

สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์
ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

CLOSE-FORM FORMULAS FOR
CONTINUOUS AND DISCRETE-TIME PIDA CONTROLLERS' PARAMETERS



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2560
KMITL-2017-EN-M-257-133

สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์
ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

CLOSED-FORM FORMULAS FOR
CONTINUOUS AND DISCRETE-TIME PIDA CONTROLLERS' PARAMETERS



T148686



นำชัย นาควิฑูร
NUMCHAI NARKVITUL

เลขทะเบียน **148686**
พิมพ์เดือนปี **114 พ.ย. 2560**

b. 00267603
l.

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2560
KMITL-2017-EN-M-257- 133

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์
ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

CLOSED-FORM FORMULAS FOR
CONTINUOUS AND DISCRETE-TIME PIDA CONTROLLERS' PARAMETERS



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ
คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
พ.ศ.2560
KMITL-2017-EN-M-257- 133

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

CLOSED-FORM FORMULAS FOR
CONTINUOUS AND DISCRETE-TIME PIDA CONTROLLERS' PARAMETERS



A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF ENGINEERING IN AUTOMATION ENGINEERING
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG
2017
KMITL-2017-EN-M-257- 133

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2017
FACULTY OF ENGINEERING
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

หัวข้อวิทยานิพนธ์ สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่อง
และแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

Thesis Title Closed-Form Formulas for Continuous and Discrete-Time
PIDA Controllers' Parameters

นักศึกษา นายนำชัย นาควิฑูร






รหัสประจำตัว 55613614

ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา วิศวกรรมอัตโนมัติ

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ประภาช อุคคกิม่าพันธ์

หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2017-EN-M-257-133

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์		ลายมือชื่อ
ผศ.ดร.เชิดพงษ์	ดีเลิศไพบุลย์	
รศ.ดร.ไสว	พงศ์สวัสดิ์	
รศ.ดร.ธนิษฐ์	ตรีสุวรรณ์วัฒน์	
รศ.ดร.พิทยา	ปานนิล	
รศ.ประภาช	อุคคกิม่าพันธ์	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันศุกร์ที่ 7 กรกฎาคม พ.ศ. 2560 เวลา 13.00-15.00 น.
สถานที่สอบ ณ อาคาร A ชั้น 5 ห้องประชุม 4

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร. คมสัน มาลีสี)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
คุณบัติ คณะวิศวกรรมศาสตร์
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้
วันที่ 7 กรกฎาคม พ.ศ. 2560

หัวข้อวิทยานิพนธ์

สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

นักศึกษา

นายนำชัย นาควิฑูร

รหัสประจำตัว

55613614

ปริญญา

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชา

วิศวกรรมอัตโนมัติ

พ.ศ.

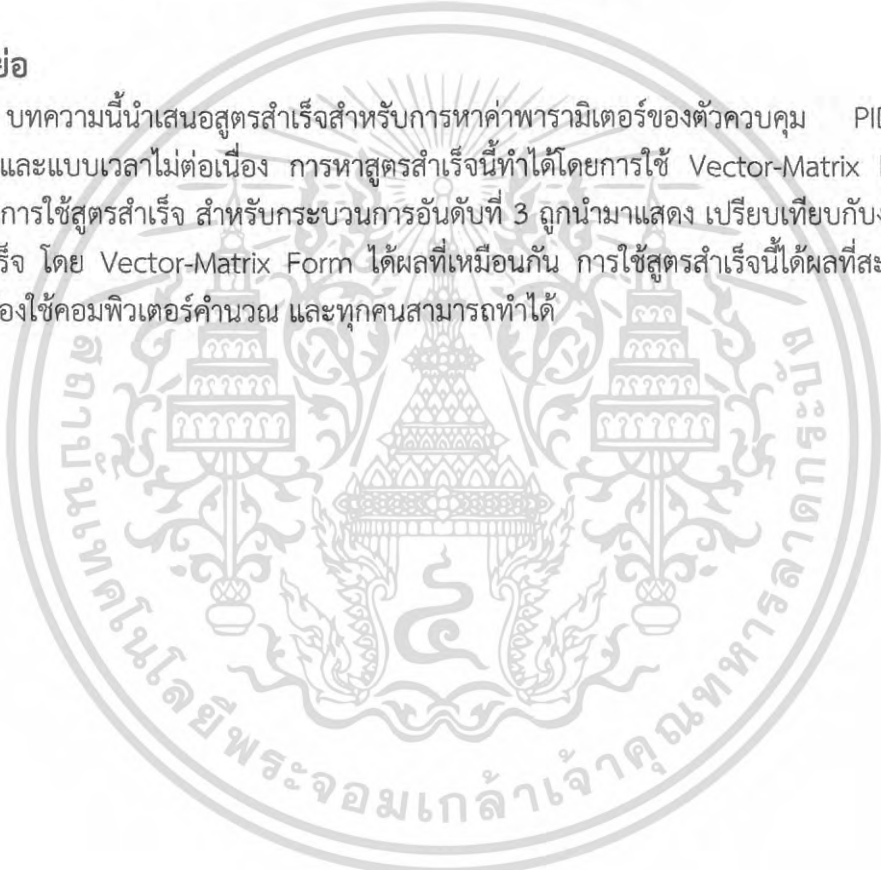
2560

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

รศ.ประภาช อุคคกิม่าพันธ์

บทคัดย่อ

บทความนี้นำเสนอสูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง การหาสูตรสำเร็จนี้ทำได้โดยการใช้ Vector-Matrix Forms. สำหรับตัวอย่างการใช้สูตรสำเร็จ สำหรับกระบวนการอันดับที่ 3 ถูกนำมาแสดง เปรียบเทียบกับงานวิจัยนี้ การใช้สูตรสำเร็จ โดย Vector-Matrix Form ได้ผลที่เหมือนกัน การใช้สูตรสำเร็จนี้ได้ผลที่สะดวกและรวดเร็ว โดยไม่ต้องใช้คอมพิวเตอร์คำนวณ และทุกคนสามารถทำได้



Title	Closed-Form Formulas for Continuous/Discrete-Time PIDA Controllers' Parameters
Student	Mr.Numchai Narkvitul
Student ID.	55613614
Degree	Master of Engineering
Program	Automation Engineering
Year	2017
Thesis Advisor	Assoc.Prof.Prapart Ukakimaparn

ABSTRACT

This paper proposes the closed-form formulas for finding the controllers' parameters for both continuous-time and discrete-time PIDA (Proportional-Integral-Derivative-Acceleration) controllers. The derivations to formulate the formula are given in vector-matrix forms. The examples of usage the closed-form formulas for a third order plant are illustrated. Comparing with other previous research work, revealed that at the same performances, the using it is straightforward, simpler without iterative computation and also be opened to use too.

Keywords : PIDA Controllers' Parameters ; Bilinear Transform

กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณ รศ.ดร.ธนิตย์ ตรีสุวรรณวัฒน์ ที่นำเสนอสูตรสำเร็จหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง ซึ่งมีค่าอย่างยิ่งต่อการออกแบบระบบควบคุมได้อย่างมีประสิทธิภาพ สามารถต่อยอดนำไปสู่งานวิจัยเรื่องอื่นๆ ต่อไปได้ ดังงานวิจัยในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความรู้จาก รศ.ดร.ธนิตย์ ตรีสุวรรณวัฒน์ ที่ให้ความช่วยเหลือ ให้คำชี้แนะและช่วยแก้ปัญหาต่าง ๆ ตลอดจนให้ความรู้และประสบการณ์ที่ดีแก่ข้าพเจ้า

ขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ประภาส อุคคกิม่าพันธุ์ และ รศ.ดร.พิทยา ปานนิล ที่ให้ความช่วยเหลือและแนะนำงานในที่สุดทำให้วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลงได้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติทุกท่าน ที่คอยช่วยให้คำแนะนำและให้คำปรึกษาแก่ข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาในการศึกษาปริญญาโท

ขอขอบพระคุณอาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุมทุกท่าน ที่คอยช่วยให้คำแนะนำและให้ความรู้ทางด้านวิศวกรรมแก่ตัวข้าพเจ้าตลอดระยะเวลาในการศึกษาปริญญาตรี

ขอขอบคุณ บริษัท เอบีบี จำกัด ที่มอบประสบการณ์ในการทำงานและความรู้ในทางสายอาชีพทางด้านวิศวกรรมให้แก่ข้าพเจ้า

สำหรับคุณงามความดีอันใดที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับบิดามารดา ซึ่งเป็นที่รักและเคารพยิ่ง ตลอดจนครูอาจารย์ที่เคารพทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้และถ่ายทอดประสบการณ์ที่ดีให้แก่ข้าพเจ้า

นำชัย นาควิฑูร

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญต่อ.....	V
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในงานวิจัย.....	2
1.4 ขอบเขตการวิจัย.....	3
1.5 รายละเอียดของวิทยานิพนธ์.....	3
บทที่ 2 หลักการควบคุม PID.....	4
2.1 กล่าวนำ.....	4
2.2 การควบคุมแบบป้อนกลับ.....	4
2.2.1 ระบบควบคุมอันดับหนึ่ง.....	4
2.2.1.1 ผลตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณระดับ.....	4
2.2.1.2 ผลการตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณลาด.....	5
2.2.1.3 ผลตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณอิมพัลส์.....	6
2.2.2 ระบบควบคุมอันดับสอง.....	7
2.2.3 ข้อกำหนดของระบบ.....	9
2.3 รูปแบบของการควบคุมบนพื้นฐาน PID.....	10
2.3.1 การควบคุมแบบ P (Proportional control).....	11
2.3.2 การควบคุมแบบ I (Integral control).....	12
2.3.3 การควบคุมแบบ D (Derivative Control).....	13
2.3.4 การควบคุมแบบ PI (Proportional-Integral Control).....	14
2.3.5 การควบคุมแบบ PD (Proportional-Derivate Control).....	15
2.3.6 การควบคุมแบบ PID (Proportional-Integral-Derivative Control).....	16
2.3.7 การควบคุมแบบ PIDA (Proportional-Integral-Derivative-Acceleration Control).....	18
2.4 สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PID แบบเวลาต่อเนื่องและ แบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.....	21
2.4.1 วิธีการ.....	21
2.4.2 problem statement.....	22

สารบัญ (ต่อ)

2.4.3 แบบเวลาต่อเนื่อง.....	22
2.4.4 แบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.....	25
บทที่ 3 สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PID แบบเวลาต่อเนื่องและ แบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.....	28
3.1 กล่าวนำ.....	28
3.2 แนวคิดในการออกแบบ.....	28
3.2.1 ปัญหา.....	29
3.2.2 กรณีแบบต่อเนื่อง.....	29
3.2.3 กรณีแบบไม่ต่อเนื่อง.....	33
3.3 ตัวอย่างการใช้งาน.....	35
3.3.1 วิธีการแก้ปัญหาแบบต่อเนื่อง.....	35
3.3.2 วิธีการแก้ปัญหาแบบไม่ต่อเนื่อง.....	37
3.3.3 วิธีการแก้ปัญหาโดยเทคนิคอื่น.....	38
บทที่ 4 บทสรุป.....	40
4.1 สรุปผลวิจัย.....	40
4.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางในการพัฒนา.....	40
เอกสารอ้างอิง.....	41
ภาคผนวก.....	42
ภาคผนวก ก. ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.....	43
ภาคผนวก ข. ตารางการแปลง Z.....	44
ประวัติผู้เขียน.....	47

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

กระบวนการอุตสาหกรรมส่วนใหญ่เป็นประเภท Type 0 ซึ่งประกอบด้วย 3-5 first order lag หรือ dead time plus one การเลือกใช้ตัวควบคุมที่มีประสิทธิภาพในอุตสาหกรรมเป็นสิ่งสำคัญต่อกระบวนการผลิต ตัวควบคุม PID จึงถูกนำมาใช้อย่างกว้างขวางในอุตสาหกรรม เพราะว่ามันง่ายต่อการใช้กับระบบ second order plant แต่ตัวควบคุมแบบ PID ใช้ได้ดีกับกระบวนการที่มีอันดับไม่เกินสอง แต่สำหรับกระบวนการที่มีอันดับมากกว่าสองขึ้นไปนั้น เป็นการยากที่จะใช้ตัวควบคุมแบบ PID เพียงอย่างเดียวมาทำการควบคุมระบบให้ได้ผลตามข้อกำหนด (Specification) เนื่องจากจำนวนโพลของกระบวนการนั้นมีค่ามากกว่าจำนวนซีโรของตัวควบคุม ด้วยข้อจำกัดของตัวควบคุมนี้ งานวิจัยจึงได้ทำการนำเสนอแนวความคิดของการใช้งานตัวควบคุม PIDA สำหรับกระบวนการ Continuous Time และ Discrete Time เพื่อใช้แทนตัวควบคุมแบบระบบเดิม ที่ติดข้อจำกัดในข้างต้นที่ได้กล่าวมา โดยเป็นการวิเคราะห์และออกแบบดำเนินการอยู่ในกระบวนการของระบบแบบเวลาต่อเนื่อง (Continuous-time System) แล้วจึงทำการแปลงจาก continuous-time เป็น discrete time อย่างไรก็ตามปัจจุบันมีการประยุกต์ใช้ระบบคอมพิวเตอร์เข้ามาในการควบคุมกระบวนการทางอุตสาหกรรมมากขึ้น และการส่งสัญญาณด้านขาเข้าต้องผ่านตัวสุ่มสัญญาณ (Sampler) ซึ่งมีหน้าที่ในการแปลงจากสัญญาณอนาล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล ทำให้สัญญาณนั้นอยู่ในรูปแบบของสัญญาณไม่ต่อเนื่อง (Discrete Signal) นำไปสู่การวิเคราะห์และการออกแบบตัวควบคุมในระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-time System) เป็นการทำนำเสนอสูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่อง และแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง โดยใช้วิธี Vector Matrix

1.2 ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา

วิทยานิพนธ์เล่มนี้มุ่งหวังเพื่อเสนอสูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่อง และแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง โดยอาศัยหลักการออกแบบด้วยวิธีการ Vector Matrix และเปรียบเทียบผลตอบสนองของระบบอันดับที่ 3 ที่ได้ระหว่างตัวควบคุมแบบเวลาต่อเนื่องกับแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง โดยผลลัพธ์ที่ได้ออกมาผลตอบสนองมีความใกล้เคียงกันมากที่สุด ซึ่งการออกแบบตัวควบคุมสามารถทำให้กระบวนการดังกล่าวมีประสิทธิภาพที่ดีตามที่กำหนดไว้

1.3 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในงานวิจัย

การนำเสนอสูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่อง และแบบเวลาไม่ต่อเนื่องโดยในวิทยานิพนธ์เล่มนี้มุ่งหวังกระบวนการควบคุมที่มีอันดับมากกว่าอันดับที่ 3

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ขึ้นไป โดยเลือกใช้ตัวควบคุมแบบ PIDA เพื่อควบคุมกระบวนการให้ได้ผลตอบสนองตามข้อกำหนดตามที่ ออกแบบ โดยทำการออกแบบตัวควบคุมในระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่องจะพิจารณาเลือกใช้คาบเวลาการ สุ่ม (Sampling Time) ในการสุ่มสัญญาณของระบบให้เหมาะสม จากนั้นทำการออกแบบตัวควบคุมด้วย วิธีการของ Vector Matrix จากรูปแบบของสัญญาณเวลาต่อเนื่อง (Continuous Signal) การส่ง สัญญาณด้านขาเข้าผ่านตัวสุ่มสัญญาณ ซึ่งมีหน้าที่แปลงสัญญาณอนาล็อกให้เป็นสัญญาณดิจิทัล ทำให้ สัญญาณจะอยู่ในรูปแบบของสัญญาณเวลาแบบไม่ต่อเนื่อง เพื่อมาวิเคราะห์ให้อยู่ในตัวควบคุมแบบ PIDA ด้วยวิธีการ Vector Matrix โดยอาศัยการแปลงตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบในระบบเวลาต่อเนื่องไป เป็นตัวควบคุมในระบบเวลาไม่ต่อเนื่องโดยตรง

1.4 ขอบเขตการวิจัย

วิทยานิพนธ์เล่มนี้กล่าวถึงสูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง โดยอาศัยวิธีการออกแบบด้วยวิธีการของ Vector Matrix เข้า มาช่วยในการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาต่อเนื่องแล้วทำการแปลงตัวควบคุมที่ได้จากการออกแบบใน ระบบเวลาต่อเนื่องหรือ Continuous Time แล้วแปลงไปเป็นตัวควบคุมในระบบเวลาไม่ต่อเนื่องหรือ Discrete Time พร้อมทั้งจำลองการทำงานของตัวควบคุมด้วยโปรแกรม MATLAB จากค่าที่ได้มาจาก สูตรสำเร็จ เพื่อแสดงผลการตอบสนองของการควบคุมเพื่อทำการวิเคราะห์และเปรียบเทียบผลตอบสนอง ที่ได้จากตัวควบคุมแบบเวลาต่อเนื่องและไม่ต่อเนื่อง

1.5 รายละเอียดของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประกอบไปด้วยเนื้อหา 4 บทด้วยกันดังนี้คือ

บทที่ 1 บทนำ เป็นการกล่าวถึงความรู้พื้นฐานของ PID Controller Principle ความเป็นมา และความสำคัญของปัญหา ความมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ ขอบเขตของวิทยานิพนธ์ และรายละเอียด ของวิทยานิพนธ์

- บทที่ 2 - กล่าวถึงแนวคิดในการออกแบบตัวควบคุม PIDA ด้วยวิธีการของ R.C. Dorf
 - กล่าวถึงแนวคิดในการออกแบบตัวควบคุมแบบ PIDA ด้วยวิธีการของ Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering
 - กล่าวถึงแนวคิดในการหาสูตรสำเร็จสำหรับตัวควบคุม PID แบบเวลาต่อเนื่อง และแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

บทที่ 3 กล่าวถึงแนวคิดในการหาสูตรสำเร็จสำหรับ PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ ต่อเนื่อง (Closed-Form Formulas for Continuous and Discrete Time PIDA controllers' parameter)

บทที่ 4 สรุป

ในส่วนสุดท้ายของวิทยานิพนธ์เป็นส่วนของภาคผนวกที่แสดงถึงบทความวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 2

หลักการควบคุม PID และ PIDA

2.1 กล่าวนำ

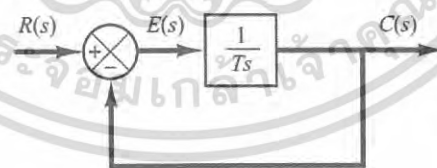
[1] เมื่อปี 1942 J.G. Ziegler และ N.B. Nichols ได้ตีพิมพ์ผลงานการวิจัยที่มีประโยชน์แก่มนุษยชาติสำหรับการปรับค่าตัวควบคุม โดยช่างเทคนิคหรือวิศวกรไม่ต้องมีพื้นฐานความรู้ด้านคณิตศาสตร์ก็สามารถปรับค่าตัวควบคุมได้ จึงทำให้มีการนำตัวควบคุม PID (Proportional, Integral, and Derivative controller) ไปใช้ในการควบคุมกระบวนการของระบบต่างๆ มากมาย แต่ผู้เกี่ยวข้องอาจจำเป็นต้องทราบถึงทฤษฎีพื้นฐานต่าง ๆ ของตัวควบคุม เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับโครงสร้างและการทำงาน ตลอดจนการออกแบบตัวควบคุมซึ่งมีความสำคัญในเชิงทฤษฎีด้วยระบบจำลอง โดยตัวควบคุมที่ถูกนำมาศึกษาในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ได้แก่ ตัวควบคุม PID เพื่อใช้เป็นพื้นฐานในการหาสูตรสำเร็จสำหรับพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PIDA for continuous/discrete time โดยใช้หลักการ vector matrix

ในการออกแบบและการหาสูตรสำเร็จนี้ใช้พื้นฐานความรู้จากหนังสือ Modern Control Engineering ของ Ogata และ ผลงานวิจัยของ Ziegler และบทความวิจัย Closed Form Formulas for Continuous Time and Discrete Time for PID Controllers' Parameters (ICCAS2014) ซึ่งได้กล่าวหลักการและโครงสร้างพื้นฐานของตัวควบคุม PID and PIDA ไว้ดังนี้

2.2 การควบคุมแบบป้อนกลับ

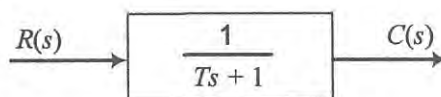
2.2.1 ระบบควบคุมอันดับหนึ่ง

พิจารณาจากบล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมอันดับหนึ่ง ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมอันดับหนึ่ง

เมื่อทำการยุบบล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมอันดับหนึ่งจะได้ (ในหัวข้อที่ 2.2.1 กำหนดให้ตัวแปร T หมายถึงค่าเวลาคงที่ หรือ τ (Tau))



รูปที่ 2.2 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมอันดับหนึ่งที่ยุบแล้ว

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณด้านอินพุตกับสัญญาณด้านเอาต์พุตของระบบจะได้

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts+1} \quad (2.1)$$

ในการวิเคราะห์ผลตอบสนองของระบบ จะใช้สัญญาณมาตรฐานมาทดสอบระบบ โดยสามารถวิเคราะห์ผลตอบสนองโดยใช้สัญญาณแบบขั้นขนาดหนึ่งหน่วย (unit-step) สัญญาณลาดขนาดหนึ่งหน่วย (unit-ramp) และสัญญาณอิมพัลส์ (impulse) และกำหนดให้ค่าเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นศูนย์

2.2.1.1 ผลตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณระดับ

เมื่อทำการแปลงลาปลาซของสัญญาณอันดับหนึ่งแล้วจะได้ $R(s) = \frac{1}{s}$ จากสมการที่ (2.1) สามารถเขียนผลตอบสนองของสัญญาณเอาต์พุตได้เป็น

$$C(s) = \frac{1}{(Ts+1)} \frac{1}{s} \quad (2.2)$$

ทำการแยกเศษส่วนย่อยจากสมการที่ (2.2) จะได้

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \left(\frac{1}{T}\right)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

เมื่อแปลงลาปลาซผกผันที่สมการ (2.3) จะได้

$$c(t) = 1 - e^{-t/T}, \quad (t \geq 0) \quad (2.4)$$

จากสมการที่ (2.4) เห็นได้ว่าค่าเริ่มต้นของสัญญาณเอาต์พุต $c(t)$ มีค่าเป็นศูนย์และค่าสุดท้ายมีค่าเท่ากับหนึ่งและที่ $t = T$ ค่าของ $c(t)$ จะเท่ากับ 0.632 หรือ 63.2% ของการเปลี่ยนแปลงทั้งหมด ซึ่งสามารถแสดงได้โดยการแทนค่าของ $t = T$ ลงในสมการที่ (2.4) จะได้

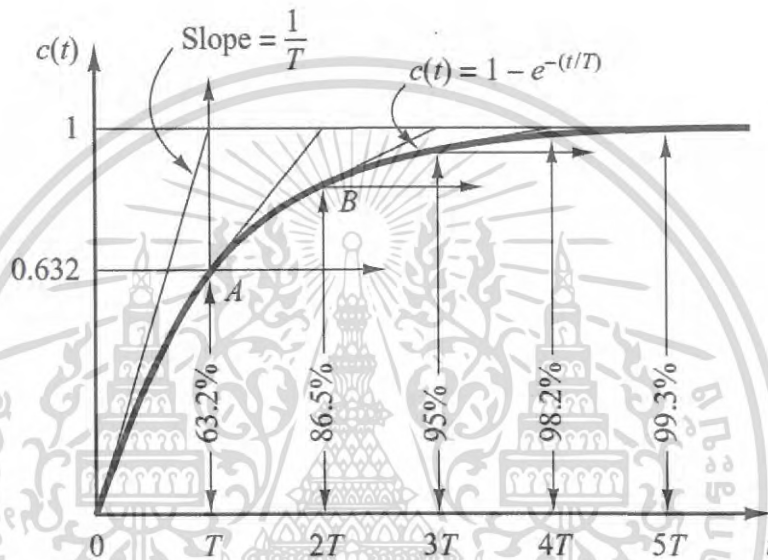
$$c(T) = 1 - e^{-1} = 0.632$$

เมื่อนำผลตอบสนองของระบบเป็นลักษณะของกราฟแบบเอ็กโปเนนเชียลที่มีความชันของกราฟที่ $t = 0$ คือ $1/T$ จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{1}{T} e^{-t/T} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (2.5)$$

เมื่อ $t = \infty$ และ $e^{-t/T}$ จะเข้าสู่ศูนย์จะทำให้ค่าคลาดเคลื่อน $e(t)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ โดยผลการตอบสนองของกราฟแบบเอ็กโปเนนเชียล $c(t)$ ที่ได้จากสมการที่ (2.4) สามารถแสดงดังรูปที่ 2.3



รูปที่ 2.3 ลักษณะการตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณแบบขั้นขนาดหนึ่งหน่วย

2.2.1.2 ผลการตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณลาด

เมื่อทำการแปลงลาปลาซของสัญญาณลาดจะได้

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

จากสมการที่ (2.1) สามารถเขียนผลตอบสนองต่อสัญญาณเอาต์พุตของระบบได้คือ

$$C(s) = \frac{1}{(Ts+1)} \frac{1}{s^2} \quad (2.6)$$

ทำการแยกเศษส่วนย่อยจากสมการที่ (2.6) จะได้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$C(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T^2}{Ts+1} \quad (2.7)$$

ทำการแปลงลาปลาซผกผันจากสมการที่ (2.7) จะได้

$$c(t) = t - T + Te^{-t/T}, \quad (t \geq 0)$$

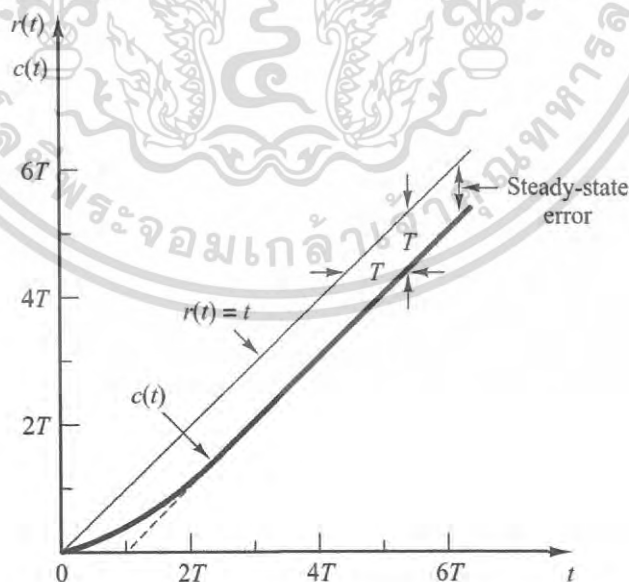
สัญญาณความคลาดเคลื่อน $e(t)$ หาได้จาก

$$\begin{aligned} e(t) &= r(t) - c(t) \\ &= T(1 - e^{-t/T}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

จากสมการที่ (2.8) เมื่อ t เข้าสู่ค่าอนันต์แล้วค่า $e^{-t/T}$ จะเข้าสู่ศูนย์ ทำให้ค่าคลาดเคลื่อน $e(t)$ มีค่าเท่ากับ T หรือ

$$e(\infty) = T$$

สามารถแสดงผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณลาดได้ดังรูปที่ 2.4 จะเห็นว่าค่าความคลาดเคลื่อนจะมีค่าเท่ากับ T เมื่อ t มีค่าสูงมาก ๆ และจะมีค่าน้อยกว่า T เมื่อ t มีค่าต่ำ ๆ



รูปที่ 2.4 ผลตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณลาด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.1.3 ผลตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณอิมพัลส์

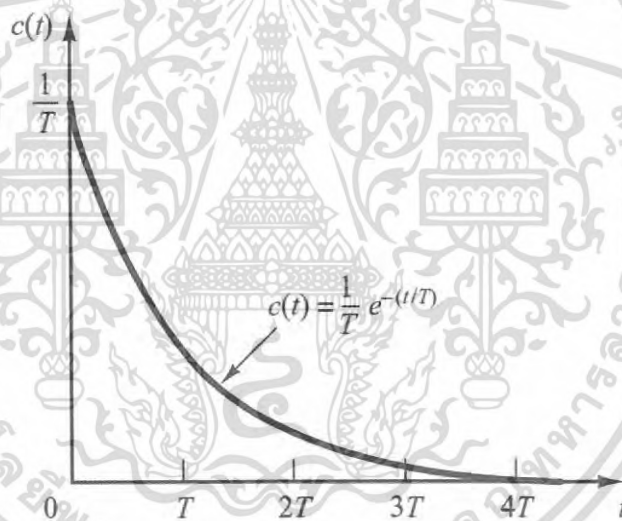
สำหรับสัญญาณอินพุตอิมพัลส์แล้วมี $R(s)=1$ ดังนั้นสัญญาณเอาต์พุตของระบบควบคุมอันดับหนึ่งคือ

$$C(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad (2.9)$$

แปลงผกผันลาปลาซของสมการที่ (2.9) คือ

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad (t \geq 0) \quad (2.10)$$

ลักษณะผลตอบสนองของสมการที่ (2.10) แสดงในรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5 ผลตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งต่อสัญญาณอิมพัลส์

2.2.2 ระบบควบคุมอันดับสอง

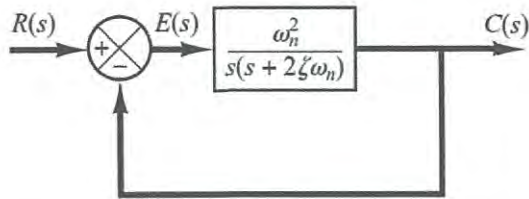
ระบบควบคุมอันดับสองสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนอยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ดังนี้

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.11)$$

โดยที่ ω_n คือ ความเร็วเชิงมุมในการแกว่งตามธรรมชาติ (Natural Frequency)

ζ คือ อัตราการหน่วงของระบบ (Damping ratio)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.6 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุมอันดับสอง

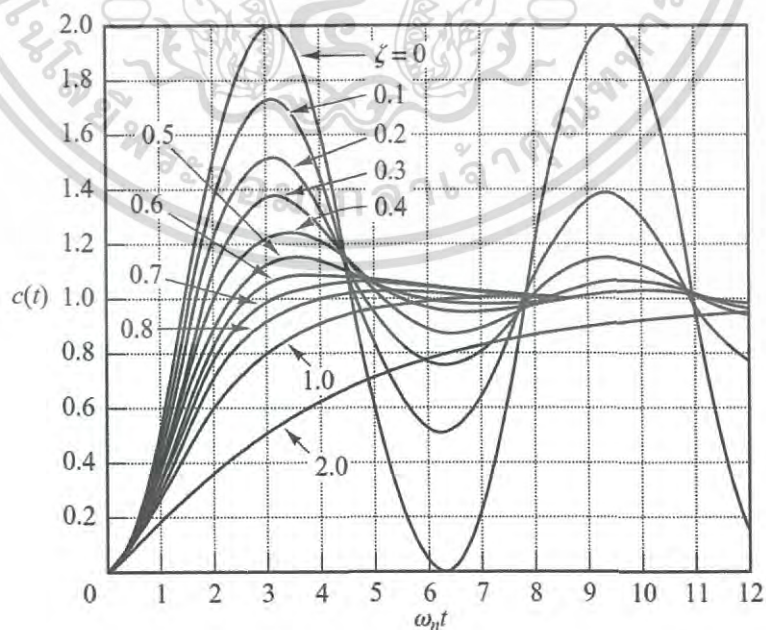
การวิเคราะห์คุณสมบัติของระบบอันดับสอง จะพิจารณาในเทอมของตัวแปรสองตัวคือ ζ และ ω_n ของระบบ

1. กรณี $0 < \zeta < 1$ ตำแหน่งของโพลของฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดจะเป็นค่าเชิงซ้อนสังยุคกัน (Complex Conjugate) โดยมีตำแหน่งอยู่ด้านซ้ายบนระนาบ s กรณีนี้ระบบควบคุมจะอยู่ในสภาวะความหน่วงที่น้อย (Under Damped) และผลตอบสนองชั่วขณะจะเกิดการแกว่ง (Oscillatory)

2. กรณี $\zeta = 1$ เป็นระบบควบคุมที่มีความหน่วงมีค่าวิกฤติ (Critical Damped)

3. กรณี $\zeta > 1$ เป็นระบบที่มีความหน่วงมาก (Over Damped) ซึ่งทั้งสองกรณีนี้ผลตอบสนองชั่วขณะจะไม่เกิดการแกว่งขึ้น

ในการพิจารณาผลตอบสนองของระบบในรูปบล็อกไดอะแกรมของระบบอันดับสองจากรูปที่ 2.6 ต่อสัญญาณแบบขั้นขนาดหนึ่งหน่วย ผลตอบสนองของระบบอันดับสองแสดงได้ดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ผลตอบสนองของระบบควบคุมอันดับสองของสัญญาณแบบขั้นขนาดหนึ่งหน่วย

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.2.3 ข้อกำหนดของระบบ

ข้อกำหนด คือค่าพารามิเตอร์ที่จำเป็นต้องทราบในการออกแบบตัวควบคุม ค่าเหล่านี้แสดงให้เห็นถึงการตอบสนองในสถานะชั่วคราวของระบบควบคุมต่ออินพุตที่เป็นสัญญาณแบบขั้นขนาดหนึ่งหน่วย ข้อกำหนดที่สำคัญประกอบด้วย

1. ค่าพุ่งเกินสูงสุด (M_p) เป็นค่าความแตกต่างระหว่างเอาต์พุตที่มีค่าสูงสุดกับเอาต์พุตที่สถานะอยู่ตัวของระบบ ในบางครั้งอาจแสดงอยู่ในรูปของเปอร์เซ็นต์ค่าพุ่งเกินสูงสุด ($\%M_p$)

$$M_p = C_{max} - C_{ss} \quad (2.12)$$

โดยที่ C_{max} คือ ค่าสูงสุดของเอาต์พุต
 C_{ss} คือ ค่าสูงสุดของเอาต์พุตที่สถานะอยู่ตัว

หรือ

$$\%M_p = \left| \frac{M_p}{C_{ss}} \right| \times 100\% \quad (2.13)$$

2. ค่าเวลาประวิง (Delay Time : t_d) คือช่วงเวลาที่เกิดผลของการตอบสนองในสถานะชั่วคราวของระบบมีค่าเข้าสู่ 50% ของค่าที่สถานะอยู่ตัว

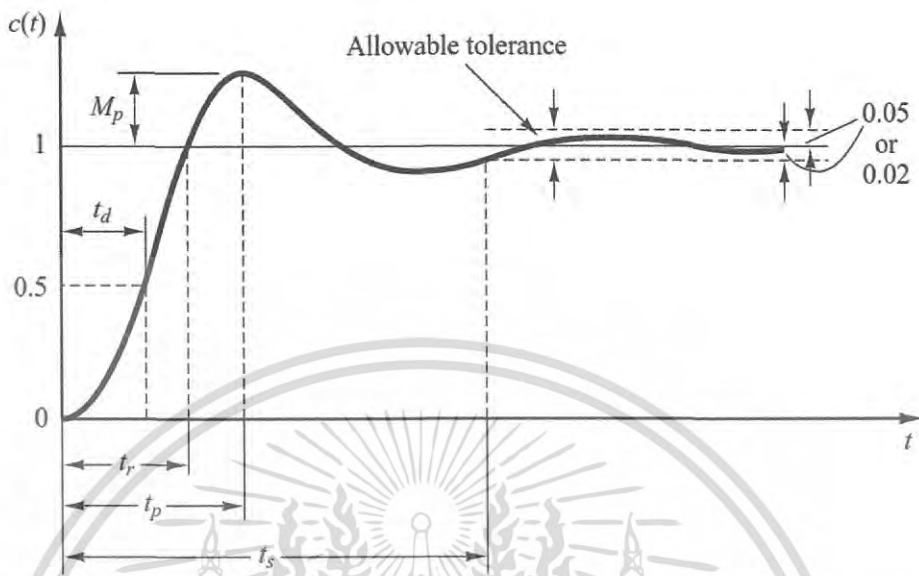
3. ค่าช่วงเวลาขึ้น (Rise Time : t_r) คือช่วงเวลาที่เกิดการตอบสนองในสถานะชั่วคราวของระบบมีค่าเพิ่มขึ้นจาก 10% ไปเป็น 90% ของค่าที่สถานะอยู่ตัวหรือหมายถึงช่วงเวลาที่เกิดการตอบสนองมีค่าจาก 5% ไปเป็น 95% หรือ 0% ไปเป็น 100% ของค่าที่สถานะอยู่ตัวก็ได้ ถ้าค่าช่วงเวลาขึ้นมีค่าน้อย หมายถึงระบบนั้นมีการตอบสนองเร็ว

4. ค่าช่วงเวลาเข้าที่ (Setting Time : t_s) คือช่วงเวลาที่เกิดผลตอบสนองของระบบมีค่าเข้าสู่ช่วง $\pm 2\%$ หรือ $\pm 5\%$ ของค่าที่สถานะอยู่ตัวและมีค่าอยู่ในช่วงนี้ตลอดไป หรือหมายถึงค่าของเวลาที่ผลการตอบสนองในสถานะชั่วคราวเปลี่ยนไปเป็นการตอบสนองในสถานะอยู่ตัว

5. ค่าเวลายอด (Peak Time : t_d หรือ t_{max}) เป็นค่าเวลาของเวลาที่ผลตอบสนองในสถานะชั่วคราวของระบบเกิดค่าพุ่งเกินสูงสุด

6. ค่าความคลาดเคลื่อนที่สถานะอยู่ตัว (Steady State Error : e_{ss}) เป็นค่าความแตกต่างของเอาต์พุตของระบบกับค่าปรับตั้งในขณะที่ระบบอยู่ในสถานะอยู่ตัว ระบบที่ดีจะต้องมีความคลาดเคลื่อนที่เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สถานะอยู่ตัวน้อยที่สุด



รูปที่ 2.8 ค่าต่าง ๆ ของระบบต่อการตอบสนองต่อสัญญาณอินพุตแบบขั้นขนาดหนึ่งหน่วย

2.3 รูปแบบของการควบคุมบนพื้นฐาน PID

ตัวควบคุมแบบ PID ซึ่งประกอบไปด้วยตัวควบคุมแบบ Proportional (P) ตัวควบคุมแบบ Integral (I) และ ตัวควบคุมแบบ Derivative (D) โดยทั่วไปตัวควบคุมแบบ PID มีฟังก์ชันการถ่ายโอนดังต่อไปนี้

$$G_{PID}(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \tag{2.14}$$

โดยที่ K_p คือ อัตราขยายของตัวควบคุมแบบ P (Proportional gain)

K_I คือ อัตราขยายของตัวควบคุมแบบ I (Integral gain)

K_D คือ อัตราขยายของตัวควบคุมแบบ D (Derivative gain)

นอกจากนี้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมแบบ PID ยังนิยมเขียนอยู่ในอีกรูปแบบคือ

$$G_{PID}(s) = K_{pid} \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \tag{2.15}$$

โดยที่ K_{pid} คือ อัตราขยายของตัวควบคุมแบบ PID

T_i คือ เวลาอินทิกรัลหรือ Reset time

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

T_d คือ เวลาอนุพันธ์หรือเวลาอัตรา Rate time

จากสมการ (2.14) และสมการ (2.15) จะเห็นว่า $K_D = K_{pid}T_d$ และ $K_I = K_{pid} / T_i$ โดยค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมแบบ PID ทั้งสามค่านี้จะใช้สำหรับปรับแต่งค่าให้กับตัวควบคุมเพื่อควบคุมกระบวนการที่ต้องการ

2.3.1 การควบคุมแบบ P (Proportional control)

การควบคุมแบบ P เป็นการควบคุมแบบสัดส่วน คือสัญญาณควบคุม $u(t)$ จากตัวควบคุมส่งไปปรับกระบวนการมีค่าเป็นสัดส่วนกับค่าความคลาดเคลื่อนสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้ดังนี้

$$m_p(t) = \bar{m} + K_p e(t) \quad (2.16)$$

โดย $m_p(t)$ คือ ค่าเอาต์พุตของตัวควบคุมแบบ Proportional

\bar{m} คือ ค่าเอาต์พุตของตัวควบคุมเมื่อความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์

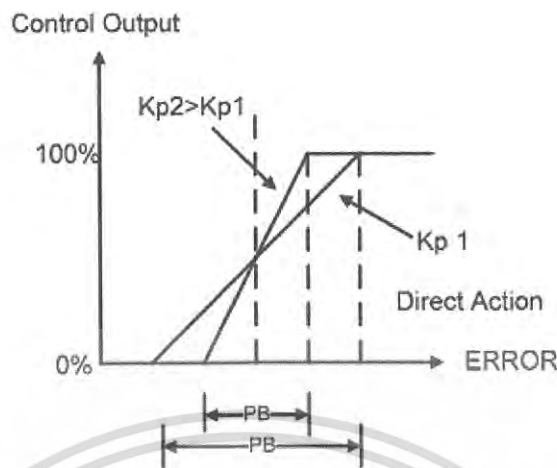
$e(t)$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

K_p คือ ค่าอัตราขยายของตัวควบคุมแบบ Proportional

ตัวควบคุมบางตัวสัญญาณที่ด้านขาเข้าและด้านขาออกนั้น อาจจะมีหน่วยที่ต่างกัน เช่นการเปลี่ยนแปลงของอัตราการไหลที่ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงทางด้านความอุณหภูมิ เพื่อหลีกเลี่ยงที่จะเกิดการแปลงหน่วย ความสัมพันธ์ระหว่างสัญญาณทางด้านขาออกและขาเข้าของตัวควบคุมอาจแสดงออกเป็นแถบของสัดส่วน Proportional Band (%PB) โดยที่แถบสัดส่วนคือพิสัยของสัญญาณเข้าที่ทำให้ตัวควบคุมปฏิบัติงานเต็มพิสัยการทำงาน หรือถ้ามองจากตัวควบคุม แถบสัดส่วนคือช่วงความคลาดเคลื่อนที่ทำให้สัญญาณออกของตัวควบคุมเปลี่ยนแปลงจากค่าสูงสุดไปต่ำสุด โดยแสดงเป็นเปอร์เซ็นต์ของพิสัยสัญญาณเข้าตัวควบคุมความสัมพันธ์ระหว่างอัตราขยายและเปอร์เซ็นต์แถบสัดส่วนคือ

$$K_p = \frac{100}{\%PB} \quad (2.17)$$

คุณสมบัติของชนิดการควบคุมแบบ P แสดงดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 คุณสมบัติของการควบคุมแบบ Proportional

จากรูปที่ 2.9 แสดงให้เห็นว่าจะเกิดการอึดตัวของค่าความคลาดเคลื่อน คือ เมื่อเอาต์พุตสูงถึง 100% ขณะที่ค่าความคลาดเคลื่อนยังคงเพิ่มขึ้นไปอีก ค่าเอาต์พุตจะไม่สามารถเพิ่มขึ้นตามได้ ในทำนองเดียวกันเมื่อค่าเอาต์พุตมีค่าเท่ากับ 0% ขณะที่ค่าความคลาดเคลื่อนระหว่างที่เอาต์พุตมีค่าจาก 0% ถึง 100% เรียกว่า PB โดยค่า PB จะมีผลต่ออัตราขยายของตัวควบคุม กล่าวคือ เมื่อค่า PB สูงขึ้นค่าอัตราขยายของตัวควบคุมจะลดลง จากสมการ (2.17) และเมื่ออัตราขยายของตัวควบคุมลดลงจะทำให้เกิดการออฟเซต (Offset) ในระบบมากขึ้น การควบคุมแบบสัดส่วนนี้สามารถควบคุมระบบได้ดีพอสมควรเหมาะสมกับกระบวนการที่ต้องการผลตอบสนองที่รวดเร็วและยอมให้เกิดความคลาดเคลื่อนได้ขณะหนึ่ง

2.3.2 การควบคุมแบบ I (Integral control)

การควบคุมแบบ I มีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่าการควบคุมแบบรีเซต (Reset Control) โดยการควบคุมจะพิจารณาค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นทั้งหมด ซึ่งการหาค่าความคลาดเคลื่อนในการควบคุมแบบ I นี้จะต้องหาค่าพื้นที่ทั้งหมดภายใต้กราฟของค่าความคลาดเคลื่อนต่อเวลาจากนั้น นำไปคูณกับค่าคงที่ซึ่งเรียกว่า อัตราขยายของตัวควบคุมแบบ I เพื่อหาค่าเอาต์พุต ดังสมการ (2.18)

$$m_I(t) = K_I \int_0^t e(t) dt + \overline{m}_I(0) \quad (2.18)$$

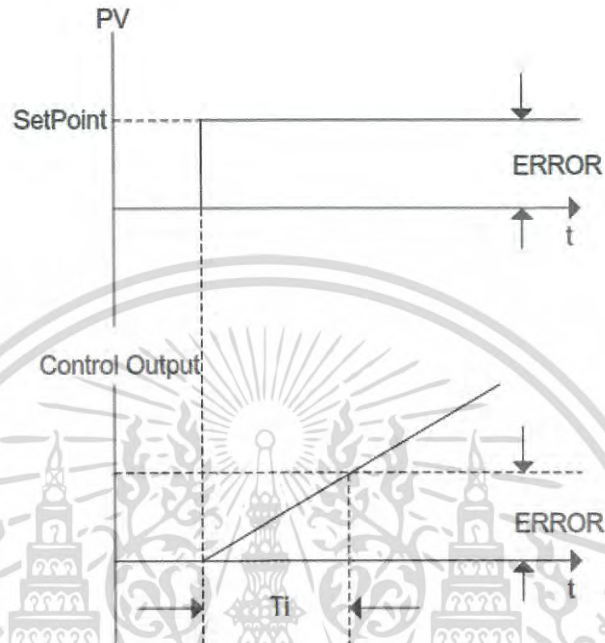
โดย $m_I(t)$ คือ ค่าเอาต์พุตของตัวควบคุมแบบ I

$\int_0^t e(t) dt$ คือ พื้นที่ทั้งหมดของความคลาดเคลื่อน

$\overline{m}_I(0)$ คือ เอาต์พุตของตัวควบคุมที่เวลา t มีค่าเป็นศูนย์

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

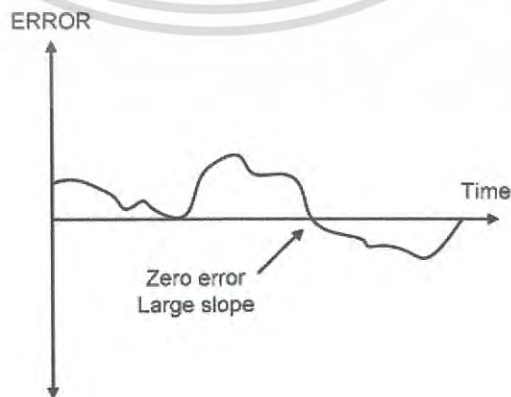
คุณสมบัติของการควบคุมแบบ I แสดงดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 ผลตอบสนองของการควบคุมแบบ Integral

2.3.3 การควบคุมแบบ D (Derivative Control)

ตัวควบคุมแบบ D สัญญาณเอาต์พุตของตัวควบคุมจะขึ้นอยู่กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าความคลาดเคลื่อนต่อเวลา (Time Rate of Change of Error) จะเห็นค่าความคลาดเคลื่อนเปลี่ยนแปลงซึ่งเรียกรวมการกระทำดังกล่าวนี้ว่า อัตราการกระทำ (Rate Action) ตามตัวอย่าง ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ตัวอย่างคุณสมบัติของกริยาการควบคุมแบบ Derivative

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากรูปที่ 2.11 จะเห็นว่าที่ค่าความคลาดเคลื่อนเป็นศูนย์ มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันที่สูง ผลของการเปลี่ยนแปลงนี้มีผลทำให้ค่าเอาต์พุตที่ได้เกิดการเปลี่ยนแปลงสูงตามไปด้วย ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าความคลาดเคลื่อน สามารถประมาณได้โดยการหาค่าความแตกต่างระหว่างค่าความคลาดเคลื่อน 2 ค่า และหารด้วยเวลาระหว่าง 2 ค่านี้ แล้วนำไปคูณกับค่าคงที่ เรียกว่า อัตราขยายของตัวควบคุมแบบ D เพื่อหาค่าสัญญาณเอาต์พุตของตัวควบคุม ดังสมการ 2.19

$$m_D(t) = K_D \frac{e(t) - e(t_0)}{(t - t_0)} \quad (2.19)$$

หรือ

$$m_D(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (2.20)$$

โดยที่ $m_D(t)$ คือ ค่าเอาต์พุตของตัวควบคุมแบบ D ที่เวลา t

$e(t)$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่เวลา t

$e(t_0)$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่เวลา t_0

การควบคุมแบบนี้ เหมาะสำหรับกระบวนการที่มีเวลาหน่วง (Time Lag) มาก ๆ เพราะสามารถแก้ค่าความคลาดเคลื่อนที่ตัวควบคุมแบบสัดส่วนและแบบอินทิกรัล ต่างก็มีข้อจำกัดอยู่ที่ความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่ ซึ่งเป็นปัญหาต่อการควบคุมกระบวนการแต่ความคลาดเคลื่อนขนาดใหญ่นี้สามารถรู้ได้ล่วงหน้าโดยพิจารณาจากแนวโน้มของความคลาดเคลื่อนหรืออัตราการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณนั่นเอง ตัวอนุพันธ์มีหลักการทำงาน คือ ตัวควบคุมตอบสนองต่ออัตราการเปลี่ยนแปลงของความคลาดเคลื่อนถึงแม้ว่าความคลาดเคลื่อนยังมีค่าน้อยอยู่ สัญญาณที่ออกจากตัวอนุพันธ์ไม่ได้สัมพันธ์กับขนาดของความคลาดเคลื่อน แต่ขึ้นอยู่กับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความคลาดเคลื่อน ถ้าความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่ ตัวอนุพันธ์จะให้สัญญาณออกเป็นศูนย์ คุณสมบัติข้อนี้มีผลดีคือ ตัวควบคุมจะมีผลตอบสนองที่เร็วก่อนที่ความคลาดเคลื่อนจะเพิ่มมากขึ้น และทำให้ระบบมีผลตอบสนองที่เร็วขึ้น

2.3.4 การควบคุมแบบ PI (Proportional-Integral Control)

เนื่องจากในปัญหาข้างต้นของการควบคุมแบบ P นั้น จะทำให้เกิดค่าออฟเซตเกิดขึ้นได้ขนาดหนึ่ง ซึ่งการกำจัดค่าออฟเซตนี้ ทำได้โดยการเพิ่มการควบคุมแบบ I เข้าไปช่วยในการควบคุม ดังนั้น สมการสัญญาณเอาต์พุตของตัวควบคุมแบบนี้จะเป็นไปตามสมการ (2.21)

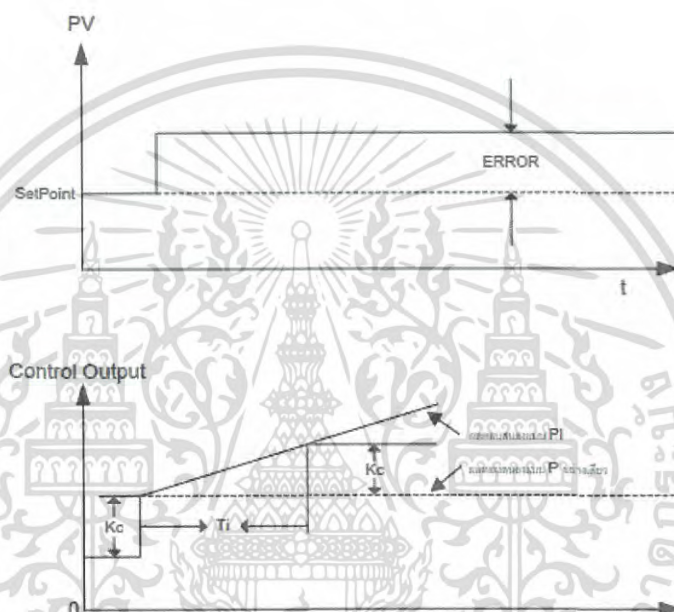
$$m_{PI}(t) = \bar{m} + K_p e(t) + K_p K_I \int_0^t e(t) dt \quad (2.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

$$m_{PI}(t) = \bar{m} + K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad (2.22)$$

เมื่อ $K_I = \frac{1}{T_i}$



รูปที่ 2.12 ตัวอย่างผลตอบสนองของการควบคุมแบบ PI (Direct Action)

นอกจากการควบคุมแบบ PI จะทำให้ค่าออฟเซตที่สภาวะคงที่เป็นศูนย์แล้ว ยังช่วยลดค่าพุ่งเกินและการแกว่ง (Oscillation) ของระบบลงได้ แต่จะทำให้ค่าช่วงเวลาเข้าสู่จุดเป้าหมาย (Set point) มีค่ามากขึ้น

2.3.5 การควบคุมแบบ PD (Proportional-Derivate Control)

การประยุกต์ใช้การควบคุมแบบ P ร่วมกับการควบคุม D ก็เพื่อทำให้ผลตอบสนองของระบบรวดเร็วขึ้น แต่จะไม่มีผลโดยตรงต่อผลตอบสนองที่สภาวะคงที่ ซึ่งสมการเอาต์พุตของการควบคุมแบบ PD แสดงดังสมการ (2.23)

$$m_{PD}(t) = \bar{m} + K_p e(t) + K_p K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (2.23)$$

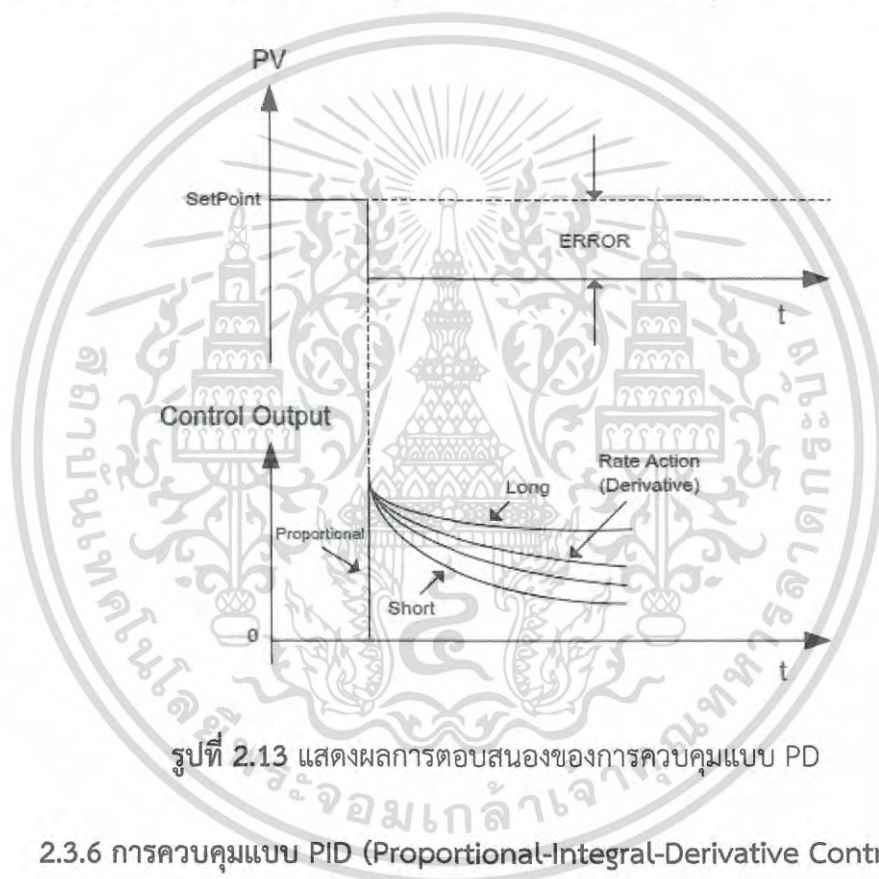
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

หรือ

$$m_{PD}(t) = \bar{m} + K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.24)$$

เมื่อ $K_D = T_d$

ข้อจำกัดของการควบคุมแบบนี้ก็คือ ไม่สามารถทำให้ออฟเซตของระบบลดลงหรือหมดไปได้ และอาจทำให้ค่าพุ่งเกินของระบบนั้นมีค่าที่สูงขึ้น ผลตอบสนองของควบคุมแบบ PD แสดงดังรูปที่ 2.13



รูปที่ 2.13 แสดงผลการตอบสนองของการควบคุมแบบ PD

2.3.6 การควบคุมแบบ PID (Proportional-Integral-Derivative Control)

จากที่ได้กล่าวไว้ตอนต้น การควบคุมแบบ PD ทำให้ระบบมีเสถียรภาพที่ดีขึ้นและมีผลตอบสนองเร็วขึ้น แต่ไม่สามารถทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนหรือออฟเซตที่สภาวะคงที่เป็นศูนย์ได้ ส่วนการควบคุมแบบ PI นั้นจะทำให้ค่าความคลาดเคลื่อนที่สภาวะที่ลดลงหรือหมดไป แต่ทำให้เสถียรภาพลดลง ดังนั้น เพื่อให้ผลตอบสนองของระบบควบคุมมีสมรรถนะเป็นไปตามต้องการจึงต้องให้การควบคุมทั้งสองแบบทำงานร่วมกัน ซึ่งจะทำให้ได้การควบคุมแบบ PID ที่มีสมการสัญญาณเอาต์พุต ดังสมการ (2.25)

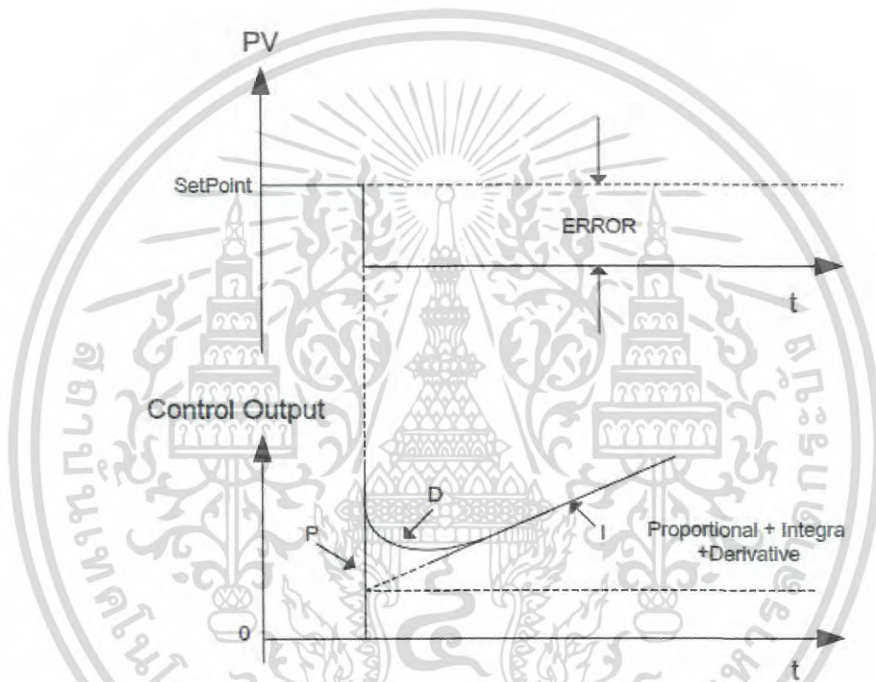
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$m_{PID}(t) = \bar{m} + K_p e(t) + K_p K_I \int_0^t e(t) dt + K_p K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (2.25)$$

หรือ

$$m_{PID}(t) = \bar{m} + K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.26)$$

ผลตอบสนองของการควบคุมแบบ PID แสดงดังรูปที่ 2.14



รูปที่ 2.14 แสดงผลตอบสนองของการควบคุมแบบ PID

เราสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมแบบ PID ได้ดังนี้

$$G_{PID}(s) = K_{pid} \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.27)$$

หรือ

$$G_{PID}(s) = K_{pid} \left(\frac{T_i T_d s^2 + T_i + 1}{T_d s} \right) \quad (2.28)$$

จากสมการที่ (2.28) แสดงให้เห็นว่าตำแหน่งของซีโรบนระนาบ s (s -plane) จะขึ้นอยู่กับค่า T_i และ T_d ได้ดังนี้

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$T_i T_d s^2 + T_i s + 1 = 0$$

$$S_{1,2} = \frac{-T_i \pm \sqrt{(T_i)^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d} \quad (2.29)$$

เมื่อพิจารณาค่ารากของสมการ

ถ้า $T_i \geq 4T_d$ ตำแหน่งของซีโรทั้งสองตัวจะอยู่บนแกนจริงบนระนาบ s ซึ่งเป็นค่าเหมาะสมที่สุด (Optimum)

ถ้า $T_i < 4T_d$ ตำแหน่งของซีโรทั้งสองตัวจะเป็นตัวเลขเชิงซ้อนสังยุค (Complex conjugate) ซึ่งไม่ใช่ค่าที่เหมาะสมที่สุด ดังนั้นจึงกำหนดให้

$$T_i \geq 4T_d$$

ถ้าให้ z_1, z_2 คือ ซีโรของตัวควบคุม

$$z_1 = z_2 = \frac{1}{2T_d}$$

ทำให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุม PID จัดรูปแบบใหม่เป็น

$$G_{PID}(s) = K_{pid} \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (2.30)$$

จากฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุม PID ในสมการ (2.30) พบว่าตัวควบคุม PID จะประกอบไปด้วยจำนวนซีโรสองตัวและโพลหนึ่งตัว ซึ่งอยู่ที่จุดกำเนิดบนระนาบ s ดังนั้นทำให้ตัวควบคุมดังกล่าวมีความเหมาะสมสำหรับกระบวนการแคโนอันดับที่สองเท่านั้น แต่เมื่อนำไปควบคุมกระบวนการที่อันดับมากกว่าสองขึ้นไป จะเริ่มมีความยุ่งยากและระบบจะไม่มีเสถียรภาพ เนื่องจากจำนวนซีโรของตัวควบคุมแบบ PID มีจำนวนน้อยกว่าโพลของกระบวนการที่ทำการควบคุม

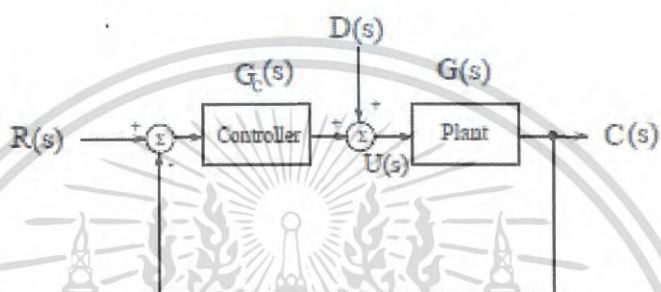
2.3.7 การควบคุมแบบ PIDA (Proportional, Integral, Derivative and Acceleration Control)

จากที่ได้กล่าวไว้ในข้างต้น การควบคุมแบบ PID มีข้อจำกัดเมื่อลำดับของกระบวนการสูงขึ้นมากกว่าสอง ทำให้ระบบไม่มีเสถียรภาพและมีผลตอบสนองที่ช้า

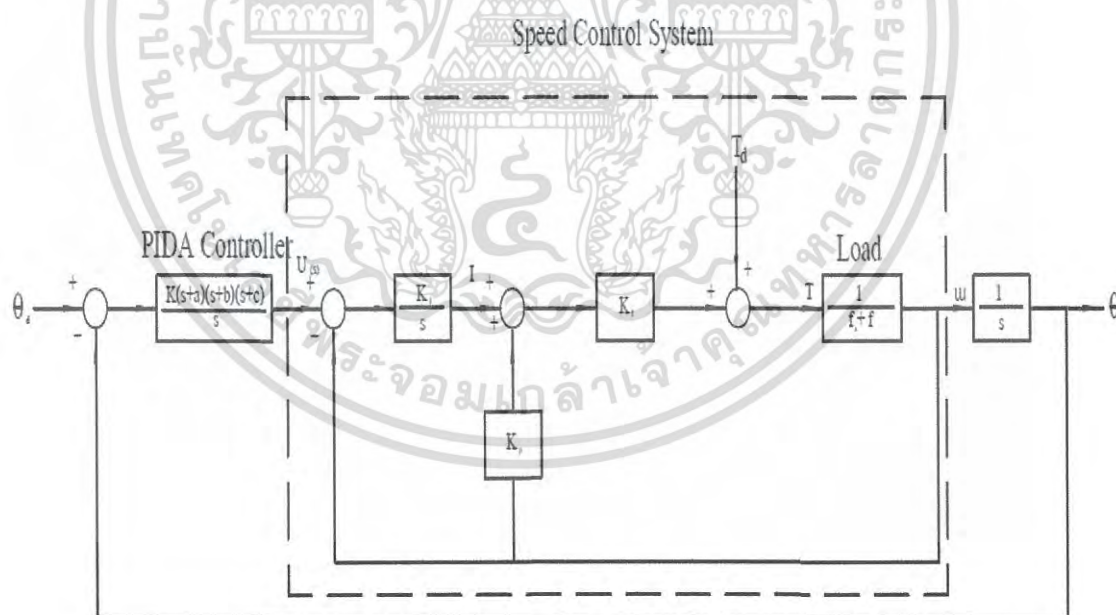
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในงานวิจัยนี้ได้นำไปทดสอบกับกระบวนการอันดับที่สาม โดยตัวควบคุม PIDA ประกอบด้วย

3 ซีโร และ 3 โพล แต่ 2 โพลอาจไม่ต้องใช้ในการออกแบบ การเพิ่มซีโรให้กับ PID controller ทำให้เรียกว่า PIDA Controller. การเพิ่มซีโร (Zero) ให้กับ PID controller ของกระบวนการอันดับที่สาม (third order plant) นั้นทำให้ root locus ของกระบวนการอันดับที่สาม (third order plant) มีรากเด่น (dominant roots) เด่นขึ้นด้วยการลดผลกระทบของรากที่ไม่เด่น (non-dominant roots) ตามรูปที่ 2.15, 2.16 และรูปที่ 2.17

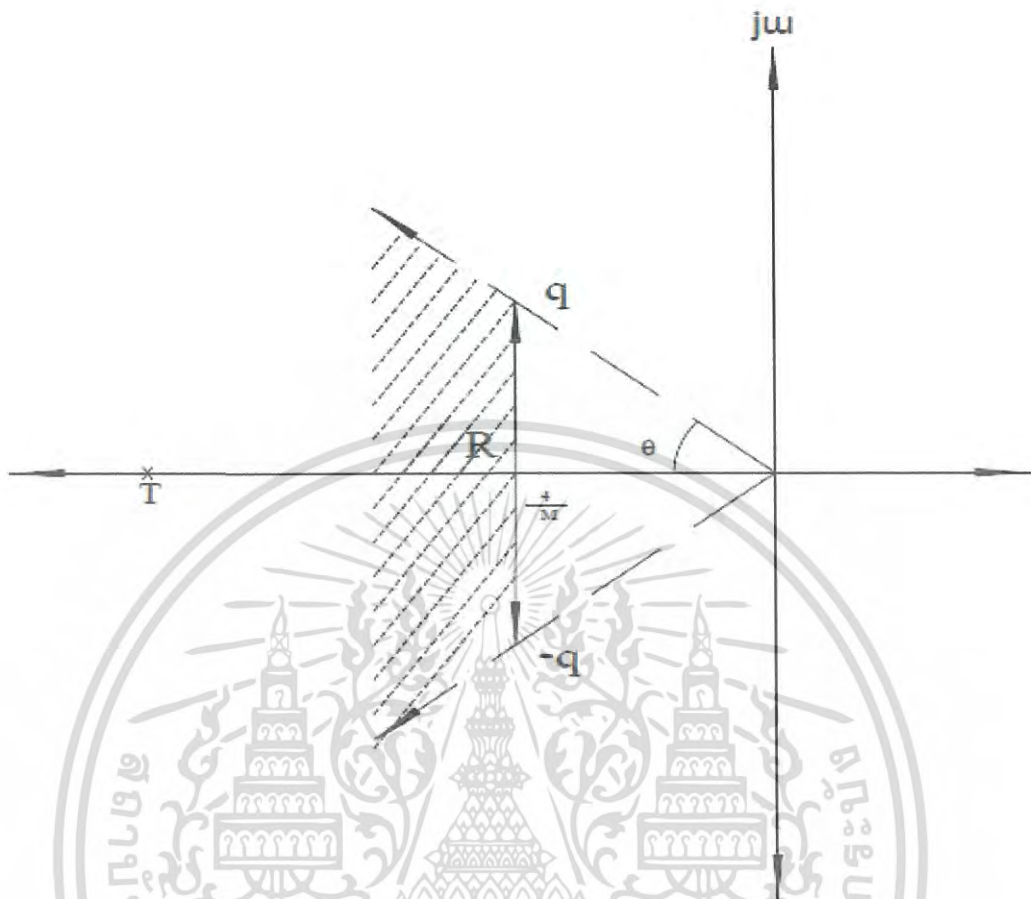


รูปที่ 2.15 Typical standard PIDA controller



รูปที่ 2.16 Example of PIDA Controller for speed control of AC motor

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.17 S-Plane ที่แสดงพื้นที่สำหรับ Dominant root และตำแหน่งสำหรับ closed loop root

จากรูปที่ 2.15 ตัวชดเชยของ PIDA ถูกนิยามเป็น

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{(s+d)} + \frac{K_A s^2}{(s+d)(s+e)}$$

$$= K \frac{(s+a)(s+b)(s+z)}{s(s+d)(s+e)} \quad a, b, z \ll d, e \quad (2.31)$$

เมื่อ a, b, z เป็นซีโรว์ และ d, e เป็นโพล ของ PIDA controller เมื่อ a, b, z << d, e เพราะฉะนั้น d, e จึงถูกพิจารณาว่าไม่สำคัญได้ เป้าหมายของ PIDA Controller คือการทำอะไรให้ระบบมีเสถียรภาพโดย closed loop transfer function T(s) คือ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$T(s) = \frac{G(s)G_c(s)}{1 + G(s)G_c(s)} \quad (2.32)$$

เมื่อ $1 + G(s)G_c(s) = 0$ เป็น characteristic equation ประสิทธิภาพของระบบควบคุมที่แสดงในรูปที่ 1 ถูกนิยามโดย transient response ซึ่งรวมพารามิเตอร์ เช่น percent overshoot (P.O), settling time (T_s), และ peak time (T_p) เราจึงได้ค่าต่างๆ เป็นดังนี้

$$P.O. \leq L \quad (2.33)$$

$$T_s \leq M \quad (2.34)$$

$$\max \left| \frac{\text{Output response}}{\text{Disturbance signal}} \right| = \max \left| \frac{C(t)}{D(t)} \right| \leq W \quad (2.35)$$

ค่าของ L, M, W เป็นค่าที่นักออกแบบกำหนด ค่า steady state error $e_{ss} = 0$ เมื่อ PID controller รับค่า step input ค่าที่ต้องการเป็นตัวกำหนดว่าจะเข้าสู่ steady state เร็วแค่ไหน แม่นยำแค่ไหน และทนทานไหม การกำหนดค่า L และ M ต้องการรากเด่นใน s-plan ตามที่ไขว้ในรูปที่ 2 เมื่อ

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{\left(\ln \frac{L}{100} \right)^2}{\pi^2 + \left(\ln \frac{L}{100} \right)^2} \right). \text{ เพราะในตัวควบคุมที่ถูกออกแบบหลังจากถูกใช้ครั้งแรกจะไม่เสถียร}$$

ตามการออกแบบแบบ root locus แบบเดิม ให้ทำกระบวนการดังกล่าวจนกว่าระบบจะเข้าสู่ steady state จะเห็นได้ว่าหากระบบที่มีลำดับมากกว่า 2 จะทำการควบคุมยาก งานวิจัยนี้จึงได้เสนอสูตรสำหรับการออกแบบ PID controller for continuous time and discrete time system เพื่อที่จะได้ค่า specification ของระบบได้เร็วขึ้น

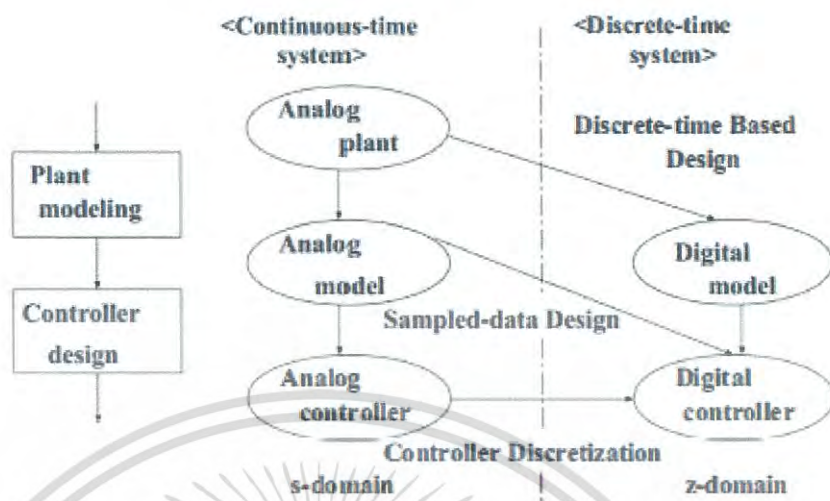
2.4 สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของ PID (Proportional, Integral, Derivative Control) แบบเวลาต่อเนื่อง และแบบไม่ต่อเนื่อง

2.4.1 วิธีการ

ในรูปที่ 2.18 จาก [4], แสดงให้เห็นว่ามี 2 ขั้นตอนสำหรับการออกแบบตัวควบคุม

- 1) Plant modeling
- 2) Controller design

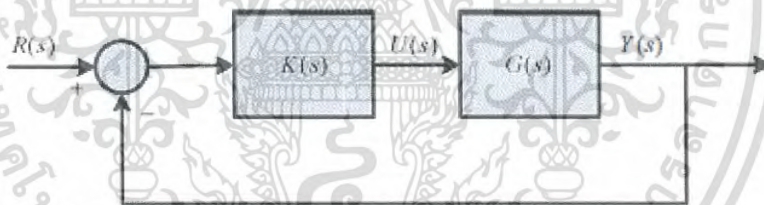
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



รูปที่ 2.18 ขั้นตอนการออกแบบ digital control system

2.4.2 Problem statement

หา PID Controllers $K(s)$ หรือ $K(z)$ สำหรับแพลนต์ $G(s)$ ดังรูปที่ 2.19



รูปที่ 2.19 บล็อกไดอะแกรมของระบบควบคุม (Control System)

2.4.3 แบบเวลาต่อเนื่อง Continuous-Time case

แพลนต์ลำดับที่ 2 (second order plant) ถูกควบคุมโดย PID controller $K(s)$ ดังนั้นจึงได้ฟังก์ชันทรานเฟอร์ ตามข้างล่างนี้

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^2 + a_1s + a_0} \quad (2.36)$$

ในขณะที่ฟังก์ชันทรานเฟอร์ของ PID controller คือ

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.37)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อ K_p เป็น proportional gain, K_i เป็น integral gain และ K_d เป็น derivative gain ตามลำดับ ฟังก์ชันทรานเฟอร์ของ closed-loop $Y(s)/R(s)$ ของการควบคุมแบบป้อนกลับจึงได้ specification คือ

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (2.38)$$

ดังนั้นสมการ actual characteristic จึงได้เป็น

$$\left\{ \begin{aligned} F_{actual}(s) &= 1 + K(s)G(s) = 0, \\ &= 1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) \left(\frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \right) = 0, \\ \frac{F_{actual}(s)}{(1 + K_d b_1)} &= s^3 + \frac{(a_1 + K_p b_1 + K_d b_0)}{(1 + K_d b_1)} s^2 + \dots \\ &\quad + \frac{(a_0 + K_i b_1 + K_p b_0)}{(1 + K_d b_1)} s + \frac{K_i b_0}{1 + K_d b_1} \end{aligned} \right. \quad (2.39)$$

ค่า specification ที่ต้องการออกแบบโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปของ transient และ steady state response characteristic ของ control system ต่อผลตอบสนอง unit step input ซึ่งแสดงโดยคู่ของ complex-conjugate dominant closed-loop poles $S_{d\pm} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ตามนี้

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Percent Overshoot (P.O.)} &= e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\%, \\ \text{Settling Time (} t_s \text{)} &= \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}, (\pm 2\%) \end{aligned} \right. \quad (2.40)$$

จากนั้นให้ค่า specification ในรูปของ Percent Overshoot (P.O.) จึงได้ค่า damping ratio คือ

$$\zeta = \sqrt{\left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2 / \left\{ \pi^2 + \left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2 \right\}}, \quad (2.41)$$

และจากที่ให้ Settling Time $\{t_s (\pm 2\%)\}$ ดังนั้นจะได้ undamped natural frequency คือ

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} \text{ rad./sec.} \quad (2.42)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Problem statement ของการออกแบบ PID Controller คือการหาค่าพารามิเตอร์ K_p , K_i , และ K_d ของ PID Controller, 3 poles ของ closed loop และ 3 รากของ actual characteristic equation ถูกแทนค่าในตำแหน่งด้วย output response, ตำแหน่งที่ต้องการของ closed-loop poles สามารถแสดงได้โดยสมการตามข้างล่างนี้

$$\left\{ \begin{aligned} F_{design}(s) &= (s + \alpha\omega_n)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) \\ &= (s + \alpha\omega_n)(s + \zeta\omega_n s \pm j\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}), \\ &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \alpha\omega_n)s^2 + \dots \\ &\quad + (\omega_n^2 + 2\zeta\alpha\omega_n^2)s + \alpha\omega_n^3 \end{aligned} \right. \quad (2.43)$$

สำหรับโพลจริงในแฟกเตอร์ $(s + \alpha\omega_n)$, ผู้ออกแบบเลือกโพลนี้เพื่อความเร็วที่เร็วกว่าโพลใน quadratic pair $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ ดังนั้นผลตอบสนองของ second order response characteristic

โดยการนำค่า coefficient ของตัวยกกำลังระหว่าง (2.39) และ (2.43) มาเท่ากัน

$$\left\{ \begin{aligned} [s^2]: (a_1 + K_p b_1 + K_d b_0) &= (1 + K_d b_1)(2\zeta\omega_n + \alpha\omega_n) \\ [s^1]: (a_0 + K_i b_1 + K_p b_0) &= (1 + K_d b_1)(\omega_n^2 + 2\zeta\alpha\omega_n^2) \\ [s^0]: K_i b_0 &= (1 + K_d b_1)\alpha\omega_n^3 \end{aligned} \right. \quad (2.44)$$

สมการนี้นำไปสู่ simple linear system of equation ในรูปของ vector-matrix $Ax=b$ เมื่อ

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_0 - b_1(2\zeta + \alpha)\omega_n \\ b_0 & b_1 & -b_1(1 + 2\zeta\alpha)\omega_n^2 \\ 0 & b_0 & b_1\alpha\omega_n^3 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \end{bmatrix} \\ b &= \begin{bmatrix} -a_1 + (2\zeta + \alpha)\omega_n \\ -a_0 + (1 + 2\zeta\alpha)\omega_n^2 \\ \alpha\omega_n^3 \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (2.45)$$

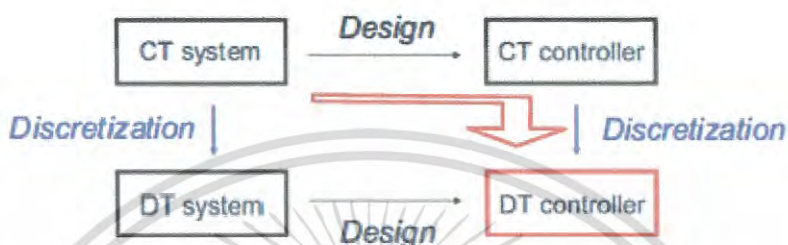
เมื่อ α , ζ and ω_n เป็นค่าที่ได้จากการออกแบบ specification ในขณะที่ a_1 , b_1 และ a_0 , b_0 เป็นค่าที่ได้จาก process model ดังนั้น สูตรการหาค่า K_p , K_i , และ K_d ของ PID Controller ใน (2.37) คือ

$$[K_p \ K_i \ K_d]^T = A^{-1}b. \quad (2.46)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

2.3 แบบเวลาไม่ต่อเนื่อง Discrete-Time Case

กระบวนการออกแบบตามรูปที่ 1 แสดงให้เห็นว่า analog controller ใช้ s-domain ส่วน digital controller ใช้ z-domain ในขั้นตอนถัดไป เพื่อที่จะให้ส่วนนี้เสร็จคือ controller discretization ซึ่งแสดงในรูปที่ 2.20

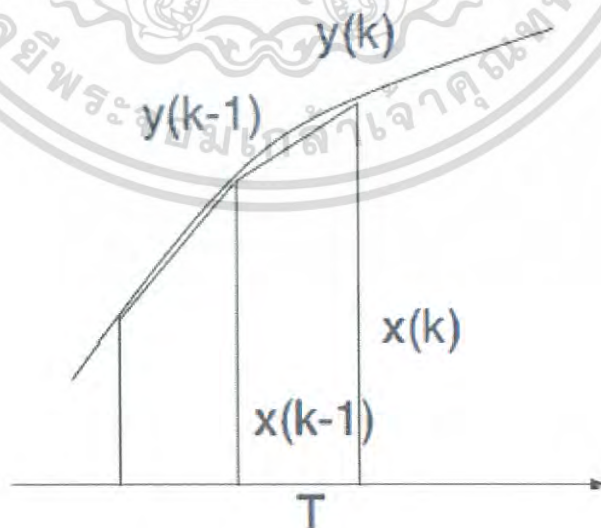


รูปที่ 2.20 Discretization

มีหลายวิธีในการ mapping จาก s-plane ไปยัง z-plane วิธีการที่ใช้กันโดยทั่วไปคือการแปลงลาพาส จึงได้ z-domain เป็น

$$z = e^{sT}, \quad (2.47)$$

เมื่อ T เป็น sampling time การแปลงนี้จะเกี่ยวข้องกับ transcendental function และ ฟังก์ชันทรานเซอร์ไม่ได้แสดงในรูปของอัตราส่วนพหุนาม (ratio of polynomials) สิ่งนี้ทำให้เกิดความยุ่งยากในการทำ control algorithm ในคอมพิวเตอร์ ดังนั้นจึงใช้การประมาณการในการแปลงแทน



รูปที่ 2.21 Trapezoidal Approximation

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ในรูปที่ 2.21 ทำการรวมพื้นที่ k เป็น $y(k)$ และ $k-1$ เป็น $y(k-1)$ ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟโดยประมาณคือ

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T}{2} \{x(k) + x(k-1)\}, \quad (2.48)$$

Take z-transform ใน (13) ได้เป็น

$$\begin{cases} Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2} [X(z) + z^{-1}X(z)], \\ (1-z^{-1}) = \frac{T}{2}(1+z^{-1})X(z), \\ \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right); \left(\equiv \frac{1}{s} \right) \end{cases} \quad (2.49)$$

สุดท้าย bilinear transformation สามารถนิยามได้เป็น

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \quad (2.50)$$

ตอนนี้เราได้สูตรสำหรับ discrete-time PID Controller's parameter ตามข้างล่างนี้

$$\begin{cases} K(z) = K(s) \Big|_{s = \frac{T}{2} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)} \\ = K_p + \frac{K_i}{\left\{ \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right\}} + K_d \left\{ \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right\}, \\ K(z) = \frac{\alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{z^2 - 1} \\ \text{where} \\ \alpha_2 = \left(K_p + \frac{T}{2} K_i + \frac{2}{T} K_d \right), \\ \alpha_1 = \left(T K_i - \frac{4}{T} K_d \right), \\ \alpha_0 = \left(-K_p + \frac{T}{2} K_i + \frac{2}{T} K_d \right) \end{cases} \quad (2.51)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของ PID controller แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง มีข้อดีที่ไม่ต้องการการคำนวณทางคณิตศาสตร์มาก ทั้งนี้จากผลทดลองแบบจำลอง (simulation) พบว่าผลเอาพุด(output response) ต่อ unit step input ของแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete Time case) ให้ผลตอบสนองที่เร็วกว่าผลตอบสนองของแบบเวลาต่อเนื่อง(Continuouse Time case) มาก



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 3

การหาสูตรสำเร็จสำหรับพารามิเตอร์ของ PIDA Controller

แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

3.1 กล่าวนำ

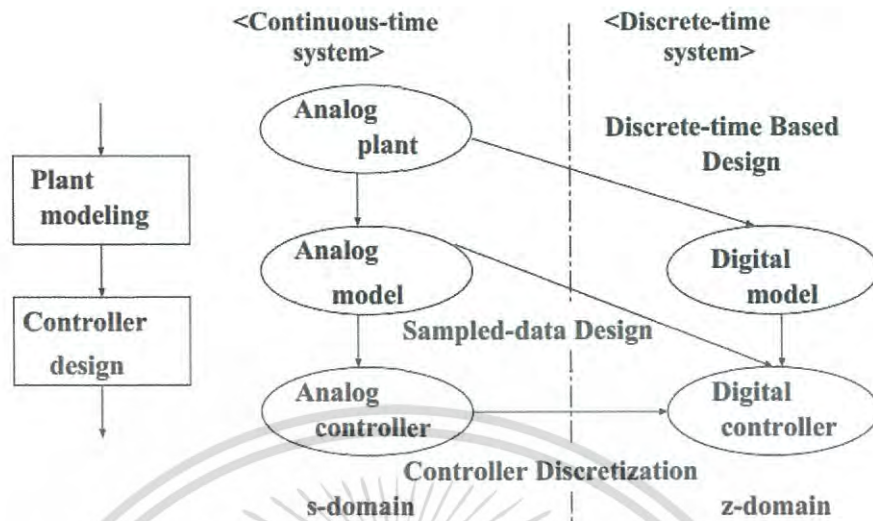
แพลนต์อุตสาหกรรมส่วนใหญ่เป็นประเภท 0 และประกอบด้วย 3-5 first order lags หรือ dead time plus one first order lag. ด้วยสาเหตุนี้ตัวควบคุม PID (Proportional, Integral and Derivative) จึงถูกใช้อย่างกว้างขวางในอุตสาหกรรม แต่เป็นที่รู้กันโดยทั่วไปว่า PID controller ถูกใช้ในการควบคุมแพลนต์ที่ไม่เกินลำดับ 2 และเป็นที่ยากที่จะใช้ PID controller เพียงอย่างเดียวสำหรับแพลนต์ลำดับ 3 หรือสูงกว่า เพราะว่าลำดับหรือ ออเดอร์ของแพลนต์ที่มีมากกว่าจำนวนซีโร่ (Zero) ซึ่งเกินกว่า PID Controller จะควบคุมได้ โดยการออกแบบตัวควบคุม PID ได้ใช้วิธี root locus สำหรับแพลนต์ลำดับ $n-2$ ของ PD(proportional-Derivative) controllers. สำหรับแพลนต์ลำดับที่ 3 PIDA (Proportional, Integral, Derivative and Acceleration) controller ได้ถูกออกแบบทางเทคนิคบน s-plane ซึ่งวิทยานิพนธ์นี้ได้นำเสนอการออกแบบ PIDA Controller ด้วยการคำนวณพารามิเตอร์ที่จะออกแบบในรูปของ closed form หรือรูปแบบปิด สำหรับแบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง Continuous Time System and Discrete Time System

3.2 แนวคิดในการออกแบบ

ในรูปที่ 3.1 การหาสูตรสำเร็จสำหรับตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่องที่นำเสนอในวิทยานิพนธ์เล่มนี้ โดยมีวิธีการทำ 2 ขั้นตอนในการออกแบบ

1. Plant Modeling หรือ โมเดลของแพลนต์ คือ ขั้นตอนการหาฟังก์ชันถ่ายโอนหรือแบบจำลองของกระบวนการอนาล็อกที่ทำการออกแบบให้อยู่ในรูปของสมการ
2. Controller Design หรือ ออกแบบตัวควบคุม คือ การออกแบบและเลือกใช้ตัวควบคุมให้เหมาะสมกับกระบวนการที่ได้มาจากแบบจำลองของกระบวนการอนาล็อกที่เราทำการออกแบบโดยเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันถ่ายโอน $K(s) G(s)$

โดยทำการออกแบบโดยทำการเริ่มต้นจากกระบวนการแบบอนาล็อกเพื่อนำไปสู่แบบจำลองของกระบวนการดิจิทัล เพื่อให้สามารถทำการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาต่อเนื่องได้แล้วจึงทำการแปลงไปสู่ตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่องอย่างโดยตรง



รูปที่ 3.1 ขั้นตอนการออกแบบระบบควบคุมแบบดิจิทัล

3.2.1 ปัญหา

ต้องการหา $K(s)$ หรือ $K(z)$ ของ PIDA Controllers สำหรับแพลนต์ $G(s)$ โดยค่าที่ต้องการในการออกแบบนั้นต้องเป็นที่ยอมรับ

3.2.2 กรณีแบบต่อเนื่อง (Continuous-Time Case)

แพลนต์ลำดับที่ 3 $G(s)$ ถูกควบคุมโดยตัวควบคุม $K(s)$ เพราะฉะนั้นจึงได้ทรานเฟอร์ฟังก์ชันของ $G(s)$ เป็น

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \tag{3.1}$$

และทรานเฟอร์ฟังก์ชันของ PIDA controller เป็น

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s + K_a s^2 \tag{3.2}$$

เมื่อ K_p เป็น proportional gain, K_i เป็น integral gain, K_d เป็น derivative gain, K_a เป็น acceleration gain ตามลำดับ ทรานเฟอร์ฟังก์ชัน $Y(s)/R(s)$ ของระบบควบคุมแบบป้อนกลับในรูปที่ 3.2 จะได้เป็น

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \tag{3.3}$$

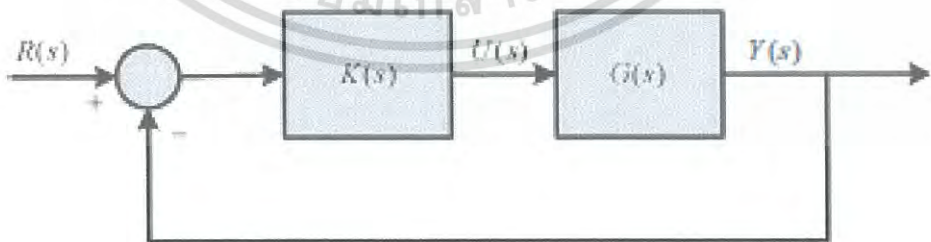
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นจะได้สมการ actual characteristic เป็น

$$\begin{aligned}
 F_{actual}(s) &= 1 + K(s)G(s) = 0, \\
 &= 1 + \frac{(K_p s + K_I + K_d s^2 + K_a s^3)(b_1 s + b_0)}{(s)(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} \\
 \frac{F_{actual}(s)}{(1 + K_a b_1)} &= s^4 + \frac{(a_2 + K_d b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^3 + \dots \\
 &\quad + \frac{(a_1 + K_p b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^2 + \dots \\
 &\quad + \frac{(a_0 + K_I b_1 + K_p b_0)}{(1 + K_a b_1)} s + \dots \\
 &\quad + \frac{K_I b_0}{(1 + K_a b_1)}.
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

ค่าของ specification ที่ต้องการถูกกำหนดในรูปของ transient และ steady state response characteristics ของระบบควบคุมต่ออินพุต 1 unit step ซึ่งถูกแสดงในรูปของ complex-conjugate dominant closed-loop poles $S_{d\pm} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ ตามรายละเอียดดังนี้

$$\begin{aligned}
 \text{Percent Overshoot (P.O.)} &= e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\%, \\
 \text{Settling Time (} t_s \text{)} &= \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}, (\pm 2\%)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$



รูปที่ 3.2 การควบคุมแบบป้อนกลับ

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากค่า specification ที่ต้องการในรูปของ Percent Overshoot ($P.O$) จะได้ค่า damping ratio เป็น

$$\zeta = \sqrt{\left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2 / \left\{ \pi^2 + \left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2 \right\}}, \quad (3.6)$$

จากการกำหนดค่า Settling Time $\{t_s(\pm 2\%) \}$ จะได้ค่า undamped natural frequency เป็น

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} \text{ rad./sec.} \quad (3.7)$$

ปัญหาของออกแบบ PIDA Controller คือการหาค่าพารามิเตอร์ K_p , K_i , K_d และ K_a ของ PIDA Controller ดังนั้นปัญหาดังกล่าวจึงมี 4 closed-loop poles ซึ่งเป็นรากของสมการ actual characteristic ใน (3.4) ถูกแทนในตำแหน่งด้วยการแสดงค่าเอาต์พุตตามที่ต้องการ ตำแหน่งที่ต้องการของ closed-loop poles สามารถแสดงได้ตามสมการที่ถูกออกแบบไว้ตามนี้

$$\begin{cases} F_{design}(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+r)(s+R) = 0, \\ = (s+q)(s+\hat{q})(s+r)(s+R), \\ = s^4 + \{2\zeta\omega_n + (r+R)\}s^3 + \dots \\ + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r+R) + rR\}s^2 + \dots \\ + \{\omega_n^2(r+R) + 2\zeta\omega_n rR\}s + \omega_n^2 rR. \end{cases} \quad (3.8)$$

สำหรับ โพลจำนวนจริง (real pole) ในแฟคเตอร์ $(s+R)$ และ โพลที่ละทิ้งได้ (negligible pole) $(s+r)$ ผู้ออกแบบเลือกโพลนี้ในขอบเขตเดียวกันที่ไซวิน [3] ตัวอย่างเช่น $R \geq \zeta\omega_n$ และ $r \gg R$ เพื่อที่จะเร็วกว่าโพลในคู่ควอดราติก (quadratic pair) $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ ดังนั้นผลตอบสนองจึงเด่นออกมาโดย second-order response characteristic.

ด้วยการแทนที่ของ coefficients ของสมการด้วยกำลังระหว่างสมการ (3.4) และ (3.8) จึงได้เป็น

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$\left\{ \begin{array}{l} s^3]: \frac{a_2 + K_d b_1 + K_a b_0}{(1 + K_a b_1)} = 2\zeta\omega_n + (r + R), \\ s^2]: \frac{a_1 + K_p b_1 + K_d b_0}{(1 + K_a b_1)} = \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r + R) + rR, \\ s^1]: \frac{a_0 + K_i b_1 + K_p b_0}{(1 + K_a b_1)} = \omega_n^2(r + R) + 2\zeta\omega_n rR, \\ s^0]: \frac{K_i b_0}{(1 + K_a b_1)} = \omega_n^2 rR, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

ซึ่งสมการนี้นำไปสู่ simple linear system of equations ในรูปของ vector-matrix form $Ax=b$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & \{b_0 - b_1(2\zeta\omega_n + (r + R))\} \\ b_1 & 0 & b_0 & -b_1\{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r + R) + rR\} \\ b_0 & b_1 & 0 & -b_1\{\omega_n^2(r + R) + 2\zeta\omega_n rR\} \\ 0 & b_0 & 0 & -b_1\omega_n^2 rR \end{bmatrix}, \\ x = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -a_2 + (2\zeta\omega_n + (r + R)) \\ -a_1 + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r + R) + rR\} \\ -a_0 + \{\omega_n^2(r + R) + 2\zeta\omega_n rR\} \\ \omega_n^2 rR \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (3.10)$$

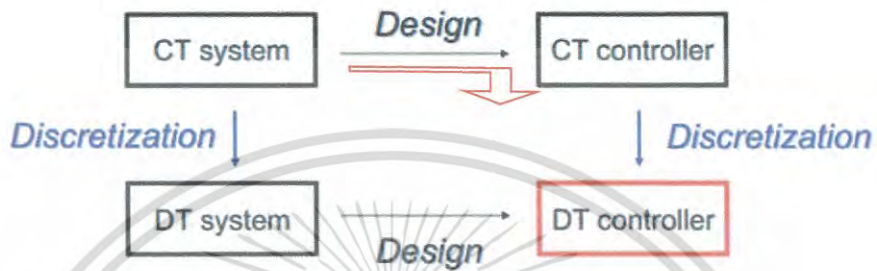
เมื่อ r, R, q และ \bar{q} เป็น root locations พร้อมด้วย specification ที่อยู่บนพื้นฐานการออกแบบ ในขณะที่ a_2, a_1, a_0 และ b_1, b_0 เป็น coefficients จากแพลนต์โมเดล ดังนั้น สูตรในการ K_p, K_i, K_d และ K_a ของ PIDA controller ใน (3.2) คือ

$$\begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix} = A^{-1}b. \quad (3.11)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.2.3 กรณีแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete-Time Case)

ขั้นตอนการออกแบบในรูปที่ 3.1 แสดงให้เห็นว่า analog controller ถูกออกแบบ ใน s -domain แต่ digital controller ถูกออกแบบใน z -domain เพื่อที่จะได้ controller discretization ตามที่โชว์ในรูป 3.3

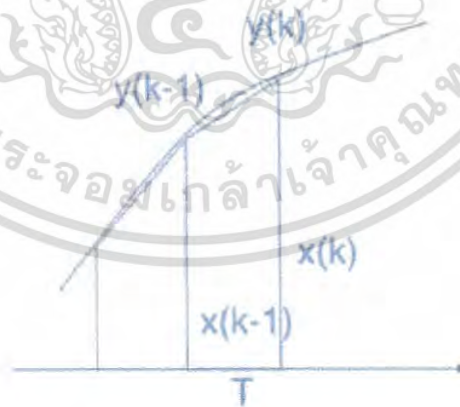


รูปที่ 3.3 แผนผังแสดงการ Discretization ในวิทยานิพนธ์เล่มนี้

มีหลายวิธีสำหรับการ mapping จาก s -plane เป็น z -plane รูปแบบที่เห็นได้ชัดที่สุดในการแปลงคือ ลาปาซ และ z -domain ดังสมการ

$$z = e^{sT} \quad (3.12)$$

เมื่อ T เป็น sampling time, อย่างไรก็ตาม การแปลงนี้เกี่ยวข้องกับ transcendental function และ ทราบเฟอริงค์ชั้นไม่สามารถแสดงในรูปของอัตราส่วนของโพลีโนเมียล สิ่งนี้ทำให้ยากที่จะใช้ control algorithm ใน digital computer ดังนั้น การแปลงโดยประมาณจะถูกนำมาใช้แทน



รูปที่ 4 Trapezoidal Approximation

ในรูปที่ 4 นำพื้นที่รวมใต้กราฟ k เป็น $y(k)$ และ $k-1$ เป็น $y(k-1)$ ดังนั้นพื้นที่ใต้กราฟโดยประมาณคือ

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T}{2} \{x(k) + x(k-1)\}, \quad (3.13)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

จากนั้นใช้ z-transform ใน (3.13) ก็จะได้เป็น

$$\begin{cases} Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2}[X(z) + z^{-1}X(z)], \\ (1-z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2}(1+Z^{-1})X(z), \\ \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}\right); \left(\equiv \frac{1}{s}\right). \end{cases} \quad (3.14)$$

สุดท้าย Bilinear transformation สามารถนิยามได้เป็น

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right). \quad (3.15)$$

เราก็จะได้ Formular for discrete-time PID controller's parameters ตามข้างล่างนี้

$$\begin{aligned} K(z) &= K(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)} \\ &= K_p + \frac{K_i}{\left\{\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right\}} + K_d \left\{\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right\} + \dots \\ &\quad + K_a \left\{\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\right\}^2, \\ K(z) &= \frac{\alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{(z-1)(z+1)(z+1)}, \quad \text{where} \\ \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2T^2} \begin{bmatrix} 2T^2 & T^3 & 4T & 8 \\ 2T^2 & 3T^3 & -4T & -24 \\ -2T^2 & 3T^3 & -4T & 24 \\ -2T^2 & T^3 & 4T & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(3.16)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

3.3 ตัวอย่างการใช้งาน

เราใช้ PID controller ควบคุมแพลนต์ลำดับ 3 ซึ่งถูกนิยามเป็น

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+7)} = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 7s} = \frac{b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (3.17)$$

ถ้า specification ที่ต้องการคือ Percent Overshoot $P.O. \leq 5\%$ และ Setting Time $t_s \leq 2$ secs

3.3.1 วิธีแก้ปัญหาแบบต่อเนื่อง (Continuous-Time Case Solution)

จากค่า Percent Overshoot ที่ได้และ damping ration คือ

$$\zeta = \sqrt{\left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2 / \left\{ \pi^2 + \left[\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right) \right]^2 \right\}} = 0.69, \quad (3.18)$$

และค่า undamped natural frequency คือ

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} = 3.069 \text{ rad./sec.} \quad (3.19)$$

ดังนั้น dominant closed loop poles คือ

$$S_{dt} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -2.118 \pm j2.221 \quad (3.20)$$

แทนค่า $b_1 = 0$, $b_0 = 1$, $a_2 = 8$, $a_1 = 7$, และ $a_0 = 0$, ลงในแพลนต์โมเดล และแทนค่า

$\zeta = 0.69$, $\omega_n = 3.069$ Rad/sec $R=2.1$ และ $r=30$ ลงในค่า specification ที่ต้องการในสมการที่ (11) จึงได้เป็น

$$\begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 28.335 \\ 201.373 \\ 569.103 \\ 593.246 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 596.103 \\ 593.246 \\ 201.373 \\ 28.335 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

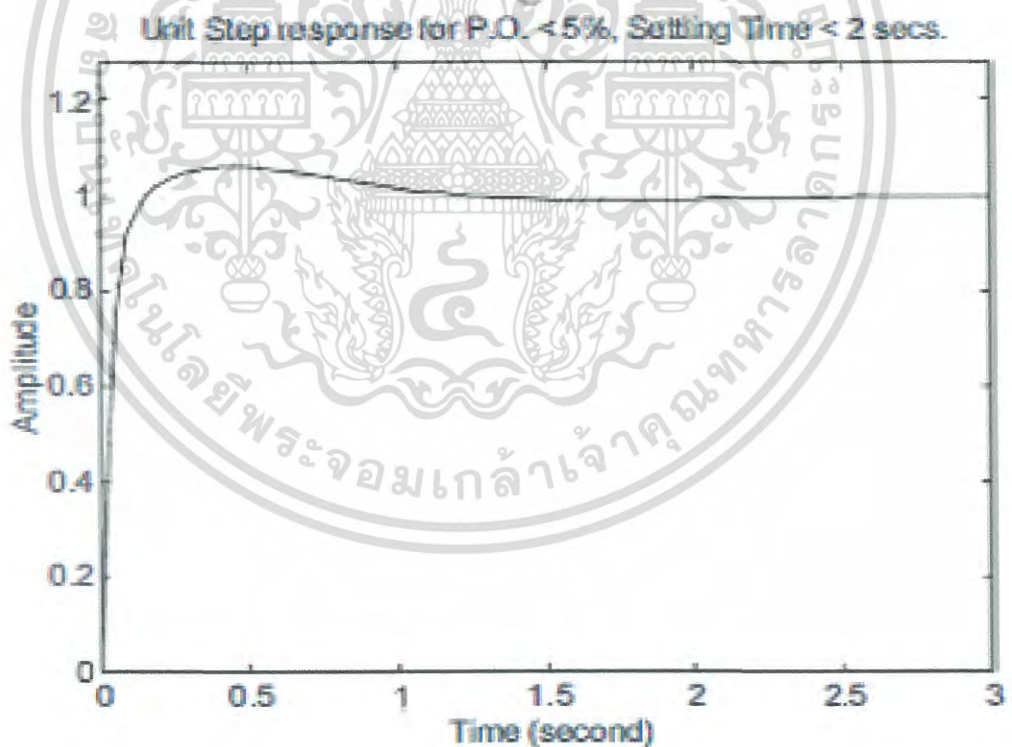
ดังนั้น ทรานเฟอร์ฟังก์ชันของ PIDA Controller ที่ถูกออกแบบโดยการใช closed-form formula จึงได้เป็น

$$\begin{cases} K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s + K_a s^2, \\ = \frac{\overbrace{28.335}^{K_a} s^3 + \overbrace{201.373}^{K_d} s^2 + \overbrace{569.103}^{K_p} s + \overbrace{593.246}^{K_i}}{s} \end{cases} \quad (3.22)$$

Loop transfer function สำหรับแพลนต์และ PIDA Controller คือ

$$\begin{cases} \frac{N(s)}{D(s)} = K(s)G(s), \\ = \frac{28.335s^3 + 201.373s^2 + 569.103s + 593.246}{s^4 + 8s^3 + 7s^2} \end{cases} \quad (3.23)$$

ผลตอบสนองต่อ unit step input ของ (23) โดยการจำลองใน MATLAB แสดงในรูปที่ 5



รูปที่ 5 Unit Step Response สำหรับ Continuous-Time Case

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

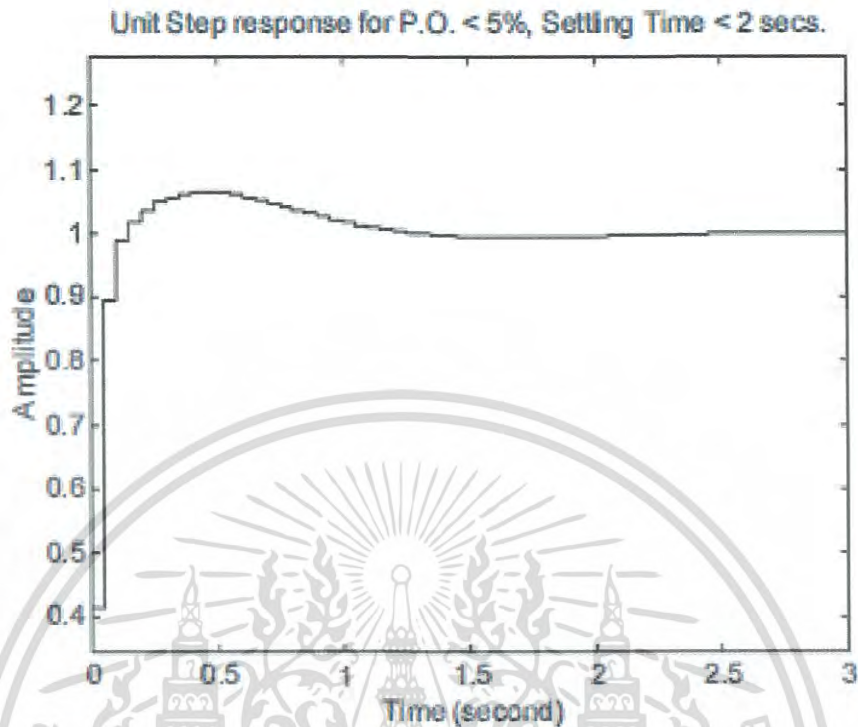
3.3.2 วิธีแก้ปัญหาแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete-Time Case Solution)

เพื่อที่จะได้ discrete-time PID controller โดยการใช้ bilinear transform, ขั้นแรกต้องใช้ transform matrix ใน (16) เพื่อที่จะได้ coefficients vector $[\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_0]$ ดังนี้

$$K(z) = \frac{[\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_0] \begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z^1 \\ z^0 \end{bmatrix}}{(z-1)(z+1)(z+1)} \quad (3.24)$$

สำหรับ Sampling time T จะเท่ากับ 1 วินาทีต่อ 20 samples และจาก (3.22) ได้เป็น

$$\left\{ K(z) = \frac{\alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{z^3 + z^2 - z - 1} \right\} \begin{cases} \alpha_3 = 5.397 \times 10^4, \\ \alpha_2 = -1.434 \times 10^5, \\ \alpha_1 = 1.274 \times 10^5, \\ \alpha_0 = -3.784 \times 10^5. \end{cases} \quad (3.25)$$



รูปที่ 3.6 ผลตอบสนองของ Unit Step สำหรับ Discrete-Time Case

3.3.3 วิธีการแก้ปัญหาโดยเทคนิคอื่น (Other Technique Case Solution)

ปัญหาของแพลนตีโน (3.17) ถูกแก้โดย [3] ด้วยฟังก์ชันทรานเฟอร์ ตามข้างล่างนี้

$$\left\{ \begin{array}{l} G_c(s) = \frac{K(s+a)(s+b)(s+c)}{s} \\ K = 28.3, \quad a = 2.2961 + j1.5461, \\ c = 2.4478, \quad b = 2.2961 - j1.5461. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

ทำการแปลงกลับ PIDA Controller ใน (3.26) เป็น non-interacting form เหมือนใน (3.2) จะได้เป็น

$$\left\{ \begin{array}{l} G_c(s) = \frac{K_a s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \\ K_a = K = 28.3000, \\ K_d = K(a+b+c) = 199.2320, \\ K_p = K(ab+c(a+b)) = 534.5166, \\ K_i = K_{abc} = 529.7232 \end{array} \right. \quad (3.27)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า ไม่ว่าจะกรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เมื่อเปรียบเทียบระหว่างตัวควบคุมใน (3.27) และ (3.22) สามารถสรุปได้ว่าทั้งสองให้ผลตอบสนองที่ดีตามที่ต้องการ อย่างไรก็ตาม เมื่อสร้าง PIDA controller ในรูปของโครงสร้างขนาน จะเกิด high maximum overshoot



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

บทที่ 4

บทสรุป

4.1 สรุปผลวิจัย

วิทยานิพนธ์เล่มนี้มีวัตถุประสงค์ในการนำเสนอสูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของ PIDA Controller แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Closed-Form Formulas for continuous/discrete time PIDA controllers' parameters) ซึ่งสามารถใช้ได้ทั้งแบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (continuous-time system and discrete-time system) โดยตัวควบคุมนี้ให้ผลตอบสนองที่ดีมาก อย่างไรก็ตาม closed-form formula สำหรับ discrete-time PIDA controller ยังเปิดกว้างสำหรับนักออกแบบคนอื่นที่จะใช้เทคนิคอื่นๆ เข้ามาช่วยในการออกแบบ ดังใน [2], [3] ด้วย

4.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางในการพัฒนา

สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของ PID Controller แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Closed-Form Formula for continuous time and discrete time system PIDA controllers' parameters) ยังเปิดกว้างให้นักออกแบบท่านอื่นสามารถใช้เทคนิคอื่นในการออกแบบต่อไป แต่ทุกการออกแบบย่อมมีการคาดหวังผลตอบสนองและ transient ในบรรทัดฐานเดียวกัน

ในวิทยานิพนธ์นี้เสนอสูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของ PIDA controller แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Closed-Form Formulas for continuous time and discrete time system for PIDA controllers' parameters) เป็นเพียงการทดลองและจำลองระบบผ่านคอมพิวเตอร์เท่านั้น ดังนั้นแนวทางในการพัฒนาเอาไปใช้งานจริงอาจมีปัจจัยอื่นๆ เข้ามาเป็นปัจจัยที่กระทบต่อพารามิเตอร์ของ PIDA controller ทางผู้วิจัยแค่เสนอ closed-form formula เพื่อให้ง่ายต่อการออกแบบ และให้นักออกแบบท่านอื่นได้ปรับปรุงเทคนิคต่างๆ ในการออกแบบต่อไป

เอกสารอ้างอิง

- [1] D.W. Pessen, "A New Look at PID Controller Tuning," Transactions of the ASME, Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control, Vol. 116, pp. 553-557, Sept. 1996
- [2] Thanit Trisuwannawat, Kitti Tirasesth, Jongkol Ngamwiwit, and Michihiko Iida, "PID \times (n-2) stage PD cascade controller for SISO systems," SICE'98 Proceedings of the 37th SICE Annual Conference, International session Papers, pp. 965-968, 1998
- [3] Seul Jung and Richard C. Dorf, "Analytic PID controller Design Technique for a Third Order System," Proceedings of the 35th conference on Decision and Control, PP 2513-2518, Kobe, Japan, December, 1996
- [4] Numchai Narkvitul, Prapart Ukkakimapan and Thanit Trisuwannawat "Closed-Form Formulas for Continuous/Discrete-Time PID Controllers's Parameters," Proceedings of the 14th International Conference on Control, Automation and System, KINTEX, Gyeonggi-do, Korea, Oct. 22-25, 2014
- [5] Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering, Fourth Edition, Prentice Hall, Inc. 2002
- [6] Ziegler-Nichols, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, September 1994 Vol. 116 P.553-557

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

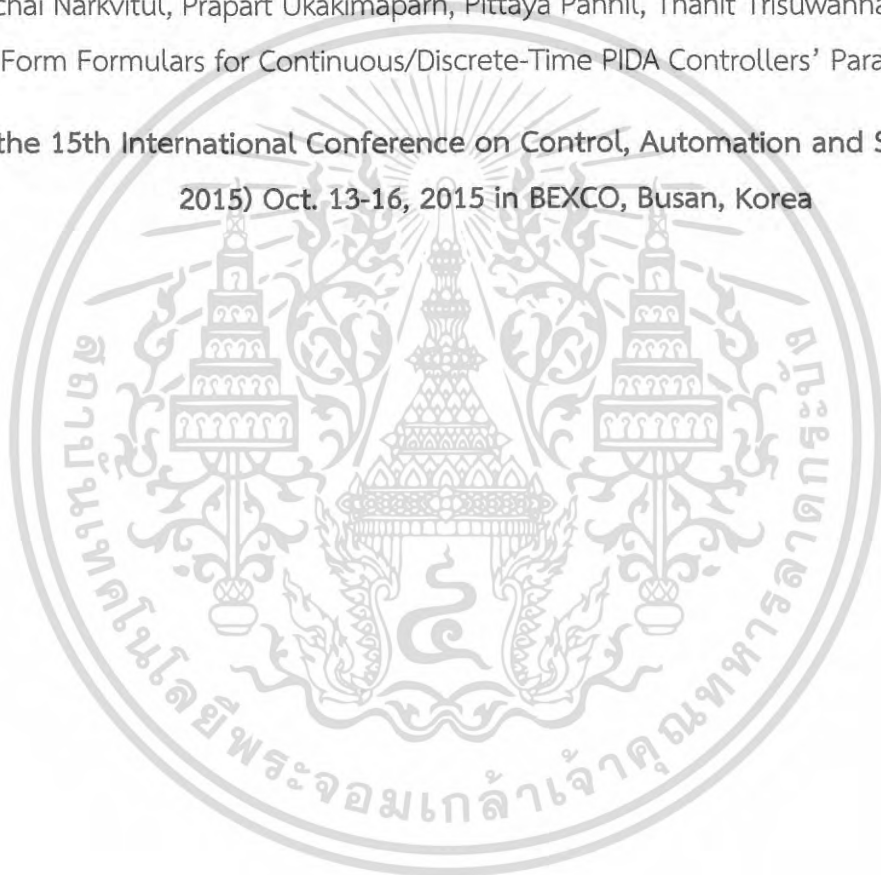
ภาคผนวก

บทความวิจัยที่ได้รับการนำเสนอในการประชุมวิชาการ

บทความวิจัยที่ได้รับการนำเสนอในการประชุมทางวิชาการระดับนานาชาติในวิทยานิพนธ์นี้มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

Numchai Narkvitul, Prapart Ukakimaparn, Pittaya Pannil, Thanit Trisuwannawat “Closed-Form Formulars for Continuous/Discrete-Time PIDA Controllers’ Parameters”

2015 the 15th International Conference on Control, Automation and System (ICCAS 2015) Oct. 13-16, 2015 in BEXCO, Busan, Korea



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

Closed-Form Formulas for Continuous/Discrete-Time PIDA Controllers' Parameters

Numchai Narkvitul¹, Prapart Ukakimaparn², Pittaya Pannil² and Thanit Trisuwannawat^{2*}

¹ Division of Graduate Studies (Automation Engineering), KMITL, Bangkok, 10520, Thailand
(Tel : +66-2-329-8347/-8; E-mail: kuprapar@kmitl.ac.th)

² Department of Instrumentation and Control Engineering, KMITL, Bangkok, 10520, Thailand
(Tel : +66-2-329-8347/-8; E-mail: ktthanit@kmitl.ac.th) * Corresponding author

Abstract: This paper proposes the closed-form formulas used for finding the controllers' parameters for both continuous-time and discrete-time PIDA (Proportional-Integral-Derivative-Acceleration) controllers. The derivations to formulate the formula are given in vector-matrix forms. The examples of usage the closed-form formulas for a third order plant are illustrated. Comparing with other previous research work, revealed that at the same performances, the using it is straightforward, simpler without iterative computation and also be opened to use too.

Keywords: PIDA Controllers' Parameters ; Bilinear Transform.

1. INTRODUCTION

Most industrial plants are type 0 and consist of three to five first order lags or dead time plus one first order lag [1]. The PID (Proportional-Integral-Derivative) controller is still widely used in industry. However, it is clear that the PID controller is properly applied to the typical second order plant only. But it quite difficult to use the PID controller alone for the third or higher orders plant. Since, the order of the plant is greater than the number of the zeros provided by the PID controller [2], which proposed a design technique based on the root locus approach for the n -th order plant in order to satisfy transient and steady state response specifications. The structure of the proposed controller is performed by using the conventional PID controller cascaded by $(n-2)$ stage of the PD (Proportional-Derivative) controllers. For a third order plant, analytic PIDA (Proportional-Integral-Derivative-Acceleration) controller design technique on s -plane [3] is proposed. This paper also proposes the PIDA controller design by formulates the controllers' parameters to be designed in the closed-form formulas in the same manner with [4].

2. METHODOLOGY

In Fig. 1, shown that there are 2 steps for the design procedure of control system as follows:

- 1) Plant modeling,
- 2) Controller design.

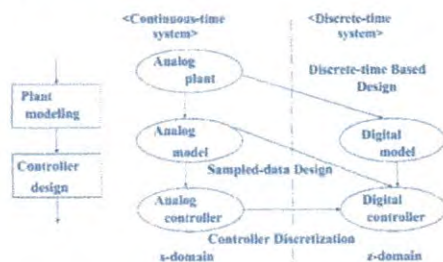


Fig. 1 The steps of the digital control system design.

2.1 Problem Statement

Find the PIDA Controllers $K(s)$ or $K(z)$ for the plant $G(s)$, such that the given desired specifications are achieved with acceptability.

2.2 Continuous-Time Case

The third order plant $G(s)$ to be controlled by the PIDA controller $K(s)$, its transfer function is assumed to be given as

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (1)$$

While, the PIDA controller's transfer function is

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s + K_a s^2 \quad (2)$$

Where, K_p is a proportional gain, K_i is an integral gain, K_d is a derivative gain and K_a is an acceleration gain respectively. The closed-loop transfer function $Y(s)/R(s)$ of the feedback control system in Fig. 2 to obtain the desired specifications is

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (3)$$

Here, the actual characteristic equation is as follows:

$$\begin{aligned} F_{\text{actual}}(s) &= 1 + K(s)G(s) = 0, \\ &= 1 + \frac{(K_p s + K_i + K_d s^2 + K_a s^3)(b_1 s + b_0)}{(s)(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} \\ \frac{F_{\text{actual}}(s)}{(1 + K_a b_1)} &= s^4 + \frac{(a_2 + K_d b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^3 + \dots \\ &+ \frac{(a_1 + K_p b_1 + K_d b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^2 + \dots \\ &+ \frac{(a_0 + K_i b_1 + K_p b_0)}{(1 + K_a b_1)} s + \dots \\ &+ \frac{K_i b_0}{(1 + K_a b_1)}. \end{aligned} \quad (4)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The desired specifications to be designed are usually specified in terms of transient and steady state response characteristics of a control system to a unit-step input, exhibited by a pair of complex-conjugate dominant closed-loop poles $s_{d\pm} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ as follows:

$$\begin{cases} \text{Percent Overshoot (P.O.)} = e^{\left(\frac{-\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\%, \\ \text{Settling Time (} t_s \text{)} = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}, (\pm 2\%). \end{cases} \quad (5)$$

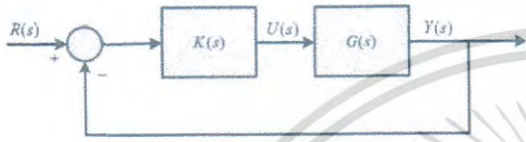


Fig. 2 Control system structure.

From the given desired specification in term of the Percent Overshoot (P.O.), the damping ratio is

$$\zeta = \frac{\left[\ln \left(\frac{P.O.}{100} \right) \right]^2}{\sqrt{\pi^2 + \left[\ln \left(\frac{P.O.}{100} \right) \right]^2}} \quad (6)$$

and from the given Settling Time $\{t_s (\pm 2\%)\}$, then the undamped natural frequency is

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} \text{ rad./sec.} \quad (7)$$

The problem statement of the PIDA Controller design is to find the parameters K_p , K_i , K_d and K_o of the PIDA Controller, such that the four closed-loop poles which are the roots of actual characteristic equation in (4) are placed at the locations with exhibit the output response as desired. The desired locations of these closed-loop poles can be expressed by the following characteristic equation to be designed as

$$\begin{cases} F_{\text{design}}(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+r)(s+R) = 0, \\ = (s+q)(s+\hat{q})(s+r)(s+R), \\ = s^4 + \{2\zeta\omega_n + (r+R)\}s^3 + \dots \\ + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r+R) + rR\}s^2 + \dots \\ + \{\omega_n^2(r+R) + 2\zeta\omega_n rR\}s + \omega_n^2 rR. \end{cases} \quad (8)$$

For the real pole in the factor $(s+R)$ and negligible pole $(s+r)$, the designer choose these poles in the same region as shown in [3], for example $R \geq \zeta\omega_n$ and $r \gg R$ to be faster than the poles in the quadratic pair $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ so that the response is dominated by the second-order response characteristic.

By equating the coefficients of like power between each of the last line of (4) and (8) yields:

$$\begin{cases} s^3: \frac{a_2 + K_d b_1 + K_o b_0}{(1 + K_o b_1)} = 2\zeta\omega_n + (r+R), \\ s^2: \frac{a_1 + K_p b_1 + K_d b_0}{(1 + K_o b_1)} = \omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r+R) + rR, \\ s^1: \frac{a_0 + K_i b_1 + K_p b_0}{(1 + K_o b_1)} = \omega_n^2(r+R) + 2\zeta\omega_n rR, \\ s^0: \frac{K_i b_0}{(1 + K_o b_1)} = \omega_n^2 rR, \end{cases} \quad (9)$$

This leads to a simple linear system of equations in vector-matrix form $Ax = b$ where:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & \{b_0 - b_1(2\zeta\omega_n + (r+R))\} \\ b_1 & 0 & b_0 & -b_1\{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r+R) + rR\} \\ b_0 & b_1 & 0 & -b_1\{\omega_n^2(r+R) + 2\zeta\omega_n rR\} \\ 0 & b_0 & 0 & -b_1\omega_n^2 rR \end{bmatrix}, \\ x = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_o \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -a_2 + (2\zeta\omega_n + (r+R)) \\ -a_1 + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(r+R) + rR\} \\ -a_0 + \{\omega_n^2(r+R) + 2\zeta\omega_n rR\} \\ \omega_n^2 rR \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (10)$$

Here, r , R , q and \hat{q} are desired root locations with specifications based on the design criteria. While, a_2 , a_1 , a_0 and b_1 , b_0 are known coefficients from the given plant model. Hence, the formula for finding K_p , K_i , K_d and K_o of the PIDA controller in (2) is

$$\begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_o \end{bmatrix} = A^{-1}b. \quad (11)$$

2.3 Discrete-Time Case

The design procedure in Fig. 1 shown that, once an analog controller in s -domain is obtained. In order to get a digital controller in z -domain, the next step to accomplish this task is controller discretization, as shown in Fig.3.

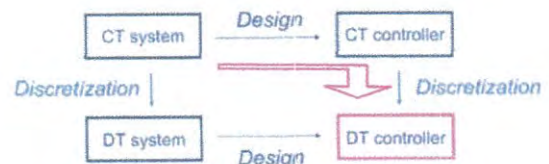


Fig. 3 Discretization.

There are several ways for mapping from the s -plane to z -plane. The exact conversion between the Laplace and z -domains is

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

$$z = e^{sT}, \quad (12)$$

where, T is the sampling time. However, this conversion involves a transcendental function and its transfer function cannot be represented in form of a ratio of the polynomials. This makes it difficult to implement such a control algorithm on a digital computer. Therefore, an approximate conversion will be used instead.

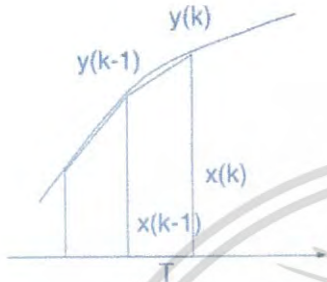


Fig. 4 Trapezoidal Approximation.

In Fig. 4, let the integrated area to k be $y(k)$, and to $k-1$ is given by $y(k-1)$. Then, the approximated area under the curve is

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T}{2} \{x(k) + x(k-1)\}. \quad (13)$$

Taking the z transform in (13),

$$\begin{cases} Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{T}{2} [X(z) + z^{-1}X(z)], \\ (1-z^{-1})Y(z) = \frac{T}{2} (1+z^{-1})X(z), \\ \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T}{2} \frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})}; \left(\equiv \frac{1}{s} \right). \end{cases} \quad (14)$$

Finally, the bilinear transformation can be defined as

$$s = \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)}. \quad (15)$$

Now, it is ready to get the formula for discrete-time PIDA controller in (2) as follows:

$$\begin{aligned} K(z) &= K(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)}}, \\ &= K_p + \frac{K_i}{\left\{ \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} \right\}} + K_d \left\{ \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} \right\} + \dots \\ &\quad + K_a \left\{ \frac{2}{T} \frac{(z-1)}{(z+1)} \right\}^2, \end{aligned} \quad (16)$$

$$K(z) = \frac{\alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{(z-1)(z+1)(z+1)}, \quad \text{where:}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2T^2} \begin{bmatrix} 2T^2 & T^3 & 4T & 8 \\ 2T^2 & 3T^3 & -4T & -24 \\ -2T^2 & 3T^3 & -4T & 24 \\ -2T^2 & T^3 & 4T & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix}.$$

3. EXAMPLES OF USAGE

Let the third order plant to be controlled by the PIDA controller is assumed to be given as

$$\begin{cases} G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+7)} = \frac{1}{s^3 + 8s^2 + 7s}, \\ \equiv \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \end{cases} \quad (17)$$

If the desired performance specifications are Percent Overshoot $P.O. \leq 5\%$ and Settling Time $t_s \leq 2$ secs.

3.1 Continuous-Time Case Solution

From the given Percent Overshoot, the damping ratio is

$$\zeta = \frac{\left[\ln \left(\frac{P.O.}{100} \right) \right]^2}{\left\{ \pi^2 + \left[\ln \left(\frac{P.O.}{100} \right) \right]^2 \right\}} = 0.69, \quad (18)$$

and undamped natural frequency is

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} = 3.069 \text{ rad./sec.} \quad (19)$$

Then, the dominant closed-loop poles are

$$s_{d \pm} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -2.118 \pm j 2.221. \quad (20)$$

Substituting, $b_1 = 0$, $b_0 = 1$, $a_2 = 8$, $a_1 = 7$ and $a_0 = 0$ for the plant model, and $\zeta = 0.69$, $\omega_n = 3.069$ rad./sec., $R = 2.1$ and $r = 30$ for the desired specifications to be achieved into (11), yields:

$$\begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 28.335 \\ 201.373 \\ 569.103 \\ 593.246 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 596.103 \\ 593.246 \\ 201.373 \\ 28.335 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Hence, the proposed PIDA controller's transfer function designed by using the closed-form formula can be written as follows:

$$\begin{cases} K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s + K_a s^2, \\ = \frac{K_a s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \\ = \frac{28.335 s^3 + 201.373 s^2 + 569.103 s + 593.246}{s}. \end{cases} \quad (22)$$

The loop transfer function for a given plant with the designed PIDA controller is

$$\begin{cases} \frac{N(s)}{D(s)} = K(s)G(s), \\ = \frac{28.335 s^3 + 201.373 s^2 + 569.103 s + 593.246}{s^4 + 8s^3 + 7s^2}. \end{cases} \quad (23)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

The response to a unit step input of (23) by Simulink for MATLAB, shown in Fig. 5.

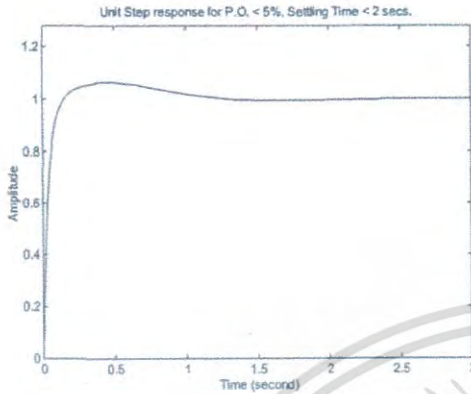


Fig. 5 The unit step response for Continuous-Time case

3.2 Discrete-Time Case Solution

To obtain the discrete-time PIDA controller by using bilinear transform, firstly use transform matrix in (16) to obtain the coefficients vector $[\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_0]^T$, then

$$K(z) = \frac{[\alpha_3 \ \alpha_2 \ \alpha_1 \ \alpha_0]^T \begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z^1 \\ z^0 \end{bmatrix}}{(z-1)(z+1)(z+1)} \quad (24)$$

For a sampling time T equal 1 second per 20 samples and from (22), yields

$$K(z) = \frac{\alpha_3 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_0}{z^3 + z^2 - z - 1} \quad (25)$$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 5.397 \times 10^4, \\ \alpha_2 = -1.434 \times 10^5, \\ \alpha_1 = 1.274 \times 10^5, \\ \alpha_0 = -3.784 \times 10^5. \end{cases}$$

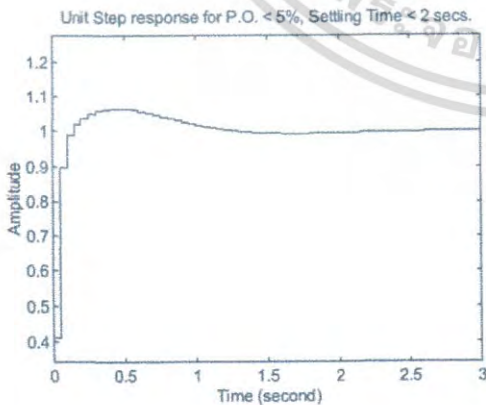


Fig. 6 The unit step response for Discrete-Time case

3.3 Other Technique Case Solution

The problem of the plant in (17) has also been solved by [3], with the following transfer function:

$$G_c(s) = \frac{K(s+a)(s+b)(s+c)}{s} \quad (26)$$

$$\begin{cases} K = 28.3, & a = 2.2961 + j1.5461, \\ c = 2.4478, & b = 2.2961 - j1.5461. \end{cases}$$

Converting the PIDA controller in (26) into non interacting form like (2) as follows:

$$G_c(s) = \frac{K_a s^3 + K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} \quad (27)$$

$$\begin{cases} K_a = K = 28.3000, \\ K_d = K(a+b+c) = 199.2320, \\ K_p = K\{ab+c(a+b)\} = 534.5166, \\ K_i = Kabc = 529.7232. \end{cases}$$

Comparing, between the controllers in (27) and (22), it can conclude that both provide the good responses as desired. However, when construct the PIDA controller in parallel structure, the high maximum overshoot is occurred.

4. CONCLUSIONS

The closed-form formulas for finding the PIDA controllers' parameters are derived and given in both continuous-time and discrete-time systems. Moreover, this closed-form formula, especially, for the discrete-time PIDA controller is also be opened for others design technique, such as [2], [3] as well.

REFERENCES

- [1] D.W. Pessen, "A New Look at PID Controller Tuning", *Transactions of the ASME, Journal of Dynamics Systems, Measurement, and Control*, Vol. 116, pp.553-557, Sept. 1996.
- [2] Thanit Trisuwannawat, Kitti Tirasesth, Jongkol Ngamwiwit and Michihiko Iida, "PID \times (n-2) stage PD cascade controller for SISO systems," *SICE '98 Proceedings of the 37th SICE Annual Conference, International session Papers*, pp. 965-968, 1998.
- [3] Seul Jung and Richard C. Dorf, "Analytic PIDA Controller Design Technique for a Third Order System," *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pp. 2513-2518, Kobe, Japan, December, 1996.
- [4] Numchai Narkvitul, Prapart Ukakimaparn and Thanit Trisuwannawat, "Closed-Form Formulas for Continuous/Discrete-Time PID Controllers' Parameters," *Proceedings of the 14th International Conference on Control, Automation and Systems*, KINTEX, Gyeonggi-do, Korea, Oct. 22-25, 2014.

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ข.
 ตารางการแปลง Z



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
 ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ ข1 : คู่ one-sided z-transform

$f(t)$ $t \geq 0$	$f(t), f(kT)$ $k \geq 0$	$F(z)$
	$\delta(k)$	1
	$u(t)$ หรือ 1	$\frac{z}{z-1}$
	a^k	$\frac{z}{z-a}$
	ka^k	$\frac{az}{(z-a)^2}$
	$k^2 a^k$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$
	$(k+1)a^k$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$
	$\frac{(k+1)(k+2)a^k}{2!}$	$\frac{z^3}{(z-a)^3}$
	$\frac{(k+1)(k+2)(k+3)a^k}{3!}$	$\frac{z^4}{(z-a)^4}$
	$\frac{a^k}{k!}$	$e^{az^{-1}}$
t	kT	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
t^2	$(kT)^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
e^{-at}	e^{-akT}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
te^{-at}	kTe^{-akT}	$\frac{2Te^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\sin \omega t$	$\sin \omega kT$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\cos \omega kT$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ตารางที่ ข2 : คู่ตัวแปลงลาปลาซและตัวแปลง z

$F(s)$	$F(z)$
$1/s$	$\frac{z}{z-1}$
$1/s^2$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$1/s^3$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 + 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นาย นำชัย นาควิฑูร
วัน เดือน ปีเกิด	10 กรกฎาคม 2524 ที่สงขลา
ที่อยู่	28 ซอยลาดกระบัง 9 แขวงลาดกระบัง เขตลาดกระบัง กรุงเทพมหานคร 10520 โทร. 094-8327777
ประวัติการศึกษา	2546 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมการวัดคุม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ความชำนาญเฉพาะด้าน	1.) ABB AC and DC Drive 2.) Auto diagnostic tools for Porsche, BMW, Mercedes
ประสบการณ์การทำงานและผลงานวิจัย	
พ.ศ.2546	ผลงานวิจัยปริญญาตรี เรื่อง “Scalar Robot”
พ.ศ.2546-2550	ตำแหน่ง Drive Engineer บริษัท เอบีบี จำกัด
พ.ศ.2550-ปัจจุบัน	ตำแหน่ง CEO บริษัท อลิอันซ์ เฟล็กทรอนิกส์ จำกัด

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้าไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ตัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้