมการที่ (2.66) และ (2.67)

$$\varphi_{cp}(t,\tau) \Big|_{t=0} = X_p \quad (2.64)$$

$$\frac{d\varphi_{cp}(t,\tau)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.65)$$

$$A_{1p} + A_{2p} = X_p - \varphi_f(\tau) \quad (2.66)$$

$$A_{1p} - A_{2p} = 0 \quad (2.67)$$

ดังนั้นผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบเพนดูลัมจึงเป็นไปดังสมการที่ (2.68)

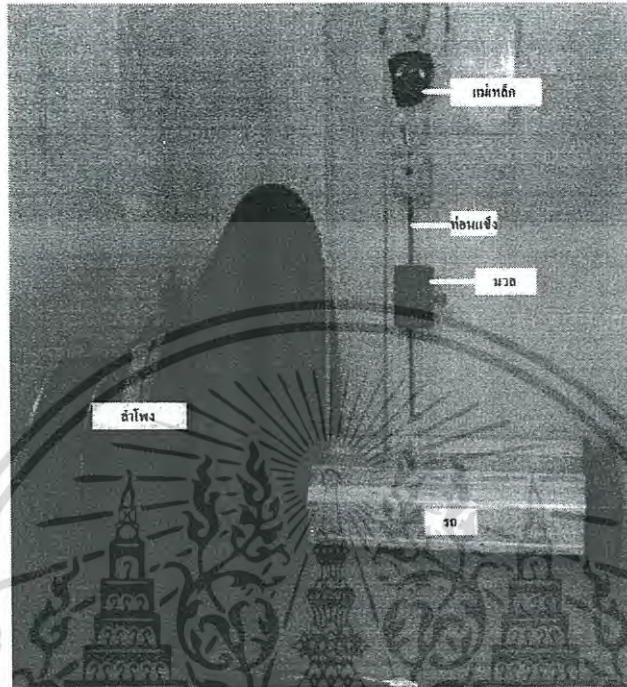
$$\varphi_{cp}(t,\tau) = e^{-\alpha t} \left( \left( X_p - \varphi_f(\tau) \right) \cos(\omega_0 t) \right) + \varphi_{fp}(\tau) \quad (2.68)$$

จากการนิยามว่า  $\tau$  คือตัวแปรเวลาที่เป็นอิสระจากตัวแปรเวลา  $t$  แต่ยังคงอยู่ในมิติเวลานั้นคือสามารถนิยามตัวแปร  $\tau$  เป็นเวลาใดๆได้ หากนิยามให้  $\tau = t + \Delta t$  โดยที่  $\Delta t$  คือเวลาที่หน่วงออกไป ดังนั้นผลตอบสนองสมบูรณ์ในสมการที่ (2.68) สามารถจัดรูปได้ใหม่ดังสมการที่ (2.69)

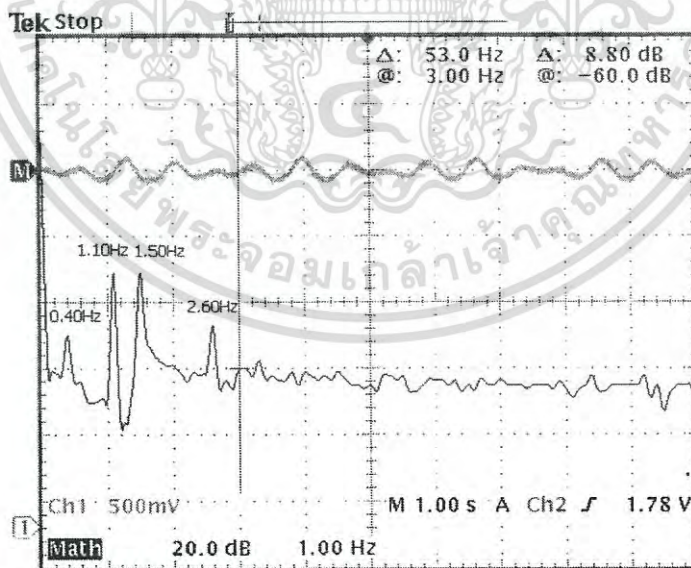
$$\varphi_{cp}(t,\tau) = e^{-\alpha t} \left( X_p \cos(\omega_0 t) - \frac{D_0}{2} \cos(\omega_{fp}^+) - \frac{D_1}{2} \cos(\omega_{fp}^-) \right) + D_2 \cos(\omega_{fp}^f) \quad (2.69)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $\omega_{fp}^+ = (\omega_{fp} + \omega_0)t + \omega_{fp}\Delta t + \angle H(\omega_{fp} + \omega_0)$ ,  $\omega_{fp}^- = (\omega_{fp} - \omega_0)t + \omega_{fp}\Delta t + \angle H(\omega_{fp} - \omega_0)$ ,  
 $\omega_{fp}^f = \omega_{fp}t + \angle H(\omega_{fp})$ ,  $D_0 = |H(\omega_{fp} + \omega_0)|$ ,  $D_1 = |H(\omega_{fp} - \omega_0)|$ ,  $D_2 = |H(\omega_{fp})|$



รูปที่ 2.6 การทดลองจริงของระบบเพนดูลัมบังคับ



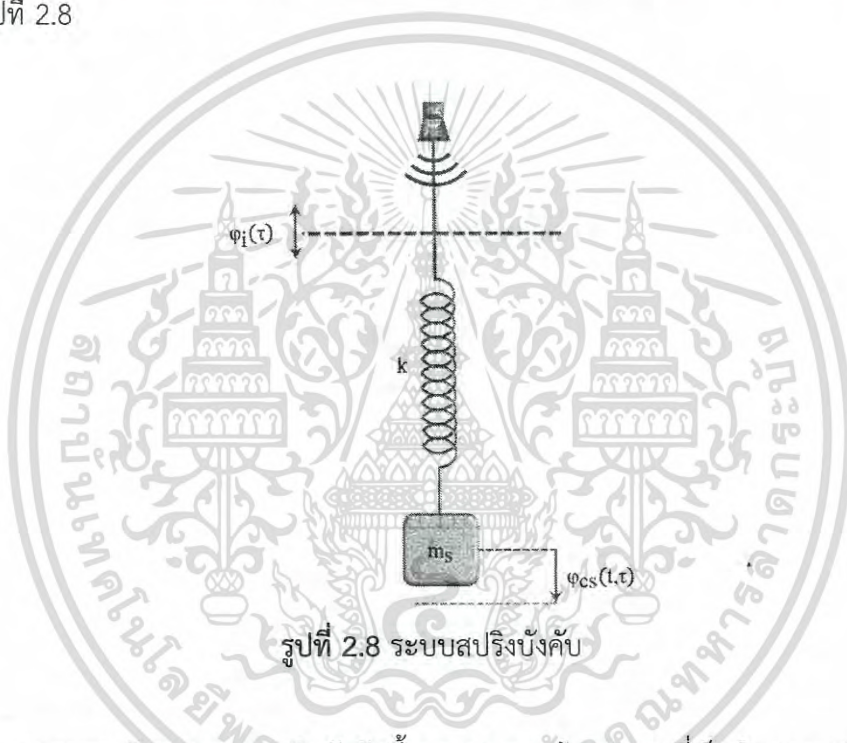
รูปที่ 2.7 ผลตอบสนองสมบูรณที่ได้จากการทดลองของระบบเพนดูลัมบังคับ

โดยการทดลองจริงของระบบเพนดูลัมบังคับได้ถูกจัดตั้งดังรูปที่ 2.6 อาศัยเซ็นเซอร์จับการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งแบบ Hall Effect รุ่น UGN3503 ต่อเข้ากับออสซิลโลสโคปและทำการแปลงฟูเรียร์ของสัญญาณเอาต์พุตในโดเมนเวลาให้กลายเป็นโดเมนความถี่ เมื่อจัดตั้งให้ลำโพงที่เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เชื่อมต่อกับรถ และรถเชื่อมต่อกับผนังด้านบนของระบบเพนดูลัมเพื่อให้ลำโพงสามารถบังคับระบบเพนดูลัมได้โดยตรง เมื่อกำหนดให้ลำโพงเป็นสัญญาณโคไซน์ที่ความถี่ 1.1 เฮิรตซ์ เข้ารบกวนระบบเพนดูลัมที่สั้นด้วยความถี่ธรรมชาติที่ 1.5 เฮิรตซ์ จึงทำให้ได้ผลตอบสนองสมบูรณื้ที่สอดคล้องกับสมการที่ (2.69) ดังรูปที่ 2.7

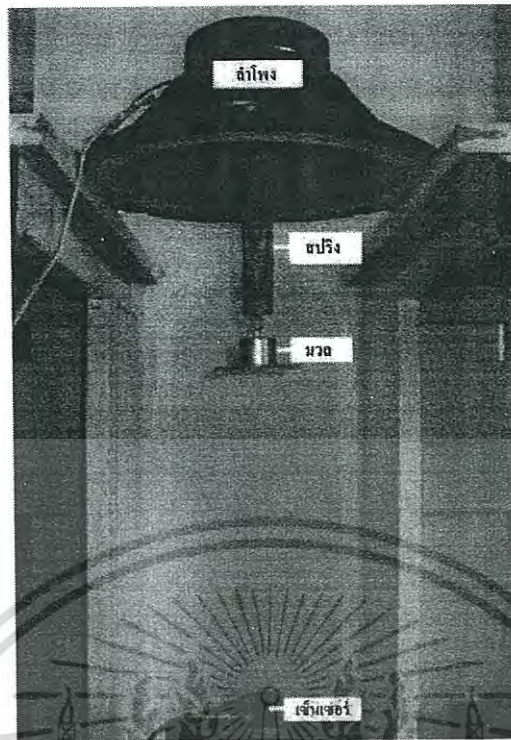
### 2.3.3.2 ระบบสปริงบังคับ

การทดลองระบบสปริงบังคับได้อาศัยมุมมองเดียวกับเพนดูลัม [2] นั่นคือการแทนความเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งของมวล  $m_s$  ที่ติดกับสปริง (ค่านิจสปริง  $k$ ) ให้กลายเป็นสัญญาณทางไฟฟ้าที่เป็นผลตอบสนองสมบูรณื้ของระบบสปริงบังคับ  $\varphi_{cs}(t, \tau)$  และบังคับระบบนี้ด้วยอินพุต  $\varphi_i(\tau)$  จากลำโพงดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ระบบสปริงบังคับ

การหาพลวัตของระบบสปริงบังคับนี้ถูกครอบคลุมด้วยสมการที่เป็นอิสระจากกันห้าสมการ นั่นคือสมการผลตอบสนองสมบูรณื้ สมการผลตอบสนองธรรมชาติ ( $\varphi_{ns}(t)$ ) สมการผลตอบสนองบังคับ ( $\varphi_{is}(\tau)$ ) ค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet และค่าเงื่อนไขขอบเขต Neumann ดังสมการที่ (2.70) ถึงสมการที่ (2.74) ตามลำดับ ซึ่งสามารถอธิบายสมการทั้งห้าในเชิงฟิสิกส์ของระบบได้นั้นคือผลตอบสนองสมบูรณื้ของระบบสปริงบังคับนั้นคือการซ้อนทับกันระหว่างผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับดังสมการที่ (2.70) ซึ่งสามารถหาผลตอบสนองธรรมชาติและผลตอบสนองบังคับของระบบภายใต้กฎของนิวตันที่มีค่าสัมประสิทธิ์การลดทอน  $\alpha$  จากสมการที่ (2.71) และ (2.74) ตามลำดับ ภายใต้เงื่อนไขเริ่มต้นที่ยึดสปริงที่ระยะ  $X_s$  ใน (2.71) และความเร็วเริ่มต้นของมวลที่ติดสปริงเป็นศูนย์ดังสมการที่ (2.74)



รูปที่ 2.9 การทดลองจริงของระบบสปริงบังคับ

$$\varphi_{cs}(t, \tau) = \varphi_{ns}(t) + \varphi_{fs}(\tau) \quad (2.70)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \varphi_{ns}(t) + \frac{\alpha}{m_s} \frac{d}{dt} \varphi_{ns}(t) + \frac{k}{m_s} \varphi_{ns}(t) = 0 \quad (2.71)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \varphi_{fs}(\tau) + \frac{\alpha}{m_s} \frac{d}{d\tau} \varphi_{fs}(\tau) + \frac{k}{m_s} \varphi_{fs}(\tau) = \frac{f(\varphi_i(\tau))}{m_s} \quad (2.72)$$

$$\varphi_{cs}(t, \tau) \Big|_{t=0} = X_s \quad (2.73)$$

$$\frac{d\varphi_{cs}(t, \tau)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.74)$$

เมื่อทำการแก้สมการที่ (2.70) ถึงสมการที่ (2.74) ในรูปแบบเดียวกับระบบเพนดูลัมดังในหัวข้อก่อนหน้า จึงทำให้ได้ผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบสปริงบังคับดังสมการที่ (2.75)

$$\varphi_{cs}(t, \tau) = e^{-\alpha t} \left( (X_p - \varphi_{fs}(\tau)) \cos(\omega_0 t) \right) + \varphi_{fs}(\tau) \quad (2.75)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

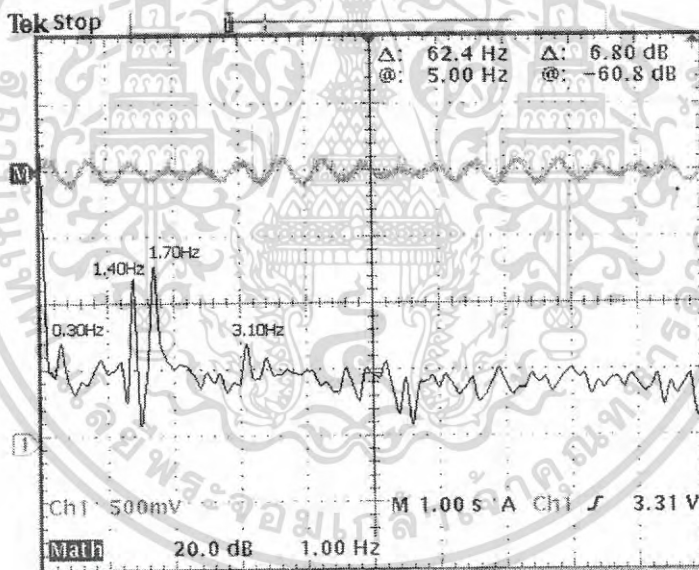
โดยที่ความถี่  $\omega_0 = \frac{\sqrt{4\left(\frac{k}{m_s}\right) - \alpha^2}}{2}$  และปัจจัยการลดทอน  $\alpha_d = \frac{\alpha}{2m_s}$  ซึ่งมีผลตอบสนองเชิงขนาดและเฟสที่อยู่ในผลตอบสนองบังคับของระบบต่อสัญญาณอินพุตที่อยู่ในรูปแบบของสัญญาณไซน์ชอยดอลบริสุทธ์ที่มีความถี่  $\omega_{fs}$  เป็น  $|H(\omega_{fs})| = \frac{1}{m_s \sqrt{(\omega_n^2 - \omega_{fs}^2)^2 + \left(\frac{\alpha}{m_s}\right)^2 \omega_{fs}^2}}$  และ  $\angle H(\omega_{fs}) = -\tan^{-1} \frac{\alpha \omega_{fs}}{m_s(\omega_n^2 - \omega_{fs}^2)}$  ตามลำดับ เมื่อ

นิยามตัวแปรเวลา  $\tau = t + \Delta t$  ที่เป็นรูปแบบเดียวกับระบบเพนดูลัม จึงจัดรูปผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบสปริงบังคับได้ใหม่ดัง

$$\varphi_{cs}(t, \tau) = e^{-\alpha_d t} \left( X_s \cos(\omega_0 t) - \frac{D_3}{2} \cos(\omega_{fs}^+) - \frac{D_4}{2} \cos(\omega_{fs}^-) \right) + D_5 \cos(\omega_{fs}^f) \quad (2.76)$$

โดยที่  $\omega_{fs}^+ = (\omega_{fs} + \omega_0)t + \omega_{fs}\Delta t + \angle H(\omega_{fs} + \omega_0)$ ,  $\omega_{fs}^- = (\omega_{fs} - \omega_0)t + \omega_{fs}\Delta t + \angle H(\omega_{fs} - \omega_0)$ ,  $\omega_{fs}^f = \omega_{fs}t + \angle H(\omega_{fs})$ ,

$D_3 = |H(\omega_{fs} + \omega_0)|$ ,  $D_4 = |H(\omega_{fs} - \omega_0)|$ ,  $D_5 = |H(\omega_{fs})|$



รูปที่ 2.10 ผลตอบสนองสมบูรณ์ที่ได้จากการทดลองของระบบสปริงบังคับ

ซึ่งกรณีของการทดลองของระบบสปริงที่ถูกบังคับได้อาศัยเซ็นเซอร์วัดระยะตำแหน่งแบบอินฟราเรดรุ่น GP2Y0A02YK ต่อเข้ากับออสซิลโลสโคปและทำการแปลงฟูเรียร์เพื่อตรวจจับสัญญาณเอาต์พุตในโดเมนความถี่ดังรูปที่ 2.9 และทำนองเดียวกันกับระบบเพนดูลัมที่ถูกบังคับ เราสามารถกำหนดสัญญาณอินพุตด้วยลำโพงที่ต่อกับสปริงอีกด้านหนึ่งของมวลเพื่อบังคับระบบสปริง ในกรณีที่ลำโพงสัญญาณโคไซน์ที่มีความถี่ 1.4 เฮิรตซ์เข้าบังคับระบบสปริง ที่สั่นด้วยความถี่ธรรมชาติที่ 1.7 Hz จึงทำให้ได้ผลตอบสนองสมบูรณ์ที่มีรูปแบบเดียวกับระบบเพนดูลัม (รูปที่ 2.10) และสอดคล้องกับ

สมการที่ (2.76)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### 2.3.4 ปรากฏการณ์การสั่นพ้อง

จากการอธิบายในข้างต้น หากระบบมีปัจจัยการลดทอนเป็นศูนย์ และป้อนอินพุตบังคับ  $\varphi_i(t)$  เป็นสัญญาณไซน์ขอยอด  $A_i \cos(\omega_i t)$  ที่มีขนาด  $A_i$  และความถี่  $\omega_i$  จึงสามารถเขียนผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบการสั่นบังคับแบบทั่วไปสมการที่ (2.47) ได้ใหม่ดังนี้

$$\varphi_c(t) = X_c \cos(\omega_0 t) - |H(\omega_i)| A_i \cos(\omega_0 t) + |H(\omega_i)| A_i \cos(\omega_i t) \quad (2.77)$$

เมื่อ  $X_c$  คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้นของการสั่นบังคับแบบทั่วไป สำหรับ  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของระบบ และ  $|H(\omega_i)|$  คือค่าผลตอบสนองเชิงขนาดที่ขึ้นอยู่กับความถี่อินพุตอันเนื่องมาจากระบบกระทำกับอินพุตจึงอยู่ในรูปแบบดัง

$$|H(\omega_i)| = \left| \frac{1}{\omega_0^2 - \omega_i^2} \right| \quad (2.78)$$

จุดที่น่าสนใจคือหากความถี่อินพุต  $\omega_i$  มีค่าเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบ  $\omega_0$  พจน์ที่มีค่าผลตอบสนองเชิงขนาด  $|H(\omega_i)|$  คูณอยู่ด้วยต้องมีค่าเด่นชัดขึ้นมากกว่าพจน์อื่น ดังนั้นในกรณีที่ความถี่อินพุตมีค่าเท่ากับความถี่ธรรมชาติ ขนาดของสัญญาณเอาต์พุตนั้นต้องมีค่านันต์ในทางทฤษฎี และปรากฏการณ์นี้เองคือปรากฏการณ์การสั่นพ้อง (Resonance phenomenon) โดยสามารถวิเคราะห์หาค่าเงื่อนไขการสั่นพ้องของระบบการสั่นบังคับแบบทั่วไปด้วยการแปลงค่าผลตอบสนองสมบูรณ์ในสมการที่ (2.77) ให้อยู่ในรูปแบบเฟสเซอร์ของสัญญาณที่อยู่ในพิกัดเชิงขั้วดังสมการที่ (2.79)

$$\varphi_c(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (2.79)$$

โดยที่ค่าขนาด  $A(t)$  และเฟส  $\phi(t)$  เป็นไปดังนี้

$$A(t) = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (2.80)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \frac{p_y}{p_x} \quad (2.81)$$

โดยที่  $p_x$  คือสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $\cos(\omega_0 t)$  และแกน  $p_y$  คือสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $\sin(\omega_0 t)$  ตามลำดับ โดยเงื่อนไขขนาดของการสั่นพ้องนั้นมาจากกฎอนุรักษ์พลังงาน (Law of conservative of energy) ที่ทำให้ค่าพลังงานถูกจำกัดที่ค่าหนึ่งเท่านั้น ในที่นี้คือค่า  $A$  ในสมการที่ (2.80) สำหรับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนลิขสิทธิ์หรือมีเงื่อนไขการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปเผยแพร่โดยไม่ได้รับอนุญาต  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เงื่อนไขเฟสของการสั่นพ้องนั้นมาจากความจริงที่เกิดขึ้นนั้นคือการเปลี่ยนแปลงความถี่และเฟส  $\omega_0 t + \phi(t)$  ที่เกิดขึ้น ต้องมีค่าเท่ากับความถี่อินพุต  $\omega_i$  ดังสมการที่ (2.82)

$$\frac{d(\omega_0 t + \phi(t))}{dt} = \omega_i \quad (2.82)$$

และจาก

$$\frac{d(\tan^{-1} \theta(t))}{dt} = \frac{1}{1+(\theta(t))^2} \frac{d(\theta(t))}{dt} \quad (2.83)$$

จึงทำให้เขียนเงื่อนไขในสมการที่ (2.82) ได้ใหม่ดังนี้

$$\omega_0 + \frac{1}{\rho_x^2 + \rho_y^2} \left( \rho_x \frac{d\rho_y}{dt} + \rho_y \frac{d\rho_x}{dt} \right) = \omega_i \quad (2.84)$$

เมื่อทำการจัดรูปและแก้สมการเงื่อนไขต่างๆในข้างต้น (รายละเอียดในภาคผนวก ก.) จึงเป็นการพิสูจน์ได้ว่าขนาดของสัญญาณเอาต์พุต  $A(t)$  นั้นเป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงานตามสมการที่ (2.85) ซึ่งเมื่อวิเคราะห์เฟส จึงได้เงื่อนไขการสั่นพ้องของระบบการสั่นบังคับแบบทั่วไปในเชิงเฟสดังสมการที่ (2.86)

$$|A(t)| \leq 0 \quad (2.85)$$

$$\left| \frac{2X_c(\omega_0^2 - \omega_i^2)}{3A_i} \right| \leq 1 \quad (2.86)$$

อย่างไรก็ตามเมื่อทำการทดลองจริงแล้วเมื่อความถี่อินพุตบังคับเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติ ค่าขนาดของผลตอบสนองบังคับของระบบนั้นมีขนาดเพิ่มขึ้นในขณะที่ขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติมีค่าลดลง และจุดนี้เองที่เป็นการไม่สอดคล้องระหว่างผลการทดลองจริงกับการอธิบายการสั่นบังคับแบบทั่วไปดังในสมการที่ (2.77) นอกเหนือจากนี้ปรากฏการณ์การสั่นพ้องที่เกิดขึ้นจริงนั้นไม่ได้เกิดขึ้นสำหรับที่ความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติเท่านั้น ความถี่อินพุตที่เป็นจำนวน  $n$  เท่าของความถี่ธรรมชาติ  $\omega_i = n\omega_0$  เมื่อ  $n=1,2,3,\dots$  นั้นสามารถก่อให้เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องได้เช่นกัน โดยสามารถเรียกปรากฏการณ์ได้อีกชื่อหนึ่งคือการสั่นพ้องแบบซิมพาเทติก (Sympathetic resonance)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ซึ่งการสั่นบังคับแบบทั่วไปในปัจจุบันไม่สามารถอธิบายถึงกลไกลเชื่อมโยงระหว่งการสั่นพ้องที่ฮาร์มอนิกมูลฐานกับฮาร์มอนิกจำนวนเท่านี้ได้

ซึ่งการไม่สอดคล้องดังที่กล่าวมานั้นสามารถอธิบายได้เมื่ออธิบายการสั่นพ้องโดยอาศัยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ในสถานการณ์เดียวกันกับการสั่นบังคับทั่วไปที่ได้ผลตอบสนองสมบูรณดังในสมการที่ (2.77) เมื่อวิเคราะห์ด้วยการอาศัยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา และกำหนดให้ตัวแปรเวลา  $\tau$  มีค่าเท่ากับตัวแปร  $t$  จึงสามารถเขียนผลตอบสนองสมบูรณได้ใหม่ดังนี้

$$\varphi_c(t) = \left( \begin{array}{l} X_{cr} \cos(\omega_0 t) \\ - \frac{|H((\omega_0 + \omega_i))| A_i}{2} \cos((\omega_0 + \omega_i)t) \\ - \frac{|H((\omega_0 - \omega_i))| A_i}{2} \cos((\omega_0 - \omega_i)t) + |H(\omega_i)| A_i \cos(\omega_i t) \end{array} \right) \quad (2.87)$$

โดยที่  $X_{cr}$  คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้น จากสมการที่ (2.87) สังเกตได้ว่าพจน์ผลตอบสนองบังคับ  $|H(\omega_i)| A_i \cos(\omega_i t)$  นั้นมีค่าเด่นที่สุดเมื่อความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติ นอกเหนือจากนี้เมื่อวิเคราะห์เงื่อนไขการสั่นพ้องด้วยวิธีการเดียวกันกับการสั่นบังคับแบบทั่วไปในข้างต้น (รายละเอียดในภาคผนวก ก.) จึงได้เงื่อนไขการสั่นพ้องทั้งในเชิงขนาดและเฟสดังสมการที่ (2.88) และ (2.89) ตามลำดับ

$$\left| \frac{4X_{cr}(\omega_0^2 - \omega_i^2)(\omega_i^2 - (2\omega_0)^2)}{A_i(4\omega_0^2 - 3\omega_i^2)} \right| \leq 1 \quad (2.88)$$

$$\left| \frac{6X_{cr}(\omega_0^2 - \omega_i^2)(\omega_i^2 - (2\omega_0)^2)}{A_i(22\omega_0^2 - 9\omega_i^2 + 4\omega_0\omega_i)} \right| \leq 1 \quad (2.89)$$

จุดที่น่าสนใจเกี่ยวกับเงื่อนไขการสั่นในสมการที่ (2.88) และ (2.89) คือนอกจากการป้อนสัญญาณอินพุตที่มีความถี่เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์มอนิกมูลฐานสามารถทำให้เงื่อนไขเป็นจริงแล้ว การป้อนสัญญาณอินพุตที่มีความถี่เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์มอนิกที่สองก็สามารถทำให้เงื่อนไขเป็นจริงได้เช่นกัน ซึ่งจุดนี้เองคือการอธิบายการเกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติก จากที่กล่าวมาในข้างต้นจึงเป็นการแสดงอย่างชัดเจนว่าโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาสามารถทำนายและอธิบายผลการทดลองปรากฏการณ์การสั่นพ้องที่เกิดขึ้นจริงได้สอดคล้องกว่าการสั่นบังคับแบบทั่วไป

โดยภาพรวมในข้างต้นสามารถสังเกตได้ว่าการวิเคราะห์ระบบการสั่นบังคับด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลานั้น มีความสอดคล้องกับผลการทดลองจริงมากกว่าวิธีการวิเคราะห์ระบบการสั่นบังคับแบบทั่วไป อย่างไรก็ตามในกรณีที่ระบบการสั่นนั้นมีอันตรกริยากับปัจจัยภายนอกนั้นไม่ได้มีแต่ในมุมมองของการถูกบังคับ สำหรับในระบบการสั่นตนเองนั้น มีอันตรกริยากับปัจจัยภายนอกในรูปแบบ

ของการรบกวน (Perturbation) ซึ่งในรูปแบบของการรบกวนนั้นค่าขนาดของเอาต์พุตที่ได้จากระบบ ต้องไม่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นโดยสามารถแสดงรายละเอียดได้ในลำดับถัดไป

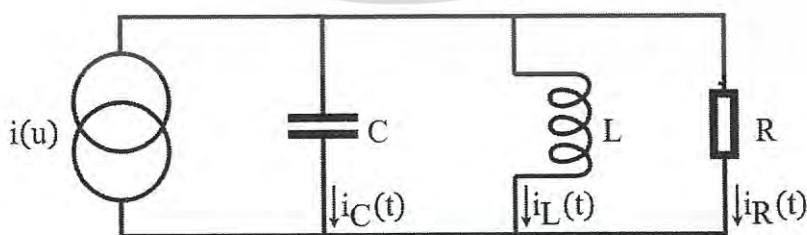
## 2.4 การสั่นตนเอง

นิยามของระบบการสั่นตนเองคือระบบที่สามารถสั่นได้ด้วยการอาศัยแหล่งกำเนิดพลังงาน เท่านั้น ระบบการสั่นตนเองถูกนิยามครั้งแรกโดย A.A. Andronov ในปี ค.ศ. 1937 [12] โดยนิยามระบบการสั่นตนเองนี้ว่าเป็นระบบออโตโนมัส (Autonomous) หรือหมายถึงระบบที่ไม่ถูกรบกวนจากปัจจัยภายนอกที่แปรเปลี่ยนตามเวลา และระบบการสั่นตนเองต้องตรงตามเงื่อนไขสองข้อนั้นคือ

1. ระบบการสั่นตนเองถูกระตุ้นและรักษาระดับการสั่นด้วยพลังงานหรือแรงภายในที่ขึ้นอยู่กับพิกัดของระบบเท่านั้น
2. ขนาดของการสั่นต้องถูกนิยามจากคุณสมบัติของระบบและไม่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นไม่ว่าช่วงใดก็ตาม

โดยความเห็นของ Andronov ที่มีต่อระบบสั่นตนเองนั้นคือระบบสั่นที่มีแหล่งกำเนิดพลังงานที่คงที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลา โดยระบบสามารถแปลงพลังงานที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาให้กลายเป็นการสั่นได้ ซึ่งในปัจจุบันแนวคิดการสั่นตนเองได้ถูกพัฒนาขึ้นมาให้ครอบคลุมกว่าเดิม [12] ในส่วนของการนิยามว่าระบบการสั่นตนเองเป็นระบบออโตโนมัสได้ถูกยกเลิก และเงื่อนไขสองข้อได้ถูกปรับปรุงเป็นดังนี้

1. ขนาดของการสั่นในสภาวะคงตัวของการสั่นต้องเป็นอิสระต่อสภาวะเริ่มต้นในช่วงกว้างบางช่วง เช่นการมีอยู่ของตัวดึงดูด (Attractor) อย่างน้อยหนึ่งตัวในเฟสสเปซ (Phase space) ของระบบ
2. ความถี่ที่ถูกผลิตออกมาจากระบบต้องเป็นอิสระหรือกึ่งอิสระต่อความถี่ของแหล่งกำเนิด และนิยามสองข้อนี้เองที่ทำให้ระบบการสั่นตนเองกับการสั่นบังคับนั้นแตกต่างกันอย่างชัดเจน ดังนั้นวงจรกำเนิดสัญญาณในทางไฟฟ้าจึงถูกนิยามว่าเป็นระบบการสั่นตนเองทั้งหมด เพื่อแสดงความหมายทางฟิสิกส์ของการสั่นตนเองในวงจรไฟฟ้า จึงยกตัวอย่างวงจรดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 วงจรการสั่นตนเองตัวอย่าง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $i(u)$  คือกระแสรวมที่ขึ้นอยู่กับแรงดันของแหล่งกำเนิด  $i_R(t)$  คือกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน  $R$   $i_C(t)$  คือกระแสที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุ  $C$  และ  $i_L(t)$  คือกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ  $L$  จากกระแสรวมคือการรวมกันระหว่างกระแส  $i_R(t)$   $i_C(t)$  และ  $i_L(t)$  ดังนั้น

$$i(u) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t) \quad (2.90)$$

และจากความสัมพันธ์ของกระแสที่ไหลผ่านตัวต้านทาน  $i_R(t) = \frac{u(t)}{R}$  กระแสที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุ  $i_C(t) = C \frac{du(t)}{dt}$  และกระแสที่ไหลผ่านตัวเหนี่ยวนำ  $i_L(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$  เมื่อแทนค่าเหล่านี้พร้อมจัดรูป (2.90) จึงได้ (2.91)

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = \frac{1}{C} \frac{di(u)}{dt} \quad (2.91)$$

ในกรณีอย่างง่าย จึงกำหนดให้ความสัมพันธ์ระหว่างกระแสและแรงดันเป็นเชิงเส้น  $i(u) = au(t)$  ดังนั้น  $\frac{di(u)}{dt} = \frac{di(u)}{du(t)} \frac{du(t)}{dt} = a \frac{du(t)}{dt}$  จึงทำให้จัดรูปสมการที่ (2.91) ได้ใหม่เป็น (2.92)

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \left( \frac{1}{RC} - \frac{a}{C} \right) \frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u(t) = 0 \quad (2.92)$$

เนื่องจากขนาดที่ได้จากระบบสั่นตนเองนั้นต้องไม่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนั้นวิธีการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ตั้งไว้ในระบบสั่นธรรมชาติและระบบการสั่นบังคับจึงใช้ไม่ได้ วิธีการหาคำตอบของระบบสั่นตนเองต้องอาศัยทฤษฎีรบกวน (Perturbation theory) [14] ซึ่งสามารถตั้งคำตอบทั่วไปให้อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (2.93)

$$u(t) = A(t) \cos(\omega_0 t) \quad (2.93)$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับแรกและอันดับสองของสมการที่ (2.93) จึงเป็นไปดังสมการที่ (2.94) และ (2.95)

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{dA(t)}{dt} \cos(\omega_0 t) - \omega_0 A(t) \sin(\omega_0 t) \quad (2.94)$$

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = \frac{d^2 A(t)}{dt^2} \cos(\omega_0 t) - 2\omega_0 \frac{dA(t)}{dt} \sin(\omega_0 t) - \omega_0^2 A(t) \cos(\omega_0 t) \quad (2.95)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อแทนสมการที่ (2.93) ถึงสมการที่ (2.95) ลงในสมการที่ (2.92) และแยกพิจารณาสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน  $\sin(\omega_0 t)$  และ  $\cos(\omega_0 t)$  เนื่องจากสองฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันตั้งฉากกัน (Orthogonal function) จึงได้สมการเชิงอนุพันธ์ออกมาสองสมการดังนี้

$$2 \frac{dA(t)}{dt} + \left( \frac{1}{RC} - \frac{a}{C} \right) A(t) = 0 \quad (2.96)$$

$$\frac{d^2 A(t)}{dt^2} - \omega_0^2 A(t) + \left( \frac{1}{RC} - \frac{a}{C} \right) \left( \frac{dA(t)}{dt} \right) + \frac{A(t)}{LC} = 0 \quad (2.97)$$

หากสมมุติค่าคำตอบให้  $A(t) = e^{mt}$  แล้วแทนลงในสมการที่ (2.96) เมื่อแก้สมการที่ (2.96) จึงได้ค่า  $m$  เป็นไปดังนี้

$$m = -\frac{1-aR}{2RC} \quad (2.98)$$

สำหรับการแก้สมการที่ (2.97) สามารถทำได้โดยการแทนค่า  $A(t) = e^{mt}$  เช่นเดียวกับการแก้สมการที่ (2.96) โดยแทนค่า  $m$  ที่ได้จากสมการที่ (2.98) ลงในสมการที่ (2.97) ด้วย จึงได้ค่าความถี่  $\omega_0$  เป็นไปดังนี้

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{(1-aR)^2}{4R^2 C^2}} \quad (2.99)$$

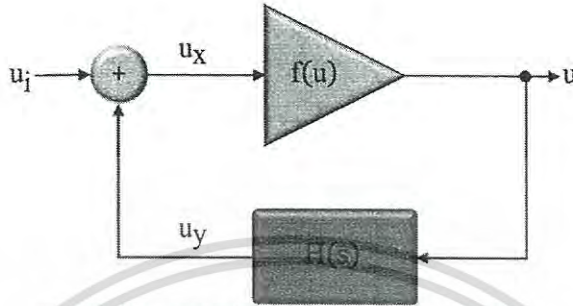
ดังนั้นค่าคำตอบ  $u(t)$  จึงเป็นไปดังสมการที่ (2.100)

$$u(t) = e^{-\frac{1-aR}{2RC}t} \cos(\omega_0 t) \quad (2.100)$$

จากสมการที่ (2.100) ค่าขนาดของสัญญาณที่ถูกผลิตออกมานั้นขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน  $i(u)$  สำหรับในกรณีอย่างง่ายนี้หากระบบผลิตสัญญาณที่มีขนาดคงที่ ค่า  $1-aR$  ต้องมีค่าเป็นศูนย์ ซึ่งสามารถแปลความหมายเป็นเชิงฟิสิกส์ว่าวงจรต้องถูกกระตุ้นด้วยค่าแรงดัน  $a = \frac{1}{R}$  เพื่อคงค่าขนาดของสัญญาณที่ถูกผลิตออกจากระบบนั่นเอง อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ห้วงจรกำเนิดสัญญาณบนพื้นฐานทฤษฎีการรบกวนมักต้องอาศัยสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นโดยส่วนใหญ่ ทำให้วิธีการหาค่าคำตอบนั้นมีหลากหลายรูปแบบ สำหรับผู้อ่านที่ต้องการเข้าใจทฤษฎีการรบกวนในเชิงลึกสามารถศึกษารายละเอียดทางคณิตศาสตร์ได้ในภาคผนวก ข.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์วงจรกำเนิดสัญญาณได้ถูกพัฒนาให้อธิบายอยู่ในรูปแบบโมเดลการป้อนกลับ (Feedback model) เพื่อการนำไปใช้สำหรับวิเคราะห์วงจรกำเนิดสัญญาณในรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป โดยสามารถแสดงรายละเอียดพอสังเขปได้ดังต่อไปนี้ วงจรกำเนิดสัญญาณใดๆ สามารถแทนได้ด้วยแผนภาพดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 แผนภาพระบบการป้อนกลับ

จากรูปที่ 2.12  $f(u)$  คือภาคขยายสัญญาณ ซึ่งภาคขยายนี้สามารถนิยามให้เป็นระบบเชิงเส้นหรือไม่เป็นเชิงเส้นได้ ในกรณีของวงจรมักแทนส่วนนี้เป็นวงจรแอกทีฟ (Active circuit) ที่มีอัตราการขยายเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง (สำหรับระบบเชิงเส้น) หรือมีอัตราการขยายในรูปแบบอนุกรม (สำหรับระบบไม่เป็นเชิงเส้น) ในส่วน  $H(s)$  คือภาคเรโซแนนซ์ที่มีลักษณะเป็นระบบกรองความถี่แถบผ่าน (Band pass filter) ซึ่งสามารถเรียกได้อีกชื่อหนึ่งว่าวงจรเรโซแนนซ์ ดังนั้นภาคการสั่นพ้องจึงเป็นวงจรพาสซีฟ (Passive circuit) ที่เป็นระบบเชิงเส้น โดยฟังก์ชันส่งผ่านแบบลูปปิด (Closed-loop transfer function) ของระบบป้อนกลับ  $H_c(s)$  เป็นไปดังนี้

$$H_c(s) = \frac{u(s)}{u_i(s)} = \frac{f(u)}{1 - f(u)H(s)} \quad (2.101)$$

โดยนิยามพจน์  $f(u)H(s)$  คืออัตราการขยายลูปปิด (Closed-loop gain) โดยที่ระบบสามารถกำเนิดสัญญาณได้ต้องมีเงื่อนไขทางขนาด  $|f(u)H(s)|$  และเฟส  $\angle f(u)H(s)$  เป็นไปดังนี้

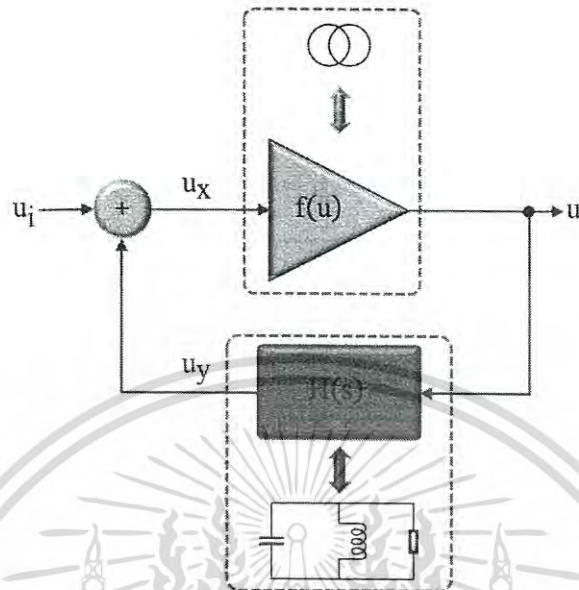
$$|f(u)H(s)| = 1 \quad (2.102)$$

$$\angle f(u)H(s) = 0 \quad (2.103)$$

โดยเงื่อนไขทางขนาดและเฟสในสมการที่ (2.102) และสมการที่ (2.103) นี้ถูกเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าเกณฑ์ของ Barkhausen (Barkhausen's criteria) เพื่อความเข้าใจในเชิงลึกขึ้น จึงยกตัวอย่างวงจรในรูปที่ 2.11 ประกอบการอธิบาย จากวงจรในรูปที่ 2.11 สามารถแยกออกเป็นสองส่วน นั่นคือภาคขยาย  $f(u)$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้ภายในเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้เผยแพร่หรือใช้งานด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ที่แทนฟังก์ชันเชิงเส้นด้วย  $f(u) \equiv i(u) = au$  และภาคเรโซแนนซ์ที่แทนด้วยวงจรเรโซแนนซ์ RLC ดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แผนภาพระบบการป้อนกลับเทียบกับวงจรถ้าเนิดสัญญาณ

จากรูปที่ 2.13 ฟังก์ชันส่งผ่าน  $H(s)$  ของวงจรเรโซแนนซ์ RLC นั้นเป็นไปดัง

$$H(s) = \frac{sLR}{s^2RLC + sL + R} \quad (2.104)$$

ดังนั้นฟังก์ชันส่งผ่านของอัตราการขยายลูปปิดจึงเป็นไปดัง

$$f(u)H(s) = \frac{saLR}{s^2RLC + sL + R} \quad (2.105)$$

โดยสามารถหาขนาดและเฟสของฟังก์ชันส่งผ่านนี้ได้ดังสมการที่ (2.106) และ (2.107) ตามลำดับ

$$|f(u)H(j\omega)| = \sqrt{\frac{a^2R^2\omega^2L^2}{R^2(1-\omega^2LC)^2 + (\omega L)^2}} \quad (2.106)$$

$$\angle f(u)H(j\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{(R - \omega^2RLC)}{\omega^3aRL^3} \right) \quad (2.107)$$

จากดังที่ในข้างต้นว่าหากวงจรถูกกระตุ้นด้วยค่าแรงดัน  $a = \frac{1}{R}$  ค่าความถี่  $\omega$  ที่ได้จะต้องมีค่าเท่ากับ

$\sqrt{\frac{1}{LC}}$  ซึ่งหากนำค่าเหล่านี้แทนลงในสมการที่ (2.106) จึงได้ว่าค่า  $|f(u)H(j\omega)| = 1$  และเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$\angle f(u)H(s)=0$  ที่ตรงตามเงื่อนไขของการกำเนิดสัญญาณของวงจร ดังนั้นจึงสามารถกล่าวได้ว่าการวิเคราะห์ด้วยโมเดลการป้อนกลับจึงเป็นสิ่งเดียวกับการวิเคราะห์ด้วยสมการอนุพันธ์ นอกเหนือจากนี้ยังสามารถพิสูจน์ได้ในอีกทางหนึ่งโดยจัดรูปความสัมพันธ์ในสมการที่ (2.101) ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (2.108)

$$(1-f(u)H(s))u(s)=f(u)u_i(s) \quad (2.108)$$

เมื่อแทนค่า  $H(s)$  ที่ได้จากสมการที่ (2.104) และ  $f(u)=au$  จึงเขียนสมการที่ (2.108) ได้ใหม่เป็น

$$\left(1-\frac{saLR}{s^2RLC+sL+R}\right)u(s)=au_i(s) \quad (2.109)$$

ในกรณีของวงจรกำเนิดสัญญาณที่ปราศจากอินพุตให้กับระบบ จึงสามารถกำหนดให้  $u_i(s)=0$  ดังนั้นสมการที่ (2.109) จึงสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

$$s^2u(s)+s\left(\frac{1}{RC}-\frac{a}{C}\right)u(s)+\frac{1}{LC}u(s)=0 \quad (2.110)$$

และหากทำการแปลงกลับลาปลาซ จึงได้สมการอนุพันธ์ที่ตรงกันกับสมการที่ (2.92)

เพื่อความครอบคลุมในรายละเอียดด้านอื่นของระบบการสั่นตนเอง ในลำดับถัดไปจึงเป็นการแสดงตัวอย่างของผลกระทบของการรบกวนที่มีต่อวงจรกำเนิดสัญญาณในรูปแบบของการเปลี่ยนแปลงความถี่ แล้วอธิบายรายละเอียดเกี่ยวกับสัญญาณรบกวนภายในวงจรกำเนิดสัญญาณในลำดับถัดมา และอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นล็อก (Injection locked phenomenon) ในลำดับสุดท้าย

#### 2.4.1 วงจรกำเนิดสัญญาณที่ควบคุมความถี่ด้วยแรงดันไฟฟ้า

วงจรกำเนิดสัญญาณที่ควบคุมความถี่ด้วยศักติไฟฟ้า (Voltage Control Oscillator: VCO) คือระบบกำเนิดสัญญาณที่สามารถปรับเปลี่ยนความถี่ของสัญญาณได้ตามค่าแรงดันไฟฟ้าของสัญญาณรบกวนหรืออินพุต จึงทำให้วงจรกำเนิดสัญญาณที่ควบคุมความถี่ด้วยศักติไฟฟ้าถูกนำมาใช้สำหรับการสร้างสัญญาณเอฟเอ็ม (Frequency Modulation: FM) โดยสามารถอธิบายระบบนี้ได้ด้วยสมการอนุพันธ์แบบสโตแคสติก (Stochastic) ดังสมการที่ (2.111)

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = \frac{k_f \frac{dv(t)}{dt}}{\omega_0 + k_f v(t)} \frac{du(t)}{dt} - \left( 2k_f \omega_0 v(t) + (k_f v(t))^2 \right) u(t) \quad (2.111)$$

โดย  $u(t)$  คือเอาต์พุตจากระบบ  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของระบบ  $v(t)$  คือสัญญาณอินพุตที่ป้อนให้กับระบบ  $k_f$  คือค่าคงที่ ในกรณีที่ไม่มี การป้อนอินพุตเข้ามาในระบบ  $v(t)=0$  จึงสามารถจัดรูปสมการที่ (2.101) ได้ใหม่เป็นสมการที่ (2.112)

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (2.112)$$

ที่มีคำตอบทั่วไปเป็นไปดัง

$$u(t) = A_{FM} \cos(\omega_0 t) \quad (2.113)$$

โดยที่  $A_{FM}$  คือขนาดของสัญญาณ จากการประยุกต์ใช้วิธีการแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์ และเนื่องจากขนาดของสัญญาณเอฟเอ็มนั้นต้องมีขนาดคงที่และมีเฟสแปรเปลี่ยนตามเวลา  $\theta(t)$  จึงทำให้กำหนดค่าคำตอบเฉพาะ  $u_{FM}(t)$  อยู่ในรูปแบบสมการที่ (2.114)

$$u_{FM}(t) = A_{FM} \cos(\omega_0 t + \theta(t)) \quad (2.114)$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองของสมการที่ (2.114) จึงเป็นไปดังสมการที่ (2.115) และ (2.116) ตามลำดับ

$$\frac{du_{FM}(t)}{dt} = -A_{FM} \left( \omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} \right) \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \quad (2.115)$$

$$\frac{d^2u_{FM}(t)}{dt^2} = -A_{FM} \left( \left( \omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \cos(\omega_0 t + \theta(t)) + \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \sin(\omega_0 t + \theta(t)) \right) \quad (2.116)$$

เมื่อแทนค่าจากสมการที่ (2.114) ถึงสมการที่ (2.116) ลงในสมการที่ (2.111) และแยกพิจารณาสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน  $\sin(\omega_0 t + \theta(t))$  และ  $\cos(\omega_0 t + \theta(t))$  ด้วยคุณสมบัติของการตั้งฉากกันของทั้งสองฟังก์ชัน จึงได้สมการเชิงอนุพันธ์ออกมาสองสมการดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(2\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} + \left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2\right) = \left(2\omega_0 k_f v(t) + (k_f v(t))^2\right) \quad (2.117)$$

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{k_f \frac{dv(t)}{dt}}{\omega_0 + k_f v(t)} \left(\omega_0 + \frac{d\theta(t)}{dt}\right) \quad (2.118)$$

เพื่อให้สมการที่ (2.117) และ (2.118) เป็นจริง จึงได้เงื่อนไขดังสมการที่ (2.119)

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = k_f v(t) \quad (2.119)$$

ดังนั้นความสัมพันธ์ของเฟสกับสัญญาณอินพุตจึงเป็นไปดังสมการที่ (2.120)

$$\theta(t) = k_f \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau \quad (2.120)$$

เมื่อแทน  $\theta(t)$  ที่ได้ในสมการที่ (2.120) ลงในสมการที่ (2.114) จึงจัดรูปแบบสมการที่ (2.114) ได้ใหม่เป็น

$$u_{FM}(t) = A_{FM} \cos\left(\omega_0 t + k_f \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau\right) \quad (2.121)$$

จากสมการที่ (2.121) เห็นได้ชัดเจนว่าสอดคล้องกับสมการสัญญาณเอฟเอ็มในทางทฤษฎี โดยค่าคงที่  $k_f$  ได้ถูกนิยามเป็นความไวในการมอดูเลตชั้นหรือค่าคงที่ของความถี่ที่เปลี่ยนแปลงต่อขนาดของสัญญาณอินพุต ในกรณีที่สัญญาณอินพุตถูกกำหนดเป็น  $v(t) = A_i \cos(\omega_i t)$  จึงสามารถจัดรูปสมการที่ (2.121) ได้ใหม่เป็น

$$u_{FM}(t) = A_{FM} \cos\left(\omega_0 t + \frac{k_f A_i}{\omega_i} \sin(\omega_i t)\right) \quad (2.122)$$

เนื่องจากหน่วยของ  $k_f$  อยู่ในมิติของการเปลี่ยนแปลงความถี่ต่อขนาดของอินพุต (เฮิร์ตซ์ต่อโวลต์หรือเรเดียนต่อโวลต์) ดังนั้นค่า  $k_f A_i$  ในสมการที่ (2.122) จึงถูกแทนให้อยู่ในนิยามของการเบี่ยงเบนความถี่ชั่วขณะ  $\Delta\omega$  ได้ และหากนิยามให้ดัชนีการมอดูเลต (Modulation index) เป็น  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_i}$  จึงจัดรูปสมการที่ (2.122) ได้ใหม่ดัง

$$u_{FM}(t) = A_{FM} \cos(\omega_0 t + \beta \sin(\omega_i t)) \quad (2.123)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นในกรณีที่ค่าดัชนีการมอดูเลตมีค่ามาก การเปลี่ยนแปลงหรือการเบี่ยงเบนความถี่ของสัญญาณเอาต์พุตจึงมีค่ามากตามไปด้วย

## 2.4.2 สัญญาณรบกวนในวงจรกำเนิดสัญญาณ

เนื่องด้วยวงจรกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ สัญญาณรบกวน (Noise signal) เป็นสัญญาณที่เข้ามา มีอันตรกิริยากับวงจรอย่างหลีกเลี่ยงไม่ได้ อีกทั้งสัญญาณรบกวนยังสามารถก่อให้เกิดความผิดพลาดหรือความเพี้ยนในระบบสื่อสารได้ ดังนั้นการเข้าใจในธรรมชาติของสัญญาณรบกวนจึงเป็นสิ่งที่สำคัญ สัญญาณรบกวนได้ถูกนิยามเป็นสัญญาณที่ไม่ต้องการที่เข้ามารบกวนระบบ โดยสัญญาณรบกวนได้บรรจุข่าวสารจากแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวนมาด้วยเสมอ ยกตัวอย่างเช่นสัญญาณรบกวนจากแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสตรงได้บรรจุข่าวสารที่เกี่ยวข้องกับการแปรปรวนขนาดเล็กของแรงดันไฟฟ้าจากแหล่งจ่ายไฟฟ้ากระแสตรงเป็นต้น ดังนั้นการแยกประเภทของสัญญาณรบกวนโดยทั่วไปจึงต้องแยกจากแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวน ซึ่งโดยรวมแล้วการแยกแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวนนั้นสามารถแยกออกเป็นสองประเภทได้แก่ สัญญาณรบกวนจากแหล่งภายนอก (External noise source) และสัญญาณรบกวนจากแหล่งภายใน (Internal noise source) อย่างไรก็ตามในบางมุมมองนั้นได้เน้นสำคัญในการพิจารณารูปแบบของการส่งผลกระทบต่อสัญญาณรบกวนที่มีต่อสัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากระบบเป็นสำคัญ ในมุมมองนี้ได้แบ่งแยกประเภทสัญญาณรบกวนเป็นสามประเภทคือ สัญญาณรบกวนแบบการบวก (Additive noise) สัญญาณรบกวนแบบการคูณ (Multiplicative noise) และสัญญาณรบกวนระหว่างสัญลักษณ์ (Intersymbol noise) โดยรูปแบบผลกระทบต่อสัญญาณรบกวนที่มีต่อสัญญาณเอาต์พุตของระบบนี้สามารถวิเคราะห์ได้จากทั้งปัจจัยภายนอกและระบบที่พิจารณา [15-17]

เพื่อแสดงรายละเอียดอย่างเป็นขั้นตอน หัวข้อนี้จึงอธิบายแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวนทั้งจากภายนอกและภายในระบบเสียก่อน แล้วอธิบายรูปแบบผลกระทบต่อสัญญาณที่มีต่อสัญญาณเอาต์พุตทั้งสามรูปแบบ และอธิบายการวิเคราะห์รูปแบบผลกระทบต่อสัญญาณรบกวนภายในวงจรกำเนิดสัญญาณในลำดับถัดมา และอธิบายความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัม (Power Spectral Spectrum: PSD) ที่เป็นคำตอบในทางปฏิบัติของสัญญาณไร้คาบเช่นสัญญาณรบกวนในลำดับสุดท้าย

### 2.4.2.1 สัญญาณรบกวนจากแหล่งภายนอก

สัญญาณรบกวนจากแหล่งภายนอกโดยส่วนมากแล้วเป็นสัญญาณที่ควบคุมไม่ได้ จึงทำให้ยากต่อการวิเคราะห์ ยกตัวอย่างเช่น

1. สัญญาณรบกวนจากบรรยากาศ (Atmospheric noise) เกิดจากสภาวะแวดล้อมของโลก เช่นสภาวะอากาศที่เกิดฟ้าแลบและฟ้าผ่าจากพายุฝน ที่เป็นสาเหตุของเกิดการเปลี่ยนแปลงสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตลอดเวลา ส่งผลให้มีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้ากระจายไปทั่วชั้นบรรยากาศของโลก ซึ่งบาง

ที่สามารถส่งผลกระทบต่อพื้นที่ที่อยู่ห่างไกลจากแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวนได้ หรือแม้แต่การเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กของโลกที่ส่งผลในทำนองเดียวกับการเกิดฟ้าแลบและฟ้าผ่า

2. สัญญาณรบกวนจากอวกาศ (Space noise) เกิดจากดาวฤกษ์ทั่วจักรวาลที่แผ่รังสีแม่เหล็กไฟฟ้าที่มีความยาวคลื่นในช่วงกว้าง โดยดาวฤกษ์ที่ใกล้โลกมากที่สุดคือดวงอาทิตย์นั้นยังมีการกระพริบของจุดดับบนดวงอาทิตย์ (Sunspot) และเปลวสุริยะ (Solar flare) ที่อาจก่อให้เกิดความแปรปรวนของรังสีที่แผ่ออกมาจนเป็นสัญญาณรบกวนเพิ่มเติมเข้ามายังโลก นอกเหนือจากนี้ยังมีรังสีไมโครเวฟพื้นหลังของจักรวาลที่กระจายตัวอย่างสม่ำเสมอทั่วจักรวาลที่มีความถี่ในช่วง 160.2 กิโลเฮิร์ตซ์ โดยนักวิทยาศาสตร์เชื่อว่าเกิดจากการระเบิดครั้งใหญ่ (Big bang) ของการกำเนิดจักรวาล

3. สัญญาณรบกวนจากสิ่งที่มีมนุษย์สร้างขึ้น (Man-made noise) สัญญาณรบกวนประเภทนี้นั้นเกิดจากอุปกรณ์ที่มนุษย์สร้างขึ้นเช่นสัญญาณรบกวนจากมอเตอร์ไฟฟ้าภายในอุปกรณ์ไฟฟ้าหลายประเภท แสงจากหลอดไฟฟ้าฟลูออเรสเซนต์ หรือแม้แต่สัญญาณรบกวนจากเครื่องยนต์ของรถยนต์ เป็นต้น

ซึ่งสามารถสังเกตจากตัวอย่างข้างต้นว่าถ้าวิเคราะห์สัญญาณรบกวนจากแหล่งภายนอกนั้นต้องอาศัยความเข้าใจเชิงลึกของคุณลักษณะในแต่ละแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวน ซึ่งสัญญาณรบกวนจากบางแหล่งก็มีการควบคุมได้ แต่บางแหล่งก็ไม่สามารถควบคุมได้

#### 2.4.2.2 สัญญาณรบกวนจากแหล่งภายใน

โดยทั่วไปแล้วแหล่งสัญญาณรบกวนจากภายในระบบไฟฟ้านั้นมาจากสามแหล่งหลัก ได้แก่สัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิ (Thermal noise) สัญญาณรบกวนแบบสั้น (Shot noise) และสัญญาณรบกวนฟลิคเกอร์ (Flicker noise) ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดได้ดังต่อไปนี้

1. สัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิ หรือในอีกชื่อหนึ่งคือสัญญาณรบกวนจอห์นสัน (Johnson-Nyquist noise) ถูกตรวจพบได้ครั้งแรกในปี ค.ศ. 1926 โดย John Bertrand Johnson โดยเขาได้อธิบายสิ่งที่ตรวจจับได้นี้กับ Harry Nyquist ที่เป็นผู้อธิบายปรากฏการณ์ของสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิในเวลาต่อมา โดยหลักการแล้วสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิมาจากแนวคิดพื้นฐานของอุณหพลศาสตร์ (Thermodynamic) ร่วมกับกลศาสตร์เชิงสถิติ (Statistical mechanic) ที่ว่าด้วยการเคลื่อนที่แบบสุ่มของอนุภาคที่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิเช่นการเคลื่อนที่ของโมเลกุลของแก๊สในภาชนะที่บรรจุ การเคลื่อนที่ของอิเล็กตรอนในตัวนำ เป็นต้น ซึ่งค่าเฉลี่ยของการเคลื่อนที่แบบสุ่มของอนุภาคต้องเท่ากับศูนย์ แต่ค่าเฉลี่ยของการแปรปรวนของการเคลื่อนที่แบบสุ่มของอนุภาคเนื่องจากอุณหภูมิต้องไม่เท่ากับศูนย์ ยกตัวอย่างเช่นการเคลื่อนที่แบบสุ่มและการชนกันของโมเลกุลแก๊สในพื้นที่ที่จำกัดส่งผลให้ความดันเฉลี่ยเกิดการแปรปรวนแบบสุ่ม ดังนั้นหากอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจึงส่งผลให้พลังงานจลน์ของโมเลกุลและสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิเพิ่มขึ้นด้วย ในจุดนี้มีความคล้ายคลึงกับอิเล็กตรอนอิสระที่มีจำนวนมากภายในตัวนำไฟฟ้า โดยอิเล็กตรอนเหล่านี้มีทั้งสั่นแบบสุ่มอยู่ในบริเวณที่ตำแหน่งเสถียรและมีทั้งอิเล็กตรอนอิสระที่เคลื่อนที่ โดยการชนกันระหว่างอิเล็กตรอนอิสระที่เคลื่อน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์อื่นใด

ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กับอิเล็กทรอนิกส์ที่สั้นแบบสุ่มอยู่ในบริเวณที่ตำแหน่งเสถียรนี้ได้ก่อให้เกิดกระแสที่เกิดขึ้นและหายไปอย่างรวดเร็วในรูปแบบสุ่ม และกรณีที่ตัวนำไฟฟ้ามีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นจนส่งผลให้อิเล็กตรอนเคลื่อนที่ไปยังสถานะที่มีพลังงานสูงขึ้น กระแสที่เกิดในรูปแบบการสุ่มนี้จึงเพิ่มขึ้นตามลำดับ และสิ่งนี้เองคือต้นกำเนิดของสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิ ด้วยเหตุนี้เองทางปฏิบัติตัวนำไฟฟ้าต้องมีความต้านทานไฟฟ้าเสมอ (ยกเว้นกรณีตัวนำยิ่งยวดที่อุณหภูมิต่ำมากพอที่จะทำให้ให้อิเล็กตรอนอิสระที่สั้นในบริเวณตำแหน่งเสถียรไม่สั้น จึงไม่เกิดทั้งความต้านทานและสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิ) โดยค่าแรงดันเฉลี่ยกำลังสองของค่าแรงดันที่เกิดอย่างฉับพลันอันเนื่องมาจากการชนจนเกิดสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิ  $\bar{v}^2$  เป็นไปดังสมการที่ (2.124)

$$\bar{v}^2 = 4k_b T R \Delta f \quad (2.124)$$

เมื่อ  $k_b$  คือค่าคงที่โบลทซ์มันน์ที่มีค่า  $1.38 \times 10^{-23}$  จูลต่อองศาเคลวิน  $T$  คือค่าอุณหภูมิในหน่วยองศาเคลวิน  $R$  คือค่าความต้านทานในหน่วยโอห์ม และ  $\Delta f$  คือค่าแบนด์วิดท์ในหน่วยเฮิรตซ์

2. สัญญาณรบกวนแบบสั้น ที่เกิดขึ้นจากความไม่ต่อเนื่องของประจุอิเล็กตรอนในกระแสไฟฟ้า โดยในแต่ละประจุที่ไม่ต่อเนื่องนี้สามารถแทนได้ด้วยสัญญาณพัลส์ที่เรียงกันจนดูเหมือนเป็นกระแสต่อเนื่อง โดยในแต่ละพัลส์นี้มีคุณลักษณะแบบสุ่มและเป็นอิสระจากกัน ดังนั้นเมื่อมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านอุปกรณ์ไฟฟ้า สัญญาณรบกวนแบบสั้นต้องเกิดขึ้นเสมอ โดยสามารถแสดงค่าเฉลี่ยกำลังสองของกระแสสัญญาณรบกวนแบบสั้น  $\bar{i}^2$  ได้ดัง

$$\bar{i}^2 = 2q I_A \Delta f \quad (2.125)$$

โดย  $q$  คือประจุของอิเล็กตรอนที่มีค่า  $1.6 \times 10^{-19}$  คูโลมบ์  $I_A$  คือค่ากระแสเฉลี่ยของพัลส์อิสระ และ  $\Delta f$  คือค่าแบนด์วิดท์ในหน่วยเฮิรตซ์

สังเกตได้ว่าทั้งสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิและสัญญาณรบกวนแบบสั้นนั้นมาจากนิยามคล้ายกับฟังก์ชันอิมพัลส์แบบสุ่มจำนวนมาก เนื่องจากการแปลงฟูเรียร์  $F\{\delta(t)\}$  ของแต่ละสัญญาณอิมพัลส์  $\delta(t)$  ได้ค่าคงที่ในโดเมนความถี่สำหรับตลอดทุกความถี่ ส่งผลให้ค่าความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัม (Power Spectrum Density: PSD) นั้นมีค่าคงที่ตลอดช่วงความถี่ หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่าค่ากำลังงานต่อแบนด์วิดท์นั้นมีค่าคงที่ (รายละเอียดเกี่ยวกับค่าความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัมสามารถแสดงได้ในหัวข้อ 2.4.2.7) โดยลักษณะของสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิและสัญญาณรบกวนแบบสั้นที่มีค่าความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัมเป็นค่าคงที่นี้สอดคล้องกับนิยามของสัญญาณรบกวนขาว (White noise) จึงกล่าวได้ว่าทั้งสัญญาณรบกวนจากอุณหภูมิและสัญญาณรบกวนแบบสั้นคือสัญญาณรบกวนขาวนั่นเอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3. สัญญาณรบกวนฟลิคเกอร์ เป็นสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นกับเกือบทุกอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ ซึ่งเกิดขึ้นจากหลายกรณีเช่นความไม่เป็นอุดมคติของช่องนำสัญญาณ การกำเนิดและรวมกันของสัญญาณรบกวนในกระแสขาเบสของทรานซิสเตอร์ เป็นต้น ซึ่งพฤติกรรมของสัญญาณรบกวนฟลิคเกอร์นั้นมักอยู่ในรูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างไฟฟ้ากระแสตรงที่ป้อนให้กับอุปกรณ์ไฟฟ้า กับปรากฏการณ์ทางความถี่ต่ำที่เป็นไปเช่นสมการที่ (2.126)

$$\bar{I}^2 = K_D \frac{I_{DC}^\alpha}{f^\beta} \Delta f \quad (2.126)$$

เมื่อกำหนดให้  $\bar{I}^2$  คือค่าเฉลี่ยกำลังสองของกระแสสัญญาณรบกวนฟลิคเกอร์  $K_D$  คือตัวแปรที่ขึ้นอยู่กับคุณลักษณะของอุปกรณ์  $I_{DC}$  คือไฟฟ้ากระแสตรง  $f$  คือความถี่ที่พิจารณา  $\beta$  คือค่าคงที่เกี่ยวกับมาตรฐานของอุปกรณ์  $\alpha$  คือค่าคงที่ที่อยู่ในช่วง 0.5 ถึง 2 และ  $\Delta f$  คือค่าแบนด์วิดท์ในหน่วยเฮิรตซ์

#### 2.4.2.3 สัญญาณรบกวนแบบการบวก

สัญญาณรบกวนแบบการบวกคือลักษณะการส่งผลกระทบต่อสัญญาณรบกวนที่มีต่อสัญญาณที่พิจารณาในรูปแบบการบวก ในกรณีของสัญญาณรบกวนแบบการบวกในระบบการสั่น หากสัญญาณเอาต์พุตของระบบการสั่น  $\xi_v(t)$  อยู่ในรูปแบบดัง

$$\xi_v(t) = (a + A(t)) \cos(\omega t + \phi + \Psi(t)) \quad (2.127)$$

สำหรับ  $a$  และ  $\phi$  คือขนาดและเฟสที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาตามลำดับ  $\omega$  คือความถี่ที่ระบบการสั่นผลิตออกมา สำหรับกรณีที่สัญญาณถูกมอดูเลต จึงให้  $A(t)$  และ  $\Psi(t)$  คือขนาดและเฟสที่แปรเปลี่ยนตามเวลา ในกรณีที่กำหนดให้  $N(t)$  คือผลตอบสนองของระบบที่มีต่อสัญญาณรบกวน สัญญาณเอาต์พุตของระบบการสั่นที่มีสัญญาณรบกวนแบบการบวก  $\xi_d(t)$  จึงเป็นไปเช่น

$$\xi_d(t) = (a + A(t)) \cos(\omega t + \phi + \Psi(t)) + N(t) \quad (2.128)$$

โดยทั่วไปแล้วหากเอาต์พุตของระบบถูกรบกวนด้วยสัญญาณรบกวนในรูปแบบการบวกนั้นหมายถึงสัญญาณรบกวนเข้าไปกระทำกับระบบในรูปแบบการบังคับระบบ (Forced system)

#### 2.4.2.4 สัญญาณรบกวนแบบการคูณ

สำหรับสัญญาณรบกวนแบบการคูณในระบบการสั่นนั้น หากเอาต์พุตของระบบอยู่ในรูปแบบสมการที่ (2.127) สัญญาณเอาต์พุตของระบบการสั่นที่มีสัญญาณรบกวนแบบการคูณ  $\xi_m(t)$  จึงเป็นไปดังสมการที่ (2.129)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\xi_m(t) = (a + \eta(t))A(t) \cos(\omega t + \phi + \Psi(t)) \quad (2.129)$$

สังเกตได้ว่าสมการที่ (2.129) นั้นอยู่ในรูปแบบที่คล้ายคลึงกับสมการที่ (2.128) ต่างกันในจุดที่สมการที่ (2.129) นั้นไม่มีผลตอบสนองของระบบที่มีต่อสัญญาณรบกวน  $N(t)$  ดังเช่นสมการที่ (2.128) แต่มีผลของสัญญาณรบกวนที่ทำให้ค่าพารามิเตอร์ของระบบมีการเปลี่ยนแปลง  $\eta(t)$  หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่าสัญญาณรบกวนนั้นกระทำกับระบบในรูปแบบการรบกวนระบบ (Perturbed system) ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดการแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์ในทฤษฎีการรบกวน (รายละเอียดแนวคิดการแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์แสดงในภาคผนวก ข. หัวข้อที่ ข.1)

#### 2.4.2.5 สัญญาณรบกวนระหว่างสัญลักษณ์

สัญญาณรบกวนระหว่างสัญลักษณ์เป็นสัญญาณรบกวนที่มีลักษณะพิเศษกว่าสัญญาณรบกวนแบบอื่น โดยสัญญาณรบกวนระหว่างสัญลักษณ์นั้นมักเกิดจากการเพิ่มความเร็วในการส่งข้อมูลภายใต้เงื่อนไขการจำกัดแบนด์วิดท์ของสัญญาณจนเกิดความไม่เป็นเชิงเส้นแฝงของช่องสัญญาณ และในบางกรณีของการแพร่กระจายคลื่นแบบหลายทิศทางก็สามารถก่อให้เกิดสัญญาณรบกวนระหว่างสัญลักษณ์ได้เช่นกัน ซึ่งสัญญาณรบกวนระหว่างสัญลักษณ์นี้มีพฤติกรรมเป็นทั้งสัญญาณรบกวนแบบการบวกและสัญญาณรบกวนแบบการคูณไปในเวลาเดียวกัน

#### 2.4.2.6 ผลกระทบของสัญญาณรบกวนภายในวงจรกำเนิดสัญญาณ

โดยทั่วไปแล้วสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นต้องอาศัยความไม่เป็นเชิงเส้นของระบบในการอธิบาย หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งว่าสัญญาณรบกวนได้เข้ามารบกวนระบบไม่ใช่เข้ามาบังคับระบบ จึงทำให้การวิเคราะห์ระบบต้องอาศัยทฤษฎีการรบกวนมาประยุกต์ใช้ เพื่อความง่ายจึงยกตัวอย่างวงจรกำเนิดสัญญาณเช่นเดียวกับรูปที่ 2.11 โดยกำหนดให้สัญญาณรบกวนเกิดจากความไม่เป็นอุดมคติของตัวเก็บประจุ โดยกระแสที่ไหลผ่านตัวเก็บประจุ  $i_C(t)$  มีแรงดันที่แปรปรวนอันเนื่องมาจากสัญญาณรบกวนขนาดเล็ก  $\epsilon_n(t)$  ที่อยู่ในรูปแบบเช่น

$$i_C(t) = C(1 + \epsilon_n(t)) \frac{du(t)}{dt} \quad (2.130)$$

จากความสัมพันธ์ในสมการที่ (2.130) และกำหนดให้  $a = \frac{1}{R}$  จึงสามารถจัดรูปสมการที่ (2.92) ได้ใหม่ดัง

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}u(t) = -\varepsilon \left( n(t) \frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{dn(t)}{dt} \frac{du(t)}{dt} \right) \quad (2.131)$$

โดยสามารถหาคำตอบทั่วไป  $u_C(t)$  ได้ด้วยการให้  $n(t)$  ในสมการที่ (2.131) มีค่าเท่ากับศูนย์ จึงได้คำตอบทั่วไปอยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (2.132)

$$u_C(t) = A_C \cos(\omega_0 t) \quad (2.132)$$

โดย  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  สำหรับในทางปฏิบัติแล้วสัญญาณรบกวนภายในวงจรกำเนิดสัญญาณมักอยู่ในรูปแบบสัญญาณรบกวนเชิงเฟส (Phase noise) ดังนั้นการกำหนดค่าคำตอบเช่นเดียวกับสมการที่ (2.93) จึงไม่สอดคล้องกับทางปฏิบัติที่เกิดขึ้นจริง ดังนั้นการกำหนดพารามิเตอร์ที่แปรเปลี่ยนในค่าคำตอบเฉพาะ  $u_P(t)$  จึงควรมีขนาด  $A_P$  คงที่ และมีการเปลี่ยนแปลงเฟสเป็นไปตามเวลา  $\varphi(t)$  ดังสมการที่ (2.133)

$$u_P(t) = A_P \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (2.133)$$

โดยอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสองของคำตอบเฉพาะเป็นไปดัง

$$\frac{du_P(t)}{dt} = -A_P \left( \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \quad (2.134)$$

$$\frac{d^2u_P(t)}{dt^2} = -A_P \left( \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) + \left( \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \right) \quad (2.135)$$

แทนค่าที่ได้จากสมการที่ (2.133) ถึง (2.135) ลงในสมการที่ (2.131) และเมื่ออาศัยคุณสมบัติการตั้งฉากกันระหว่างฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ จึงได้สมการค่าสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังสมการที่ (2.136) และ (2.137) ตามลำดับ

$$(1 + \varepsilon n(t)) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \varepsilon \left( \frac{dn(t)}{dt} \left( \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) \right) = 0 \quad (2.136)$$

$$(1 + \varepsilon n(t)) \left( \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 = 0 \quad (2.137)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อจัดรูปสมการที่ (2.136) ใหม่ด้วยการคูณกระจายที่เป็นไปดัง

$$(1+\varepsilon n(t)) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \varepsilon \frac{dn(t)}{dt} \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\varepsilon\omega_0 \frac{dn(t)}{dt} \quad (2.138)$$

และทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งกับสมการที่ (2.137) และจัดรูปแบบให้เป็น

$$\frac{2}{\omega_0} \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} \left( \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) + 2\varepsilon n(t) \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dn(t)}{dt} \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\varepsilon\omega_0 \frac{dn(t)}{dt} \quad (2.139)$$

ดังนั้นจึงสามารถแก้ไขสมการได้ด้วยการให้ฝั่งซ้ายของสมการที่ (2.138) และ (2.139) เท่ากัน จึงได้

$$\frac{2}{\omega_0} \frac{d\varphi(t)}{dt} \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + \varepsilon \frac{d}{dt} \left( n(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) = 0 \quad (2.140)$$

เมื่อทำการปริพันธ์เทียบ  $d\varphi(t)$  ทั้งสมการที่ (2.140) จึงสามารถจัดรูปสมการที่ (2.140) ได้ใหม่ดังนี้

$$\frac{1}{\omega_0} \left( \frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 + \frac{d\varphi(t)}{dt} + \varepsilon \left( n(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) = 0 \quad (2.141)$$

ทำการจัดรูปด้วยการหารสมการที่ (2.141) ตลอดทั้งสมการด้วย  $\frac{d\varphi(t)}{dt}$  จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างเฟสที่แปรเปลี่ยนตามเวลากับสัญญาณรบกวนเป็น

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = -\omega_0(1+\varepsilon n(t)) \quad (2.142)$$

หรือ

$$\varphi(t) = -(\omega_0 t + \omega_0 \int \varepsilon n(t) dt) \quad (2.143)$$

ดังนั้นคำตอบสมบูรณ์ของวงจรกำเนิดสัญญาณที่ได้รับผลกระทบจากสัญญาณรบกวนที่เกิดจากความแปรปรวนของตัวเก็บประจุนี้คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = A_C \cos(\omega_0 t) + A_P \cos\left(\omega_0 \int \varepsilon n(t) dt\right) \quad (2.144)$$

เนื่องจากหากพิจารณาในเชิงคณิตศาสตร์ของทฤษฎีการรบกวนนั้น มีหลากหลายเทคนิค บางเทคนิคสามารถให้คำตอบอย่างใกล้เคียงกัน แต่บางเทคนิคก็ให้คำตอบที่แตกต่างกันออกไป จึงทำให้การอธิบายสัญญาณรบกวนภายในวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นมีความหลากหลาย เพื่อยกรณีย่างง่ายเพื่อให้เห็นความแตกต่างในอีกกรณีหนึ่งคือสัญญาณรบกวนที่มีผลกับวงจรกำเนิดสัญญาณที่ควบคุมความถี่ด้วยคิกดีไฟฟ้ายที่ถูกรบกวนด้วยสมการอนุพันธ์แบบสโตแคสติกที่มีรูปแบบคล้ายกับสมการที่ (2.101) ดังนี้

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = \frac{k_f \frac{d}{dt}(v(t) + n(t)) \frac{du(t)}{dt} - \left( \frac{2k_f \omega_0 (v(t) + n(t))}{\omega_0 + k_f v(t)} + (k_f (v(t) + n(t)))^2 \right) u(t) \quad (2.145)$$

เนื่องจากความคล้ายคลึงกันของสมการที่ (2.111) และ (2.145) จึงกล่าวได้ว่าค่าคำตอบเฉพาะ  $u_p(t)$  ของสมการที่ (2.145) นั้นต้องมีความคล้ายคลึงกับสมการที่ (2.121) ดังเช่น

$$u_p(t) = A_P \cos\left(\omega_0 t + k_f \int_{-\infty}^t (v(\tau) + n(\tau)) d\tau\right) \quad (2.146)$$

จากตัวอย่างทั้งสองกรณีในข้างต้นที่ยกตัวอย่างพอสั่งเซปสามารถสังเกตความแตกต่างได้ว่าผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในสมการที่ (2.144) เป็นสัญญาณรบกวนแบบการบวก แต่ในขณะที่ผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่เกิดขึ้นในสมการที่ (2.146) เป็นสัญญาณรบกวนแบบการคูณ ดังนั้นการตั้งโมเดลและเทคนิคทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายผลกระทบของสัญญาณรบกวนภายในวงจรกำเนิดสัญญาณจึงมีความหลากหลายที่อยู่กับโครงสร้างของวงจรเป็นสำคัญ

อย่างไรก็ตามเนื่องจากสัญญาณรบกวนนั้นเป็นสัญญาณไร้ค่าที่มีค่าไม่แน่นอน ณ ที่ตำแหน่งเวลาใดๆ จึงส่งผลให้สัญญาณรบกวนถูกนิยามเป็นสัญญาณสโตแคสติก (Stochastic signal) หรือสัญญาณสุ่ม (Random signal) ดังนั้นคำตอบที่ได้จากการวิเคราะห์ด้วยสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในข้างต้นที่เป็นสัญญาณเชิงกำหนด (Deterministic signal) ซึ่งเป็นสัญญาณมีค่าที่แน่นอนจึงไม่ใช่คำตอบที่สามารถตีความเป็นผลการทดลองในทางปฏิบัติได้ เฉกเช่นในกลศาสตร์ควอนตัม (Quantum mechanics) ที่ฟังก์ชันคลื่น (Wave function) ของอนุภาคซึ่งบรรจุข้อมูลเกี่ยวกับความไม่แน่นอนของอนุภาคที่ถูกรบกวนและวิเคราะห์ได้ด้วยสมการชโรดิงเงอร์นั้น คำตอบที่ได้จากสมการเป็นสัญญาณเชิงกำหนดที่ต้องนำไปหาค่าคาดหวัง (Expectation value) เพื่อให้ตรวจวัดผลการทดลองในทางปฏิบัติได้ในลำดับสุดท้าย สำหรับสัญญาณสุ่มทางไฟฟ้า คำตอบสุดท้ายที่ตรวจวัดได้จากการทดลอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในทางปฏิบัติมักอยู่ในรูปแบบของความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัม โดยสามารถอธิบายรายละเอียดได้ในลำดับถัดไป

#### 2.4.2.7 ความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัมของสัญญาณรบกวน

เนื่องด้วยลักษณะของสัญญาณรบกวนนั้นเป็นสัญญาณไร้คาบที่มีค่าขนาดไม่แน่นอนแปรเปลี่ยนตามเวลา ดังนั้นการวิเคราะห์สัญญาณรบกวนในโดเมนทางเวลาจึงสามารถทำได้แค่การหาค่าคาดหวัง ณ ตำแหน่งหรือช่วงเวลาที่จะพิจารณา โดยค่าความคาดหวังนี้ไม่มีนัยสำคัญต่อการนำไปเปรียบเทียบในเชิงผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่มีต่อสัญญาณที่พิจารณา อย่างไรก็ตามเนื่องด้วยสัญญาณใดๆในโดเมนเวลา (ที่ไม่ใช่สัญญาณไซน์ชวยดอลบริสุทธ์) คือการรวมกันของสัญญาณไซน์ชวยดอลบริสุทธ์หลายความถี่ที่มีขนาดแตกต่างกันรวมกันอยู่ ดังนั้นการวิเคราะห์สัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่จึงมีนัยสำคัญต่อการวิเคราะห์และพิจารณาผลกระทบของสัญญาณรบกวนมากกว่า โดยวิธีการที่เหมาะสมสำหรับสัญญาณไร้คาบคือการหาค่าความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัม [38] เนื่องจากวิธีการนี้คือการอธิบายการกระจายค่ากำลังงานขององค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณที่พิจารณา

การหาค่าความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัมนั้นเริ่มต้นจากการพิจารณาให้สัญญาณไร้คาบนั้นมีคาบที่เข้าใกล้อนันต์ หรือในแง่ของสัญญาณรบกวนนั้นหมายถึงว่าสัญญาณรบกวน  $n(t)$  เป็นสัญญาณที่มีคาบเข้าใกล้อนันต์ดังสมการ

$$n(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} n_T(t) \quad (2.147)$$

โดยที่  $n_T(t)$  คือสัญญาณรบกวนในมุมมองของการมีคาบ เมื่อนิยามให้ค่ากำลังงาน  $p_T(t)$  และค่ากำลังงานเฉลี่ย  $P_{aT}(t)$  ของ  $n_T(t)$  เป็นไปตามสมการที่ (2.148) และ (2.149) ตามลำดับ

$$p_T(t) = |n_T(t)|^2 \quad (2.148)$$

$$P_{aT}(t) = \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |n_T(t)|^2 dt \quad (2.149)$$

ดังนั้นค่ากำลังงานเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนจึงควรเป็นไปดัง

$$P_a(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |n_T(t)|^2 dt = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \lim_{T \rightarrow \infty} n_T(t) \right|^2 dt}{\lim_{T \rightarrow \infty} T} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |n(t)|^2 dt}{\lim_{T \rightarrow \infty} T} \quad (2.150)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากทฤษฎีของพาร์เซวาล (Parseval's theorem) ที่กล่าวไว้ว่าค่ากำลังงานรวมทั้งหมดในโดเมนเวลาของสัญญาณที่พิจารณาต้องมีค่าเท่ากับกำลังงานรวมทั้งหมดในโดเมนความถี่ จึงทำให้ได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} |n(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |N(\omega)|^2 d\omega \quad (2.151)$$

เมื่อ  $N(\omega)$  คือสัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่ โดยในมุมมองการให้สัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่มีคาบที่อนันต์ ที่มีความสัมพันธ์กับสัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่ที่มีคาบ  $N_T(\omega)$  เป็นไปดัง

$$N(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} N_T(\omega) \quad (2.152)$$

เมื่อนำความสัมพันธ์ในสมการที่ (2.151) และ (2.152) แทนลงในสมการที่ (2.150) จึงได้ค่ากำลังงานเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่  $P_A(\omega)$  เป็นไปดังนี้

$$P_A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left| \lim_{T \rightarrow \infty} N_T(\omega) \right|^2 d\omega}{\lim_{T \rightarrow \infty} T} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N_T(\omega)|^2}{T} d\omega \quad (2.153)$$

จากสมการที่ (2.151) สังเกตได้ว่าค่ากำลังงานเฉลี่ยของสัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่นั้นได้จากการทำปริพันธ์พจน์  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N_T(\omega)|^2}{T}$  เทียบกับ  $d\omega$  ดังนั้นหน่วยของพจน์  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N_T(\omega)|^2}{T}$  ต้องอยู่ในหน่วยของกำลังงานเฉลี่ยต่อความถี่ที่สามารถสื่อถึงการกระจายค่ากำลังงานขององค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณรบกวน ดังนั้นความหนาแน่นกำลังงานเชิงสเปกตรัมของสัญญาณรบกวน  $S_N(\omega)$  เป็นไปดัง

$$S_N(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|N_T(\omega)|^2}{T} \quad (2.154)$$

### 2.4.3 ปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอค

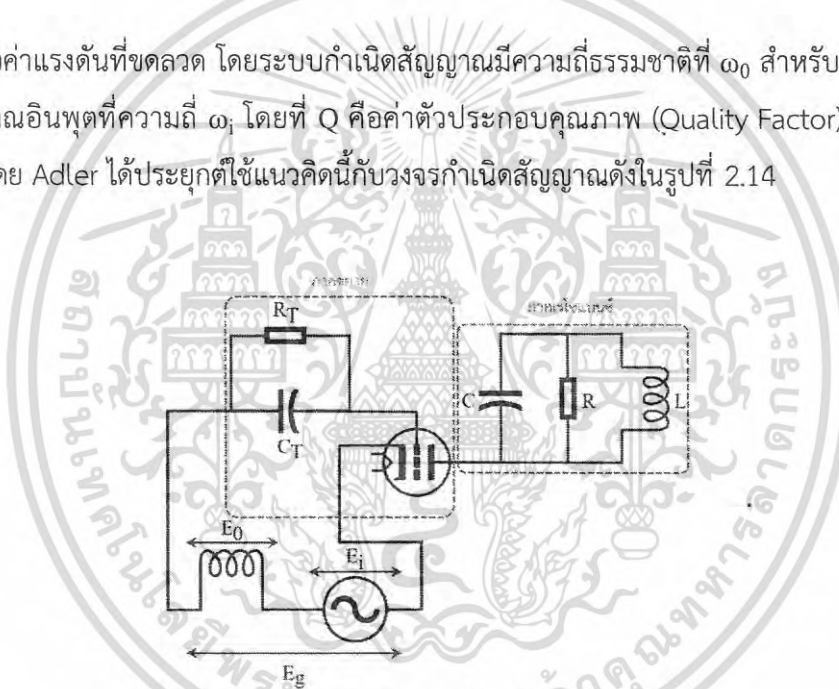
ปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคคือปรากฏการณ์ที่มีรูปแบบเดียวกันกับการสั่นพ้องในระบบสั่นบังคับ นั่นคือเมื่อความถี่ของสัญญาณอินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบ ความถี่สัญญาณเอาต์พุตนั้นต้องมีค่าเท่ากับความถี่สัญญาณอินพุต ดังนั้นจึงเรียกปรากฏการณ์การสั่นพ้องที่เกิดในระบบการสั่นบังคับและปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคที่เกิดในระบบการสั่นตนเองรวมว่าการชิงโครโนซ์

(Synchronize) เพื่อเน้นการอธิบายความหมายเชิงกายภาพและเล็งความซับซ้อนทางคณิตศาสตร์จึงทำการอธิบายรายละเอียดทางคณิตศาสตร์ในภาคผนวก ก.

การอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชันล๊อคนั้นเริ่มต้นโดย Robert Adler [18] ที่นำเสนอด้วยวิธีการเปลี่ยนมุมมองให้สัญญาณอินพุตและสัญญาณที่ได้จากการเหนี่ยวนำจากเอาต์พุตของระบบรวมกันอยู่ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนให้เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว หลังจากนั้นจึงอาศัยความสัมพันธ์ที่ได้จากผลตอบสนองเชิงเฟสของระบบเพื่อเงื่อนไขการล๊อคของระบบ โดยความสามารถแสดงสมการเงื่อนไขการล๊อคของระบบได้ดัง

$$\left| \frac{2QE_0(\omega_0 - \omega_i)}{E_i\omega_0} \right| \leq 1 \quad (2.155)$$

เมื่อ  $E_0$  คือค่าแรงดันที่ขดลวด โดยระบบกำเนิดสัญญาณมีความถี่ธรรมชาติที่  $\omega_0$  สำหรับ  $E_i$  คือขนาดของสัญญาณอินพุตที่มีความถี่  $\omega_i$  โดยที่  $Q$  คือค่าตัวประกอบคุณภาพ (Quality Factor) ของวงจรเรโซแนนซ์ โดย Adler ได้ประยุกต์ใช้แนวคิดนี้กับวงจรกำเนิดสัญญาณดังในรูปที่ 2.14

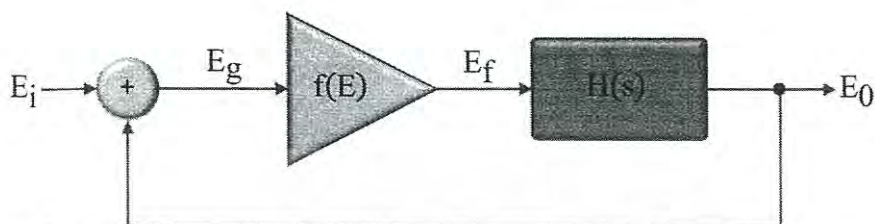


รูปที่ 2.14 วงจรกำเนิดสัญญาณตามโมเดลของ Adler

นอกเหนือจากนี้ Adler ยังได้นำเสนอในเบื้องต้นว่าแนวคิดนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ชิงโครโนซีในระบบแพนดูลัมที่เป็นระบบการสั่นแบบเชิงกลได้ แม้ว่าการอธิบายของ Adler ที่มีต่อระบบแพนดูลัมนั้นยังคงขาดรายละเอียดทางคณิตศาสตร์อย่างชัดเจน อีกทั้งยังไม่มีบททดลองที่ยืนยันอย่างชัดเจน แต่อย่างไรก็ตามหากเทียบกับสมการเงื่อนไขเฟสของการสั่นพ้องแบบทั่วไปดังในสมการที่ (2.84) จึงสังเกตได้ว่าลักษณะของเงื่อนไขเฟสมีองค์ประกอบที่สื่อเป็นความหมายเชิงกายภาพได้คล้ายคลึงกันมาก ซึ่งจุดที่ต่างกันคือเงื่อนไขการชิงโครโนซีในระบบการสั่นบังคับนั้นขึ้นอยู่กับขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติของระบบที่ได้จากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ในขณะที่เงื่อนไขการชิงโครโนซีในระบบการสั่นตนเองนั้นขึ้นอยู่กับขนาดของ  $E_0$  ที่เป็นแรงดันที่ถูกเหนี่ยวนำผ่านขดลวดเข้ามาในวงจรที่ยากต่อการตีความในเชิงมุมมองระบบว่าเป็นพารามิเตอร์ส่วนใดของระบบ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ต่อมาแนวคิดของ Adler ได้ถูกอธิบายเพิ่มเติมต่อมาโดย Leonard J. Paciorek [19] ที่เชื่อมโยงวิธีการของ Adler เข้ากับโมเดลการป้อนกลับ โดยสามารถนำวงจรกำเนิดสัญญาณในรูปที่ 2.14 เชื่อมโยงกับโมเดลการป้อนกลับในรูปที่ 2.12 จึงได้โมเดลการป้อนกลับของปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอค ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 โมเดลการป้อนกลับสำหรับปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคของ Paciorek

จากการตีความของ Paciorek จึงเป็นการนิยามค่า  $E_0$  อย่างชัดเจนว่าเป็นสัญญาณเอาต์พุตของระบบ ดังนั้นฟังก์ชันส่งผ่านแบบลูปปิด  $H_x(s)$  ของรูปที่ 2.15 จึงเป็นไปดังนี้

$$H_x(s) = \frac{E_0(s)}{E_i(s)} = \frac{f(E)H(s)}{1 - f(E)H(s)} \quad (2.156)$$

เนื่องจากภาคเรโซแนนซ์ของวงจรมกำเนิดสัญญาณแบบ Adler ในรูปที่ 2.14 เหมือนกับภาคเรโซแนนซ์ของวงจรในรูปที่ 2.11 เมื่อกำหนดให้ภาคขยายของวงจรมกำเนิดสัญญาณแบบ Adler เป็น  $f(E) = aE$  และทำการแปลงกลับลาปลาซสมการที่ (2.156) พร้อมทั้งจัดรูป จึงได้สมการอนุพันธ์ดังนี้

$$\frac{d^2 E_0(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} E_0(t) = \frac{a}{C} \frac{dE_i(t)}{dt} + \frac{(aR-1)}{RC} \frac{dE_0(t)}{dt} \quad (2.157)$$

สังเกตได้ว่าสมการที่ (2.157) นั้นอยู่ในรูปแบบเดียวกับสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นชนิดอ่อน (Weakly nonlinear differential equation) [14] จึงสามารถกล่าวได้ว่าการวิเคราะห์ปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคนั้น นอกจากอาศัยแนวคิดแบบ Adler แล้ว ยังสามารถวิเคราะห์จากแก้ไขสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นชนิดอ่อนได้เช่นเดียวกัน

สิ่งที่ยืนยันว่าสามารถอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคจากสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นชนิดอ่อนได้นั้นคือได้มีการอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคด้วยสมการแวนเดอร์โพล (Van der pol equation) ที่เป็นสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นชนิดอ่อนรูปแบบหนึ่งโดย Tang Zhikai และคณะ [20] ได้นำเสนอว่าวงจรมกำเนิดสัญญาณย่านความถี่ไมโครเวฟสามารถอธิบายได้ด้วยสมการแวนเดอร์โพล ดังต่อไปนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^2 v_o(t)}{dt^2} + \omega_0^2 v_o(t) = \varepsilon (\alpha - v_o^2) \frac{dv_o(t)}{dt} - A_i \sin(\omega_i t) \quad (2.158)$$

โดย  $v_o(t)$  คือสัญญาณเอาต์พุต  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติที่วงจรผลิตออกมาเมื่อระบบไม่ถูกรบกวนด้วยอินพุต  $\varepsilon$  คือค่าคงที่ของระบบที่มีค่าน้อยมาก  $A_i$  คือขนาดของสัญญาณอินพุต และ  $\omega_i$  คือความถี่อินพุต เมื่อกำหนดค่าคำตอบให้อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (2.159)

$$v_o(t) = A_o(t) e^{j\omega_i t + \phi(t)} \quad (2.159)$$

โดยที่  $A_o(t)$  และ  $\phi(t)$  คือขนาดและเฟสของสัญญาณเอาต์พุตที่แปรเปลี่ยนตามเวลาได้ตามลำดับ และแทนค่าคำตอบในสมการที่ (2.159) และแก้สมการด้วยเทคนิคการเปลี่ยนแปลงขนาดอย่างช้า (Slowly varying amplitude technique) [14] จึงได้สมการขนาดและเฟสของสัญญาณเอาต์พุตดังสมการที่ (2.160) และ (2.161) ตามลำดับ (รายละเอียดเกี่ยวกับเทคนิคการเปลี่ยนแปลงขนาดอย่างช้าแสดงในภาคผนวก ข.)

$$\frac{dA_o(t)}{dt} = \frac{\varepsilon (\alpha - A_o^2(t))}{2} A_o(t) + \frac{A_i}{2\omega_i} \cos(\phi(t)) \quad (2.160)$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{\omega_0^2 - \omega_i^2}{2\omega_i} - \frac{A_i}{2\omega_i A_o(t)} \sin(\phi(t)) \quad (2.161)$$

สำหรับการเกิดปรากฏการณ์อินเจ็คชันลอคนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงค่าขนาด  $A_o(t)$  และเฟส  $\phi(t)$  ต่อเวลาของสัญญาณเอาต์พุตต้องมีค่าเป็นศูนย์ และเมื่ออาศัยความสัมพันธ์  $|\sin \theta| \leq 1$  จึงได้เงื่อนไขการลอคของระบบดังนี้

$$\left| \frac{A_o(\omega_0^2 - \omega_i^2)}{A_i} \right| \leq 1 \quad (2.162)$$

สังเกตได้ว่าเงื่อนไขการลอคในสมการที่ (2.162) สอดคล้องกับเงื่อนไขการลอคในสมการที่ (2.155) ที่ได้จากแนวคิดของ Adler จึงเป็นการยืนยันว่าแนวคิดแบบ Adler นั้นสามารถโมเดลเป็นสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นชนิดอ่อนได้ และเนื่องจากปรากฏการณ์อินเจ็คชันลอคนั้นมีความคล้ายคลึงกับการสั่นพ้องมาก (แม้ว่าความหมายเชิงฟิสิกส์ของระบบนั้นมีความแตกต่าง) จึงส่งผลให้เกิดการลอคที่ฮาร์มอนิกอันดับสูงกว่าฮาร์มอนิกพื้นฐานที่เทียบเคียงได้กับการสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกที่กล่าวในหัวข้อ

2.3.4 โดยเรียกปรากฏการณ์การลอคที่ฮาร์มอนิกอันดับสูงนี้ว่าปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์มอนิกอิน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เจ็คซันล๊อค (Superharmonic injection locked phenomenon) การอธิบายปรากฏการณ์นี้ถูกริเริ่มด้วยการประยุกต์ใช้โมเดลการป้อนกลับสำหรับปรากฏการณ์อินเจ็คซันล๊อคของ Paciorek ร่วมกับความเป็นเชิงเส้นของภาคขยายในวงจรถ้าเกิดสัญญาณที่เสนอโดย Hamid R. Rategh และ Thomas H. Lee [21-23] ซึ่งพวกเขาได้นิยามความเป็นเชิงเส้นของภาคขยายในรูปแบบอนุกรมพหุนามดังสมการที่ (2.163)

$$f(E) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma}(E)^{\sigma} \quad (2.163)$$

โดยพวกเขาได้ยกตัวอย่างกรณีที่ป้อนสัญญาณไซน์ขอยอดลที่มีความถี่เข้าใกล้ความถี่ฮาร์โมนิกที่สองของความถี่ธรรมชาติและกำหนดอนุกรมกำลังให้อยู่ลำดับที่สามจึงได้เงื่อนไขของการล๊อคเป็นไปดังสมการที่ (2.164)

$$\left| \frac{2Qa_2 \left( \omega_0 - \frac{\omega_i}{2} \right)}{H_0 A_i \omega_0} \right| \leq 1 \quad (2.164)$$

เมื่อ  $Q$  คือค่าตัวประกอบคุณภาพของวงจรรีโซแนนซ์  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของวงจร  $\omega_i$  คือความถี่อินพุตที่ป้อนให้กับระบบ  $A_i$  คือค่าขนาดของสัญญาณอินพุต และ  $H_0$  คือค่าคงที่ที่ได้จากฟังก์ชันส่งผ่านของวงจรรีโซแนนซ์  $\left( H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j2Q\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}} \right)$

อย่างไรก็ตามจุดที่น่าสังเกตเกี่ยวกับโมเดลการป้อนกลับสำหรับปรากฏการณ์อินเจ็คซันล๊อคของ Paciorek คือเมื่อเปรียบเทียบกับโมเดลการป้อนกลับของ Paciorek ในรูปที่ 2.15 กับโมเดลการป้อนกลับในวงจรถ้าเกิดสัญญาณแบบทั่วไปดังในรูปที่ 2.12 สังเกตได้ว่าจุดเอาต์พุตของระบบนั้นเป็นคนละจุดกัน โดย Fotis Plessas [24] ได้นำเสนอการใช้เอาต์พุตที่จุด  $E_f$  (รูปที่ 2.12) มาใช้สำหรับอธิบายปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คซันล๊อค และได้ให้ภาคขยายของระบบอยู่ในรูปแบบอนุกรมพหุนามดังในสมการที่ (2.163) เช่นเดียวกับ Hamid R. Rategh และ Thomas H. Lee โดย Fotis ได้อาศัยการตัดแปลงจากแนวคิดของ Xiangdong Zhang และคณะ [24] ที่กำหนดให้อนุกรมพหุนามนั้นอยู่ในรูปแบบของอนุกรมฟูเรียร์ดังสมการที่ (2.165)

$$f(e) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \dot{U}_m e^{jm\omega_i t} \quad (2.165)$$

เมื่อ  $\dot{U}_m$  คือขนาดสัญญาณเอาต์พุตเป็นค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์อันดับที่  $m$  และ  $\omega_i$  คือความถี่อินพุตที่ป้อนให้กับระบบ เมื่อทำการหาเงื่อนไขการล๊อคด้วยการประมาณค่าให้ค่าขนาดของสัญญาณเอาต์พุต เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

มีรวม  $\dot{U}_m$  ค่าเท่ากับค่าขนาดของสัญญาณเอาต์พุต  $U_{oN}$  ที่ฮาร์โมนิกที่  $N$  รวมอยู่กับค่าขนาดของสัญญาณอินพุต  $U_i$  จึงได้เงื่อนไขการล๊อคเป็นไปดังสมการที่ (2.166)

$$\left| \frac{2Q \left( \omega_0 - \frac{\omega_i}{N} \right) U_{oN}}{\omega_0 U_i} \right| = \left| \frac{2Q \left( \omega_0 - \frac{\omega_i}{N} \right)}{\omega_0} \sqrt{\frac{P_{oN}}{P_i}} \right| \leq 1 \quad (2.166)$$

โดยที่  $N$  คือจำนวนเท่าฮาร์โมนิกของความถี่ธรรมชาติ  $Q$  คือค่าตัวประกอบคุณภาพของวงจรเรโซแนนซ์โซแนนซ์  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของวงจร สำหรับ  $P_i$  คือค่ากำลังงานของสัญญาณอินพุต และ  $P_{oN}$  คือค่ากำลังงานของสัญญาณเอาต์พุตที่ฮาร์โมนิกที่  $N$  สังเกตได้ว่ารูปแบบสมการที่ (2.164) นั้นคล้ายคลึงกับสมการเงื่อนไขการล๊อคในสมการที่ (2.153) ของ Adler

จากที่อธิบายโดยสังเขปในข้างต้นสังเกตได้ว่า แม้วิธีการอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นล๊อคยังมีความหลากหลายวิธีการ แต่เงื่อนไขการล๊อคนั้นมีทิศทางไปในแนวเดียวกัน จุดที่น่าสนใจอีกจุดหนึ่งคือ ความพยายามของ Adler ในการอธิบายการสั่นพ้องของแพนดูลัมในรูปแบบอินเจ็คชั่นล๊อค เนื่องจากการตีความของ Paciorek ที่มีต่อวิธีการของ Adler ในรูปแบบโมเดลการป้อนกลับส่งผลให้เงื่อนไขของการล๊อคนั้นมีพารามิเตอร์ที่แตกต่างจากเงื่อนไขการสั่นพ้อง ซึ่งจุดที่ต่างกันได้แสดงไว้ในเบื้องต้นก่อนหน้าแล้วว่าเงื่อนไขการสั่นพ้องขึ้นอยู่กับขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติของระบบที่ได้จากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น แต่สำหรับเงื่อนไขการล๊อคขึ้นอยู่กับขนาดของเอาต์พุตของระบบ ส่งผลให้แนวคิดของ Adler ไม่สามารถอธิบายการลดลงของขนาดผลตอบสนองธรรมชาติที่เกิดขึ้นจริงในการทดลองการสั่นเชิงกล ซึ่งสาเหตุของความไม่สอดคล้องนี้นั้นมาจากการนิยามที่แตกต่างกันระบบการสั่นบังคับและการสั่นตนเองที่ว่าค่าขนาดของเอาต์พุตที่ได้จากระบบต้องเป็นอิสระต่อค่าเงื่อนไขเริ่มต้นนั่นเอง อย่างไรก็ตามในปัจจุบันได้มีหลักฐานการทดลองว่าขนาดเอาต์พุตของระบบการสั่นตนเองนั้นขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นเมื่อพิจารณาระบบการสั่นตนเองในมุมมองการสั่นบังคับ โดยสามารถแสดงรายละเอียดได้ในลำดับถัดไป

## 2.5 ระบบการสั่นทางไฟฟ้าด้วยมุมมองการสั่นบังคับ

แม้ว่าระบบการสั่นทางไฟฟ้านั้นได้ถูกนิยามให้เป็นระบบการสั่นตนเองและอินพุตที่เข้ามากระทำกับระบบนั้นอยู่ในรูปแบบการรบกวน แต่อย่างไรก็ตามได้มีการนำเสนอโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาโดยตรงชัยและคณะที่เป็นวิธีการควบคุมขนาดของวงจรถ้าเกิดสัญญาณด้วยค่าเงื่อนไขเริ่มต้นในหลายบทความ [3-6] ซึ่งสามารถสื่อความหมายโดยนัยได้ว่าค่าเงื่อนไขเริ่มต้นมีผลต่อขนาดของวงจรถ้าเกิดสัญญาณ โดยโมเดลทางคณิตศาสตร์นี้ได้ถูกกล่าวถึงแล้วในหัวข้อ 2.2.3 ที่ยกตัวอย่างด้วยระบบการสั่นเชิงกล จึงทำให้โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาเป็นที่น่าสนใจสำหรับนำมาประยุกต์ใช้กับวงจรถ้าเกิดสัญญาณเพราะสามารถนำมาวิเคราะห์ระบบการสั่นใดๆที่ไม่ขึ้นอยู่กับโครงสร้างของระบบการเอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สั้น เพื่อความเข้าใจอย่างชัดเจน จึงทำการอธิบายการควบคุมขนาดของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณด้วยการป้อนสัญญาณไฟตรงให้กับวงจรถูกก่อน แล้วอธิบายการป้อนสัญญาณอินพุตที่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่ก่อให้เกิดการควบคุมรอบของสัญญาณหรือการมอดูเลตทางขนาดในลำดับต่อมา

### 2.5.1 การควบคุมขนาดของสัญญาณด้วยสัญญาณอินพุตไฟตรง

เพื่อความเข้าใจการควบคุมขนาดของสัญญาณเอาต์พุตที่ถูกผลิตจากวงจรถูกกำเนิดสัญญาณด้วยการป้อนอินพุตที่เป็นไฟตรงให้กับวงจรถูกอย่างชัดเจน จึงแสดงรายละเอียดวิธีการวิเคราะห์พร้อมทั้งผลการทดลองที่เกิดขึ้นจริงของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์ (Wein bridge oscillator) วงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟส (Phase-shift oscillator) และวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที (Twin-T oscillator) ในลำดับถัดไป

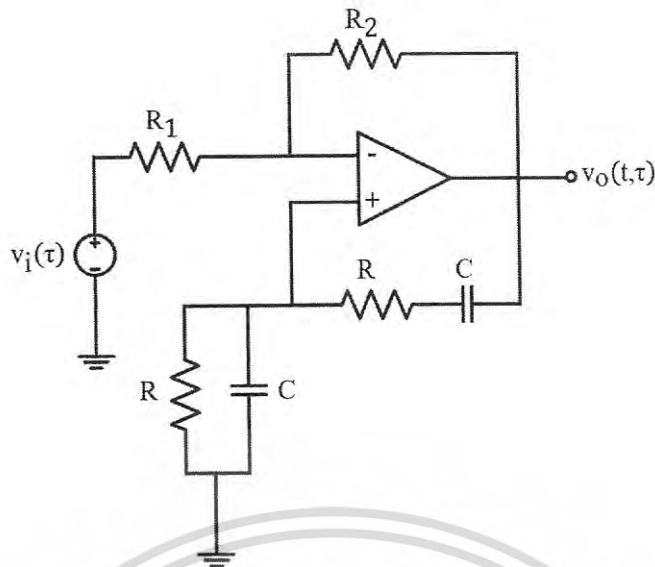
#### 2.5.1.1 วงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์

เมื่อทำการวิเคราะห์ห้วงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์ดังรูปที่ 2.16 ด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ภายใต้แนวคิดแบบโมเดลการสั้นบังคับหลายเวลา จึงได้สมการที่อธิบายผลตอบสนองธรรมชาติ  $v_n(t)$  ดังสมการที่ (2.167)

$$\frac{d^2 v_n(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \left( 3 - \frac{1}{k_{w1}} \right) \frac{dv_n(t)}{dt} + \frac{v_n(t)}{R^2 C^2} = 0 \quad (2.167)$$

โดยที่ค่า  $k_{w1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$  หากกำหนดเงื่อนไขให้  $k_{w1} = \frac{1}{3}$  และทำการแก้สมการที่ (2.165) จึงได้คำตอบเป็นไปดังสมการที่ (2.168)

$$v_n(t) = (A_{1w} + A_{2w}) \cos(\omega_0 t) + j(A_{1w} - A_{2w}) \sin(\omega_0 t) \quad (2.168)$$



รูปที่ 2.16 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์

สำหรับ  $A_{1W}$  และ  $A_{2W}$  คือค่าขนาดที่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น และความถี่  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  และเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตในรูปที่ 2.16 ด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์จึงได้สมการที่อธิบายผลตอบสนองบังคับของวงจрдังสมการที่ (2.169)

$$\frac{d^2 v_f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{1}{RC} \left( 3 - \frac{1}{k_{W1}} \right) \frac{dv_f(\tau)}{d\tau} + \frac{v_f(\tau)}{R^2 C^2} = \frac{k_{W2}}{k_{W1}} \left( \frac{d^2 v_i(\tau)}{d\tau^2} + \frac{3}{RC} \frac{dv_i(\tau)}{d\tau} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \quad (2.169)$$

โดย  $k_{W2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$  หากกำหนดค่า  $k_{W1} = \frac{1}{3}$  ดังข้างต้น จึงทำให้  $\frac{k_{W2}}{k_{W1}} = 2$  เมื่อป้อนอินพุตเป็นสัญญาณไฟตรง  $V_{DC}$  จึงได้ผลตอบสนองบังคับเป็นไปดังสมการที่ (2.170)

$$v_f(\tau) = -2V_{DC} \quad (2.170)$$

เมื่อกำหนดให้ค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet มีค่าเป็น  $X_W$  และกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขต Neumann เป็นศูนย์ดังสมการที่ (2.171) และ (2.172) ตามลำดับ จึงได้ผลตอบสนองสมบูรณ์  $v_o(t, \tau)$  ดังสมการที่ (2.173)

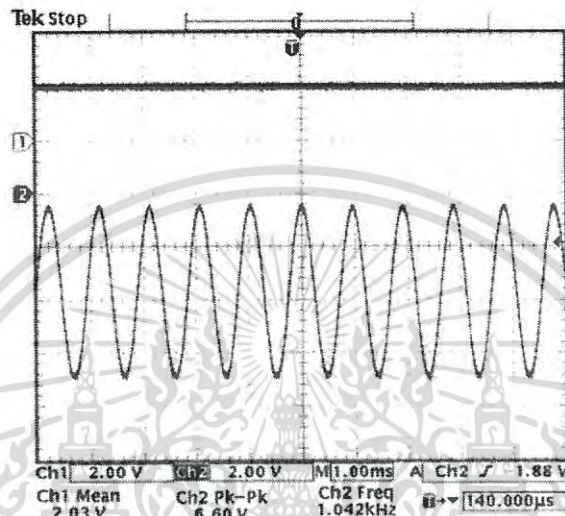
$$v_o(t, \tau)|_{t=0} = X_W \quad (2.171)$$

$$\left. \frac{dv_o(t, \tau)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.172)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_o(t,\tau)=(X_W+2V_{DC}) \cos(\omega_0t) -2V_{DC} \quad (2.173)$$

โดยสามารถยืนยันการวิเคราะห์ที่ได้ด้วยการป้อนสัญญาณไฟตรงขนาด 2 โวลต์ให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวทบริดจ์ที่ผลิตความถี่ 1 กิโลเฮิร์ตซ์ ซึ่งเอาต์พุตที่ได้จากวงจรเป็นไปดังรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 ผลการทดลองเมื่อป้อนอินพุตสัญญาณไฟตรงให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวทบริดจ์

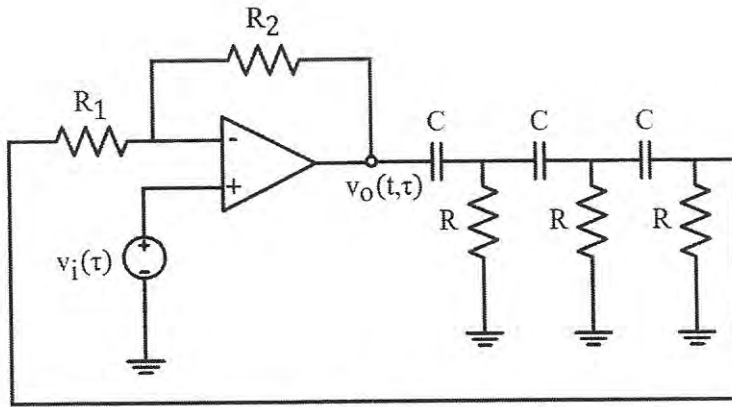
### 2.5.1.2 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟส

สำหรับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟสที่แสดงดังในรูปที่ 2.18 นั้น เมื่ออาศัยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ จึงได้สมการที่อธิบายผลตอบสนองธรรมชาติ  $v_n(t)$  และผลตอบสนองบังคับ  $v_f(\tau)$  ของวงจรดังสมการที่ (2.174) และ (2.175) ตามลำดับ

$$\left(1+\frac{1}{k_p}\right)R^3C^3\frac{d^3v_n(t)}{dt^3}+6R^2C^2\frac{d^2v_n(t)}{dt^2}+5RC\frac{dv_n(t)}{dt}+v_n(t)=0 \quad (2.174)$$

$$\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{k_p}\right)R^3C^3\frac{d^3v_f(\tau)}{d\tau^3}+6R^2C^2\frac{d^2v_f(\tau)}{d\tau^2}+5RC\frac{dv_f(\tau)}{d\tau}+v_f(\tau)= \\ \left(1+\frac{1}{k_p}\right)R^3C^3\frac{d^3v_i(\tau)}{d\tau^3}+\left(6+\frac{3}{k_p}\right)R^2C^2\frac{d^2v_i(\tau)}{d\tau^2}+\left(5+\frac{1}{k_p}\right)RC\frac{dv_i(\tau)}{d\tau}+v_i(\tau) \end{aligned} \quad (2.175)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.18 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟส

โดยกำหนดให้  $k_p = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{29}$  และ  $R_1 = R$  จึงผลตอบแทนองธรรมชาติของระบบเป็นไปดังนี้

$$v_n(t) = (A_{1p} + A_{2p}) \cos(\omega_0 t) + j(A_{1p} - A_{2p}) \sin(\omega_0 t) + A_{3p} e^{-\frac{t}{5RC}} \quad (2.176)$$

สำหรับ  $A_{1p}$ ,  $A_{2p}$  และ  $A_{3p}$  คือค่าขนาดที่ขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น และค่าความถี่  $\omega_0$  มีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{\sqrt{6RC}}$  เมื่อทำการป้อนสัญญาณไฟตรง  $V_{DC}$  ให้กับวงจร และแทนค่า  $v_i(t) = V_{DC}$  ที่เป็นค่าคงที่ลงในสมการที่ (2.175) จึงได้ผลตอบแทนบังคับของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟสเป็นไปดังนี้

$$v_f(t) = V_{DC} \quad (2.177)$$

และกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet และ Neumann ในทำนองเดียวกับการวิเคราะห์วงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์ ที่มีค่าเป็น  $X_p$  และศูนย์ตั้งสมการที่ (2.178) และ (2.179) ตามลำดับ

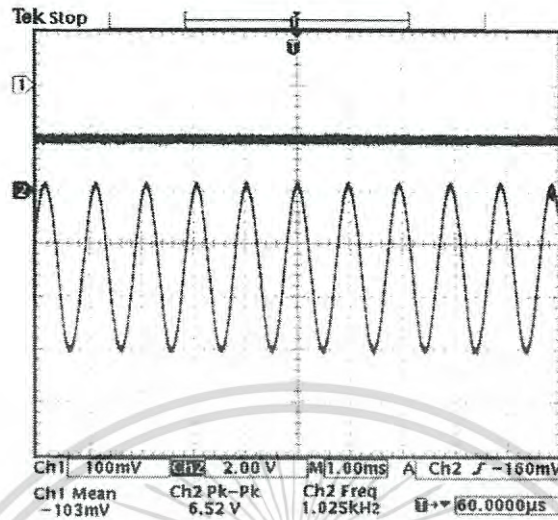
$$v_o(t, \tau) \Big|_{t=0} = X_p \quad (2.178)$$

$$\frac{dv_o(t, \tau)}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.179)$$

จึงได้ผลตอบแทนสมบูรณ์  $v_o(t, \tau)$  ในสถานะคงตัว (สถานะคงตัวพจน์  $A_{3p} e^{-\frac{t}{5RC}}$  เข้าใกล้ศูนย์) ตั้งสมการที่ (2.180) และยืนยันการวิเคราะห์ที่ได้ด้วยการป้อนสัญญาณไฟตรงขนาด -0.1 โวลต์ให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟสที่ผลิตความถี่ 1 กิโลเฮิร์ตซ์ ซึ่งเอาต์พุตที่ได้จากวงจรเป็นไปดังรูปที่ 2.19

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_o(t,\tau) = \left( X_p + A_{3p} \left( \frac{1}{5RC} - 1 \right) - V_{DC} \right) \cos(\omega_0 t) + V_{DC} \quad (2.180)$$



รูปที่ 2.19 ผลการทดลองเมื่อป้อนอินพุตสัญญาณไฟตรงให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเลื่อน-เฟส

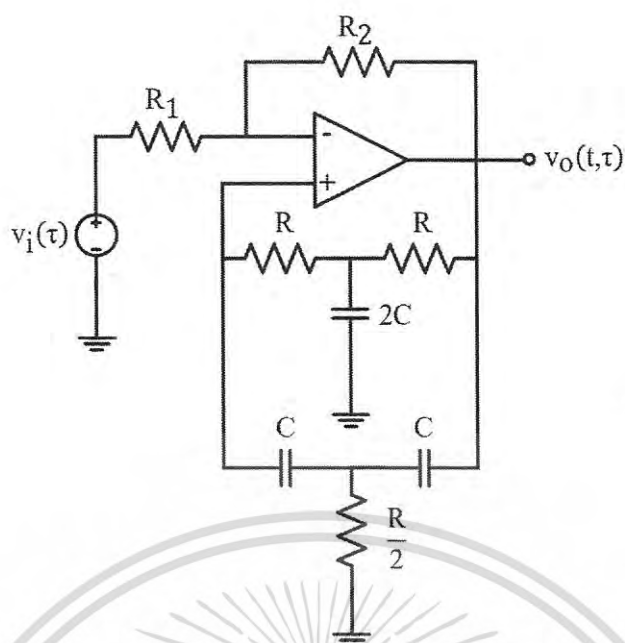
### 2.5.1.3 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที

สำหรับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ทีดังรูปที่ 2.20 เมื่อวิเคราะห์ทั้งวงจรด้วยด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ในรูปแบบเดียวกับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบเวนบริดจ์และแบบเลื่อน-เฟส จึงได้สมการที่อธิบายผลตอบสนองธรรมชาติ  $v_n(t)$  และผลตอบสนองบังคับ  $v_f(\tau)$  ของวงจรดังสมการที่ (2.181) และ (2.182)

$$\frac{d^2 v_n(t)}{dt^2} + \left( \frac{4k_{T1}}{(k_{T1}-1)RC} \right) \frac{dv_n(t)}{dt} + \frac{v_n(t)}{R^2 C^2} = 0 \quad (2.181)$$

$$\frac{d^2 v_f(\tau)}{d\tau^2} + \left( \frac{4k_{T1}}{(k_{T1}-1)RC} \right) \frac{dv_f(\tau)}{d\tau} + \frac{v_f(\tau)}{R^2 C^2} = \left( \frac{-k_{T2}}{k_{T1}-1} \right) \left( \frac{d^2 v_i(\tau)}{d\tau^2} + \left( \frac{4}{RC} \right) \frac{dv_i(\tau)}{d\tau} + \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \right) \quad (2.182)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.20 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที

โดยที่  $k_{T1} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$  และ  $k_{T2} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$  หากกำหนดให้  $R_1 \approx 0$  จึงสามารถแก้ไขสมการที่ (2.181) เพื่อหาผลตอบสนองธรรมชาติได้ดัง

$$v_n(t) = (A_{1T} + A_{2T}) \cos(\omega_0 t) + j(A_{1T} - A_{2T}) \sin(\omega_0 t) \quad (2.183)$$

โดยที่ความถี่  $\omega_0$  คือ  $\frac{1}{RC}$  สำหรับขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติ  $A_{1T}$  และ  $A_{2T}$  สามารถหาได้จากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น สำหรับกรณีการป้อนสัญญาณไฟตรง  $V_{DC}$  เป็นอินพุตให้กับวงจร จึงสามารถแก้ไขสมการที่ (2.182) จึงได้ผลตอบสนองบังคับดังสมการที่ (2.184) และกำหนดค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet ให้มีค่าเป็น  $X_T$  และค่าเงื่อนไขขอบเขต Neumann เป็นศูนย์ เพื่อวิเคราะห์วงจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ทีดังสมการที่ (2.185) และ (2.186) ตามลำดับ ส่งผลให้ได้ผลตอบสนองสมบูรณ์ดังเช่นสมการที่ (2.187)

$$v_f(\tau) = V_{DC} \quad (2.184)$$

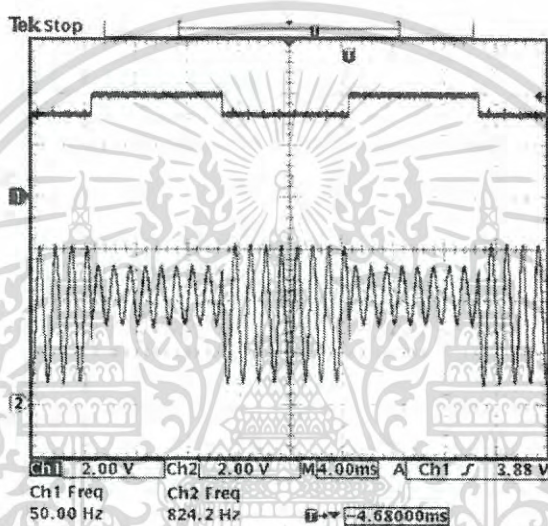
$$v_o(t, \tau)|_{t=0} = X_T \quad (2.185)$$

$$\left. \frac{dv_o(t, \tau)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.186)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$v_o(t,\tau)=(X_T-V_{DC}) \cos(\omega_0 t)+V_{DC} \quad (2.187)$$

เพื่อให้เห็นชัดถึงการเปลี่ยนระดับของไฟตรงสามารถเปลี่ยนขนาดของผลตอบสนองธรรมชาติได้ จึงทำการป้อนสัญญาณสี่เหลี่ยมขนาด 0.8 โวลต์ บนระดับไฟตรง 3.6 โวลต์ ที่ความถี่ 50 เฮิรตซ์ให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที จึงได้ผลการทดลองที่สามารถสื่อถึงการควบคุมขนาดของวงจรกำเนิดสัญญาณด้วยสัญญาณไฟตรงดังรูปที่ 2.21 สังเกตได้ว่าการป้อนสัญญาณอินพุตที่มีขนาดแปรเปลี่ยนตามเวลาก่อให้เกิดปรากฏการณ์ในรูปแบบของการมอดูเลตทางขนาด เพื่อเข้าใจในเชิงพื้นฐานจึงได้ยกตัวอย่างการป้อนสัญญาณไซน์ชวยยดอลในหัวข้อถัดไป



รูปที่ 2.21 ผลการทดลองเมื่อป้อนอินพุตสัญญาณสี่เหลี่ยมให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบทวิน-ที

### 2.5.2 การมอดูเลตทางขนาดด้วยสัญญาณอินพุตที่แปรเปลี่ยนตามเวลา

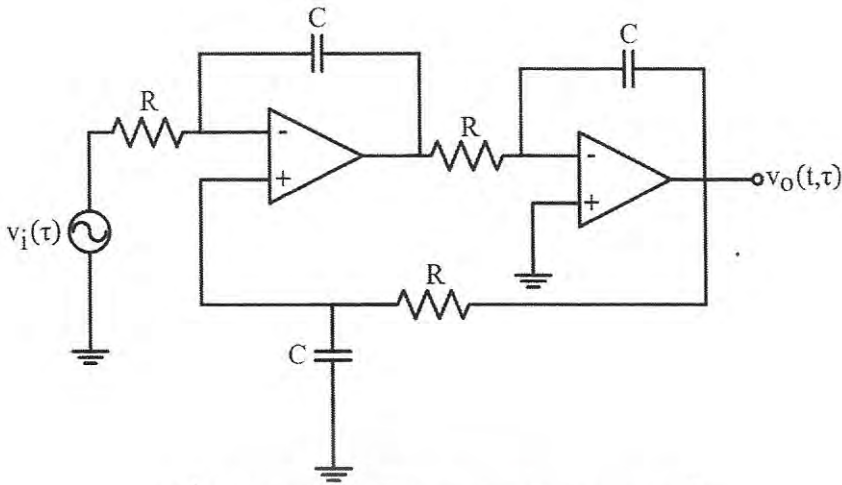
ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงปรากฏการณ์การมอดูเลตทางขนาดที่เกิดขึ้นเมื่อมีการป้อนสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณที่แปรเปลี่ยนตามเวลา โดยได้ยกตัวอย่างด้วยวงจรกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์ (Quadrature oscillator) ดังรูปที่ 2.22

เมื่อวิเคราะห์วงจรด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์จึงได้สมการอนุพันธ์ที่อธิบายผลตอบสนองธรรมชาติ  $v_n(t)$  ของวงจรถัดสมการที่ (2.188) โดยค่าคำตอบของสมการที่ (2.188) เป็นไปดังสมการที่ (2.189)

$$\frac{d^2 v_n(t)}{dt^2} + \frac{v_n(t)}{R^2 C^2} = 0 \quad (2.188)$$

$$v_n(t) = (A_{1Q} + A_{2Q}) \cos(\omega_0 t) + j(A_{1Q} - A_{2Q}) \sin(\omega_0 t) \quad (2.189)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.22 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์

โดยที่  $A_{1Q}$  และ  $A_{2Q}$  คือขนาดผลตอบสนองธรรมชาติที่ได้จากค่าเงื่อนไขเริ่มต้น ที่ความถี่  $\omega_0$  มีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{RC}$  สำหรับผลตอบสนองบังคับของวงจรมันสามารถหาได้จากสมการอนุพันธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ห้วงจรกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์ด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ดังสมการที่ (2.190)

$$\frac{d^2 v_f(\tau)}{d\tau^2} + \frac{v_f(\tau)}{R^2 C^2} = \frac{v_i(\tau)}{R^2 C^2} \quad (2.190)$$

เพื่อหาผลตอบสนองความถี่ของระบบ จึงแปลงลาปลาซสมการที่ (2.190) ได้ดังนี้

$$s^2 V_f(s) + \omega_0^2 V_f(s) = \omega_0^2 V_i(s) \quad (2.191)$$

เมื่อทำการจัดรูป (2.191) ให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันส่งผ่านดังสมการที่ (2.192) ที่ทำให้ได้ผลตอบสนองเชิงขนาดและเฟสดังสมการที่ (2.193) และ (2.194) ตามลำดับ

$$H(\omega) = \frac{V_f(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \quad (2.192)$$

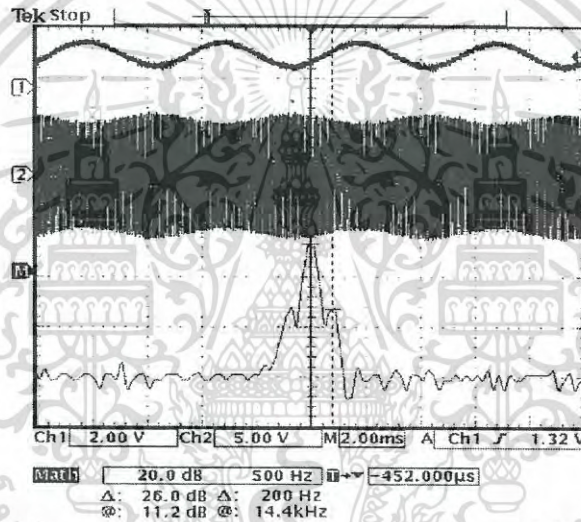
$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right| \quad (2.193)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\angle H(\omega)=0 \quad (2.194)$$

ในกรณีที่อินพุตป้อนให้กับระบบเป็นสัญญาณไซน์ชอยดอลตั้ง  $v_i(\tau)=A_f \cos(\omega_f \tau)$  เมื่อ  $A_f$  คือขนาดของอินพุตที่เป็นค่าคงที่ ที่ความถี่  $\omega_f$  จึงทำให้ได้ผลตอบสนองบังคับเป็นไปดังสมการที่ (2.195) และสำหรับกรณีของการมอดูเลตเชิงขนาด ความถี่อินพุต  $\omega_f$  นั้นมีค่าน้อยกว่าความถี่คลื่นพาห์  $\omega_0$  ที่ได้จากผลตอบสนองธรรมชาติของวงจร จึงทำให้ค่าผลตอบสนองเชิงขนาดมีค่าประมาณเท่ากับหนึ่ง

$$v_f(\tau)=|H(\omega_f)|A_f \cos(\omega_f \tau)=A_f \left| \frac{1}{1-\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}} \right| \cos(\omega_f \tau) \approx A_f \cos(\omega_f \tau) \quad (2.195)$$



รูปที่ 2.23 ผลการทดลองของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์ที่ถูกป้อนอินพุตแบบไซน์ชอยดอล

ภายใต้ค่าเงื่อนไขขอบเขต Dirichlet และ Neumann ที่ถูกกำหนดให้มีค่าเป็น  $X_Q$  และศูนย์ ดังสมการที่ (2.196) และ (2.19) ตามลำดับ จึงได้ผลตอบสนองสมบูรณ์  $v_o(t,\tau)$  ดังสมการที่ (2.198)

$$v_o(t,\tau)|_{t=0}=X_Q \quad (2.196)$$

$$\left. \frac{dv_o(t,\tau)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (2.197)$$

$$v_o(t,\tau)=(X_Q-A_f \cos(\omega_f \tau)) \cos(\omega_0 t)+A_f \cos(\omega_f \tau) \quad (2.198)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากสมการที่ (2.196) สังเกตได้ว่าผลการคูณระหว่างพจน์  $-A_f \cos(\omega_f t)$  กับ  $\cos(\omega_0 t)$  นั้นก็ให้เกิดการมอดูเลตทางขนาดขึ้น เพื่อให้เห็นถึงปรากฏการณ์การมอดูเลตทางขนาด จึงได้ป้อนสัญญาณข่าวสารที่เป็นสัญญาณไซน์ชวยคอลลที่มีความถี่ 200 เฮิรตซ์ ขนาด 1 โวลต์ให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบควอดราเจอร์ที่ผลิตความถี่ธรรมชาติที่ 14.4 กิโลเฮิรตซ์ ที่สามารถแสดงผลการทดลองได้ดังรูปที่ 2.23

## 2.6 ระบบเรดาร์และการตรวจจับแบบโซโมไดน์

### 2.6.1 การพัฒนาและหลักการเรดาร์เบื้องต้น

เรดาร์เป็นเทคโนโลยีในการตรวจจับระยะทางหรือความเร็วสัมพัทธ์ของวัตถุเป้าหมาย การพัฒนาเทคโนโลยีของเรดาร์นั้นได้เริ่มขึ้นจากการค้นพบคุณสมบัติการสะท้อนของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเมื่อตกกระทบวัตถุในปี ค.ศ. 1886 โดย Heinrich Hertz [25-26] ที่นำมาสู่การพัฒนาอย่างต่อเนื่องจนกลายเป็นโครงการวิจัยทางการทหารอย่างไม่เปิดเผยในนานาประเทศในช่วงก่อนสงครามโลกครั้งที่สอง และช่วงสงครามโลกครั้งที่สองในปี ค.ศ. 1940 ได้มีการนำระบบเรดาร์มาทดสอบใช้สำหรับระบบต่อต้านอากาศยานครั้งแรกโดยกองทัพสหรัฐอเมริกา และระบบต่อต้านอากาศยานนี้ได้ถูกนำเสนอให้ใช้จริงในสงครามหลังการที่ประเทศสหรัฐอเมริกาถูกโจมตีด้วยกองทัพญี่ปุ่นที่เพิร์ลฮาร์เบอร์ในปี ค.ศ. 1941 จนในปัจจุบันเรดาร์ได้รับความนิยมในการประยุกต์ใช้สำหรับเทคโนโลยีทางการทหารในหลายด้าน เช่นการตรวจวัดความเร็วต้นของกระสุน การรักษาระดับการบินของจรวด และพิสัยห้วงแบบพรีอักษิมิตี [28] เป็นต้น โดยเทคโนโลยีเรดาร์ได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่องจนทำให้มีเรดาร์หลากหลายชนิด ซึ่งปัจจุบันสามารถแบ่งแยกออกเป็นสองประเภทใหญ่ได้แก่เรดาร์แบบคลื่นพัลส์ (Pulse radar) และเรดาร์แบบคลื่นต่อเนื่อง (Continuous-wave radar) สำหรับเรดาร์แบบคลื่นพัลส์นั้นได้อาศัยการวิเคราะห์สัญญาณดิจิทัลเป็นสิ่งสำคัญที่ถูกแบ่งเป็นอีกสองประเภทใหญ่คือแบบร่วมนัย (Coherent) และแบบไม่ร่วมนัย (Non-coherent) และสำหรับเรดาร์แบบคลื่นต่อเนื่อง (Continuous-wave radar) ที่อาศัยเทคนิคแบบอนาล็อก ซึ่งเรดาร์แบบคลื่นต่อเนื่องนี้ก็ได้ถูกแบ่งออกเป็นอีกสองประเภทใหญ่อีกนั่นคือเรดาร์ประเภทคลื่นต่อเนื่องแบบไม่มีการมอดูเลต (Unmodulate continuous-wave radar) และเรดาร์ประเภทคลื่นต่อเนื่องแบบมีการมอดูเลต (Modulate continuous-wave radar) โดยการใช้งานเรดาร์แต่ละประเภทรุ่นขึ้นอยู่กัประเภทงานของการใช้งาน

หลักการเบื้องต้นของเรดาร์คือการส่งสัญญาณวิทยุหรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าสัญญาณเรดาร์ไปในทิศทางที่ต้องการ เมื่อสัญญาณเรดาร์ตกกระทบกับวัตถุเป้าหมายจึงเกิดการกระเจิง (Scatter) หรือสะท้อน (Reflect) ของสัญญาณเรดาร์ขึ้นในหลายทิศทาง โดยที่อัตราการสะท้อนสัญญาณเรดาร์นั้นสามารถพิจารณาได้จากค่าการนำไฟฟ้าของวัตถุเป้าหมาย ส่งผลให้วัตถุเป้าหมายที่สามารถสะท้อนของสัญญาณเรดาร์ได้ดีมักเป็นวัสดุประเภทโลหะ น้ำเค็ม และพื้นที่ชื้นเป็นต้น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

อย่างไรก็ตามในกรณีที่วัตถุเป้าหมายกับเรดาร์มีการเคลื่อนที่สัมพันธ์กัน สัญญาณเรดาร์ที่สะท้อนจากวัตถุเป้าหมายจะเกิดการเลื่อนทางความถี่ขึ้นอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์ดอปเลอร์ (Doppler effect) ซึ่งสามารถแสดงรายละเอียดได้ในลำดับถัดไป

## 2.6.2 ปรากฏการณ์ดอปเลอร์

ปรากฏการณ์ดอปเลอร์เป็นปรากฏการณ์การเปลี่ยนแปลงความถี่หรือความยาวคลื่นที่เกิดขึ้นเมื่อผู้สังเกตการณ์การเคลื่อนที่สัมพันธ์กับแหล่งกำเนิดคลื่น โดยปรากฏการณ์นี้เกิดขึ้นในคลื่นทุกประเภท ปรากฏการณ์นี้ถูกค้นพบครั้งแรกโดยนักฟิสิกส์ชาวออสเตรีย Christian Doppler ในปี 1842 [29] เพื่อแสดงให้เห็นภาพชัดของปรากฏการณ์นี้ จึงยกตัวอย่างสถานการณ์ที่เกิดปรากฏการณ์ดอปเลอร์พร้อมแสดงรายละเอียดในเชิงคณิตศาสตร์เบื้องต้นได้ดังนี้

สมมติให้สัญญาณเรดาร์ที่ถูกผลิตจากแหล่งกำเนิดผลิตคลื่น  $\phi_s(t)$  ที่เป็นคลื่นรูปแบบไซน์ ซอยดอลที่มีขนาด  $A_s$  และความถี่  $\omega_s$  ดังสมการที่ (2.199) แพร่สายอากาศออกไปในอากาศตั้งรูปที่ 2.20

$$\phi_s(t) = A_s \cos(\omega_s t) \quad (2.199)$$

เมื่อสัญญาณเรดาร์ตกกระทบกับเครื่องบินจึงเกิดสัญญาณสะท้อน  $\phi_r(t)$  กลับมา โดยรูปแบบของสัญญาณสะท้อนนี้สามารถอยู่ในรูปแบบสมการดังสมการที่ (2.200)

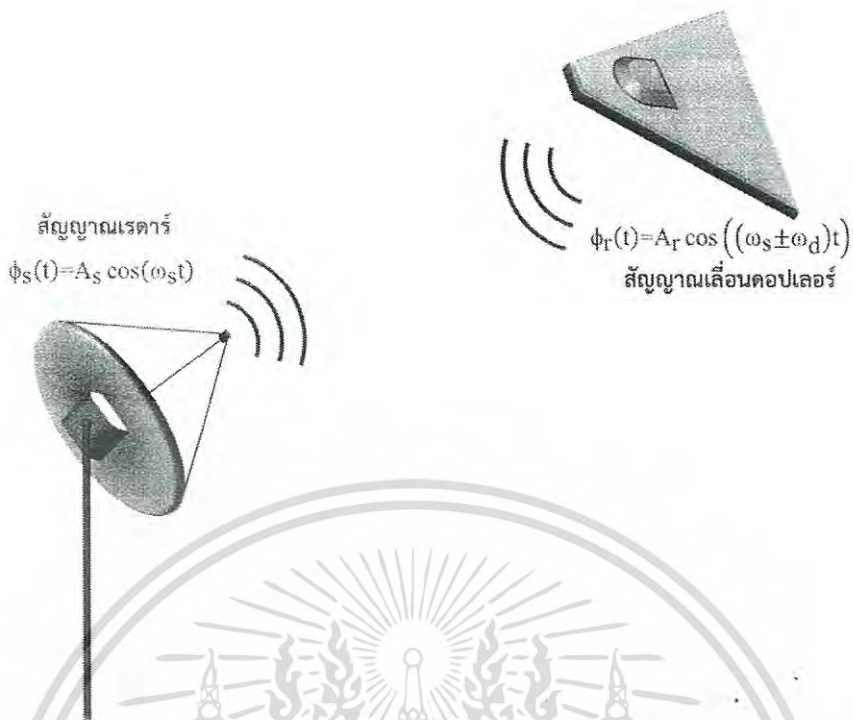
$$\phi_r(t) = A_r \cos((\omega_s \pm \omega_d)t) \quad (2.200)$$

โดย  $A_r$  คือขนาดของสัญญาณสะท้อน และ  $\omega_s \pm \omega_d$  คือความถี่เลื่อนดอปเลอร์ (Doppler-shifted frequency)

สังเกตได้ว่าภายในความถี่เลื่อนดอปเลอร์นั้นประกอบไปด้วยความถี่เรดาร์  $\omega_s$  ที่ส่งออกไปรวมอยู่กับความถี่ดอปเลอร์ (Doppler frequency)  $\omega_d$  ที่ขึ้นอยู่กับความเร็วสัมพันธ์ของวัตถุ นอกเหนือจากนี้สังเกตได้ว่าเครื่องหมายหน้าความถี่ดอปเลอร์นั้นมีทั้งเครื่องหมายบวกและลบ ซึ่งเครื่องหมายบวกและลบนี้นี้เป็นการบ่งบอกทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความถี่เลื่อนดอปเลอร์กับความเร็วและทิศทางของวัตถุเป้าหมายได้ดังสมการที่ (2.201)

$$\omega_s \pm \omega_d = \left( \frac{c + v_r}{c + v_s} \right) \omega_s \quad (2.201)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.24 ตัวอย่างปรากฏการณ์ดอปเลอร์

สำหรับ  $c$  คือความเร็วของคลื่น ค่าความเร็ว  $v_r$  คือความเร็วสัมพัทธ์ของวัตถุเป้าหมายเทียบกับกรอบอ้างอิงที่เป็นตัวกลางของการแพร่คลื่น ซึ่งมีค่าบวกในกรณีที่วัตถุเป้าหมายเคลื่อนที่เข้าหาแหล่งกำเนิดคลื่นและมีค่าลบเมื่อวัตถุเคลื่อนที่เคลื่อนที่ออกจากแหล่งกำเนิดคลื่น สำหรับค่าความเร็ว  $v_s$  นั้นคือความเร็วของแหล่งกำเนิดคลื่นเทียบกับกรอบอ้างอิงที่เป็นตัวกลางของการแพร่คลื่น ที่มีการตีความเครื่องหมายตรงเป็นทิศกันข้ามกับ  $v_r$  นั่นคือค่า  $v_s$  มีค่าบวกเมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่ออกจากวัตถุเป้าหมาย และมีค่าลบเมื่อแหล่งกำเนิดคลื่นเคลื่อนที่เข้าหาวัตถุเป้าหมาย

ดังนั้นหากสถานการณ์เป็นไปตามดังรูปที่ 2.24 ที่แหล่งกำเนิดคลื่นอยู่กับที่ และวัตถุเป้าหมายเคลื่อนที่เข้าหาหรือออกจากแหล่งกำเนิดคลื่น ในสถานการณ์นี้ต้องพึงระลึกว่าหากสังเกตการณ์ที่แหล่งกำเนิด ปรากฏการณ์ดอปเลอร์นั้นต้องมีอยู่สองส่วน ส่วนแรกอันเนื่องมาจากสัญญาณเรดาร์กระทบกับวัตถุเป้าหมาย และส่วนที่สองนั้นมาจากสัญญาณที่สะท้อนเข้าสู่แหล่งกำเนิด จึงทำให้สามารถประยุกต์ใช้สมการที่ (2.201) เพื่อแสดงความสัมพันธ์ระหว่างทิศทางและความเร็วของวัตถุเป้าหมายและความถี่ดอปเลอร์ได้ดังสมการที่ (2.202)

$$\pm\omega_D = \left( \frac{(c \pm v_r) - (c \mp v_s)}{c} \right) \omega_s - \omega_s = \omega_s \left( \frac{\pm 2v_r}{c} - 1 \right) \quad (2.202)$$

### 2.6.3 การตรวจจับแบบโซโม่ไดน์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โฮโมไดน์คือเทคนิคการตรวจจับสัญญาณที่ต้องการ (Desired signal) ด้วยการคูณกันระหว่างสัญญาณอ้างอิง (Reference signal) ที่ได้จากระบบการสั่นหรือระบบกำเนิดสัญญาณที่ใช้อ้างอิง (Local oscillator) กับสัญญาณที่มีการเลื่อนทางความถี่ (Shifted signal) หรือสัญญาณที่ถูกมอดูเลต (Modulated signal) ภายใต้การคูณเพียงครั้งเดียว และนี่คือความแตกต่างจากเฮเทอโรไดน์ (Heterodyne) ที่หมายถึงการคูณกันหลายครั้งเพื่อย้ายย่านความถี่ โดยเทคนิคโฮโมไดน์นี้ได้ถูกนำไปใช้ในเชิงวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมอย่างแพร่หลาย [30-34] ดังเช่นการตรวจจับสัญญาณดอปเปลอร์ในเรดาร์ระยะสั้น (Short-Range Radar: SRR) ที่เป็นเรดาร์ประเภทคลื่นต่อเนื่องแบบไม่มีการมอดูเลต การตรวจจับสถานะควอนตัม (Quantum state) ของอนุภาคเพื่อยืนยันความพัวพันเชิงควอนตัม (Quantum entanglement) [30-32] การตรวจจับคลื่นโน้มถ่วง (Gravitational wave detection) ด้วยเลเซอร์อินเตอร์เฟอโรมิเตอร์ (Laser Interferometer) [33-34] โดยวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้อาศัยปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณเพื่อสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเปลอร์ ดังนั้นจึงสามารถแสดงรายละเอียดเกี่ยวกับการตรวจจับแบบโฮโมไดน์ในเรดาร์ระยะสั้นได้ดังต่อไปนี้

จากหัวข้อ 2.6.2 สังเกตได้ว่าหากได้ความถี่ดอปเปลอร์ออกมาก็สามารถแปลงความถี่ดอปเปลอร์นี้ให้กลายเป็นความเร็วได้โดยตรง โดยวิธีการที่ตรงไปตรงมาคือการนำสัญญาณเรดาร์ในสมการที่ (2.199) มาคูณกับสัญญาณเลื่อนดอปเปลอร์ในสมการที่ (2.200) ที่ได้เอาต์พุตของสัญญาณเป็นไปดังนี้

$$\phi_s(t) \times \phi_r(t) = \frac{A_r A_s}{2} (\cos(\pm\omega_d t) + \cos((2\omega_s \pm \omega_d)t)) \quad (2.203)$$

สังเกตได้ว่าหากนำสัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากการคูณนี้มาผ่านวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านก็จะสามารถได้ความถี่ดอปเปลอร์ที่สามารถนำมาแปลงเป็นความเร็วของวัตถุเป้าหมายได้ โดยกระบวนการการคูณเพียงครั้งเดียวเพื่อให้ได้ความถี่ที่ต้องการนี้เองคือการตรวจจับแบบโฮโมไดน์ ส่งผลให้การตรวจจับแบบโฮโมไดน์นั้นเป็นเทคนิคที่สำคัญสำหรับเรดาร์ประเภทคลื่นต่อเนื่องแบบไม่มีการมอดูเลต

อย่างไรก็ตามสัญญาณดอปเปลอร์นั้นสามารถตีความได้เป็นเพียงความเร็วของวัตถุเพียงอย่างเดียว ดังนั้นการระบุตำแหน่งของวัตถุจึงจำเป็นต้องอาศัยขนาดของสัญญาณเลื่อนดอปเปลอร์ในการระบุตำแหน่งของวัตถุ ซึ่งสามารถหาได้จากสมการการสูญเสียในที่ว่าง (Free space path loss) [25-26] ที่แสดงได้ดังนี้

$$\frac{P_t}{P_r} = \frac{(4\pi)^3 R^4}{G^2 \sigma \lambda^2} \quad (2.204)$$

เมื่อ  $P_t$  คือค่ากำลังงานของสัญญาณอ้างอิงที่ส่งออกไป  $P_r$  คือค่ากำลังงานของสัญญาณเลื่อนดอปเปลอร์ที่รับเข้ามา  $R$  คือระยะทางระหว่างเรดาร์และวัตถุ  $G$  คือค่าอัตราการขยายของสายอากาศ  $\sigma$  คือส่วน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

## บทที่ 3

# การอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในวงจรกิจต์สัญญาณ ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาและการประยุกต์ใช้

### 3.1 เกริ่นนำ

จากทฤษฎีการสั่นที่ได้กล่าวไว้ในบทที่ 2 สามารถสังเกตได้ว่าในกรณีที่มีอินพุตภายนอกมากระทำกับระบบนั้นมียูสองแนวคิดได้แก่ แนวคิดที่อินพุตเข้ามารบกวนระบบ และแนวคิดที่อินพุตเข้ามาบังคับระบบ โดยแนวคิดที่อินพุตเข้ามารบกวนระบบนั้นอยู่บนพื้นฐานของทฤษฎีการรบกวนที่ต้องอาศัยสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นที่มีเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย ส่งผลให้การวิเคราะห์วงจรกิจต์สัญญาณมีความซับซ้อน แต่ในขณะที่แนวคิดอินพุตเข้ามาบังคับระบบนั้นมีพื้นฐานมาจากสมการอนุพันธ์เชิงเส้นที่ตรงกับแนวคิดทฤษฎีสัญญาณและระบบในรูปแบบระบบเชิงเส้นไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาที่มีเทคนิคทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นระเบียบแบบแผน จึงทำให้แนวคิดอินพุตเข้ามาบังคับระบบนั้นสามารถประยุกต์ใช้วิเคราะห์ได้กับทุกระบบการสั่นแม้ว่าโครงสร้างของระบบมีความแตกต่างกันมาก โดยโมเดลการสั่นบังคับที่ถูกพัฒนาให้สามารถอธิบายผลการทดลองที่เกิดขึ้นจริงทั้งระบบการสั่นบังคับเชิงกลและไฟฟ้าคือโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ซึ่งสามารถนำโมเดลนี้ไปประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย ในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้ประยุกต์ใช้สำหรับอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้โดยตรงสำหรับสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์และการอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสได้ อีกทั้งหากนำผลพวงการเกิดปรากฏการณ์โฮโมไดน์ที่อธิบายด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาไปอธิบายการเกิดการสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกที่เทียบเคียงได้กับปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชันลอค และอาศัยความเป็นฮาร์โมนิกอันดับสูงของวงจรกิจต์สัญญาณ จึงสามารถควบคุมแบนด์วิดท์ของสัญญาณอินพุตแบบเอฟเอ็มได้ โดยสามารถแสดงรายละเอียดได้ในลำดับถัดไป

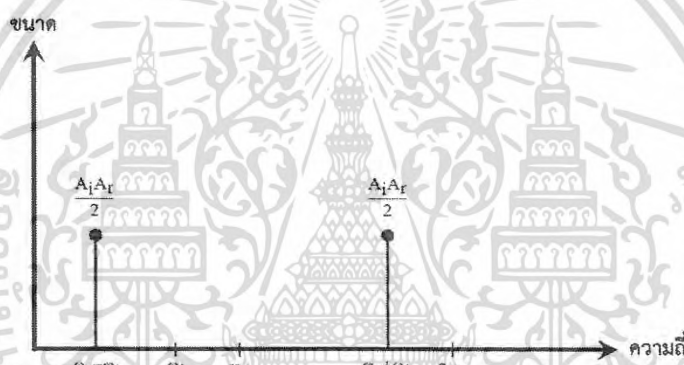
### 3.2 ปรากฏการณ์โฮโมไดน์

จากปรากฏการณ์โฮโมไดน์มีพฤติกรรมการคูณกันของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณการสั่นที่เกิดขึ้นโดยตัวระบบเอง ในด้านวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสารปรากฏการณ์โฮโมไดน์สามารถเทียบเคียงกันได้กับการย้ายย่านความถี่ด้วยวงจรคูณ (มิกเซอร์) แต่อย่างไรก็ตามปรากฏการณ์โฮโมไดน์ยังมีจุดที่ต่างกับมิกเซอร์อยู่นั้นคือองค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณเอาต์พุต เพื่อให้เห็นถึงความแตกต่างที่ชัดเจนจึงสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

สำหรับมิกเซอร์ คือการนำสัญญาณอินพุตและสัญญาณอ้างอิงที่ได้จากวงจรกำเนิดสัญญาณป้อนให้กับวงจรคูณ เพื่อยกตัวอย่างให้เห็นภาพที่ชัดเจน จึงยกตัวอย่างอินพุตที่เป็นสัญญาณไซน์ชอยดอล  $\varphi_i(t)=A_i \cos(\omega_i t)$  และสัญญาณไซน์ชอยดอลที่ได้จากวงจรกำเนิดสัญญาณ  $\varphi_r(t)=A_r \cos(\omega_r t)$  ป้อนให้กับมิกเซอร์ในอุดมคติ จึงได้สัญญาณเอาต์พุต  $\varphi_o(t)$  ที่ได้จากมิกเซอร์เป็นไปตามสมการที่ (3.1)

$$\varphi_o(t)=\varphi_i(t)\times\varphi_r(t)=\frac{A_i A_r}{2} \cos((\omega_r-\omega_i)t) + \frac{A_i A_r}{2} \cos((\omega_r+\omega_i)t) \quad (3.1)$$

จากสมการที่ (3.1) จึงสามารถแสดงองค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากมิกเซอร์ในโดเมนความถี่ ดังรูปที่ 3.1



รูปที่ 3.1 องค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากมิกเซอร์ในโดเมนความถี่

จากรูปที่ 3.1 สังเกตได้ว่าสเปกตรัมทางซ้ายสุดที่ความถี่  $\omega_r - \omega_i$  อยู่ในย่านความถี่ที่ต่ำกว่าความถี่อ้างอิง  $\omega_r$  ในขณะที่สเปกตรัมทางขวาสุดที่ความถี่  $\omega_r + \omega_i$  นั้นอยู่ในย่านความถี่ที่สูงกว่าความถี่อ้างอิงเดียวกัน เนื่องจากการใช้มิกเซอร์มีทั้งการย้ายย่านความถี่ขึ้น (Up converter) และการย้ายย่านความถี่ลง (Down converter) โดยทั่วไปแล้วการย้ายย่านความถี่ลงสามารถทำได้ด้วยการกรองพจน์  $\frac{A_i A_r}{2} \cos((\omega_r - \omega_i)t)$  ในสมการที่ (3.1) ด้วยวงจรกรองความถี่ต่ำผ่านออกมา ในทางกลับกันหากต้องการย้ายย่านความถี่ขึ้นสามารถทำได้ด้วยการนำเอาต์พุตในสมการที่ (3.1) ไปผ่านวงจรกรองความถี่สูง เพื่อกรองพจน์  $\frac{A_i A_r}{2} \cos((\omega_r + \omega_i)t)$  ออกมา

สำหรับการย้ายย่านความถี่ด้วยปรากฏการณ์โฮโมไดน์ องค์ประกอบทางความถี่จะมีความคล้ายคลึงกับการใช้มิกเซอร์ แตกต่างกันที่เพิ่มองค์ประกอบความถี่ของเอาต์พุตที่ความถี่อ้างอิง  $\omega_r$  และความถี่อินพุต  $\omega_i$  เข้ามานอกเหนือจากความถี่  $\omega_r - \omega_i$  และ  $\omega_r + \omega_i$  ที่มีอยู่เดิม เพื่อแสดงถึงรายละเอียด จึงอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ที่สามารถอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ของ

ระบบการสั่นบังคับ ทั้งระบบการสั่นเชิงกลและระบบการสั่นทางไฟฟ้า เนื่องจากการอธิบายปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลานั้นเกิดขึ้นจากการนิยามว่าขนาดของเอาต์พุตของระบบนั้นต้องขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้น (รายละเอียดในบทที่ 2) โดยรูปแบบเอาต์พุตของโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลานั้นสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.2)

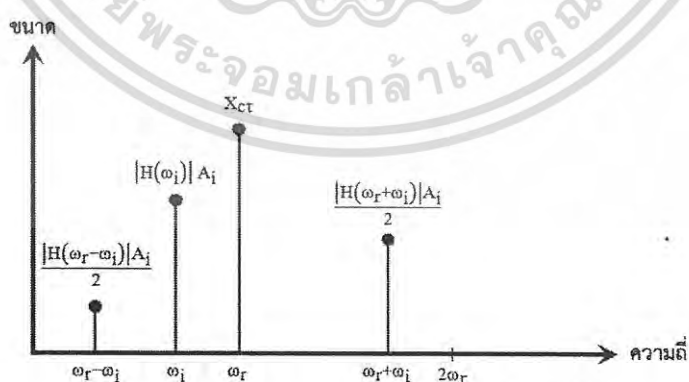
$$\varphi_c(t, \tau) = X_{ct} \cos(\omega_n t) - \varphi_f(\tau) \cos(\omega_n t) + \varphi_f(\tau) \quad (3.2)$$

เมื่อ  $\varphi_c(t, \tau)$  คือผลตอบสนองสมบูรณ์หรือเอาต์พุตของระบบ  $X_{ct}$  คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้น  $\varphi_f(\tau)$  คือผลตอบสนองบังคับและ  $\omega_n$  คือความถี่ธรรมชาติ

ในกรณีที่ป้อนอินพุตเป็นสัญญาณไซน์ชวยดอล  $\varphi_i(\tau) = A_i \cos(\omega_i \tau)$  เมื่อให้  $t = \tau$  ผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบจะอยู่ในรูปแบบเช่นสมการที่ (3.3) (รายละเอียดในบทที่ 2)

$$\varphi_c(t) = \begin{pmatrix} X_{ct} \cos(\omega_r t) \\ -|H(\omega_r - \omega_i)| A_i \cos((\omega_r - \omega_i)t + \angle H(\omega_r - \omega_i)) \\ -|H(\omega_r + \omega_i)| A_i \cos((\omega_r + \omega_i)t + \angle H(\omega_r + \omega_i)) \\ + |H(\omega_i)| A_i \cos(\omega_i t + \angle H(\omega_i)) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

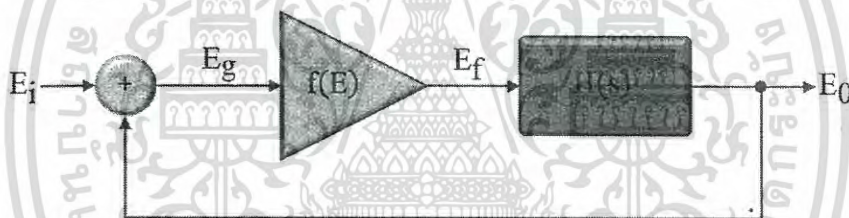
โดย  $|H(\omega)|$  และ  $\angle H(\omega)$  คือผลตอบสนองทางขนาดและเฟสที่ความถี่  $\omega$  ใดๆ จากสมการที่ (3.3) จึงสามารถแสดงองค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาในโดเมนความถี่ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 องค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา

จากรูปที่ 3.2 สังเกตได้ว่าสเปกตรัมทางซ้ายมือสุดและขวามือสุด มีความถี่ที่ตรงกันกับเอาต์พุตที่ได้จากการคูณกันของสัญญาณอินพุตกับสัญญาณที่ถูกผลิตออกมาจากวงจรกำเนิดสัญญาณ นั่นคือความถี่  $\omega_r - \omega_i$  และ  $\omega_r + \omega_i$  ตามลำดับ ซึ่งสเปกตรัมที่เพิ่มเข้ามาอยู่ถัดจากสเปกตรัมทางซ้ายมือสุดนั้นคือสเปกตรัมของสัญญาณอินพุต  $\omega_i$  และถัดจากสเปกตรัมสัญญาณอินพุตคือสเปกตรัมสัญญาณที่ถูกผลิตจากวงจรกำเนิดสัญญาณ  $\omega_r$  ตามลำดับ โดยการมีอยู่ของสัญญาณอินพุตและสัญญาณที่ถูกผลิตออกมาจากวงจรกำเนิดสัญญาณที่รวมอยู่ในสัญญาณเอาต์พุตนี้เอง คือความแตกต่างระหว่างปรากฏการณ์โฮโมไดน์กับการใช้มิกเซอร์

อย่างไรก็ตามการอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ด้วยโมเดลการสั้นบังคับหลายเวลาในวงจรไฟฟ้าสามารถเทียบเคียงได้กับวงจรมิกเซอร์แบบสั้นตนเอง โดยโมเดลทางคณิตศาสตร์ที่นิยมใช้อธิบายวงจรมิกเซอร์แบบสั้นตนเองในปัจจุบันมีพื้นฐานมาจากแนวคิดการสั้นตนเอง ที่อธิบายด้วยโมเดลการป้อนกลับสำหรับปรากฏการณ์อินเจ็คชันลอคของ Paciorek [19] (รายละเอียดในบทที่ 2) โดยสามารถแสดงแผนภาพการป้อนกลับของ Paciorek ที่อ้างอิงตามบทที่ 2 ดังรูปที่ 2.15



รูปที่ 2.15 โมเดลการป้อนกลับสำหรับปรากฏการณ์อินเจ็คชันลอคของ Paciorek

โดยสามารถแสดงความสัมพันธ์ของอินพุตและเอาต์พุตที่ได้จากรูปที่ 2.15 เป็นไปตามสมการที่ (3.4)

$$E_0(s) = f(E_i(s) + E_0(s))H(s) \quad (3.4)$$

โดย  $E_i(s)$  คืออินพุต  $E_0(s)$  คือเอาต์พุต  $f(E)$  คือภาคขยายของวงจร และ  $H(s)$  คือภาคเรโซแนนซ์ของวงจรตามลำดับ สำหรับการอธิบายมิกเซอร์แบบสั้นตนเอง ต้องกำหนดให้ภาคขยายอยู่ในรูปแบบอนุกรมพหุนามดังสมการที่ (3.5) และภาคเรโซแนนซ์ของวงจรรอยู่ในรูปแบบฟังก์ชันส่งผ่านของวงจรรองความถี่แถบผ่านดังสมการที่ (3.6)

ตัดผ่านเรดาร์ (Radar cross section) ของวัตถุเป้าหมาย และ  $\lambda$  คือความยาวคลื่นของสัญญาณอ้างอิงที่ส่งออกไป

## 2.7 สรุป

ในบทนี้เป็นการแสดงทฤษฎีการสั่นในรูปแบบต่างๆและรายละเอียดที่เกี่ยวข้อง สิ่งที่น่าสนใจคือความแตกต่างกันระหว่างการนิยามตั้งต้นของระบบการสั่นที่มีอินพุตเข้ามากระทำกับระบบที่นำมาสู่การวิเคราะห์และรายละเอียดต่างๆที่แตกต่างกันในคนละแง่มุมอย่างสิ้นเชิง เช่นการนิยามว่าการป้อนอินพุตให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นคือระบบการสั่นตนเอง การวิเคราะห์จึงอยู่ในรูปแบบทฤษฎีการรบกวนที่มีเทคนิคทางคณิตศาสตร์หลากหลาย เนื่องจากทฤษฎีการรบกวนมีพื้นฐานมาจากแนวคิดอินพุตที่เข้ามาในระบบนั้นไปแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์ภายในระบบ ทำให้ระบบที่แตกต่างกันการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ก็ต้องแตกต่างกันไปด้วย แต่ในขณะที่โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลานั้น การวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์เป็นระเบียบแบบแผนนั้นคือต้องหาผลตอบสนองธรรมชาติของระบบ แล้วหาผลตอบสนองบังคับ และนำไปเข้าเงื่อนไขเริ่มต้นแบบหลายเวลา นอกเหนือจากนี้โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลายังสามารถใช้ได้กับระบบการสั่นเชิงกลและวงจรกำเนิดสัญญาณทางไฟฟ้าใดๆ โดยผลการทำนายในทางคณิตศาสตร์นั้นสอดคล้องกับผลการทดลองที่เกิดขึ้นจริง และจุดที่น่าสังเกตคือผลของการคูณระหว่างผลตอบสนองบังคับและผลตอบสนองธรรมชาติที่เกิดขึ้นนั้น สามารถนำไปประยุกต์ใช้สำหรับการตรวจจับแบบไฮโมไดน์ได้ โดยในบทถัดไปจึงเป็นการกล่าวถึงการอธิบายปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาพร้อมทั้งเปรียบเทียบกับเทคนิคหรือโมเดลแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่มีอยู่เดิม นอกเหนือจากนี้ยังแสดงถึงการประยุกต์ใช้ผลของปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ในวงจรกำเนิดสัญญาณสำหรับสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์ภายใต้การใช้วงจรกำเนิดไฟฟ้าเพียงวงจรเดียวและการอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรกำเนิดสัญญาณภายใต้ปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ในระบบการสั่นบังคับ แล้วอธิบายรายละเอียดการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มเมื่อมีสัญญาณเอฟเอ็มเป็นอินพุตให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณในตอนท้ายของบทถัดไป

$$f(E_i(s) + E_0(s)) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma} (E_i(s) + E_0(s))^{\sigma} \quad (3.5)$$

$$H(s) = \frac{H_0 \frac{Q}{\omega_0} s}{s^2 + H_0 \frac{Q}{\omega_0} s + \omega_0^2} \quad (3.6)$$

โดยที่  $H_0$  คือค่าคงที่  $Q$  คือค่าตัวประกอบคุณภาพของวงจร และ  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของวงจร หากแทนสมการที่ (3.5) และ (3.6) ลงในสมการที่ (3.4) โดยกำหนดให้อนุกรมในสมการที่ (3.5) อยู่ในอันดับที่สอง และแปลงกลับลาปลาซพร้อมจัดรูป จึงได้สมการความสัมพันธ์ของอินพุตและเอาต์พุตใหม่ตามสมการที่ (3.7)

$$\frac{d^2}{dt^2} E_0(t) + \omega_0^2 E_0(t) = \begin{pmatrix} a_1 \left( \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} (E_i(t) + E_0(t)) \\ + H_0 \frac{Q}{\omega_0} \frac{d}{dt} (E_i(t) + E_0(t)) \\ + \omega_0^2 (E_i(t) + E_0(t)) \end{array} \right) \\ + a_2 \left( \begin{array}{l} \frac{d^2}{dt^2} (E_i(t) + E_0(t))^2 \\ + H_0 \frac{Q}{\omega_0} \frac{d}{dt} (E_i(t) + E_0(t))^2 \\ + \omega_0^2 (E_i(t) + E_0(t))^2 \end{array} \right) \end{pmatrix} + H_0 \frac{Q}{\omega_0} \frac{d}{dt} E_0(t) \quad (3.7)$$

สังเกตได้ว่าสมการที่ (3.7) อยู่ในรูปแบบของสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้น ที่มีวิธีการหาคำคำตอบด้วยการกำหนดค่าคำตอบตามทฤษฎีการรบกวน ซึ่งการกำหนดค่าคำตอบนี้มีรูปแบบเป็นไปตามสมการที่ (3.8)

$$E_0(t) = p(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (3.8)$$

โดยที่  $p(t)$  และ  $\phi(t)$  คือขนาดและเฟสที่แปรเปลี่ยนตามเวลา ซึ่งหาได้จากเทคนิคการประมาณค่าที่มีรูปแบบหลากหลาย (รายละเอียดในภาคผนวก ข.)

โดยสรุปแล้วแนวคิดการอธิบายวงจรมิกเซอร์แบบสั่นตนเองจึงเป็นการอธิบายเอาต์พุตที่ได้จากวงจรในรูปแบบของการเลือกเทคนิคการประมาณค่าทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับผลการทดลอง และจากจุดนี้เองทำให้โมเดลทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายวงจรมิกเซอร์แบบสั่นตนเองมีหลากหลายรูปแบบ ไม่สามารถอธิบายปรากฏการณ์โอโมไดน์ที่เกิดขึ้นเหมือนกันสำหรับทุกระบบการสั่นภายใต้กรอบของโมเดลทางคณิตศาสตร์เดียวกันได้ ซึ่งแตกต่างจากโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาที่เป็นการทำนายผลตอบสนองของ

ระบบที่เกิดขึ้นด้วยมุมมองแบบสัญญาณและระบบ ดังนั้นโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาจึงสามารถประยุกต์ใช้อธิบายและทำนายปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ได้กับวงจรกำเนิดสัญญาณทุกรูปแบบ

นอกเหนือจากนี้ยังสามารถนำโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาไปประยุกต์ใช้งานในเชิงวิศวกรรมได้ โดยสามารถแสดงการประยุกต์ใช้สำหรับการสร้างเรตาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์โดยอาศัยวงจรกำเนิดสัญญาณเพียงวงจรถ้วน และการอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสภายในวงจรกำเนิดสัญญาณในลำดับถัดไป

### 3.2.1 เรตาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์

ก่อนอธิบายการประยุกต์ใช้วงจรกำเนิดสัญญาณสำหรับเรตาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์ ต้องสังเกตผลของการใช้โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาสำหรับระบบเพนดูลัมบังคับที่แสดงในบทที่ 2 หัวข้อย่อย 2.3.3.1 เสียก่อน โดยผลการทดลองในรูปที่ 2.7 นั้นเป็นการบ่งบอกว่าสัญญาณที่ป้อนอินพุตมีความถี่  $\omega_n \pm \omega_d$  ให้กับระบบที่สั่นด้วยความถี่ธรรมชาติ  $\omega_n$  สามารถก่อให้เกิดสัญญาณที่มีความถี่  $\omega_d$  รวมอยู่กับสัญญาณเอาต์พุตได้ ดังนั้นหากนำโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลามาประยุกต์ใช้กับวงจรกำเนิดสัญญาณด้วยการป้อนสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์  $\varphi_D(\tau)$  ดังสมการที่ (3.9) ให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ จึงได้ผลตอบสนองบังคับของระบบเป็นไปดังสมการที่ (3.10)

$$\varphi_D(\tau) = \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau) \quad (3.9)$$

$$\varphi_f(\tau) = |H(\omega_n \pm \omega_d)| \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau + \angle H(\omega_n \pm \omega_d)) \quad (3.10)$$

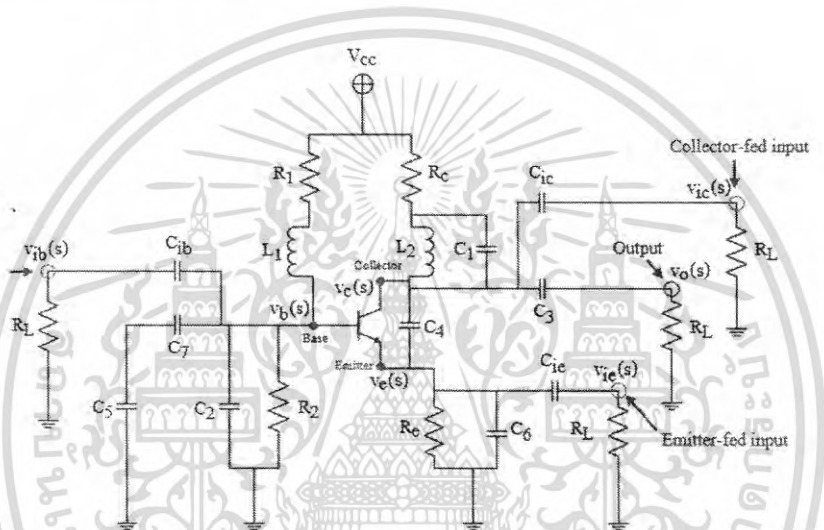
เมื่อ  $\rho_0$  คือค่าขนาดของสัญญาณดอปเลอร์  $\omega_n$  คือความถี่ธรรมชาติที่วงจรกำเนิดสัญญาณแพร่ผ่านอากาศไปตกกระทบกับวัตถุที่มีความเร็ว และ  $\omega_d$  คือความถี่ดอปเลอร์ สำหรับ  $\varphi_f(\tau)$  คือผลตอบสนองบังคับของระบบ  $|H(\omega_n \pm \omega_d)|$  คือผลตอบสนองเชิงขนาด และ  $\angle H(\omega_n \pm \omega_d)$  คือผลตอบสนองเชิงเฟส หากกำหนดค่าเงื่อนไขเริ่มต้นให้เท่ากับ  $X_0$  เมื่อแทนค่าผลตอบสนองบังคับในสมการที่ (3.3) ลงในสมการผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบใน (3.2) และหากนิยามให้  $\tau = t$  จึงได้ผลตอบสนองสมบูรณ์หรือเอาต์พุตของระบบเป็นไปดังสมการที่ (3.11)

$$\varphi_c(t) = \left( \begin{array}{l} -\frac{|H(\omega_d)|}{2} \rho_0 \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) + X_0 \cos(\omega_n t) \\ + |H(\omega_n \pm \omega_d)| \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H((\omega_n \pm \omega_d))) \\ -\frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2} \rho_0 \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \end{array} \right) \cdot \quad (3.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

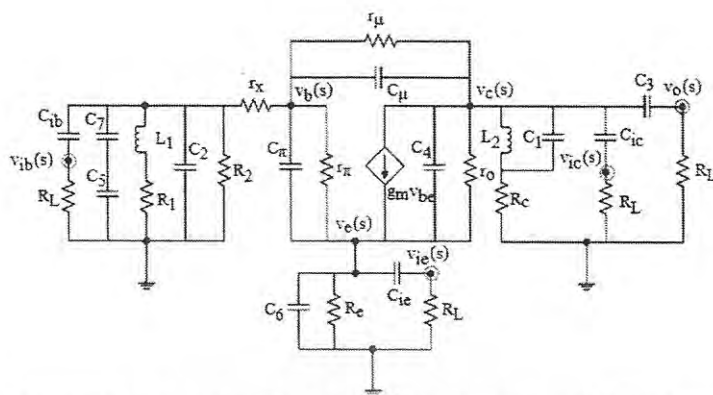
สังเกตได้ว่าพจน์แรกทางฝั่งขวาคือสัญญาณคอปเลอร์ที่สามารถกรองออกมาได้ด้วยการใช้วงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน

เพื่อยืนยันหลักการดังกล่าวข้างต้น จึงได้ทำการทดลองกับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุดดังรูปที่ 3.13 โดยการดัดแปลงนี้สามารถรองรับสัญญาณอินพุตต่างจุดกันเพื่อยืนยันว่ามุมมองของวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นเป็นระบบการส่งองค์รวมที่ถูกบังคับที่ให้ผลตอบสนองสมบูรณ์ในรูปแบบเดียวกัน

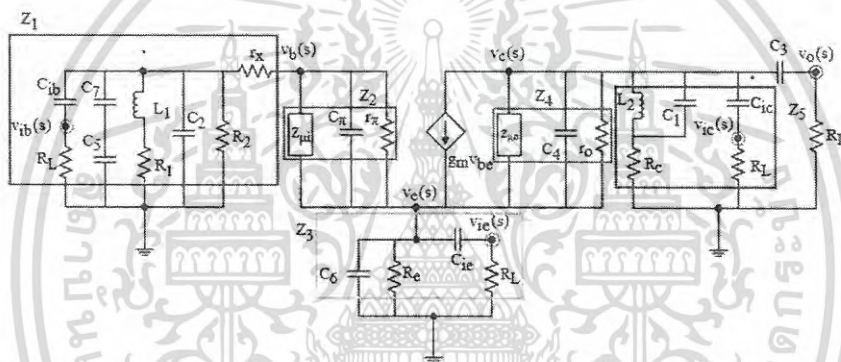


รูปที่ 3.3 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด

โดยที่  $v_c(s)$ ,  $v_b(s)$  และ  $v_e(s)$  คือแรงดันที่ขาอิมิตเตอร์ เบส และคอลเลคเตอร์ของทรานซิสเตอร์ตามลำดับ สำหรับ  $v_{ic}(s)$ ,  $v_{ib}(s)$  และ  $v_{ie}(s)$  คือแรงดันอินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ เบส และคอลเลคเตอร์ของทรานซิสเตอร์ตามลำดับ เมื่อ  $v_o(s)$  คือแรงดันเอาต์พุตของระบบ เมื่อวิเคราะห์ห้วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงในรูปที่ 3.3 ด้วยวงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูง [35] ดังรูปที่ 3.4 โดยที่  $C_\mu$ ,  $C_\pi$ ,  $r_\mu$ ,  $r_\pi$  และ  $r_x$  คือตัวเก็บประจุและตัวต้านทานแฝงที่ขึ้นอยู่กับทรานซิสเตอร์ และอาศัยทฤษฎี มิลเลอร์ (Miller's theorem) [36] กับค่าอิมพีแดนซ์ของ  $C_\mu$  ขนานกับ  $r_\mu$  จึงได้  $Z_{\mu i} = \frac{Z_{C_\mu} + r_\mu}{Z_{C_\mu} r_\mu (1 + A_v)}$  และ  $Z_{\mu o} = \frac{A_v (Z_{C_\mu} + r_\mu)}{Z_{C_\mu} r_\mu (1 + A_v)}$  เมื่อ  $A_v$  คืออัตราขยายจากขาอิมิตเตอร์ไปยังขาคอลเลคเตอร์ ดังนั้นจึงสามารถเขียนวงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงได้ใหม่ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.4 วงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์  
ที่ถูกตัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด



รูปที่ 3.5 วงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงลดรูปของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์  
ที่ถูกตัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด

เมื่อวิเคราะห์วงจรในรูปที่ 3.5 ด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ จึงได้ความสัมพันธ์ของโหนดต่าง ๆ ดังสมการที่ (3.12) ถึง (3.18)

$$\frac{\left( (Z_{C_{ib}} + R_L) \left( (Z_1 + Z_{C_{ib}})(Z_{C_{ib}} + R_L) + r_x R_L \right) - Z_1 r_x R_L + r_x^2 R_L + 1 \right)}{(Z_1(Z_{C_{ib}} + R_L) - r_x(Z_{C_{ib}} + R_L) - 1)R_L Z_{C_{ib}}} v_{ib}(s) - v_b(s) = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{v_b(s)}{Z_1} + \frac{v_b(s) - v_e(s)}{Z_2} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{v_e(s)}{Z_3} + \frac{v_e(s) - v_c(s)}{Z_4} + \frac{v_e(s) - v_b(s)}{Z_2} - g_m v_{be} = 0 \quad (3.14)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{v_c(s)}{Z_5} + \frac{v_c(s)-v_e(s)}{Z_4} + \frac{v_c(s)-v_o(s)}{Z_{C_3}} + g_m v_{be} = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{v_{ie}(s)}{R_L} + \frac{v_{ie}(s)-v_e(s)}{Z_{C_{ie}}} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{v_o(s)}{R_L} + \frac{v_o(s)-v_c(s)}{Z_{C_3}} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{v_{ic}(s)}{R_L} + \frac{v_{ic}(s)-v_c(s)}{Z_{C_{ic}}} = 0 \quad (3.18)$$

โดยที่ค่าอิมพีแดนซ์ในรูปที่ 3.5 มีค่าดังต่อไปนี้

$$Z_1 = \frac{1}{Z_{L_1} + R_1} + \frac{1}{Z_{C_2}} + \frac{1}{Z_{C_5} + Z_{C_7}} + \frac{1}{Z_{C_{ib}} + R_L} + \frac{1}{R_2} + r_x, \quad Z_2 = \frac{1}{Z_{C_\pi}} + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{Z_{\mu i}}, \quad Z_3 = \frac{1}{Z_{C_{ie}} + R_L} + \frac{1}{Z_{C_6}} + \frac{1}{R_e}, \quad Z_4 = \frac{1}{Z_{C_4}} + \frac{1}{r_o} + \frac{1}{Z_{\mu o}},$$

$$Z_5 = \frac{1}{\left(\frac{1}{Z_{L_2}} + \frac{1}{Z_{C_1}}\right) + R_c} + \frac{1}{Z_{C_{ic}} + R_L}$$

สำหรับค่าอิมพีแดนซ์ของตัวเก็บประจุ  $Z_C$  โดยที่มีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{sC}$  และค่าอิมพีแดนซ์ของขดลวดเหนี่ยวนำใดๆ มีค่าเท่ากับ  $Z_L = sL$  เมื่อแทนค่าอิมพีแดนซ์เหล่านี้ลงไป จึงสามารถแก้สมการในกรณีที่หาอินพุตต่างๆเป็น ศูนย์ได้ตั้งสมการ

$$(a_6 s^6 - a_5 s^5 - a_4 s^4 - a_3 s^3 - a_2 s^2 - a_1 s - a_0) v_o(s) = 0 \quad (3.19)$$

โดยที่  $a_0 = A_v + r_\mu r_o (A_v + 1)$ ,  $a_1 = A_v (\sigma_2^+ + 2\sigma_4^+ r_o) + a_0 (\sigma_1^+ R_L + L_2 \sigma_5^+)$ ,

$$a_2 = A_v \left( \sigma_2^+ (\sigma_5^+ L_2 + \sigma_1^+ R_L) + 2r_o (\sigma_4 \beta_1 + \sigma_4^+ (\sigma_0 + C_\mu)) \right) + a_0 R_L (\sigma_5^+ (\sigma_4 + L_2 C_3) + \sigma_1 R_L),$$

$$a_3 = A_v \beta_2 + \sigma_0 (a_0 (\sigma_4 \sigma_5^+ R_L - C_3 \sigma_4^+) - 1), \quad a_4 = A_v (\sigma_1 \sigma_2^+ \sigma_5^+ L_2 R_L^2 + \beta_3) - a_0 \sigma_2 \sigma_4 \beta_1 C_3,$$

$$a_5 = A_v (\sigma_1 \sigma_2^+ \sigma_5^+ L_2 R_L^2 + \sigma_0 \sigma_1^+ \sigma_2^+ L_2 \beta_1 + \sigma_0 \sigma_2^+ \sigma_4^+ C_3), \quad a_6 = A_v \sigma_1 \sigma_2 \beta_1 L_2 R_L$$

$$\beta_1 = \sigma_2^+ + C_1, \quad \beta_2 = \sigma_2 (L_2 \sigma_5^+ + \sigma_1^+ R_L) + \sigma_2^+ R_L (\sigma_5^+ (\sigma_4 + L_2 C_3) + \sigma_1 R_L) + 2r_o (\sigma_4 \beta_1 (\sigma_0 + C_\mu) + \sigma_0 \sigma_4^+ C_\mu),$$

$$\beta_3 = \sigma_2 R_L (\sigma_5^+ (\sigma_4 + L_2 C_3) + \sigma_1 R_L) + \sigma_0 \beta_1 (2\sigma_4 C_\mu r_o - \sigma_2^+ \sigma_4^+ C_3)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\sigma_0=C_3R_L, \sigma_1=C_{ic}C_3, \sigma_2=C_\mu C_4r_o, \sigma_3=R_cR_L, \sigma_4=L_2C_{ic}, \sigma_5=C_1R_c, \sigma_0^+=C_3+R_L, \sigma_1^+=C_{ic}+C_3,$$

$$\sigma_2^+=C_\mu+C_4r_o, \sigma_3^+=R_c+R_L, \sigma_4^+=L_2+C_{ic}, \sigma_5^+=C_1+R_c$$

เมื่อแก้สมการที่ (3.19) จึงได้ความถี่ธรรมชาติ  $f_n$  ที่ผลิตออกมาจากระบบดังนี้

$$f_n \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{A_V L_2 R_L (C_3 + C_{ic})(C_1 + R_c) - C_3 R_L}{A_V L_2 C_{ic} C_3 R_L (C_\mu C_4 r_o R_L (C_1 + R_c) - C_3 (C_4 r_o + C_\mu)(C_1 + R_c + R_L))}} \quad (3.20)$$

สำหรับกรณีที่มีการป้อนอินพุตให้กับระบบ จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ เบส และ คอลเลคเตอร์กับเอาต์พุตดังสมการที่ (3.21) ถึง (3.23) ตามลำดับ

$$\rho_1 \rho_3 v_{ie}(s) = \gamma_n v_{oc}(s) \quad (3.21)$$

$$\rho_1 \rho_2 v_{ib}(s) = \gamma_n v_{ob}(s) \quad (3.22)$$

$$\rho_1 \rho_4 v_{ic}(s) = \gamma_n v_{oc}(s) \quad (3.23)$$

โดยที่  $v_{oe}(s)$ ,  $v_{ob}(s)$  และ  $v_{oc}(s)$  คือเอาต์พุตในกรณีที่มีการป้อนอินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ เบส และ คอลเลคเตอร์ตามลำดับ โดยที่มีค่าพารามิเตอร์ต่างๆดังต่อไปนี้

$$\gamma_n = \frac{Z_{C_3} + R_L}{Z_5 R_L} + 2 \frac{Z_{C_3} + R_L}{Z_4 R_L} - \frac{1}{Z_{C_3}}, \rho_1 = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2} - \frac{1}{Z_2} - 2g_m \frac{Z_2}{Z_1},$$

$$\rho_2 = \frac{\left( (Z_{C_{ib}} + R_L) \left( (Z_1 + Z_{C_{ib}}) (Z_{C_{ib}} + R_L) - Z_1 r_x R_L + r_x^2 R_L + 1 \right) + r_x R_L \right)}{(Z_1 (Z_{C_{ib}} + R_L) - r_x (Z_{C_{ib}} + R_L) - 1) R_L Z_{C_{ib}}}, \rho_3 = \frac{Z_1 (Z_{C_{ie}} + R_L)}{R_L (Z_1 + Z_{C_{ib}})},$$

$$\rho_4 = \left( \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2} - \frac{1}{Z_2} - g_m \frac{Z_2}{Z_1} \right) \frac{Z_4 (Z_{C_{ic}} + R_L)}{R_L}$$

เมื่อทำการแก้สมการที่ (3.21) จึงได้ผลตอบสนองเชิงขนาด  $A_{\psi_e}$  และเฟส  $\phi_{\psi_e}$  ในกรณีที่ป้อนอินพุตเข้าขาอิมิตเตอร์ดังสมการที่ (3.24)

$$A_{\psi_e} \approx \frac{2g_m \omega^3 A_V L_1^3 C_3 r_x \Gamma_{\mu o} r_o (R_1 + R_2) \sqrt{\omega^2 L_1^2 (2R_1 + R_2)^2 + R_1^4}}{C_{ic} R_2 \left( \left( \omega^2 L_1^2 (2R_1 + R_2)^2 \right)^2 + \left( \omega L_1 R_1 (3R_1 + R_2) \right)^2 \right)} \quad (3.24)$$

$$\phi_{\psi_e} \approx \tan^{-1} \left( \frac{\omega L_1 R_1^2}{\omega^2 L_1^2 (2R_1 + R_2) + R_1^2 (7R_1 + 4R_2)} \right)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สำหรับผลตอบสนองเชิงขนาด  $A_{\psi_b}$  และเฟส  $\phi_{\psi_b}$  ในกรณีที่ป้อนอินพุตเข้าขาเบสสามารถหาได้จากการแก้สมการที่ (3.22) จนได้ผลตอบสนองเชิงขนาดและเฟสดังสมการที่ (3.25)

$$A_{\psi_b} \approx \frac{2g_m \omega^3 A_v^2 L_1^2 C_3 r_{\mu i} R_L}{R_c r_x^2 (C_5 + C_7)} \quad (3.25)$$

$$\phi_{\psi_b} \approx \tan^{-1} \left( -\frac{R_1 (3R_1 + R_2)}{\omega L_1 (2R_1 + R_2)} \right)$$

จากความสัมพันธ์ระหว่างการป้อนอินพุตที่ขาคอลเลคเตอร์กับเอาต์พุตในสมการที่ (3.23) จึงทำให้ได้ผลตอบสนองเชิงขนาด  $A_{\psi_c}$  และเฟส  $\phi_{\psi_c}$  ดังสมการที่ (3.26)

$$A_{\psi_c} \approx \frac{2g_m^2 \omega A_v^4 L_1^2 r_{\mu o}^2 r_{\mu i}^2 C_3 R_L r_o (2R_1 + R_2) \sqrt{(\omega^5 L_1^6)^2 + (4L_1 R_1)^2}}{C_{ic} R_c R_L r_x^2 (C_5 + C_7)^2 \left( \left( \frac{R_1 (R_1 + R_2)}{2R_1 + R_2} \right)^2 + (L_1 (2R_1 + R_2))^2 \right)} \quad (3.26)$$

$$\phi_{\psi_c} \approx \tan^{-1} \left( \frac{\omega L_1^2 (2R_1 + R_2) + 4R_1 (R_1 (R_1 + R_2) + (2R_1 + R_2)^2)}{4L_1 R_1 (2R_1 + R_2)} \right)$$

ดังนั้นผลตอบสนองบังคับในกรณีที่ป้อนอินพุตผ่านขาอิมิตเตอร์  $x_{fc}(\tau)$  ขาเบส  $x_{fb}(\tau)$  และขาคอลเลคเตอร์  $x_{fc}(\tau)$  จึงเป็นไปดังสมการที่ (3.27) ถึง (3.29) ตามลำดับ

$$x_{fc}(\tau) = A_{\psi_c} p_0 \cos \left( (\omega_n \pm \omega_d) \tau + \phi_{\psi_c} \right) \quad (3.27)$$

$$x_{fb}(\tau) = A_{\psi_b} p_0 \cos \left( (\omega_n \pm \omega_d) \tau + \phi_{\psi_b} \right) \quad (3.28)$$

$$x_{fc}(\tau) = A_{\psi_c} p_0 \cos \left( (\omega_n \pm \omega_d) \tau + \phi_{\psi_c} \right) \quad (3.29)$$

หากนิยามให้  $t \equiv \tau$  จึงได้เอาต์พุตในกรณีที่ป้อนอินพุตที่ขาอิมิตเตอร์  $x_{oc}(t)$  ขาเบส  $x_{ob}(t)$  และขาคอลเลคเตอร์  $x_{oc}(t)$  เป็นไปดังสมการที่ (3.30) ถึง (3.32) ตามลำดับ

$$x_{oc}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{|H(\omega_d)|}{2} \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) \\ +X_0 \cos(\omega_n t) + A_{\psi_e} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \phi_{\psi_e}) \\ -\frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2} \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$x_{ob}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{|H(\omega_d)|}{2} \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) \\ +X_0 \cos(\omega_n t) + A_{\psi_b} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \phi_{\psi_b}) \\ -\frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2} \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$x_{oc}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{|H(\omega_d)|}{2} \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) \\ +X_0 \cos(\omega_n t) + A_{\psi_c} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \phi_{\psi_c}) \\ -\frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2} \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

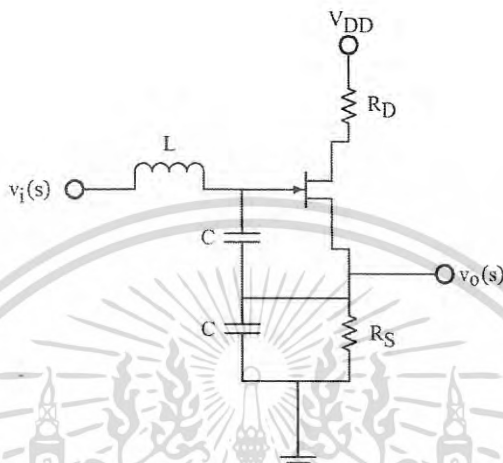
จากหลักการที่นำเสนอในข้างต้นสามารถสังเกตได้ว่าพจน์สัญญาณที่มีความถี่ต่อพลเลอร์เพียงความถี่เดียว นั้นถูกรวมอยู่ในสัญญาณเอาต์พุตไม่ว่าจะป้อนสัญญาณอินพุตที่จุดใดก็ตาม ซึ่งสามารถกรองสัญญาณต่อพลเลอร์ออกมาได้โดยตรงด้วยการใช้วงจรกรองความถี่ต่ำผ่าน ซึ่งสามารถยืนยันการทำนายด้วยโมเดลการสั่นหลายเวลานี้ด้วยผลการทดลองในบทที่ 4

### 3.2.4 การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟส

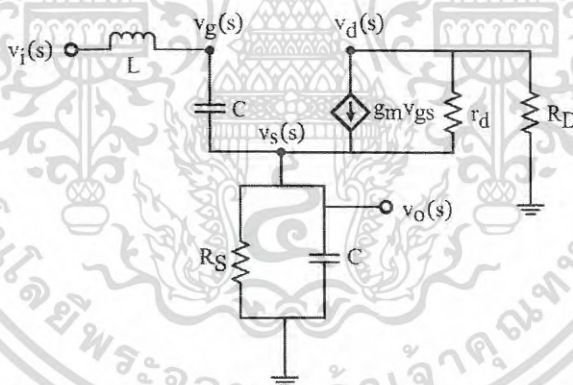
จากปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ที่เกิดขึ้นเมื่อมีการป้อนอินพุตให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณนั้น จึงสามารถประยุกต์ให้กลายเป็นแนวทางสำหรับการอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสที่เกิดขึ้นภายในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณได้ โดยการตั้งสมมุติฐานว่าสัญญาณรบกวนฟลิคเกอร์ที่มีความถี่ต่ำกว่ากับสัญญาณรบกวนขาวที่กระจายตัวอยู่ทุกช่วงความถี่นั้นเป็นสัญญาณอินพุตที่กระทำกับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในรูปแบบของการสั่นบังคับ ดังนั้นสัญญาณรบกวนเชิงเฟสที่มีความถี่กระจายอยู่บริเวณความถี่ธรรมชาติของวงจรมานั้นคือผลพวงของปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ที่อธิบายได้ด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา เพื่อแสดงวิธีการวิเคราะห์จึงยกตัวอย่างวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์โดยใช้เจเฟตดังรูปที่ 3.6 โดยที่  $v_i(s)$  คือจุดที่ป้อนอินพุตให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ และ  $v_o(s)$  คือเอาต์พุตของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในรูปที่ 3.6 ด้วยวงจรถูกกำเนิดสัญญาณขนาดเล็ก [35] ดังรูปที่ 3.7 เมื่อ  $r_d$  คือความต้านทานแฝงภายในเจเฟต โดย  $v_g(s)$   $v_d(s)$  และ  $v_s(s)$  คือแรงดันที่ขาเกต ขาเดรน และขาซอร์สของเจเฟตตามลำดับ จากรูปที่ 3.7 สังเกตได้ว่า

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

แรงดันที่ขาเอาต์พุต  $v_o(s)$  คือจุดเดียวกับแรงดันที่ขาซอร์ส  $v_s(s)$  และในกรณีที่ประมาณค่าให้กระแส  $g_m v_{gs}$  มีค่ามาก จึงสามารถวิเคราะห์วงจรในรูปที่ 3.7 ด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ และแสดงความสัมพันธ์ของโหนด  $v_g(s)$  และ  $v_o(s)$  ได้ดังสมการที่ (3.33) และ (3.34) ตามลำดับ



รูปที่ 3.6 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ใช้เจเฟต



รูปที่ 3.7 วงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ใช้เจเฟต

$$\frac{v_g(s) - v_i(s)}{sL} + sC(v_g(s) - v_o(s)) = 0 \quad (3.33)$$

$$sC(v_o(s) - v_g(s)) + sCv_o(s) + \frac{v_o(s)}{R_S} - g_m(v_g(s) - v_o(s)) = 0 \quad (3.34)$$

เมื่อทำการแก้สมการที่ (3.33) และ (3.34) โดยให้อินพุตเป็นศูนย์ จึงได้สมการผลตอบสนองธรรมชาติของระบบดังสมการที่ (3.35)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left(s^3LC^2+s^2\left(\frac{LC}{R_S}\right)+2sC+g_m+\frac{1}{R_S}\right)v_o(s)=0 \quad (3.35)$$

เมื่อทำการแก้สมการที่ (3.35) จึงได้ความถี่ธรรมชาติ  $f_n$  ของวงจรดังสมการที่ (3.36)

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2C}{LC^2}} \quad (3.36)$$

และในกรณีที่มีการป้อนอินพุตให้กับวงจร จึงได้ความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตเป็นไปตามสมการที่ (3.37)

$$\left(s^3LC^2+s^2\left(\frac{LC}{R_S}\right)+2sC+g_m+\frac{1}{R_S}\right)v_o(s)=v_i(s) \quad (3.37)$$

จาก (3.37) จึงสามารถหาผลตอบสนองเชิงขนาด  $|H(\omega)|$  และเฟส  $\angle H(\omega)$  ได้ดังสมการที่ (3.38) และ (3.39) ตามลำดับ

$$|H(\omega)| = \left| \frac{CR_S}{(\omega_0^2 - \omega^2) \sqrt{1 - (CR_S)^2 \omega^2}} \right| \quad (3.38)$$

$$\angle H(\omega) = -\tan^{-1}(\omega CR_S) \quad (3.39)$$

ดังนั้นเมื่อป้อนอินพุตที่เป็นสัญญาณไซน์ขอยอด  $v_i(\tau) = A_i \cos(\omega_i \tau)$  ที่รวมอยู่กับสัญญาณรบกวน จึงได้ผลตอบสนองบังคับ  $v_f(\tau)$  ที่อยู่ในรูปแบบดังสมการที่ (3.40)

$$v_f(\tau) = |H(\omega)| A_i \cos(\omega_i \tau + \angle H(\omega)) + n_f(\tau) \quad (3.40)$$

ดังนั้นจึงสามารถแสดงผลตอบสนองสมบูรณ์ที่อาศัยโมเดลการสั้นบังคับหลายเวลาได้ดังสมการที่ (3.41)

$$v_o(t, \tau) = (V_{SAT} - v_f(\tau)) \cos(\omega_n t) + v_f(\tau) \quad (3.41)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

โดยที่  $V_{SAT}$  คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้น และ  $\omega_n$  คือความถี่ธรรมชาติ

จาก (3.41) หากความถี่ของสัญญาณอินพุตที่เป็นคลื่นรูปไซน์อยู่ในย่านความถี่ต่ำรวมอยู่กับสัญญาณรบกวน เอาต์พุตของวงจรต้องมีความถี่ของสัญญาณอินพุตนี้ปรากฏอยู่ในบริเวณย่านความถี่ธรรมชาติ  $\omega_n$  ในรูปแบบความถี่เลื่อน  $\omega_n \pm \omega_i$  ซึ่งสามารถแสดงการพิสูจน์นี้ได้ด้วยผลการทดลองในบทที่ 4

สำหรับในกรณีที่ไม่มีย่านความถี่ที่เป็นสัญญาณไซน์ชอยดอลเข้าร่วมกับสัญญาณรบกวน และหากกำหนดให้  $\tau \equiv t$  และ  $u_n(t) = \cos(\omega_n t)$  จึงทำให้ผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบอยู่ในรูปแบบดัง

$$v_o(t) = V_{SAT} u_n(t) - n_f(t) u_n(t) + n_f(t) \quad (3.42)$$

อย่างไรก็ตามสัญญาณเอาต์พุตในสมการที่ (3.42) เป็นสัญญาณสโตแคสติกหรือสัญญาณสุ่ม ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุตจึงต้องอยู่ในรูปแบบค่ากำลังงานเฉลี่ย ดังนั้นจึงทำการหาค่ากำลังงานรวมทั้งหมดของสัญญาณรบกวน  $n_f(t)$  ในโดเมนความถี่ดัง (3.43)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |n_f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |N_f(\omega)|^2 d\omega \quad (3.43)$$

โดยค่ากำลังรวมทั้งหมดของพจน์  $-n_f(t) u_n(t)$  ในสมการที่ (3.42) สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (3.44)

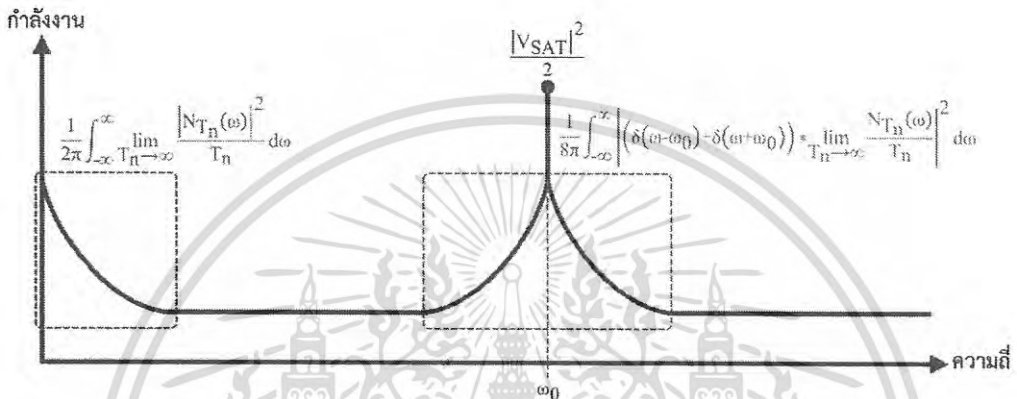
$$\int_{-\infty}^{\infty} |-n_f(t) u_n(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{U_n(\omega) * N_f(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 d\omega \quad (3.44)$$

และเปลี่ยนมุมมองให้สัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่นั้นเป็นสัญญาณรบกวนในโดเมนความถี่ที่มีคาบ  $N_{T_n}(\omega)$  เป็นอนันต์ดังสมการที่ (3.45)

$$N_f(\omega) = \lim_{T_n \rightarrow \infty} N_{T_n}(\omega) \quad (3.45)$$

จึงทำให้ได้ค่ากำลังงานเฉลี่ยของเอาต์พุตเป็นไปดังสมการที่ (3.46) และจากสมการที่ (3.46) จึงสามารถแสดงรูปแบบของสัญญาณเอาต์พุตที่เกิดขึ้นในโดเมนความถี่ได้ดังรูปที่ 3.8 ซึ่งสังเกตได้ว่าสัญญาณรบกวนในย่านความถี่ต่ำนั้นได้ถูกย้ายไปอยู่ในบริเวณย่านความถี่ธรรมชาติของวงจรอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์ไฮโมไดน์

$$P_{AV_0}(\omega) = \left( \begin{aligned} & \frac{|V_{SAT}|^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0))|^2 d\omega \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)) * \lim_{T_n \rightarrow \infty} \frac{N_{T_n}(\omega)}{T_n}|^2 d\omega \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T_n \rightarrow \infty} \frac{|N_{T_n}(\omega)|^2}{T_n} d\omega \end{aligned} \right) \quad (3.46)$$



รูปที่ 3.8 สัญญาณเอาต์พุตของวงจรกำเนิดสัญญาณที่มีสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในโดเมนความถี่

### 3.3 การควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการสันบังคับ

นอกเหนือจากการประยุกต์ใช้ปรากฏการณ์โฮโมไดมโดยตรงในข้างต้นแล้ว ยังสามารถประยุกต์ใช้ผลของปรากฏการณ์โฮโมไดมที่นำไปสู่การอธิบายการชิงโครโนซ์ระหว่างสัญญาณอินพุตกับวงจรกำเนิดสัญญาณได้อีกทางหนึ่ง ซึ่งการชิงโครโนซ์นี้ไม่ได้ถูกจำกัดที่ความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์โมนิคมูลฐานเท่านั้น แต่ยังสามารถชิงโครโนซ์กับความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์โมนิคอันดับที่สองด้วย ซึ่งรายละเอียดผลของโฮโมไดมที่นำไปสู่การชิงโครโนซ์นั้นอยู่ในรูปแบบของปรากฏการณ์การสันบังแบบซิมพาเทติกดังที่แสดงในบทที่ 2 หัวข้อย่อย 2.3.4 ในสมการที่ (2.87) และหากนำผลของปรากฏการณ์นี้มาประยุกต์ใช้ร่วมกับความเป็นฮาร์โมนิคอันดับสูงของวงจรกำเนิดสัญญาณ จึงสามารถนำไปใช้สำหรับควบคุมแบนด์วิดท์ของสัญญาณอินพุตแบบเอฟเอ็มที่ป้อนให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณได้ และเนื่องจากรายละเอียดของการสันบังแบบซิมพาเทติกที่เทียบเคียงได้กับปรากฏการณ์อินเจ็คชันลอคได้แสดงไปแล้วในบทที่ 2 ในลำดับถัดไปจึงเป็นอธิบายในส่วนของความเป็นฮาร์โมนิคอันดับสูงของวงจรกำเนิดสัญญาณเพื่อนำไปใช้สำหรับควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็ม

โดยทางทฤษฎีแล้ววงจรกำเนิดสัญญาณคลื่นรูปไซน์ในอุดมคตินั้นผลิตสัญญาณคลื่นรูปไซน์ที่ความถี่มูลฐานเพียงความถี่เดียวเท่านั้น แต่ในทางปฏิบัติแล้ววงจรกำเนิดสัญญาณคลื่นรูปไซน์นั้นไม่ได้ผลิตสัญญาณคลื่นรูปไซน์เพียงฮาร์โมนิคมูลฐานเพียงฮาร์โมนิคเดียวเท่านั้น แต่ยังสามารถผลิตฮาร์โมนิค

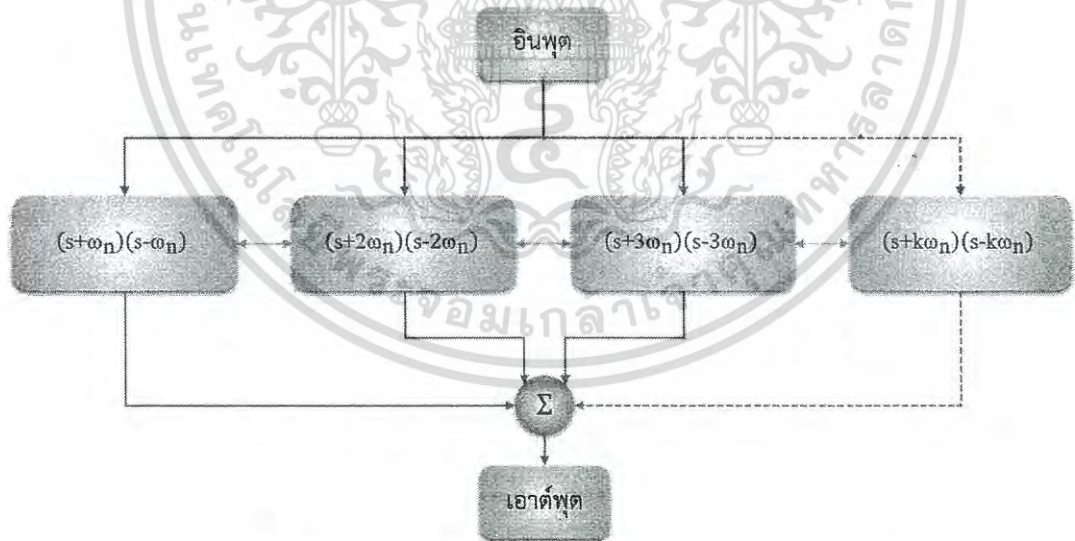
อันดับที่สูงกว่าด้วย โดยที่สัญญาณที่ถูกผลิตออกจากวงจรกำเนิดสัญญาณคลื่นรูปไซน์ในทางปฏิบัติยังคงผลิตสัญญาณที่เป็นคลื่นรูปไซน์ในโดเมนเวลา เนื่องจากขนาดของสัญญาณฮาร์มอนิกมูลฐานนั้นมีค่ามากกว่าฮาร์มอนิกอื่นมาก

สำหรับกรณีของการสั่นบังคับ เมื่อยกตัวอย่างให้ฟังก์ชันส่งผ่านของวงจรกำเนิดสัญญาณในอุดมคติ  $H_i(s)$  มีค่าโพลที่ก่อให้เกิดการผลิตสัญญาณที่ความถี่  $\omega_n$  เป็นไปดังสมการที่ (3.47)

$$H_i(s) = \frac{H_{oi}}{(s + \omega_n)(s - \omega_n)} \tag{3.47}$$

โดยที่  $H_{oi}$  คือค่าคงที่ที่ดั่งนั้นฟังก์ชันส่งผ่านของวงจรกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ  $H_p(s)$  จึงควรประกอบด้วยค่าโพลที่ก่อให้เกิดการผลิตสัญญาณที่เป็นจำนวนเท่าดังรูปที่ 3.9 ที่สามารถแสดงในรูปแบบสมการได้ดังสมการที่ (3.48) โดยที่  $N(s)$  คือนิวเมอเรเตอร์ (Numerator)

$$H_p(s) = \frac{N(s)}{(s + \omega_n)(s - \omega_n)(s + 2\omega_n)(s - 2\omega_n) \dots (s + k\omega_n)(s - k\omega_n)} \tag{3.48}$$

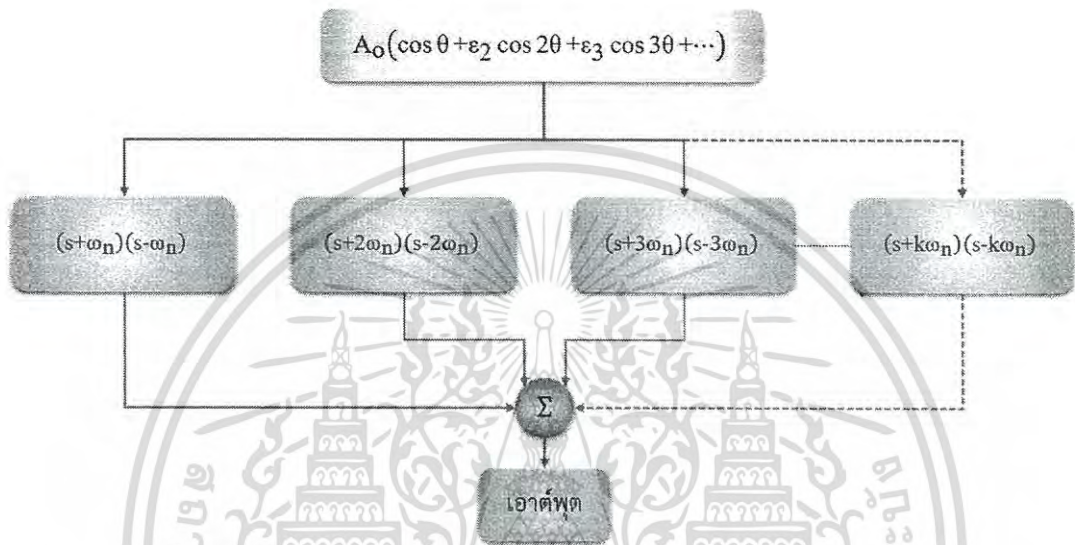


รูปที่ 3.9 โมเดลการบังคับของวงจรกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ

จากสมการที่ (3.48) ที่นำไปสู่โมเดลดังรูปที่ 3.9 นั้นสังเกตได้ว่าค่าโพลนั้นเป็นการต่อคาสเคด (Cascade) ต่อกันอยู่ ซึ่งสามารถเปลี่ยนมุมมองให้ค่าโพลของระบบนั้นอยู่ในรูปแบบต่อขนานกันได้ด้วยการเปลี่ยน

รูปแบบอินพุตให้สามารถกระจายอยู่ในรูปแบบอนุกรมฟูเรียร์ดังสมการที่ (3.49) ดังนั้นจึงสามารถสร้างโมเดลสมมูลการบังคับของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติได้ใหม่ดังรูปที่ 3.10

$$\phi_o(\theta) = A_o(\cos \theta + \varepsilon_2 \cos 2\theta + \varepsilon_3 \cos 3\theta + \dots) \tag{3.49}$$



รูปที่ 3.10 โมเดลสมมูลการบังคับของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ

โดยที่  $A_o$  คือขนาดของสัญญาณเอาต์พุต  $\theta$  คือฟังก์ชันคาบของคลื่น และ  $\varepsilon_M$  โดยที่  $M=2,3,4,\dots$  คือค่าคงที่ที่มีค่าน้อยสำหรับฮาร์มอนิกอันดับสูง และเนื่องจาก  $\theta$  นั้นเป็นจริงสำหรับค่าเวลาใดๆ ดังนั้นในกรณีของอินพุตเป็นสัญญาณเอพเอ็ม จึงสามารถนิยามให้

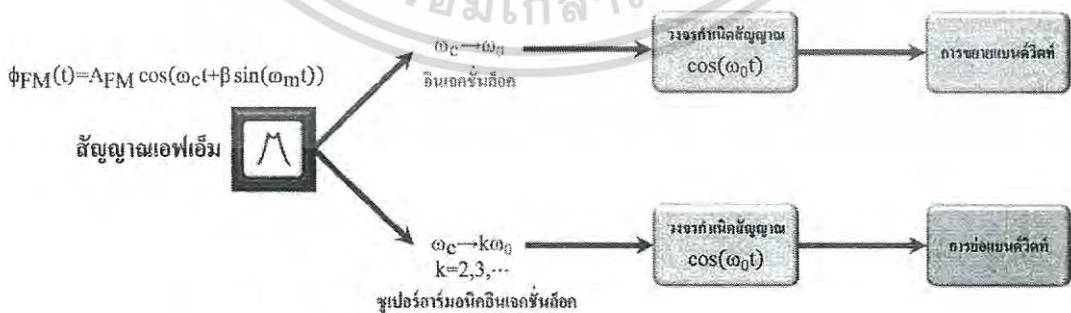
$$\theta = \omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha \tag{3.50}$$

เมื่อ  $\omega_c$  คือความถี่คลื่นพาห์  $k_f$  คือค่าคงที่ และ  $m(\alpha)$  คือสัญญาณข่าวสาร ดังนั้นหากกำหนดให้สัญญาณข่าวสารเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์  $m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$  เมื่อ  $A_m$  และ  $\omega_m$  คือขนาดและความถี่ของสัญญาณข่าวสารตามลำดับ ในกรณีที่ความถี่คลื่นพาห์  $\omega_c$  เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติ  $\omega_n$  จึงส่งผลให้สัญญาณอินพุตที่ฮาร์มอนิกอันดับที่  $M$  ตอบสนองต่อค่าโพลาไรซ์อันดับที่  $k$  มากที่สุดเมื่อ  $M=k$  ทำให้สามารถแสดงเอาต์พุตในรูปแบบสัญญาณเอพเอ็มที่ได้จากวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ ที่ถูกกระจายด้วยอนุกรมฟูเรียร์ดังสมการที่ (3.51)

$$\phi_{FM}(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) = A_{FM} \left( \begin{aligned} & \frac{H_{01}}{\omega_n^2 - \omega_c^2} \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) \\ & + \frac{H_{02}\epsilon_2}{(2\omega_n)^2 - (2\omega_c)^2} \cos 2 \left( \begin{aligned} & \omega_c t \\ & + \beta \sin(\omega_m t) \end{aligned} \right) \\ & + \frac{H_{03}\epsilon_3}{(3\omega_n)^2 - (3\omega_c)^2} \cos 3 \left( \begin{aligned} & \omega_c t \\ & + \beta \sin(\omega_m t) \end{aligned} \right) \\ & + \dots \end{aligned} \right) \quad (3.51)$$

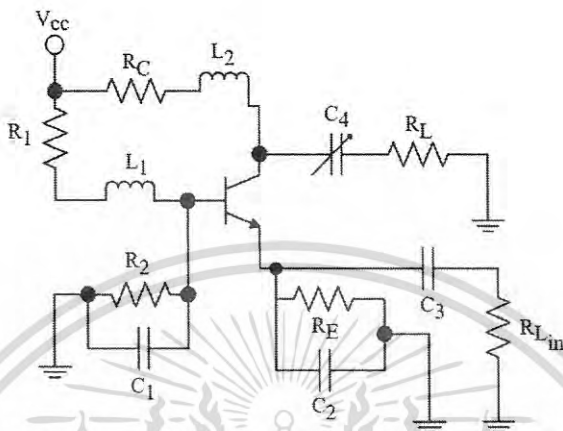
โดยที่ค่า  $A_{FM}$  คือขนาดของสัญญาณเอฟเอ็ม และค่า  $\beta = \frac{A_m \Delta \omega}{\omega_m}$  คือค่าดัชนีการมอดูเลตเชิงความถี่สำหรับ  $\Delta \omega$  คือค่าแบนด์วิดท์ จากสมการที่ (3.51) สังเกตได้ว่าค่าดัชนีการมอดูเลตเชิงความถี่นี้ถูกคูณด้วยอันดับของฮาร์มอนิกจำนวนเท่า ดังนั้นค่าแบนด์วิดท์ของสัญญาณเอฟเอ็มที่ถูกประมาณค่าด้วยกฎของคาร์สัน (Carson's rule) [37] จึงถูกควบคุมด้วยอันดับของฮาร์มอนิกจำนวนเท่าของสัญญาณที่ถูกผลิตออกมา

ดังนั้นเมื่อป้อนสัญญาณเอฟเอ็มให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ โดยกำหนดให้ความถี่คลื่นพาห์เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของวงจร จึงก่อให้เกิดปรากฏการณ์อินเจ็คชันลอคในรูปแบบการสั่นบังคับหรือการสั่นพ้องที่เป็นผลพวงจากปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ขึ้น และด้วยการอาศัยความไม่เป็นอุดมคติที่เกิดฮาร์มอนิกอันดับสูงขึ้น จึงส่งผลให้เกิดสัญญาณเอฟเอ็มที่มีคลื่นพาห์และแบนด์วิดท์เป็นฮาร์มอนิกจำนวนเท่าขึ้น ดังนั้นจึงสามารถขยายแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มได้ด้วยการเลือกใช้สัญญาณเอฟเอ็มที่ฮาร์มอนิกอันดับสูง และในกรณีของการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มที่มีความถี่คลื่นพาห์เป็นฮาร์มอนิกจำนวน  $k$  เท่าเมื่อ  $k=2,3,\dots$  ของความถี่ธรรมชาติให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ จึงก่อให้เกิดปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์มอนิกอินเจ็คชันลอคหรือการสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกที่เป็นผลพวงจากปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ขึ้นเช่นเดียวกับกรณีข้างต้น ต่างกันตรงที่ความไม่เป็นอุดมคติของวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นก่อให้เกิดการหารทางความถี่ขึ้นด้วย ดังนั้นเมื่อเลือกใช้สัญญาณเอฟเอ็มที่ได้จากเอาต์พุตในฮาร์มอนิกอันดับที่ต่ำกว่าความถี่คลื่นพาห์จึงสามารถย่อแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มได้ โดยสามารถสรุปเงื่อนไขการย่อหรือขยายแบนด์วิดท์ได้ดังรูปที่ 3.11



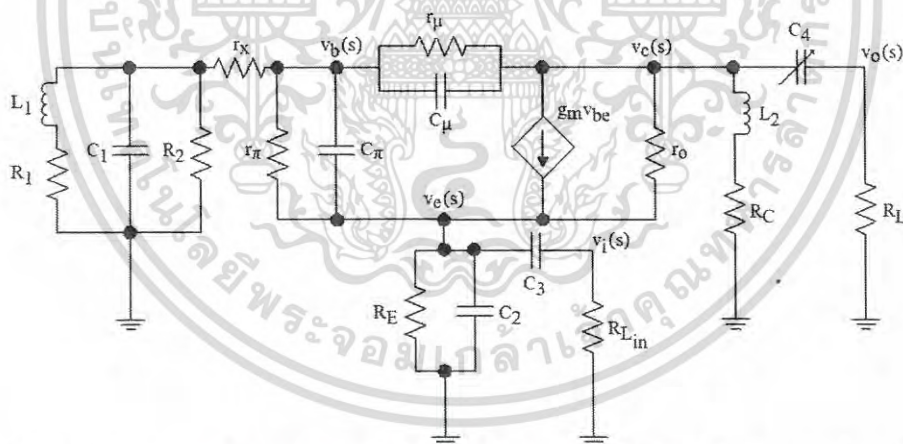
รูปที่ 3.11 เงื่อนไขการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการสั่นบังคับ

และจากหลักการเบื้องต้น จึงนำมาประยุกต์ใช้จริงกับวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ดัดแปลงให้สามารถป้อนอินพุตกับวงจรได้ดังรูปที่ 3.12



รูปที่ 3.12 วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว

เมื่อทำการวิเคราะห์ห้วงจรรูปที่ 3.12 นี้ด้วยวงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงดังรูปที่ 3.13

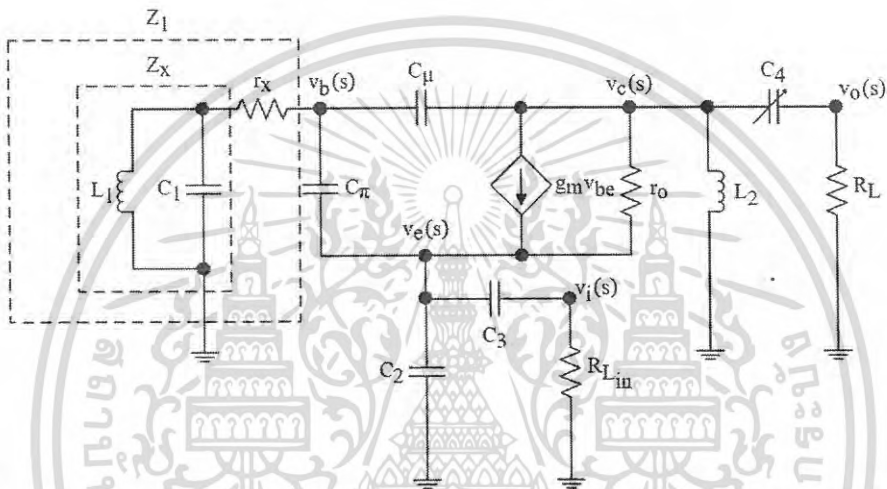


รูปที่ 3.13 วงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว

โดยทำการละเลยค่าที่ส่งผลน้อยต่อวงจรทั้งตั้งเช่นค่าอิมพีแดนซ์ของตัวต้านทาน  $R_E$  ที่ขนานกับตัวเก็บประจุ  $C_2$  สามารถประมาณค่าให้เท่ากับค่าอิมพีแดนซ์ของตัวเก็บประจุ  $C_2$  เนื่องจากค่าตัวเก็บประจุ  $C_2$  นั้นมีค่าน้อยมากเมื่อความถี่สูงขึ้น ซึ่งสามารถใช้การประมาณค่าในแนวทางการต่อขนานนี้สำหรับการขนานของคู่ตัวต้านทาน  $R_\mu$  กับตัวเก็บประจุ  $C_\mu$  คู่ตัวต้านทาน  $R_\pi$  กับตัวเก็บประจุ  $C_\pi$  และคู่ตัวต้านทาน  $R_2$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

กับตัวเก็บประจุ  $C_1$  สำหรับการละลายค่าที่ส่งผลน้อยต่อวงจรในรูปแบบอนุกรมที่นั่นคือการประมาณค่าให้ค่าอิมพีแดนซ์ของตัวขดลวดเหนี่ยวนำที่ต่ออนุกรมกับตัวต้านทานนั้นมีค่าเท่ากับค่าอิมพีแดนซ์ของตัวขดลวดเหนี่ยวนำ เนื่องจากค่าอิมพีแดนซ์ของตัวขดลวดเหนี่ยวนำที่สูงเมื่อความถี่สูงขึ้น ดังนั้นค่าอิมพีแดนซ์ของ  $L_1$  ที่ต่ออนุกรมกับ  $R_1$  จึงมีค่าเท่ากับค่าอิมพีแดนซ์  $L_1$  และค่าอิมพีแดนซ์ของ  $L_2$  ที่ต่ออนุกรมกับ  $R_2$  มีค่าเท่ากับค่าอิมพีแดนซ์  $L_2$  เช่นเดียวกัน จึงทำให้สามารถลดรูปวงจรจากรูปที่ 3.13 ให้เป็นรูปที่ 3.14



รูปที่ 3.14 วงจรสมมูลสัญญาณขนาดเล็กความถี่สูงลดรูปของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโวลทิจิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว

จากรูปที่ 3.14 เมื่อวิเคราะห์วงจรด้วยกฎกระแสไฟฟ้าของเคอร์ชอฟฟ์ จึงได้ความสัมพันธ์ของโหนดต่างๆ ดังสมการที่ (3.52) ถึง (3.56)

$$\frac{v_b(s)}{Z_1} + \frac{v_b(s)-v_c(s)}{Z_{C_\mu}} + \frac{v_b(s)-v_e(s)}{Z_{C_\pi}} = 0 \tag{3.52}$$

$$\frac{v_e(s)}{Z_{C_2}} + \frac{v_e(s)-v_i(s)}{Z_{C_3}} + \frac{v_e(s)-v_b(s)}{Z_{C_\pi}} + \frac{v_e(s)-v_c(s)}{r_o} - g_m v_{be} = 0 \tag{3.53}$$

$$\frac{v_c(s)}{Z_{L_2}} + \frac{v_c(s)-v_o(s)}{Z_{C_4}} + \frac{v_b(s)-v_c(s)}{Z_{C_\mu}} + \frac{v_c(s)-v_e(s)}{r_o} + g_m v_{be} = 0 \tag{3.54}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{v_i(s)}{R_{Lin}} + \frac{v_i(s) - v_e(s)}{Z_{C_3}} = 0 \quad (3.55)$$

$$\frac{v_o(s)}{R_L} + \frac{v_o(s) - v_c(s)}{Z_{C_4}} = 0 \quad (3.56)$$

เมื่อแทนค่าอิมพีแดนซ์ของตัวเก็บประจุ  $Z_C$  ใดๆมีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{sC}$  และค่าอิมพีแดนซ์ของขดลวดเหนี่ยวนำใดๆมีค่าเท่ากับ  $Z_L = sL$  เมื่อแทนค่าอิมพีแดนซ์เหล่านี้ลงไปในสมการที่ (3.52) ถึง (3.56) จึงสามารถแก้ไขสมการเหล่านี้และจัดรูปได้สมการผลตอบสนองธรรมชาติที่อยู่ในรูปแบบเช่นสมการที่ (3.57)

$$s^2 v_o(s) + \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2 v_o(s) = 0 \quad (3.57)$$

โดยที่  $K_1 = L_1 C_1 C_4 r_x (C_\pi + C_\mu) (L_2 + R_L)$

$K_2 = C_4 (L_1 r_x (L_2 + R_L) + C_\mu L_2 R_L) + (C_\pi + C_\mu) (L_1 + C_4 r_x (L_2 + R_L)) + C_\mu L_1 L_2 r_x$

เมื่อทำการแก้สมการที่ (3.57) จึงได้ความถี่ธรรมชาติ  $f_n$  ที่ถูกผลิตออกมาจากวงจรเป็นไปดังนี้

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_2}{K_1}} \quad (3.58)$$

และสามารถแก้สมการที่ (3.52) ถึง (3.56) เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตกับเอาต์พุตออกมาได้ดัง

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{1}{\left(s^2 + \left(\frac{K_2}{K_1}\right)^2\right) \left(s^2 + \left(\frac{K_4}{K_3}\right)^2\right)} \quad (3.59)$$

เมื่อ  $K_3 = L_1 (C_\pi + C_\mu) (C_1 + C_4 r_x (L_2 + R_L))$  และ  $K_4 = (C_\pi + C_\mu) r_x + L_1 r_x$  และหากทำการประมาณค่าให้  $\frac{K_4}{K_3} \cong 2 \frac{K_2}{K_1}$  จึงสามารถสังเกตได้ว่าสมการที่ (3.59) นั้นมีค่าโพลที่เทียบเคียงได้สมการที่ (3.48) ซึ่งหมายถึงว่าวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียวนี้สามารถนำมาประยุกต์ใช้สำหรับการย่อและขยายแบนด์วิดท์ในกรณีที่มีการป้อนอินพุตเป็นสัญญาณเอพเอ็มได้ โดยสามารถยืนยันการทำนายนี้ได้ด้วยผลการทดลองในบทที่ 4

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

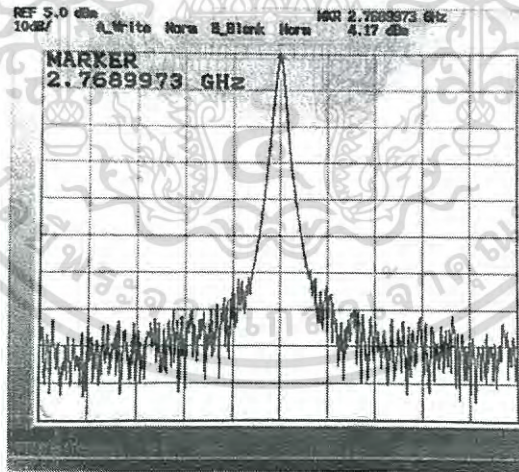
## บทที่ 4

### ผลการทดลอง

#### 4.1 เกริ่นนำ

เพื่อยืนยันแนวคิดการประยุกต์ใช้การสั่นค้างหลายเวลาในวงจรกำเนิดสัญญาณทางไฟฟ้าที่ได้กล่าวในบทที่ 3 ในบทนี้จึงเป็นการกล่าวถึงผลการทดลองที่ได้ทำการทดลองจริงเพื่อแสดงผลของปรากฏการณ์โฮโมไดเน่โดยตรงที่นำไปสู่การสร้างเรดาร์ระยะสั้นด้วยวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด และแสดงผลการจำลองวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ด้วยโปรแกรม PSPICE เพื่ออธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟส สำหรับแสดงผลของปรากฏการณ์โฮโมไดเน่ที่ก่อให้เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องและปรากฏการณ์ซูการสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกจนนำไปสู่การควบคุมแบนด์วิดท์ของสัญญาณเอฟเอ็มนั้นได้แสดงด้วยการผลการทดลองจริงของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตหนึ่งจุดตามลำดับ

#### 4.2 ปรากฏการณ์โฮโมไดเน่ในเรดาร์ระยะสั้น



รูปที่ 4.1 สเปกตรัมผลตอบสนองธรรมชาติของวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุด

เพื่อทำการตรวจสอบผลการทำนายที่ได้จากแนวคิดที่นำเสนอในบทที่ 3 หัวข้อย่อย 3.2.1 ด้วยการแทนค่าอุปกรณ์ลงในรูปที่ 3.1 โดยกำหนดให้ตัวต้านทาน  $R_1 = 5.6$  กิโลโอห์ม  $R_2 = 1$  กิโลโอห์ม  $R_c = R_e = 10$  โอห์ม ตัวขดลวดเหนี่ยวนำ  $L_1 = L_2 = 15$  ไมโครเฮนรี่ และตัวเก็บประจุ  $C_1 = 15$  พิโคฟารัด  $C_2 = 55$  พิโคฟารัด

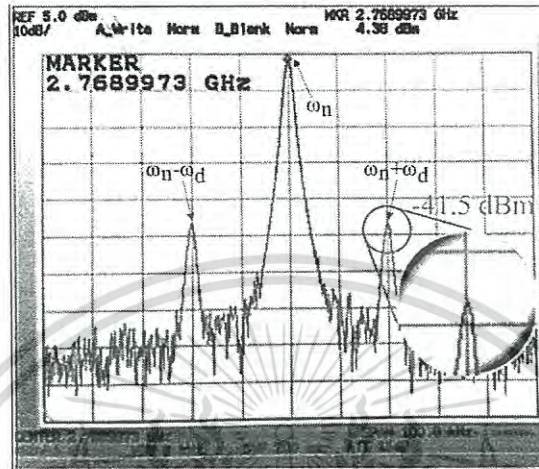
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$C_3 = C_4 = C_5 = 3.3$  พิโคฟาร์ด  $C_6 = 27$  พิโคฟาร์ด  $C_7 = 1$  พิโคฟาร์ด  $C_{ie} = C_{ib} = C_{ic} = 3.3$  พิโคฟาร์ด โดยกำหนดให้ไฟเลี้ยงวงจร  $V_{cc}$  มีค่าเท่ากับ 12 โวลต์ และทรานซิสเตอร์ที่ใช้คือ BFG135 ในกรณีที่ไม่มีกรุปอน อินพุตจึงวัดค่าเอาต์พุตของวงจรในโดเมนความถี่ด้วยเครื่องสเปกตรัมอนาล็อกเซอร์ไต์ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ ที่มีค่ากำลังงานเท่ากับ 4.17 เดซิเบลเอ็ม (dBm) ดังรูปที่ 4.1

สำหรับกรณีที่ป้อนอินพุตเป็นสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณ จากบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.2.1 ในสมการที่ (3.11) องค์กรประกอบความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากการทำนายด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ต้องประกอบไปด้วยความถี่ดอปเลอร์  $\omega_d$  ความถี่ธรรมชาติของวงจร  $\omega_n$  ความถี่เลื่อนดอปเลอร์  $\omega_n \pm \omega_d$  และความถี่  $2\omega_n \pm \omega_d$  ตามลำดับ โดยสามารถรองความถี่ดอปเลอร์ออกมาเพื่อแปลงเป็นความเร็วของวัตถุได้ ดังนั้นเพื่อแสดงให้เห็นชัดเจนว่าสามารถประยุกต์เป็นเรดาร์ระยะสั้นได้ จึงจำลองสถานการณ์ให้เรดาร์ระยะสั้นติดอยู่บนปลายหัวรบที่จุดระเบิดแบบพรีอกซิเมตี (Proximity fuze) โดยใช้สายอากาศแบบโมโนโพลที่มีอัตราขยายที่ -5.19 เดซิเบลซี (dBC) และกำหนดให้หัวรบนี้เคลื่อนที่ด้วยความเร็วสัมพัทธ์ 3 มักกับวัตถุเป้าหมาย สำหรับวัตถุเป้าหมายที่เป็นโลหะรูปสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่หน้าตัดขนาดประมาณ 0.328 ตารางเมตรที่สามารถคิดเป็นส่วนตัดผ่านเรดาร์ของวัตถุเป้าหมายได้ประมาณ 115.14 ตารางเมตร ซึ่งวัตถุเป้าหมายนี้อยู่ห่างจากหัวรบอยู่ 5 เมตร ดังนั้นระยะทางที่คลื่นเคลื่อนที่จากเรดาร์ไปกลับระหว่างวัตถุจึงเป็น 10 เมตร จากสถานการณ์นี้จึงสามารถคำนวณค่าการสูญเสียทั้งหมดในอุดมคติจากสมการการสูญเสียในที่ว่างที่กล่าวในบทที่ 2 หัวข้อย่อยที่ 2.6.3 สมการที่ (2.202) จึงสามารถคำนวณค่าสูญเสียในที่ว่างได้มีค่า -61.29 เดซิเบล ส่งผลให้สามารถจำลองสร้างสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์จากเครื่องกำเนิดสัญญาณที่มีความถี่เบี่ยงเบนไปจากความถี่ธรรมชาติที่ 20.34 กิโลเฮิรตซ์ และเนื่องจากองค์กรประกอบความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากการทำนายด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลามีทั้งความถี่ธรรมชาติของวงจรและความถี่เลื่อนดอปเลอร์ที่อยู่ในย่านความถี่สูง และความถี่ดอปเลอร์ที่อยู่ในย่านความถี่ต่ำที่มีความถี่ห่างจากย่านความถี่ธรรมชาติมาก เพื่อให้เกิดความชัดเจน จึงจำเป็นต้องขยายดูเอาต์พุตที่ละย่าน

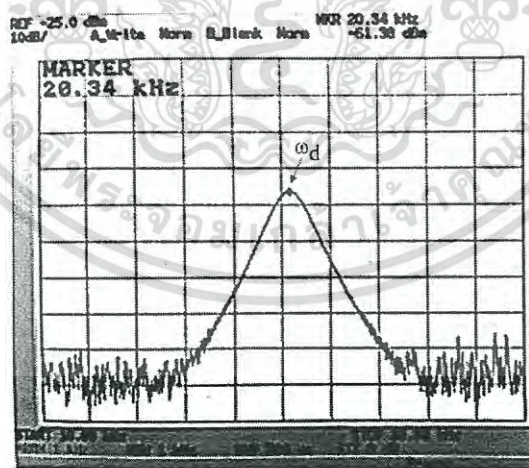
โดยเริ่มต้นจากวงจรกำเนิดสัญญาณรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์นี้ผ่านขาเบส จึงสามารถวัดสเปกตรัมของสัญญาณเอาต์พุตในย่านความถี่ธรรมชาติได้ดังรูปที่ 4.2 จากรูปที่ 4.2 สังเกตได้ว่าสัญญาณเอาต์พุตในย่านความถี่ธรรมชาติ ประกอบไปด้วยสเปกตรัมแท่งกลางที่แสดงถึงความถี่ธรรมชาติ  $\omega_n$  ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ ค่ากำลังงานเท่ากับ 4.38 เดซิเบลเอ็ม โดยสเปกตรัมทางซ้ายสุดและขวาสุดคือสเปกตรัมของความถี่เลื่อนดอปเลอร์ โดยสเปกตรัมทางซ้ายสุด  $\omega_n - \omega_d$  มีความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ ลบกับ 20.34 กิโลเฮิรตซ์ และสเปกตรัมทางขวาสุด  $\omega_n + \omega_d$  ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ บวกกับ 20.34 กิโลเฮิรตซ์ตามลำดับ โดยค่ากำลังงานของสเปกตรัมทางซ้ายสุดและขวาสุดมีค่าเท่ากัน นั้น

คือมีค่ากำลังงานเท่ากับ  $-41.5$  เดซิเบลเอม โดยองค์ประกอบทางความถี่ของสัญญาณเอาต์พุตที่ได้มีความสอดคล้องกับที่ทำนายไว้ในสมการที่ (3.11)



รูปที่ 4.2 สัญญาณเอาต์พุตเมื่อรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ที่ขาเบสในย่านความถี่ธรรมชาติ

นอกเหนือจากนี้โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาได้ทำนายการมีอยู่ของความถี่ดอปเลอร์  $\omega_d$  อยู่ในเอาต์พุตที่ได้จากวงจรด้วย ดังนั้นจึงต้องวัดสัญญาณเอาต์พุตในย่านความถี่ต่ำด้วยเช่นกัน ซึ่งผลการทดลองที่ได้เป็นไปดังรูปที่ 4.3



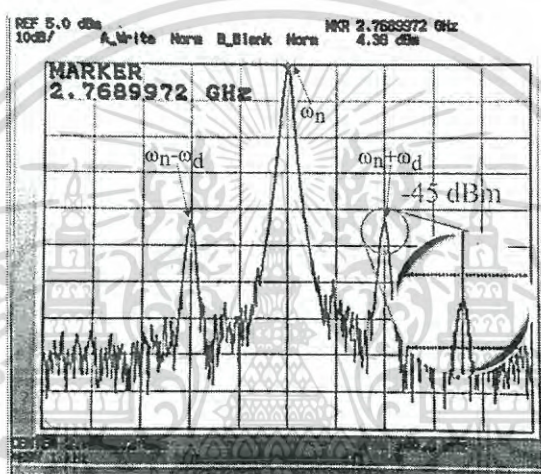
รูปที่ 4.3 สัญญาณเอาต์พุตเมื่อรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ที่ขาเบสในย่านความถี่ต่ำ

จากรูปที่ 4.3 พบว่ามีสเปกตรัมที่ความถี่ดอปเลอร์  $\omega_d$  ที่ความถี่  $20.34$  กิโลเฮิรตซ์รวมอยู่ในสัญญาณเอาต์พุตด้วย โดยค่ากำลังงานของสเปกตรัมความถี่ดอปเลอร์มีค่าเท่ากับ  $-61.38$  เดซิเบลเอม ซึ่งจุดนี้เอง

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ทำให้ผลการทำนายองค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ในสมการที่ (3.11) สอดคล้องกับผลการทดลองจริง

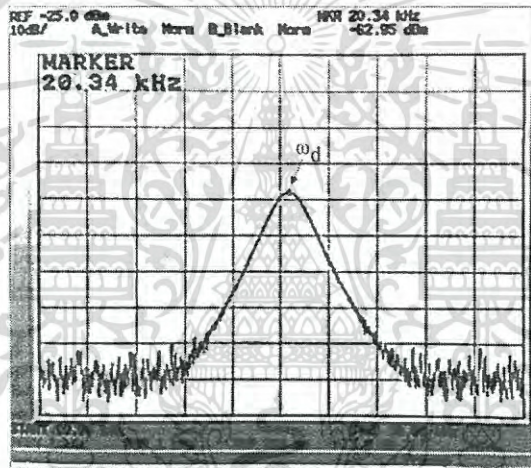
จากการวิเคราะห์ห้วงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตสามจุดในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.2.1 เมื่อแทนค่าอุปกรณ์ต่างๆในวงจรดังกล่าว พบว่าในกรณีที่วงจรกำเนิดสัญญาณรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ผ่านขาเบส อิมิตเตอร์ และคอลเล็คเตอร์ สัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากวงจรจะมีองค์ประกอบทางความถี่เหมือนกัน แตกต่างกันเพียงขนาดเท่านั้น เพื่อยืนยันการวิเคราะห์ จึงรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ผ่านขาอิมิตเตอร์ และวัดเอาต์พุตในย่านความถี่ธรรมชาติ ซึ่งผลที่ได้เป็นไปดังรูปที่ 4.4



รูปที่ 4.4 เอาต์พุตที่ได้จากวงจรเมื่อรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ที่ขาอิมิตเตอร์ในย่านความถี่ธรรมชาติ

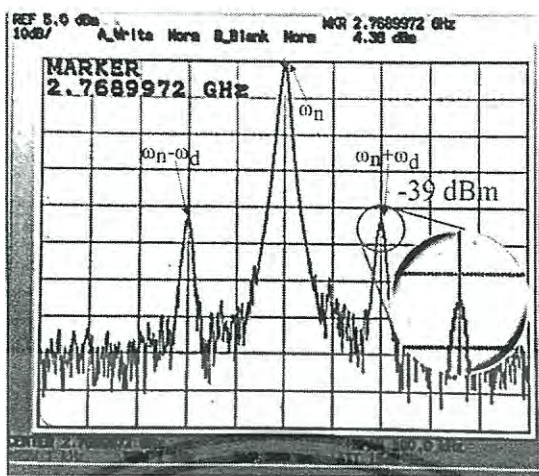
สังเกตได้ว่าองค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากการรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ที่ขาอิมิตเตอร์ในรูปที่ 4.4 มีความเหมือนกันกับองค์ประกอบความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากการรับสัญญาณเลื่อนดอปเลอร์ที่ขาเบสในรูปที่ 4.2 โดยรูปที่ 4.4 และ 4.2 มีความถี่ธรรมชาติ  $\omega_n$  ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ และมีค่ากำลังงานเท่ากันนั่นคือเท่ากับ 4.38 เดซิเบลเอ็ม อย่างไรก็ตามสังเกตรูปที่ 4.4 ได้ว่าสเปกตรัมของความถี่เลื่อนดอปเลอร์ ที่เป็นสเปกตรัมทางซ้ายสุด  $\omega_n - \omega_d$  ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ ลบกับ 20.34 กิโลเฮิรตซ์ และสเปกตรัมขวาสุด  $\omega_n + \omega_d$  ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ บวกกับ 20.34 กิโลเฮิรตซ์ มีค่ากำลังงานที่เท่ากัน นั่นคือเท่ากับ -45 เดซิเบลเอ็ม ซึ่งหากเปรียบเทียบกับรูปที่ 4.4 กับรูปที่ 4.2 จึงพบว่าค่ากำลังงานของเอาต์พุตที่ความถี่เลื่อนดอปเลอร์ (สเปกตรัมทางซ้ายสุดและขวาสุด) ของทั้งสองรูปมีความแตกต่างกัน จากจุดนี้จึงสามารถกล่าวได้ว่าสำหรับย่านความถี่ธรรมชาติ ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรต่ออินพุตที่ขาเบสมีค่าน้อยกว่าผลตอบสนองทางขนาดของวงจรต่ออินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ ที่สอดคล้องกับการวิเคราะห์ห้วงจรในบทที่ 3 หัวข้อที่ 3.2.1

อย่างไรก็ตามผลการวิเคราะห์ห้วงจรยังได้ทำนายว่าสำหรับในย่านความถี่ตอบเลออร์ ผลตอบสนองทางขนาดของวงจรถ้ออินพุตที่ขาเบสมีค่าน้อยกว่าผลตอบสนองทางขนาดของวงจรถ้ออินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ ด้วยเช่นกัน จึงต้องวัดผลตอบสนองทางขนาดของวงจรถ้ออินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ในย่านความถี่ตอบเลออร์เทียบกับรูปที่ 4.3 โดยสามารถแสดงเอาต์พุตที่ได้จากวงจรถ้ออินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ในย่านความถี่ตอบเลออร์ได้ดังรูปที่ 4.5 ซึ่งสามารถสังเกตรูปที่ 4.5 ได้ว่ามีองค์ประกอบความถี่ตรงกันกับรูปที่ 4.3 นั่นคือมีเพียงสเปกตรัมของความถี่ตอบเลออร์  $\omega_d$  ที่ความถี่ 20.34 กิโลเฮิรตซ์เพียงความถี่เดียว โดยสเปกตรัมความถี่ตอบเลออร์ในรูปที่ 4.5 มีค่ากำลังงานเท่ากับ -62.95 เดซิเบลเอ็ม ซึ่งเป็นค่าที่น้อยกว่าค่ากำลังงานของความถี่ตอบเลออร์ในรูปที่ 4.3 จากการเปรียบเทียบผลการทดลองจากรูปที่ 4.3 และ 4.5 จึงทำให้สรุปได้ว่าการวิเคราะห์ห้วงจรทางทฤษฎีมีความสอดคล้องกับผลการทดลองที่เกิดขึ้นจริง



รูปที่ 4.5 เอาต์พุตที่ได้จากวงจรถ้ออินพุตที่ขาอิมิตเตอร์ในย่านความถี่ต่ำ

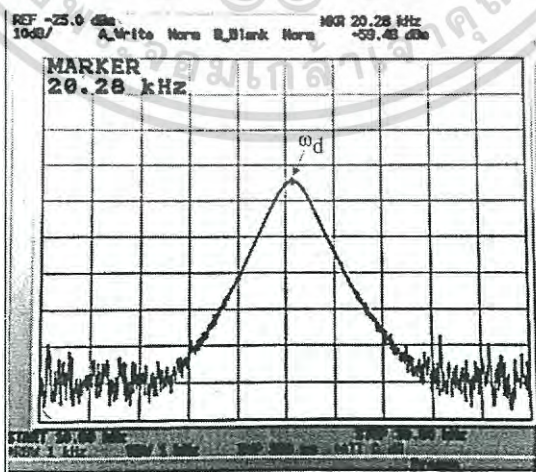
สำหรับการรับสัญญาณเสียงตอบเลออร์ผ่านขาคอลเล็กเตอร์ตามการวิเคราะห์ในบทที่ 3 หัวข้อ 3.2.1 องค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้ในกรณีนี้ ต้องเหมือนกับสองกรณีข้างต้นทุกประการ แตกต่างกันเพียงขนาดเท่านั้น ดังนั้นเมื่อทดลองรับสัญญาณเสียงตอบเลออร์ผ่านขาคอลเล็กเตอร์ และวัดสัญญาณเอาต์พุตในย่านความถี่ธรรมชาติ จึงสามารถแสดงสเปกตรัมของเอาต์พุตที่ได้ดังรูปที่ 4.6



รูปที่ 4.6 เอาต์พุตที่ได้จากวงจรเมื่อป้อนสัญญาณเลื่อนคอปเลอร์ที่ขาคอลเล็กเตอร์  
ในย่านความถี่ธรรมชาติ

จากรูปที่ 4.6 องค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่วัดได้มีความเหมือนกันกับรูปที่ 4.2 และ 4.4 ทุกประการ นั่นคือประกอบไปด้วยความถี่  $\omega_n - \omega_d$  (สเปกตรัมทางซ้ายสุด) มีความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ ลบกับ 20.34 กิโลเฮิรตซ์ ความถี่  $\omega_n + \omega_d$  (สเปกตรัมทางขวาสุด) มีความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ บวกกับ 20.34 กิโลเฮิรตซ์ และความถี่ธรรมชาติ  $\omega_n$  (สเปกตรัมแห่งกลาง) ที่ความถี่ประมาณ 2.76 กิกะเฮิรตซ์ โดยสัญญาณเลื่อนคอปเลอร์ที่ความถี่  $\omega_n - \omega_d$  และ  $\omega_n + \omega_d$  นี้ มีค่ากำลังงานที่เท่ากันนั่นคือ -39 เดซิเบลเอม และสัญญาณความถี่ธรรมชาติที่ความถี่  $\omega_n$  มีค่ากำลังงานเท่ากับ 4.38 เดซิเบลเอม

เพื่อแสดงองค์ประกอบทางความถี่ของเอาต์พุตที่ได้จากการรับสัญญาณเลื่อนคอปเลอร์ผ่านขาคอลเล็กเตอร์ให้ครบถ้วน จึงวัดสัญญาณเอาต์พุตที่ได้ในย่านความถี่ต่ำและแสดงผลที่วัดได้ออกมาดังรูปที่ 4.7

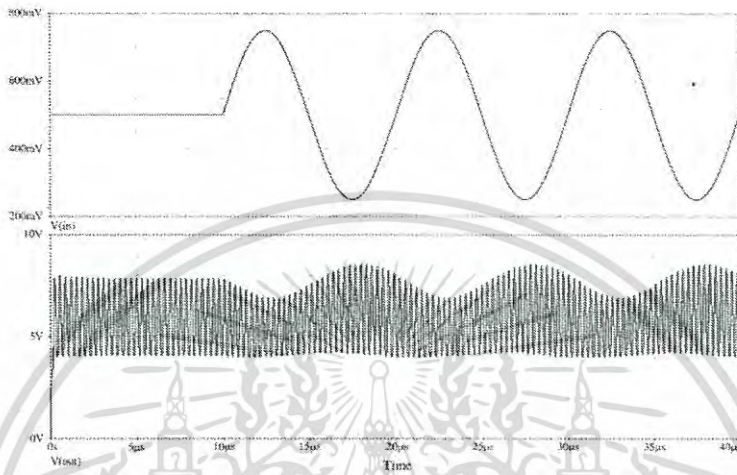


รูปที่ 4.7 เอาต์พุตที่ได้จากวงจรเมื่อป้อนสัญญาณเลื่อนคอปเลอร์ที่ขาคอลเล็กเตอร์ในย่านความถี่ต่ำ

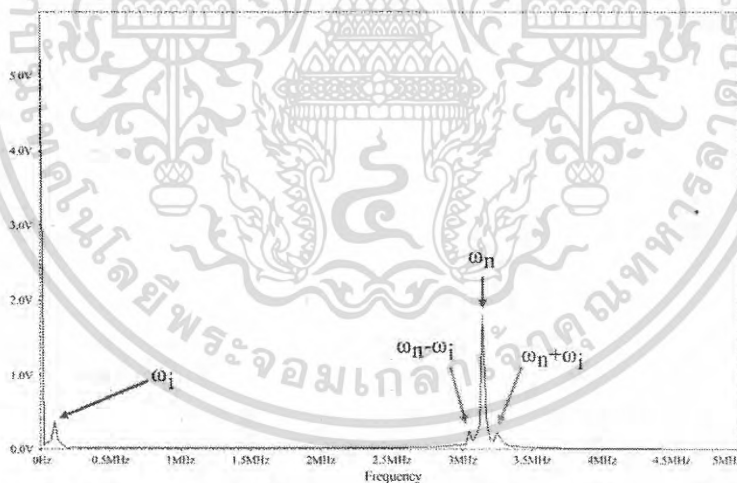
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



โดย  $v_o(t)$  คือสัญญาณเอาต์พุต  $\omega_n$  คือความถี่ธรรมชาติ  $\omega_i$  คือความถี่อินพุต และ  $n_f(t)$  คือผลตอบสนองสัญญาณรบกวน โดยสามารถแสดงผลการจำลองของสัญญาณเอาต์พุตเทียบกับสัญญาณอินพุตในโดเมนเวลาได้ดังรูปที่ 4.8 และสามารถแสดงสัญญาณเอาต์พุตในโดเมนความถี่ได้ดังรูปที่ 4.9



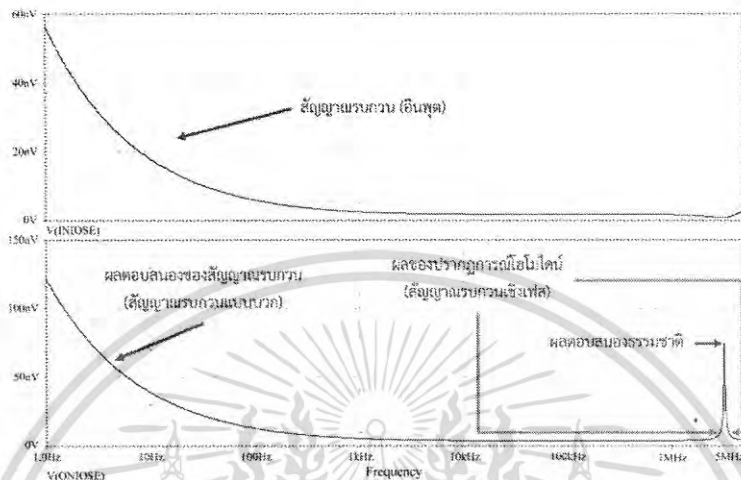
รูปที่ 4.8 สัญญาณอินพุต (บน) เทียบกับเอาต์พุต (ล่าง) ในโดเมนเวลา



รูปที่ 4.9 สเปกตรัมสัญญาณเอาต์พุตที่มีอินพุตเป็นสัญญาณคลื่นรูปไซน์รวมอยู่กับสัญญาณรบกวน

จากรูปที่ 4.9 สังเกตได้ว่าสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณไซน์ชอยดอลได้ถูกย้ายขึ้นมาแสดงอยู่ในย่านความถี่ธรรมชาติ ส่งผลให้สัญญาณเอาต์พุตที่ได้จากวงจรในรูปที่ 4.8 และ 4.9 อยู่ในรูปแบบสัญญาณเอเอ็มทั้งในโดเมนเวลาและความถี่ตามลำดับ ซึ่งผลการทดลองที่เกิดขึ้นนี้เป็นผลของปรากฏการณ์โฮโมไดน์จากการทำนายทางทฤษฎีด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลา ดังนั้นหากไม่ป้อนสัญญาณอินพุตที่เป็นสัญญาณไซน์

ขอยดอล แต่เป็นสัญญาณรบกวนรวมดังรูปด้านบนในรูปที่ 4.10 จึงสามารถแสดงสเปกตรัมสัญญาณเอาต์พุตที่รวมอยู่กับสัญญาณรบกวนรวมหรือสัญญาณรบกวนเชิงเฟสได้ดังรูปด้านล่างในรูปที่ 4.10



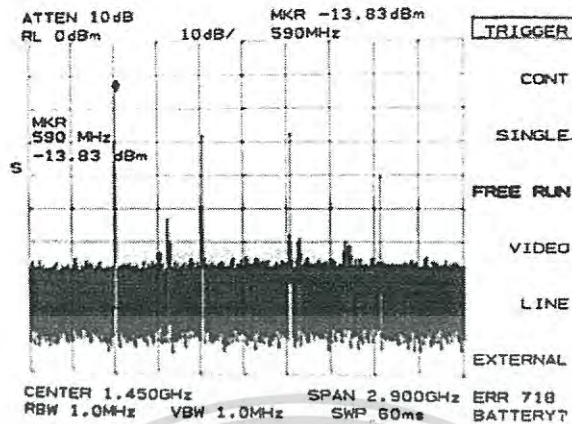
รูปที่ 4.10 สัญญาณอินพุตในรูปแบบสัญญาณรบกวน (บน)  
สเปกตรัมสัญญาณเอาต์พุตที่มีอินพุตเป็นสัญญาณรบกวน (ล่าง)

โดยรูปด้านล่างในรูปที่ 4.10 นั้นสอดคล้องกับผลการทำนายและการอธิบายด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาในบทที่ 3 หัวข้อย่อย 3.2.2 รูปที่ 3.20

#### 4.4 การควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็ม

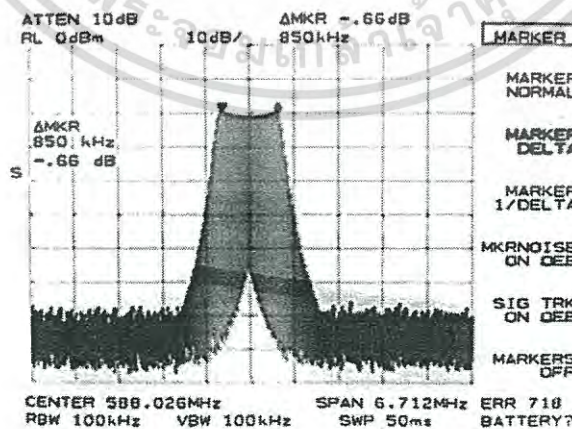
เพื่อแสดงการยืนยันผลการทำนายของการควบคุมแบนด์วิดท์ที่ได้นำเสนอในบทที่ 3 หัวข้อย่อย 3.3 ด้วยการแทนค่าอุปกรณ์ต่างๆ ลงในรูปที่ 3.24 โดยกำหนดให้ตัวต้านทาน  $R_1 = 5.6$  กิโลโอห์ม  $R_2 = 1.2$  กิโลโอห์ม  $R_C = 100$  โอห์ม  $R_E = 300$  โอห์ม ตัวขดลวดเหนี่ยวนำ  $L_1 = L_2 = 12$  ไมโครเฮนรี่ และตัวเก็บประจุ  $C_1 = 470$  นาโนฟารัด  $C_2 = 3$  พิโคฟารัด  $C_3 = 10$  ไมโครโคฟารัด  $C_4 = 5$  พิโคฟารัด โดยกำหนดให้ไฟเลี้ยงวงจร  $V_{CC}$  มีค่าเท่ากับ 9 โวลต์ และทรานซิสเตอร์ที่ใช้คือ 2SC2570 ในกรณีที่ไม่มีกรป้อนอินพุตจึงวัดค่าผลตอบสนองธรรมชาติของวงจรที่มีฮาร์มอนิกจำนวนเท่าในโดเมนความถี่ด้วยเครื่องสเปกตรัมอนาล็อกเซอร์ได้ดังรูปที่ 4.11 จากรูปที่ 4.11 สเปกตรัมด้านซ้ายสุดคือสเปกตรัมของความถี่มูลฐานที่มีค่าเท่ากับ 588.8 เมกะเฮิร์ตซ์ โดยสเปกตรัมถัดจากซ้ายสุดคือสเปกตรัมความถี่ฮาร์มอนิกที่สองของความถี่มูลฐานที่มีค่าเท่ากับ 1.1776 กิกะเฮิร์ตซ์ และสเปกตรัมถัดไปคือสเปกตรัมความถี่ฮาร์มอนิกที่สามของความถี่มูลฐานที่มีค่าเท่ากับ 1.7664 กิกะเฮิร์ตซ์ โดยสเปกตรัมด้านขวาสุดคือสเปกตรัมความถี่ฮาร์มอนิกที่สี่ของความถี่มูลฐานที่มีค่าเท่ากับ 2.3552 กิกะเฮิร์ตซ์ตามลำดับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



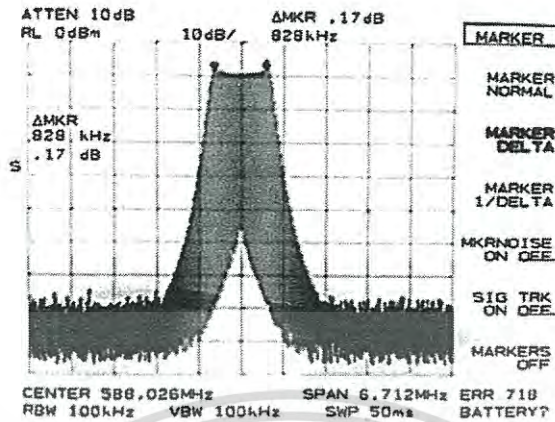
รูปที่ 4.11 สเปกตรัมผลตอบสนองของธรรมชาติที่มีฮาร์มอนิกจำนวนเท่าของวงจรถ่ายสัญญาณแบบโคลพิตต์ที่ถูกดัดแปลงให้มีการป้อนอินพุตจุดเดียว

เมื่อทำการป้อนอินพุตที่เป็นสัญญาณเอฟเอ็มดังรูปที่ 4.12 ที่ความถี่คลื่นพาห์เท่ากับ 588 เมกะเฮิร์ตซ์ แบนด์วิดท์เท่ากับ 850 กิโลเฮิร์ตซ์ดังรูปที่ 4.12 ให้กับวงจรถ่ายสัญญาณ ผลทำให้เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องเกิดขึ้น สังเกตได้ว่าแต่ละฮาร์มอนิกมีความถี่ที่ห่างกันมาก เพื่อให้เกิดความชัดเจน จึงจำเป็นต้องขยายดูเอาต์พุตที่ละเอียดขึ้น ดังนั้นเมื่อตรวจวัดค่าเอาต์พุตที่ย่านฮาร์มอนิกมูลฐาน จึงได้สเปกตรัมสัญญาณเอฟเอ็มที่แบนด์วิดท์มีค่าประมาณเท่าเดิมนั้นคือ 828 กิโลเฮิร์ตซ์ แต่มีขนาดของสัญญาณใหญ่ขึ้น 0.49 เดซิเบลเอม ดังรูปที่ 4.13 และเนื่องจากตรงกับเงื่อนไขปรากฏการณ์การสั่นพ้อง ดังนั้นหากตรวจวัดสัญญาณเอาต์พุตในย่านฮาร์มอนิกที่สองของความถี่ธรรมชาติมูลฐาน สัญญาณเอาต์พุตที่ได้จึงเป็นสัญญาณเอฟเอ็มที่มีความถี่คลื่นพาห์เท่ากับ 1.1776 กิกะเฮิร์ตซ์ และมีแบนด์วิดท์เท่ากับ 1.689 เมกะเฮิร์ตซ์ดังรูปที่ 4.14

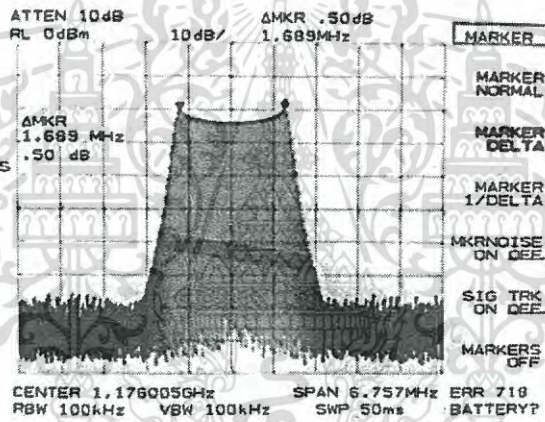


รูปที่ 4.12 สัญญาณอินพุตแบบเอฟเอ็มที่มีความถี่คลื่นพาห์ตรงกับความถี่ธรรมชาติมูลฐาน

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



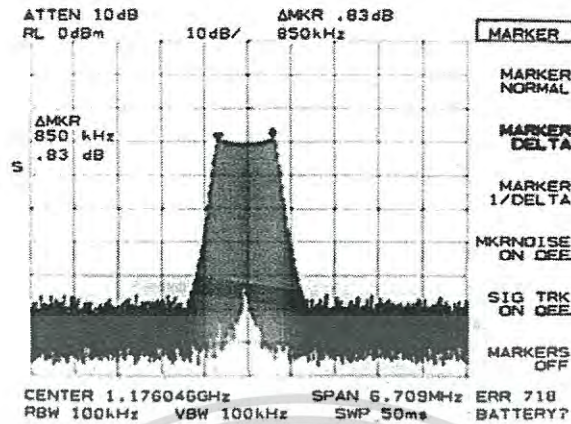
รูปที่ 4.13 สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องในย่านความถี่ธรรมชาติมูลฐาน



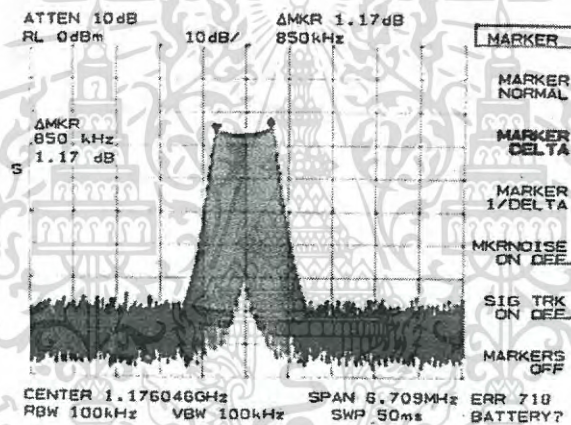
รูปที่ 4.14 สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องในย่านฮาร์โมนิกที่สอง

ดังนั้นหากเลือกใช้ฮาร์โมนิกที่สองด้วยการนำเอาต์พุตที่ได้ดังรูปที่ 4.13 และ 4.14 ไปผ่านการกรองความถี่ จึงได้สัญญาณเอฟเอ็มที่ความถี่คลื่นพาห์และแบนด์วิดท์มีค่าประมาณสองเท่าของสัญญาณเอฟเอ็มดั้งเดิมที่เป็นอินพุต และจุดนี้เองคือการขยายแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็ม

สำหรับกรณีของการย่อแบนด์วิดท์ของสัญญาณเอฟเอ็มนั้น สามารถพิสูจน์ได้ด้วยการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มที่ความถี่คลื่นพาห์เท่ากับ 1.176 กิกะเฮิร์ตซ์ แบนด์วิดท์เท่ากับ 850 กิโลเฮิร์ตซ์ดังรูปที่ 4.15 ให้กับวงจร ที่ส่งผลให้เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติกขึ้น ดังนั้นจึงได้สัญญาณเอาต์พุตเป็นสัญญาณเอฟเอ็มที่มีความถี่คลื่นพาห์และแบนด์วิดท์เท่าเดิม (ความถี่คลื่นพาห์ 1.176 กิกะเฮิร์ตซ์ แบนด์วิดท์ 850 กิโลเฮิร์ตซ์) ที่มีขนาดสูงขึ้น 0.34 เดซิเบลเอ็ม ดังรูปที่ 4.16



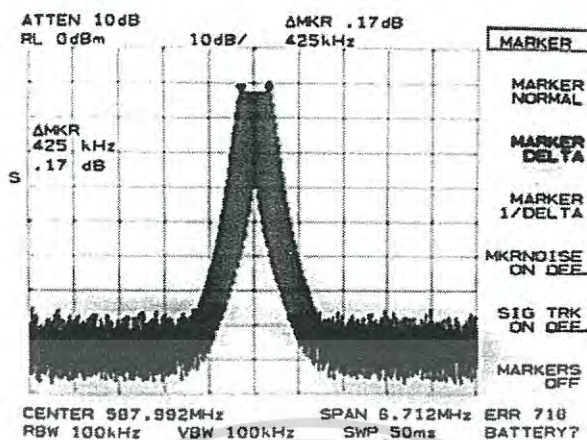
รูปที่ 4.15 สัญญาณอินพุตแบบเอฟเอ็มที่ความถี่คลื่นพาห์ตรงกับฮาร์โมนิคที่สอง



รูปที่ 4.16 สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติก  
ในย่านความถี่ฮาร์โมนิคที่สอง

และเมื่อตรวจวัดสัญญาณเอาต์พุตในย่านความถี่ธรรมชาติมูลฐาน จึงพบสัญญาณเอฟเอ็มที่ความถี่คลื่นพาห์ 588 เมกะเฮิร์ตซ์ แบนด์วิดท์เท่ากับ 425 กิโลเฮิร์ตซ์ดังรูปที่ 4.17 จากรูปที่ 4.17 สังเกตได้ว่า หากเลือกใช้เอาต์พุตในย่านฮาร์โมนิคมูลฐานของวงจรกำเนิดสัญญาณ จึงได้สัญญาณเอฟเอ็มที่มีความถี่คลื่นพาห์และแบนด์วิดท์ลดลงสองเท่า หรือว่าเกิดการย่อแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มขึ้นนั่นเอง จากผลการทดลองของทั้งการขยายและย่อแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มในข้างต้น จึงเป็นการยืนยันความสอดคล้องระหว่างหลักการการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มกับผลการทดลองที่วัดได้จริงเป็นอย่างดี

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 4.17 สัญญาณเอาต์พุตที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซิมพาเทติก  
ในย่านความถี่ธรรมชาติมูลฐาน

#### 4.5 สรุป

จากผลการทดลองของแต่ละการประยุกต์ใช้ปรากฏการณ์ไฮโมไดน์ในข้างต้น จึงทำให้สามารถสรุปได้ว่าผลการทำนายทางทฤษฎีที่ได้นำเสนอในบทที่ 3 นั้นสอดคล้องกับผลการทดลองเป็นอย่างดี โดยสามารถแสดงสรุปภาพรวมทั้งหมดของวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ในบทถัดไป

## บทที่ 5

# สรุปผลการวิจัยและข้อเสนอแนะ

### 5.1 สรุปผลการวิจัย

ปรากฏการณ์โฮโมไดน์เป็นพฤติกรรมพื้นฐานที่เกิดขึ้นเมื่อมีการป้อนอินพุตให้กับระบบการสั่นไม่ว่าระบบการสั่นนั้นจะมีโครงสร้างอยู่ในรูปแบบใดก็ตาม ในกรณีของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณที่อธิบายด้วยนิยามของการสั่นตนเอง แม้ว่าแนวคิดการอธิบายวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในกรณีที่ไม่มีสัญญาณอินพุตมากระทำกับระบบด้วยโมเดลการป้อนกลับนั้นมีความหมายเชิงฟิสิกส์ที่สอดคล้องอย่างเป็นเหตุผลและเป็นวิธีที่ง่ายต่อการสังเคราะห์วงจรถูกกำเนิดสัญญาณทุกรูปแบบ แต่สำหรับในกรณีการป้อนอินพุตให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณแล้วกลับเกิดความซับซ้อนในการวิเคราะห์พฤติกรรมของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณเนื่องจากปรากฏการณ์โฮโมไดน์นั้นเกิดจากความไม่เป็นเชิงเส้นของภาคขยายในโมเดลการป้อนกลับของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณที่ตีความในเชิงฟิสิกส์ได้ว่าเป็นการรบกวนระบบ และจากการนิยามความไม่เป็นเชิงเส้นของพารามิเตอร์ในภาคขยายของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณให้ต้องนิยามความไม่เป็นเชิงเส้นของอุปกรณ์ภายในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ ดังนั้นเมื่อโครงสร้างของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณเปลี่ยนแปลงให้อยู่ในรูปแบบอื่น จึงต้องนิยามความไม่เป็นเชิงเส้นของอุปกรณ์ใหม่ให้อยู่ในรูปแบบเดิมทุกครั้ง อีกทั้งรูปแบบของการวิเคราะห์ที่ขึ้นอยู่กับพื้นฐานของสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นที่มีเทคนิคทางคณิตศาสตร์ในการประมาณค่าที่หลากหลายไม่เป็นระเบียบแบบแผน นอกเหนือจากนี้ด้วยข้อจำกัดของนิยามการสั่นตนเองที่ว่าด้วยขนาดของสัญญาณต้องไม่ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้นของระบบ จึงส่งผลให้ไม่สามารถนำหลักการนี้ไปอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในระบบการสั่นเชิงกลได้

ในขณะที่โมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาที่มีรายละเอียดละเอียดในการวิเคราะห์วงจรถูกกำเนิดสัญญาณในกรณีที่ไม่มีอินพุต และยากต่อการสังเคราะห์วงจรถูกกำเนิดสัญญาณกว่าโมเดลการป้อนกลับในระบบการสั่นตนเอง แต่กลับเป็นวิธีที่มีระเบียบแบบแผนต่อการวิเคราะห์ปรากฏการณ์โฮโมไดน์ของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณในกรณีที่มีการป้อนอินพุตให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ เนื่องจากมองว่าวงจรถูกกำเนิดสัญญาณคือระบบหนึ่งที่มีการป้อนอินพุต และด้วยมุมมองแบบระบบนี้เองส่งผลให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับการอธิบายปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในระบบการสั่นเชิงกลได้ด้วยพื้นฐานเดียวกัน อีกทั้งยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์ การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ และการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มให้กับวงจรถูกกำเนิดสัญญาณภายใต้โมเดลเดียวกันได้

โดยแนวคิดการประยุกต์ใช้สำหรับสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบดอปเลอร์นั้น ได้นิยามให้มองว่าสัญญาณเล็กลงดอปเลอร์ที่ได้จากการสะท้อนของคลื่นที่ตกกระทบกับวัตถุที่มีความเร็ว เป็นสัญญาณอินพุตที่ป้อน

ให้กับวงจร ซึ่งเอาต์พุตที่ได้นั้นต้องมียุคประกอบเป็นสัญญาณตอปเลออร์ที่สามารถกรองออกมาได้ด้วยการใช้วงจรกรองความถี่ต่ำผ่านเพียงวงจรเดียว

สำหรับแนวคิดการประยุกต์ใช้สำหรับอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรกำเนิดสัญญาณนั้น ได้มองว่าสัญญาณรบกวนรวมในย่านความถี่ต่ำได้ถูกย้ายไปอยู่ในย่านความถี่ธรรมชาติของวงจรอันเนื่องมาจากปรากฏการณ์โฮโมไดน์ และทำการพิสูจน์หลักการโดยอ้อมด้วยการป้อนสัญญาณไซน์ชวยดอลที่มีความถี่ในย่านเดียวกับสัญญาณรบกวนให้กับวงจร เพื่อสังเกตผลของปรากฏการณ์โฮโมไดน์ในการย้ายสัญญาณไซน์ชวยดอลดังกล่าวไปอยู่ในย่านความถี่ธรรมชาติของวงจรกำเนิดสัญญาณ

โดยการประยุกต์ใช้สำหรับการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณนั้น ได้ทำการป้อนอินพุตเป็นสัญญาณเอฟเอ็มที่มีความถี่คลื่นพาห์เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของวงจรที่ฮาร์โมนิคมูลฐานหรือฮาร์โมนิคที่สอง เพื่อให้เกิดปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคหรือซูเปอร์ฮาร์โมนิคอินเจ็คชั่นลอค ที่เทียบเคียงได้กับปรากฏการณ์สั้นพ้องหรือปรากฏการณ์สั้นพ้องแบบซิมพาเทติกซึ่งเป็นผลมาจากปรากฏการณ์โฮโมไดน์ และอาศัยความเป็นฮาร์โมนิคของวงจรกำเนิดสัญญาณในทางปฏิบัติ ในกรณีที่ความถี่คลื่นพาห์เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติมูลฐานของวงจร เมื่อวัดค่าเอาต์พุตในย่านความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์โมนิคสองของวงจร จึงได้สัญญาณเอฟเอ็มที่มีแบนด์วิดท์เป็นสองเท่าของแบนด์วิดท์ของสัญญาณเอฟเอ็มที่เป็นอินพุต และเมื่อความถี่คลื่นพาห์เข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติที่ฮาร์โมนิคสองของวงจร จึงได้เอาต์พุตเป็นสัญญาณเอฟเอ็มที่มีแบนด์วิดท์ลดลงสองเท่าจากสัญญาณอินพุตในย่านความถี่ธรรมชาติมูลฐานของวงจร หรือกล่าวได้ว่าสามารถย่อหรือขยายแบนด์วิดท์ของสัญญาณเอฟเอ็มได้นั่นเอง

โดยผลการทำนายนการประยุกต์ใช้งานสำหรับการสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบตอปเลออร์ การอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรกำเนิดสัญญาณ และการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณด้วยโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลานี้ สามารถยืนยันว่าเป็นจริงด้วยผลการทดลองที่ได้จากวงจรกำเนิดสัญญาณแบบโคลพิตต์ ซึ่งผลการทดลองของการสร้างเรดาร์ระยะสั้นแบบตอปเลออร์นั้นได้จากผลการทดลองจริง ผลการทดลองของการอธิบายสัญญาณรบกวนเชิงเฟสในวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นได้จากผลการจำลองด้วยโปรแกรม PSPICE และผลการทดลองของการควบคุมแบนด์วิดท์สัญญาณเอฟเอ็มด้วยการป้อนสัญญาณเอฟเอ็มให้กับวงจรกำเนิดสัญญาณนั้นได้จากผลการทดลองจริง ซึ่งผลการทดลองในการประยุกต์ใช้อย่างหลายด้านในข้างต้นนี้สอดคล้องกับการทฤษฎีเป็นอย่างดี

## 5.2 ข้อเสนอแนะ

จากการนำเสนอในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้มีหลายจุดที่น่าสนใจดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

1. การนำโมเดลการสั่นบังคับหลายเวลาไปใช้อธิบายปรากฏการณ์โฮโมไคน์ในระบบการสั่นรูปแบบอื่นเช่นระบบการสั่นเชิงแสง การเคลื่อนที่ของดวงดาว ระบบการสั่นเชิงเคมี ระบบการสั่นเชิงชีวภาพ และการสั่นระดับควอนตัม เป็นต้น

2. การอาศัยผลการตอบสนองที่แตกต่างกันเมื่อป้อนอินพุตในแต่ละจุดที่แตกต่างกันในเรตาร์ระยะสั้นแบบคอปเลอร์มาประยุกต์ใช้สำหรับการตรวจจับวัตถุที่แตกต่างกันในสามทิศทาง

3. การประยุกต์ใช้กับระบบการตรวจจับโฮโมไคน์ในเลเซอร์อินเตอร์เฟอโรมิเตอร์ที่ใช้ในการตรวจจับคลื่นโน้มถ่วง ว่าอาจจะมีสัญญาณคลื่นโน้มถ่วงรวมอยู่ที่จุดไฟตรงใช้เล็งเลเซอร์อันเนื่องมาจากปรากฏการณ์โฮโมไคน์ และอาจตรวจจับสัญญาณคลื่นโน้มถ่วงได้โดยตรงโดยไม่ต้องอาศัยอุปกรณ์รับข้อมูลทางแสง

4. การประยุกต์ใช้ในระบบตรวจจับสารเคมีแบบรามานสเปกโตรสโกปี โดยไม่จำเป็นต้องอาศัยเทคนิคการกักสัญญาณที่เล็ดออกไป แต่ตรวจจับสัญญาณลักษณะเฉพาะของสารที่ต้องการได้โดยตรงอันเนื่องมาจากผลของปรากฏการณ์โฮโมไคน์

5. การอาศัยผลของปรากฏการณ์โฮโมไคน์มาประยุกต์ใช้สำหรับอธิบายการชิงโครโนซันระหว่างระบบการสั่นสองระบบเช่นการชิงโครโนซันระหว่างการสั่นของนาฬิกาเพนดูลัมสองเรือนที่แขวนอยู่บนผนังเดียวกัน และการอธิบายการพัวพันเชิงควอนตัมในรูปแบบของการชิงโครโนซันระหว่างสถานะทางควอนตัมที่เป็นคู่พัวพันกัน เป็นต้น

## เอกสารอ้างอิง

- [1] K. Prompak, A. Kaewpoonsuk, T. Maneechukate, P. Wardkein, "An oscilltion discovery of the forced vibrating system predicted by multi-time differential equation", Scientific Research and Essays 7(39), 3292-3301 (2012)
- [2] K. Prompak, A. Kaewpoonsuk, T. Maneechukate, P. Wardkein, "A new oscillation frequency discovery of the driven spring-mass system predicted by the multi-time differential equation", European Journal Of Scientific Research 92(3), 397-410 (2012)
- [3] Maneechukate, T., Tuwanut, P., Koseeyaporn, J. & Wardkein, P. "New analytic solution of second-order oscillator using multi-time variables technique", 2005 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems (2005)
- [4] Maneechukate, T., Koseeyaporn, J., Wardkein, P. & Koseeyaporn, P. "Wide-band amplitude control of the second-order oscillator circuit", AEU - International Journal of Electronics and Communications 62, 666-673 (2008)
- [5] Maneechukate, T., Prompak, K., Koseeyaporn, J. & Wardkein, P. Full Length Research Paper "Accuracy behavior explanation of electrical second-order system based on multi-time technique", Scientific Research and Essays 8(25), 1180-1190 (2013)
- [6] Maneechukate, T., Koseeyaporn, J., Wardkein, P. & Koseeyaporn, P. "Amplitude modulation based on time-varying forced function of second-order oscillator circuit", in 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (IEEE, 2016)
- [7] K. Kittipute, J. Koseeyaporn, P. Wardkein, "Amplitude demodulation based on time-varying forced input of second-order oscillator circuit", TENCON 2009 - 2009 IEEE Region 10 Conference. (2009)
- [8] A. Kitipongwatana, P. Koseeyaporn, J. Koseeyaporn, P. Wardkein, "Fundamental Behavior Analysis of Single-Frequency Sine Wave Forced Oscillator based on Linear Model and Multi-Time Technique", Radioengineering 23(2), 697-708 (2014)

- [10] Lathi, B. *Signal processing and linear systems*, (Oxford University Press, 1998)
- [11] Lee, E. *Structure and interpretation of signals and systems*, (LeeVaraiya.org, 2011)
- [12] Landa, P. *Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems*, (Kluwer Academic Publishers, 1996)
- [13] Riley, K. F., M. P. Hobson, and S. J. Bence. *Mathematical methods for physicists and engineers*, (1998)
- [14] Nayfeh, Ali H. *Perturbation methods*, John Wiley & Sons, 2008
- [15] Tuzlukov, Vyacheslav. *Signal processing noise*, Vol. 8. CRC Press, 2002
- [16] Rubiola, Enrico. *Phase noise and frequency stability in oscillators*, Cambridge University Press, 2008
- [17] Vaseghi, Saeed V. *Advanced digital signal processing and noise reduction*, John Wiley & Sons, 2008
- [18] Adler, R. "A study of locking phenomena in oscillators", *Proceedings of the IEEE* 61, 1380-1385 (1973)
- [19] Paciorek, L. "Injection locking of oscillators", *Proceedings of the IEEE* 53, 1723-1727 (1965)
- [20] Zhikai, Tang, et al. "Injection locking phenomena of Van der Pol oscillator", *Microwave Conference Proceedings, 2005. APMC 2005. Asia-Pacific Conference Proceedings. Vol. 5. IEEE, 2005.*
- [21] Rategh, Hamid R., and Thomas H. Lee. "Superharmonic injection locked oscillators as low power frequency dividers." *VLSI Circuits, 1998. Digest of Technical Papers. 1998 Symposium on. IEEE, 1998.*
- [22] Rategh, Hamid R., and Thomas H. Lee. "Superharmonic injection-locked frequency dividers." *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 34.6 (1999): 813-821.
- [23] Verma, Shwetabh, Hamid R. Rategh, and Thomas H. Lee. "A unified model for injection-locked frequency dividers." *IEEE Journal of Solid-State Circuits* 38.6 (2003): 1015-1027.
- [24] Plessas, F. "A study of superharmonic injection locking in multiband frequency dividers." *International Journal of Circuit Theory and Applications* 39.4 (2011): 397-410.

[25] Skolnik, M. *Introduction to radar systems*. (McGraw-Hill, 1980).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
 [26] Lynn, P. *Radar system*. (Van Nostrand Reinhold, 1988).  
 ไม่วารณใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมีเหตุดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [27] Meikle, H. *Modern radar systems*. (Artech House, 2008).
- [28] Noskov, V. The history of invention and development of autodyne proximity fuzes. in *Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo), 2013 23rd International Crimean Conference 26 - 29 (IEEE, 2013)*.
- [29] Eden, A. *The search for Christian Doppler*. (Springer-Verlag, 1992).
- [30] Gross, C. et al. Atomic homodyne detection of continuous-variable entangled twin-atom states. *Nature* 480, 219-223 (2011).
- [31] Fuwa, M., Takeda, S., Zwierz, M., Wiseman, H. & Furusawa, A. Experimental proof of nonlocal wavefunction collapse for a single particle using homodyne measurements. *Nature Communications* 6, 6665 (2015).
- [32] Buonanno, A., Chen, Y. & Mavalvala, N. Quantum noise in laser-interferometer gravitational-wave detectors with a heterodyne readout scheme. *Physical Review D* 67, (2003).
- [33] Harms, J. et al. Squeezed-input, optical-spring, signal-recycled gravitational-wave detectors. *Physical Review D* 68, (2003).
- [34] McKenzie, K. et al. Squeezing in the Audio Gravitational-Wave Detection Band. *Phys. Rev. Lett.* 93, (2004).
- [35] M.M. Radmanesh, *Radio frequency and microwave electronics illustrated*, California State University, Northridge, Prentice Hall PTR, 2000.
- [36] J.M. Miller. "Dependence of the input impedance of a three-electrode vacuum tube upon the load in the plate circuit," *Scientific Papers of the Bureau of Standards*, vol. 15(351), pp. 367-385, 1920.
- [37] J.R. Carson, "Notes on the theory of modulation", *Proc. IRE*, vol. 10, no. 1, Feb. 1922, pp. 57-64.
- [38] รศ.ดร.ปราโมทย์ วาดเขียน, *สัญญาณและระบบต่อเนื่องขั้นสูงทางอิเล็กทรอนิกส์*, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง, พิมพ์ครั้งที่ 1, พ.ศ. 2553
- [39] Van der Pol, Balh. "The nonlinear theory of electric oscillations," *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 22.9 (1934): 1051-1086.
- [40] Komanov, I.V., Smolskiy, S.M. *Funamentals of Short-range FM RADAR* Atech House, Inc., 2003.
- [41] Kurokawa, Kaneyuki. "Injection locking of microwave solid-state oscillators." *Proceedings of the IEEE* 61.10 (1973): 1386-1410.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

- [42] Claassen, M. "Self-Mixing Oscillators." *Silicon-Based Millimeter-Wave Devices*. Springer Berlin Heidelberg, 1994. 215-239.
- [43] Ramirez, Jonatan Peña, et al. "The sympathy of two pendulum clocks: beyond Huygens' observations." *Scientific reports* 6 (2016).
- [44] Cajori, Florian. "Historical note on the Newton-Raphson method of approximation." *The American Mathematical Monthly* 18.2 (1911): 29-32.
- [45] Moulton, Forest Ray. *An introduction to celestial mechanics*. Courier Corporation, 2012.
- [46] Luckhurst, Roger. *The Invention of Telepathy, 1870-1901*. Oxford University Press on Demand, 2002.
- [47] Armstrong, Edwin H. "Some recent developments in the audion receiver." *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 3.3 (1915): 215-238.
- [48] Colebrook, F. M. "Homodyne." *Wireless World and Radio Review* 13 (1924): 645-648.
- [49] Skiadas, Christos, ed. *The Foundations of Chaos Revisited: From Poincaré to Recent Advancements*. Springer, 2016.
- [50] D.G. Tucker, "The Synchrodyne." *Electronic Engng*, 19, March 1947, pp. 75-76.
- [51] Barkhausen, Heinrich. "Lehrbuch der Elektronenröhren und ihrer technischen Anwendungen." (1963).
- [52] Komarov, Igor V., and Sergey M. Smolskiy. *Fundamentals of short-range FM radar*. Artech House, 2003.

## ภาคผนวก ก.

## ทฤษฎีการซิงโครไนซ์

การซิงโครไนซ์นั้นมีพื้นฐานจากการตอบสนองของระบบการสั่นที่มีต่ออินพุตในรูปแบบที่ความถี่เอาต์พุตของระบบนั้นตรงกับความถี่อินพุต โดยการตอบสนองของระบบในกรณีที่อยู่ในรูปแบบที่อินพุตบังคับระบบ จะเรียกปรากฏการณ์ซิงโครไนซ์นี้ว่าการล็อก สำหรับในกรณีที่อินพุตเข้ามารบกวนระบบนั้น ปรากฏการณ์ซิงโครไนซ์ได้ถูกนิยามว่าเป็นปรากฏการณ์อินเจ็คชันล็อก นอกเหนือจากนี้ปรากฏการณ์ซิงโครไนซ์ในระบบการสั่นแบบไม่เชิงเส้นที่ถูกนิยามในรูปแบบการบังคับระบบนั้น ได้ถูกนิยามว่าเป็นปรากฏการณ์ออโตเมติกซิงโครไนซ์เซชัน (Automatic synchronization) ซึ่งสามารถกล่าวถึงรายละเอียดเชิงคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกันได้ดังต่อไปนี้

## ก.1 การวิเคราะห์ปรากฏการณ์การล็อกด้วยการสั่นบังคับแบบทั่วไป

จากที่ได้อธิบายถึงผลตอบสนองสมบูรณ์ของระบบการสั่นบังคับรูปแบบเชิงเส้นในบทที่ 2 ที่มีรูปแบบผลตอบสนองสมบูรณ์  $\varphi_c(t)$  ดัง (ก.1)

$$\varphi_c(t) = X_c \cos(\omega_0 t) - |H(\omega_i)|A_i \cos(\omega_0 t) + |H(\omega_i)|A_i \cos(\omega_i t) \quad (\text{ก.1})$$

โดยที่  $X_c$  คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้น  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของระบบ  $|H(\omega_i)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right|$  คือผลตอบสนองเชิงขนาดที่ระบบตอบสนองต่อความถี่อินพุต  $\omega_i$  และ  $A_i$  คือขนาดของสัญญาณอินพุต

เมื่อทำการจัดรูป (ก.1) ให้อยู่ในรูปแบบดัง (ก.2) และกระจายให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชัน  $\cos(\omega_0 t)$  และ  $\sin(\omega_0 t)$  โดยที่ฟังก์ชันทั้ง  $\cos(\omega_0 t)$  และ  $\sin(\omega_0 t)$  ถูกมองว่าเป็นเวกเตอร์ที่รวมกันอยู่ โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน  $\cos(\omega_0 t)$  นิยามให้เป็น  $\rho_x(t)$  และ  $\sin(\omega_0 t)$  นิยามให้เป็น  $\rho_y(t)$  มีรูปแบบสมการดัง (ก.3) และ (ก.4) ตามลำดับ

$$\varphi_c(t) = (X_c - |H(\omega_i)|A_i) \cos(\omega_0 t) + |H(\omega_i)|A_i \cos(\omega_0 t - (\omega_0 - \omega_i)t) \quad (\text{ก.2})$$

$$\rho_x(t) = (X_c - |H(\omega_i)|A_i) + |H(\omega_i)|A_i \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \quad (\text{ก.3})$$

$$\rho_y(t) = |H(\omega_i)|A_i \sin((\omega_0 - \omega_i)t) \quad (ก.4)$$

โดยเวกเตอร์ลัพธ์ที่เป็นผลตอบสนองสมบูรณ์อยู่ในรูปแบบดัง (ก.5)

$$\varphi_c(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (ก.5)$$

สำหรับ  $A(t)$  และ  $\phi(t)$  คือขนาดและเฟสที่หาได้จาก (ก.6) และ (ก.7) ตามลำดับ

$$A(t) = \sqrt{\rho_x^2(t) + \rho_y^2(t)} \quad (ก.6)$$

$$\phi(t) = \tan^{-1} \frac{\rho_y(t)}{\rho_x(t)} \quad (ก.7)$$

เมื่อแทนค่า (ก.3) และ (ก.4) ลงใน (ก.6) จึงได้

$$A(t) = \sqrt{\left( (X_c - |H(\omega_i)|A_i) + |H(\omega_i)|A_i \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \right)^2 + \left( |H(\omega_i)|A_i \sin((\omega_0 - \omega_i)t) \right)^2} \quad (ก.8)$$

หรือ

$$A^2(t) = \left( (X_c - |H(\omega_i)|A_i) + |H(\omega_i)|A_i \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \right)^2 + \left( |H(\omega_i)|A_i \sin((\omega_0 - \omega_i)t) \right)^2 \quad (ก.9)$$

เมื่อทำการคูณกระจายและจัดรูป (ก.9) จึงได้

$$\frac{A^2(t) - X_c^2 + 2(X_c - |H(\omega_i)|A_i)|H(\omega_i)|A_i}{2(X_c - |H(\omega_i)|A_i)|H(\omega_i)|A_i} = \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \quad (ก.10)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในกรณีที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องค่าความถี่  $\omega_0 - \omega_i$  นั้นมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้นเมื่อกำหนดให้  $\omega_0 - \omega_i = \theta$  โดยที่จากค่าสัมบูรณ์ของ  $|\cos \theta| \leq 1$  และจาก  $|H(\omega_i)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right|$  ดังนั้นหากความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบจนเกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้อง พจน์ที่ถูกคูณด้วย  $|H(\omega_i)|$  จะเด่นขึ้นมากกว่าพจน์อื่น ยกเว้นขนาดรวมของเอาต์พุต  $A(t)$  จึงสามารถประมาณค่า (ก.10) เป็นไปดังสมการ (ก.11)

$$\left| \frac{A^2(t) + 2(X_c - |H(\omega_i)|A_i)|H(\omega_i)|A_i}{2(X_c - |H(\omega_i)|A_i)|H(\omega_i)|A_i} \right| \leq 1 \quad (ก.11)$$

จาก (ก.11) จึงสามารถกล่าวได้ว่าค่าขนาด  $|A(t)| \leq 0$  ซึ่งตีความในเชิงทฤษฎีได้ว่าพลังงานของสัญญาณเอาต์พุตรวมของระบบเป็นไปตามกฎอนุรักษ์พลังงาน

สำหรับความถี่ของสัญญาณเอาต์พุตในกรณีที่เกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้องนั้นต้องมีค่าตรงกับความถี่อินพุต  $\omega_i$  จึงได้เงื่อนไขว่าการเปลี่ยนแปลงความถี่  $\omega_0 t + \phi(t)$  ต่อเวลาต้องมีค่าเท่ากับความถี่อินพุต ดังนั้นจึงสามารถแสดงเงื่อนไขเชิงเฟสของการสั่นพ้องเมื่อความถี่  $\omega_0 - \omega_i$  นั้นมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ เป็นไปดังสมการ (ก.12) ดังนั้นเมื่อแทนค่า (ก.3) และ (ก.4) ลงใน (ก.12) จึงได้สมการ (ก.13)

$$\omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + \frac{d}{dt} \tan^{-1} \frac{\rho_y}{\rho_x} = \omega_0 + \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho_y}{\rho_x}\right)^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho_y}{\rho_x}\right) = \omega_i \quad (ก.12)$$

$$\omega_0 + \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{(X_c - |H(\omega_i)|A_i) + |H(\omega_i)|A_i \cos((\omega_0 - \omega_i)t)}{(X_c - |H(\omega_i)|A_i) + |H(\omega_i)|A_i \cos((\omega_0 - \omega_i)t)} \right)}{1 + \left( \frac{(X_c - |H(\omega_i)|A_i) + |H(\omega_i)|A_i \cos((\omega_0 - \omega_i)t)}{(X_c - |H(\omega_i)|A_i) + |H(\omega_i)|A_i \cos((\omega_0 - \omega_i)t)} \right)^2} = \omega_i \quad (ก.13)$$

และทำการจัดรูปและคูณกระจายและอนุพันธ์สมการ (ก.13) จึงได้

$$\begin{aligned} & (X_c - |H(\omega_i)|A_i)^2 + (|H(\omega_i)|A_i)^2 \\ & = -3|H(\omega_i)|A_i(X_c - |H(\omega_i)|A_i) \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \\ & \quad - 2(|H(\omega_i)|A_i)^2 (\cos(2(\omega_0 - \omega_i)t)) \end{aligned} \quad (ก.14)$$

จาก  $|H(\omega_i)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right|$  ดังนั้นหากความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบจนเกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้อง พจน์ที่ถูกคูณด้วย  $|H(\omega_i)|$  จะเด่นขึ้นมากกว่าพจน์อื่น เมื่อใส่ค่าสมบรูณ์ทั้งสองข้างและจากค่าสัมบรูณ์ของ  $|\cos \theta| \leq 1$  จึงทำให้สามารถประมาณค่า (ก.14) และจัดรูปให้กลายเป็นสมการ (ก.15) ดังนี้

$$|2|H(\omega_i)|A_i - 2X_c| \leq ||H(\omega_i)|A_i - 3X_c| \quad (\text{ก.15})$$

เมื่อจัดรูป (ก.15) จึงได้เงื่อนไขเชิงเฟสของการสั่นพ้องเป็น

$$\left| \frac{X_c(\omega_0^2 - \omega_i^2)}{A_i} \right| \leq 1 \quad (\text{ก.16})$$

## ก.2 การวิเคราะห์ปรากฏการณ์การสั่นพ้องแบบซึมพาเทติกด้วยการสั่นบังคับหลายเวลา

สำหรับการหาเงื่อนไขการสั่นพ้องในแบบการสั่นบังคับหลายเวลานั้นหาได้จากวิธีการแบบเดียวกันกับการสั่นบังคับทั่วไป นั่นคือหาจากผลตอบสนองสมบรูณ์  $\varphi_c(t, \tau)$  เมื่อนิยามให้  $\tau \equiv t$  ดังสมการ (ก.17)

$$\varphi_c(t) = \begin{pmatrix} X_{c\tau} \cos(\omega_0 t) \\ -\frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \cos(\omega_0 t + \omega_i t) \\ -\frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \cos(\omega_0 t - \omega_i t) \\ + A_i |H(\omega_i)| \cos(\omega_i t) \end{pmatrix} \quad (\text{ก.17})$$

โดยที่  $X_{c\tau}$  คือค่าเงื่อนไขเริ่มต้น  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของระบบ  $|H(\omega)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right|$  คือผลตอบสนองเชิงขนาดที่ระบบตอบสนองต่อความถี่อินพุต  $\omega$  ใดๆ และ  $A_i$  คือขนาดของสัญญาณอินพุต

เมื่อทำการจัดรูป (ก.17) ให้อยู่ในรูปแบบดัง (ก.18) และกระจายให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชัน  $\cos(\omega_0 t)$  และ  $\sin(\omega_0 t)$  โดยที่ฟังก์ชันทั้ง  $\cos(\omega_0 t)$  และ  $\sin(\omega_0 t)$  ถูกมองว่าเป็นเวกเตอร์ที่รวมกันอยู่ โดยที่ค่าสัมประสิทธิ์หน้าฟังก์ชัน  $\cos(\omega_0 t)$  ที่นิยามให้เป็น  $\rho_x(t)$  และ  $\sin(\omega_0 t)$  ที่นิยามให้เป็น  $\rho_y(t)$  มีรูปแบบสมการดัง (ก.19) และ (ก.20) ตามลำดับ

$$\varphi_c(t) = \begin{pmatrix} X_{ct} \cos(\omega_0 t) \\ -\frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \cos(\omega_0 t + \omega_i t) \\ -\frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \cos(\omega_0 t - \omega_i t) \\ +A_i |H(\omega_i)| \cos(\omega_0 t - (\omega_0 - \omega_i)t) \end{pmatrix} \quad (ก.18)$$

$$\rho_x(t) = X_{ct} + A_i |H(\omega_i)| \cos((\omega_0 - \omega_i)t) - \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t) \quad (ก.19)$$

$$\rho_y(t) = A_i |H(\omega_i)| \sin((\omega_0 - \omega_i)t) + \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t) \quad (ก.20)$$

และเช่นเดียวกันกับการสันบับดับแบบทั่วไป เมื่อนำค่า  $\rho_x(t)$  และ  $\rho_y(t)$  มาหาแทนค่าใน (ก.6) เพื่อหาค่าขนาดจึงได้สมการ (ก.21) และเมื่อยกกำลังสองสมการ (ก.21) ทั้งสองข้างและจัดรูปจึงได้สมการ (ก.22)

$$A(t) = \sqrt{\left( \begin{array}{l} X_{ct} + A_i |H(\omega_i)| \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \\ -\frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t) \end{array} \right)^2 + \left( \begin{array}{l} A_i |H(\omega_i)| \sin((\omega_0 - \omega_i)t) \\ +\frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t) \end{array} \right)^2} \quad (ก.21)$$

$$\begin{aligned} A^2(t) &= X_{ct}^2 - \left( \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \right)^2 - \left( \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{A_i^2 |H(\omega_0 + \omega_i)| |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} - \frac{(A_i |H(\omega_i)|)^2}{2} \\ &= 2X_{ct} A_i |H(\omega_i)| \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \\ &\quad - A_i^2 |H(\omega_i)| \left( |H(\omega_0 + \omega_i)| + |H(\omega_0 - \omega_i)| \right) \cos((\omega_0 - 2\omega_i)t) \\ &\quad - X_{ct} A_i (|H(\omega_0 + \omega_i)| + |H(\omega_0 - \omega_i)|) \cos(\omega_i t) \end{aligned} \quad (ก.22)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จาก  $|H(\omega_i)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right|$  ดังนั้นหากความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบจนเกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้อง พจน์ที่ถูกคูณด้วย  $|H(\omega_i)|$  จะเด่นขึ้นมากกว่าพจน์อื่น ยกเว้นขนาดรวมของเอาต์พุต  $A(t)$  จึงสามารถประมาณค่า (ก.10) จึงสามารถประมาณค่า (ก.22) ได้ใหม่เป็น

$$\begin{aligned} A^2(t) &= \frac{(A_i |H(\omega_i)|)^2}{2} \\ &= 2X_{ct} A_i |H(\omega_i)| \cos((\omega_0 - \omega_i)t) \\ &\quad - A_i^2 |H(\omega_i)| \left( \frac{|H(\omega_0 + \omega_i)|}{-|H(\omega_0 - \omega_i)|} \right) (\cos((\omega_0 - 2\omega_i)t)) \end{aligned} \quad (ก.23)$$

จากค่าสัมบูรณ์ของ  $|\cos \theta| \leq 1$  สำหรับ  $\theta$  ใดๆ ดังนั้นเมื่อใส่ค่าสัมบูรณ์ทั้งสองข้างและหารด้วย  $A_i |H(\omega_i)|$  ตลอดสมการ (ก.23) จึงได้

$$\left| \frac{A^2(t)}{A_i |H(\omega_i)|} - \frac{A_i |H(\omega_i)|}{2} \right| \leq |2X_{ct} - A_i (|H(\omega_0 + \omega_i)| - |H(\omega_0 - \omega_i)|)| \quad (ก.24)$$

เนื่องจาก  $|H(\omega_i)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right|$  ดังนั้นพจน์  $\frac{A^2(t)}{A_i |H(\omega_i)|}$  จึงสามารถประมาณค่าให้มีค่าเป็นศูนย์ได้ในกรณีที่มีความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติ เมื่อทำการจัดรูปสมการ (ก.24) ใหม่ โดยแทนค่าผลตอบสนองเชิงขนาดที่ระบบตอบสนองต่อความถี่อินพุต  $\omega$  ใดๆ  $|H(\omega)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right|$  ลงไป จึงได้เงื่อนไขการสั่นพ้องที่ได้จากขนาดของสัญญาณเอาต์พุตเป็นไปดัง

$$\left| \frac{4X_{ct} \omega_i (\omega_0^2 - \omega_i^2) (4\omega_0^2 - \omega_i^2)}{A_i (8\omega_0 (\omega_0^2 - \omega_i^2) - \omega_i (4\omega_0^2 - \omega_i^2))} \right| \leq 1 \quad (ก.25)$$

สำหรับเงื่อนไขการสั่นพ้องเชิงเฟสต้องหากจากเงื่อนไขการเปลี่ยนแปลงความถี่ที่เกิดขึ้นต้องมีค่าเท่ากับค่าความถี่อินพุตในสำหรับปรากฏการณ์สั่นพ้อง ดังนั้นเมื่อแทนค่า  $\rho_x(t)$  และ  $\rho_y(t)$  ลงใน (ก.10) จึงได้สมการ (ก.26) โดยผลการคูณกระจายและอนุพันธ์สมการ (ก.26) นั้นเป็นไปดังสมการ (ก.27) และเนื่องจาก  $|H(\omega_i)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \right|$  ดังนั้นหากความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของระบบจนเกิดปรากฏการณ์การสั่นพ้อง พจน์ที่ถูกคูณด้วย  $|H(\omega_i)|$  จะเด่นขึ้นมากกว่าพจน์อื่น จึงสามารถประมาณค่าสมการ (ก.27) ได้ดังสมการ (ก.28) และจากค่าสัมบูรณ์ของ  $|\cos \theta| \leq 1$  ดังนั้นเมื่อจัดรูปสมการ (ก.28)

ด้วยการให้ค่าสมบูรณ์ทั้งสองข้างของสมการ และแทนค่าผลตอบสนองเชิงขนาด  $|H(\omega)| = \left| \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \right|$  ที่ระบบตอบสนองต่อความถี่อื่นพูด  $\omega$  ใดๆลงไป จึงสามารถหาเงื่อนไขการสั่นพ้องเชิงเฟสเป็นไปดังสมการ (ก.29)

$$\omega_o + \frac{\frac{d}{dt} \left( \frac{A_i |H(\omega_i)| \sin((\omega_0 - \omega_i)t) + \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t)}{X_{cr} + A_i |H(\omega_i)| \cos((\omega_0 - \omega_i)t) - \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t)} \right)}{2} = \omega_i \quad (\text{ก.26})$$

$$1 + \left( \frac{A_i |H(\omega_i)| \sin((\omega_0 - \omega_i)t) + \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \sin(\omega_i t)}{X_{cr} + A_i |H(\omega_i)| \cos((\omega_0 - \omega_i)t) - \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t) - \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \cos(\omega_i t)} \right)^2$$

$$(\omega_o - \omega_i) \left( X_{cr}^2 + \frac{(A_i |H(\omega_i)|)^2}{2} + \left( \frac{A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|}{2} \right)^2 + \frac{A_i^2 |H(\omega_0 + \omega_i)| |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} + \left( \frac{A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|}{2} \right)^2 \right)$$

$$= -3X_{cr} A_i |H(\omega_i)| (\omega_o - \omega_i) \cos((\omega_0 - \omega_i)t)$$

$$+ X_{cr} A_i |H(\omega_0 + \omega_i)| \left( \omega_o - \frac{3\omega_i}{2} \right) \cos(\omega_i t)$$

$$+ X_{cr} A_i |H(\omega_0 - \omega_i)| \left( \omega_o - \frac{\omega_i}{2} \right) \cos(\omega_i t)$$

$$+ A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_0 + \omega_i)| (\omega_o - \omega_i) (\cos((\omega_0 - 2\omega_i)t)) \quad (\text{ก.27})$$

$$+ A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_0 - \omega_i)| (\omega_o - \omega_i) (\cos((\omega_0 - 2\omega_i)t))$$

$$- (A_i |H(\omega_i)|)^2 (\omega_o - \omega_i) \cos(2(\omega_0 - \omega_i)t)$$

$$- \frac{A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_0 + \omega_i)| (2\omega_i - \omega_o)}{2} \cos(\omega_o t)$$

$$+ \frac{A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_0 - \omega_i)| \omega_o}{2} \cos(\omega_o t)$$

$$+ \frac{(A_i |H(\omega_0 + \omega_i)|)^2 \omega_i}{4} \cos(2\omega_i t)$$

$$- \frac{(A_i |H(\omega_0 - \omega_i)|)^2 \omega_i}{4} \cos(2\omega_i t)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

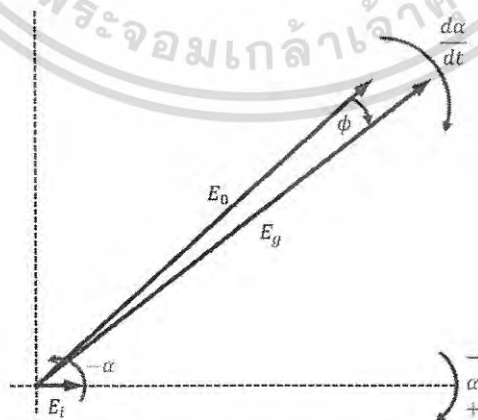
$$\begin{aligned}
 & (\omega_o - \omega_i) \left( \frac{(A_i |H(\omega_i)|)^2}{2} \right) \\
 & = -3X_{cr} A_i |H(\omega_i)| (\omega_o - \omega_i) \cos((\omega_o - \omega_i)t) \\
 & + A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_o + \omega_i)| (\omega_o - \omega_i) (\cos((\omega_o - 2\omega_i)t)) \\
 & + A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_o - \omega_i)| (\omega_o - \omega_i) (\cos((\omega_o - 2\omega_i)t)) \quad (ก.28) \\
 & - (A_i |H(\omega_i)|)^2 (\omega_o - \omega_i) \cos(2(\omega_o - \omega_i)t) \\
 & - \frac{A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_o + \omega_i)| (2\omega_i - \omega_o)}{2} \cos(\omega_o t) \\
 & + \frac{A_i^2 |H(\omega_i)| |H(\omega_o - \omega_i)| \omega_o}{2} \cos(\omega_o t)
 \end{aligned}$$

$$\frac{3X_{cr} \omega_i (\omega_o^2 - \omega_i^2) (4\omega_o^2 - \omega_i^2)}{A_i (\omega_o (6\omega_o^2 - 6\omega_o \omega_i + \omega_i^2) + \omega_i (-6\omega_o^2 - 6\omega_o \omega_i + 4\omega_i^2))} \leq 1 \quad (ก.29)$$

ก.3 ปราบปรามการอินเจ็คชั่นล็ค

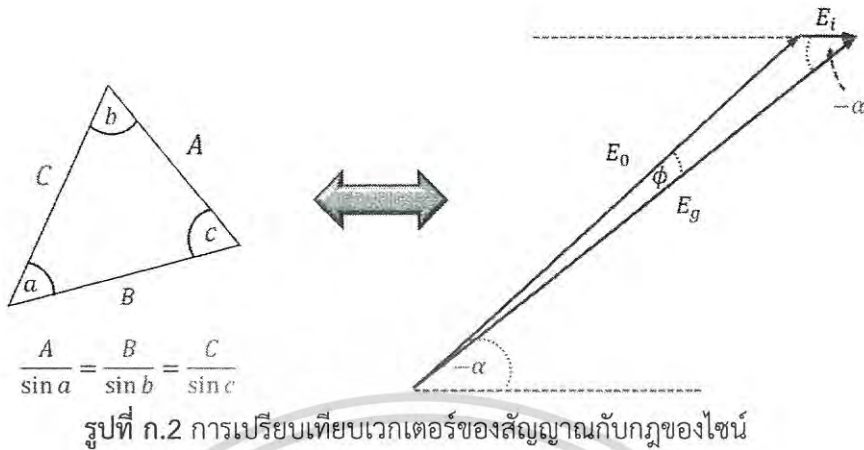
การอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นล็คนั้นเริ่มต้นด้วย Robert Adler [18] วิธีการเปลี่ยนมุมมองให้สัญญาณอินพุต  $E_i$  และสัญญาณที่ได้จากการเหนี่ยวนำจากเอาต์พุตของระบบ  $E_o$  รวมกันอยู่ในระบบพิกัดคาร์ทีเซียนให้เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว ที่ให้สัญญาณที่เป็นเวกเตอร์ลัพท์  $E_g$  ดังรูปที่ ก.1 และอาศัยกฎของไซน์ดังในรูปที่ ก.2 จึงทำให้สามารถเขียนเวกเตอร์  $E_o$  และ  $E_i$  กับมุม  $\alpha$  และ  $\phi$  ได้ดังสมการ (ก.30)

$$\frac{E_o}{\sin(-\alpha)} = \frac{E_i}{\sin(\phi)} \quad (ก.30)$$



รูปที่ ก.1 เฟสเซอร์ไดอะแกรม

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



และจากการประมาณค่าให้มุม  $\phi$  มีค่าน้อยมาก จึงสามารถเขียน (ก.30) ได้ให้เป็นไปดังสมการ (ก.31)

$$\phi = -\frac{E_i}{E_0} \sin(\alpha) \tag{ก.31}$$

และจากนิยามให้ภาคเรโซแนนซ์ของวงจรกำเนิดสัญญาณมีฟังก์ชันส่งผ่าน  $H_r(\omega)$  เป็นไปดังนี้

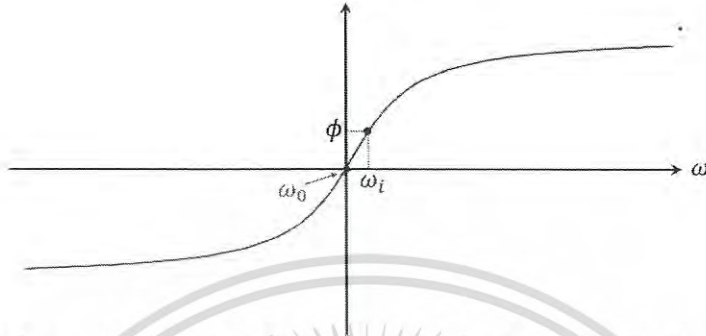
$$H_r(\omega) = \frac{H_0}{1 + j2Q \frac{\omega_i - \omega_0}{\omega_0}} \tag{ก.32}$$

เมื่อ  $H_0$  คือค่าคงที่  $Q$  คือตัวประกอบคุณภาพของวงจรเรโซแนนซ์ สำหรับ  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของวงจร และ  $\omega_i$  คือความถี่อินพุต จึงทำให้สามารถหาผลตอบสนองเชิงเฟส  $\angle H_r(\omega)$  ของวงจรเรโซแนนซ์ได้ดัง (ก.33)

$$\angle H_r(\omega) = \phi = \tan^{-1} 2Q \frac{\omega_i - \omega_0}{\omega_0} \tag{ก.33}$$

จึงทำให้สามารถแสดงกราฟความสัมพันธ์ผลตอบสนองเชิงเฟสของภาคเรโซแนนซ์ในวงจรกำเนิดสัญญาณ ดังรูปที่ ก.3 สังเกตได้ว่าย่านการตอบสนองเชิงเฟสของวงจรมีความเป็นเชิงเส้น ต่อเมื่อประมาณค่าให้  $\phi$  มีค่าน้อยมาก ดังนั้นจึงสามารถประมาณค่าสมการ (ก.33) ได้ใหม่ดังสมการ (ก.34)

$$\phi = 2Q \frac{\omega_i - \omega_0}{\omega_0} \tag{ก.34}$$



รูปที่ ก.3 ผลตอบสนองเชิงเฟสของภาคเรโซแนนซ์ในวงจรถูกกำเนิดสัญญาณ

และเมื่อให้สมการ (ก.31) และ (ก.34) เท่ากันจึงได้

$$\frac{2QE_0(\omega_0 - \omega_i)}{E_i\omega_0} = \sin(\alpha) \tag{ก.35}$$

จากเฟสเซอร์ไดอะแกรมในรูปที่ ก.1 จึงกล่าวได้ว่าหากเวกเตอร์สัญญาณทั้งสองนั้นเกิดการซิงโครไนซ์กัน ค่า  $\alpha$  ต้องเป็นค่าคงที่หรือ  $\frac{d\alpha}{dt} = 0$  นั่นเอง และด้วยเหตุนี้ค่า  $|\sin(\alpha)| \leq 1$  จึงได้เงื่อนไขการลอคเป็น

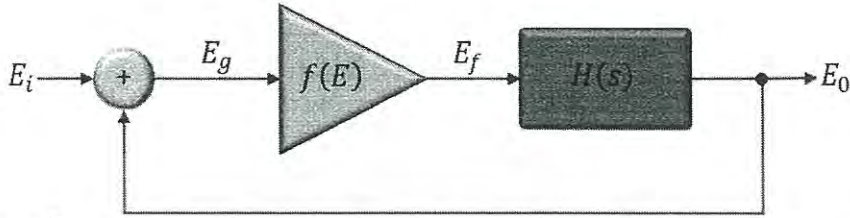
$$\left| \frac{2QE_0(\omega_0 - \omega_i)}{E_i\omega_0} \right| \leq 1 \tag{ก.36}$$

**ก.4 ปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชั่นลอค**

เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชั่นลอคนั้นต้องทำการเชื่อมโยงเข้ากับแผนภาพการป้อนกลับของ Paciorek ที่ใช้สำหรับอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคดังรูปที่ ก.4 โดยฟังก์ชัน  $f(E)$  คือภาคขยาย และฟังก์ชันส่งผ่าน  $H(s)$  คือภาคการเรโซแนนซ์ของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณตามลำดับ

โดยทั่วไปแล้วการอธิบายปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคนั้นต้องมีภาคขยายเป็นเชิงเส้น  $f(E) = aE$  สำหรับการอธิบายปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชั่นลอคจึงต้องนิยามภาคขยายให้อยู่ในรูปแบบไม่เป็นเชิงเส้นอนุกรมพหุนาม  $f(E) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} a_{\sigma}(E)^{\sigma}$  ดังนั้นหากกำหนดให้สัญญาณอินพุต  $E_i$  และสัญญาณเอาต์พุต  $E_o$  อยู่ในรูปแบบดังสมการ (ก.37) และ (ก.38) โดยที่  $\alpha = \omega_i t + \phi$  และ

$\beta = \omega_0 t$  สำหรับ  $\omega_i$  คือความถี่อินพุตที่เฟส  $\phi$  ใดๆ และ  $\omega_0$  คือความถี่เอาต์พุตของระบบตามลำดับ จึงสามารถนิยามภาคขยาย  $f(E)$  ให้เป็นฟังก์ชันคาบ  $g(\alpha)$  ดังสมการ (ก.39)



รูปที่ ก.4 โมเดลการป้อนกลับสำหรับปรากฏการณ์อินเจ็คชั่นลอคของ Paciorek

$$E_i = V_i \cos(\alpha) \tag{ก.37}$$

$$E_o = V_o \cos(\beta) \tag{ก.38}$$

$$g(\alpha) = f(E_o + V_i \cos(\alpha)) \tag{ก.39}$$

เมื่อ  $g(\alpha) = g(\alpha + 2\pi)$  และ  $g(\alpha) = g(-\alpha)$  จึงสามารถแทน  $g(\alpha)$  ในรูปแบบอนุกรมฟูเรียร์ได้ ดังนี้

$$g(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(\beta) \cos(m\alpha) \tag{ก.40}$$

โดยที่  $L_m(\beta)$  คือค่าสัมประสิทธิ์อนุกรมฟูเรียร์ของ  $g(\alpha)$  ซึ่งสามารถหาได้จาก

$$L_0(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(V_o \cos(\beta) + V_i \cos(\alpha)) d\alpha \tag{ก.41}$$

$$L_m(\beta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(V_o \cos(\beta) + V_i \cos(\alpha)) \cos(m\alpha) d\alpha \tag{ก.42}$$

สำหรับค่า  $L_m(\beta)$  เป็นจำนวนคู่และมีคาบที่  $2\pi$  จึงสามารถแทนค่า  $L_m(\beta)$  ในรูปแบบอนุกรมฟูเรียร์ได้ ดังสมการ (ก.43)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$L_m(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{m,n} \cos(n\beta) \quad (\text{ก.43})$$

โดยที่

$$K_{m,0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_m(\beta) d\beta \quad (\text{ก.44})$$

$$K_{m,n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} L_m(\beta) \cos(n\beta) d\beta \quad (\text{ก.45})$$

ดังนั้นหากแทนค่า  $L_m(\beta)$  ที่ได้จาก (ก.43) ลงในสมการ (ก.40) และแทน  $g(\alpha)$  ด้วย  $f(E_i + E_o)$  จึงได้

$$f(E_i + E_o) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} K_{m,n} \cos(m\alpha) \cos(n\beta) \quad (\text{ก.46})$$

โดยนิยามให้  $K_{m,n}$  เป็นค่าสัมประสิทธิ์อินเตอร์มอดูเลชัน จากรูปที่ ก.4 สังเกตได้ว่า  $f(E_i + E_o) = E_f$  และหากสมมติให้องค์ประกอบทางความถี่ที่อยู่ภายนอกย่าน  $\omega_0$  ถูกกรองออกไป ดังนั้นหากพิจารณาพจน์ที่เกิดอินเตอร์มอดูเลชันระหว่างความถี่  $\omega_0$  กับความถี่ซูเปอร์ฮาร์โมนิกที่  $N$  จึงได้พจน์อินเตอร์มอดูเลชันที่  $n = Nm \pm 1$  จึงได้สัญญาณเอาต์พุต  $E_f \omega_0$  ในย่าน  $\omega_0$  เป็นไปดัง

$$E_f \omega_0 = K_{0,1} \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{m, Nm \pm 1} \cos(\omega_0 t + m\phi) \quad (\text{ก.47})$$

เมื่ออาศัยการแปลงให้สัญญาณไซน์และโคไซน์ให้กลายเป็นฟังก์ชันไอเกน เมื่อนำสัญญาณใน (ก.47) ผ่านภาคเรโซแนนซ์  $H_r(\omega)$  ดังสมการ (ก.32) จึงได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$E_o = V_o e^{j\omega_o t} = \frac{H_o e^{j\omega_o t}}{1 + j2Q \frac{\omega_i - \omega_o}{\omega_o}} \left( K_{0,1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{m,Nm\pm 1} e^{jm\phi} \right) \quad (ก.48)$$

หรือ

$$V_o \left( 1 + j2Q \frac{\omega_i - \omega_o}{\omega_o} \right) = H_o \left( K_{0,1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{m,Nm\pm 1} e^{jm\phi} \right) \quad (ก.49)$$

จาก (ก.49) สามารถทำการแยกส่วนจริงและส่วนจินตภาพได้ดัง (ก.50) และ (ก.51) ตามลำดับ

$$V_o = H_o \left( K_{0,1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{m,Nm\pm 1} \cos(m\phi) \right) \quad (ก.50)$$

$$2V_o Q \frac{\omega_i - \omega_o}{\omega_o} = \frac{H_o}{2} \sum_{m=1}^{\infty} K_{m,Nm\pm 1} \sin(m\phi) \quad (ก.51)$$

โดยทั้งสมการ (ก.50) และ (ก.51) คือสมการพื้นฐานที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้อธิบายปรากฏการณ์ซูเปอร์ฮาร์โมนิกอินเจ็คชันล๊อคได้ ซึ่งสามารถยกตัวอย่างให้ภาคขยายมีความไม่เป็นเชิงเส้นอยู่ในอันดับที่สาม  $f(E) = a_0 + a_1 E + a_2 E^2 + a_3 E^3$  และพิจารณาที่ซูเปอร์ฮาร์โมนิกที่สอง  $N = 2$  จึงได้ว่า  $\frac{K_{1,2\pm 1}}{2V_i V_o} = a_2$  เมื่อพิจารณาค่าเหล่านี้ร่วมกับสมการ (ก.51) จึงได้

$$\frac{2Q \left( \frac{\omega_i}{2} - \omega_o \right)}{H_o V_i a_2 \omega_o} = \sin(\phi) \quad (ก.52)$$

จาก  $|\sin(\phi)| \leq 1$  จึงได้สมการเงื่อนไขการล๊อคที่ซูเปอร์ฮาร์โมนิกที่สองได้ดังสมการที่ (ก.52)

$$\left| \frac{2Q \left( \frac{\omega_i}{2} - \omega_o \right)}{H_o V_i a_2 \omega_o} \right| \leq 1 \quad (ก.53)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

### ก.5 ปรากฏการณ์ออตโตเมติกซิงโครไนซ์เซชัน

ในหัวข้อนี้เป็นการแสดงการนำเสนอวิธีการอธิบายปรากฏการณ์ออตโตเมติกซิงโครไนซ์เซชัน ซึ่งแนวคิดนี้ได้นำเสนอโดย Van der Pol [39] ที่มีการนำเสนอก่อนที่จะมีการแบ่งแยกระบบการสั่นโดย Andronov ดังนั้นมุมมองของ Van der Pol ในขณะนั้นคือการป้อนอินพุตเข้ามาบังคับระบบการสั่นแบบไม่เป็นเชิงเส้น และได้มีการนำแนวคิดนี้มาต่อยอดในทฤษฎีโกลาหล (Chaos theory)

ในขณะนั้น Van der Pol ได้นำเสนอสมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นที่ใช้สำหรับอธิบายการเคลื่อนที่ของดวงดาว (รายละเอียดในภาคผนวก ข. หัวข้อย่อยที่ ข.1) มาอธิบายวงจรกำเนิดสัญญาณที่มีความไม่เป็นเชิงเส้นจากอุปกรณ์ไตรโอด (Triode) ดังในสมการ (ก.54)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{d}{dt}(ax(t) - \gamma x^3(t)) + \omega_0^2 x(t) = \omega_i^2 E \sin(\omega_i t) \quad (\text{ก.54})$$

เมื่อ  $x(t)$  คือเอาต์พุตของวงจร  $\omega_0$  คือความถี่ธรรมชาติของวงจร  $\alpha$  และ  $\gamma$  คือค่าสัมประสิทธิ์ความไม่เป็นเชิงเส้นของวงจรที่ได้จากอุปกรณ์ไตรโอด สำหรับ  $E$  คือขนาดของสัญญาณอินพุตที่มีความถี่  $\omega_i$  จากการอาศัยเทคนิคการแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์ (รายละเอียดในภาคผนวก ข. หัวข้อย่อยที่ ข.1) จึงสมมุติค่าคำตอบเป็นไปดัง

$$x(t) = b_1(t) \sin(\omega_i t) + b_2(t) \cos(\omega_i t) \quad (\text{ก.55})$$

และกำหนดให้พารามิเตอร์ใน (ก.56) เป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาอย่างช้า

$$\begin{aligned} \frac{db_1(t)}{dt} &\ll \omega_i b_1(t) \\ \frac{db_2(t)}{dt} &\ll \omega_i b_2(t) \end{aligned} \quad (\text{ก.56})$$

เมื่อแทนค่าใน (ก.55) ลงใน (ก.54) และและอาศัยคุณสมบัติการตั้งฉากกันของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์โดยทำการเทียบค่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่ข้างหน้า  $\cos(\omega_i t)$  และ  $\sin(\omega_i t)$  ให้เท่ากันทั้งสองข้าง จึงได้สมการตั้ง (ก.57) และ (ก.58) ตามลำดับ

$$2 \frac{db_1(t)}{dt} + zb_2(t) - ab_1(t) \left(1 - \frac{b^2(t)}{a_0^2}\right) = 0 \quad (ก.57)$$

$$2 \frac{db_1(t)}{dt} - zb_1(t) - ab_2(t) \left(1 - \frac{b^2(t)}{a_0^2}\right) = \omega_i E \quad (ก.58)$$

โดยที่

$$\begin{aligned} b^2(t) &= b_1^2(t) + b_2^2(t) \\ z &= \frac{\omega_0^2 - \omega_i}{\omega_i} \approx 2(\omega_0 - \omega_i) \\ a_0^2 &= \frac{4\alpha}{3\gamma} \end{aligned} \quad (ก.59)$$

เมื่อพิจารณาสมการ (ก.57) และ (ก.58) ด้วยการประมาณค่าให้อยู่ในกรณีที่มีความเป็นเชิงเส้นด้วยการกำหนดให้  $\gamma = 0$  จึงสามารถแก้สมการหาค่า  $b_1(t)$  และ  $b_2(t)$  ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} b_1(t) &= e^{\frac{\alpha}{2}t} \left( C_1 \sin\left(\frac{z}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{z}{2}t\right) \right) - \frac{z\omega_i E}{z^2 + \alpha^2} \\ b_2(t) &= e^{\frac{\alpha}{2}t} \left( -C_1 \cos\left(\frac{z}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{z}{2}t\right) \right) - \frac{\alpha\omega_i E}{z^2 + \alpha^2} \end{aligned} \quad (ก.60)$$

โดยที่ค่า  $C_1$  และ  $C_2$  คือค่าเงื่อนไขขอบเขต เมื่อแทนค่าใน (ก.51) ลงใน (ก.46) จึงได้สัญญาณเอาต์พุตเป็นไปดังสมการ (ก.61)

$$x(t) = C_3 e^{\frac{\alpha}{2}t} \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\omega_i E}{\sqrt{(\omega_0 - \omega_i)^2 + \alpha^2}} \sin\left(\omega_i t + \tan^{-1} \frac{2\alpha}{\omega_0 - \omega_i}\right) \quad (ก.61)$$

สำหรับ  $C_3$  คือค่าเงื่อนไขขอบเขตที่ได้จากค่าเงื่อนไขขอบเขต  $C_1$  และ  $C_2$  สังเกตได้ว่าหากค่า  $\alpha = 0$  เมื่อความถี่อินพุตเข้าใกล้ความถี่ธรรมชาติของวงจร พจน์ที่สองทางขวามือของสมการ (ก.52) นั้นจะมีความเด่นชัดขึ้นมากกว่าพจน์แรกทางขวามือมาก ส่งผลให้ค่าความถี่ของเอาต์พุตนั้นประมาณค่าให้เท่ากับความถี่อินพุต ซึ่ง Van der Pol ได้นำเสนอว่านี่คือปรากฏการณ์ออโตเมตติคซิงโครไนซ์เซชัน

อย่างไรก็ตามหากพิจารณาคำตอบของ (ก.57) และ (ก.58) ในกรณีไม่เป็นเชิงเส้นโดยกำหนดให้ค่า  $\frac{db_1(t)}{dt} = \frac{db_2(t)}{dt} = 0$  จึงทำให้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$b^2(t) \left( z^2 + \alpha^2 \left( \frac{b^2(t)}{a_0^2} \right)^2 \right) = \omega_i^2 E^2 \quad (\text{ก.62})$$

จาก (ก.53) ทำให้สามารถหาค่าคำตอบของ  $b^2(t)$  ได้สามรูปแบบที่แตกต่างกันออกไป สังเกตได้ว่าแนวคิดที่ Van der Pol นำเสนอนั้นมีความยืดหยุ่นที่หลุดจากกรอบของพื้นฐานของระบบไม่เป็นเชิงเส้น แต่อย่างไรก็ตามสมการ (ก.53) นั้นสามารถตีความในเชิงฟิสิกส์ได้ว่าขนาดของสัญญาณที่มีความถี่เท่ากับความถี่อินพุตเท่านั้นที่ไม่แปรเปลี่ยนตามเวลาเนื่องจากค่า  $b_1(t)$  และ  $b_2(t)$  นั้นต้องเป็นค่าคงที่เพื่อให้ (ก.53) เป็นจริง ในขณะที่ขนาดของสัญญาณความถี่ธรรมชาติมีค่าแปรเปลี่ยนตามเวลาจนหายไปในที่สุด โดยค่าคำตอบที่มีเฉพาะพจน์ความถี่บังคับนี้มีความเสถียรก็ต่อเมื่อ

$$b^2 > \frac{1}{2} a_0^2 \quad (\text{ก.63})$$

$$\alpha^2 \left( 1 - \frac{3b^2}{a_0^2} \right) \left( 1 - \frac{b^2}{a_0^2} \right) + z^2 > 0$$

นอกเหนือจากนี้ Van der Pol ยังได้นำเสนอว่าหากสมมติค่าคำตอบของ (ก.54) ให้อยู่ในรูปแบบดังสมการ (ก.64)

$$x(t) = a \sin(\omega_0 t) + b \sin(\omega_i t) \quad (\text{ก.64})$$

เมื่อแทน (ก.64) ลงใน (ก.54) จึงได้

$$a \left( 1 - \frac{a^2 + 2b^2}{a_0^2} \right) = 0 \quad (\text{ก.65})$$

$$b^2 \left( z^2 + \alpha^2 \left( 1 - \frac{b^2 + 2a^2}{a_0^2} \right)^2 \right) = \omega_i^2 E^2 \quad (\text{ก.66})$$

จาก (ก.65) ส่งผลให้  $a = 0$  หรือ

$$1 - \frac{a^2 + 2b^2}{a_0^2} = 0 \quad (\text{ก.67})$$

ในกรณีที่  $a = 0$  นั้นหมายถึงว่าพจน์ความถี่ธรรมชาติของสัญญาณเอาต์พุตนั้นได้หายไปจนหลงเหลือแค่พจน์ที่มีความถี่ตรงกันกับสัญญาณอินพุตเท่านั้น อย่างไรก็ตามจาก (ก.67) จึงสามารถกล่าวได้ว่า  $a^2 = a_0^2 - 2b^2$  ส่งผลให้สามารถเขียน (ก.66) ได้ใหม่เป็น

$$b^2 \left( z^2 + a^2 \left( 1 - \frac{3b^2}{a_0^2} \right)^2 \right) = \omega_i^2 E^2 \quad (\text{ก.68})$$

ดังนั้นหากค่าขนาดของสัญญาณอินพุต  $E$  มีค่ามากขึ้นจนทำให้ค่า  $b^2 = \frac{a_0^2}{2}$  จะส่งผลให้ค่า  $a^2 = 0$  หรือกล่าวคือพจน์ความถี่ธรรมชาติของสัญญาณเอาต์พุตนั้นได้หายไปจนหลงเหลือแค่พจน์ที่มีความถี่ตรงกันกับสัญญาณอินพุตเช่นกัน จากจุดนี้เอง Van der Pol จึงเรียกปรากฏการณ์นี้ว่าปรากฏการณ์ออตเมติกซิงโครไนซ์เซชัน

ภาคผนวก ข.

ทฤษฎีการรบกวน

ทฤษฎีการรบกวนโดยพื้นฐานคือการประมาณค่า โดยให้ค่าคำตอบอยู่ในรูปแบบของอนุกรม แล้วแทนค่าลงไปในสมการหลัก ซึ่งจะได้สมการอนุพันธ์ที่คิดตามอันดับค่ากำลังของสัมประสิทธิ์ เพื่อความง่ายต่อการเข้าใจจึงยกตัวอย่างวิธีการหาคำตอบของสมการแวนเดอร์โพล (Van der Pol equation) ดังเช่น (ข.1)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = \varepsilon(1 - x^2(t)) \frac{dx(t)}{dt} \tag{ข.1}$$

หาก  $\varepsilon$  คือค่าสัมประสิทธิ์ที่มีค่าน้อย เมื่อประมาณค่าเป็นศูนย์ (ข.1) สามารถลดรูปเป็น

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + x(t) = 0 \tag{ข.2}$$

ที่มีคำตอบทั่วไป (General solution) เป็น

$$x(t) = a \cos(t + \varphi) \tag{ข.3}$$

โดยขนาด  $a$  และเฟส  $\varphi$  เป็นค่าคงที่ ในกรณีที่ไม่ประมาณค่าให้  $\varepsilon$  ที่มีค่าน้อยนี้เป็นศูนย์แต่ยังคงเป็นค่าที่มีขนาดเล็กมากอยู่ จึงกำหนดคำตอบโดยประมาณ (Approximation solution) เป็นไปดัง (ข.4)

$$x(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \tag{ข.4}$$

เมื่อแทน (ข.4) ลงใน (ข.1) และจัดอันดับเทียบค่าสัมประสิทธิ์ที่ค่ากำลังของ  $\varepsilon$  เท่ากัน จึงได้

$$\frac{d^2x_0(t)}{dt^2} + x_0(t) = 0 \tag{ข.5}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + x_1(t) = (1 - x_0^2(t)) \frac{dx_0(t)}{dt} \quad (\text{ข.6})$$

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + x_2(t) = (1 - x_0^2(t)) \frac{dx_1(t)}{dt} - 2x_0(t)x_1(t) \frac{dx_0(t)}{dt} \quad (\text{ข.7})$$

ทำการแก้สมการ (ข.5) จึงได้คำตอบที่มีรูปแบบคล้ายคลึงกับคำตอบทั่วไป (ข.3) เป็น

$$x_0(t) = a \cos(t + \varphi) \quad (\text{ข.8})$$

แทนคำตอบ  $x_0$  ใน (ข.8) ลงใน (ข.6) จึงได้

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + x_1(t) = -(1 - a^2 \cos^2(t + \varphi)) a \sin(t + \varphi) \quad (\text{ข.9})$$

จึงได้คำตอบเฉพาะ (Particular solution) เป็นไปดัง

$$x_1(t) = -\frac{a^3 - 4a}{8} \sin(t + \varphi) + \frac{a^3}{32} \sin(3(t + \varphi)) \quad (\text{ข.10})$$

จากคำตอบ  $x_0(t)$  และ  $x_1(t)$  ที่ได้ใน (ข.8) และ (ข.10) สามารถนำไปแทนใน (ข.7) เพื่อหาค่าคำตอบของ  $x_2(t)$  ได้เช่นเดียวกับที่แก้สมการ (ข.6) อย่างไรก็ตามวิธีการหาค่าคำตอบในทฤษฎีการรบกวนนั้นไม่ได้มีวิธีการแค่นี้ข้างต้น เนื่องจากระบบพลวัตที่พิจารณานั้นมีรูปแบบหลากหลาย ดังนั้นวิธีการหาค่าคำตอบที่นอกเหนือจากวิธีข้างต้นจึงถูกกล่าวในลำดับถัดไป

### ข.1 การแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์

การแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์ (Variation of parameters) คือวิธีการหาค่าคำตอบสมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไป ที่มีขอบเขตการใช้กว้างกว่าวิธีการสมมุติค่าคำตอบ เนื่องจากสามารถประยุกต์ใช้ได้กับสมการอนุพันธ์ที่ไม่เป็นเชิงเส้นได้ด้วย แนวคิดนี้ได้ถูกริเริ่มด้วย Leonhard Euler ในปี ค.ศ. 1748 ด้วยการศึกษากลศาสตร์ของวงโคจรดวงดาวที่มีการรบกวนซึ่งกันและกัน (Mutual perturbation) ระหว่างดาวพฤหัสบดีและดาวเสาร์ด้วยสมการอนุพันธ์ หลังจากนั้น Louis Lagrange ได้พัฒนาแนวคิดนี้ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้นในระหว่าง ค.ศ. 1778 ถึง 1783 สำหรับอธิบายวงโคจรของดวงดาวที่ถูกรบกวนด้วยดาวหาง และใน

ปี ค.ศ. 1808 ถึง 1810 แนวคิดการแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์ที่สมบูรณ์ได้ถูกพัฒนาขึ้นสำเร็จเพื่ออธิบายสมการระบบการเคลื่อนที่ของดวงดาวที่มีการเปลี่ยนแปลงเนื่องจากการรบกวน แนวคิดของเขาได้เริ่มจากการลดรูปสมการและหาคำคำตอบที่อยู่ในรูปแบบไม่ถูกรบกวนเสียก่อน (Unperturbed Solution) แล้วค่อยตั้งสมมุติฐานว่าการรบกวนทั้งหมดมาจากการดิ่งกันของแรงโน้มถ่วงจากปัจจัยภายนอกที่มากระทำกับระบบ เพื่อแสดงรายละเอียดของวิธีการนี้จึงยกตัวอย่างสมการอนุพันธ์ดัง (ข.11)

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p(x) \frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = R(x) \quad (\text{ข.11})$$

เพื่อหาคำตอบที่อยู่ในรูปแบบไม่ถูกรบกวนจึงต้องปรับ (ข.11) ให้อยู่ในรูปแบบสมการดัง (ข.12)

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + p(x) \frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = 0 \quad (\text{ข.12})$$

เมื่อทำการแก้สมการ (ข.12) รูปแบบคำตอบเป็นไปเช่น (ข.13)

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (\text{ข.13})$$

และทำการสมมุติว่าคำตอบเฉพาะ  $y_p(x)$  ของ (ข.11) นั้นมีพื้นฐานมาจาก  $y_1(x)$  และ  $y_2(x)$  ที่ได้จาก (ข.13) โดยเปลี่ยนค่าสัมประสิทธิ์  $c_1$  และ  $c_2$  ที่เป็นค่าคงที่ใน (ข.13) ให้กลายเป็นฟังก์ชันใดๆ  $c_1(x)$  และ  $c_2(x)$  ดังใน (ข.14)

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \quad (\text{ข.14})$$

เมื่อทำการอนุพันธ์ (ข.14) จึงได้

$$\frac{dy_p(x)}{dx} = c_1(x) \frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dc_1(x)}{dx} y_1(x) + c_2(x) \frac{dy_2(x)}{dx} + \frac{dc_2(x)}{dx} y_2(x) \quad (\text{ข.15})$$

โดยตั้งสมมุติฐานดัง (ข.16) เพื่อการแก้ไขสมการเป็นไปได้ง่ายขึ้น

$$\frac{dc_1(x)}{dx}y_1(x) + \frac{dc_2(x)}{dx}y_2(x) = 0 \quad (\text{ข.16})$$

ดังนั้นอนุพันธ์อันดับสองของ (ข.14) จึงเป็นไปดัง

$$\begin{aligned} \frac{d^2y_p(x)}{dx^2} &= c_1(x)\frac{d^2y_1(x)}{dx^2} + c_2(x)\frac{d^2y_2(x)}{dx^2} + \frac{dc_1(x)}{dx}\frac{dy_1(x)}{dx} \\ &\quad + \frac{dc_2(x)}{dx}\frac{dy_2(x)}{dx} \end{aligned} \quad (\text{ข.17})$$

เมื่อแทน (ข.14) ถึง (ข.17) ลงใน (ข.11) จึงได้

$$\frac{dc_1(x)}{dx}\frac{dy_1(x)}{dx} + \frac{dc_2(x)}{dx}\frac{dy_2(x)}{dx} = R(x) \quad (\text{ข.18})$$

เมื่อกำหนดให้รอนสเกียน (The Wronskian) เป็นไปดัง (ข.19) จึงได้ค่าอนุพันธ์ของ  $c_1(x)$  และ  $c_2(x)$  ดัง (ข.20) และ (ข.21) ตามลำดับ

$$W(x) = y_1(x)\frac{dy_2(x)}{dx} - \frac{dy_1(x)}{dx}y_2(x) \quad (\text{ข.19})$$

$$\frac{dc_1(x)}{dx} = \frac{-R(x)y_2(x)}{W(x)} \quad (\text{ข.20})$$

$$\frac{dc_2(x)}{dx} = \frac{R(x)y_1(x)}{W(x)} \quad (\text{ข.21})$$

ดังนั้นคำตอบเฉพาะจึงเป็นไปดัง (ข.22) ที่มีคำตอบสมบูรณ์ดัง (ข.23)

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{-R(x)y_2(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{R(x)y_1(x)}{W(x)} dx \quad (\text{ข.22})$$

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x) \quad (\text{ข.23})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากที่อธิบายในข้างต้น วิธีการแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์จึงมีข้อจำกัดใหญ่อยู่สองประการนั่นคือหนึ่ง จำเป็นต้องใช้ค่าคำตอบเพิ่มเติม (Complementary solution) หรือค่าคำตอบทั่วไปหรือคำตอบที่อยู่ในรูปแบบไม่ถูกรบกวน ข้อจำกัดข้อที่สองคือค่าพารามิเตอร์ที่แปรเปลี่ยนนั้นมักอยู่ในรูปแบบที่ต้องทำปริพันธ์ ซึ่งค่าพารามิเตอร์นี้อาจอยู่ในรูปแบบที่ยากต่อการทำปริพันธ์ โดยสามารถแสดงตัวอย่างการแก้ไขสมการอนุพันธ์เชิงเส้นด้วยสมการชโรดิงเจอร์ที่ถูกรบกวนขึ้นอยู่กับเวลา (Time-dependent Schrödinger equation) และสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นด้วยการวิเคราะห์เสถียรภาพของความไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear stability)

ข.1.1 สมการชโรดิงเจอร์ที่ถูกรบกวนขึ้นอยู่กับเวลา

รูปแบบสมการชโรดิงเจอร์ที่ถูกรบกวนขึ้นอยู่กับเวลานั้นเป็นไปดัง

$$\hat{H}_0\Psi(t) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = -\hat{H}_1\Psi(t) \tag{ข.24}$$

โดยที่  $\Psi(t)$  คือฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคที่พิจารณา  $\hbar$  คือค่าคงที่ของพลังค์  $\hat{H}_0$  คือตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ไม่ขึ้นกับเวลา และ  $\hat{H}_1$  คือตัวดำเนินการเชิงเส้นที่ขึ้นกับเวลา ในกรณีที่ฟังก์ชันคลื่นของอนุภาคไม่ถูกรบกวน จึงสามารถแสดงสมการได้เป็น

$$\hat{H}_0\Psi(t) + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = 0 \tag{ข.25}$$

โดยที่รูปแบบคำตอบเป็นไปดัง

$$\Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-i\omega_n t}, \omega_n = \frac{2\pi}{\hbar} E_n \tag{ข.26}$$

โดยที่  $a_n$  คือค่าคงที่ โดยที่  $u_n(x)$  คือฟังก์ชันไอเกนและ  $E_n$  คือค่าไอเกนของการกระทำกับตัวดำเนินการ ดังสมการ (ข.27)

$$\hat{H}_0 u(x) = E u(x) \tag{ข.27}$$

ภายใต้เงื่อนไขโฮโมจีเนียส (Homogeneous) ฟังก์ชันไอเกน  $u_n(x)$  ถูกสมมติให้มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติ (Orthonormal) ตลอดโดเมน  $D$

สำหรับค่าคำตอบของ (ข.24) ที่เป็นคำตอบในกรณีที่มีการรบกวนระบบ  $\Psi_p(t)$  นั้น มีรูปแบบที่คล้ายคลึงกับ (ข.26) ต่างกันที่ค่าคงที่  $a_n$  นั้นต้องเป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลา  $a_n(t)$  ดังเช่น (ข.28)

$$\Psi_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)u_n(x)e^{-i\omega_n t}, \omega_n = \frac{2\pi}{h}E_n \tag{ข.28}$$

เมื่อแทน (ข.28) ลงใน (ข.24) จึงได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(t)}{\partial t} u_n(x)e^{-i\omega_n t} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{H}_1(a_n(t)u_n(x)e^{-i\omega_n t}) \tag{ข.29}$$

ทำการคูณสมการ (ข.29) ด้วยฟังก์ชันสังยุค  $\tilde{u}_m(x)$  แล้วทำปริพันธ์ทั้งสมการในโดเมน  $D$  และอาศัยคุณสมบัติเชิงตั้งฉากปรกติของ  $u_n(x)$  จึงได้

$$\frac{\partial a_m(t)}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_m t} \hat{H}_{1mn} \tag{ข.30}$$

โดยที่

$$\hat{H}_{1mn} = \int_D \tilde{u}_m(x) \hat{H}_1(a_n(t)u_n(x)e^{-i\omega_n t}) dx \tag{ข.31}$$

ในกรณีที่ตัวดำเนินการ  $\hat{H}_1$  ไม่ได้มีการทำอนุพันธ์เทียบกับเวลาบรรจุอยู่ ดังนั้น (ข.30) จึงเป็น

$$\frac{\partial a_m(t)}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\omega_m t} \hat{H}_{1mn}^\dagger \tag{ข.32}$$

สำหรับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\omega_{mn} = \frac{2\pi i}{h} (E_m - E_n), \hat{H}_{1mn}^\dagger = \int_D \tilde{u}_m(x) \hat{H}_1(u_n(x)) dx \quad (ข.33)$$

เมื่อตัวดำเนินการรบกวน  $\hat{H}_1$  คือการรบกวนที่มีขนาดเล็ก จึงทำให้สามารถแสดง  $a_m(t)$  ในรูปแบบอนุกรมดังนี้

$$a_m(t) = a_{m0} + a_{m1}(t) + a_{m2}(t) + \dots \quad (ข.34)$$

โดยกำหนดให้  $a_{m0}$  คือค่าคงที่ที่มีค่าเท่ากับ  $a_m(t=0)$  และกำหนดให้  $a_{mn}(t) \ll a_{m(n-1)}(t)$  ดังนั้นการประมาณค่าอันดับที่หนึ่งของ  $a_m(t)$  จึงเป็นไปดัง

$$\frac{\partial a_{m1}(t)}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n0} e^{i\omega_{mnt}} \hat{H}_{1mn}^\dagger \quad (ข.35)$$

ถ้ากำหนดให้  $a_{n0} = \delta_{nk}$  ดังนั้น (ข.35) จึงกลายเป็น

$$\frac{\partial a_{m1}(t)}{\partial t} = -\frac{2\pi i}{h} e^{i\omega_{mkt}} \hat{H}_{1mk}^\dagger \quad (ข.36)$$

และกำหนดให้การรบกวนอยู่ในรูปแบบไซน์ซวยดอลดัง (ข.37)

$$\hat{H}_1 \Psi(t) = \Psi(t) f(x) \sin(\omega t) \quad (ข.37)$$

ดังนั้น

$$\hat{H}_{1mk}^\dagger = f_{mk}(x) \sin(\omega t) = -\frac{1}{2} i f_{mk}(x) (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \quad (ข.38)$$

$$f_{mk}(x) = \int_D \tilde{u}_m(x) f(x) u_k(x) dx \quad (ข.39)$$

เมื่อแทน (ข.38) และ (ข.39) ลงใน (ข.36) จึงได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$a_{m1}(t) = i \frac{\pi f_{mk}(x)}{h} \left( \frac{e^{i(\omega_{mk} + \omega)t} - 1}{\omega_{mk} + \omega} - \frac{e^{i(\omega_{mk} - \omega)t} - 1}{\omega_{mk} - \omega} \right), m \neq k \quad (ข.40)$$

**ข.1.2 การวิเคราะห์สเถียรภาพของความไม่เป็นเชิงเส้น**

แนวคิดการแปรเปลี่ยนพารามิเตอร์ที่อาศัยอนุกรมของฟังก์ชันโอเกนได้ถูกพัฒนาและประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางสำหรับการวิเคราะห์สเถียรภาพของความไม่เป็นเชิงเส้น โดยได้ยกตัวอย่างสมการ (ข.41) ในการวิเคราะห์

$$L(\phi(t)) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = F(\phi(t)) \quad (ข.41)$$

โดยที่  $L$  คือตัวดำเนินการเชิงเส้น และ  $F$  คือตัวดำเนินการไม่เป็นเชิงเส้น เมื่อสมมติให้  $L$  ขึ้นอยู่กับตัวแปรตำแหน่ง  $x$  ด้วย  $0 \leq x \leq 1$  และให้  $\phi(t)$  สอดคล้องกับเงื่อนไขขอบเขตโฮโมจีเนียสเชิงเส้นดังสมการ (ข.42)

$$\begin{aligned} B_1(\phi(t)) &= 0; x = 0 \\ B_2(\phi(t)) &= 0; x = 1 \end{aligned} \quad (ข.42)$$

ดังนั้นจึงสามารถเขียนสมการเชิงเส้นของ (ข.41) ได้ดังนี้

$$L(\phi(t)) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (ข.43)$$

จากเงื่อนไขขอบเขตใน (ข.42) จึงได้รูปแบบของคำตอบทั่วไปดังสมการ (ข.44) จึงทำให้สามารถจัดรูปสมการ (ข.43) ได้ใหม่ดัง (ข.45) ภายใต้เงื่อนไขขอบเขต (ข.46)

$$\phi(t) = u(x)e^{-\lambda t} \quad (ข.44)$$

$$L(u(x)) - \lambda u(x) = 0 \quad (ข.45)$$

$$\begin{aligned} B_1(u(x)) &= 0; x = 0 \\ B_2(u(x)) &= 0; x = 1 \end{aligned} \quad (\text{ข.46})$$

เมื่อสมมุติให้สมการ (ข.45) ภายใต้ขอบเขต (ข.46) มีค่าไอเกน  $\lambda_n$  อยู่ในเซตดีนูเมอเรเบิล (Denumerable set) หรือเซตอนันต์นับได้ ที่เป็นได้ทั้งค่าจริงและค่าจินตภาพที่สอดคล้องกับฟังก์ชันไอเกน  $u_n(x)$  โดยที่ค่าไอเกนถูกสมมุติให้มีค่าที่แตกต่างกันในแต่ละอันดับเช่นจำนวนจริง  $\lambda_n > \lambda_{n-1}$  เป็นต้น และสมมุติให้  $L$  คือตัวดำเนินการแบบผูกพันในตัวเอง (Self-adjoint operator) ส่งผลให้ฟังก์ชันไอเกน  $u_n$  มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากที่สามารถนอร์มอลไลซ์ (Normalize) ได้ดัง

$$\int_0^1 u_n(x) \bar{u}_m(x) dx = \delta_{mn} \quad (\text{ข.47})$$

ดังนั้นคำตอบทั่วไปจึงมีรูปแบบดัง (ข.48)

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x) e^{-\lambda_n t} \quad (\text{ข.48})$$

โดยที่  $a_n$  คือค่าคงที่ที่สามารถพิจารณาได้จากเงื่อนไขเริ่มต้น และจากคำตอบทั่วไปที่ได้จากสมการเชิงเส้น จึงสมมุติคำตอบเฉพาะ  $\phi_p(t)$  สำหรับสมการไม่เป็นเชิงเส้นด้วยการนิยามค่าคงที่  $a_n$  ให้เป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาดังสมการ (ข.49)

$$\phi_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \quad (\text{ข.49})$$

เมื่อ  $A_n(t) = a_n e^{-\lambda_n t}$  และแทน (ข.49) ลงใน (ข.41) จึงได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) L(u_n(x)) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial A_n(t)}{\partial t} u_n(x) = F \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right) \quad (\text{ข.50})$$

นิยามให้ตัวดำเนินการ  $L(u_n(x)) = -\lambda_n u_n(x)$  จึงจัดรูป (ข.50) ได้ใหม่

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial A_n(t)}{\partial t} + \lambda_n A_n(t) \right) u_n(x) = F \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right) \quad (ข.51)$$

ทำการคูณสมการ (ข.51) ด้วยฟังก์ชันสังยุค  $\bar{u}_m(x)$  แล้วทำปริพันธ์ทั้งสมการจาก  $x = 0$  ถึง  $x = 1$  และอาศัยเงื่อนไขตั้งฉากปกติตั้งใน (ข.47) จึงได้

$$\frac{\partial A_m(t)}{\partial t} + \lambda_m A_m(t) = - \int_0^1 F \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right) \bar{u}_m(x) dx; \quad m = 1, 2, \dots \quad (ข.52)$$

สำหรับกรณีนี้  $L$  ไม่ใช่ตัวดำเนินการแบบผูกพันในตัว ฟังก์ชันไอเกน  $u_n(x)$  ต้องไม่มีคุณสมบัติเชิงตั้งฉากร่วม แต่อย่างไรก็ตามยังคงสามารถนิยามตัวดำเนินการแบบผูกพันในตัว  $M$  ด้วย

$$\Psi_1(x)L(\Psi_2(x)) - \Psi_2(x)M(\Psi_1(x)) = \frac{d}{dx} (P(\Psi_1(x), \Psi_2(x))) \quad (ข.53)$$

เมื่อ  $\Psi_1(x)$  และ  $\Psi_2(x)$  คือเป็นฟังก์ชันของ  $x$  และ  $P$  คือฟังก์ชันที่มีรูปแบบเชิงเส้นคู่ (Bilinear form) ด้วยการนิยามนี้ส่งผลให้สามารถเขียนสมการแบบผูกพันได้ดัง (ข.54)

$$M\bar{u}(x) + \lambda\bar{u}(x) = 0 \quad (ข.54)$$

และเมื่อเลือกเงื่อนไขขอบเขตให้  $P(u(x), \bar{u}(x))$  ถูกหักล้างได้ทั้ง  $x = 0$  และ  $x = 1$  ทำให้  $u(x)$  และ  $\bar{u}(x)$  นั้นตั้งฉากต่อกัน จึงทำให้สามารถนอร์มอลไลซ์ได้ดังเช่น (ข.55)

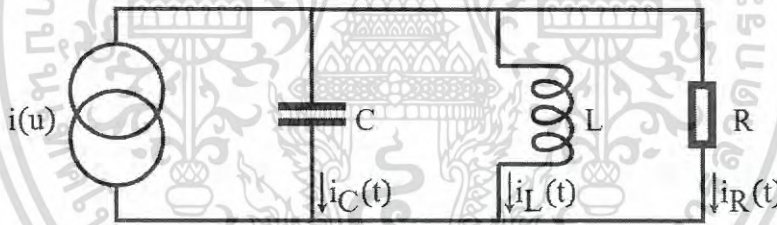
$$\int_0^1 u_n(x)\bar{u}_m(x)dx = \delta_{mn} \quad (ข.55)$$

จากข้างต้นทำให้การวิเคราะห์ในกรณีนี้สามารถวิเคราะห์ในรูปแบบเดียวกับกรณีแบบผูกพันในตัวด้วยการแทน  $\bar{u}_m(x)$  ด้วย  $\bar{u}_m(x)$  จึงทำให้จัดรูป (ข.52) ได้ใหม่ดังเช่น

$$\frac{\partial A_m(t)}{\partial t} + \lambda_m A_m(t) = - \int_0^1 F \left( \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_n(x) \right) \tilde{u}_m(x) dx \quad (ข.56)$$

**ข.2 วิธีการเฉลี่ยในทฤษฎีการรบกวน**

วิธีการเฉลี่ยในทฤษฎีการรบกวน (The method of averaging) เป็นหนึ่งในเทคนิคทางคณิตศาสตร์ของทฤษฎีการรบกวนที่ใช้สำหรับหาคำคำตอบของระบบพลวัตที่มีลักษณะตัวแปรหนึ่งในระบบที่มีพลวัตแบบคาบที่มีความถี่มากกว่าตัวแปรอีกตัวหนึ่งอย่างมาก หรือกล่าวได้อีกนัยหนึ่งคือระบบการสั่นที่มีตัวแปรอื่นในระบบที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้า แนวคิดพื้นฐานของเทคนิคนี้ได้เริ่มต้นในปี ค.ศ. 1788 โดย Lagrange หลังจากวิธีการการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์เพียงไม่กี่ปี โดย Lagrange ได้ตั้งระบบสมการเพื่อพิจารณาปัญหาวัตถุสามชิ้น (Three-body problem) ในรูปแบบของปัญหาวัตถุสองชิ้น (Two-body problem) ที่ถูกรบกวนภายใต้แรงโน้มถ่วง หลังจากนั้นแนวคิดนี้ได้ถูกพัฒนาเพื่อวิเคราะห์อย่างเป็นระบบจนกลายเป็นแนวคิดพื้นฐานของการวิเคราะห์ระบบการสั่นแบบไม่เป็นเชิงเส้นที่สามารถนำมาใช้กับการวิเคราะห์วงจรถูกกำเนิดสัญญาณทางไฟฟ้าได้ในปัจจุบัน เพื่อแสดงถึงความไม่เป็นเชิงเส้นของวงจรถูกกำเนิดสัญญาณไฟฟ้า จากตัวอย่างการสั่นตนเองในรูปที่ ข.1



รูปที่ ข.1 วงจรการสั่นตนเองตัวอย่าง

หากกำหนดให้ฟังก์ชัน  $i(u) = u^3$  และ  $\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  ส่งผลให้สมการอนุพันธ์ที่ใช้สำหรับอธิบายพลวัตของระบบต้องเป็นไปตาม (ข.57)

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = \frac{1}{RC} (3Ru^2 - 1) \frac{du(t)}{dt} \quad (ข.57)$$

ซึ่งตรงกับรูปแบบของสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นชนิดอ่อน (Weakly nonlinear differential equation) ในสมการ (ข.58) โดยวิธีการหาคำคำตอบของสมการอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นที่มีรูปแบบดัง (ข.58) ต้องอาศัย

วิธีการเฉลี่ยร่วมกับวิธีการเปลี่ยนแปลงพารามิเตอร์ โดยวิธีการนี้ได้มีเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลายที่สามารถแสดงรายละเอียดได้ดังต่อไปนี้

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + u(t) = \varepsilon f\left(u, \frac{du(t)}{dt}\right) \tag{ข.58}$$

**ข.2.1 วิธีแบบแวนเดอร์โพล**

วิธีแบบแวนเดอร์โพล (Van der pol method) หรืออีกชื่อหนึ่งคือเทคนิคการเปลี่ยนแปลงขนาดอย่างช้า (Slowly varying amplitude technique) ถูกพัฒนาจาก Balthasar van der Pol แนวคิดหลักนั้นมาจากการนิยามว่าขนาด  $A(t)$  ของสัญญาณ  $\psi(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t))$  ซึ่งถูกผลิตออกมาจากระบบการสั่นนั้น มีการเปลี่ยนแปลงอย่างช้าเมื่อเทียบกับคาบของสัญญาณธรรมชาติ  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  ที่ถูกผลิตจากระบบหนึ่งคาบ ( $\frac{da(t)}{dt} \ll T_0$ ) โดยสามารถยกตัวอย่างการใช้วิธีแบบแวนเดอร์โพลด้วยสมการออสซิลเลเตอร์ของแวนเดอร์โพล (Van der Pol's oscillator) ที่มีรูปแบบดังนี้

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = \varepsilon(1 - u^2(t)) \frac{du(t)}{dt} \tag{ข.59}$$

เมื่อค่า  $\varepsilon$  มีขนาดเล็ก โดยคำตอบทั่วไปของ (ข.59) ถูกกำหนดให้อยู่ในรูปแบบ

$$u(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \tag{ข.60}$$

โดยนิยามว่า  $a(t)$  คือฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาอย่างช้า ซึ่งมีค่าน้อยอยู่ในอันดับเดียวกับ  $\varepsilon$  เมื่อทำการอนุพันธ์เทียบเวลาเช่น  $\frac{da(t)}{dt} \approx \varepsilon$  และ  $\frac{d^2a(t)}{dt^2} \approx \varepsilon^2$  เมื่อทำอนุพันธ์ (ข.60) ทั้งอันดับหนึ่งและสอง จึงได้ (ข.61) และ (ข.62) ตามลำดับ เมื่อแทนค่า (ข.60) ถึง (ข.62) ลงใน (ข.59) และประมาณค่าอันดับที่สูงกว่า  $O(\varepsilon^2)$  ทั้ง และอาศัยคุณสมบัติการตั้งฉากกันของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์โดยทำการเทียบค่าสัมประสิทธิ์ที่อยู่ข้างหน้า  $\cos(\omega_0 t + \phi(t))$  และ  $\sin(\omega_0 t + \phi(t))$  ให้เท่ากันทั้งสองข้าง จึงได้สมการตั้ง (ข.63) และ (ข.64)

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} \cos(\omega_0 t + \phi(t)) - \left(\omega_0 + \frac{d\phi(t)}{dt}\right) a(t) \sin(\omega_0 t + \phi(t)) \tag{ข.61}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(t)}{dt^2} &= \frac{d^2a(t)}{dt^2} \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) - 2 \frac{da(t)}{dt} \left( \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \\ &- \left( \omega_0 + \frac{d\varphi(t)}{dt} \right)^2 a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) - 2a(t) \left( \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} \right) \sin(\omega_0 t + \varphi(t)) \end{aligned} \quad (ข.62)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 0 \quad (ข.63)$$

$$2 \frac{da(t)}{dt} \omega_0 + \varepsilon \omega_0 a(t) \left( \frac{3(a(t))^2}{4} + \frac{(a(t))^2 \sin(3(\omega_0 t + \varphi(t)))}{4 \sin(\omega_0 t + \varphi(t))} - 1 \right) = 0 \quad (ข.64)$$

ดังนั้นค่าผลคำตอบสามารถหาได้จากการปริพันธ์สมการ (ข.63) และ (ข.64) เพื่อหาค่าขนาด  $a(t)$  และเฟส  $\varphi(t)$  แล้วนำไปแทนใน (ข.60) จึงได้คำตอบของระบบนี้อย่างสมบูรณ์

### ข.2.2 วิธีแบบไครลอฟและโบโกลูว์บอฟ

วิธีแบบไครลอฟและโบโกลูว์บอฟ (The Krylov-Bogoliubov technique) เป็นวิธีการที่นำมาใช้ได้กับสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นชนิดอ่อน (ข.65) ด้วยการตั้งคำตอบทั่วไปดัง (ข.66) เมื่อให้  $\alpha$  และ  $\theta$  เป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาภายใต้เงื่อนไข (ข.67)

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u = \varepsilon f \left( u(t), \frac{du(t)}{dt} \right) \quad (ข.65)$$

$$u(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \theta(t)) \quad (ข.66)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = -a(t)\omega_0 \sin(\phi(t)), \phi(t) = \omega_0 t + \theta(t) \quad (ข.67)$$

เมื่อทำอนุพันธ์อันดับหนึ่งกับสมการ (ข.66) จึงได้

$$\frac{du(t)}{dt} = -a(t)\omega_0 \sin(\phi(t)) + \frac{da(t)}{dt} \cos(\phi(t)) - a \frac{d\theta(t)}{dt} \sin(\phi(t)) \quad (ข.68)$$

เพื่อให้ (ข.68) สอดคล้องกับ (ข.67) จึงต้องกำหนดให้

$$\frac{da(t)}{dt} \cos(\phi(t)) - a \frac{d\theta(t)}{dt} \sin(\phi(t)) = 0 \quad (ข.69)$$

หากนำ (ข.67) มาอนุพันธ์อีกครั้งหนึ่ง จึงได้

$$\begin{aligned} \frac{d^2u(t)}{dt^2} = & -a(t)\omega_0^2 \cos(\phi(t)) - \omega_0 \frac{da(t)}{dt} \sin(\phi(t)) \\ & - a(t)\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} \cos(\phi(t)) \end{aligned} \quad (ข.70)$$

เมื่อแทน (ข.66) (ข.67) และ (ข.70) ลงใน (ข.65) จึงสามารถจัดรูป (ข.65) ได้ใหม่เป็นไปดัง (ข.71)

$$\begin{aligned} & \omega_0 \frac{da(t)}{dt} \sin(\phi(t)) + a(t)\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} \cos(\phi(t)) \\ = & -\varepsilon f(a(t) \cos(\phi(t)), -a(t)\omega_0 \sin(\phi(t))) \end{aligned} \quad (ข.71)$$

ในกรณีที่นำเงื่อนไขใน (ข.69) มารวมกันกับการแก้สมการ (ข.71) จึงได้ค่า  $\frac{da(t)}{dt}$  และ  $\frac{d\theta(t)}{dt}$  เป็นไปตาม (ข.72) และ (ข.73) ตามลำดับ

$$\frac{da(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} \sin(\phi(t)) f(a(t) \cos(\phi(t)), -a(t)\omega_0 \sin(\phi(t))) \quad (ข.72)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a(t)\omega_0} \cos(\phi(t)) f(a(t) \cos(\phi(t)), -a(t)\omega_0 \sin(\phi(t))) \quad (ข.73)$$

ดังนั้นจึงสามารถหาค่าขนาดและเฟสได้จาก (ข.72) และ (ข.73) ตามลำดับ

อย่างไรก็ตามสังเกตได้ว่าพจน์ทางด้านขวาของ (ข.72) และ (ข.73) เป็นฟังก์ชันคาบที่ขึ้นอยู่กับ  $\phi(t)$  หากนิยามให้  $\frac{da(t)}{dt} = O(\varepsilon)$  และ  $\frac{d\theta(t)}{dt} = O(\varepsilon)$  ดังนั้น  $a(t)$  และ  $\theta(t)$  จึงกลายเป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาอย่างช้าๆที่มีความคล้ายคลึงกับวิธีแบบวนเดออร์โพล จาก  $\varepsilon$  มีค่าน้อย จึงทำให้ค่า  $a(t)$  และ  $\theta(t)$  จึงมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมากที่เวลา  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  (สำหรับพจน์ที่อยู่ด้านขวาของ (ข.72) และ (ข.73)) เมื่อทำการเฉลี่ย (ข.72) และ (ข.73) บนช่วง  $[t, t + T]$  ส่งผลให้ค่า  $a(t)$  และ  $\theta(t)$  ทางขวามือของทั้ง (ข.72) และ (ข.73) ประมาณได้ว่าเป็นค่าคงที่ จึงจัดรูป (ข.72) และ (ข.73) ได้ใหม่เป็น

$$\frac{da(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega_0} f_1(a(t)) \tag{ข.74}$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a(t)\omega_0} g_1(a(t)) \tag{ข.75}$$

โดยที่

$$f_1(a(t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\phi(t)) f(a(t) \cos(\phi(t)), -a(t)\omega_0 \sin(\phi(t))) d\phi \tag{ข.76}$$

$$g_1(a(t)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\phi(t)) f(a(t) \cos(\phi(t)), -a(t)\omega_0 \sin(\phi(t))) d\phi \tag{ข.77}$$

จากวิธีการแบบโครลอฟ-โบโกลูว์บอฟในข้างต้น สามารถนำมาประยุกต์ใช้กับสมการดัฟฟิง (Duffing equation) และสมการแวนเดอร์โพล (Van der Pol equation) ได้โดยยกตัวอย่างดังต่อไปนี้

1. สมการดัฟฟิง

สมการดัฟฟิงมีรูปแบบดังต่อไปนี้

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = -\varepsilon u^3(t) \tag{ข.78}$$

เมื่อเทียบ (ข.78) เข้ากับ (ข.65) จึงได้ว่า  $f(u(t), \frac{du(t)}{dt}) = u^3(t)$  ดังนั้นจึงได้  $f_1(a) = 0$  และ  $g_1(a) = -\frac{3}{4}a^3$  เมื่อพิจารณาพร้อมกับ (ข.74) จึงได้ว่าค่า  $a$  เป็นค่าคงที่และเมื่อพิจารณา  $g_1(a(t))$  ร่วมกับ (ข.75) จึงได้

$$\theta(t) = \frac{3}{4}\varepsilon \frac{a^2}{\omega_0} t + \theta_0 \tag{ข.79}$$

ดังนั้นผลคำตอบที่ประมาณค่าอันดับที่หนึ่งจึงเป็นไปดัง (ข.22)

$$u(t) = a \cos \left( \omega_0 t + \frac{3}{4} \varepsilon \frac{a^2}{\omega_0} t + \theta_0 \right) + O(\varepsilon) \quad (\text{ข.80})$$

2. สมการแวนเดอร์โพล

เมื่อเทียบสมการออสซิลเลเตอร์แวนเดอร์โพล (ข.59) เข้ากับ (ข.65) จึงได้ค่า  $f \left( u(t), \frac{du(t)}{dt} \right)$  เป็นไปดัง (ข.81) จึงได้  $f_1(a(t))$  และ  $g_1(a(t))$  เป็นไปดัง (ข.82)

$$f \left( u(t), \frac{du(t)}{dt} \right) = (1 - u^2(t)) \frac{du(t)}{dt} \quad (\text{ข.81})$$

$$f_1(a(t)) = -\omega_0 a(t) \left( 1 - \frac{1}{4} a^2(t) \right), g_1(a(t)) = 0 \quad (\text{ข.82})$$

เมื่อพิจารณา (ข.82) ร่วมกับ (ข.74) และ (ข.75) จึงได้ว่าค่าเฟส  $\theta$  จึงเป็นค่าคงที่ และค่าขนาด  $a(t)$  สามารถแสดงได้ดัง (ข.83)

$$\frac{da(t)}{dt} = \frac{\varepsilon a(t)}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} a^2(t) \right) \quad (\text{ข.83})$$

ข.2.3 วิธีแบบสตรูเบิล

วิธีแบบสตรูเบิล (Struble's technique) เป็นวิธีการที่นำมาใช้ได้กับสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นชนิดอ่อนที่มีรูปแบบดัง (ข.65) เช่นเดียวกัน วิธีการนี้ได้ตั้งค่าคำตอบทั่วไปดัง (ข.84) โดยให้  $\varepsilon$  เป็นค่าขนาดเล็ก

$$u(t) = a(t) \cos(\omega_0 t - \theta(t)) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n u_n(t) + O(\varepsilon^{N+1}) \quad (\text{ข.84})$$

เมื่อ  $a(t)$  และ  $\theta(t)$  คือฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาอย่างช้า สันเกตได้ว่าถ้ากำหนดให้  $u_n(t) = 0$  สมการ (ข.84) จึงถูกลดรูปลงจนคล้ายคลึงกับการตั้งคำตอบของวิธีแบบโครลอฟและโบโกลูว์บอฟ เมื่อนำวิธีการนี้มาประยุกต์ใช้กับสมการดัดพิงดัง (ข.78) โดยแทนค่าคำตอบใน (ข.84) ลงไป จึงได้

$$\begin{aligned}
 & \left( 2a(t)\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{d^2a(t)}{dt^2} - a(t) \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 \right) \cos(\omega_0 t - \theta(t)) \\
 & + \left( -2\omega_0 \frac{da(t)}{dt} + a(t) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \right. \\
 & \left. + 2 \frac{da(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} \right) \sin(\omega_0 t - \theta(t)) + \varepsilon \left( \frac{d^2u_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_1(t) \right) \quad (\text{ข.85}) \\
 & + \varepsilon^2 \left( \frac{d^2u_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_2(t) \right) + \dots \\
 & = -\varepsilon a^3(t) \cos^3(\omega_0 t - \theta(t)) \\
 & - 3\varepsilon^2 u_1(t) a^2(t) \cos^2(\omega_0 t - \theta(t)) + \dots
 \end{aligned}$$

หากพิจารณาข้ามพจน์  $O(\varepsilon)$  ขึ้นไปและให้สัมประสิทธิ์ทั้งสองข้างของ  $\cos(\omega_0 t - \theta(t))$  และ  $\sin(\omega_0 t - \theta(t))$  เท่ากัน จึงได้สมการแปรเปลี่ยน (Variation equation) สองสมการดังนี้

$$2a(t)\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{d^2a(t)}{dt^2} - a(t) \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 = \frac{3}{4} \varepsilon a^3(t) \quad (\text{ข.86})$$

$$-2\omega_0 \frac{da(t)}{dt} + a(t) \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + 2 \frac{da(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} = 0 \quad (\text{ข.87})$$

ในส่วนที่เหลือเมื่อจัดอันดับที่  $O(\varepsilon)$  จึงได้สมการรบกวน (Perturbation equation) เป็น (ข.88)

$$\frac{d^2u_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_1(t) = -\frac{1}{4} a^3(t) \cos(3(\omega_0 t - \theta(t))) \quad (\text{ข.88})$$

เมื่อประมาณ (ข.86) และ (ข.87) ค่าให้อยู่ในอันดับ  $O(\varepsilon)$  จึงได้  $\frac{da(t)}{dt} = 0$  และ  $\frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{3}{8\omega_0} \varepsilon a^2(t)$  ดังนั้นจึงได้ขนาด  $a(t)$  และเฟส  $\theta(t)$  เป็นไปดังนี้

$$a = a_0, \theta(t) = -\frac{3}{8\omega_0} \varepsilon a_0^2 t + \theta_0 \quad (\text{ข.89})$$

โดยที่  $a_0$  และ  $\theta_0$  คือค่าคงที่ ดังนั้นค่าคำตอบของ  $u_1(t)$  จึงเป็นไปดังนี้

$$u_1(t) = a \cos(\omega_0 t - \theta(t)) - \frac{1}{32\omega_0^2} a^3 \cos(3(\omega_0 t - \theta(t))) \quad (ข.90)$$

จากการได้ค่า  $u_1(t)$  จึงทำให้

$$3\varepsilon^2 u_1(t) a^2 \cos^2(\omega_0 t - \theta(t)) = \frac{3}{128\omega_0^2} \varepsilon^2 a^5 \left( \begin{array}{l} \cos(\omega_0 t - \theta(t)) \\ + 2 \cos(3(\omega_0 t - \theta(t))) \\ + \cos(5(\omega_0 t - \theta(t))) \end{array} \right) \quad (ข.91)$$

นอกเหนือจากการคำนวณเทอมของ  $O(\varepsilon)$  ใน  $\frac{d^2 u_1(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_1(t)$  มีความจำเป็นที่ต้องรวมเทอม  $\frac{9}{16\omega_0} a^3 \frac{d\theta(t)}{dt} \cos(3(\omega_0 t - \theta(t)))$  ร่วมด้วย หากพิจารณาข้ามพจน์  $O(\varepsilon^2)$  ขึ้นไปจึงได้สมการแปรเปลี่ยนสองสมการดังนี้

$$2a(t)\omega_0 \frac{d\theta(t)}{dt} + \frac{d^2 a(t)}{dt^2} - a(t) \left( \frac{d\theta(t)}{dt} \right)^2 = -\frac{3}{4} \varepsilon a^3(t) - \frac{3}{128\omega_0^2} \varepsilon^2 a^5(t) \quad (ข.92)$$

$$-2\omega_0 \frac{da(t)}{dt} + a(t) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + 2 \frac{da(t)}{dt} \frac{d\theta(t)}{dt} = 0 \quad (ข.93)$$

และสมการรบกวน

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_2(t) = & -\frac{3}{128\omega_0^2} \varepsilon^2 a^5(t) \left( \begin{array}{l} 2\cos(3(\omega_0 t - \theta(t))) \\ + \cos(5(\omega_0 t - \theta(t))) \end{array} \right) \\ & - \frac{9}{16\omega_0 \varepsilon} a^3(t) \frac{d\theta(t)}{dt} \cos(3(\omega_0 t - \theta(t))) \end{aligned} \quad (ข.94)$$

โดยค่าผลคำตอบของขนาด  $a$  และเฟส  $\theta(t)$  สามารถได้จากการทำซ้ำในรูปแบบเดียวกับ (ข.89) จึงได้

$$a = a_0, \theta(t) = -\frac{3}{8\omega_0} \varepsilon a_0^2 t + \frac{15}{256\omega_0} \varepsilon^2 a_0^4 t + \theta_0 + O(\varepsilon^3) \quad (ข.95)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากการแทน  $\frac{d\theta(t)}{dt}$  จาก (ข.89) ลงใน (ข.94) และแก้ไขสมการ จึงได้ค่า  $u_2(t)$  ที่มีค่าผิดพลาดในระดับ  $O(\varepsilon)$  ดังต่อไปนี้

$$u_2(t) = -\frac{21}{1024\omega_0^4}a^5 \cos(3(\omega_0 t - \theta(t))) + \frac{1}{1024\omega_0^4}a^5 \cos(5(\omega_0 t - \theta(t))) \tag{ข.96}$$

ดังนั้นคำตอบของอันดับที่สองจึงเป็น

$$u(t) = a \cos(\omega t - \theta(t)) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \left(1 - \frac{21\varepsilon}{32\omega_0^2}\right) \cos(3(\omega t - \theta(t))) + \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} \cos(5(\omega t - \theta(t))) + O(\varepsilon^3) \tag{ข.97}$$

เมื่อ

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8\omega_0^2} - \frac{15\varepsilon^2 a^4}{256\omega_0^4}\right) + O(\varepsilon^3) \tag{ข.98}$$

สำหรับค่าคำตอบในอันดับที่สามนั้นต้องอาศัยการคำนวณเทอมอันดับ  $O(\varepsilon^2)$  ใน  $\frac{d^2 u_1(t)}{dt^2}$  และเทอม  $O(\varepsilon)$  ใน  $\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2}$  ร่วมด้วย แล้วเขียนสมการแปรเปลี่ยนและสมการรบกวน ซึ่งนี่คือข้อจำกัดของวิธีการนี้ ข้อจำกัดข้อที่สองของวิธีนี้คือคำตอบที่ทำซ้ำของสมการแปรเปลี่ยนที่มีความซับซ้อน

### ข.2.3 วิธีแบบไครลอฟและโบโกลูว์บอฟและมิโทรโพลสกี

วิธีแบบไครลอฟและโบโกลูว์บอฟและมิโทรโพลสกี (The Krylov-Bogoliubov-Mitropolski technique) เป็นวิธีการที่ถูกพัฒนามาจากไครลอฟและโบโกลูว์บอฟ โดยเพิ่มเติมด้วยแนวคิดแบบการสั่นแบบไม่คงที่ (Nonstationary vibration) โดยมิโทรโพลสกี ซึ่งวิธีการนี้ได้ตั้งค่าคำตอบทั่วไปเป็นไปดัง (ข.99)

$$u(t) = a(t) \cos(\phi(t)) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n u_n(a(t), \phi(t)) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{ข.99}$$

โดยที่แต่ละ  $u_n(t)$  คือฟังก์ชันที่มีคาบตาม  $\phi(t)$  ภายใต้ช่วง  $2\pi$  โดยที่  $a(t)$  และ  $\phi(t)$  ถูกนิยามว่าแปรเปลี่ยนตามเวลาที่เป็นไปตาม

$$\frac{da(t)}{dt} = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n A_n(a(t)) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{ข.100}$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \omega_0 + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \phi_n(a(t)) + O(\varepsilon^{N+1}) \tag{ข.101}$$

เมื่อฟังก์ชัน  $u_n(t)$   $A_n(t)$  และ  $\phi(t)$  ใน (ข.99) ต้องสอดคล้องกับสมการอนุพันธ์ไม่เป็นเชิงเส้นอย่างอ่อนดัง (ข.65) หากพิจารณา  $A_n(t)$  และ  $\phi_n(t)$  ค่า  $u_n(t)$  ต้องไม่อยู่ใน  $\cos(\phi(t))$  จึงทำให้การทำอนุพันธ์ถูกแปลงเป็น

$$\frac{d}{dt} = \frac{da}{dt} \frac{\partial}{\partial a} + \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{ข.102}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{da}{dt}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{d^2 a}{dt^2} \frac{\partial}{\partial a} + 2 \frac{da}{dt} \frac{d\phi}{dt} \frac{\partial^2}{\partial a \partial \phi} + \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{d^2 \phi}{dt^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{ข.103}$$

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt}\right) = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \left(\frac{da}{dt}\right) = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{dA_n}{da} = \varepsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{da} + O(\varepsilon^3) \tag{ข.104}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{da}{dt} \frac{d}{da} \left(\frac{d\phi}{dt}\right) = \frac{da}{dt} \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{d\phi_n}{da} = \varepsilon^2 A_1 \frac{d\phi_1}{da} + O(\varepsilon^3) \tag{ข.105}$$

ซึ่งสามารถแสดงวิธีการนี้ด้วยการประยุกต์ใช้กับสมการดีฟฟิง เมื่อพิจารณาระบบการสั่นไม่เป็นเชิงเส้นที่มีรูปแบบดัง (ข.78) เมื่อแทน (ข.99) ถึง (ข.105) ลงใน (ข.78) และเทียบค่าสัมประสิทธิ์ของ  $\varepsilon$  และ  $\varepsilon^2$  จึงได้

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} + \omega_0^2 u_1 = 2\omega_0 \phi_1 a \cos(\phi) + 2\omega_0 A_1 \sin(\phi) - a^3 \cos^3(\phi) \quad (\text{ข.106})$$

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\phi^2} + \omega_0^2 u_2 &= \left( a(2\omega_0 \phi_2 + \phi_1^2) + A_1 \frac{dA_1}{da} \right) \cos(\phi) \\ &+ \left( 2(\omega_0 A_2 + A_1 \phi_1) + aA_1 \frac{d\phi_1}{da} \right) \sin(\phi) \\ &- 3u_1 a^2 \cos^2(\phi) - 2\omega_0 \phi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \phi^2} - 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \phi} \end{aligned} \quad (\text{ข.107})$$

ในกรณีที่  $u_1$  เป็นฟังก์ชันคาบ เทอมเซคูลาร์ (Secular term) (เทอมเซคูลาร์คือพจน์ที่ค่าสัมประสิทธิ์ข้างหน้าฟังก์ชันไอเกนเป็นค่า  $\omega$  หรือ  $t$  ก็ได้ ซึ่งค่าเหล่านี้มักทำให้คำตอบไม่เป็นคาบ) ที่อยู่ด้านขวาของ (ข.106) ต้องถูกละทิ้ง จากเงื่อนไข  $\phi = \frac{3 \cos(\phi) + \cos(3\phi)}{4}$  จึงทำให้  $A_1 = 0$  และ  $\phi_1 = \frac{3a^2}{8\omega_0}$  ดังนั้นค่าคำตอบของ (ข.106) จึงเป็น

$$u_1 = \frac{3a^2}{32\omega_0^2} \cos(3\phi) \quad (\text{ข.108})$$

เมื่อแทนคำตอบอันดับหนึ่งลงใน (ข.107) จึงได้

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\phi^2} + \omega_0^2 u_2 &= \left( 2\omega_0 \phi_2 + \frac{15a^4}{128\omega_0^2} \right) a \cos(\phi) + 2\omega_0 A_2 \sin(\phi) \\ &+ \frac{a^5}{128\omega_0^2} (21 \cos(3\phi) - 3 \cos(5\phi)) \end{aligned} \quad (\text{ข.109})$$

ละทิ้งเทอมเซคูลาร์จึงได้

$$A_2 = 0, \phi_2 = -\frac{15a^4}{256\omega_0^3} \quad (\text{ข.110})$$

ดังนั้นคำตอบของ (ข.109) จึงเป็นไปดัง

$$u_2 = \frac{a^5}{1024\omega_0^4} (21 \cos(3\phi) - \cos(5\phi)) \quad (\text{ข.111})$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นหากประมาณค่าอยู่ในอันดับสองค่า  $u$  จึงเป็นไปตาม

$$u = a \cos(\phi) + \frac{\varepsilon a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\phi) - \frac{\varepsilon^2 a^5}{1024\omega_0^4} (21 \cos(3\phi) - 3 \cos(5\phi)) + O(\varepsilon^3) \quad (\text{ข.112})$$

โดย  $\frac{da}{dt} = 0$  หรือ  $a$  เป็นค่าคงที่และ

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0 + \frac{3\varepsilon a^2}{8\omega_0} - \frac{15\varepsilon^2 a^4}{256\omega_0^3} + O(\varepsilon^3) \quad (\text{ข.113})$$

$$\phi = \omega_0 \left( 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8\omega_0} - \frac{15\varepsilon^2 a^4}{256\omega_0^3} \right) t + \phi_0 + O(\varepsilon^3)$$

เมื่อ  $\phi_0$  คือค่าคงที่ ซึ่งคำตอบนี้ได้สอดคล้องกับวิธีแบบสตริงเบส

นอกเหนือจากการประยุกต์ใช้สำหรับสมการออสซิลเลเตอร์ไม่เป็นเชิงเส้นแล้ว เทคนิคนี้ยังสามารถประยุกต์ใช้กับสมการคลื่นไม่เป็นเชิงเส้นได้ จึงสามารถยกตัวอย่างสมการไคลน์และกอร์ดอน (The Klein-Gordon equation) ที่เป็นไปดัง (ข.114)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \lambda^2 u(x,t) = \varepsilon f \left( u(x,t), \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) \quad (\text{ข.114})$$

ในกรณีที่ความไม่เป็นเชิงเส้นถูกละทิ้งด้วยการให้  $\varepsilon = 0$  ค่าคำตอบทั่วไป  $u_g(x,t)$  จึงอยู่ในรูปแบบ

$$u_g(x,t) = a \cos(k_0 x - \omega_0 t + \Psi) \quad (\text{ข.115})$$

โดยที่ขนาด  $a$  และเฟส  $\Psi$  คือค่าคงที่ สำหรับค่า  $k_0$  และ  $\omega_0$  ต้องสอดคล้องกับสมการ (ข.116)

$$\omega_0^2 = c^2 k_0^2 + \lambda^2 \quad (\text{ข.116})$$

สำหรับค่า  $\varepsilon$  ที่มีค่าน้อยและจำกัด จึงได้คำตอบ  $u(x,t)$  ในรูปแบบอนุกรมดัง (ข.117)

$$u = a \cos(\Psi) + \varepsilon u_1(a, \Psi) + \dots \quad (\text{ข.117})$$

โดยที่ขนาด  $a$  เป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาและตำแหน่งอย่างช้าที่สามารถแสดงได้

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \quad (\text{ข.118})$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon B_1(a) + \varepsilon^2 B_2(a) + \dots \quad (\text{ข.119})$$

และเฟส  $\Psi$  เป็นฟังก์ชันที่แปรเปลี่ยนตามเวลาและตำแหน่งอย่างช้าเช่นเดียวกัน

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\omega_0 + \varepsilon C_1(a) + \varepsilon^2 C_2(a) + \dots \quad (\text{ข.120})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = k_0 + \varepsilon D_1(a) + \varepsilon^2 D_2(a) + \dots \quad (\text{ข.121})$$

เมื่อแทน (ข.117) ลงใน (ข.121) และ (ข.114) ด้วยการอาศัยความสัมพันธ์ใน (ข.116) และจัดสัมประสิทธิ์  $\varepsilon$  ของทั้งสองข้างให้เท่ากันจึงได้

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial \Psi^2} + u_1 \right) \\ &= -2(\omega_0 A_1 + c^2 k_0 B_1) \sin(\Psi) - 2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) \cos(\Psi) \\ & \quad + f(a \cos(\Psi), a\omega_0 \sin(\Psi), -ak_0 \sin(\Psi)) \end{aligned} \quad (\text{ข.122})$$

จากการอาศัยอนุกรมฟูเรียร์มาวิเคราะห์ฟังก์ชัน  $f$  ในเทอมของ  $\Psi$  ดังสมการ (ข.123)

$$\begin{aligned} & f(a \cos(\Psi), a\omega_0 \sin(\Psi), -ak_0 \sin(\Psi)) \\ &= g_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(a) \sin(n\Psi) + g_n(a) \cos(n\Psi)) \end{aligned} \quad (\text{ข.123})$$

และทำการหาค่าเทอมเซคูลาร์จึงได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$2\omega_0 A_1 + 2c^2 k_0 B_1 = f_1(a) \tag{ข.124}$$

$$2a(\omega_0 C_1 + c^2 k_0 D_1) = g_1(a) \tag{ข.125}$$

ดังนั้นคำตอบของสมการ (ข.122) จึงเป็นไปตามสมการ (ข.126)

$$u_1 = \frac{g_0(a)}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{f_n(a) \sin(n\Psi) + g_n(a) \cos(n\Psi)}{\lambda^2(1 - n^2)} \right) \tag{ข.126}$$

จากการแทนค่า  $A_1$   $B_1$   $C_1$  และ  $D_1$  ใน (ข.118) ถึง (ข.121) ลงใน (ข.124) และ (ข.125) จึงได้

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk_0} \frac{\partial a}{\partial x} = \varepsilon \frac{f_1(a)}{2\omega_0} \tag{ข.127}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk_0} \frac{\partial \beta}{\partial x} = \varepsilon \frac{g_1(a)}{2a\omega_0} \tag{ข.128}$$

โดยที่  $\frac{d\omega_0}{dk_0}$  คือความเร็วกรุปและ

$$\beta = \Psi - k_0 x + \omega_0 t \tag{ข.129}$$

ในกรณีที่  $f_1(a) = 0$  ส่งผลให้

$$a = h_1 \left( x - \frac{d\omega_0}{dk_0} t \right) \tag{ข.130}$$

$$\beta = \varepsilon \left( x - \frac{d\omega_0}{dk_0} t \right) \frac{g_1(a)}{4a\omega_0} \frac{dk_0}{d\omega_0} + h_2 \left( x - \frac{d\omega_0}{dk_0} t \right) \tag{ข.131}$$

เมื่อ  $h_1$  และ  $h_2$  สามารถพิจารณาได้จากเงื่อนไขขอบเขต สำหรับการแก้สมการ (ข.127) และ (ข.128) สามารถทำได้โดยง่ายในกรณีที่  $a$  และ  $\beta$  คือฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลาหรือตำแหน่งเพียงอย่างเดียวเท่านั้น

## ภาคผนวก ค.

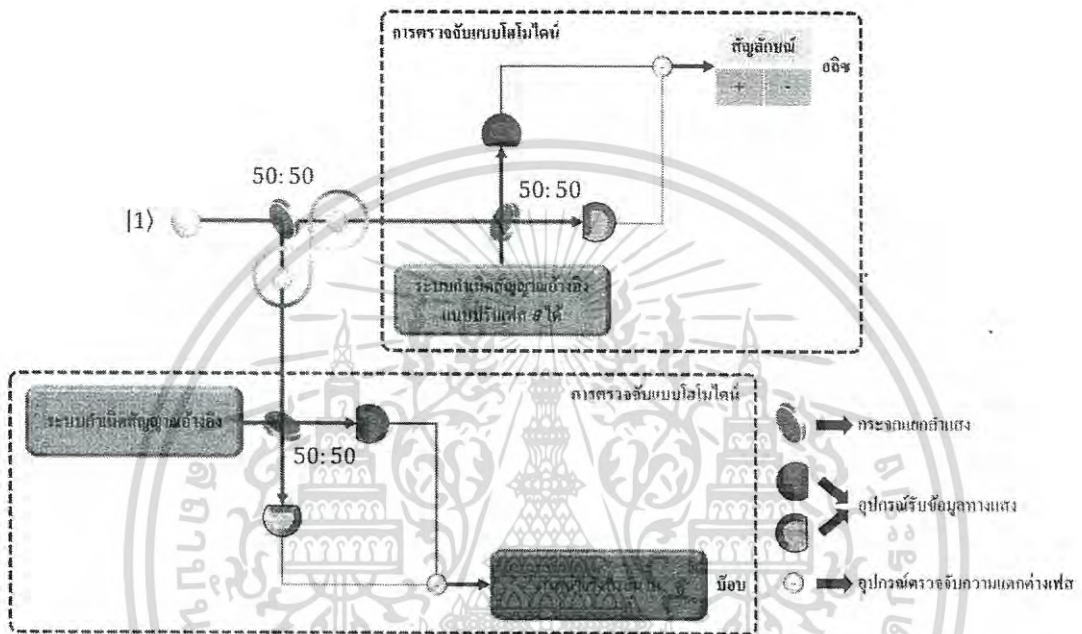
## ตัวอย่างการตรวจจับแบบโฮโมไดน์

## ค.1 การตรวจจับแบบโฮโมไดน์เพื่อยืนยันความพัวพันเชิงควอนตัม

ความพัวพันเชิงควอนตัมเป็นปรากฏการณ์ของคู่หรือกลุ่มของอนุภาคที่ถูกกำเนิดหรือมีอันตรกิริยาต่อกันในรูปแบบที่สถานะทางควอนตัมของแต่ละอนุภาคไม่เป็นอิสระต่อกัน โดยคุณสมบัตินี้ไม่หายไปแม้ว่าคู่อนุภาคถูกจับแยกให้อยู่ห่างกันคนละสถานที่ ทำให้การพิจารณาสถานะทางควอนตัมของคู่อนุภาคถูกมองเป็นระบบเดียวกันที่ไม่ขึ้นอยู่กับระยะทางและเวลา ซึ่งปัจจุบันได้มีความพยายามที่นำมาพัฒนาใช้สำหรับเทคโนโลยีการสื่อสารยุคใหม่ที่เป็นการเคลื่อนย้าย (Teleportation) ข้อมูลข่าวสารเชิงควอนตัม (Quantum information) โดยไม่ต้องอาศัยคลื่นพาห้ (Carrier signal) ดังเช่นการสื่อสารด้วยคลื่นไมโครเวฟ อย่างไรก็ตามแม้ว่าคุณสมบัติความพัวพันเชิงควอนตัมเป็นสิ่งที่น่าสนใจ แต่ด้วยความไม่สมเหตุผลในสามัญสำนึกทั่วไปของมนุษย์ จึงทำให้มีการตรวจสอบคุณสมบัตินี้อย่างเข้มงวด และหนึ่งในวิธีการตรวจจับที่ได้รับความนิยมคือการตรวจจับแบบโฮโมไดน์ด้วยเลเซอร์อินเตอร์เฟอโรมิเตอร์ เพื่อความเข้าใจในเบื้องต้นสำหรับการทดสอบคุณสมบัติความพัวพันเชิงควอนตัมด้วยเลเซอร์อินเตอร์เฟอโรมิเตอร์ จึงยกตัวอย่างการทดลองในความคิดของไอน์สไตน์ (Einstein's gedankenexperimental) อย่างง่ายดังรูปที่ ค.1

จากรูปเมื่อทำการยิงลำโฟตอน (โฟตอนคืออนุภาคของแสง) อนุภาคเดี่ยว (แทนด้วยทรงกลมสีเหลือง) ที่มีสถานะทางควอนตัม  $|1\rangle$  พุ่งจากด้านซ้ายเข้าชนกระจกแยกลำแสงแบบ 50:50 จึงสามารถแยกลำแสงเป็นสองสถานะทางควอนตัมที่พัวพันกัน โดยลำแสงทั้งสองที่ถูกแยกนี้ถูกนำไปตรวจจับแบบโฮโมไดน์ในสองสถานที่ที่แตกต่างกันดังกรอบเส้นประสีแดงและสีน้ำเงินตามลำดับ ส่วนประกอบหลักของการตรวจจับแบบโฮโมไดน์ทั้งสองนั้นประกอบไปด้วยอุปกรณ์รับข้อมูลทางแสงสองตัว กระจกแยกลำแสงแบบ 50:50 อุปกรณ์ตรวจจับความแตกต่างเฟส และระบบกำเนิดสัญญาณอ้างอิง โดยการทดลองนี้ได้กำหนดให้อลิซในกรอบน้ำเงินเป็นฝั่งส่งข้อมูลด้วยการปรับเฟส  $\theta$  ในสัญญาณแสงที่ได้จากระบบกำเนิดสัญญาณอ้างอิง (ที่ความยาวคลื่นแสงเท่ากับฝั่งรับหรือบ๊อบ) และจัดตั้งให้ลำแสงที่ได้จากระบบกำเนิดสัญญาณอ้างอิงนี้มีทิศทางตั้งฉากกับลำโฟตอนอนุภาคเดี่ยว โดยลำแสงทั้งสองนี้ได้ชนกระจกแยกลำแสงแบบ 50:50 อันเดียวกันและตรวจจับลำแสงที่ได้ทั้งสองทิศทาง ซึ่งฝั่งของอลิซสนใจเพียงค่าบวกลบที่ได้จากการนำสองสัญญาณไฟฟ้าที่ได้จากอุปกรณ์รับข้อมูลทางแสงทั้งสองไปเปรียบเทียบสัญญาณกันเท่านั้น ในฝั่งของบ๊อบได้นำสัญญาณที่ได้จากอุปกรณ์ตรวจจับความแตกต่างเฟสไปแสดงในรูปแบบ

ภาพถ่ายรังสีระนาบที่เป็นการพิกัดขนาดของสัญญาณเทียบกับเวลา ซึ่งหากคุณสมบัติความพัวพันเชิงควอนตัมเป็นจริงการเปลี่ยนเฟสของฝั่งอลิซย่อมส่งผลต่อขนาดของสัญญาณที่ได้ในฝั่งบ็อบ โดยในส่วนของความเป็นไฮโมไดน์คือจุดที่สัญญาณแสงจากระบบกำเนิดสัญญาณอ้างอิงได้กระทำกับลำโฟตอนอนุภาคเดี่ยวในรูปแบบการคูณจนเกิดความแตกต่างเฟส  $\theta$  ที่ตรวจจับได้นั่นเอง

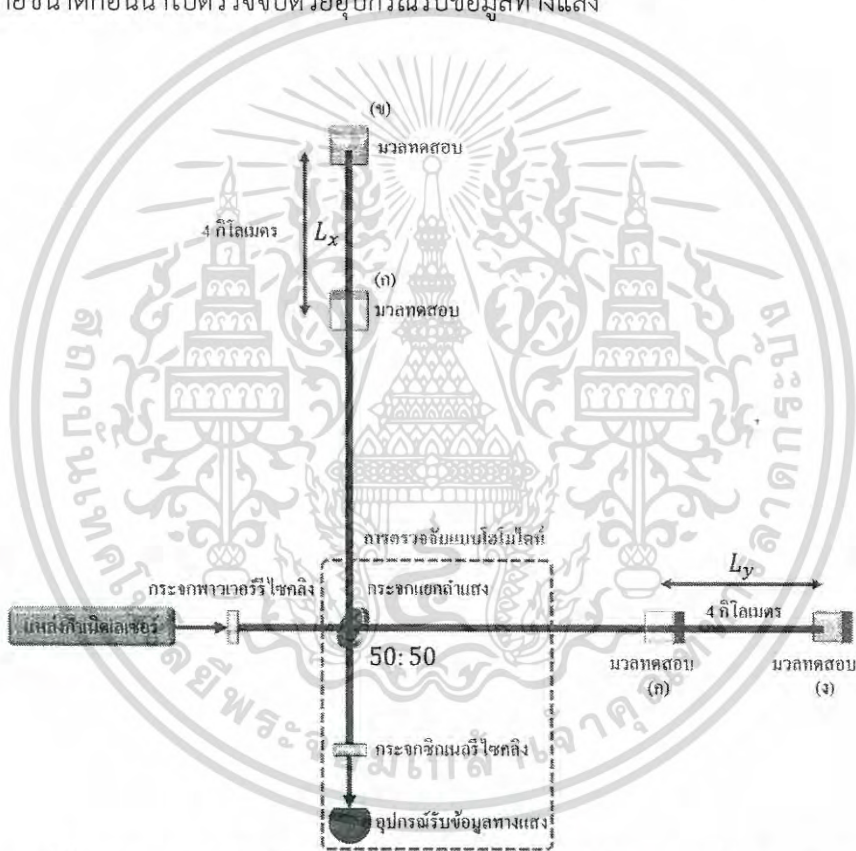


รูปที่ ค.1 แผนผังการทดลองการพัวพันเชิงควอนตัมอย่างง่าย

**ค.2 การตรวจจับแบบไฮโมไดน์ในการตรวจจับคลื่นโน้มถ่วง**

คลื่นโน้มถ่วงเป็นผลจากการเปลี่ยนแปลงกาล-อวกาศ (Space-time) หรือสนามโน้มถ่วงต่อเวลาที่ทำนายจากทฤษฎีสัมพัทธภาพทั่วไปของไอสไตน์ (การเปลี่ยนแปลงสนามต่อเวลาก็ให้เกิดคลื่นเช่นการเปลี่ยนแปลงสนามแม่เหล็กไฟฟ้าต่อเวลาก่อให้เกิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นต้น) ซึ่งแนวคิดของสนามโน้มถ่วงเป็นสิ่งที่ได้รับความสนใจในวงกว้างเนื่องมาจากความโน้มถ่วงในมุมมองตามฟิสิกส์ทั่วไปนั้นเป็นมุมมองแบบนิวตันที่มองว่าความโน้มถ่วงคือแรง แต่ในขณะที่ความโน้มถ่วงในมุมมองของไอสไตน์นั้นได้มองว่าความโน้มถ่วงคือสนาม จึงได้มีนักฟิสิกส์กลุ่มหนึ่งที่มีความมุ่งมั่นเพื่อพิสูจน์ว่าแนวคิดของไอสไตน์เป็นจริงหรือไม่ ส่งผลให้มีการก่อตั้งหน่วยงาน LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) ที่ตั้งอยู่ ณ ประเทศสหรัฐอเมริกา ซึ่งการพิสูจน์นั้นได้จัดตั้งการทดลองที่อาศัยเลเซอร์อินเตอร์เฟอโรมิเตอร์ที่เป็นการตรวจจับแบบไฮโมไดน์ดังรูปที่ ค.2 โดยการทดลองนี้ได้เริ่มจากการกำเนิดเลเซอร์และขยายสัญญาณด้วยกระจะจะพาวเวอร์รีโซคลิงไปชนกระจะจกแยกลำแสงแบบ 50:50 โดยลำเซอร์ที่

แยกเป็นสองทางนี้ได้ผ่านมวลทดสอบที่จุดอ้างอิง (ก) (ข) (ค) และ (ง) ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้จุด (ก) และ (ค) เป็นจุดอ้างอิงที่ไม่ได้รับผลจากคลื่นโน้มถ่วง แต่ในขณะที่จุด (ข) และ (ง) เป็นจุดที่ได้รับผลจากคลื่นโน้มถ่วงในแนวหน้าคลื่นตั้งฉากกับลำเลเซอร์ ส่งผลให้ระยะ  $L_x$  และ  $L_y$  มีการหดหรือขยายจากระยะอ้างอิงเดิมที่ 4 กิโลเมตร ดังนั้นลำเลเซอร์ที่สะท้อนกลับมาจากจุด (ข) และ (ง) จึงมีเฟสของคลื่นเปลี่ยนไปตามคลื่นโน้มถ่วงที่กระทำ ดังนั้นจึงสามารถตีความว่าค่าเฟสที่เปลี่ยนแปลงที่ได้คือสัญญาณคลื่นโน้มถ่วง ในส่วนที่เป็นการตรวจจับแบบโฮโมไดน์คือจุดที่ลำเลเซอร์เลเซอร์สะท้อนทั้งสองลำกระทำกับแหล่งกำเนิดเลเซอร์ที่กระจกแยกลำแสงในรูปแบบการคูณ และนำสัญญาณที่ได้มาผ่านกระจกชิกนารีไซคลิงเพื่อขยายขนาดก่อนนำไปตรวจจับด้วยอุปกรณ์รับข้อมูลทางแสง



รูปที่ ค.2 แผนผังอย่างง่ายของระบบตรวจจับคลื่นโน้มถ่วงของหน่วยงาน LIGO

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ง.

## ผลงานวิจัยที่ได้รับตีพิมพ์เผยแพร่



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# FM Bandwidth Scaling by Frequency Operation under Injection Locked Phenomena Based on Multi-time Variable Analysis

Kunanon Kittipute

Hatahaichanok Karjanasomeranwong  
and Paramote Wardkein  
Telecommunication Engineering Department,  
Faculty of Engineering  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang  
Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520

Panwit Tuwanut

Faculty of Information Technology  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang  
Ladkrabang, Bangkok, Thailand 10520

**Abstract**—This article, the FM bandwidth scaling technique under injection locked and super-harmonic injection locked phenomenon, which explained by forcing oscillation perspective with multi-time variable technique is presented. By forcing FM signal to harmonic oscillator, the FM bandwidth can be scaled. This scaling technique separated in two situations, the first one is an expansion technique under injection locked phenomenon, and the second one is a compression technique under super-harmonic injection locked phenomenon. The modified Colpitts oscillator is taken in examine, and principle verified by experimental result.

**Keywords**—Bandwidth scaling; Forced oscillator; Multi-time variable; Injection locked; Super-harmonic.

## I. INTRODUCTION

Recently, the wireless communication is fast becoming popular and widely deployed, due to its ease of use and simplicity for installation or removal. Generally, almost of wireless communication technologies are based on modulation technique. The fundamental of modulation technique in both analog and digital modulation can be separated in two parts of signals, first the amplitude, and second the phase [1]. In analog modulation regime, the basic modulation technique is composed of three kinds, Amplitude Modulation (AM), Frequency Modulation (FM), and Phase Modulation (PM). Among each modulation technique has its advantage and drawback, such as the FM signal has the high immune noise characteristic, but has a more complex in the modulation process. While, the AM signal is simply for establishing, but there is lower noise immunity. By the advantage of FM signal which has high noise immunity, resulting the radio broadcast still use an FM system in recent. For FM established, the carrier frequency varied in constraining band by using Voltage Control Oscillator (VCO), where the width of the frequency band depend on modulation index, and the deviation rate of carrier frequency depends on information frequency only [2]. Then, we can scale FM bandwidth by the modulation index adjusting. In FM bandwidth compression case, the bandwidth utilization has more efficiency. For FM bandwidth expansion case, the more efficiency of signal transmission is derived. Thus, the bandwidth scaling of FM signal is the one of the important keys to manage the efficiency of FM signal.

In this article, the FM bandwidth scaling technique is presented, by using injection locked phenomenon [3] for compress and expand bandwidth with super harmonic injection locked phenomenon. In the past, the injection locked phenomenon was discovered by Christiaan Huygens, he observed two pendulum clocks which hang on the same wall. Two pendulum clocks can transfer energy to each other and synchronized. Later, the same behavior was discovered in electrical oscillator which can described by self-oscillation method with nonlinear differential equation [4], [5]. Recently, the forced oscillation viewpoint is used to explain this phenomenon [6]. The second order differential equation with multi-time variable technique is the core function in the forced oscillation background, and they are also explained super-harmonic injection lock in this paper. Based on multi-time variable forced oscillation model, the injection locked phenomenon can multiply fundamental harmonic frequency to a higher harmonic, and the super-harmonic injection locked can divide the higher harmonic frequency to lower harmonic frequency. Then, we can apply these properties for compress or expand FM bandwidth. Furthermore, the forced oscillation principle can also apply to arbitrary oscillator without constrain of structure. More detail about main idea would be explained in the second section in this article. And the modified Colpitts oscillator is applied in this article which described in the third section. And our proposed system is verified by experimental result in the fourth section, the conclusion has been presented at the last section.

## II. PRINCIPLE

In this section, the two-main principle is present. First, the FM bandwidth scaling property in practical oscillator has been described. Later, the injection locking and the super-harmonic injection locking are explained by the forced harmonic oscillator model. By combining these principles, the FM bandwidth scaling by using a forced oscillator can be achieved.

### A. FM Bandwidth Scaling

In idealistic sinusoidal oscillator, the output is a sinusoidal wave which has only fundamental harmonic. However, all practical sinusoidal oscillators are not producing only fundamental harmonic, they also produce higher harmonic, but the magnitude of fundamental

harmonic is greater than the other harmonic, thus they still be completely sinusoidal wave in time domain. Then, the output of practical sinusoidal oscillator  $v_{osc}$ , which is written as a function of  $\theta$ , where  $\theta$  is a periodic wave function, can be expanded by the Fourier series [7] as:

$$v_{osc}(\theta) = A_{osc}(\cos\theta + \varepsilon_2 \cos 2\theta + \varepsilon_3 \cos 3\theta + \varepsilon_4 \cos 4\theta + \dots) \quad (1)$$

where  $A_{osc}$  is a magnitude of fundamental harmonic, and  $\varepsilon_n; n=2,3,4,\dots$  is the small coefficient for each higher harmonics. By the real variable  $\theta$  is valid for any instant time, then the VCO which produces the FM signal case, we can define  $\theta = \omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha$ , resulting the output of the VCO is  $v_{FM}(\omega_c t + k_f \int m(\alpha) d\alpha)$ . If information signal is a sinusoidal wave  $m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$ , then the output of VCO which is FM signal can be represented in (2).

$$v_{FM}(\theta(t)) = v_{FM}(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) \quad (2)$$

$$= A_{FM} \left( \begin{array}{l} \cos(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) \\ + \varepsilon_1 \cos 2(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) \\ + \varepsilon_2 \cos 3(\omega_c t + \beta \sin(\omega_m t)) + \dots \end{array} \right)$$

by  $\beta = \frac{A_m \Delta \omega}{\omega_m}$ , and  $\beta$  is modulation index. From (2) the  $n$ 'th ( $n=2,3,4,\dots$ ) term on the right hand side is FM modulation that its modulation index and the carrier frequency is  $n$  times of the first term. The resulting its approximate bandwidth (Carson's rule [8]) is also scaled with  $n$  times of the bandwidth of the first term.

### B. Forced Harmonic Oscillator Model

To understand the injection locked and super-harmonic harmonic injection locked phenomenon in forced oscillation perspective, the second order differential equation with multi-time variable technique is introduced. Based on this principle, we can use a single method to analyse arbitrary structure of electrical oscillator. Our method begins with three independent equations, natural response  $v_n(t)$  equation (3), forced response  $v_f(\tau)$  equation (4), and complete response equation  $v_c(t, \tau)$  (5).

$$\frac{d^2}{dt^2} v_n(t) + \omega_n^2 v_n(t) = 0; v_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) \quad (3)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} v_f(\tau) + \omega_n^2 v_f(\tau) = f(v_i(\tau)) \quad (4)$$

$$v_c(t, \tau) = A_n \cos(\omega_n t) + v_f(\tau) \quad (5)$$

where  $f(v_i(\tau))$  is the forced function which is the function of forced input  $v_i(\tau)$ ,  $\omega_n$  is the natural frequency, and an  $A_n$  is the amplitude of natural response. The true meaning of multi-time variable came from the real world which derive from many experimental results that "the forced response effect to the amplitude of natural response at any time, not only at initial time." [9]-[11]. And this multi-time variable initial condition can be written as:

$$A_n = v_c(0, \tau) - v_f(\tau) \quad (6)$$

By substituting (6) into (5), the complete response can be rewritten as (7).

$$v_c(t, \tau) = (v_c(0, \tau) - v_f(\tau)) \cos(\omega_n t) + v_f(\tau) \quad (7)$$

In single tone sinusoidal input case  $v_i(\tau) = A_i \cos(\omega_i \tau)$ , and simplify the explanation by approximate forced function equal to forced input  $f(v_i(\tau)) \approx v_i(\tau)$ , and define  $\tau \equiv t$  the complete response can be derived as (8).

$$v_c(t) = v_c(0) \cos(\omega_n t) \quad (8)$$

$$+ \frac{A_i}{(1 - ((\omega_n + \omega_i)/\omega_n)^2)} \cos((\omega_n + \omega_i)t)$$

$$+ \left( \frac{A_i}{(1 - ((\omega_n - \omega_i)/\omega_n)^2)} \right) \cos((\omega_n - \omega_i)t)$$

$$+ \frac{A_i}{(1 - (\omega_i/\omega_n)^2)} \cos(\omega_i t)$$

From (8), if input frequency  $\omega_i$  was nearly approached to natural frequency  $\omega_n$ , the last term in the right hand side would have the highest magnitude, which compared with the other term, resulting injection locked phenomenon has occurred in view point of magnitude dimension.

For super-harmonic injection locked phenomenon case, the practical oscillator (which composed of fundamental and higher harmonics) was taken into consideration. The important key to consider the forced harmonic oscillation system is the transfer function, then we use the Laplace transform to (4), the transfer function for fundamental harmonic can be derived as:

$$\frac{v_f(s)}{v_i(s)} = \frac{1}{(s^2 + \omega_n^2)} \quad (9)$$

Then, the transfer function of a practical oscillator should be composed of many poles in the system as Fig. 1. Then we can write the transfer function of the harmonic oscillator as (10).

$$\frac{v_f(s)}{v_i(s)} = \frac{1}{(s^2 + \omega_n^2)(s^2 + (2\omega_n)^2)(s^2 + (3\omega_n)^2) \dots (s^2 + (k\omega_n)^2)} \quad (10)$$

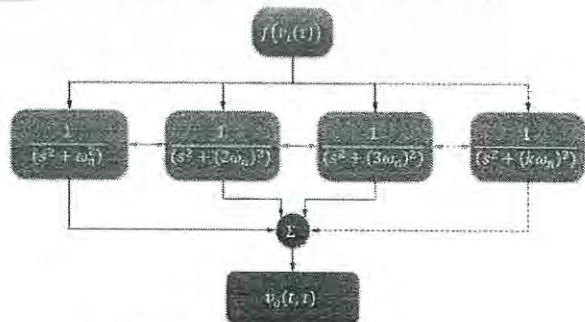


Figure 1. Forced harmonic oscillation model

Resulting, the forced function, which forced to whole systems, should interact in response of every pole in the system. And the response for each pole separated in two parts, the first would send to each other as orange arrow, and the second, all of the response are added, as green arrow, to be the complete response of system in blue arrow.

If we apply a sinusoidal input frequency equal to the second harmonic of harmonic oscillator, the super-harmonic injection locked phenomenon would be appeared.

Moreover, the consequence of multiplication term which appear on the right hand side of (8), is a main mechanism for locking in every harmonic. In case of super-harmonic injection locked, the interaction between input (which frequency equal to the second harmonic of harmonic oscillator) and the third harmonic, causing a locking at the fundamental harmonic and in similar the other harmonic is also a locking. For injection locking case, if we apply a sinusoidal input frequency equal to the fundamental harmonic in an oscillator, the consequence of their interaction is a locking at the second harmonic and also other harmonic.

Now, we can combine the scaling principle to the forced harmonic oscillator model, these imply to forcing the external FM signal through harmonic oscillator. We can choose bandwidth compression or expansion under two conditions as Fig. 2.

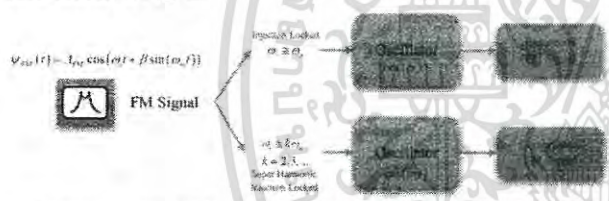


Figure 2. Two conditions of the scaling FM bandwidth technique.

For in the case of the FM carrier frequency approached to the fundamental frequency of the harmonic oscillator, the injection locked phenomenon with the higher harmonic would be occurred. From FM bandwidth scaling where described above, hence all of higher harmonics still be an FM signal, which their bandwidth is expanded, where depend on the order of harmonics.

In super-harmonic injection locking, the FM carrier frequency is equal to the arbitrary harmonic (except fundamental harmonic), the FM bandwidth compression can be achieved with the same principle as above. And we can also choose the amount of compressing by choosing the harmonic's order.

To verify principle, the modified Colpitts oscillator is introduced to be an example in the next section.

### III. CIRCUIT ANALYSIS

From FM bandwidth scaling principle as described above, the second order oscillator circuit can be applied to the FM bandwidth scaling circuit, by injecting an FM signal to the oscillator. In this article, the modified Colpitts oscillator as Fig. 3 has been provided to verify principle.

The structure of the modified Colpitts oscillator has been shown as Fig. 3(a), and a high-frequency small-signal equivalent circuit [12] of the modified Colpitts oscillator can be derived in Fig. 3(b). We can take some approximation by omitting some insignificant circuit's elements; the omitting of the insignificant parallel element, the impedance of  $R_E // Z_{C_2}$  can be approximated as  $Z_{C_2}$ , due to  $R_E // Z_{C_2}$  provide a small impedance at high frequency, from the similarity to this approximation, the impedance of  $r_\mu // Z_{C_\mu}$  can approximate as  $Z_{C_\mu}$ , then the impedance  $r_x // Z_{C_x} \approx Z_{C_x}$ , and the impedance  $R_2 // Z_{C_1} \approx Z_{C_1}$ . To omit the insignificant series element, the impedance of the inductor, which series with resistor, would have a high impedance at high frequency, resulting  $Z_{L_1} + R_1 \approx Z_{L_1}$ , and  $Z_{L_2} + R_2 \approx Z_{L_2}$ . Hence, the equivalent circuit in Fig. 3(b) can be reduced to Fig. 3(c).

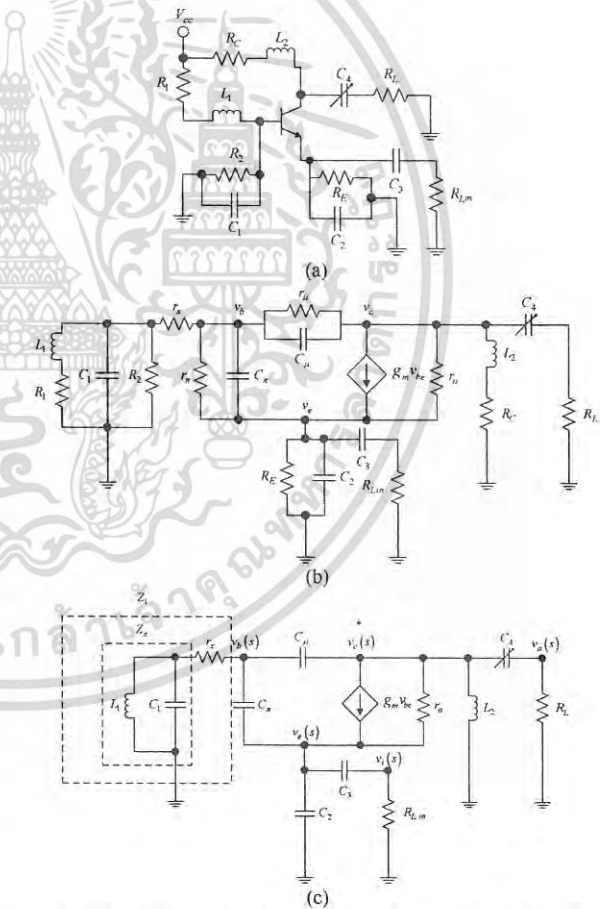


Figure 3. The modified Colpitts oscillator with equivalent circuit.

For reducing complexity in circuit analysis, we define  $Z_x$  is the impedance of  $Z_{L_1} // Z_{C_1}$  and  $Z_1$  is the impedance of  $Z_x$  which series with  $r_x$ .

By using nodal analysis, which based on KCL (Kirchhoff current law) [13]-[14], and using Laplace transform, the nodal relationship equation can be acquired as below.

$$\frac{v_b(s)}{Z_1} + \frac{v_b(s) - v_e(s)}{Z_{c_2}} + \frac{v_b(s) - v_e(s)}{Z_{c_2}} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{v_e(s)}{Z_{c_3}} + \frac{v_e(s) - v_i(s)}{Z_{c_3}} + \frac{v_e(s) - v_b(s)}{Z_{c_2}} + \frac{v_e(s) - v_e(s)}{r_o} - g_m v_{be} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{v_e(s)}{Z_{L_2}} + \frac{v_e(s) - v_o(s)}{Z_{c_4}} + \frac{v_e(s) - v_b(s)}{Z_{c_2}} + \frac{v_e(s) - v_e(s)}{r_o} + g_m v_{be} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{v_i(s)}{R_{L_{in}}} + \frac{v_i(s) - v_e(s)}{Z_{c_3}} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{v_o(s)}{R_L} + \frac{v_o(s) - v_e(s)}{Z_{c_4}} = 0 \quad (15)$$

By  $v_e(s)$ ,  $v_b(s)$ , and  $v_i(s)$ , are the BJT port node for the collector, the base, and the emitter respectively. For the input and output node can be represented as  $v_i(s)$  and  $v_o(s)$ . After impedance substituting of the capacitor  $Z_C = \frac{1}{sC}$  and inductor  $Z_L = sL$ , and solving (11) to (15) in free oscillation case ( $v_i(s) = 0$ ), the natural frequency can be obtained at (16).

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_4(C_\pi + C_\mu)L_2r_x + C_4(C_\pi + C_\mu)R_Lr_x + C_4C_\mu L_2R_L + C_4L_1L_2r_x + C_4L_1R_Lr_x}{(C_\pi + C_\mu)L_1 + C_\mu L_1L_2r_x} \frac{C_1C_4(C_\pi + C_\mu)L_1L_2r_x + C_1C_4(C_\pi + C_\mu)L_1R_Lr_x}{C_1C_4(C_\pi + C_\mu)L_1L_2r_x}} \quad (16)$$

To scaling FM bandwidth, the transfer function of the circuit is an important part. In forced oscillation case ( $v_i(s) \neq 0$ ), by solving (11) to (15), the relationship between input and output can be derived as below:

$$\frac{v_o(s)}{v_i(s)} = \frac{1}{\left(s^2 + \left(\frac{K_3}{K_1}\right)\right) \left(s^2 + \left(\frac{K_4}{K_2}\right)\right)} \quad (17)$$

where;

$$K_4/K_2 \cong 2K_3/K_1$$

$$K_1 = C_1C_4(C_\pi + C_\mu)L_1L_2r_x + C_1C_4(C_\pi + C_\mu)L_1R_Lr_x$$

$$K_2 = C_4(C_\pi + C_\mu)L_1L_2 + C_4(C_\pi + C_\mu)L_1R_L + C_1(C_\pi + C_\mu)L_1$$

$$K_3 = C_4(C_\pi + C_\mu)L_2r_x + C_4(C_\pi + C_\mu)R_Lr_x + C_4C_\mu L_2R_L$$

$$+ C_4L_1L_2r_x + C_4L_1R_Lr_x + (C_\pi + C_\mu)L_1 + C_\mu L_1L_2r_x$$

$$K_4 = (C_\pi + C_\mu)r_x + L_1r_x$$

We can compare (17) to (10), this implies that this circuit is corresponding with FM bandwidth scaling principle.

In the next section, our principle and circuit analysis are verified by the experimental result of scaling FM bandwidth.

#### IV. EXPERIMENTAL RESULTS

From the principle, which presented above, the experiment is established by providing value to each

component in Fig. 3(a) as below;

$$R_1 = 5.6k\Omega, R_2 = 1.2k\Omega, R_3 = 100\Omega, R_4 = 300\Omega, R_L = R_{L_{in}} = 50\Omega, C_1 = 470nF, C_2 = 3pF, C_3 = 10\mu F, C_4 = 5pF, L_1 = L_2 = 12nH, V_{cc} = 9V.$$

In free running oscillation case, the output spectrum of the modified Colpitts oscillator can be shown as Fig. 4(a), which its fundamental harmonic at 588.8 MHz, and the second harmonic at 1.1778 GHz, as illustrated in Fig. 4(b) and Fig. 4(c) respectively.

To expand FM bandwidth, the FM signal as Fig. 5(a), whose carrier frequency at 588 MHz, bandwidth 850 kHz, is applied to the oscillator. The injection locked phenomenon appears in Fig. 5(b), and its second harmonic, which also be locked, with double bandwidth of the reference FM input as Fig. 5(c).

In FM compression case, the oscillator injected by FM signal, where carrier frequency at 1.176 GHz with bandwidth 850 kHz as Fig. 6(a). The output of oscillator under superharmonic injection locking can be shown in Fig. 6(b). Moreover, the compression FM signal can be obtained in the fundamental harmonic of the oscillator as Fig. 6(c). We can note that the theoretical prediction which established in section 2 and 3 in this article corresponds to all of experimental results.

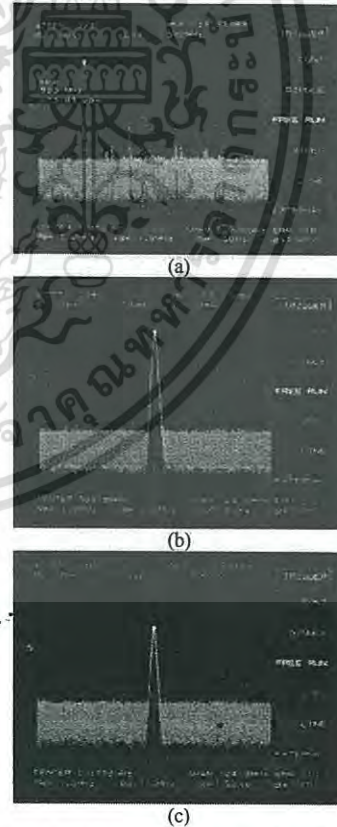
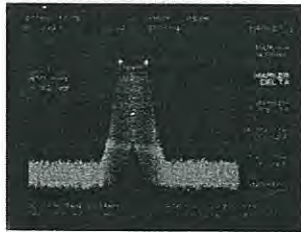
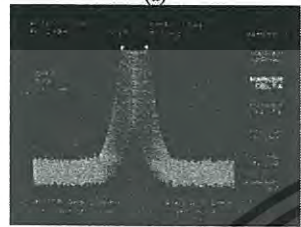


Figure 4. The natural frequency of oscillator.



(a)

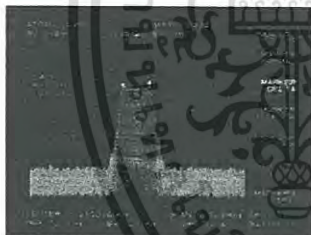


(b)



(c)

Figure 5. The FM bandwidth expansion results.



(a)



(b)



(c)

Figure 6. The FM bandwidth compression results.

## V. CONCLUSION

In this paper, the FM bandwidth scaling is possible by combining the harmonic oscillator property with the forced harmonic oscillator model. Based on harmonic oscillator property, the FM modulation index depends on the harmonic number, which result of FM bandwidth. Hence, if the FM signal apply to harmonic oscillator under two phenomena, injection locked phenomenon, super-harmonic injection locked phenomenon, the expansion and the compression bandwidth can be occurred. To explain these two phenomena, the forced harmonic oscillator model is introduced. This model based on forced oscillation perspective, and second order differential equation with multi-time variable technique, which mean this model is independent from the oscillator structure and can apply to arbitrary oscillator. And verify principle by experimental result, which derived from the modified Colpitts oscillator circuit, and results corresponds to the theoretical analysis.

## REFERENCES

- [1] B. P. Lathi, Communication systems, Wiley, 1968.
- [2] S. Haykin, Communication systems. John Wiley & Sons, 2008.
- [3] R. Adler, "A study of locking phenomena in oscillators." Proc. IEEE 61.10, 1973, pp. 1380-1385.
- [4] B. Van der Pole, "Forced oscillations in a circuit with nonlinear resistance," Phil. Mag., vol.43, 1927, p.65.
- [5] L.J. Paciorek. "Injection Locking of oscillators," Proc. IEEE, vol.61, Oct. 1973, pp. 1336-1410.
- [6] A. Kitipongwatana, P. Koseeyaporn, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, "Fundamental Behavior Analysis of Single-Frequency Sine Wave Forced Oscillator based on Linear Model and Multi-Time Technique," Radioengineering, vol. 23(2), 2014, pp. 697-708.
- [7] B. P. Lathi, Modern Digital and Analog Communication Systems. 3e Osece. Oxford university press, 1998, pp. 319-320.
- [8] J.R. Carson, "Notes on the theory of modulation", Proc. IRE, vol. 10, no. 1, Feb. 1922, pp. 57-64.
- [9] T. Maneechukate, J. Koseeyaporn, P. Wardkein, and P. Koseeyaporn, "Wide-band amplitude control of the second-order oscillator circuit," Int. J. Electronics and Communications, vol. 62 (9), Oct. 2008, pp. 666-673.
- [10] T. Maneechukate, P. Tuwanut, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, "New analytic solution of second-order oscillator using multi-time variables technique," International Symp. on Intelligent Signal Processing and Communication Systems, pp. 670-640, Dec. 2005.
- [11] T. Maneechukate, K. Prompak, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, "Accuracy behavior explanation of electrical second-order system based on multi-time technique," Scientific Research and Essays, vol. 8 (25), pp. 1180-1190, July. 2013.
- [12] M.M. Radmanesh, Radio frequency and microwave electronics illustrated, California State University, Northridge, Prentice Hall PTR, 2000.
- [13] S. Franco, Design with operational amplifiers and analog integrated circuits. McGraw-Hill, 2002
- [14] B. Razavi, RF microelectronics. Prentice Hall, 1998.

# Phase noise phenomenon explanation based multi-time variables differential equation technique

Kunanon Kittipute\* Panwit Tuwanut and Paramote Wardkein\*  
Faculty of Information Technology  
Telecommunication Engineering Department, Faculty of Engineering\*,  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang  
Ladkrabang, Bangkok, THAILAND 10520

**Abstract-** In this article, the mathematical analysis is proposed to describe phase noise phenomenon. The principle of this proposed scheme is based on the multi-time variables differential equation technique. The analytic result clearly shows that noise is composed of multiplicative noise that spread around an oscillated frequency and additive noise acts as a noise floor of a system. To verify the proposed analysis, the computer simulation results are given which demonstrate that the obtained results agree well with the theoretical counterpart.

## 1. INTRODUCTION

In communication system, sinusoidal oscillator is widely used, especially for generating a carrier signal in a modulator and a demodulator circuit. In ideal case, the spectrum of an ideal  $\omega_c$  sinusoidal signal is a single line located at the frequency  $\omega_c$  as depicted in Fig 1(a). But for real sinusoidal signal, its spectrum located at frequency  $\omega_c$  is shape-liked a skirt as shown in Fig 1(b). The double-sided spectra which spread around the center frequency  $\omega_c$  are known as phase noise.

This phase noise has an affect on a transmitter and a receiver in a communication system as illustrated in Fig. 2 and Fig. 3, respectively. In a transmitter, it causes the spectra of an information signal which occur around a carrier signal be covered with this phase noise as shown in Fig. 2. In the North America Digital Cellular IS54 standard, the power per unit bandwidth of phase noise must be below the power of a carrier signal at an offset frequency ( $\Delta\omega$ ) of 60 kHz about 115dB (-115dBc/Hz) [1]. At a receiver, the phase noise occurred at a local oscillator will also present in down converted frequency signal as shown in Fig. 3.

Due to this problem, many researchers [1-3] have been attempted to describe the phase noise phenomenon. But mostly, phase noise is said to be caused by nonlinearity in nature of a system or devices. To describe such phenomenon, a novel scheme based on multi-time differential equation technique is proposed in this paper. The proposed mathematic analysis provides clearly explanation that how phase-noise is happened.

The outline of this paper will be arranged as follows. In section II, the principles are discussed where the simulation

results are provided in section III. Finally the conclusion is given in section IV.

## II. PRINCIPLES

### A. Noise sources

Noise sources can be classified into two broad classes of sources; those external to the system such as atmospheric, solar, or man-made sources, and those internal to the system. The effect of the external noise sources on the system is difficult to be analyzed, depending heavily upon system location and configuration [4]. The main consideration of the analysis and design of communication systems is thus relative to the internal noise sources. There are many mechanisms related to the internal noise, some of them will be briefly discussed. Firstly, *thermal noise* or *Johnson noise* is generated

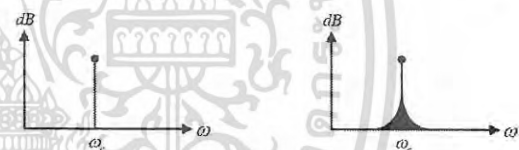


Figure 1. Frequency spectrum of (a) an ideal sinusoidal signal, (b) a real sinusoidal signal.

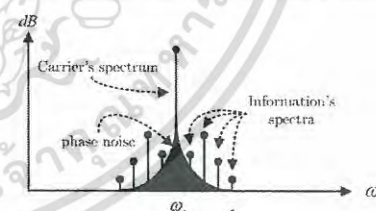


Figure 2. The effect of phase noise in a transmitter.

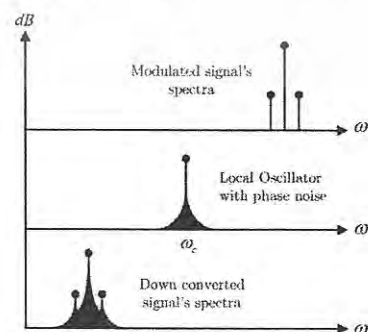


Figure 3. The effect of phase noise in a receiver.

by the thermal motion of electron in a resistor that is directly proportional to the temperature. The mean-square thermal noise voltage appearing across a resistor  $R$  ohms at temperature  $T$  Kelvin is

$$\overline{v_n^2} = 4kTR\Delta f \quad (1)$$

where  $k$  is the Boltzmann's constant ( $1.38 \times 10^{-23}$  J/K) and  $\Delta f$  is the bandwidth in Hertz.

Next, as current is carried by discrete charge, electrons, the current flow is not continuous. Thus, the current which appear to be a steady current, it, in fact, is composed of a large number of random independent current pulses. This gives rise to *shot noise* whenever current flows. Shot noise is most easily seen in semiconductor devices, i.e. diodes, transistor and MOS. It can be shown that if a current  $I$  is composed of a series of independent pulses with average value  $I_{DC}$ , then the noise current has mean-square value of

$$\overline{i_n^2} = 2qI_{DC}\Delta f \quad (2)$$

where  $q$  is charge of the electron ( $1.6 \times 10^{-19}$  C) and  $\Delta f$  is the bandwidth in Hertz.

Thermal noise and shot noise are both white noise sources that the power spectrum density (PSD) is equal power in each frequency interval. In other words, the power per unit bandwidth is constant.

In addition to thermal and shot noise,  $1/f$  noise or *flicker noise* also contributes to internally generated noise. This noise occurs in almost all electronic devices, and results from various causes, such as impurities in a conductive channel, generation and recombination noise in a transistor due to base current, and so on. It is always related to a direct current and it is a low-frequency phenomenon, as the high frequencies are overshadowed by the other noise sources. This noise takes the form of

$$\overline{i_n^2} = K \frac{I_{DC}^\alpha}{f^\beta} \Delta f \quad (3)$$

where  $\alpha$  is a constant in range 0.5 to 2,  $\beta$  is a constant about unity,  $I_{DC}$  is a direct current,  $K$  is a variable depending on a device process and  $\Delta f$  is the bandwidth in Hertz.

A typical combination of white noise and flicker noise is depicted in Fig. 4 where the corner frequency is usually defined by the flicker noise.

### B. Sinusoidal oscillator and phase noise

For a sinusoidal oscillator, it can be modeled as a second or higher order differential equation [5,6]. For simplicity of explanation, let us consider the second order differential equation as a mathematical model of the oscillator, which is

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (4)$$

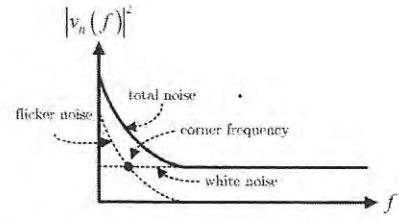


Figure 4. Total noise spectra in a system.

where  $a_0, a_1$  are known parameters and  $x(t)$  is the input signal of the system. The total response  $y(t)$  of the system is composed of natural response  $y_n(t)$  and force response  $y_f(t)$  then  $y(t) = y_n(t) + y_f(t)$ . For the natural response, it is determined by

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (5)$$

Hence,

$$y_n(t) = C_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + C_2 e^{(\sigma-j\omega)t} \quad (6)$$

where  $C_1$  and  $C_2$  are constants which can be obtained by initial conditions at  $t=0$ ,  $\sigma = -a_1/2$  is a damping factor, and  $\omega$  is a natural frequency which is  $\sqrt{a_1^2 - 4a_0}/2$ . Next, the force response  $y_f(t)$  can be solved as following

$$\frac{d^2 y_f(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy_f(t)}{dt} + a_0 y_f(t) = x(t) \quad (7)$$

Then, the total response of the system can be expressed as

$$y(t) = C_1 e^{(\sigma+j\omega)t} + C_2 e^{(\sigma-j\omega)t} + y_f(t) \quad (8)$$

To eliminate a damping effect,  $a_1$  is set to be zero whereas  $C_1, C_2$  are set to be  $C/2$ , which results in

$$y(t) = C \cos(\omega t) + y_f(t) \quad (9)$$

As seen in (9), the output signal is composed of a sinusoidal signal and a force signal represents an input signal. To determine amplitude of the sinusoidal output, it can be achieved by substituting the initial conditions at  $t=0$ , which are  $y(0) = A$  and  $\frac{dy(0)}{dt} = 0$ , thus yields  $C = A - y_f(0)$ .

The total response therefore is

$$y(t) = (A - y_f(0)) \cos(\omega t) + y_f(t) \quad (10)$$

As result given by (10), it implies that amplitude of sinusoidal signal is constant even though the forcing input signal is time-varying. Recently, T. Maneechukate et al. [6] proposed a new analysis of a second-order system based on multi-time technique [7] and found that the amplitude of sinusoidal signal

is also varied according to the forcing input signal. To clarify phase noise phenomenon in this paper, the analysis of a second-order system based on multi-time variables technique is briefly reviewed. It should be noted that another time variable  $\tau$  is introduced. The second-order differential equation of the oscillator is thus given by

$$\frac{d^2 y_f(\tau)}{d\tau^2} + a_1 \frac{dy_f(\tau)}{d\tau} + a_0 y_f(\tau) = x(\tau) \quad (11)$$

where the total response is rewritten to be

$$y(t, \tau) = C \cos(\omega t) + y_f(\tau). \quad (12)$$

In this case, the amplitude  $C$  is determined by substituting the initial conditions at  $t=0$ , which are  $y(0, \tau) = A$  and  $\frac{dy(0, \tau)}{dt} = 0$  where

$$C = A - y_f(\tau). \quad (13)$$

The total response then is

$$y(t, \tau) = A \cos(\omega t) - y_f(\tau) \cos(\omega t) + y_f(\tau). \quad (14)$$

As can be seen in (14), the amplitude of sinusoidal oscillator depends on the initial conditions at  $t=0$  and the forced response at any arbitrary time. In addition, if the system has the noise voltage  $n(\tau)$  at the input node of the system, for  $\tau = t + t_0$  by initial time  $t_0 \approx 0$ , then  $\tau \approx t$ , the output signal thus can be expressed as

$$y(t) = A \cos(\omega t) - n_f(t) \cos(\omega t) + n_f(t). \quad (15)$$

The first term of (15) is the sinusoidal signal, the second term is called a multiplicative noise and the last term is an additive noise. As the total noise spectra shown in Fig. 4, hence the output spectra of the system can be depicted in Fig. 5. It thus implies that the sinusoidal spectrum is not a single impulse, but be around with the total noise that acts as a multiplicative noise or phase noise, and the additive noise acts as a noise floor.

### III. SIMULATION RESULTS

The JFET Colpitts oscillator as illustrated in Fig.6 is used to be a circuit for verification of the proposed principle. The system equation of the JFET Colpitts oscillator is given by

$$LC \frac{d^2 v_f(\tau)}{d\tau^2} + v_f(\tau) = v_i(\tau) \quad (16)$$

where the total response with  $t_0 \approx 0$  is

$$y(t) = (V_{SAT} - v_f(t)) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + v_f(t) \quad (17)$$

where  $V_{SAT}$  is an initial condition voltage at  $t=0$ ,  $y(0, \tau) = V_{SAT}$  and  $\frac{dy(0, \tau)}{dt} = 0$ . The natural frequency of this circuit is set at 3.15 MHz.

Firstly, the phenomenon that the amplitude of sinusoidal signal is varied to the forced response is observed. The sinusoidal signal with amplitude 0.5Vpp, offset voltage 0.5V and frequency 100 kHz is employed to at  $t=10\mu s$ . The simulation result is depicted in Fig. 7 and the output's spectra are shown in Fig. 8.

From Fig. 7, the amplitude of the oscillated output is first constant before the forcing input signal is fed. As can be seen after the forcing input signal is fed to the system, the amplitude of the output is varied to the forced response. Additionally, the spectra of the output shown in Fig. 8 are of the sinusoidal signal, of the forced response and of the multiplicative between the sinusoidal signal and the forced response.

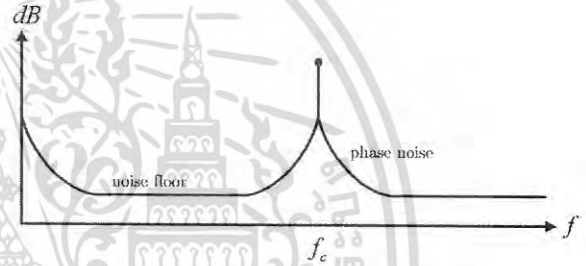


Figure 5. Output's spectrum of the system.

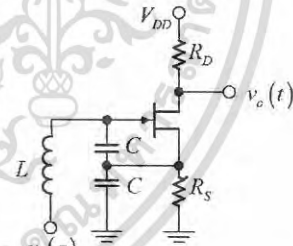


Figure 6. The JFET Colpitts oscillator.

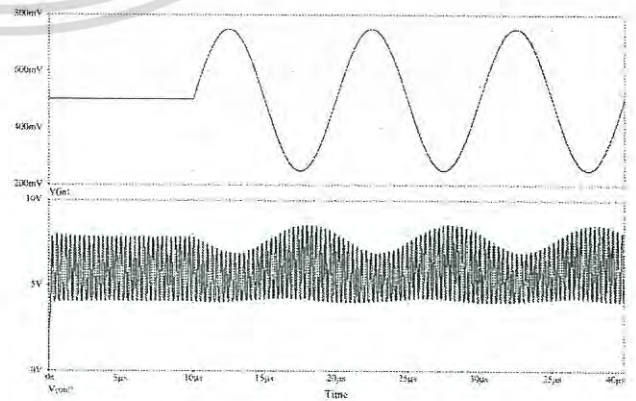


Figure 7. The upper trace is the input signal that fed at  $t = 10 \mu s$ .  
The lower trace is the output signal of the system.

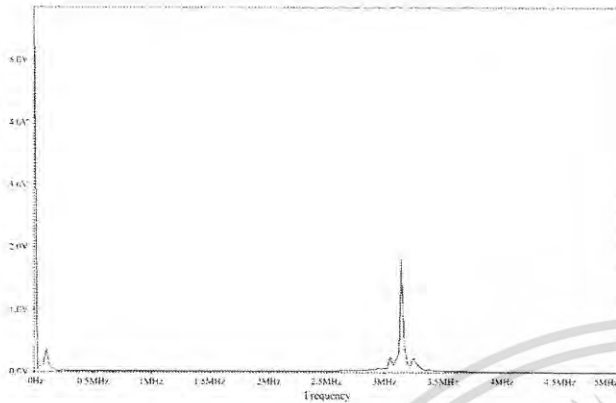


Figure 8. The spectra of the output signal.

Moreover, the total noise is employed to be an input of the JFET Colpitts oscillator where expected output spectra are as given in Fig. 5. The results are demonstrated in Fig. 9 where the upper trace is the input noise spectra (representing the total noise) and the lower trace is the resulted output noise spectra. It is seen that the output noise spectra are composed of the sinusoidal spectrum which is around with the total noise (phase noise), and the additive noise floor.

#### IV. CONCLUSIONS

A novel mathematical analysis for phase noise phenomenon explanation is proposed in this work. The proposed mathematical scheme is based on the multi-time variables differential equation technique. The obtained analytical result is clearly indicated that the phase noise in the system is due to the multiplication between the noise response and the sinusoidal signal. It thus results in the spectrum of the sinusoidal frequency be covered with multiplicative noise. The

simulation results have been demonstrated which agree well with the theoretical anticipation.

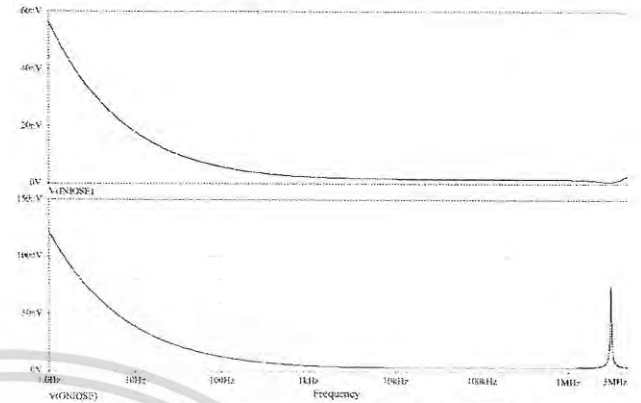


Figure 9. The upper trace is the input noise spectra.  
The Lower trace is the output noise spectra.

#### REFERENCES

- [1] Behzad Razavi, "A study of Phase noise in CMOS Oscillator," *IEEE Journal of solid-state circuit*, vol. 30, March 1996, pp.331-343.
- [2] D.B. Leeson, "A simple model of feedback oscillator noise spectrum," *Proc. IEEE*, pp.329-330, Feb. 1966.
- [3] A. A. Abidi and R. G. Meyer, "Noise in relaxation oscillators," *IEEE J. Solid-State Circuits*, Vol. SC-18, Dec. 1983, pp. 794-802.
- [4] R.E. Ziemer and W.H. Tranter, *Principles of Communications*, 5<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons Inc., 2002, pp.579-583.
- [5] R. Panchalard, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, "Analytic Solution of Amplitude Controlled Digital Oscillator Using Multi-Time Variables Technique," *IEEE APCCAS 2006*, 4-7 Dec. 2006, pp.2012 – 2015.
- [6] T. Maneechukate, P. Tuwanut, J. Koseeyaporn, and P. Wardkein, "New analytic solution of second-order oscillator using multi-time variables technique," *IEEE Int. Symp. Intelligent Signal Processing and Communication Systems*, Dec. 2005, pp.637-640.
- [7] J. Roychowdhury, "Analyzing circuits with widely separated time scales using numerical PDE methods," *IEEE Trans. Circuits and Systems Fundamental Theory and Application*, vol. 48, 5, 2001, pp. 578-594.

# SCIENTIFIC REPORTS

OPEN

## Homodyne detection of short-range Doppler radar using a forced oscillator model

Kunanon Kittipute<sup>1</sup>, Peerayudh Saratayon<sup>2</sup>, Suthasin Srisook<sup>1</sup> & Paramote Wardkein<sup>1</sup>

Received: 25 July 2016

Accepted: 26 January 2017

Published: 02 March 2017

This article presents the homodyne detection in a self-oscillation system, which represented by a short-range radar (SRR) circuit, that is analysed using a multi-time forced oscillator (MTFO) model. The MTFO model is based on a forced oscillation perspective with the signal and system theory, a second-order differential equation, and the multiple time variable technique. This model can also apply to analyse the homodyne phenomenon in a difference kind of the oscillation system under same method such as the self-oscillation system, and the natural oscillation system with external forced. In a free oscillation system, which forced by the external source is represented by a pendulum with an oscillating support experiment, and a modified Colpitts oscillator circuit in the UHF band with input as a Doppler signal is a representative of self-oscillation system. The MTFO model is verified with the experimental result, which well in line with the theoretical analysis.

In the self-oscillation system, the amplitude of the oscillator in steady state was independent from initial state<sup>1</sup>, and this steady amplitude can be determined in the term of the compensation between the transferred energy which produced by nonlinear part of system, and energy losses which occur in all practical systems. Thus, if the external source was applied through the system, the external source would be defined as a perturbed function in nonlinear part of the system, or we can interpret this nonlinear part as the modulation part between a feedback of the oscillation with the external forced. Resulting, general system modelling is based on the operation of each circuit element, has been emphasised, such as feedback analysis and specific modelling. These are impressive and causal methods for explaining the system response, such as different circuit structures producing different system responses<sup>2–47</sup>. For example, self-excited electrical oscillator cases have been based on Adler's equation<sup>2–7</sup> or the Van der Pol equation<sup>8–11</sup>, therein being combined with perturbation methods, which depend upon many complementary factors, including the physical characteristics of the system and the system's elements and boundary conditions<sup>12–16</sup>. Moreover, phase-domain analysis has been used in some studies<sup>17–19</sup>. In the short-range radar (SRR) circuit case, the Symbolical Abbreviated Equation (SAE) which based on perturbation method was playing an important role to analyse an oscillator which simultaneously generates the transmitted signal and modulates the transmitted and reflected signal, this self-oscillator is called autodyne<sup>9</sup>. This model was appropriate for in-depth analysis of specific feature in system, such as the effect of the external impact with definite time delay<sup>20</sup>, the characteristics of noise in autodynes<sup>21</sup>.

Current military technology has applied SRR to many disciplines, such as muzzle velocity measurement, short-range air electronic counter measure, and proximity fuzes<sup>22–25</sup>. The Doppler SRR is a continuous-wave radar which can be categorized into two types, the first is unmodulated continuous-wave radar and second modulated continuous-wave radar. The unmodulated continuous-wave radar can operate by sending out a transmitted signal, which is later reflected by a target. Here, the reflected signal will possess a shift in frequency that directly varies with the speed of the target itself. Such a phenomenon is called the Doppler effect, hence the name "Doppler frequency"<sup>26</sup>.

Among the many techniques for recovering the Doppler frequency in the unmodulated continuous-wave radar, the directly one is homodyne detection, which can directly convert the Doppler-shifted frequency into the Doppler frequency. Homodyne detection is a method of detecting the desired signal by multiplying the reference signal (the local oscillator) and the arbitrary signal (the shifted signal, or the modulated signal). Then,

<sup>1</sup>Department of Telecommunication Engineering, Faculty of Engineering, King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang, Ladkrabang, Bangkok 10520 Thailand. <sup>2</sup>Defence Technology Institute, Ministry of Defence, Banmai Pakkret, Nontburi 11120 Thailand. Correspondence and requests for materials should be addressed to K.K. (email: kunanon.kit@gmail.com)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

the homodyne technique can be used as one of the important parts of many types of science and engineering experiments<sup>27–48</sup>. For instance, to verify quantum entanglement, the homodyne technique was used to detect a variant of the quantum states<sup>27–38</sup>, which entangle each other. In gravity wave detection, homodyne detection was an important key in laser interferometry for detecting the gravitational signal<sup>39–46</sup>. Conventionally, the homodyne in self-oscillation system was defined as self-mixing oscillator, which can be analysed with perturbation method, where the amplitude of the self-oscillation system only depends on a nonlinear damping in the steady state.

However, the evidence for the dependence between the initial condition and self-oscillation system was reported in T. Maneechukate *et al.*'s research<sup>47,48</sup>. They develop the multi-time forced oscillator (MTFO) model with the signal and system framework, this model consists of signal and system theory, a second-order differential equation, and the multiple time variable technique. As a result, a greater number of frequency components can be explained. In the signal and system background, arbitrary physical quantities are the information, as depicted by the signal, and the external force is shown by the input signal, with these signals transformed into an output signal from the system. These output signals are the consequence of interaction between an external force and the system; we call this the signal and system theory<sup>49,50</sup>. In this principle, almost any physical system can be modelled by a differential equation that describes the relationship between the output and input quantity and that represents the law of motion of the system, such as a mechanical system based on Newton's law, an electrical circuit based on Kirchhoff's law, or the laws of the circuit's constitutive elements. From this point of view, arbitrary structure of forced oscillation system based on same mathematical tool, the second order differential equation, and noted that the nonlinear behaviour is a basis pattern for all kind of forced oscillating structure. Then MTFO model was the simple model to analysed a self-oscillation system with a forced system perspective, which constructed from a second order differential equation. The complete solution composed of two independent solution (homogeneous and the particular solutions) and the independent time variable for each solution, with multi-time variable initial condition, which interpreted as the amplitude of natural response effected by forced response at any time, not just at the initial time. Thus, the origin of nonlinearity of system can be derive from this interpretation (more detail in result section). The advantage of MTFO model is applying to every forced oscillating system analysis, without constrained of specific structure (such as mechanical and electrical system), then we can apply MTFO model to analyse any kind of scheme in homodyne detection device. In this article, homodyne in a forced oscillator background was observed to detect the Doppler signal. We analyse a single forced oscillator circuit applied in an SRR system with the MTFO model. The MTFO model represents another way of looking at such phenomenon from the simple viewpoint of signal and system theory: an oscillator circuit under its forced oscillation state, where the Doppler-shifted signal is the forced input. This is the difference between MTFO model and conventional model, the general electrical oscillator was classified as the self-oscillation system.

Here, a Doppler SRR circuit is considered to be similar to an oscillator that is forced by an external input, and the homodyne detection occurring from the phenomenon has been explained using the MTFO model. Apart from this, homodyne detection in the Doppler SRR circuit has been discovered. A low-frequency component was then found and singled out, which result was similar to self-mixing oscillator<sup>51</sup>. Furthermore, the analysis under signal and system theory enables the feeding of a forced input, or simply a Doppler-shifted signal, into the circuit that can also be performed at any point, which implies that the system response to the external source are all the same under the same principle.

## Result

**MTFO model.** For in-depth understanding, a forced-input oscillation shall be explained using this signal and system first with a conventional analysis and then with the MTFO model.

In general, the explanation of an oscillator circuit under a single tone sinusoidal forced input situation can be accomplished using a second order differential equation to find a natural response  $x_n(t)$  in Eq. (1). While a forced response is named a sinusoidal steady state response  $x_f(t)$  shown in Eq. (2). A complete response  $x_0(t)$  is composed of both natural and forced responses according to Eq. (3).

$$\frac{d^2 x_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 x_n(t) = 0; x_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) \quad (1)$$

$$\frac{d^2 x_f(t)}{dt^2} + \omega_n^2 x_f(t) = f(t) = Y_0 \cos(\omega_f t); x_f(t) = |H(\omega_f)| Y_0 \cos(\omega_f t + \angle H(\omega_f)) \quad (2)$$

$$x_0(t) = (X_0 - x_f(t_0)) \cos(\omega_n t) + |H(\omega_f)| Y_0 \cos(\omega_f t + \angle H(\omega_f)) \quad (3)$$

where  $A_n$  is the natural response's amplitude, which depends upon the initial condition of the system  $X_0$  and the forced response at initial time  $x_f(t_0)$ ;  $\omega_n$  is the natural frequency generated from the oscillator;  $Y_0$  is the magnitude of the input fed into the system;  $\omega_f$  is the input frequency;  $|H(\omega_f)|$  is the magnitude response of the transfer function of an oscillator  $H(\omega_f)$ ; and  $\angle H(\omega_f)$  is the phase response of the oscillator's transfer function. From the complete response in Eq. (3), the amplitude of the natural response is affected by the forced response at the initial time only, which is in contrast with experimental results.

Recently, T. Maneechukate *et al.* used a second-order differential equation with the multiple time variable technique to solve a variety of forced oscillator problems using a single model<sup>47,48,52–57</sup>, the MTFO model. The results of their experiment confirmed that the forced response had an effect on the amplitude of the natural response at any time. To simplify analysis, we set  $t_0 = 0$ , the amplitude of the natural response in MTFO model can be shown as Eq. (4).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$A_n = x_0(0, \tau) - x_f(\tau) = X_0 - x_f(\tau) \quad (4)$$

Then the complete response based on MTFO model can be shown as Eq. (5)

$$x_0(t, \tau) = (X_0 - x_f(\tau))\cos(\omega_n t) + x_f(\tau) \quad (5)$$

where  $\tau$  is an arbitrary time variable, we can also interpret  $\tau \equiv t - t_0$  as a time delay, with  $t_0$  is the initial time of the forced oscillation system. We can note that the term of  $x_f(\tau)\cos(\omega_n t)$  from (5), is the occurrence for nonlinearity of the system.

**Homodyne detection in a forced oscillation system.** From our perspective, the Doppler shift signal reflected from a moving target as the input into the oscillator is shown in Eq. (6), and the resulting forced response of the second-order oscillator system can be found as shown in Eq. (7). Substituting this value into Eq. (5), one will obtain an absolute response of the second-order oscillator as shown in Eq. (8).

$$\varphi_D(\tau) = \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau) \quad (6)$$

$$\therefore x_f(\tau) = |H(\omega_n \pm \omega_d)|\rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau + \angle H(\omega_n \pm \omega_d)) \quad (7)$$

$$x_0(t, \tau) = (X_0 - |H(\omega_n \pm \omega_d)|\rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau + \angle H(\omega_n \pm \omega_d)))\cos(\omega_n t) + |H(\omega_n \pm \omega_d)|\rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau + \angle H(\omega_n \pm \omega_d)) \quad (8)$$

where  $\rho_0$  is magnitude of the reflected Doppler, and  $\omega_d$  is the Doppler frequency.

To make it easy to understand, it is therefore assumed that  $t_0 = 0$ , and then  $\tau \equiv t$ . When expanding Eq. (8), one can rewrite a new complete response as shown in Eq. (9).

$$x_0(t) = -\frac{|H(\omega_d)|}{2}\rho_0 \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) + X_0 \cos(\omega_n t) + |H(\omega_n \pm \omega_d)|\rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H((\omega_n \pm \omega_d))) - \frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2}\rho_0 \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \quad (9)$$

It can be observed that the first term of Eq. (9) is the explicit Doppler frequency. By passing this absolute response through a low-pass filter, one can recover the Doppler signal without using an AM demodulator.

From the above, a simple mathematical analysis with an obvious homodyne detection in the arbitrary forced oscillation system has been shown, and the MTFO model was confirmed by a different structure of the forced oscillation system in T. Maneechukate *et al.*'s articles. The interesting experiment from their article that has inspired us was the pendulum with an oscillating support experiment<sup>54</sup>, where homodyne behaviour in the mechanical oscillation system occurred which based on the MTFO model. We redrew the experiment and results from their article in Fig. 1. While the forced was switched-off, the pendulum system was a free oscillation system, which their natural response  $\varphi_n(t)$  can be explained by Eq. (11). By define  $g$  is the gravity acceleration constant, and  $l$  is the length of light rod. The natural frequency of pendulum system can be obtained as  $\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta_d}{2m}\right)^2}$ , by  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ , their amplitude would decay respect to time, due to damping constant  $\beta_d$ .

$$m \frac{d^2 \varphi_n(t)}{dt^2} + \beta_d \frac{d\varphi_n(t)}{dt} + \frac{mg\varphi_n(t)}{l} = 0; \varphi_n(t) = A_n e^{-\frac{\beta_d}{2m}t} \cos(\omega_n t) \quad (11)$$

We can note that this system is not a self-oscillation system, due to it can oscillate without the external source. After we apply the external forced  $\varphi_i(\tau) = B_0 \cos(\omega_i \tau)$ , the forced response  $\phi_f(\tau)$  was found as Eq. (12).

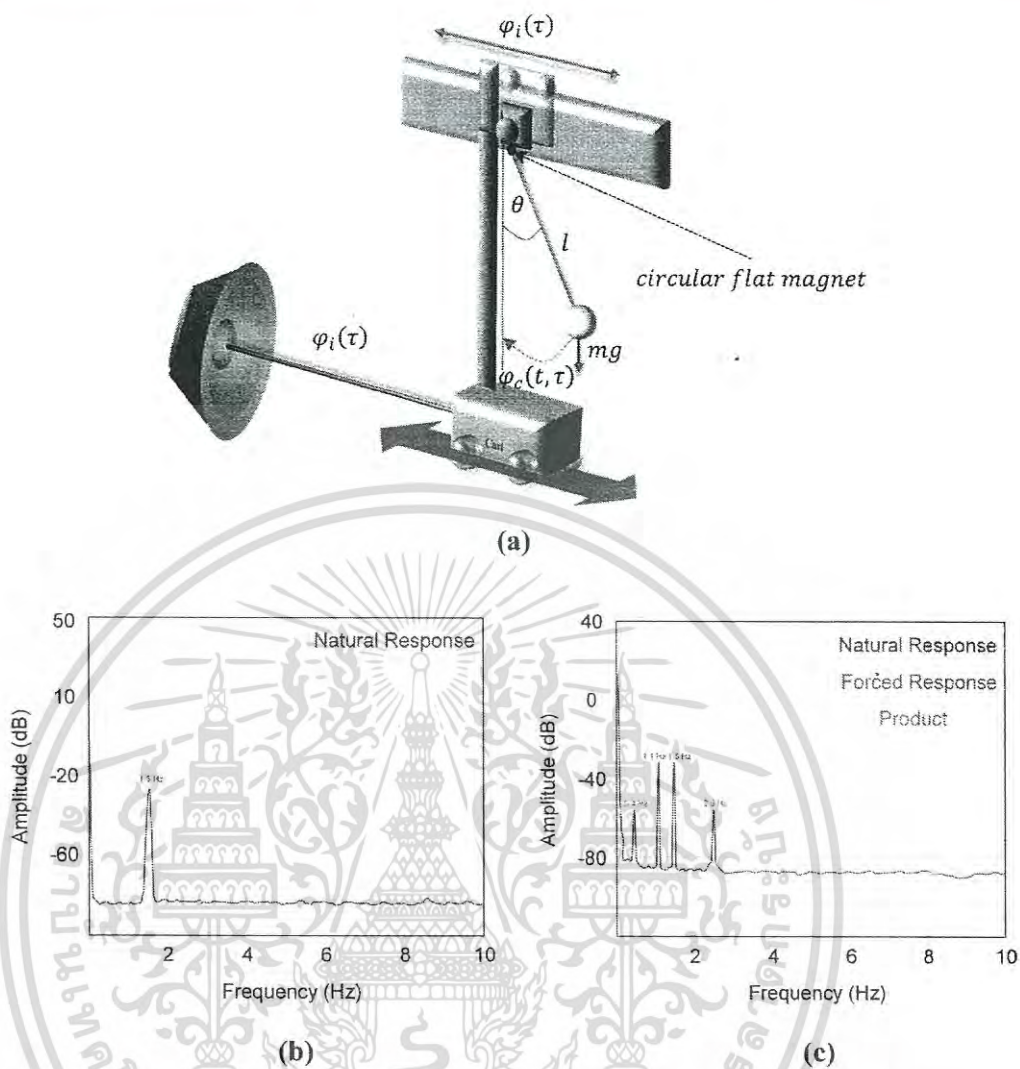
$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \varphi_f(\tau)}{d\tau^2} + \beta_d \frac{d\varphi_f(\tau)}{d\tau} + \frac{mg\varphi_f(\tau)}{l} &= B_0 \cos(\omega_i \tau); \varphi_f(\tau) \\ &= |H(\omega_i)| B_0 \cos(\omega_i \tau + \angle H(\omega_i)) \end{aligned} \quad (12)$$

where magnitude and phase response can be obtained in Eq. (13).

$$\begin{aligned} |H(\omega_i)| &= \frac{1}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + \left(\frac{\beta_d}{m}\right)^2 \omega_i^2}} \\ \angle H(\omega_i) &= -\tan^{-1} \frac{(\beta_d \omega_i)}{m(\omega_0^2 - \omega_i^2)} \end{aligned} \quad (13)$$

The amplitude of natural response  $A_n$  can be derived as Eq. (4), then the complete response  $\varphi_c(t, \tau)$  of this forced oscillation system can be shown as:

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า



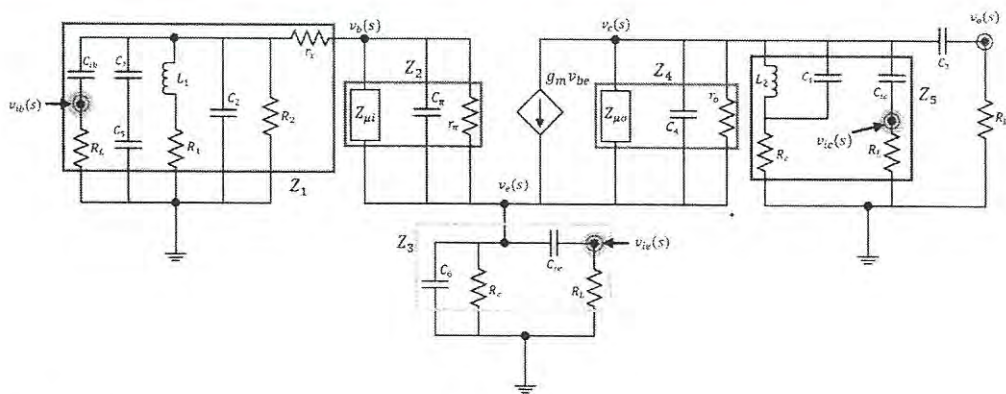
**Figure 1. Pendulum with an oscillating support experiment.** (a) A light rod 0.1 m in length is attached to a mass of 0.1 kg at one end and to a rotating point at the other end at the movable support; near this one end of the light rod, a circular flat magnet is attached. This movable support is directly connected to the cart's pillar, and the body of the cart is connected to the centre of the speaker, which is controlled by a signal generator. Thus, the output signal from the speaker is the external input  $\varphi_i(t)$  that is injected through the support of the pendulum system. The light rod's position  $\varphi_c(t, \tau)$  is measured by a Hall effect motion sensor, UGN3503, that is placed near the circular flat magnet; the sensor is connected through an oscilloscope, and the FFT (fast Fourier transform) function is used to display the output in the frequency domain. Moreover, the pendulum swings less than 5 degrees to avoid nonlinear behaviour. (b) A natural frequency spectrum at 1.5 Hz, with no forced input from the oscillating support. (c) Complete response spectra of the forced pendulum system, which is forced by a sinusoidal wave at 1.1 Hz.

$$\varphi_c(t, \tau) = e^{-\frac{\beta_d}{2m}t} \left( X_0 \cos(\omega_n t) - \frac{D_0}{2} \cos((\omega_n + \omega_i)t + \theta_0) - \frac{D_1}{2} \cos((\omega_n - \omega_i)t + \theta_1) \right) + D_2 \cos(\omega_i t + \theta_2) \tag{14}$$

where  $D_0 = B_0 |H(\omega_n + \omega_i)|$ ,  $D_1 = B_0 |H(\omega_n - \omega_i)|$ ,  $D_2 = B_0 |H(\omega_i)|$ ,  $\theta_0 = \angle H(\omega_n + \omega_i) - \omega_i t_0$ ,  $\theta_1 = \angle H(\omega_n - \omega_i) - \omega_i t_0$ , and  $\theta_2 = \angle H(\omega_i) - \omega_i t_0$ .

From the results, the direct conversion achieved by forcing the pendulum with a sinusoidal signal is based on the MTFO model. These results implied that there is intrinsic homodyne for an arbitrary oscillation system; therefore, the MTFO model can also be used for specific structures, such as a modified Colpitts oscillator.





**Figure 4. Equivalent circuit with reduction.** High-frequency small-signal equivalent circuit of modified Colpitts oscillator after circuit reduction.

$$\frac{v_b(s)}{Z_1} + \frac{v_b(s) - v_e(s)}{Z_2} = 0 \tag{16}$$

$$\frac{v_e(s)}{Z_3} + \frac{v_e(s) - v_c(s)}{Z_4} + \frac{v_e(s) - v_b(s)}{Z_2} - g_m v_{be} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{v_c(s)}{Z_5} + \frac{v_c(s) - v_e(s)}{Z_4} + \frac{v_c(s) - v_o(s)}{Z_{C_3}} + g_m v_{be} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{v_{ie}(s)}{R_L} + \frac{v_{ie}(s) - v_e(s)}{Z_{C_{ie}}} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{v_o(s)}{R_L} + \frac{v_o(s) - v_c(s)}{Z_{C_3}} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{v_{ic}(s)}{R_L} + \frac{v_{ic}(s) - v_c(s)}{Z_{C_{ic}}} = 0 \tag{21}$$

where  $v_{ic}(s)$ ,  $v_{ib}(s)$ , and  $v_{ie}(s)$  are the collector-, the base-, and the emitter-fed input node respectively. The BJT ports node for the collector, the base, and the emitter are represented as  $v_c(s)$ ,  $v_b(s)$ , and  $v_e(s)$ . And  $v_o(s)$  is the output node. And the impedance for  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$ ,  $Z_4$ , and  $Z_5$  can be found as:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{Z_{L_1} + R_1} + \frac{1}{Z_{C_2}} + \frac{1}{Z_{C_5} + Z_{C_7}} + \frac{1}{Z_{C_{ib}} + R_L} + \frac{1}{R_2} + r_x \\ Z_2 &= \frac{1}{Z_{C_\pi}} + \frac{1}{r_\pi} + \frac{1}{Z_{\mu i}} \\ Z_3 &= \frac{1}{Z_{C_{ie}} + R_L} + \frac{1}{Z_{C_6}} + \frac{1}{R_e} \\ Z_4 &= \frac{1}{Z_{C_4}} + \frac{1}{r_o} + \frac{1}{Z_{\mu o}} \\ Z_5 &= \frac{1}{\left(\frac{1}{Z_{L_2}} + \frac{1}{Z_{C_1}}\right) + R_c} + \frac{1}{Z_{C_{ic}} + R_L} \end{aligned} \tag{22}$$

By  $Z_{\mu i} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{C_\mu}} + \frac{1}{r_\pi}}$  and  $Z_{\mu o} = \frac{1}{\frac{1}{Z_{C_\mu}} + \frac{1}{r_\pi}}$  with  $A_v$  is the collector to emitter gain. When substituting the impedance of any capacitors with  $Z_C = \frac{1}{sC}$  and the impedance of any inductance with  $Z_L = sL$ , one can solve Eqs (15) to (21) with zero input having been set ( $v_{ib}(s)$ ,  $v_{ic}(s)$ ,  $v_{ie}(s) = 0$ ). The homogenous equation of the modified Colpitts oscillator can be shown in Eq. (23).

$$a_6s^6v_o(s) - a_5s^5v_o(s) - a_4s^4v_o(s) - a_3s^3v_o(s) - a_2s^2v_o(s) - a_1sv_o(s) - a_0v_o(s) = 0 \tag{23}$$

where  $a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1,$  and  $a_0$  are simplify parameters (see Method).

After solving Eq. (23), the natural frequency is derived as in Eq. (24).

$$f_n \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{A_v L_2 R_L (C_3 + C_{ic})(C_1 + R_c) - C_3 R_L}{A_v L_2 C_{ic} C_3 R_L (C_{\mu} C_4 r_o R_L (C_1 + R_c) - C_3 (C_4 r_o + C_{\mu})(C_1 + R_c + R_L))}} \tag{24}$$

A suitable point where one should feed the reflected Doppler is not necessarily through a system feedback path, the output of the circuit. For an oscillator under forced oscillation, an analysis can be performed when an input signal is injected into either the emitter, the collector, or the base of the transistor, while the output can be measured at the Collector. In this article, an experiment and analysis had been undertaken for all cases where the reflected Doppler has been injected into the emitter, the collector and the base of the transistor.

As the reflected Doppler has been injected into the base circuit of the transistor of the oscillator, the analysis must be carried out on the transfer function of the system. By solving node equations, the relationships between the base, emitter, or collector inputs and the output are shown in Eqs (25) to (27), respectively.

$$\rho_1 \rho_2 v_{ib}(s) = \gamma_n v_o(s) \tag{25}$$

$$\rho_1 \rho_3 v_{ie}(s) = \gamma_n v_o(s) \tag{26}$$

$$\rho_1 \rho_4 v_{ic}(s) = \gamma_n v_o(s) \tag{27}$$

where

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{Z_{C_3} + R_L}{Z_5 R_L} + 2 \frac{Z_{C_3} + R_L}{Z_4 R_L} - \frac{1}{Z_{C_3}} \\ \rho_1 &= \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2} - \frac{1}{Z_2} - \frac{2g_m Z_2}{Z_1} \\ \rho_2 &= \frac{((Z_{C_{ib}} + R_L)((Z_1 + Z_{C_{ib}})(Z_{C_{ib}} + R_L) - Z_1 r_x R_L + r_x^2 R_L + 1) + r_x R_L)}{(Z_1(Z_{C_{ib}} + R_L) - r_x(Z_{C_{ib}} + R_L) - 1)R_L Z_{C_{ib}}} \\ \rho_3 &= \frac{Z_1(Z_{C_{ie}} + R_L)}{R_L(Z_1 + Z_{C_{ib}})} \\ \rho_4 &= \left( \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_3} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_4} + \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_4} - \frac{1}{Z_2} - \frac{g_m Z_2}{Z_1} \right) \frac{Z_4(Z_{C_{ic}} + R_L)}{R_L} \end{aligned} \tag{28}$$

After substituting the impedance value into the Eqs (25) to (27) and taking some approximation by omitting some insignificant terms, the magnitude and phase response of the system can be found as shown in Eqs (29) to (31).

$$\begin{aligned} A_{\psi_b} &\approx \frac{2g_m \omega^3 A_v^2 L_1^2 C_3 r_{io} R_L}{R_c r_x^2 (C_5 + C_7)} \\ \Phi_{\psi_b} &\approx \tan^{-1} \left( \frac{R_1(3R_1 + R_2)}{\omega L_1(2R_1 + R_2)} \right) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} A_{\psi_c} &\approx \frac{2g_m \omega^3 A_v L_1^3 C_3 r_x r_{io} r_o (R_1 + R_2) \sqrt{\omega^2 L_1^2 (2R_1 + R_2)^2 + R_1^4}}{C_{ic} R_2 ((\omega^2 L_1^2 (2R_1 + R_2))^2 + (\omega L_1 R_1 (3R_1 + R_2))^2)} \\ \Phi_{\psi_c} &\approx \tan^{-1} \left( \frac{\omega L_1 R_1^2}{\omega^2 L_1^2 (2R_1 + R_2) + R_1^2 (7R_1 + 4R_2)} \right) \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} A_{\psi_e} &\approx \frac{2g_m^2 \omega A_v^4 L_1 r_{io}^2 r_{ie}^2 C_3 R_L r_o (2R_1 + R_2) \sqrt{(\omega^5 L_1^6)^2 + (4L_1 R_1)^2}}{C_{ic} R_c R_L r_x^2 (C_5 + C_7) ((R_1(R_1 + R_2) + (2R_1 + R_2)))^2 + (L_1(2R_1 + R_2))^2} \\ \Phi_{\psi_e} &\approx \tan^{-1} \left( \frac{\omega L_1^2 (2R_1 + R_2) + 4R_1(R_1(R_1 + R_2) + (2R_1 + R_2)^2)}{4L_1 R_1 (2R_1 + R_2)} \right) \end{aligned} \tag{31}$$

Subsequently, the forced response of the system for the base-, emitter-, and collector-fed circuits can be found by substituting Eqs (29) to (31) into Eq. (6) as follows:

$$x_{fb}(\tau) = A_{\psi_b} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau + \Phi_{\psi_b}) \quad (32)$$

$$x_{fe}(\tau) = A_{\psi_e} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau + \Phi_{\psi_e}) \quad (33)$$

$$x_{fc}(\tau) = A_{\psi_c} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)\tau + \Phi_{\psi_c}) \quad (34)$$

From the above analysis, a complete response for the base-, emitter-, and collector-fed circuits has been established as shown below:

$$\begin{aligned} x_{ob}(t) = & -\frac{|H(\omega_d)|}{2} \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) + X_0 \cos(\omega_n t) \\ & + A_{\psi_b} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \Phi_{\psi_b}) - \frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2} \\ & \times \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} x_{oe}(t) = & -\frac{|H(\omega_d)|}{2} \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) + X_0 \cos(\omega_n t) \\ & + A_{\psi_e} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \Phi_{\psi_e}) - \frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2} \\ & \times \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} x_{oc}(t) = & -\frac{|H(\omega_d)|}{2} \cos(\omega_d t + \angle H(\omega_d)) + X_0 \cos(\omega_n t) \\ & + A_{\psi_c} \rho_0 \cos((\omega_n \pm \omega_d)t + \Phi_{\psi_c}) - \frac{|H(2\omega_n \pm \omega_d)|}{2} \\ & \times \cos((2\omega_n \pm \omega_d)t + \angle H(2\omega_n \pm \omega_d)) \end{aligned} \quad (37)$$

From the above analysis of the forced response, it can be concluded that the reflected signal can be fed into either the collector-, the base-, or the emitter-fed circuits of a transistor. Additionally, when substituting into the absolute response, the result will be similar. Only the magnitudes and phases will differ; however, in all cases, the first term obtained will be the Doppler frequency component. From these, we can apply more than one Doppler shifted signal to circuit, and we still also can classify the point of fed circuit by magnitudes and phases response of system. Then, we can apply this advantage to improve more application in our future work, such as define multiple target in three different direction. In next section, these system analyses have been investigated by our experiment.

**Short-range Doppler radar experiment.** From the previous section, we verify the principle by an experiment using a modified Colpitts oscillator that was established from the schematic in Fig. 2. While there is not any Doppler reflected back, the spectrum of the output signal from the oscillator measured with a spectrum analyser set at a normalized impedance value of  $50 \Omega$  is shown in Fig. 5. The signal obtained is a sinusoidal signal with a fundamental frequency of 2.76 GHz.

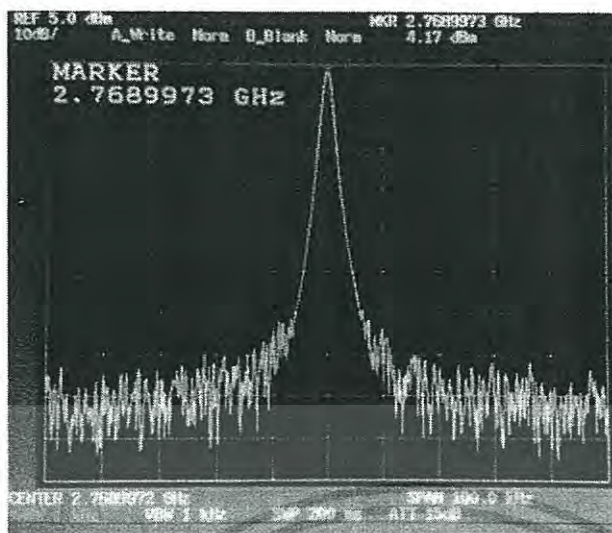
Next, a reflected Doppler was fed into the oscillator circuit, and all possibilities, namely the emitter, the collector, and the base, were used to receive the input. From our experimental observation, the sensitivity of this modified Colpitts oscillator, without add on processing process is  $-57.13$  dB with range of bandwidth 40 kHz. Thus, an imitating Doppler-shifted signal from an RF generator equivalent to a signal reflected from a target with a relative velocity of 3 Mach at a distance of 5 m is used (equivalent to the distance in an idealistic experiment of 10 m), which is approximately equal to 20 kHz. From such a distance, the free-space path loss attenuation is calculated as  $-61.3$  dB.

When feeding the Doppler-shifted signal into the base-, emitter-, and collector-fed circuits, the resulting output from the collector of the transistor appears in the radar frequency spectrum as an AM signal which similar to autodyne signal as shown in Fig. 6(a,c,e), respectively. The output spectrums of the Doppler are as shown in Fig. 6(b,d,f), respectively. The results presented in Fig. 6 show that the oscillator sensitivity essentially depends upon the feed-point of the Doppler-shifted signal. The more noteworthy from Fig. 6 is the low amplitude of Doppler signal, which compare with the amplitude of natural response and the Doppler shifted signal amplitude. Then the Doppler signal hard for investigate directly in time domain, but it still exists in frequency domain observation.

## Discussion

This article has been presented a new method of homodyne detection by using the MTFO model which based on the forced oscillation perspective, where can applied in a Doppler SRR. The analysis is based on signal and system theory, a second-order differential equation, and the multi-time variable technique. The mathematical

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมออนุญาตให้นำไปเผยแพร่บนฐานการ



**Figure 5. Natural frequency.** Before applying a Doppler-shifted signal to the oscillator, the spectrum of the natural frequency was measured at 2.76 GHz.

technique of MTFO is uncomplicated and can also be applied to self-oscillation system such as electrical oscillator or arbitrary structure of oscillator. This imply that the forced oscillating behavior is the intrinsic behavior for every kind of the oscillator, even self-oscillation system. Then we also can apply to another different homodyne detection in the future, such as optical device. Otherwise, the nonlinear model still be an appropriate choice for analyse in-depth characteristic in self-oscillation system. From results, the output of natural oscillation system with external forced still has some difference from self-oscillation result. The AM signal or autodyne signal which occur from the output in radar frequency band is not appear in a forced pendulum's result, and this autodyne signal can be obtained from SAE method only. Although, the MTFO model is not suitable for profound analysis, but it can explain the different kind of oscillation system under single principle, then the MTFO model is the other interesting choice to analyse primary phenomenon, homodyne detection, in all of oscillation system. This phenomenon has been observed in the free oscillation system which forced by external source such as pendulum with an oscillating support experiment, and same behaviour in the self-oscillation system, which has been confirmed experimentally using a RF generator feeding a simulating reflected signal into a modified Colpitts oscillator, which generates a 2.76 GHz output. The experimental results show that the Doppler-shifted signal can be fed into any inputs of a transistor and not strictly into the feedback path of circuit. However, the Doppler output will be most prominent, and hence the system response will be highest when feeding a reflected signal into the collector of the transistor, followed by base feeding and then emitter feeding. Furthermore, the result is in line with the analysis, which confirms that there is a Doppler frequency component in the lower side of the spectrum and that the forced input can be applied into any terminal of a transistor. Moreover, the difference of magnitude and phase response for each fed circuits, the directional finding in three direction can be applied in the future.

## Methods

**Circuit Component.** The modified Colpitts oscillator was made using the schematic in Fig. 1, where the values of the components used are as follows:  $R_1 = 5.6 \text{ k}\Omega$ ;  $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$ ;  $R_e = R_c = 10 \Omega$ ;  $L_1 = L_2 = 15 \mu\text{H}$ ;  $C_1 = 15 \text{ pF}$ ;  $C_2 = 55 \text{ pF}$ ;  $C_3 = C_4 = C_5 = 3.3 \text{ pF}$ ;  $C_6 = 27 \text{ pF}$ ;  $C_7 = 1 \text{ pF}$ ;  $C_{ie} = C_{ib} = C_{ic} = 3.3 \text{ pF}$ ;  $V_{cc} = 12 \text{ V}$ . And a transistor in this circuit is BFG135.

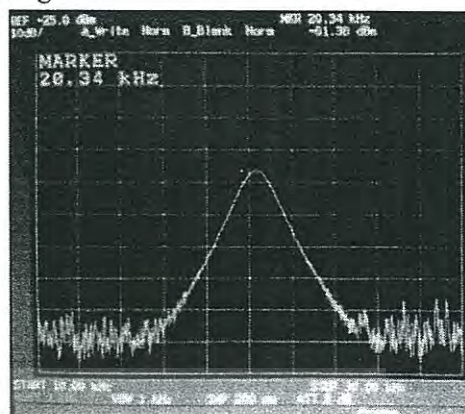
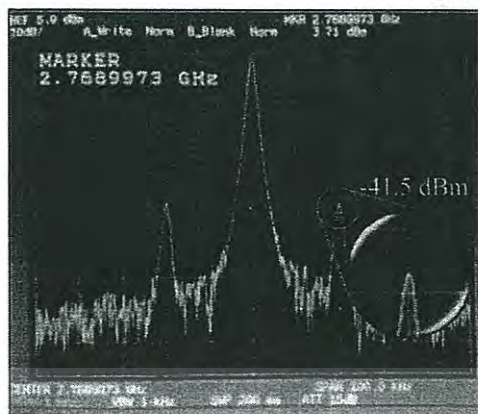
**Experimental Setup.** For the explicit application proposed, a real situation was examined when a proximity fuze was 5 m away from a flat rectangle target (area  $\approx 0.328 \text{ m}^2$ ) with a relativistic velocity of 3 Mach. All loss budgets in this short-range RADAR situation were calculated using the RADAR equation (Eq. (38)). Due to the transmission frequency being close to the reflection frequency, we then approximate them to be equal. We establish the idealistic equivalent by using an RF generator with a monopole antenna of 5.19 dBi located 10 m away from the circuit to gather the transmission and reflection distance, as shown in Fig. 7. The power of the generated RF signal (or Doppler-shifted signal) equals the output power compensated by the antenna gain for  $-5.19 \text{ dBc}$ .

$$\frac{P_t}{P_r} = \frac{(4\pi)^3 R^4}{G^2 \sigma \lambda^2} \quad (38)$$

where  $P_t$  is the transmit power,  $P_r$  is the receive power,  $R$  is the distance between the proximity fuze and the target,  $\lambda$  is the wavelength of the carrier signal,  $G$  is the antenna gain, and  $\sigma$  is the RADAR cross section of the target. From (34), given  $R$  is 10 m, we can calculate  $\sigma \approx 115.14 \text{ m}^2$ , and the Free Space Path Loss attenuation is calculated as  $-61.29 \text{ dB}$ .

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่นอนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

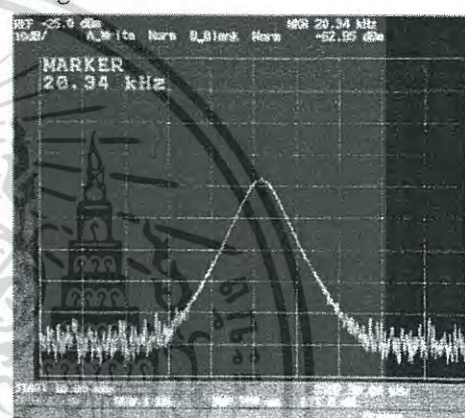
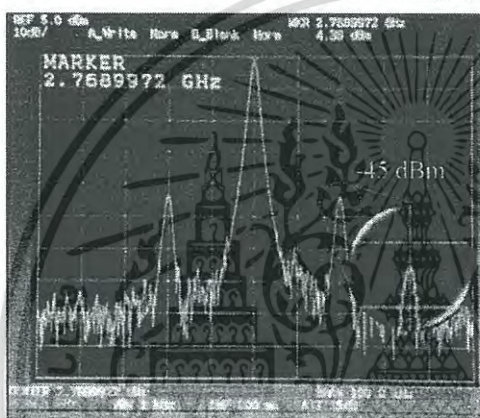
Base feeding



(a)

(b)

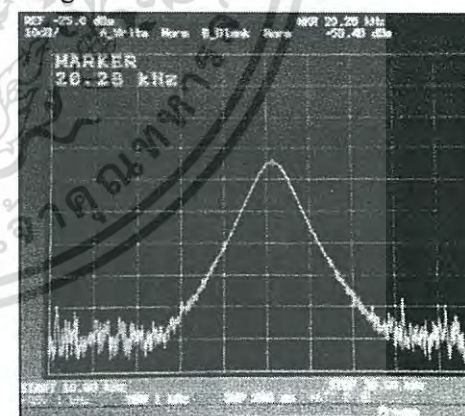
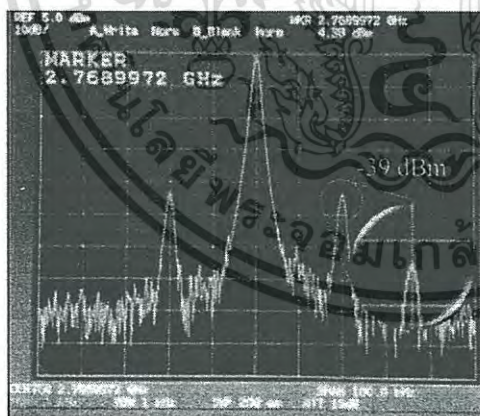
Emitter feeding



(c)

(d)

Collector feeding

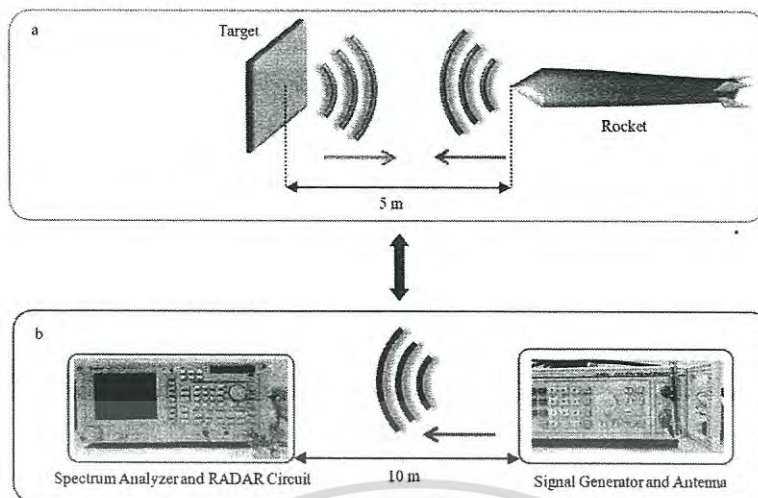


(e)

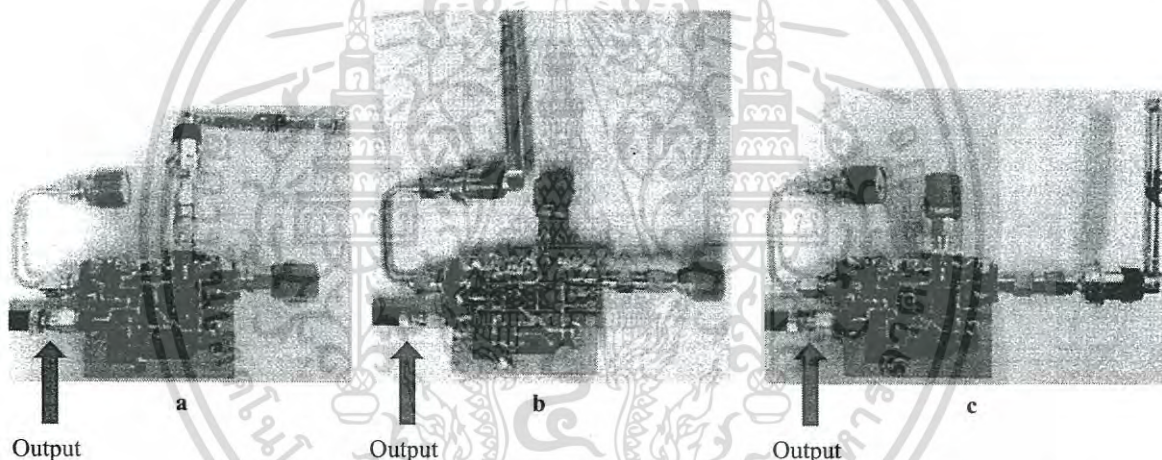
(f)

**Figure 6. Output spectrum of the modified Colpitts oscillator.** Output spectrum in a natural frequency band and a Doppler frequency band when feeding Doppler-shifted signal into the base (the spectra are shown in (a,b)), the emitter (the spectra are shown in (c,d)), and the collector (the spectra are shown in (e,f)) of the transistor.

In the oscillator circuit, an equivalent input with a simulated Doppler shift is fed through the antenna connected to the impedance-matching circuit, which is attached to the selected transistor port. For the other terminals, dummy loads were connected with impedance-matching circuits as shown in Fig. 8.



**Figure 7. Equivalent experimental setup.** (a) Real situation set as a rocket is moving forward to the rectangle target with a 5 m distance, equivalent to the idealistic experiment in (b). (b) The idealistic experiment, where the transmission and reflection distance were gathered.



**Figure 8. UHF modified Colpitts oscillator circuit for the experiment.** (a) Emitter-fed circuit. (b) Collector-fed circuit. (c) Base-fed circuit.

**Simplify parameters.** To avoid unnecessarily complicated for circuit analysis, we define parameters as list below:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= A_v + r_\mu r_o (A_v + 1) \\
 a_1 &= A_v (\sigma_2^+ + 2\sigma_4^+ r_o) + a_0 (\sigma_1^+ R_L + L_2 \sigma_5^+) \\
 a_2 &= A_v (\sigma_2^+ (L_2 \sigma_5^+ + \sigma_1^+ R_L) + 2r_o (\sigma_4 \beta_1 + \sigma_4^+ (\sigma_0 + C_\mu))) \\
 &\quad + a_0 R_L (\sigma_5^+ (\sigma_4 + L_2 C_3) + \sigma_1 R_L) \\
 a_3 &= A_v \beta_2 + \sigma_0 (a_0 (\sigma_4 \sigma_5^+ R_L - C_3 \sigma_4^+) - 1) \\
 a_4 &= A_v (\sigma_1 \sigma_2^+ \sigma_5^+ L_2 R_L^2 + \beta_3) - a_0 \sigma_2 \sigma_4 \beta_1 C_3 \\
 a_5 &= A_v (\sigma_1 \sigma_2^+ \sigma_5^+ L_2 R_L^2 + \sigma_0 \sigma_1^+ \sigma_2^+ L_2 \beta_1 + \sigma_0 \sigma_2^+ \sigma_4^+ C_3) \\
 a_6 &= A_v \sigma_1 \sigma_2 \beta_1 L_2 R_L \\
 \beta_1 &= \sigma_2^+ + C_1 \\
 \beta_2 &= \sigma_2 (L_2 \sigma_5^+ + \sigma_1^+ R_L) + \sigma_2^+ R_L (\sigma_5^+ (\sigma_4 + L_2 C_3) + \sigma_1 R_L) \\
 &\quad + 2r_o (\sigma_4 \beta_1 (\sigma_0 + C_\mu) + \sigma_0 \sigma_4^+ C_\mu) \\
 \beta_3 &= \sigma_2 R_L (\sigma_5^+ (\sigma_4 + L_2 C_3) + \sigma_1 R_L) + \sigma_0 \beta_1 (2\sigma_4 C_\mu r_o - \sigma_2^+ \sigma_4^+ C_3)
 \end{aligned}$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไมออนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 &= C_3 R_L \\
 \sigma_1 &= C_{ic} C_3 \\
 \sigma_2 &= C_\mu C_4 r_o \\
 \sigma_3 &= R_c R_L \\
 \sigma_4 &= L_2 C_{ic} \\
 \sigma_5 &= C_1 R_c \\
 \sigma_0^+ &= C_3 + R_L \\
 \sigma_1^+ &= C_{ic} + C_3 \\
 \sigma_2^+ &= C_\mu + C_4 r_o \\
 \sigma_3^+ &= R_c + R_L \\
 \sigma_4^+ &= L_2 + C_{ic} \\
 \sigma_5^+ &= C_1 + R_c
 \end{aligned}$$

## References

- Landa, P. *Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems* (Kluwer Academic Publishers, 1996).
- Adler, R. A study of locking phenomena in oscillators. *Proceedings of the IEEE* **61**, 1380–1385 (1973).
- Paciorek, L. Injection locking of oscillators. *Proceedings of the IEEE* **53**, 1723–1727 (1965).
- Stover, H. Theoretical explanation for the output spectra of unlocked driven oscillators. *Proceedings of the IEEE* **54**, 310–311 (1966).
- Verma, S., Rategh, H. & Lee, T. A unified model for injection-locked frequency dividers. *IEEE J. Solid-State Circuits* **38**, 1015–1027 (2003).
- Xiaolue Lai & Roychowdhury, J. Automated oscillator macromodelling techniques for capturing amplitude variations and injection locking. *IEEE/ACM International Conference on Computer Aided Design, 2004. ICCAD-2004* (2004).
- Chee, Y., Niknejad, A. & Rabaey, J. An Ultra-Low-Power Injection Locked Transmitter for Wireless Sensor Networks. *IEEE J. Solid-State Circuits* **41**, 1740–1748 (2006).
- van der Pol, B. VII. Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. (Reception with reactive triode). *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **3**, 65–80 (1927).
- Komarov, I. & Smolskiy, S. *Fundamentals of short-range FM radar* (Artech House, 2003).
- Tang Zhikai, Jiang Yonghua, Liu Longhe, Hao Yuan & Ling Xiang. Injection Locking Phenomena of Van der Pol Oscillator. *2005 Asia-Pacific Microwave Conference Proceedings* (2005).
- Motsa, S. & Sibanda, P. A Note on the Solutions of the Van der Pol and Duffing Equations Using a Linearisation Method. *Mathematical Problems in Engineering* **2012**, 1–10 (2012).
- Wang, P. Forced oscillation of a class of delay hyperbolic equation boundary value problem. *Applied Mathematics and Computation* **103**, 15–25 (1999).
- Furi, M., Pera, M. P. & Spadini, M. Multiplicity of forced oscillations for scalar differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations* **2001**(36), 1–9 (2001).
- Fu, X. & Zhang, L. Forced oscillation for impulsive hyperbolic boundary value problems with delay. *Applied Mathematics and Computation* **158**, 761–780 (2004).
- Lopez, R. M. & Suslov, S. K. The Cauchy problem for a forced harmonic oscillator. *Rev. Mex. Fis. E* **55**, 196–215 (2009).
- Khusainov, D., Pokojov, M. & Azizbayov, E. On the Cauchy problem for a linear harmonic oscillator with pure delay. *Adv Differ Equ* **2015** (2015).
- Lai, X. & Roychowdhury, J. Capturing Oscillator Injection Locking via Nonlinear Phase-Domain Macromodels. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **52**, 2251–2261 (2004).
- Maffezzoni, P. Analysis of Oscillator Injection Locking Through Phase-Domain Impulse-Response. *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **55**, 1297–1305 (2008).
- Dunwell, D. & Carusone, A. Modeling Oscillator Injection Locking Using the Phase Domain Response. *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **60**, 2823–2833 (2013).
- Votoropin, S., Zakarlyuk, N., Noskov, V. & Smolskiy, S. On principal impossibility of autosynchronization of an autodyne by radiation reflected from a moving target. *Russian Physics Journal* **50**, 905–912 (2007).
- Noskov, V. & Ignatkov, K. Noise characteristics of autodynes with frequency stabilization by means of an external high-Q cavity. *Journal of Communications Technology and Electronics* **61**, 1052–1063 (2016).
- Skolnik, M. *Introduction to radar systems* (McGraw-Hill, 1980).
- Meikle, H. *Modern radar systems* (Artech House, 2008).
- Lynn, P. *Radar system* (Van Nostrand Reinhold, 1988).
- Noskov, V. The history of invention and development of autodyne proximity fuzes. in *Microwave and Telecommunication Technology (CriMiCo), 2013 23rd International Crimean Conference*, 26–29 (IEEE, 2013).
- Eden, A. *The search for Christian Doppler* (Springer-Verlag, 1992).
- Ourjoumsev, A., Jeong, H., Tualle-Brouiri, R. & Grangier, P. Generation of optical ‘Schrödinger cats’ from photon number states. *Nature* **448**, 784–786 (2007).
- Marino, A., Pooser, R., Boyer, V. & Lett, P. Tunable delay of Einstein–Podolsky–Rosen entanglement. *Nature* **457**, 859–862 (2009).
- Gross, C. *et al.* Atomic homodyne detection of continuous-variable entangled twin-atom states. *Nature* **480**, 219–223 (2011).
- Jones, S. & Wiseman, H. Nonlocality of a single photon: Paths to an Einstein–Podolsky–Rosen-steering experiment. *Phys. Rev. A* **84** (2011).
- Fuwa, M., Takeda, S., Zwiwer, M., Wiseman, H. & Furusawa, A. Experimental proof of nonlocal wavefunction collapse for a single particle using homodyne measurements. *Nature Communications* **6**, 6665 (2015).
- Piccirillo, B., Slussarenko, S., Marrucci, L. & Santamato, E. Directly measuring mean and variance of infinite-spectrum observables such as the photon orbital angular momentum. *Nature Communications* **6**, 8606 (2015).
- Peise, J. *et al.* Satisfying the Einstein–Podolsky–Rosen criterion with massive particles. *Nature Communications* **6**, 8984 (2015).
- Armstrong, S. *et al.* Multipartite Einstein–Podolsky–Rosen steering and genuine tripartite entanglement with optical networks. *Nat Phys* **11**, 167–172 (2015).
- Wang, L. & Xu, X. Scattering-type scanning near-field optical microscopy with reconstruction of vertical interaction. *Nature Communications* **6**, 8973 (2015).

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับกรใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า

36. Naghiloo, M., Foroozani, N., Tan, D., Jadbabaie, A. & Murch, K. Mapping quantum state dynamics in spontaneous emission. *Nature Communications* 7, 11527 (2016).
37. Clark, J., Lecocq, F., Simmonds, R., Aumentado, J. & Teufel, J. Observation of strong radiation pressure forces from squeezed light on a mechanical oscillator. *Nat Phys* (2016).
38. Hosten, O., Engelsens, N., Krishnakumar, R. & Kasevich, M. Measurement noise 100 times lower than the quantum-projection limit using entangled atoms. *Nature* 529, 505–508 (2016).
39. Buonanno, A., Chen, Y. & Mavalvala, N. Quantum noise in laser-interferometer gravitational-wave detectors with a heterodyne readout scheme. *Physical Review D* 67 (2003).
40. Harms, J. *et al.* Squeezed-input, optical-spring, signal-recycled gravitational-wave detectors. *Physical Review D* 68 (2003).
41. Vahlbruch, H. *et al.* Coherent Control of Vacuum Squeezing in the Gravitational-Wave Detection Band. *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006).
42. Goda, K. *et al.* A quantum-enhanced prototype gravitational-wave detector. *Nat Phys* 4, 472–476 (2008).
43. Hild, S. *et al.* DC-readout of a signal-recycled gravitational wave detector. *Class. Quantum Grav.* 26, 055012 (2009).
44. Eberle, T. *et al.* Quantum Enhancement of the Zero-Area Sagnac Interferometer Topology for Gravitational Wave Detection. *Phys. Rev. Lett.* 104 (2010).
45. Abadie, J. *et al.* A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit. *Nat Phys* 7, 962–965 (2011).
46. Aso, Y. *et al.* Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector. *Physical Review D* 88 (2013).
47. Maneechukate, T., Koseeyaporn, J., Wardkein, P. & Koseeyaporn, P. Wide-band amplitude control of the second-order oscillator circuit. *AEU - International Journal of Electronics and Communications* 62, 666–673 (2008).
48. Maneechukate, T., Prompak, K., Koseeyaporn, J. & Wardkein, P. Accuracy behavior explanation of electrical second-order system based on multi-time technique. *Scientific Research and Essays* 8(25), 1180–1190 (2013).
49. Oppenheim, A., Willsky, A. & Nawab, S. *Signals & systems* (Prentice Hall, 1997).
50. Lee, E. *Structure and interpretation of signals and systems* (LeeVaraiya.org, 2011).
51. Pantoja, F. & Calazans, E. Theoretical and Experimental Studies of Gain Compression of Millimeter-Wave Self-Oscillating Mixers. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 33, 181–186 (1985).
52. Maneechukate, T., Tuwanut, P., Koseeyaporn, J. & Wardkein, P. New analytic solution of second-order oscillator using multi-time variables technique. *2005 International Symposium on Intelligent Signal Processing and Communication Systems* (2005).
53. Kittipute, K., Koseeyaporn, J. & Wardkein, P. Amplitude demodulation based on time-varying forced input of second-order oscillator circuit. *TENCON 2009 - 2009 IEEE Region 10 Conference* (2009).
54. Prompak, K., Kaewpoonsuk, A., Maneechukate, T. & Wardkein, P. An oscillation discovery of the forced vibrating system predicted by multi-time differential equation. *Scientific Research and Essays* 7(39), 3292–3301 (2012).
55. Prompak, K., Kaewpoonsuk, A., Maneechukate, T. & Wardkein, P. A new oscillation frequency discovery of the driven spring-mass system predicted by the multi-time differential equation. *European Journal Of Scientific Research* 92(3), 397–410 (2012).
56. Maneechukate, T., Koseeyaporn, J., Wardkein, P. & Koseeyaporn, P. Amplitude modulation based on time-varying forced function of second-order oscillator circuit. In *2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems* (IEEE, 2016).
57. Kitipongwatana, A., Koseeyaporn, P., Koseeyaporn, J. & Wardkein, P. Fundamental Behavior Analysis of Single-Frequency Sine Wave Forced Oscillator based on Linear Model and Multi-Time Technique. *Radioengineering* 23(2), 697–708 (2014).
58. Radmanesh, M. *Radio frequency and microwave electronics illustrated* (Prentice Hall, 2001).
59. Franco, S. *Design with operational amplifiers and analog integrated circuits* (McGraw-Hill, 2002).
60. Razavi, B. *RF microelectronics* (Prentice Hall, 1998).

### Author Contributions

All authors conceived and designed the experiments; Kunanon Kittipute and Suthasin Srisook conducted the experiments; Kunanon Kittipute analysed the results; and Kunanon Kittipute, Peerayuth Saratayon, and Paramote Wardkein wrote the manuscript. All authors reviewed the manuscript.

### Additional Information

**Competing Interests:** The authors declare no competing financial interests.

**How to cite this article:** Kittipute, K. *et al.* Homodyne detection of short-range Doppler radar using a forced oscillator model. *Sci. Rep.* 7, 43680; doi: 10.1038/srep43680 (2017).

**Publisher's note:** Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons license, unless indicated otherwise in the credit line; if the material is not included under the Creative Commons license, users will need to obtain permission from the license holder to reproduce the material. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

© The Author(s) 2017