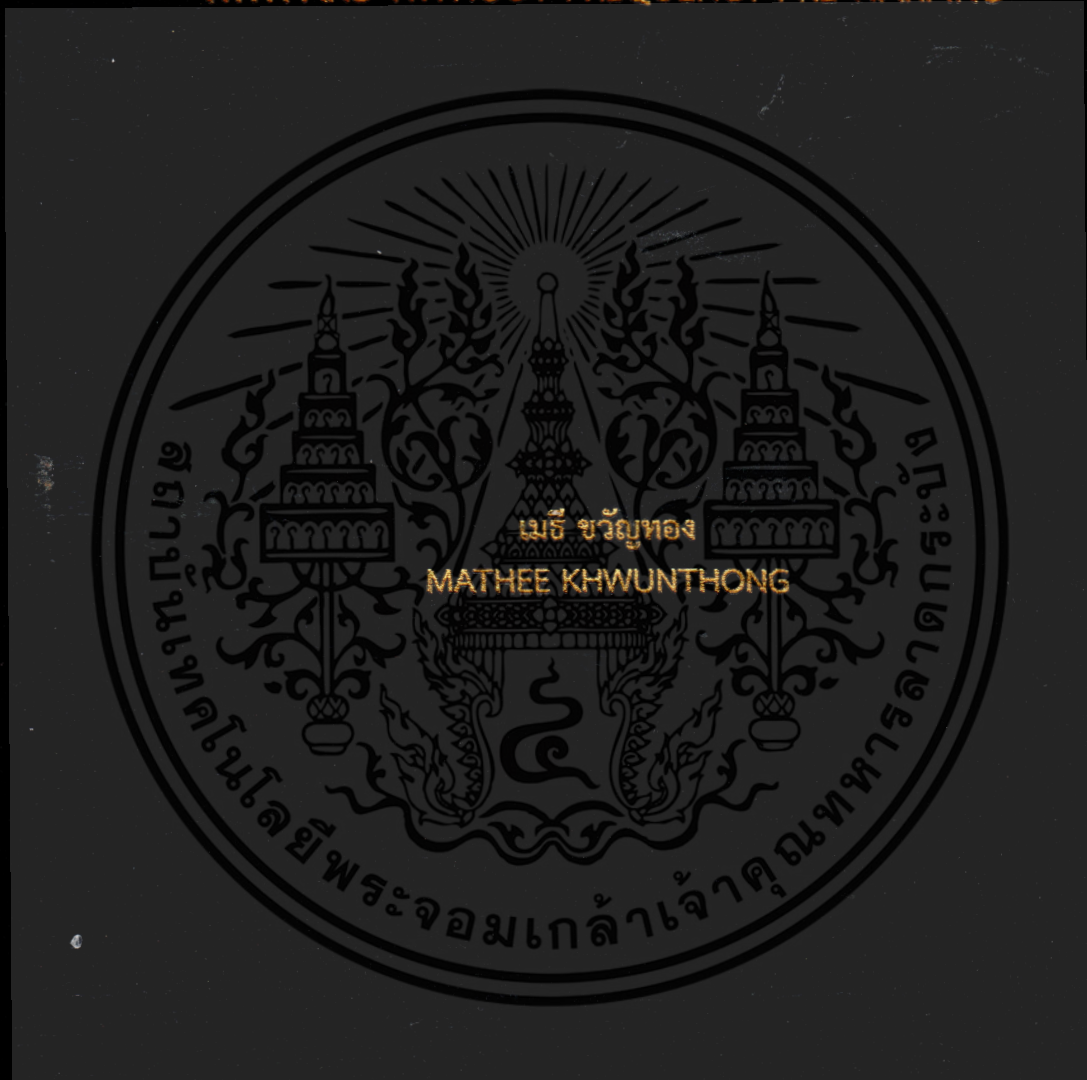


การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทัสติน  
ทั้งที่มีและไม่มีความถี่พรีวาร์ปิ้ง

DISCRETE-TIME PIDA CONTROLLER DESIGNED BY TUSTIN'S METHOD  
WITH AND WITHOUT FREQUENCY PRE-WARPING



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ  
คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
พ.ศ. 2561  
KMITL-2018-EN-M-257-129

การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทัสติน  
ทั้งที่มีและไม่มีความถี่พรีวาร์ปิ้ง

DISCRETE-TIME PIDA CONTROLLER DESIGNED BY TUSTIN'S METHOD  
WITH AND WITHOUT FREQUENCY PRE-WARPING



วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต

สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ

คณะวิศวกรรมศาสตร์

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง

พ.ศ. 2561

KMITL-2018-EN-M-257-129

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

DISCRETE-TIME PIDA CONTROLLER DESIGNED BY TUSTIN'S METHOD  
WITH AND WITHOUT FREQUENCY PRE-WARPING

MATHEE KHWUNTHONG

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT  
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF  
MASTER OF ENGINEERING IN AUTOMATION ENGINEERING  
FACULTY OF ENGINEERING  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG  
2018  
KMITL-2018-EN-M-257-129

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้



COPYRIGHT 2018

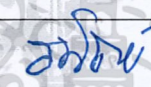

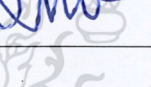
FACULTY OF ENGINEERING

KING MON GKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

คณะวิศวกรรมศาสตร์  
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
ใบรับรองวิทยานิพนธ์

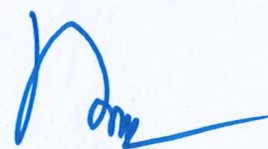
หัวข้อวิทยานิพนธ์ การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทัสตินทั้งที่มีและไม่มี  
ความถี่พรีวาร์ปิ้ง  
Thesis Title Discrete-time PIDA Controller Designed by Tustin's Method with and without  
Frequency Pre-warping  
นักศึกษา นายเมธี ขวัญทอง  
รหัสประจำตัว 56601319  
ปริญญา วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต  
สาขาวิชา วิศวกรรมอัตโนมัติ  
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ รศ.ประภาช อุคคกิม่าพันธ์  
หมายเลขวิทยานิพนธ์ KMITL-2018-EN-M-257-129

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์	ลายมือชื่อ
รศ.ดร.ธนิตย์ ตรีสุวรรณวัฒน์	
รศ.ดร.อัมพวัน จุลเสวีวงศ์	
รศ.ดร.ไสว พงศ์สวัสดิ์	
รศ.ดร.พิทยา ปานนิล	
รศ.ประภาช อุคคกิม่าพันธ์	

วัน / เดือน / ปี ที่สอบ วันอังคารที่ 31 กรกฎาคม พ.ศ. 2561 เวลา 10.00-12.00 น.  
สถานที่สอบ ณ ห้องประชุม 4 ชั้น 5 อาคาร A

สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง  
KING MONGKUT'S INSTITUTE OF TECHNOLOGY LADKRABANG

คณะวิศวกรรมศาสตร์ รับรองแล้ว



(รองศาสตราจารย์ ดร. คมสัน มาลีสี)

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ฉบับนี้ คณะวิศวกรรมศาสตร์  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้  
วันที่ 31 กรกฎาคม พ.ศ. 2561

หัวข้อวิทยานิพนธ์	การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทัสตินทั้งที่มีและไม่มีควมถี่พรีวาร์ปิ้ง
นักศึกษา	นายเมธี ขวัญทอง
รหัสนักศึกษา	56601319
ปริญญา	วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต
สาขาวิชา	วิศวกรรมอัตโนมัติ
พ.ศ.	2561
อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์	รศ. ประภาช อุดคคิมาพันธุ์

## บทคัดย่อ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอ (PIDA) แบบเวลาไม่ต่อเนื่อง เริ่มจากขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่องภายใต้แนวคิดการออกแบบของ Richard C. Dorf ร่วมกับเทคนิคการวางโพล (Pole placement) ขั้นตอนการอิมพลีเม้นท์ทำการแปลงตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องเป็นแบบเวลาไม่ต่อเนื่องโดยใช้วิธีทัสติน (Tustin's method) รวมถึงศึกษา ทดลองและเปรียบเทียบผลการตอบสนองของระบบระหว่างการใช้และไม่ใช้ควมถี่พรีวาร์ปิ้ง (Frequency pre-warping) ในขั้นตอนนี้และใช้เวกเตอร์ เมตริกซ์ (Vector matrix) ในการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์เพื่อคำนวณหาค่าอัตราขยายของตัวควบคุมพีไอดีเอ

ทดลองโดยใช้แบบจำลองกระบวนการควบคุมระดับน้ำภายในถัง 3 ใบ โดยใช้โปรแกรมแมทแล็บ (MATLAB) พบว่าตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องใช้กับควมถี่พรีวาร์ปิ้งให้ผลตอบสนองช่วงเวลาเข้าที่ (Settling time,  $t_s$ ) ลดลงและไม่ส่งผลกระทบต่อเปอร์เซ็นต์ค่าพุ่งเกิน ( $P.O.$ ) เมื่อเทียบกับตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องไม่ใช้กับควมถี่พรีวาร์ปิ้ง

Thesis Title	Discrete-Time PIDA Controller Designed by Tustin's Method with and without Frequency Pre-Warping
Student	Mr. Mathee Khwunthong
Student ID.	56601319
Degree	Master of Engineering
Program	Automation Engineering
Year	2018
Thesis Advisor	Assoc. Prof. Prapart Ukakipaparn

## ABSTRACT

This thesis presents a technic of Discrete-Time PIDA controller. Continuous-time PIDA controller under the design concept of Richard C. Dorf combined with Pole placement technic. The second step is the implementation of Discrete-time PIDA controller designed by Tustin's method. These include research, experiment, and comparison the response of Discrete-time PIDA controller designed by Tustin's method with and without frequency pre-warping. These also use vector matrix to calculate gain of PIDA controller.

The thesis has presented three tanks non-interacting system though the MATLAB program, found that the response of Discrete-time controller with frequency pre-warping in settling time decrease and do not affect percent overshoot.

## กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณอาจารย์ที่ปรึกษา รศ.ประภาส อุคคกิมพันธ์ และ รศ.ดร.พิทยา ปานนิล  
ที่ให้คำแนะนำ ความช่วยเหลือและแก้ปัญหาต่างๆจนวิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้โดยความกรุณาจาก รศ.ดร.ธนิศย์ ตรีสุวรรณวัฒน์ ที่ให้  
ความรู้ ความช่วยเหลือและเวลาอันมีค่าเพื่อประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้ข้าพเจ้า

ขอบคุณครอบครัวและเพื่อนทุกท่านที่คอยสนับสนุนและให้กำลังใจที่ตีมาตลอดระยะเวลา  
ที่ศึกษาและทำงานวิจัยแก่ข้าพเจ้า

ประโยชน์และคุณค่าที่เกิดจากวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ ข้าพเจ้าขอมอบให้กับคณาจารย์และผู้ให้  
ความสนับสนุนทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทความรู้และประสบการณ์อันมีค่าให้แก่ข้าพเจ้า

เมธี ขวัญทอง



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และแจ้งอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย.....	I
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ.....	II
กิตติกรรมประกาศ.....	III
สารบัญ.....	IV
สารบัญรูป.....	VII
บทที่ 1 บทนำ.....	1
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา.....	1
1.2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์ของการศึกษา.....	2
1.3 ทฤษฎีหรือแนวความคิดที่ใช้ในการวิจัย.....	3
1.4 ขอบเขตการวิจัย.....	3
1.5 โครงประกอบของวิทยานิพนธ์.....	3
บทที่ 2 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอ (PIDA) แบบเวลาต่อเนื่อง.....	4
2.1 กล่าวนำ.....	4
2.2 ระบบควบคุมวงปิด.....	4
2.2.1 โครงสร้างของระบบควบคุมวงปิด.....	4
2.2.2 ระบบอันดับหนึ่ง.....	5
2.2.3 ระบบอันดับสอง.....	5
2.2.4 นิยามของลักษณะการตอบสนองชั่วคราว.....	6
2.3 ตัวควบคุมพีไอดี (PID).....	7
2.3.1 โครงสร้างของตัวควบคุมพีไอดี.....	7
2.3.2 ข้อจำกัดของตัวควบคุมพีไอดี.....	8
2.3.3 การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีโลคัสของราก (Root locus).....	9
2.3.4 ทดสอบการใช้ตัวควบคุมพีไอดีเอร์ร่วมกับกระบวนการจำลอง.....	13
2.4 ตัวควบคุมพีไอดีเอ.....	15
2.4.1 โครงสร้างตัวควบคุมพีไอดีเอ.....	15
2.4.2 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอตามแนวทางของ Richard C. Dorf.....	16
2.5 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่อง.....	19

# สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
บทที่ 3 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.....	24
3.1 ตัวควบคุมแบบดิจิทัล.....	24
3.1.1 ระบบควบคุมแบบดิจิทัล.....	25
3.1.2 วงจรแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อก.....	25
3.1.3 วงจรแปลงสัญญาณอนาล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล.....	25
3.2 เครื่องซั๊กตัวอย่าง (Sampler) และการคงค่า (Hold).....	26
3.2.1 การซั๊กตัวอย่าง.....	26
3.2.2 การคงค่า.....	27
3.3 วงจรรอกค้างอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold, ZOH).....	27
3.3.1 วงจรรอกค้างอันดับศูนย์บนแกนเวลา.....	27
3.3.2 วงจรรอกค้างอันดับศูนย์บนแกนความถี่.....	28
3.4 การคงค่าอันดับหนึ่ง (First-Order Hold, FOH).....	29
3.5 การแปลงเชิงเส้นคู่ (Bilinear transformation).....	31
3.6 ความถี่พรีวาร์ปิ้ง (Frequency pre-warping).....	33
3.7 ตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.....	34
บทที่ 4 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการหาค่าที่สแตชันนารีทั้งที่มีและไม่มี ความถี่พรีวาร์ปิ้ง.....	35
4.1 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการหาค่าที่สแตชันนารี.....	35
4.2 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการหาค่าที่สแตชันนารีที่ไม่มี ความถี่พรีวาร์ปิ้ง.....	38
4.3 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการหาค่าที่สแตชันนารีที่มี ความถี่พรีวาร์ปิ้ง.....	41
บทที่ 5 สรุปผลการวิจัย.....	43
5.1 บทสรุป.....	43
5.1.1 ขั้นตอนการออกแบบ.....	43
5.1.2 ขั้นตอนการอิมพลีเม้น.....	43
5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางพัฒนา.....	43

## สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
เอกสารอ้างอิง.....	44
ภาคผนวก.....	45
ภาคผนวก ก. ผลงานที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่.....	46
ประวัติผู้เขียน.....	54



# สารบัญรูป

รูปที่	หน้า
1.1 กระบวนการควบคุมแบบดิจิทัลสำหรับกระบวนการแบบเวลาต่อเนื่อง.....	1
1.2 แนวทางการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.....	2
2.1 ระบบควบคุมวงปิด.....	4
2.2 ระบบอันดับหนึ่ง.....	5
2.3 ระบบอันดับสอง.....	5
2.4 ผลตอบสนองของตำแหน่งโพลวงปิดบนระนาบ s.....	6
2.5 การตอบสนองชั่วครู่ต่ออินพุตขั้นหนึ่งหน่วย.....	7
2.6 กระบวนการจำลองการควบคุมระดับน้ำภายในถังสามใบ.....	10
2.7 โลคัสของรากของกระบวนการจำลอง.....	12
2.8 โลคัสของรากของระบบจำลองที่ใช้ตัวควบคุมพีไอดี.....	13
2.9 โลคัสของรากของระบบจำลองที่ใช้ตัวควบคุมพีไอดีเอ.....	14
2.10 ผลตอบสนองของตัวควบคุมพีไอดีเอต่อสัญญาณแบบขั้นบันได.....	14
2.11 โครงสร้างของระบบควบคุมวงปิดใช้งานร่วมกับตัวควบคุมพีไอดีเอ.....	16
2.12 ขอบเขตพื้นที่และตำแหน่งโพลวงปิดบนระนาบ s.....	17
2.13 โลคัสของรากของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสาม.....	22
2.14 ผลตอบสนองชั่วครู่ของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย.....	23
3.1 ระบบควบคุมแบบอินพุตเดียวและเอาต์พุตเดียว ก. ระบบควบคุมแบบอนาล็อก (Analog controller) ข. ระบบควบคุมแบบดิจิทัล (Digital controller).....	24
3.2 วงจรแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อก.....	25
3.3 วงจรแปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล.....	26
3.4 เครื่องซีกตัวอย่าง (Sampler).....	26
3.5 สัญญาณอินพุตและเอาต์พุตของการคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold).....	27
3.6 การคงค่าอันดับศูนย์บนแกนเวลา (Time domain).....	27
3.7 การคงค่าอันดับศูนย์บนแกนความถี่ (Frequency domain).....	28
3.8 การตอบสนอง FOH (ก) สัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย (ข) ผลตอบสนองกลับ.....	30
3.9 ผลของการคงค่าอันดับศูนย์และหนึ่งต่อสัญญาณอินพุตแบบเวลาต่อเนื่อง.....	30
3.10 การประมาณพื้นที่ใต้เส้นโค้งด้วยวิธีการทิสติน (Tustin's method).....	31

## สารบัญรูป (ต่อ)

รูปที่	หน้า
3.11 การแปลงระหว่างระนาบ $s$ กับระนาบ $z$ .....	32
3.12 แนวทางการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.....	34
4.1 เส้นทางเดินรากของระบบวงปิดบนระนาบ $z$ ( $z$ -plane).....	37
4.2 ผลการตอบสนองกลับของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย.....	38
4.3 เส้นทางเดินรากของระบบวงปิดบนระนาบ $z$ ที่ $\omega_0 = \omega_n$ .....	40
4.4 ผลการตอบสนองกลับของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย ที่ $\omega_0 = \omega_n$ .....	40
4.5 เส้นทางเดินรากของระบบวงปิดบนระนาบ $z$ ที่ $\omega_0 = 1000\omega_n$ .....	42
4.6 ผลการตอบสนองกลับของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย ที่ $\omega_0 = 1000\omega_n$ .....	42



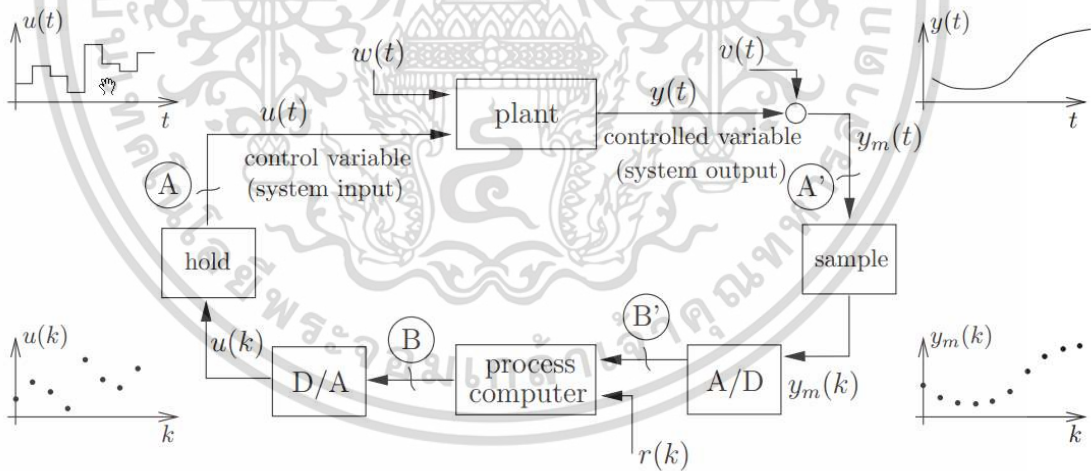
# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

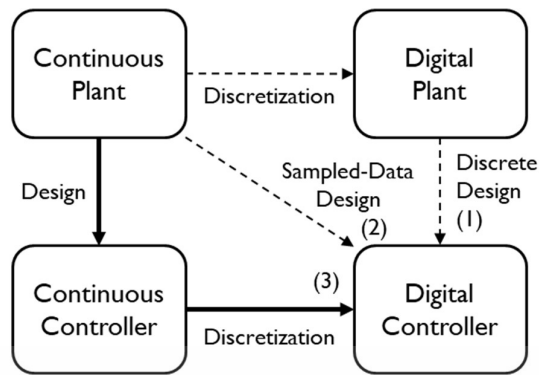
ตัวควบคุมพีไอดี (PID) ถูกใช้งานอย่างแพร่หลายในอุตสาหกรรมและมีบทบาทสำคัญในระบบควบคุมอัตโนมัติสามารถทำงานได้ดีและเหมาะสมสำหรับกระบวนการที่มีอันดับไม่เกินสอง หากแต่ในบางกระบวนการมีอันดับมากกว่าสองขึ้นไปจึงเป็นการยากที่จะควบคุมกระบวนการให้มีประสิทธิภาพโดยใช้ตัวควบคุมพีไอดีเพียงอย่างเดียว เนื่องจากจำนวนโพล (Pole) ของกระบวนการมากกว่าจำนวนซีโรของตัวควบคุม [8] ในปี 1996, Richard C. Dorf นำเสนอการแก้แนวทางแก้ปัญหาโดยเพิ่มซีโร (Zero) ให้ตัวควบคุมพีไอดีเรียกว่า พีไอดีเอ (Proportional-Integral-Derivative-Accelerated, PIDA)

ปัจจุบันมีการนำคอมพิวเตอร์ (Computer) มาประยุกต์ใช้ในอุตสาหกรรมมากขึ้น แม้ว่ากระบวนการทางอุตสาหกรรมยังทำงานบนระบบแบบเวลาต่อเนื่องและอันดับยังคงเดิม แต่การออกแบบตัวควบคุมทั้งฮาร์ดแวร์ (Hardware) และซอฟต์แวร์ (Software) นั้นต้องเปลี่ยนแปลงเพื่อให้สอดคล้องกับการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ดังรูปที่ 1.1 [3]



รูปที่ 1.1 กระบวนการควบคุมแบบดิจิทัลสำหรับกระบวนการแบบเวลาต่อเนื่อง

โดยมีตัวสุมผ่านสัญญาณทำหน้าที่ในการแปลงจากสัญญาณแอนะล็อก (Analog signal) เป็นสัญญาณดิจิทัล (Digital signal) ทำให้สัญญาณนั้นอยู่ในรูปของสัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่องนำไปสู่การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง ซึ่งปัจจุบันมี 3 วิธีในการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่องบนพื้นฐานของกระบวนการแบบเวลาต่อเนื่องดังรูปที่ 1.2 [3]



รูปที่ 1.2 แนวทางการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

วิธีที่ 1 ได้ถูกนำเสนอโดย [1] และวิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอวิธีที่ 3 สำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอสำหรับกระบวนการอันดับสาม จากที่กล่าวมาข้างต้นผู้ออกแบบต้องมีทักษะด้านคณิตศาสตร์ขั้นสูง เข้าใจระบบการควบคุมแบบป้อนกลับและสามารถลำดับขั้นตอนและเลือกใช้ทฤษฎีที่เหมาะสมและถูกต้องจึงจะสามารถออกแบบตัวควบคุมได้อย่างมีประสิทธิภาพ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้นำเสนอสูตรสำเร็จสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องและใช้วิธีการทัสติน (Tustin's method) สำหรับการแปลงสัญญาณแบบเวลาต่อเนื่องเป็นสัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่องภายใต้แนวคิดของท่านรองศาสตราจารย์ ดร.ธนิตย์ ตรีสุวรรณวัฒน์ และเปรียบเทียบผลระหว่างการใช้และไม่ใช้ความถี่พรีวาร์ปิง (Frequency pre-warping) ในกระบวนการแปลงสัญญาณโดยใช้เวกเตอร์ เมตริกซ์ (Vector matrix) ในการแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้ที่กำลังเริ่มออกแบบสามารถออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องสำหรับกระบวนการที่มีอันดับสามได้ง่ายขึ้น

## 1.2 จุดมุ่งหมายและวัตถุประสงค์การศึกษา

จากการศึกษาพบว่า การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอเหมาะกับกระบวนการที่มีอันดับไม่เกินสอง สำหรับกระบวนการที่มีอันดับมากกว่าสองนั้น ตัวควบคุมพีไอดีเอเป็นวิธีการหนึ่งที่จะทำให้การควบคุมระบบมีประสิทธิภาพ หากแต่ผู้ออกแบบต้องมีความรู้ด้านระบบควบคุมวงปิดและคณิตศาสตร์ขั้นสูงจึงจะสามารถออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอให้มีประสิทธิภาพได้และรวมถึงการศึกษาการใช้งานความถี่พรีวาร์ปิง ดังนั้นจึงได้กำหนดจุดประสงค์ของวิทยานิพนธ์ไว้ดังนี้

1. เพื่อนำเสนอสูตรสำเร็จสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องสำหรับกระบวนการอันดับสาม
2. ศึกษาและเปรียบเทียบผลระหว่างการใช้และไม่ใช้ความถี่พรีวาร์ปิงในขั้นตอนการอิมพลีเมนต์ (Implement step)

### 1.3 ทฤษฎีหรือแนวคิดที่ใช้ในงานวิจัย

การนำเสนอวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องสำหรับกระบวนการอันดับสามเพื่อควบคุมผลตอบสนองกลับของระบบให้เป็นไปตามที่ออกแบบโดยใช้เทคนิคการวางโพล (Pole placement) จากนั้นแปลงระบบแบบเวลาต่อเนื่องเป็นระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินพร้อมทั้งใช้และไม่ใช้ความถี่พรีวาปปีงในระหว่างกระบวนการและคำนวณโดยใช้เวกเตอร์เมตริกซ์

### 1.4 ขอบเขตการวิจัย

1. ออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องสำหรับกระบวนการที่มีอันดับสามโดยใช้วิธีการทาสติน
2. จำลองกระบวนการและคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ด้วยโปรแกรมแมทแลป (MATLAB)
3. เปรียบเทียบผลของการใช้และไม่ใช้ความถี่พรีวาปปีง ที่  $\omega_0 = 1000\omega_n$

### 1.5 ส่วนประกอบของวิทยานิพนธ์

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ประกอบด้วยเนื้อหาจำนวน 5 บท ดังนี้  
บทที่ 1 กล่าวถึงความเป็นมา จุดประสงค์ แนวคิดและขอบเขตพร้อมทั้งส่วนประกอบของวิทยานิพนธ์

บทที่ 2 กล่าวถึงทฤษฎีพื้นฐานสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอ ซึ่งประกอบด้วยทฤษฎีและโครงสร้างของระบบควบคุมวงปิด, ระบบอันดับที่หนึ่ง, ระบบอันดับที่สอง, นิยามของลักษณะการตอบสนองชั่วคราว, โครงสร้างและข้อจำกัดของตัวควบคุมพีไอดีเอและตัวควบคุมพีไอดีเอ, หลักการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอตามแนวทางของ Richard C. Dorf และการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่องโดยกระบวนการจำลอง

บทที่ 3 กล่าวถึงทฤษฎีการซิกซ์สัญญาณ (Sampler), การคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order hold), การคงค่าอันดับหนึ่ง (First-Order Hold), การแปลงเชิงเส้นคู่ (Bilinear transformation) และความถี่พรีวาปปีง

บทที่ 4 กล่าวถึงวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินทั้งที่ใช้และไม่ใช้ความถี่พรีวาปปีงพร้อมทั้งเปรียบเทียบผลการตอบสนอง

บทที่ 5 กล่าวถึงผลสรุปงานวิจัยและข้อเสนอแนะในการพัฒนาการออกแบบสูตรสำเร็จสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องสำหรับกระบวนการอันดับสาม

ในส่วนท้ายสุดของวิทยานิพนธ์เป็นส่วนของภาคผนวกแสดงผลงานวิจัยที่ได้ตีพิมพ์และประวัติผู้เขียน

## บทที่ 2

# การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่อง

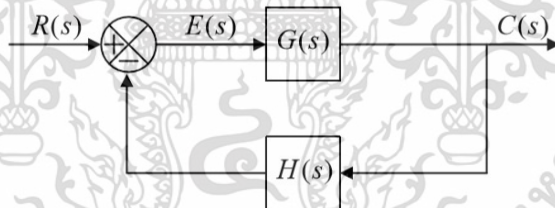
### 2.1 กล่าวนำ

ในบทนี้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่อง ซึ่งจำเป็นต้องทราบถึงทฤษฎีพื้นฐานของตัวควบคุมในด้านโครงสร้าง หลักการทำงานและคุณลักษณะ เช่น ระบบควบคุมวงปิด ระบบอันดับที่สอง ตัวควบคุมพีไอดี ตัวควบคุมพีไอดีเอ โลกซ์ของราก (Root locus) และผลการตอบสนองทางเวลา เพื่อนำมาประยุกต์ใช้ในการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่องกับระบบจำลองด้วยโปรแกรมแมทแล็บ

### 2.2 ระบบควบคุมวงปิด (Closed-loop system)

#### 2.2.1 โครงสร้างของระบบควบคุมวงปิด

ระบบควบคุมวงปิดแสดงในรูปที่ 2.1 ระบบทำงานโดยนำเอาพุด  $C(s)$  ของกระบวนการมาคำนวณเทียบกับสัญญาณอ้างอิง  $R(s)$  ได้ผลลัพธ์เป็น  $E(s)$  นำไปคำนวณและประมวลผลตามที่ได้ออกแบบไว้ในตัวควบคุมเพื่อให้ได้สัญญาณไปควบคุมกระบวนการ  $G(s)$



รูปที่ 2.1 ระบบควบคุมวงปิด

โดยที่  $G(s)$  คือฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการ

$E(s)$  คือสัญญาณที่ได้จากการคำนวณระหว่าง  $C(s)$  และ  $R(s)$

$R(s)$  คือสัญญาณอ้างอิง

$H(s)$  คือฟังก์ชันถ่ายโอนของส่วนป้อนกลับ

$C(s)$  คือสัญญาณเอาพุดของระบบ

ฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบควบคุมวงปิดในรูปที่ 2.1 คือ

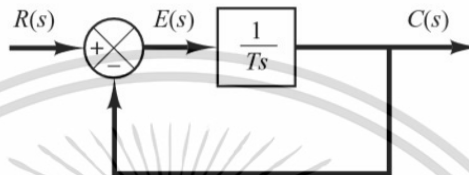
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} \quad (2.1)$$

จากสมการที่ (2.1) สมการคุณลักษณะ (Characteristic equation) คือ

$$F(s) = 1 + H(s)G(s) = 0 \quad (2.2)$$

### 2.2.2 ระบบอันดับหนึ่ง (First-order system)

พิจารณารูปที่ 2.2 เป็นระบบอันดับหนึ่งอย่างง่าย



รูปที่ 2.2 ระบบอันดับหนึ่ง

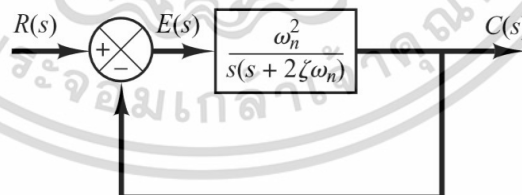
ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดคือ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (2.3)$$

โดยที่  $T$  คือเวลาคงที่หรือ  $\tau$

### 2.2.3 ระบบอันดับสอง (Second-order system)

พิจารณารูปที่ 2.3 เป็นระบบอันดับสองอย่างง่าย



รูปที่ 2.3 ระบบอันดับสอง

ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดคือ

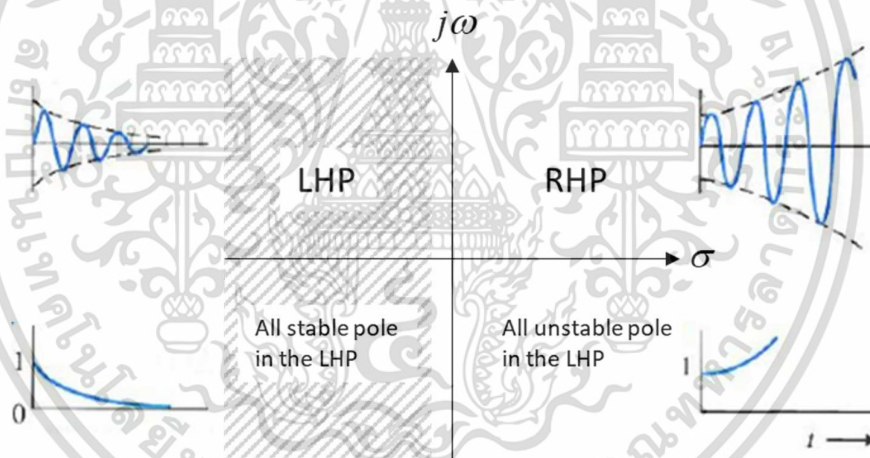
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.4)$$

โดยที่  $\omega_n$  คือความเร็วเชิงมุม

$\zeta$  คืออัตราหน่วงของระบบ (Damping ratio)

ระบบอันดับที่สองจะพิจารณาสองตัวแปรคือ  $\omega_n$  และ  $\zeta$  คือ

1. กรณี  $0 < \zeta < 1$  คือโพลวงปิดที่อยู่ในรูปแบบจำนวนเชิงซ้อนสังยุค (Complex conjugates,  $s \pm j\omega$ ) และอยู่ทางด้านซ้ายมือของระนาบ  $s$  ( $s$ -plane) เรียกว่า หน่วงต่ำกว่าวิกฤต (Underdamped)
  2. กรณี  $\zeta = 1$  คือโพลวงปิดอยู่บนแกนจริง ( $\sigma$ ) ที่ตำแหน่งเดียวกันเรียกว่า หน่วงวิกฤต (Critically damped)
  3. กรณี  $\zeta > 1$  คือโพลวงปิดอยู่บนแกนจริง ( $\sigma$ ) ต่างตำแหน่งกันเรียกว่า หน่วงเกิน (Overdamped)
  4. กรณี  $\zeta = 0$  คือโพลวงปิดอยู่บนแกนจินตภาพ ( $\omega_n$ ) เรียกว่า ไม่หน่วง (Undamped)
- การออกแบบตัวควบคุมนั้นนิยมใช้ กรณี  $0 < \zeta < 1$  คือให้โพลวงปิดอยู่ด้านซ้ายของระนาบ  $s$  (Left half plane) เพื่อให้ผลตอบสนองของระบบเข้าสู่สมดุลง่าย ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 ผลตอบสนองของตำแหน่งโพลวงปิดบนระนาบ  $s$

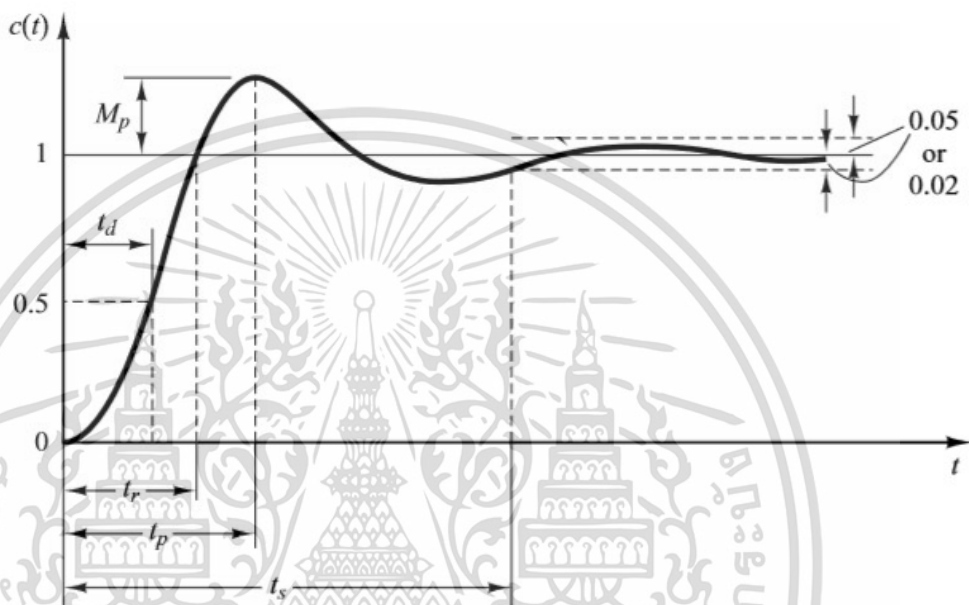
### 2.2.4 นิยามของลักษณะการตอบสนองชั่วคราว (Transient response)

บ่อยครั้งที่ลักษณะประสิทธิภาพของระบบควบคุมถูกอธิบายในรูปการตอบสนองชั่วคราวต่ออินพุตขั้นหนึ่งหน่วย (Unit-step input) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

1. เวลาประวิง (Delay time,  $t_d$ ) คือเวลาช่วงเวลาที่ครั้งแรกหนึ่งของเวลาทั้งหมดก่อนเข้าสถานะอยู่ตัว
2. ช่วงเวลาขึ้น (Rise time,  $t_r$ ) คือช่วงเวลาที่ผลตอบสนองขึ้นจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งเช่น 10% ไปยัง 80% ของค่าสุดท้ายสถานะอยู่ตัว
3. เวลายอด (Peak time,  $t_p$ ) คือช่วงเวลาที่ผลตอบสนองไปถึงค่ายอดแรก

4. ค่าพุ่งเกินสูงสุด (Maximum overshoot,  $M_p$ ) หรือเปอร์เซ็นต์ค่าพุ่งเกิน (Percent overshoot,  $P.O.$ ) คือผลต่างระหว่างค่ายอดกับอินพุตขั้นหนึ่งหน่วย มักเขียนในรูปเปอร์เซ็นต์

5. ช่วงเวลาเข้าที่ (Settling time,  $t_s$ ) คือช่วงเวลาที่ผลตอบสนองไปถึงย่านเวลาสุดท้ายที่กำหนดเช่น  $\pm 2\%$  หรือ  $\pm 5\%$  ของสถานะอยู่ตัว ซึ่งช่วงเวลาเข้าที่จะถูกใช้ในการกำหนดผลตอบสนองในขั้นตอนการออกแบบดังจะกล่าวต่อไป



รูปที่ 2.5 การตอบสนองชั่วคราวต่ออินพุตขั้นหนึ่งหน่วย

## 2.3 ตัวควบคุมพีไอดี

### 2.3.1 โครงสร้างของตัวควบคุมพีไอดี

ตัวควบคุมพีไอดีประกอบด้วย ตัวควบคุมแบบพี (Proportional, P), ตัวควบคุมแบบไอ (Integral, I) และตัวควบคุมแบบดี (Derivative, D) ซึ่งตัวควบคุมพีไอดีสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนดังนี้

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.5)$$

โดยที่  $K_p$  คืออัตราขยายของตัวควบคุมแบบพี

$K_i$  คืออัตราขยายของตัวควบคุมแบบไอ

$K_d$  คืออัตราขยายของตัวควบคุมแบบดี

หรือ

$$\begin{aligned} K(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &\equiv \frac{K_c (s+a)(s+b)}{s} \\ &= \frac{K_c (s+z_c)^2}{s} \end{aligned} \quad (2.6)$$

เมื่อ  $T_i = 4T_d$

### 2.3.2 ข้อจำกัดของตัวควบคุมพีไอดี

พิจารณาสมการที่ (2.6) จัดรูปใหม่จะได้

$$K(s) = K_c \left( \frac{T_i T_d s^2 + T_i + 1}{T_d s} \right) \quad (2.7)$$

จากสมการที่ (2.7) แสดงให้เห็นถึงตำแหน่งซีโรบนระนาบ  $s$  ซึ่งจะขึ้นอยู่กับค่า  $T_i$  และ  $T_d$

ดังนี้

$$\begin{aligned} T_i T_d s^2 + T_i + 1 &= 0 \\ s_{1,2} &= \frac{-T_i \pm \sqrt{(T_i^2) - 4T_i T_d}}{2T_i T_d} \end{aligned} \quad (2.8)$$

เมื่อพิจารณาค่ารากของสมการจะพบว่า

ถ้า  $T_i \geq 4T_d$  ตำแหน่งของซีโรทั้งคู่อยู่บนแกนจริงบนระนาบ  $s$

ถ้า  $T_i < 4T_d$  ตำแหน่งของซีโรเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค ซึ่งไม่ใช่ค่าที่เหมาะสมที่สุดดังนั้นจึง

กำหนด

$$T_i \geq 4T_d \quad (2.9)$$

ถ้า  $z_1, z_2$  เป็นซีโรของตัวควบคุมจะได้

$$z_1 = z_2 = \frac{1}{2T_d} \quad (2.10)$$

สามารถจัดรูปแบบของฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีดังนี้

$$K(s) = K_c \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (2.11)$$

จากสมการที่ (2.11) พบว่าตัวควบคุมประกอบด้วยซีโรสองตัวและโพลหนึ่งตัวที่จุดกำเนิดบนระนาบ  $s$  ดังนั้นหากใช้ตัวควบคุมพีไอดีส่งผลให้กระบวนการเหล่านี้เกิดการเปลี่ยนแปลง

1. อันดับของระบบเพิ่มขึ้นหนึ่งอันดับ ส่งผลให้ระบบทำงานช้าลง
2. ชนิดของระบบเพิ่มขึ้นหนึ่งอันดับ เนื่องจากไม่มีความคลาดเคลื่อนในสภาวะอยู่ตัว (Steady-state error) เป็นศูนย์ ในกรณีที่จากเดิมเป็นระบบชนิดศูนย์และสัญญาณอินพุตขั้นหนึ่งหน่วย อย่างไรก็ตามหากพิจารณาตัวควบคุมพีไอดีประกอบด้วยสองซีโรซึ่งเหมาะสำหรับกระบวนการอันดับสอง หากนำไปควบคุมกระบวนการที่มีอันดับสูงกว่าอันดับสองจะมีความยุ่งยากและระบบไม่มีเสถียรภาพเนื่องจากจำนวนซีโรของตัวควบคุมมีจำนวนน้อยกว่าโพลของกระบวนการ ด้วยเหตุนี้ [8] จึงมีการนำเสนอตัวควบคุมพีไอดีเพื่อใช้สำหรับควบคุมกระบวนการอันดับสาม

### 2.3.3 การออกแบบตัวควบคุมด้วยวิธีโลคัสของราก

โลคัสของรากเป็นหนึ่งในหลายวิธีนิยมนำมาออกแบบตัวควบคุมโดยการนำเสนอเส้นทางเดิน โพลวงปิดเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอัตราขยายหรือเพิ่มโพลหรือซีโรวงเปิด

จากสมการที่ (2.2) สามารถแยกออกได้เป็น

1. เงื่อนไขเชิงมุม

$$\angle K(s)G(s) = \pm(2k + 1)\pi, k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.12)$$

2. เงื่อนไขด้านขนาด

$$|K(s)G(s)| = 1 \quad (2.13)$$

โดยผู้ออกแบบสามารถกำหนดผลตอบสนองของระบบได้จากการตอบสนองแบบชั่วคราวและการตอบสนองแบบคงตัวเมื่อเกิดการเปลี่ยนแปลงอินพุต (Input) ซึ่งเอาพุต (Output) จะแสดงคู่โพลเด่น (Dominant pole,  $s_d$ ) ในรูปสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน สามารถหาตำแหน่งได้จากการกำหนดสมรรถนะของตัวควบคุมจากสมการที่ (2.14) และ (2.15)

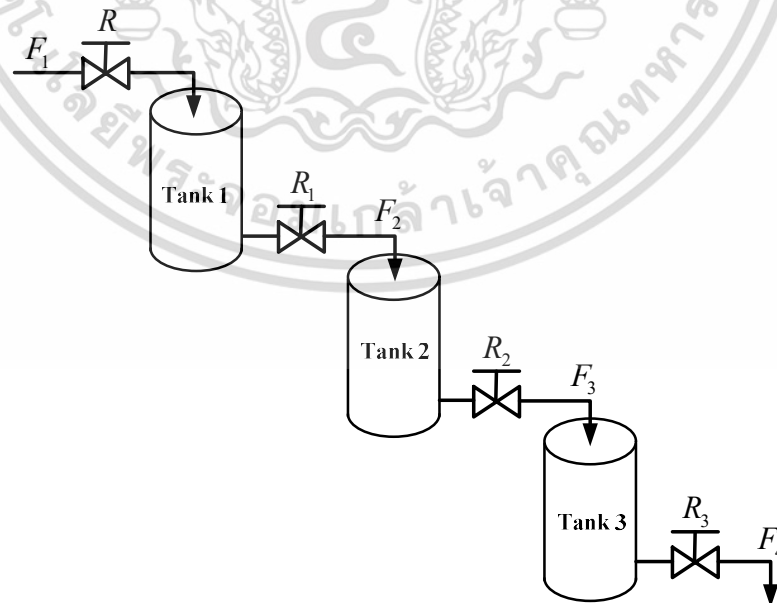
$$\text{Percent overshoot (P.O.)} = e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\% \quad (2.14)$$

$$\text{Setting time}(t_s) = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}, (\pm 2\%) \quad (2.15)$$

$$\text{Dominant pole}(s_d) = -\zeta\omega_n + \zeta\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.16)$$

ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมโดยใช้โพล์ของรากเพื่อให้ได้ผลตอบสนองชั่วคราวและสถานะอยู่ตัวตามที่ออกแบบไว้

1. คำนวณหาค่าการหน่วงโดยกำหนดเปอร์เซ็นต์ค่าสูงสุด จากสมการที่ (2.14)
  2. คำนวณหาค่าความเร็วเชิงมุมโดยกำหนดช่วงเวลาเข้าที่ จากสมการที่ (2.15)
  3. คำนวณหาค่าแห่งโพลเด่นจากสมการที่ (2.16)
  4. วางโพลเด่นลงบนระนาบ s
  5. พิจารณาทามุมของโพลและซีโร  $\angle(s_d + z_c)$  เพื่อให้มุมรวมเป็นไปตามเงื่อนไขตามสมการที่ 2.12
  6. หาค่าแห่งซีโรโดยใช้มุมของ  $\angle(s_d + z_c)$  ที่ได้จากขั้นตอนที่ 5
  7. คำนวณหาอัตราขยายจากสมการวงรอบเปิดของระบบ
  8. จำลองผลตอบสนองชั่วคราวและสถานะอยู่ตัวจากตัวแปรที่ได้จากการคำนวณบนโปรแกรมจำลอง สามารถปรับแต่งอัตราขยายได้หากผลตอบสนองไม่เป็นไปตามที่กำหนด
- จากวิธีข้างต้นสามารถออกแบบตัวควบคุม โดยสำหรับงานวิจัยฉบับนี้ใช้ระบบจำลองการควบคุมระดับน้ำภายในถังสามใบ ดังรูปที่ 2.6 จาก [7]



รูปที่ 2.6 กระบวนการจำลองการควบคุมระดับน้ำภายในถังสามใบ

โดยที่  $F_{1,2,3}$  คืออัตราการไหลเข้า  
 $H_{1,2,3}$  คือระดับน้ำภายในถัง  
 $R_{1,2,3}$  คือวาล์วควบคุม  
 สามารถเขียนเป็นฟังก์ชันถ่ายโอนจะได้

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{H_3(s)}{F_1(s)} \\ &= \frac{R_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \\ &= \frac{4}{(2s + 1)(2s + 1)(2s + 1)}; \left( R \left( \frac{m}{m^3 / s} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

จากสมการที่ (2.10) ทราบว่ากระบวนการมีโพล 3 ตำแหน่งบนแกนจริงที่ตำแหน่ง -0.5 ทั้ง 3 ตำแหน่งแทนด้วยสัญลักษณ์  $\times$  ดังแสดงในรูปที่ 2.7

ผู้ออกแบบกำหนดให้

$$\begin{aligned} \text{Percent overshoot (P.O.)} &= 5\% \\ \text{Settling time; } t_s (\pm 2\%) &= 5 \text{ secs.} \end{aligned} \quad (2.18)$$

จากเปอร์เซ็นต์ค่าพุ่งเกินจะได้อัตราหน่วงเท่ากับ

$$\zeta = \frac{\left( \ln \frac{P.O.}{100} \right)^2}{\left\{ \pi^2 + \left( \ln \frac{P.O.}{100} \right)^2 \right\}} = 0.69 \quad (2.19)$$

และจากช่วงเวลาเข้าที่  $\{t_s (\pm 2\%)\}$  ดังนั้นความถี่ธรรมชาติที่ไม่หน่วง (Undamped-natural frequency) คือ

$$\omega_n = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta t_s} = 1.227 \text{ rad / sec.} \quad (2.20)$$

ดังนั้น ตำแหน่งของโพลเด่นวงปิดคือ

$$s_d = -\zeta\omega_n + \zeta\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.874 + j0.888 \quad (2.21)$$

จำลองระบบโดยใช้โปรแกรมแมทแลปดังรูปที่ 2.7



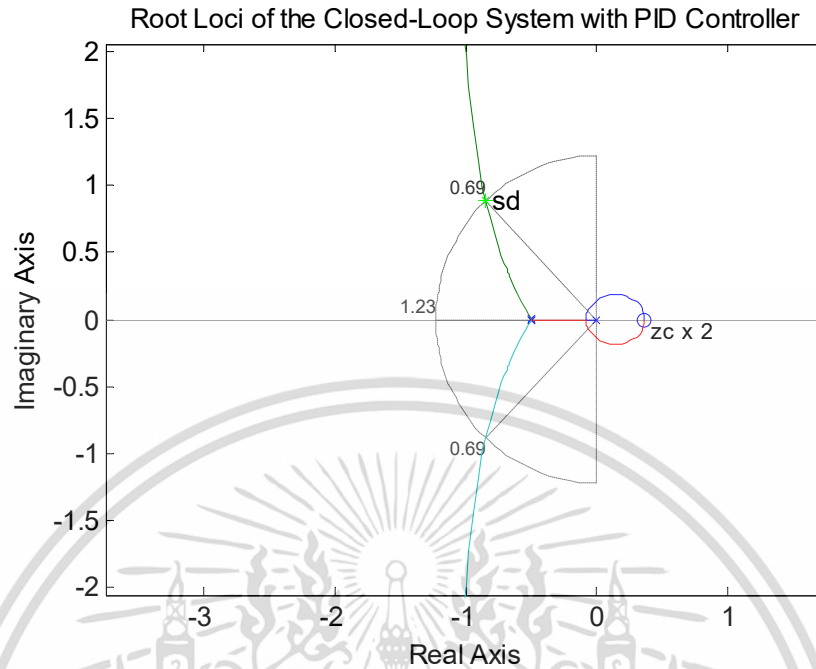
รูปที่ 2.7 โลกซ์ของรากของกระบวนการจำลอง

จะเห็นว่าทางเดินของรากนั้นไม่ผ่านจุดโพลเด่นฉะนั้นจึงเป็นไปได้เลยที่จะสามารถควบคุมระบบโดยปราศจากตัวควบคุม ดังนั้นจึงใช้ตัวควบคุมพีไอดีสำหรับควบคุมกระบวนการให้มีการตอบสนองแบบชั่วครู่และการตอบสนองแบบคงตัวตามที่ใ้กล่าวไปข้างต้น

ใช้โลกซ์ของรากสำหรับออกแบบตัวควบคุมพีไอดีในสมการที่ (2.6) สามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนวงเปิดของระบบได้ดังสมการที่ (2.22)

$$\begin{aligned}
 K(s)G(s) &= \frac{K_c(s+z_c)^2 \cdot 4}{s \cdot (2s+1)(2s+1)(2s+1)} \\
 &= \frac{0.94(s-0.368)^2 \cdot 0.5}{s \cdot (s+0.5)(s+0.5)(s+0.5)}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

พิจารณารูปที่ 2.8 จะเห็นว่าโลกซ์ของรากของระบบผ่านจุดโพลเด่น หมายความว่าตัวควบคุมพีไอดีควบคุมกระบวนการให้มีการตอบสนองแบบชั่วครู่และการตอบสนองแบบคงตัวตามที่กำหนดในสมการที่ (2.18)



รูปที่ 2.8 โลค์สของรากของระบบจำลองที่ใช้ตัวควบคุมพีไอดี

#### 2.3.4 ทดสอบการใช้ตัวควบคุมพีไอดีพร้อมกับกระบวนการจำลอง

จากรูปที่ 2.8 จะเห็นว่าหากเพิ่มซีโรเข้าไปจะทำให้กระบวนการจำลองมีผลการตอบสนองที่มีเสถียรภาพมากขึ้น ซึ่งจะใช้นาฬิกาของการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเองจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

ทดสอบการใช้ตัวควบคุมพีไอดีโดยการเพิ่มซีโรหนึ่งตัวที่ตำแหน่ง  $(s + z_c)$  ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนวงเปิดคือ

$$K(s)G(s) = \frac{K_c (s + z_c)^3 \cdot 4}{s \cdot (2s + 1)(2s + 1)(2s + 1)}$$

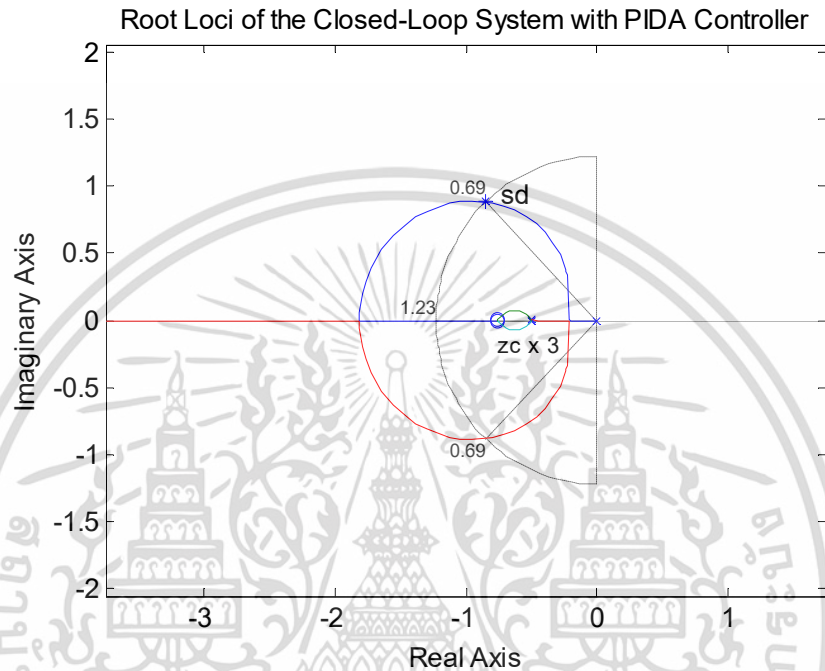
$$= \frac{2.99(s + 0.755)^3 \cdot 0.5}{s \cdot (s + 0.5)(s + 0.5)(s + 0.5)}$$
(2.23)

เมื่อฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีคือ

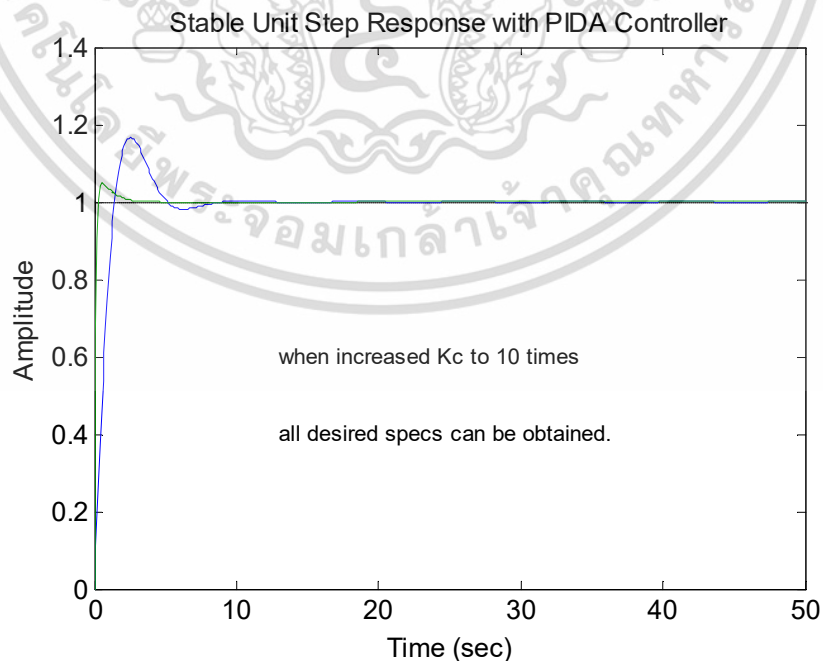
$$K(s) = K \frac{(s + a)(s + b)(s + c)}{s}$$

$$\equiv K_c \frac{(s + z_c)^3}{s}; K = K_c, a = b = c = z_c$$
(2.24)

รูปที่ 2.9 เป็นผลการทดสอบของสมการที่ (2.24) พิจารณาเส้นโลคัสของรากของระบบวงปิดที่ใช้ตัวควบคุมพีไอดีเอ โพลที่ตำแหน่ง (0) และตำแหน่ง (-0.5) เคลื่อนตัวเข้าหากันที่จุดแยกออก (Breakaway point) และเคลื่อนตัวผ่านจุดโพลเด่นไปยังแกนจริงที่จุดแยกเข้า (Break-in point) ก่อนจะเคลื่อนตัวเข้าหาซีโรที่ตำแหน่ง (0.755) และตำแหน่งอนันต์



รูปที่ 2.9 โลกัสมรากของระบบที่ใช้ตัวควบคุมพีไอดีเอ



รูปที่ 2.10 ผลตอบสนองของตัวควบคุมพีไอดีเอต่อสัญญาณแบบขั้นบันได

รูปที่ 2.10 แสดงผลตอบสนองของสมการที่ (2.24) ทดสอบโดยป้อนสัญญาณอินพุตแบบขั้นหนึ่งหน่วย (Unit step response) พบว่าช่วงเวลาเข้าที่สั้นลงเป็นผลมาจากซีโรที่เพิ่มเข้าไปในสมการที่ (2.24) จึงสรุปได้ว่าการใช้ตัวควบคุมพีไอดีเอกับกระบวนการอันดับที่สามให้ผลตอบสนองที่ดีขึ้น ซึ่งจะกล่าวถึงโครงสร้าง แนวคิดและวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอสำหรับกระบวนการอันดับสามในหัวข้อที่ 2.4

## 2.4 ตัวควบคุมพีไอดีเอ

### 2.4.1 โครงสร้างตัวควบคุมพีไอดีเอ

การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอถูกนำเสนอในปี 1996 โดย Richard C. Dorf มีแนวคิดมาจากการเพิ่มซีโรให้ทำงานร่วมกับตัวควบคุมพีไอดีเอแล้วเรียกตัวควบคุมนี้ว่า ตัวควบคุมพีไอดีเอ ซึ่งตัวควบคุมนี้ถูกออกแบบมาเพื่อใช้กับกระบวนการอันดับสาม โดยใช้โพลส์ของรากและตัวควบคุมพีไอดีเอมาเป็นพื้นฐานสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอ

พิจารณารูปที่ 2.1 การทำงานของตัวควบคุมพีไอดีเอมีโครงสร้างดังนี้

$$K(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{(s+f)} + \frac{K_A s^2}{(s+d)(s+e)} \quad (2.25)$$

สามารถจัดรูปแบบอย่างง่ายคือ

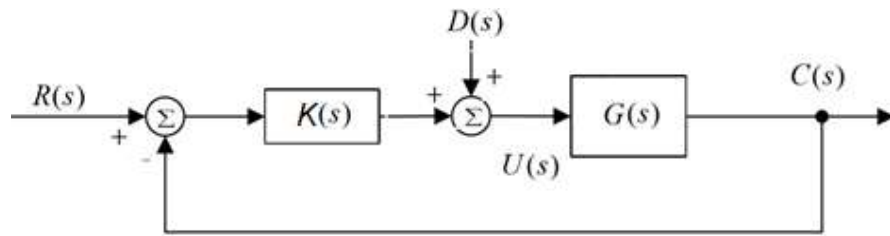
$$K(s) = K_C \frac{(s+a)(s+b)(s+c)}{s(s+d)(s+f)}; d=f \quad (2.26)$$

โดยที่  $K_C$  คือ อัตราการขยายของตัวควบคุมพีไอดีเอ

ดังนั้นสามารถเขียนสมการของตัวควบคุมพีไอดีเอได้ดังสมการที่ (2.27)

$$K(s) = K_C \frac{(s+a)(s+b)(s+c)}{s}; d=f \quad (2.27)$$

เมื่อ  $a, b, c$  และ  $d, e$  คือโพลและซีโรตามลำดับสำหรับตัวควบคุมพีไอดีเอ แต่เนื่องจาก  $a, b, c \ll d, e$  และเมื่อพิจารณาโพลที่  $d, e$  ซึ่งมีค่าน้อยมากจึงละไว้ไม่พิจารณา ซึ่งสามารถเขียนโครงสร้างของตัวควบคุมพีไอดีเอได้ดังรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 โครงสร้างของระบบควบคุมวงปิดใช้ร่วมกับตัวควบคุมพีไอดีเอ

พิจารณารูปที่ 2.11 ฟังก์ชันถ่ายโอนวงปิดของระบบคือ

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (2.28)$$

สมการคุณลักษณะของระบบคือ

$$1 + K(s)G(s) = 0 \quad (2.29)$$

สำหรับกระบวนการที่มีอันดับ  $n$  ฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการคือ

$$G^n(s) = \frac{K_n}{s^N (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_p)} \quad (2.30)$$

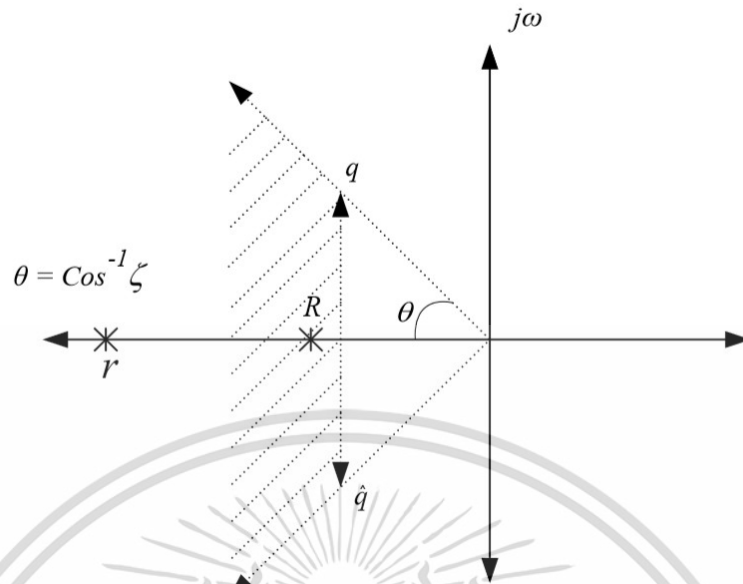
โดยที่  $K_n$  คืออัตราขยายของกระบวนการ

$P_{1,2,\dots,p}$  คือโพลของกระบวนการ

#### 2.4.2 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีตามแนวทางของ Richard C. Dorf

Richard C. Dorf ได้นำเสนอการออกแบบตัวควบคุมพีไอดี ซึ่งเป็นการเพิ่มซีโรเข้าด้วยกันกับตัวควบคุมพีไอดี ซึ่งแนวทางนี้ถูกประยุกต์ใช้ร่วมกับโลคัลของรากบนระนาบ  $s$  ดังรูปที่ 2.12

โดยที่  $R, r, q, q$  คือตำแหน่งโพลที่อยู่ในขอบเขตพื้นที่ที่ยอมรับได้ เมื่อโพลของกระบวนการไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิดและมีค่าน้อยกว่า  $-\zeta\omega_n$  จึงแทนโพลทั้งสองให้อยู่ในขอบเขตโดยที่กำหนดโดยโพลตัวหนึ่งวางที่ด้านซ้ายของโพลของระบบที่มีค่ามากที่สุดและโพลอีกหนึ่งตัววางให้ไกลออกไปจากจุดกำเนิดบนระนาบ  $s$  โดยตำแหน่งใหม่ของโพลนั้นจะเข้ามามีผลกระทบต่อระบบแทนโดยผู้ออกแบบสามารถปรับตำแหน่งของโพลได้หากผลการตอบสนองไม่ได้ตามที่ออกแบบไว้



รูปที่ 2.12 ขอบเขตพื้นที่และตำแหน่งโพลวงปิดบนระนาบ  $s$

ทั้งนี้ใน [1] ได้กำหนดขอบเขตการวางโพลตามชนิดของกระบวนการ (System type) โดยที่สมรรถนะของตัวควบคุมพีไอดีเอสามารถกำหนดได้ตามเงื่อนไขของการออกแบบ เพอร์เซ็นต์ค่าพุงเกิน, เวลายอดและช่วงเวลาเข้าที่ ตามขอบเขตดังนี้

$$P.O. \leq L, t_s \leq M, \quad (2.31)$$

$$\max \left| \frac{\text{Output response}}{\text{Disturbance signal}} \right| = \max \left| \frac{C(t)}{D(t)} \right| < W \quad (2.32)$$

เมื่อ  $L$ ,  $M$  และ  $W$  ถูกกำหนดโดยผู้ออกแบบตัวควบคุม ที่ทำให้ค่าผิดพลาดในสถานะอยู่ตัว  $e_{ss} = 0$  สำหรับตัวควบคุมพีไอดีเอที่เหมาะสม โดยค่า  $L$  และ  $M$  นั้นคือการกำหนดตำแหน่งของราก ให้ใกล้กับจุดกำเนิดบนระนาบ  $s$

ขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอตามแนวคิดของ Richard C. Dorf

1. คำนวณอัตราหน่วงของระบบจากเงื่อนไขของเปอร์เซ็นต์ค่าพุงเกินได้ว่า

$$\zeta = \frac{\left( \ln \frac{L}{100} \right)^2}{\pi^2 + \left( \ln \frac{L}{100} \right)^2} \quad (2.33)$$

2. กำหนด  $\zeta\omega_n$  ของตำแหน่งรากเวลาเข้าที่ เมื่อ

$$\text{Percent Overshoot}(P.O.) = e^{\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\% \quad (2.34)$$

$$\text{Setting Time}(t_s) = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}, (\pm 2\%) \quad (2.35)$$

หรือ

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (2.36)$$

โดยตำแหน่งรากครอบลุ่มจะให้  $s = \hat{q}, q$  เมื่อ

$$q = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}, \hat{q} = -\zeta\omega_n - \zeta\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad (2.37)$$

3. ทำการเลือกค่ารากของแกนจริงให้เท่ากับค่าจริงของรากที่ต้องการให้ครอบลุ่ม โดยกำหนด

$$R = \text{Re}\{\text{dominant root}\} \leq -\zeta\omega_n \quad (2.38)$$

และกำหนดค่า  $R$  โดยให้อยู่ทางด้านซ้ายของโพลเด่นมากที่สุดในวงเปิดของกระบวนการบนระนาบ  $s$

4. เลือกตำแหน่งรากที่มีค่าบนแกนจริงมากที่สุด โดยกำหนดให้  $r \ll -\zeta\omega_n$

5. เขียนสมการคุณลักษณะของระบบควบคุม  $1 + K(s)G(s)$  และให้

$$(s+r)(s+R)(s+q)(s+\hat{q}) = 0 \quad (2.39)$$

6. ทำการแก้สมการในขั้นที่ 5 เพื่อหาค่าพารามิเตอร์  $a, b, c$  และ  $K_{PIDA}$

7. นำค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุมพีไอดีเอที่ออกแบบไว้ไปจำลองกระบวนการดูผลตอบสนองชั่วคราวและสภาวะอยู่ตัว ถ้าผลออกมาไม่เป็นไปตามที่ออกแบบให้ทำการเพิ่มอัตรา

ขยายจนกว่าผลการตอบสนองจะถึงขอบเขตข้อกำหนดและอาจต้องปรับตำแหน่งของทั้ง 2 โพล คือ  $R$  และ  $r$  ทำการออกแบบใหม่และทำตามขั้นตอนเดิมอีกครั้ง

## 2.5 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีแบบเวลาต่อเนื่อง

ปัญหาอย่างหนึ่งสำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอคือผู้ออกแบบต้องมีพื้นฐานคณิตศาสตร์ ระบบควบคุมและอื่นๆประกอบการออกแบบ จึงเป็นการยากต่อผู้ออกแบบโดยเฉพาะสำหรับกระบวนการอันดับสามหรือสูงกว่านั้น ส่วนหนึ่งของงานวิจัยฉบับนี้นำเสนอเทคนิคการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอ โดยใช้เวกเตอร์เมตริกซ์ ซึ่งจะจัดรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอนในรูปแบบเมตริกซ์และใช้คุณสมบัติ  $Ax=b$  และคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ โดยมีขั้นตอนดังนี้

กำหนดให้ฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการอันดับสามเป็น

$$G(s) = \frac{b_1s + b_0}{s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (2.40)$$

จากสมการ (2.25) พิจารณาจากโพลที่  $d, e$  ซึ่งมีค่าน้อยมากจึงละไว้ไม่พิจารณาดังนั้น ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีเอคือ

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s + K_a s^3, \quad (2.41)$$

$$= \frac{K_p + K_i + K_d s + K_a s^2}{s}$$

ดังนั้นสมการคุณลักษณะเสมือนของระบบวงปิดคือ

$$F(s) = 1 + K(s)G(s) = 0,$$

$$\underset{\text{actual}}{F(s)} = 1 + \frac{\{K_p s + K_i + K_d s^2 + K_a s^3\}(b_1 s + b_0)}{\{s\}(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)},$$

$$\frac{F(s)}{(1 + K_a b_1)} = s^4 + \frac{(a_2 + K_d b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^3 + \dots$$

$$+ \frac{(a_1 + K_p b_1 + K_d b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^2 + \dots$$

$$+ \frac{(a_0 + K_i b_1 + K_p b_0)}{(1 + K_a b_1)} s + \dots$$

$$+ \frac{(K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} \quad (2.42)$$

ตำแหน่งการวางโพลนั้นไม่มีกฎเกณฑ์ที่แน่ชัดแต่มักจะวางตามรูปที่ 2.12 จากการศึกษาพบว่าโพลของระบบที่อยู่ทางด้านซ้ายของระนาบ  $s$  ให้ผลตอบสนองที่เข้าสู่สมดุลง่าย ดังนั้นจึงเป็นที่นิยมสำหรับการออกแบบ ซึ่งสามารถเขียนฟังก์ชันถ่ายโอนแบบวงปิดโดยใช้คุณลักษณะของการออกแบบพีไอดีเอ

$$\begin{aligned}
 F(s) &= (s+q)(s+\hat{q})(s+R)(s+r), \\
 & \text{design} \\
 &= (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+R)(s+r), \\
 &= s^4 + \{2\zeta\omega_n + (R+r)\}s^3 + \dots \\
 & \quad + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\}s^2 + \dots \\
 & \quad + \{\omega_n(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\}s + \dots \\
 & \quad + \omega_n^2 Rr
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

สำหรับโพลที่ตำแหน่ง  $(s+R)$  และ  $(s+r)$  ผู้ออกแบบควรวางไว้ตำแหน่งตามรูปที่ 2.12 โดยอาจพิจารณาจาก  $R \geq 2\zeta\omega_n$  และ  $r \geq R$  ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับชนิดของระบบ [8]

จัดรูปแบบสมการให้อยู่ในรูปแบบเดียวกันโดยเรียงลำดับจากกำลังสูงสุดและพิจารณาสัมประสิทธิ์ที่อยู่ตัวแปร  $s$  ที่กำลังเท่ากันจากสมการที่ (2.42) และ (2.43) จะได้

$$\begin{aligned}
 s^3]: \quad & \frac{(a_2 + K_d b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \{2\zeta\omega_n + (R+r)\} \\
 s^2]: \quad & \frac{(a_1 + K_p b_1 + K_d b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\} \\
 s^1]: \quad & \frac{(a_0 + K_i b_1 + K_p b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \{\omega_n(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\} \\
 s^0]: \quad & \frac{(K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \omega_n^2 Rr
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

สมการที่ (2.45) คือสมการเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปของเวกเตอร์ เมตริกซ์ ( $Ax=b$ )

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & \{b_0 - b_1[2\zeta\omega_n + (R+r)]\} \\ b_1 & 0 & b_0 & -b_1\{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\} \\ b_0 & b_1 & 0 & -b_1\{\omega_n^2(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\} \\ 0 & b_0 & 0 & \omega_n^2 Rr \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} -a_2 + \{2\zeta\omega_n + (R+r)\} \\ -a_1 + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\} \\ -a_0 + \{\omega_n^2(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\} \\ \omega_n^2 Rr \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$x = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix}$$

ดังนั้นสมการสำหรับการหาค่า  $K_p$   $K_i$   $K_d$  และ  $K_a$  สำหรับตัวควบคุมพีไอดีเอคือ

$$\begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d & K_a \end{bmatrix}^T = A^{-1}b \quad (2.46)$$

ซึ่งผู้ออกแบบสามารถใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's rule) เพื่อหาค่า  $A^{-1}$

แทนค่า  $b_1 = 0$ ,  $b_0 = 0.5$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $a_1 = 0.75$ ,  $a_0 = 0.125$  ลงในสมการระบบและ

$\zeta = 0.69$ ,  $\omega_n = 1.227 \text{ rad/sec.}$ ,  $R = 0.8682$ ,  $r = 29.1075$  ในสมการ (2.45) และวางในรูปแบบ  $Ax=b$  ดังสมการที่ (2.47)

$$x = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 30.17 \\ 76.81 \\ 87.851 \\ 38.075 \end{bmatrix}}_b = \begin{bmatrix} 175.703 \\ 76.15 \\ 153.623 \\ 60.34 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

จากนั้นแทนค่า  $K_p$   $K_i$   $K_d$  และ  $K_a$  ลงในสมการที่ (2.41) จะได้

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s + K_a s^3,$$

$$= \frac{\overbrace{175.703}^{K_p} + \overbrace{76.15}^{K_i} + \overbrace{153.623}^{K_d} s + \overbrace{60.34}^{K_a} s^2}{s}, \quad (2.48)$$

$$= \frac{60.34(s + 0.866)(s + 0.84 \pm j0.867)}{s}$$

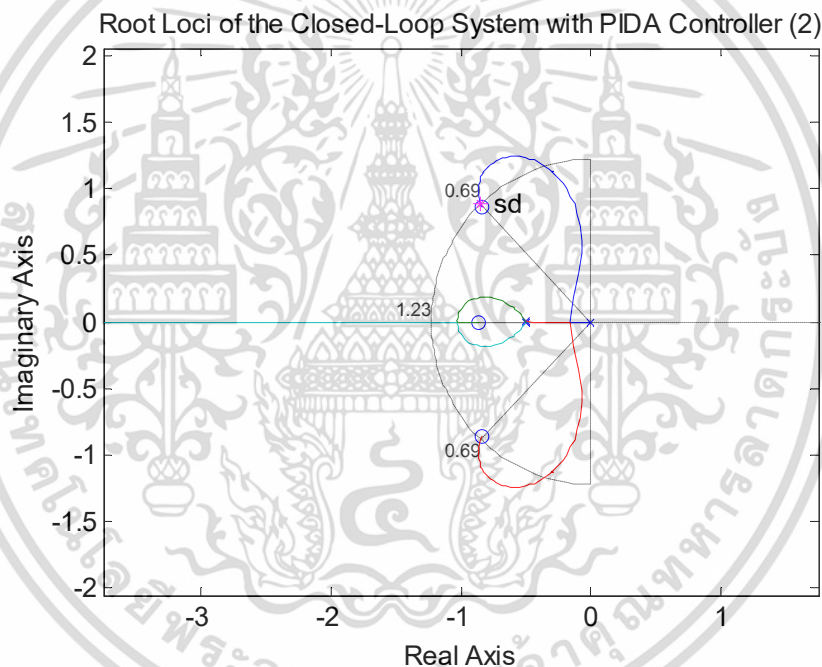
เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนสำหรับกระบวนการอันดับสามที่ออกแบบโดยใช้ตัวควบคุมพีไอดีเอตามแนวทางของ Richard C. Dorf คือ

$$K(s)G(s) = \frac{(60.34s^3 + 153.623s^2 + 175.703s + 76.15)0.5}{s(s^3 + 1.5s^2 + 0.75s + 0.125)}, \quad (2.49)$$

$$= \frac{60.34(s + 0.866)(s + 0.84 \pm j0.867)0.5}{s(s + 0.5)(s + 0.5)(s + 0.5)}$$

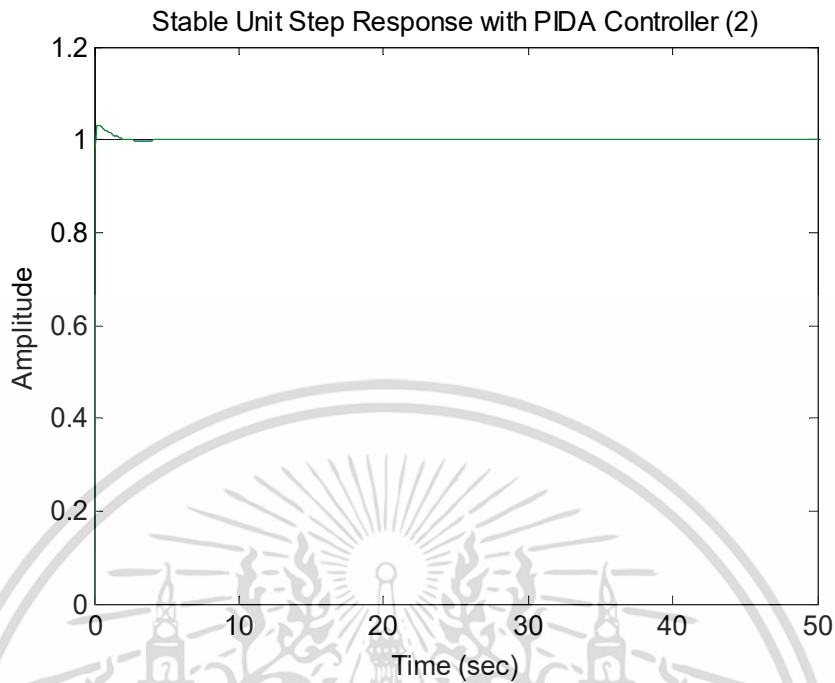
พิจารณาสมการที่ (2.21) เปรียบเทียบกับสมการที่ (2.49) พบว่าตำแหน่งของโพลเด่นกับซีโรของตัวควบคุมพีไอดีเออยู่ในตำแหน่งที่ใกล้กันมากดังรูปที่ 2.13 ซึ่งเป็นผลมาจากการวางโพลในขอบเขตดังรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.13 โลคัสของรากของฟังก์ชันถ่ายโอนของระบบอันดับสาม

พิจารณารูปที่ 2.14 เป็นผลตอบสนองของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย สังเกตว่าระบบมีช่วงเวลาเข้าที่สั้นลง เมื่อเทียบกับรูปที่ 2.10 ซึ่งเป็นผลมาจากการวางโพลและการเพิ่มของตัวควบคุมตามแนวทางของ Richard C. Dorf

ใน [8] หากเปอร์เซ็นต์ค่าพุงเกินไม่อยู่ในระดับที่ผู้ออกแบบพอใจสามารถเพิ่มอัตราขยาย (K) แล้วดูผลตอบสนองอีกครั้ง



รูปที่ 2.14 ผลตอบสนองชั่วครู่ของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย

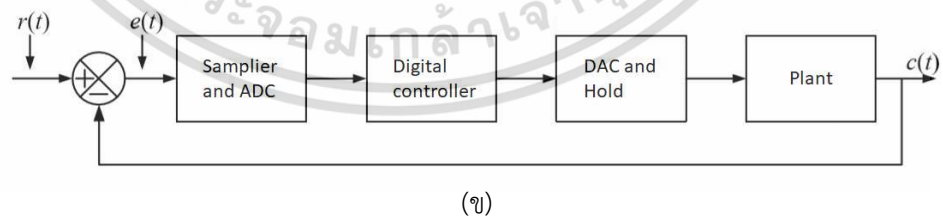
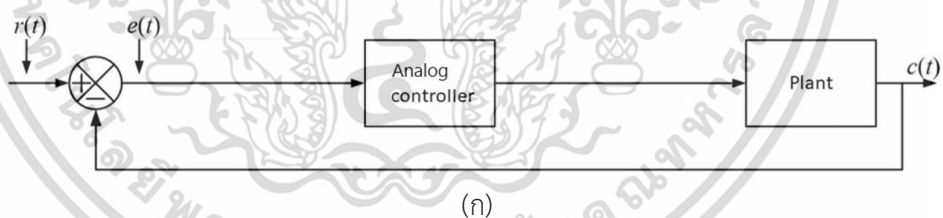
## บทที่ 3

# การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

บทนี้กล่าวถึงทฤษฎีและโครงสร้างของตัวควบคุมแบบดิจิทัล วิธีการแปลงสัญญาณแบบเวลาต่อเนื่องเป็นสัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่องร่วมกับเครื่องชั่งตัวอย่าง (Sampler) ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง โดยกล่าวถึงการคงค้างอันดับศูนย์ (Zero-order hold, ZOH), การคงค้างอันดับหนึ่ง (First-order hold, FOH), การแปลงเชิงเส้นคู่หรือเรียกว่าวิธีการทาสตินและความถี่พรีวาปีง ซึ่งเป็นพื้นฐานสำหรับการออกแบบในบทที่ 4

### 3.1 ตัวควบคุมแบบดิจิทัล

จากรูปที่ 3.1 (ก) เป็นระบบควบคุมแบบแอนะล็อกและ (ข) เป็นระบบควบคุมแบบดิจิทัล ทั้ง 2 รูปแบบแตกต่างกันที่ชนิดของตัวควบคุม จากที่กล่าวไปข้างต้นว่ากระบวนการส่วนใหญ่ยังคงทำงานในรูปแบบสัญญาณแอนะล็อก ดังนั้นเพื่อให้ตัวควบคุมดิจิทัลสามารถประมวลผลแบบดิจิทัลได้จึงต้องมีวงจรแปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล (Analog to Digital converter, A/D) ซึ่งข้อมูลอยู่ในรูปรหัสฐานสอง และการส่งสัญญาณออกไปควบคุมกระบวนการจะต้องมีวงจรแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อก (Digital to Analog converter, D/A) ดังรูปที่ 3.1 (ข)



รูปที่ 3.1 ระบบควบคุมแบบอินพุตเดียวและเอาพุตเดียว

- ก. ระบบควบคุมแบบแอนะล็อก (Analog controller)
- ข. ระบบควบคุมแบบดิจิทัล (Digital controller)

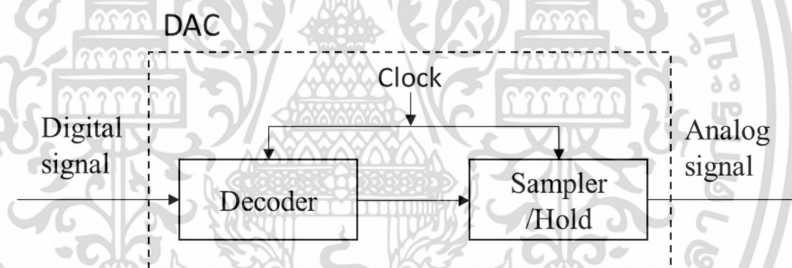
### 3.1.1 ระบบควบคุมแบบดิจิทัล

โดยระบบควบคุมแบบดิจิทัลมีลักษณะดังนี้

1. ตัวควบคุมแบบดิจิทัลถูกสร้างขึ้นบนคอมพิวเตอร์, ไมโครโพรเซสเซอร์ (Microprocessor), ไมโครคอนโทรลเลอร์ (Microcontroller) หรือตัวควบคุมชนิดอื่น
2. มีการประมวลผลแบบดิจิทัลจึงต้องแปลงสัญญาณอินพุตเป็นสัญญาณดิจิทัลและสัญญาณเอาพุตเป็นสัญญาณแอนะล็อกจึงต้องแปลงสัญญาณเอาพุตเป็นสัญญาณแอนะล็อกเพื่อไปควบคุมกระบวนการ
3. การทำงานของการซิกตัวอย่างและการคงค่า (Hold) ต้องทำงานโดยสัญญาณนาฬิกา (Clock) ตัวเดียวกัน

### 3.1.2 วงจรแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อก

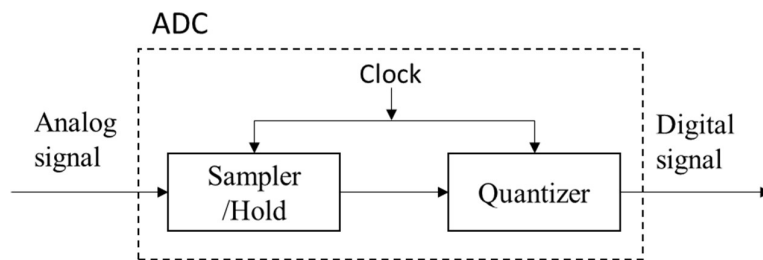
วงจรประกอบด้วยตัวถอดรหัส (Decoder) ทำหน้าที่ถอดรหัสดิจิทัลเป็นระดับแรงดันสัญญาณแอนะล็อกและคงค่าไว้ระหว่างคาบสัญญาณด้วยการคงค่า กระบวนการนี้ไม่ใช่เครื่องซิกสัญญาณแต่พิจารณาเป็นหน่วยเดียวกันจึงรวมไว้ ซึ่งมีอัตราขยายคงที่และจะเท่ากับหนึ่งในอุดมคติ



รูปที่ 3.2 วงจรแปลงสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อก

### 3.1.3 วงจรแปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล

ประกอบด้วยเครื่องซิกตัวอย่าง การคงค่าและควอนไทซ์ (Quantizer) การทำงานเริ่มจากซิกตัวอย่างเป็นเวลาเท่ากันจากสัญญาณแอนะล็อกและคงค่าสัญญาณชั่วขณะ ณ เวลาเดียวกันและส่งสัญญาณไปควอนไทซ์แล้วส่งออกไปยังตัวควบคุม ดังรูปที่ 3.3 ซึ่งในการออกแบบสมมุติให้ค่าคลาดเคลื่อนของการควอนไทซ์เท่ากับศูนย์ ดังนั้นในออกแบบจะพิจารณาเฉพาะเครื่องซิกตัวอย่างและการคงค่าเท่านั้น



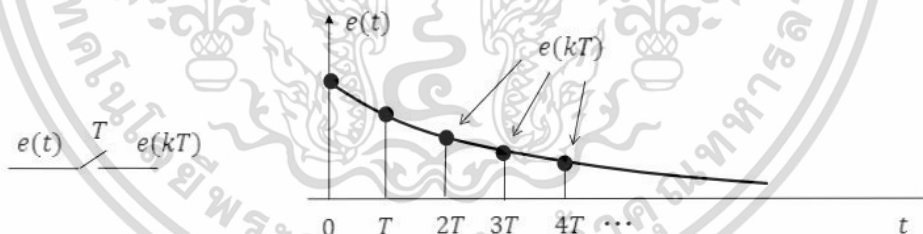
รูปที่ 3.3 วงจรแปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล

## 3.2 เครื่องซึกตัวอย่างและการคงค่า

จากหัวข้อที่ 3.1.1 สรุปลได้ว่าสัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาพุตของตัวควบคุมแบบดิจิทัลต้องอยู่ในรูปสัญญาณดิจิทัลเท่านั้น แม้ว่าตัวควบคุมแบบดิจิทัลบางประเภทมีอินพุตและเอาพุตเป็นแบบสัญญาณแอนะล็อกแต่การประมวลผลยังเป็นแบบดิจิทัล หากแต่กระบวนการยังคงใช้สัญญาณแบบ แอนะล็อกในการควบคุม ดังนั้นจึงต้องมีกระบวนการเปลี่ยนสัญญาณดิจิทัลเป็นสัญญาณแอนะล็อกด้วยเครื่องซึกตัวอย่างและการคงค่า

### 3.2.1 เครื่องซึกตัวอย่าง

รูปที่ 3.4 เครื่องซึกตัวอย่างจากสัญญาณแบบเวลาต่อเนื่อง (Continuous-Time signal) หรือสัญญาณแอนะล็อกด้วยความถี่และคาบเวลาที่คงที่ จะได้สัญญาณแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง (Discrete-Time signal) หรือสัญญาณดิจิทัล



รูปที่ 3.4 เครื่องซึกตัวอย่าง

โดยที่  $e(t)$  คืออินพุตจากสัญญาณแบบเวลาต่อเนื่อง เมื่อ  $t \geq 0$

$T$  คือคาบการซึกตัวอย่าง

$e(kT)$  คือเอาพุตที่ได้จากเครื่องซึกตัวอย่าง เมื่อ  $k = 0, 1, \dots$

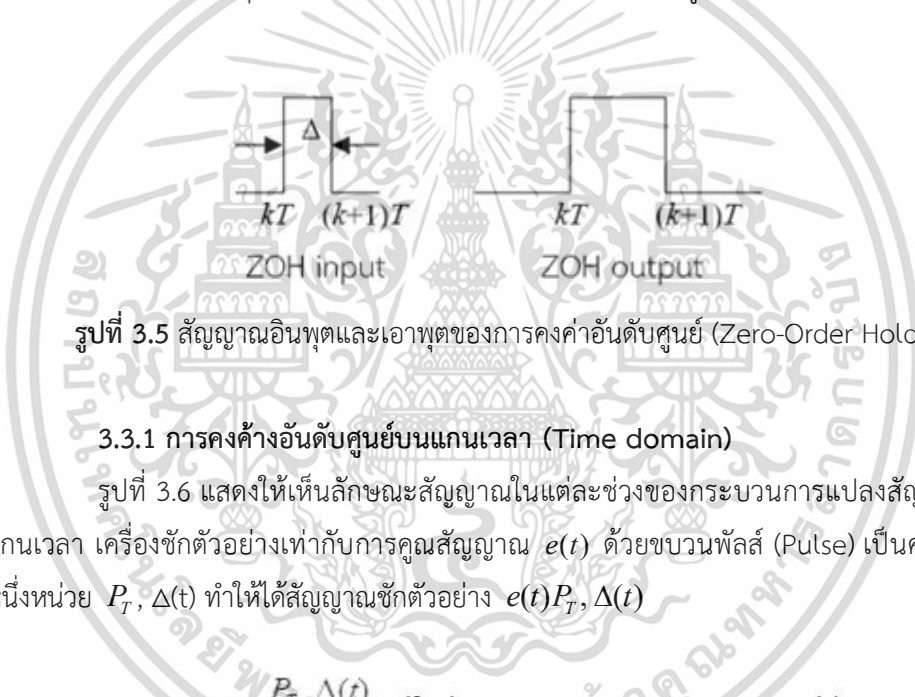
จากทฤษฎีของไนควิสต์-ชานนอน (The Nyquist-Shannon sampling) ความถี่ของการซึกตัวอย่างต้องไม่ต่ำกว่าสองเท่าของความถี่สูงสุดในสัญญาณอินพุตจึงจะทำให้สัญญาณที่ได้จากกระบวนการซึกตัวอย่างเหมือนสัญญาณอินพุต

### 3.2.2 การคงค่า

การคงค่าคือกระบวนการคงระดับสัญญาณให้คงที่ ณ เวลาหนึ่งจนกว่าจะมีสัญญาณใหม่เข้ามา โดยปกติเครื่องซิกตัวอย่างและการคงค่าไม่สามารถเขียนในรูปแบบกายภาพได้ จาก [4] จึงถูกรวมไว้ด้วยกันเรียกว่า Sampler and hold, S/H

### 3.3 การคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold, ZOH)

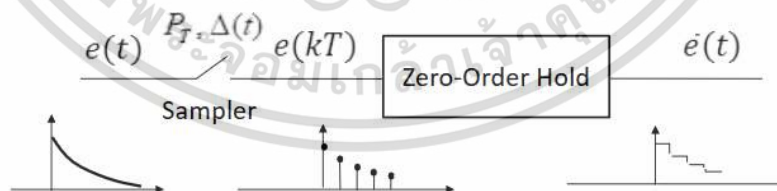
การคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold) คือการคงค่าสัญญาณเอาต์พุตไว้ที่สัญญาณอินพุตขณะเริ่มช่วงซิกตัวอย่างในการวิเคราะห์หากช่วงตัวอย่าง  $\Delta(t)$  น้อยมากเมื่อเทียบกับคาบเครื่องซิกตัวอย่าง  $T$  และเมื่อเทียบกับค่าคงตัวเวลาค่าน้อยที่สุดของสัญญาณอินพุต  $e(t)$  เราสามารถประมาณ เอาต์พุตของการซิกตัวอย่างด้วยพัลส์ยอดเรียงดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 สัญญาณอินพุตและเอาต์พุตของการคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold)

#### 3.3.1 การคงค่าอันดับศูนย์บนแกนเวลา (Time domain)

รูปที่ 3.6 แสดงให้เห็นลักษณะสัญญาณในแต่ละช่วงของกระบวนการแปลงสัญญาณบนแกนเวลา เครื่องซิกตัวอย่างเท่ากับการคูณสัญญาณ  $e(t)$  ด้วยขบวนพัลส์ (Pulse) เป็นคาบขนาดหนึ่งหน่วย  $P_T, \Delta(t)$  ทำให้ได้สัญญาณซิกตัวอย่าง  $e(t)P_T, \Delta(t)$



รูปที่ 3.6 การคงค่าอันดับศูนย์บนแกนเวลา

ส่วนพัลส์ลูกอื่นแทนด้วยสมการที่ (3.1)

$$e(t)P_T, \Delta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)P_T, \Delta(t - kT) \quad (3.1)$$

เมื่อ  $P_T, \Delta(t)$  เป็นขบวนพัลส์ลักษณะเป็นคาบขนาดหนึ่งหน่วยดังแสดงในรูปที่ 3.5 ซึ่งสัญญาณเอาพุตที่ได้จากการคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold) ณ เวลาชักตัวอย่างที่  $k$  เขียนเป็นสมการได้ว่า

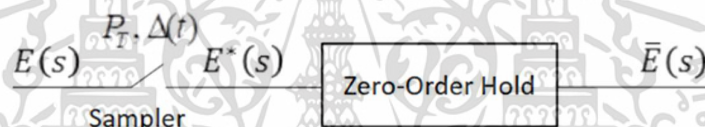
$$e(kt)[\mu(t - kT) - \mu(t - (k+1)T)] \quad (3.2)$$

เมื่อ  $\mu(t)$  คือฟังก์ชันขั้นหนึ่งหน่วย (Unit step function)

ดังนั้นเอาพุตที่ได้จากการคงค่าอันดับศูนย์ (Zero-Order Hold) คือ

$$\bar{e}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kt)[\mu(t - kT) - \mu(t - (k+1)T)] \quad (3.3)$$

### 3.3.2 การคงค่าอันดับศูนย์บนแกนความถี่ (Frequency domain)



รูปที่ 3.7 การคงค่าอันดับศูนย์บนแกนความถี่

ทำการแปลงลาปลาสมการที่ (3.3) จะได้

$$\begin{aligned} \bar{E}(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kt) \left[ \frac{e^{-skT} - e^{-s(k+1)T}}{s} \right] \\ &= \left[ \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} e(kt) e^{-skT} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

จากสมการที่ (3.4) จะได้

$$E^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kt) e^{-skT} \quad (3.5)$$

ซึ่งเรียกว่าสตาร์ทรานฟอร์ม (Star transform) เป็นอินพุตของฟังก์ชันถ่ายโอนของการคงค่าอันดับศูนย์ ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$G_0(s) = \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) \quad (3.6)$$

### 3.4 การคงค่าอันดับหนึ่ง (First-Order Hold, FOH)

การคงค่าอันดับหนึ่งแทนด้วยสองเทอมของกำลังอนุกรมเพื่อที่จะประมาณค่าของฟังก์ชันตำแหน่งต่อไปด้วยเงื่อนไข  $kT \leq t < (k+1)T$  โดยสมการการคงค่าอันดับหนึ่งเขียนแทนด้วย

$$e_k(t) = e(kT) + e^{(1)}(kT)(t - kT) \quad (3.7)$$

เมื่อกำลังอันดับหนึ่งของ  $e(t)$  ที่ตำแหน่ง  $t = kT$  ประมาณได้เป็น

$$e^{(1)}(kT) = \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T} \quad (3.8)$$

แทนสมการที่ (3.8) ใน (3.7) จะได้

$$e_k(t) = e(kT) + \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}(t - kT) \quad (3.9)$$

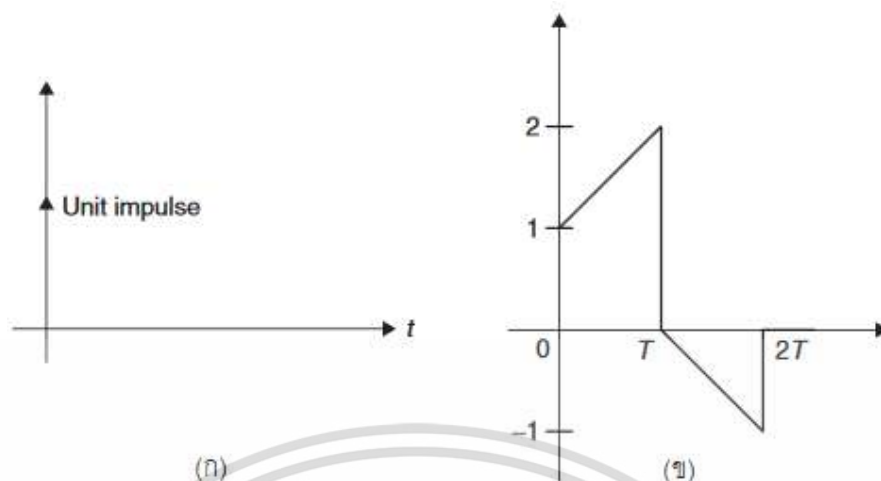
สัญญาณเอาพุตของการคงค่าอันดับหนึ่งระหว่างสองการซิกตัวอย่างแทนด้วยฟังก์ชันลาด (Ramp function) โดยที่ความชันของฟังก์ชันลาดคือ ผลต่างของ  $e(kT)$  และ  $e[(k+1)T]$

ทดสอบโดยใส่อินพุตขั้นหนึ่งหน่วยที่  $t = 0$  แล้วดูผลตอบสนองโดยที่  $k = 0, 1, 2, \dots$  ซึ่งยกตัวอย่างที่  $k = 0$

$$e_0(t) = e(0) + \frac{e(0) - e[-T]}{T}(t); 0 \leq t \leq T \quad (3.10)$$

ทดสอบใส่อินพุตที่  $f(0) = 1$  และ  $f(-T) = 0$  ผลการตอบสนองกลับของการคงค่าอันดับหนึ่ง (First-Order Hold) ในช่วง  $0 \leq t \leq T$  คือ

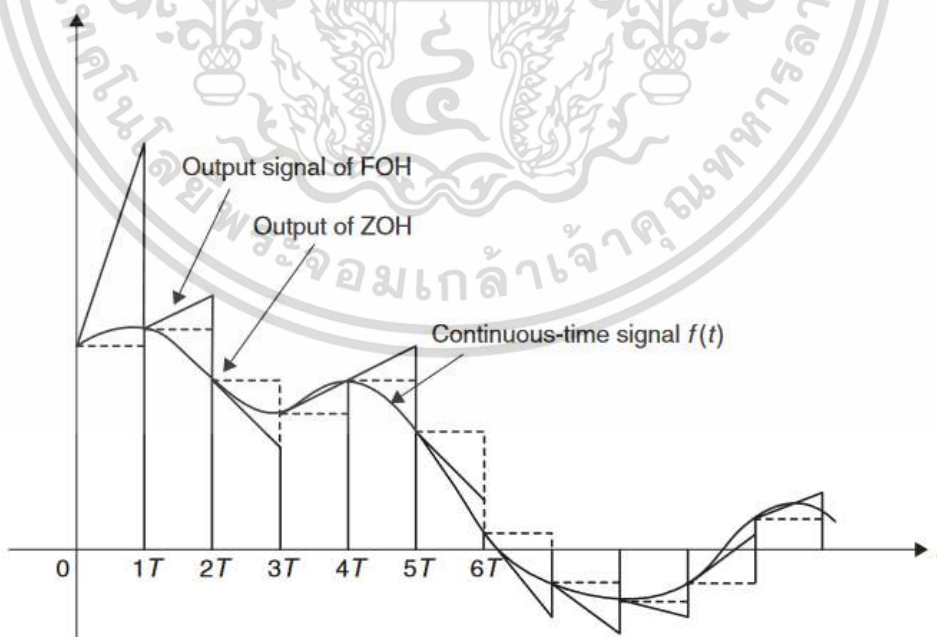
$$g_{H1}(t) = 1 + \frac{t}{T} \quad (3.11)$$



รูปที่ 3.8 การตอบสนอง FOH: (ก) สัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย (ข) ผลตอบสนองกลับ

พิจารณารูปที่ 3.8 ที่ตำแหน่ง  $T$  จะถูกแทนด้วยการประมาณดังสมการที่ (3.8) และความชันแทนด้วยผลต่างดังสมการที่ (3.9) ส่งผลต่อรูปสัญญาณมีลักษณะเป็นสามเหลี่ยม ฟังก์ชันถ่ายโอนของการคงค่าอันดับหนึ่ง โดยการทำให้ลาปลาซคือ

$$G_{h1}(s) = \frac{1+Ts}{T} \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \right]^2 \quad (3.12)$$



รูปที่ 3.9 ผลของการคงค่าอันดับศูนย์และหนึ่งต่อสัญญาณอินพุตแบบเวลาต่อเนื่อง

รูปที่ 3.9 แสดงการเปรียบเทียบผลการตอบสนองกลับระหว่างการคงค่าอันดับศูนย์และการคงค่าอันดับหนึ่ง จาก [5] จะเห็นว่าทั้งสัญญาณเอาพุตของการคงค่าอันดับศูนย์และการคงค่าอันดับหนึ่งมีความต่างระหว่างสัญญาณเมื่อเทียบกับสัญญาณอินพุต จึงมีการนำเสนอการหาพื้นที่ใต้กราฟเรียกว่าวิธีแปลงเชิงเส้นคู่เพื่อลดความต่างระหว่างสัญญาณดังจะกล่าวในหัวข้อต่อไป

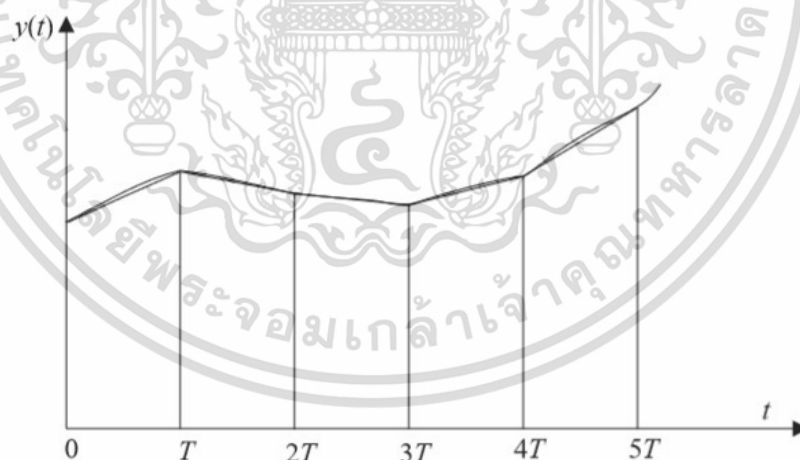
### 3.5 การแปลงเชิงเส้นคู่

วิธีแปลงเชิงเส้นคู่ หรือเรียกว่าวิธีการทาสตินเป็นการประมาณค่าพื้นที่ใต้กราฟ จาก [2] โดยการอินทิเกรตระหว่างคาบเวลา  $T$

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt = \frac{1}{2} [y(kT) + y((k-1)T)] T \quad (3.13)$$

และ

$$\int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt = \frac{1}{2} [x(kT) + x((k-1)T)] T \quad (3.14)$$



รูปที่ 3.10 การประมาณพื้นที่ใต้เส้นโค้งด้วยวิธีการทาสติน

กำหนดให้

$$y(kT) - y([k-1]T) = -a \int_{(k-1)T}^{kT} y(t) dt + a \int_{(k-1)T}^{kT} x(t) dt \quad (3.15)$$

เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

เขียนในรูปสมการได้เป็น

$$y(kT) = y([k-1]T) - \frac{aT}{2} [y((k-1)T)] + \frac{aT}{2} [x(kT) + x((k-1)T)] \quad (3.16)$$

ทำการแปลง  $z$  ได้ว่า

$$y(z) = z^{-1}y(z) - \frac{aT}{2} [y(z) + z^{-1}y(z)] + \frac{aT}{2} [x(z) + z^{-1}x(z)] \quad (3.17)$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = H_D(z) = \frac{a}{(2/T)(1-z^{-1})/(1+z^{-1}) + a} \quad (3.18)$$

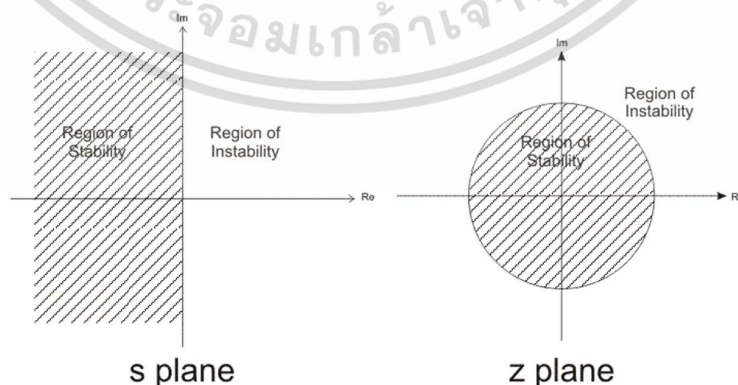
ดังนั้นจะได้ฟังก์ถ่ายโอนดังสมการที่ (3.16)

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] \quad (3.19)$$

ทำการแปลงระนาบ  $s$  ไปยังขอบเขตของระนาบ  $z$  ดังสมการที่ (3.20)

$$\operatorname{Re} \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \operatorname{Re} \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] < 0 \quad (3.20)$$

ซึ่งเป็นวงกลมหนึ่งหน่วยบนระนาบ  $z$  ดังนั้นการแปลงเชิงเส้นคู่ทั้งหมดอยู่ในวงกลมหนึ่งหน่วย ศูนย์กลางที่จุดกำเนิดหมายความว่าสัญญาณแบบไม่ต่อเนื่องทางเวลาเสถียรเช่นกัน ดังรูปที่ 3.11



รูปที่ 3.11 การแปลงระหว่างระนาบ  $s$  กับระนาบ  $z$

### 3.6 ความถี่พรีวาร์ป (Frequency pre-warping)

การแปลงตำแหน่งโพลและซีโรระหว่างระนาบ  $s$  และระนาบ  $z$  บางครั้งอาจจะไม่ได้อยู่ในขอบเขตของแต่ละระนาบมีความบิดเบือนเกิดขึ้นเรียกว่าความถี่วาร์ปถือเป็นจุดด้อยอย่างหนึ่งของการแปลงเชิงเส้นคู่คือไม่สามารถรักษาค่าตำแหน่งเฟสเอาไว้ได้ หากเราทราบรูปแบบหรือความถี่ที่ทำให้เกิดการบิดเบือนของเฟสสามารถแก้ไขได้โดยเทคนิคพรีวาร์ปแทนด้วยสมการที่ (3.20)

$$\omega_p = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (3.21)$$

เมื่อ  $p$  คือความถี่พรีวาร์ป

จากความสัมพันธ์ ( $z = e^{sT}$ ) ระหว่างระนาบ  $s$  และระนาบ  $z$  ในรูปที่ 3.11 จะได้

$$s \cong \frac{2}{T} \left[ \frac{z-1}{z+1} \right] = \frac{2}{T} \left[ \frac{e^{sT}-1}{e^{sT}+1} \right] \quad (3.22)$$

แทน  $s = j\omega_A$  ในสมการที่ (3.22)

$$s = j\omega_A \cong \frac{2}{T} \left( \frac{e^{j\omega_D T} - 1}{e^{j\omega_D T} + 1} \right) = \frac{2}{T} \left\{ \frac{2j \left[ \frac{\sin(\omega_D T / 2)}{(e^{j\omega_D T / 2} - e^{-j\omega_D T / 2}) / 2j} \right]}{2 \left[ \frac{\cos(\omega_D T / 2)}{(e^{j\omega_D T / 2} + e^{-j\omega_D T / 2}) / 2} \right]} \right\} \quad (3.23)$$

$$j\omega_A = j \frac{2}{T} \tan(\omega_D T / 2), \quad 2/T = \omega_A / \tan(\omega_D T / 2)$$

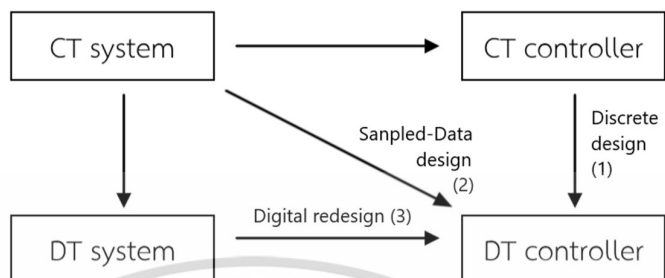
แทน  $2/T = \omega_A / \tan(\omega_D T / 2)$  ในสมการที่ (3.19) จะได้

$$s = \left( \frac{\omega_o}{\tan(\omega_o T / 2)} \right) \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (3.24)$$

เมื่อ  $\omega_o = \omega_A = \omega_D$  จาก [9]

### 3.7 ตัวควบคุมพีไอดีแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

จากรูปที่ 1.2 สามารถออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่องได้ 3 วิธี ใน [6] คือ



รูปที่ 3.12 แนวทางการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

วิธีที่ 1 เรียกว่า การออกแบบที่ไม่ต่อเนื่อง (Discrete design) เริ่มต้นจากออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาต่อเนื่องจากสัญญาณเริ่มต้นและแปลงเป็นตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวงจรแบ่งสัญญาณ (Discretization)

วิธีที่ 2 เรียกว่า การออกแบบจากข้อมูลตัวอย่าง (Sampled-Data design) ออกแบบตรงจากระบวนการแบบเวลาต่อเนื่องเป็นตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่องโดยใช้เทคนิคลิฟต์ติ้ง (Lifting technic) ซึ่งวิธีนี้ซับซ้อนและในบางกรณีไม่อาจใช้เครื่องมือทั่วไปคำนวณได้

วิธีที่ 3 เรียกว่า การออกแบบตัวควบคุมดิจิทัล (Digital redesign) ขั้นแรกคือขั้นตอนการออกแบบตัวควบคุมแบบเวลาต่อเนื่องจากระบบเวลาต่อเนื่อง ขั้นที่สองคือใช้วงจรแบ่งสัญญาณ (Discretization) แปลงเป็นตัวควบคุมแบบเวลาไม่ต่อเนื่องซึ่งมีประสิทธิภาพและใช้งานง่าย งานวิจัยนี้ใช้วิธีการที่ 3 สำหรับขั้นแรก เรียกว่า ขั้นตอนการออกแบบ (Design step) ขั้นที่สอง เรียกว่า ขั้นตอนการอิมพลีเมนต์ ซึ่งสามารถใช้วิธีการทาสติน, การคงค่าอันดับศูนย์, วิธีออยเลอร์ (Euler method), วิธีแมทโพล-ซีโร (Match pole-zero method) และวิธีอื่น

หลังจากได้กล่าวถึงพื้นฐานการควบคุม ทฤษฎีวงจรแปลงสัญญาณ ในบทที่ 4 เป็นการประยุกต์ใช้สำหรับการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอ

## บทที่ 4

# การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วย วิธีการทาสตินทั้งที่มีและไม่มีควมถึพรีวาบปีง

ในบทนี้กล่าวถึงการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่องสำหรับระบบอันดับสาม ด้วยวิธีการทาสตินทั้งที่มีและไม่มีควมถึพรีวาบปีง พร้อมทั้งเปรียบเทียบเส้นทางเดินของรากและ ผลตอบสนองกลับของระบบ

### 4.1 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสติน

ตัวควบคุมพีไอดีเอถูกออกแบบมาใช้กับกระบวนการอันดับสามโดยมีพื้นฐานมาจากตัวควบคุมพีไอดีเอโดยการเพิ่มหนึ่งซีโรให้กับตัวควบคุม ซึ่งงานวิจัยฉบับนี้ใช้วิธีทาสตินในกระบวนการแปลงตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง

ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องคือ

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s + K_a s^2 \quad (4.1)$$

แทนสมการที่ (3.19) ลงใน (4.1) จะได้

$$\begin{aligned} K(z) &= K(s) \Big|_{s=\frac{2(z-1)}{T(z+1)}} \\ &= K_p + \frac{K_i}{\left\{ \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right\}} + K_d \left\{ \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right\} + K_a \left\{ \frac{2(z-1)}{T(z+1)} \right\}^2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

เมื่อ  $K_p, K_i, K_d$  และ  $K_a$  คือ อัตราการขยายของตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง ทำการกระจายพจน์และจัดให้อยู่ในรูปแบบ Observable canonical form ดังสมการที่ (4.3)

$$K(z) = \frac{\beta_3 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z+1)(z+1)} \quad (4.3)$$

แก้สมการโดยใช้เวกเตอร์ เมตริกซ์,  $Ax=b$  โดยวางสัมประสิทธิ์ของตัวแปรกำลังสูงไว้บนสุดของเมตริกซ์ ดังสมการที่ (4.4)

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2T^2} \begin{bmatrix} 2T^2 & T^3 & 4T & 8 \\ 2T^2 & 3T^3 & -4T & -24 \\ -2T^2 & 3T^3 & -4T & 24 \\ -2T^2 & T^3 & 4T & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

จากตัวควบคุมพีเอทีเอแบบเวลาต่อเนื่องในสมการที่สามารถแปลงเป็นตัวควบคุมพีเอทีเอ โดยใช้วิธีการทาสตินด้วยคาบเวลาการซิกตัวอย่างที่  $T = 1 / 500 \text{ sec.} / \text{samples}$  ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{\beta_3 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z+1)(z+1)} \\ &= \frac{10^8 (0.6049z^3 - 1.8117z^2 + 1.8086z - 0.6018)}{(z^3 + z^2 - z - 1)} \\ &= \frac{6.049 \times 10^7 (z - 0.9983)(z - 0.9983 \pm j0.0017)}{(z-1)(z+1)(z+1)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

สำหรับกระบวนการใช้วิธีการเดียวกับการออกแบบตัวควบคุมพีเอทีเอ โดยจากสมการที่ (2.39) ฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการคือ

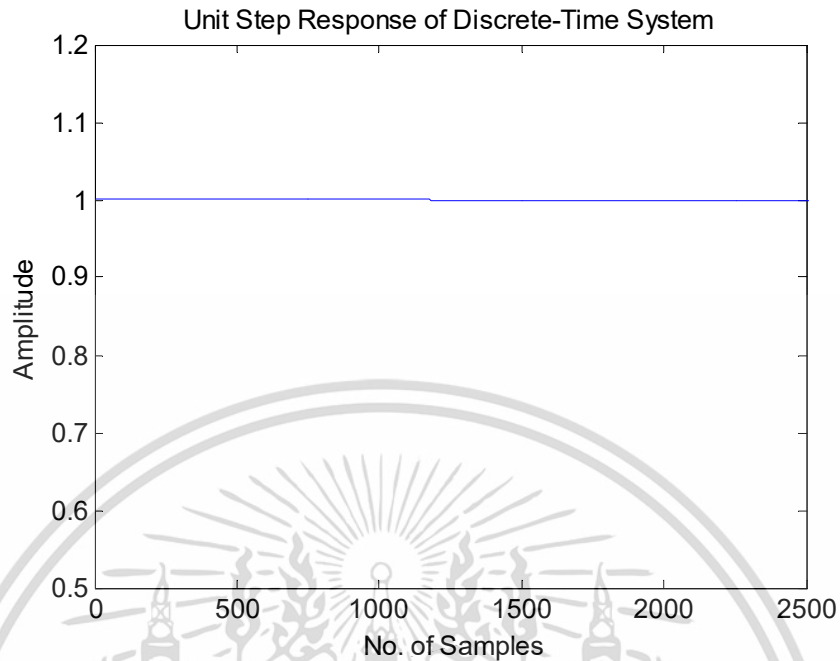
$$G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (2.39)$$

โดยใช้วิธีการทาสตินสำหรับแปลงกระบวนการแบบเวลาต่อเนื่องเป็นการบวนการแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนคือ

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2T^2 & T^3 \\ 2T^2 & 3T^3 \\ -2T^2 & 3T^3 \\ -2T^2 & T^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 8 & 4T & 2T^2 & T^3 \\ -24 & -4T & 2T^2 & 3T^3 \\ 24 & -4T & -2T^2 & 3T^3 \\ -8 & 4T & -2T^2 & T^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}} \quad (4.6)$$

สามารถแปลงกระบวนการแบบเวลาไม่ต่อเนื่องโดยใช้วิธีการทาสตินด้วยคาบเวลาการซิกตัวอย่างที่  $T = 1 / 500 \text{ sec.} / \text{samples}$  ดังนั้นฟังก์ชันถ่ายโอนคือ





รูปที่ 4.2 ผลการตอบสนองกลับของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย

#### 4.2 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีหาค่าที่ไม่มีควมถี่พรีวาปปีง

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้นิยามคำว่า ไม่มีควมถี่พรีวาปปีง คือ  $\omega_n = \omega_0$  และยังคงใช้ควมถี่พรีวาปปีงร่วมกับวิธีหาค่า ดังนั้นจากที่กล่าวในบทที่ 3 สมการควมถี่พรีวาปปีงแทนด้วย

$$s = \left( \frac{\omega_0}{\tan(\omega_0 T / 2)} \right) \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (4.8)$$

แทนสมการที่ (4.8) ลงใน (2.40) จะได้

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \omega_0 m^2 & m^3 \\ \omega_0 m^2 & 3m^3 \\ -\omega_0 m^2 & 3m^3 \\ -\omega_0 m^2 & m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \omega_0^3 & \omega_0^2 m & \omega_0 m^2 & m^3 \\ -3\omega_0^3 & -\omega_0^2 m & \omega_0 m^2 & 3m^3 \\ 3\omega_0^3 & -\omega_0^2 m & -\omega_0 m^2 & 3m^3 \\ -\omega_0^3 & \omega_0^2 m & -\omega_0 m^2 & m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}} \quad (4.9)$$

สมการที่ (4.9) คือฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสติน ทั้งที่ไม่มีควมถึพรีวาปั้ง

แทนสมการที่ (4.8) ลงใน (2.41) แก้สมการโดยใช้เวกเตอร์ เมตริกซ์,  $Ax=b$  โดยวาง สัมประสิทธิ์ของตัวแปรกำลังสูงไว้บนสุดของเมตริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \left( \frac{1}{\omega_0 m^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_0 m^2 & m^3 & \omega_0^2 m & \omega_0^3 \\ \omega_0 m^2 & 3m^3 & -\omega_0^2 m & -3\omega_0^3 \\ -\omega_0 m^2 & 3m^3 & -\omega_0^2 m & 3\omega_0^3 \\ -\omega_0 m^2 & m^3 & \omega_0^2 m & -\omega_0^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

โดย  $m = \tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right)$ ,  $\omega_0 = \text{critical frequency}$ ,  $T = \text{sampling time}$

เมื่อ  $T = 1/500 \text{ sec./samples}$

$$\omega_0 = \omega_n$$

สมการที่ (4.10) คือฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีเอการแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินร่วมทั้งที่ไม่มีควมถึพรีวาปั้ง

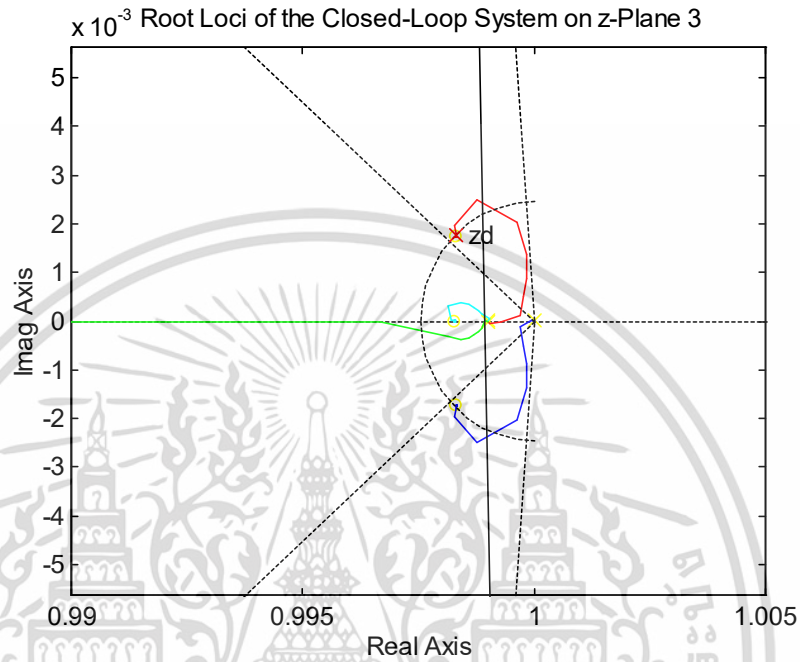
ฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินทั้งที่ไม่มีควมถึพรีวาปั้ง ( $\omega_0 = \omega_n$ ) คือ

$$\begin{aligned} G(z) &\cong \frac{10^{-8}(0.0924z^3 + 0.2771z^2 + 0.2771z + 0.0924)}{(1.8501z^3 - 5.5446z^2 + 5.5391z - 1.8445)} \\ &\cong \frac{4.9925 \times 10^{-10}(z+1)(z+1)(z+1)}{(z-0.999)(z-0.999)(z-0.999)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

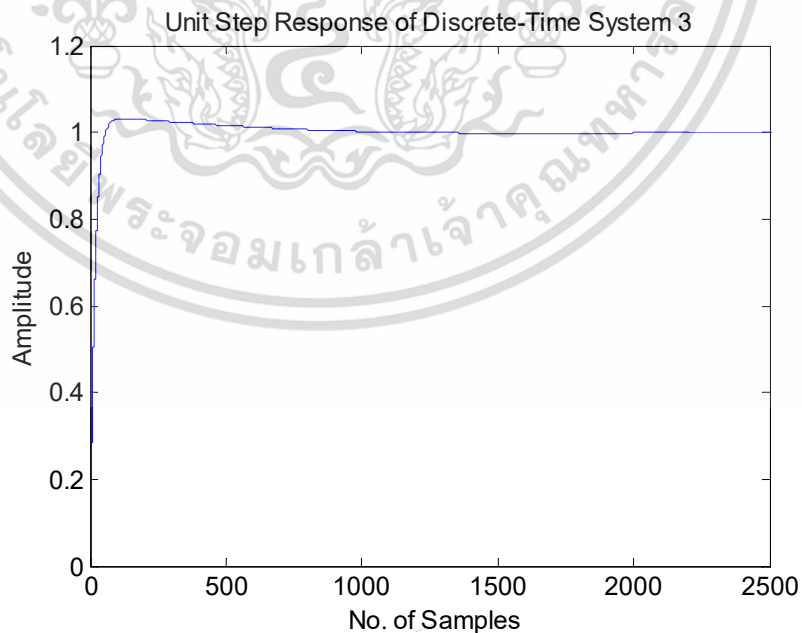
ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีเอการแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินทั้งที่ไม่มีควมถึพรีวาปั้ง ( $\omega_0 = \omega_n$ ) คือ

$$\begin{aligned} K(z) &\cong \frac{\beta_3 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z+1)(z+1)} \\ &\cong \frac{10^8(0.6049z^3 - 1.8117z^2 + 1.8086z - 0.6018)}{(z^3 + z^2 - z - 1)} \\ &\cong \frac{6.049 \times 10^7(z-0.9983)(z-0.9983 \pm j0.0017)}{(z-1)(z+1)(z+1)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

พิจารณาเส้นทางเดินขรอกและผลตอบสนองของระบบวงปิดแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินทั้งที่ไม่มีควมถี่ พรีวาปบั้ง ( $\omega_0 = \omega_n$ ) ดังรูปที่ 4.3 เทียบกับรูปที่ 4.1 และรูปที่ 4.4 เทียบกับ รูปที่ 4.2 พบว่าให้ผลเหมือน กันเนื่องจาก  $\omega_0 = \omega_n$  ตามลำดับ



รูปที่ 4.3 เส้นทางเดินขรอกของระบบวงปิดบนระนาบ  $z$  ที่  $\omega_0 = \omega_n$



รูปที่ 4.4 ผลการตอบสนองกลับของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย ที่  $\omega_0 = \omega_n$

### 4.3 การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีทาสตินทั้งที่มีความถี่พรีวาปั้ง

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้ให้นิยามคำว่า ทั้งที่มีความถี่พรีวาปั้ง คือ  $\omega_0 = 1000\omega_n$  และยังคงใช้ความถี่พรีวาปั้งร่วมกับวิธีทาสติน

จากสมการที่ 4.9 ฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสติน ทั้งที่มีความถี่พรีวาปั้งที่  $\omega_0 = 1000\omega_n$  คือ

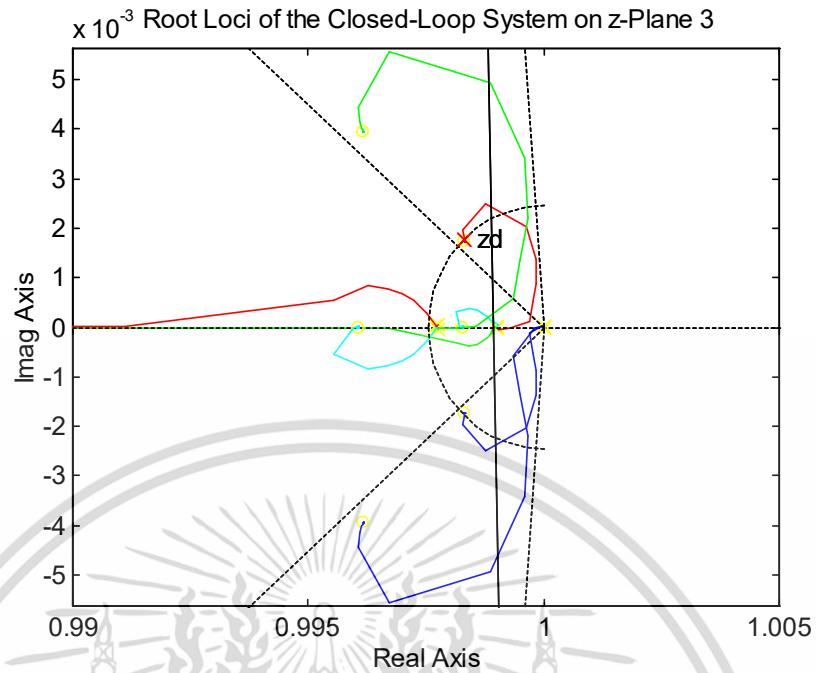
$$\begin{aligned} G(z) &\cong \frac{10.8961z^3 + 32.6882z^2 + 32.6882z + 10.8961}{10^9(1.8536z^3 - 5.5482z^2 + 5.5355z - 1.8410)} \\ &\cong \frac{5.8783 \times 10^{-9}(z+1)(z+1)(z+1)}{(z-0.9977)(z-0.9977)(z-0.9977)} \end{aligned} \quad (4.13)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนของตัวควบคุมพีไอดีแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินทั้งที่มีความถี่พรีวาปั้งที่  $\omega_0 = 1000\omega_n$  คือ

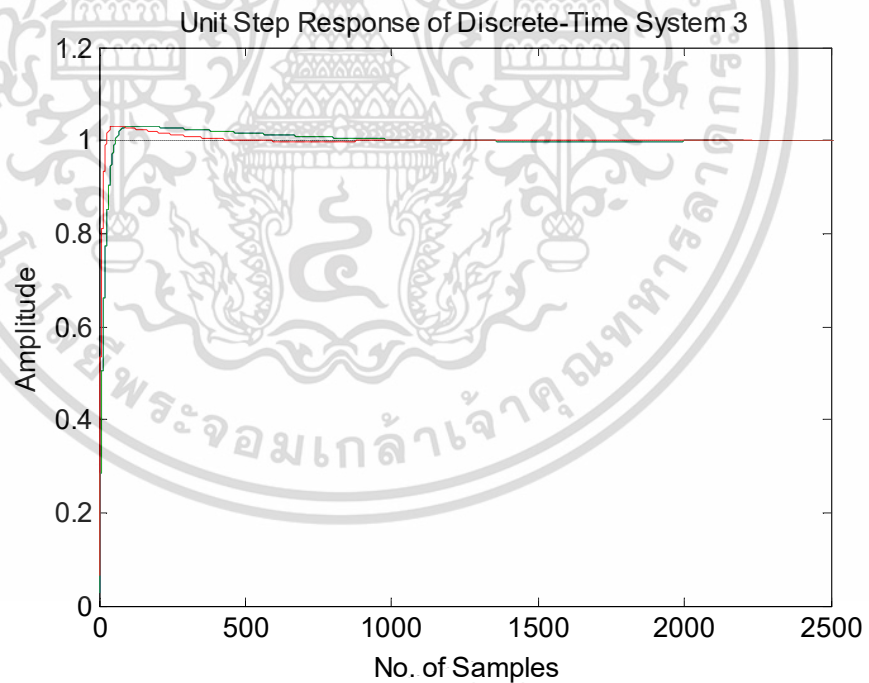
$$\begin{aligned} K(z) &\cong \frac{\beta_3 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z+1)(z+1)} \\ &\cong \frac{10^7(1.1711z^3 - 3.4997z^2 + 3.4863z - 1.1576)}{(z^3 + z^2 - z - 1)} \\ &\cong \frac{1.1711 \times 10^7(z-0.9961)(z-0.9962 \pm j0.0039)}{(z-1)(z+1)(z+1)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

พิจารณารูปที่ 4.5 เป็นการเปรียบเทียบเส้นทางเดินของรากของระบบวงปิดแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินระหว่างทั้งที่มีและไม่มีค่าพรีวาปั้ง พบว่าตำแหน่งของซีโรห่างออกจากแกนจินตภาพที่ตำแหน่งเดิม ส่งผลต่อทางเดินของรากที่เปลี่ยนไป

ในขณะที่รูปที่ 4.6 เป็นผลการตอบสนองกลับของระบบวงปิดแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินระหว่างทั้งที่มีและไม่มีค่าพรีวาปั้งต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย สังเกตว่าการใช้ค่าพรีวาปั้งนั้นทำให้ช่วงเวลาเข้าที่ ( $t_s$ ) ลดลงเล็กน้อยและไม่ส่งผลต่อเปอร์เซ็นต์ค่าพุงเกิน ( $P.O.$ ) เนื่องจากความสัมพันธ์ระหว่างความถี่ธรรมชาติ ( $\omega_n$ ) และอัตราหน่วง ( $\zeta$ ) ในสมการที่ (2.20) ส่งผลต่อตำแหน่งโพลเด่นในสมการที่ (2.21)



รูปที่ 4.5 เส้นทางเดินรากของระบบวงปิดบนระนาบ  $z$  ที่  $\omega_0 = 1000\omega_n$



รูปที่ 4.6 ผลการตอบสนองกลับของระบบต่อสัญญาณขั้นหนึ่งหน่วย ที่  $\omega_0 = 1000\omega_n$

# บทที่ 5

## สรุปผลการวิจัย

### 5.1 บทสรุป

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์ในการนำเสนอระเบียบวิธีการออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่องด้วยวิธีการทาสตินทั้งที่มีและไม่มีควมถี่พรีวาปึง พร้อมทั้งเปรียบเทียบเส้นทางเดินของรากและผลการตอบสนองของระบบ มีขั้นตอนดังนี้

#### 5.1.1 ขั้นตอนการออกแบบ

1. กำหนดผลตอบสนองของระบบและหาฟังก์ชันถ่ายโอนของกระบวนการ
2. คำนวณอัตราขยาย  $K_p, K_i, K_d$  และ  $K_a$  โดยใช้เทคนิคการวางโพลตามแนวคิดของ Richard C. Dorf และใช้เวกเตอร์ เมตริกซ์แก้ปัญหาคณิตศาสตร์

#### 5.1.2 ขั้นตอนการอิมพลีเมนต์

1. ใช้วิธีการทาสตินแปลงกระบวนการและตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาต่อเนื่องเป็นแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง
  2. การใช้และไม่ใช้ควมถี่พรีวาปึงในวิธีการทาสติน
- จากผลการทดลองพบว่าการใช้ควมถี่พรีวาปึงในวิธีการทาสตินที่  $\omega_0 = 1000\omega_n$  นั้นทำให้ช่วงเวลาเข้าที่ ( $t_s$ ) ลดลงและไม่ส่งผลต่อค่าตอบสนองสูงสุด ( $P.O.$ ) เมื่อเปรียบเทียบกับกรณีที่ไม่ใช้ควมถี่พรีวาปึง

### 5.2 ข้อเสนอแนะและแนวทางการพัฒนา

วิทยานิพนธ์เล่มนี้เป็นการจำลองกระบวนการและทดสอบโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เท่านั้น ซึ่งอาจนำไปใช้ทดสอบกับกระบวนการจริง สังเกตผลกระทบและประสิทธิภาพการทำงานของตัวควบคุมเพื่อนำไปปรับปรุงให้ดียิ่งขึ้น รวมถึงการศึกษาซีโร-โพลแมชชิง (Zero-pole matching) ซึ่งเป็นอีกหนึ่งวิธีการแปลงระบบแบบเวลาไม่ต่อเนื่องเป็นแบบเวลาต่อเนื่องในลำดับต่อไป

## เอกสารอ้างอิง

- [1] นำชัย นาควิฑูรย์. 2560. “สูตรสำเร็จสำหรับการหาค่าพารามิเตอร์ของตัวควบคุม PIDA แบบเวลาต่อเนื่องและแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง.” วิทยานิพนธ์วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [2] ประไพศรี ละอองศรี. 2558. “การออกแบบตัวควบคุมพีไอดีเอแบบเวลาไม่ต่อเนื่อง โดยวิธีการของ รศ.ดร.กตติ ตีรเศรษฐ ด้วยการใช้การแปลงสัญญาณแบบโพลีเนียร์.” วิทยานิพนธ์ วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิศวกรรมอัตโนมัติ, สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง.
- [3] Amos Albert, “Comparison of Event-Triggered and Time-Triggered Concepts with Regard to Distributed Control Systems,” *Embedded World 2004*, pp.235-252, Nürnberg, 17.-19.02.2004.
- [4] Charles L. Phillips, H. Troy Nagle, JR., “**Digital Control System Analysis and Design.**,” Englewood Cliffs: N.J., Prentice Hall, INC., 1984
- [5] Fang Lin Luo, Hong Ye, Muhammad Rashid, “**Digital Power Electronics and Applications,**” First Edition, Academic Press, September 2005
- [6] Guisheng Zhai, Takaaki Norisada, Joe Imae and Tomoaki Kobayashi, “**An Extension of Generalized Bilinear Transformation for Digital Redesign,**” *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, pp.4071-4081,
- [7] Maruthai Suresh, Gunna Jeersamy Srinivasan and Ranganathan Rani Hemamalini, “**Integrated Fuzzy Logic Based Intelligent Control of Three Tank System,**” *Serbian Journal of Electrical Engineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 1-14, May 2009.
- [8] Seul Jung and Richard C. Dorf, “**Novel Analytic Technique for PID and PIDA Controller Design,**” *Proceedings of the 13<sup>th</sup> Triennial World Congress, IFAC (International Federation of Automatic Control)*, pp. 1146-1151, San Francisco, USA, 30<sup>th</sup> June– 5<sup>th</sup> July 1996.
- [9] The MathWorks, Inc., Control System Toolbox, User’s Guide, Version 4.2, pp. 3-23, January, 1999. Vol.8, No.6, June 2012.



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

ภาคผนวก ก.

ผลงานวิจัยที่ได้รับการตีพิมพ์เผยแพร่

Prapart Ukakimaparn, Mathee Khwunthong, Thanit Trisuwannawat and  
Pittaya Pannil

Discrete-Time PIDA Controller Designed by Tustin's Method with and without  
Frequency Pre-warping

2018 3rd International Conference on Control and Robotics Engineering,  
ICCRE2018

Apr. 20-23, 2018, Nagoya Institute of Technology, Japan



เอกสารนี้เป็นเอกสารที่สงวนไว้สำหรับการใช้งานเพื่อการศึกษาเท่านั้น ไม่อนุญาตให้นำไปใช้ประโยชน์ด้านการค้า  
ไม่ว่ากรณีใดๆ ทั้งสิ้น อีกทั้งห้ามมิให้ดัดแปลงเนื้อหา และต้องอ้างอิงถึงเจ้าของเอกสารทุกครั้งที่มีการนำไปใช้

# Discrete-Time PIDA Controller Designed by Tustin's Method with and without Frequency Pre-warping

Prapart Ukakimaparn, Mathee Khwunthong, Thanit Trisuwannawat and Pittaya Pannil

Department of Instrumentation and Control Engineering, Faculty of Engineering  
King Mongkut's Institute of Technology Ladkrabang  
Bangkok, Thailand

e-mail: pittaya.pa@kmitl.ac.th, teenaja.asm@hotmail.com, thanit.tr@kmitl.ac.th, prapart.uk@kmitl.ac.th

*Abstract*-This paper proposes the formula used for finding the continuous-time PIDA (Proportional-Integral-Derivative-Acceleration) controller's parameters based on pole placement technique. Also, provide the formulas for designing the discrete-time PIDA controllers for both of Tustin's method with and without frequency pre-warping. The designers can use the frequency pre-warping to get the better specification as desired. Moreover, as both of these discrete-time PIDA controllers, their transfer functions are proper. Then, they are easy to implement in real-time by the Observable Canonical Form of the difference equations.

**Keywords**-component; PIDA controller; pole placement; Tustin's method with and without frequency pre-warping

## I. INTRODUCTION

A well know PIDA (Proportional-Integral-Derivative-Acceleration) controller in [1, 2] are firstly introduced by Seul Jung and Richard C. Dorf, who had hold the PIDA controller's patent in 1996. By adding one more zero to the conventional PID (Proportional-Integral-Derivative) controller, then the PIDA controller is composed by three zeros and one pole at the origin. Recently, three generations of the discrete-time PIDA controller designed by Kitti's method; a technique of zeros placement based on the root locus approach are proposed in [3, 4, and 5]. While, [6] is the continuous / discrete-time PIDA controllers designed by using a pole placement technique to formulate the formulas for finding the controllers' parameters via polynomial approach. Nowadays, almost of the controllers to be designed or used are discrete-time controller, but the plants to be controlled are always continuous-time systems.

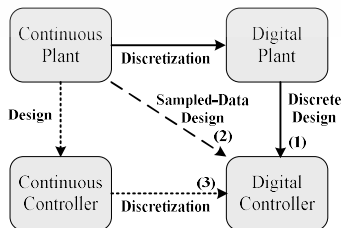


Figure 1. Three categories in digital controller design.

To design the discrete-time PIDA controller in this paper will use the third method or route 3 in Fig.1 from [7], also

call *digital redesign*, which is composed of two steps. The first step is called the *design step*, where the continuous-time controller is designed for the analog system. The second step is called the *implementation step*, where the continuous-time controller is discretized by using Tustin's method for both of with and without frequency pre-warping in order to obtain a discrete-time controller.

## II. METRODOLOGY

In general, there are 2 steps for the design procedure of control system as the plant modeling and controller design.

### A. Problem Statement

The problem statement of the PIDA controller design is to find the PIDA controller's parameters  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ , and  $K_a$ , respectively, for a given 3<sup>rd</sup> order plant, such that the desired specifications are acceptably achieved.

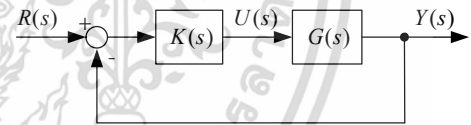


Figure 2. Feedback control system.

The closed-loop transfer function of a negative feedback control system in Fig.2 can be written as follows:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}, \quad (1)$$

where,  $R(s)$ =reference input, or desired output  
 $Y(s)$ =controlled output,  
 $K(s)$ =controller transfer function,  
 $G(s)$ =plant transfer function.

The characteristic equation of the closed-loop system in the denominator is defined as;

$$F(s) = 1 + K(s)G(s) = 0. \quad (2)$$

To design the controller  $K(s)$  by using the root locus technique, since  $K(s)G(s)$  is a complex quantity, hence, (2) can be split into two equations as follows,

● Angle Condition:

$$\angle K(s)G(s) = \pm(2k+1)\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

● Magnitude Condition:

$$|K(s)G(s)| = 1. \quad (4)$$

The desired specifications to be designed are usually specified in terms transient and steady state response characteristics of the control system with a unit step input, so that the output is exhibited by a pair of complex-conjugate dominant closed-loop poles  $s_d$  as follows:

$$\begin{cases} \text{Percent Overshoot (P.O.)} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\%, \\ \text{settling time (} t_s \text{)} = -\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2}) / \zeta\omega_n, (\pm 2\%). \end{cases} \quad (5)$$

Let, the 3<sup>rd</sup> order plant to be controlled is come from [8] as shown in Fig.3; its transfer function is given as follows:

$$\begin{cases} G(s) = \frac{H_3(s)}{F_1(s)} = \frac{R_3}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}, \\ = \frac{4}{(2s+1)(2s+1)(2s+1)}; \left( R \left( \frac{m}{m^3/s} \right) \right). \end{cases} \quad (6)$$

where  $H_3(s)$  and  $F_1(s)$  denote a liquid level in tank3 and tank1 inflowing liquid, respectively.

The desired specifications to be designed are;

$$\begin{cases} \text{Percent Overshoot; (P.O.)} = 5\%, \\ \text{settling time; } t_s (\pm 2\%) = 5 \text{ secs.} \end{cases} \quad (7)$$

From the given percent overshoot, the damping ratio is

$$\zeta = \sqrt{\ln\left(\frac{P.O.}{100}\right)^2 / \left\{ \pi^2 + \ln\left(\frac{P.O.}{100}\right)^2 \right\}} = 0.69, \quad (8)$$

and from the given settling time  $\{t_s(\pm 2\%)\}$ , then the undamped natural frequency is

$$\omega_n = -\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2}) / \zeta t_s = 1.227 \text{ rad/sec.} \quad (9)$$

Then, the location of the dominant closed-loop pole is

$$s_d = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -0.847 + j0.888. \quad (10)$$

**B. Continuous-time PIDA controller design**

Let, the 3<sup>rd</sup> order plant  $G(s)$  and the PIDA controller  $K(s)$ , their transfer functions are assumed to be given as:

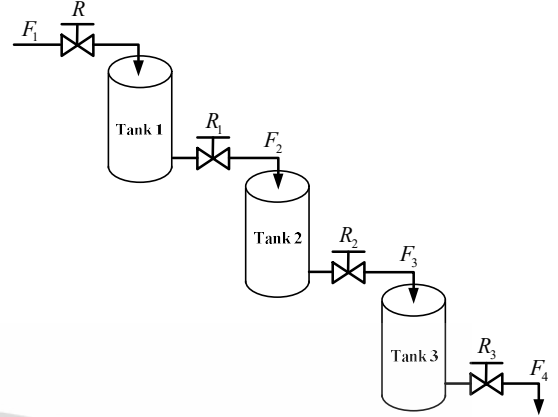


Figure 3. Three tanks non-interacting system.

$$\begin{cases} G(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \\ K(s) = \frac{K_p s + K_i + K_d s^2 + K_a s^3}{s}. \end{cases} \quad (11)$$

Then, the actual characteristic equation of the closed-loop system can be expressed as follows:

$$\begin{cases} F(s)_{\text{actual}} = 1 + \frac{\{K_p s + K_i + K_d s^2 + K_a s^3\} (b_1 s + b_0)}{s \{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0\}}, \\ \frac{F(s)_{\text{actual}}}{(1 + K_a b_1)} = s^4 + \frac{(a_2 + K_d b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^3 + \dots \\ + \frac{(a_1 + K_p b_1 + K_d b_0)}{(1 + K_a b_1)} s^2 + \dots \\ + \frac{(a_0 + K_i b_1 + K_p b_0)}{(1 + K_a b_1)} s + \dots + \frac{(K_i b_0)}{(1 + K_a b_1)}. \end{cases} \quad (12)$$

Please remember that the problem of PIDA controller design is to find the controller's parameters  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ , and  $K_a$ , respectively. Such that the four roots of actual characteristic equation or the closed-loop poles are arbitrarily placed at the locations to exhibit the output response as desired. Where, the desired locations of these closed-loop poles can be written by the following characteristic equation to be designed as

$$\begin{cases} F(s)_{\text{design}} = (s+q)(s+\hat{q})(s+R)(s+r), \\ = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s+R)(s+r), \\ = s^4 + \{2\zeta\omega_n + (R+r)\} s^3 + \dots \\ + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\} s^2 + \dots \\ + \{\omega_n^2(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\} s + \dots + \omega_n^2 Rr. \end{cases} \quad (13)$$

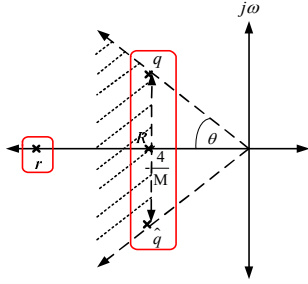


Figure 4. A desired dominant root region and desired closed-loop root locations (\*) in  $s$ -Plane. [2]

For the real poles in the factor  $(s+R)$  and negligible pole  $(s+r)$ , the designer please choose these poles in the region as shown in Fig.4, for example  $R \geq 2\zeta\omega_n$  and  $r \geq R$  to be faster than the poles in quadratic pair  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)$ , so that the response is dominated by the second-order characteristic. By equating the coefficients of like power between each of the last line of (12) and (13), yield:

$$\begin{cases} s^3: \frac{(a_2 + K_d b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \{2\zeta\omega_n + (R+r)\}, \\ s^2: \frac{(a_1 + K_p b_1 + K_a b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\}, \\ s^1: \frac{(a_0 + K_i b_1 + K_p b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \{\omega_n^2(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\}, \\ s^0: \frac{(K_i b_0)}{(1 + K_a b_1)} = \omega_n^2 Rr. \end{cases} \quad (14)$$

This leads to a simple linear system of equations in vector-matrix form;  $Ax = b$ , where:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 & \{b_0 - b_1[2\zeta\omega_n + (R+r)]\} \\ b_1 & 0 & b_0 & -b_1\{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\} \\ b_0 & b_1 & 0 & -b_1\{\omega_n^2(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\} \\ 0 & b_0 & 0 & b_1\omega_n^2 Rr \end{bmatrix}, \\ x = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -a_2 + \{2\zeta\omega_n + (R+r)\} \\ -a_1 + \{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n(R+r) + Rr\} \\ -a_0 + \{\omega_n^2(R+r) + 2\zeta\omega_n Rr\} \\ \omega_n^2 Rr \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (15)$$

Here,  $R$ ,  $r$ ,  $q$  and  $\hat{q}$  are desired root locations with specifications based on the design criteria. While,  $a_2$ ,  $a_1$ ,  $a_0$  and  $b_1$ ,  $b_0$  are known coefficients from the given plant model. Then, the formula for finding  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ , and  $K_a$  for the PIDA controller in (11) is

$$x = [K_p \quad K_i \quad K_d \quad K_a]^T = A^{-1}b. \quad (16)$$

The designers may use Cramer's Rule, instead of finding  $A^{-1}$ . By substituting,  $b_1 = 0$ ,  $b_0 = 0.5$ ,  $a_2 = 1.5$ ,  $a_1 = 0.75$  and  $a_0 = 0.125$  for the plant model, and  $\zeta = 0.69$ ,  $\omega_n = 1.227$  rad/sec.,  $R = 0.8682$  and  $r = 29.1075$  for the desired specifications to be obtained into (16), yields:

$$x = \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 30.17 \\ 76.811 \\ 87.851 \\ 38.075 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 175.703 \\ 76.15 \\ 153.623 \\ 60.34 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Then, the continuous-time PIDA controller's transfer function designed by using closed form formula in (16) can be expressed as follows:

$$K(s) = \frac{60.34(s + 0.866)(s + 0.84 \pm j0.867)}{s}. \quad (18)$$

The open loop transfer function for the given 3<sup>rd</sup> order plant with the designed PIDA controller is

$$K(s)G(s) = \frac{60.34(s + 0.866)(s + 0.84 \pm j0.867)0.5}{s(s + 0.5)(s + 0.5)(s + 0.5)} \quad (19)$$

The root loci and unit step response for the system with open loop transfer function in (19) are shown in Fig.5 and Fig.6, respectively.

### C. Discrete-time PIDA controller design

In order to design the discrete-time PIDA controller, this paper uses the bilinear transformation to maps from  $s$ -plane to  $z$ -plane using the following relation:

$$s = \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right), \quad (20)$$

where  $T$  is the sampling time of discrete-time system.

Hence, the formula for discrete-time PIDA controller can be obtained as follows:

$$\begin{aligned} K(z) = & K_p + \frac{K_i}{\left\{ \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right\}} + \dots \\ & + K_d \left\{ \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right\} + \dots + K_a \left\{ \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \right\}^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Finally, the discrete-time PIDA controller designed by Tustin's method without frequency pre-warping can be written as:

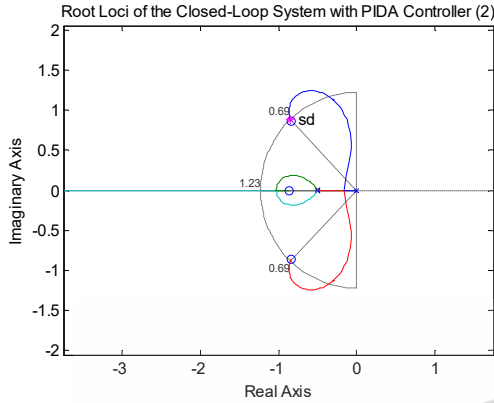


Figure 5. Root loci for open-loop transfer function  $K(s)G(s)$  designed by closed form formula in (19).

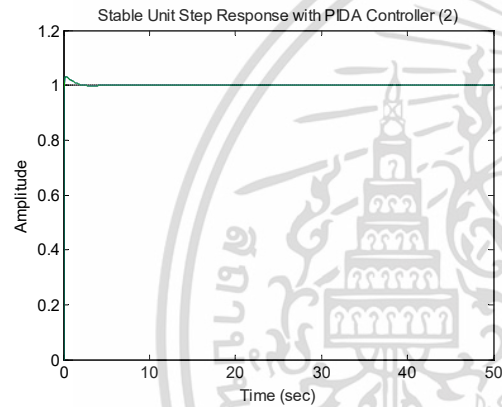


Figure 6. Unit step response of controlled system in (19).

$$K(z) = \frac{\beta_3 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z+1)(z+1)}; \text{ where,} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2T^2} \begin{bmatrix} 2T^2 & T^3 & 4T & 8 \\ 2T^2 & 3T^3 & -4T & -24 \\ -2T^2 & 3T^3 & -4T & 24 \\ -2T^2 & T^3 & 4T & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix}$$

Now, the continuous-time PIDA controller in (18) can be converted by Tustin's method with the sampling time  $T=1/500\text{sec/samples}$  to the discrete-time PIDA controller with the following transfer functions:

$$\begin{cases} K(z) = \frac{\beta_3 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z+1)(z+1)}, \\ = \frac{6.049 \times 10^7 (z-0.9983)(z-0.9983 \pm j0.0017)}{(z-1)(z+1)(z+1)}. \end{cases} \quad (23)$$

However, in order to verify the designed controller, it is necessary to test it with the discrete-time plant, and then the continuous-time plant in (11) will be converted by Tustin's

method to discrete-time in the same way with converting of the controller as follows:

$$G(z) = \frac{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2T^2 & T^3 \\ 2T^2 & 3T^3 \\ -2T^2 & 3T^3 \\ -2T^2 & T^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 8 & 4T & 2T^2 & T^3 \\ -24 & -4T & 2T^2 & 3T^3 \\ 24 & -4T & -2T^2 & 3T^3 \\ -8 & 4T & -2T^2 & T^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}. \quad (24)$$

With the sampling time  $T=1/500\text{sec/samples}$ , the discrete-time plant's transfer functions can be written as:

$$\begin{cases} G(z) \approx \frac{10^{-8} (0.0499z^3 + 0.1498z^2 + 0.1498z + 0.0499)}{z^3 - 2.9970z^2 + 2.9940z - 0.9970}, \\ = \frac{10^{-8} (z+1)(z+1)(z+1)}{(z-0.999)(z-0.999)(z-0.999)}. \end{cases} \quad (25)$$

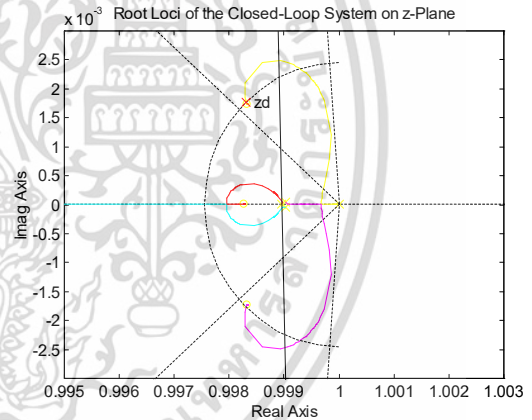


Figure 7. Root loci of closed-loop system on z-Plane.

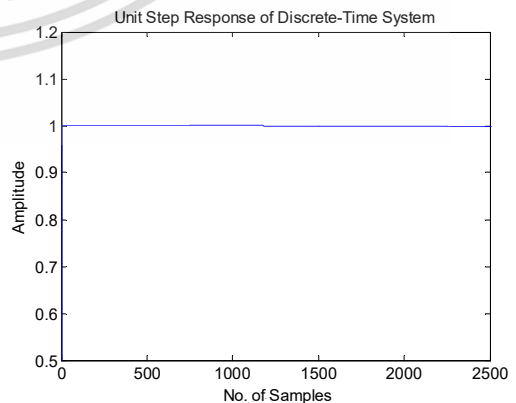


Figure 8. Unit step response of DT-controlled system.

Figure 7 is shown the root loci of the discrete-time controlled system that similar with the root loci of the continuous-time controlled system in Fig.5. While, the unit step response of discrete-time controlled system shown in Fig.8, is better than the case of continuous- time system.

#### D. Discrete-time PIDA controller designed by Tustin's method with frequency pre-warping

In the previous section, the substitution of  $s$  in (20) leads to distortion of frequency response. The distortion can be seen by the real relationship ( $z = e^{sT}$ ) between 's' and 'z' into the mapping:

$$s \cong \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \frac{2}{T} \left( \frac{e^{sT} - 1}{e^{sT} + 1} \right), \quad (26)$$

thus, to obtain frequency responses, substitute  $s=j\omega_A$  into (26), yields

$$\left\{ \begin{aligned} s = j\omega_A &\cong \frac{2}{T} \left( \frac{e^{j\omega_d T} - 1}{e^{j\omega_d T} + 1} \right), \\ &= \frac{2}{T} \left\{ \frac{\sin(\omega_d T / 2)}{2j \left[ \frac{e^{j\omega_d T / 2} - e^{-j\omega_d T / 2}}{2j} \right]}{2 \left[ \frac{e^{j\omega_d T / 2} + e^{-j\omega_d T / 2}}{2} \right]} \right\}, \\ j\omega_A &= j \frac{2}{T} \tan(\omega_d T / 2), 2/T = \omega_A / \tan(\omega_d T / 2). \end{aligned} \right. \quad (27)$$

Substitutes  $2/T = \omega_A / \tan(\omega_d T / 2)$  into (20), yields:

$$s = \left( \omega_0 / \tan(\omega_0 T / 2) \right) (z-1) / (z+1). \quad (28)$$

This change of variable ensures the matching of the continuous-time and discrete-time frequency responses at the frequency  $\omega_0 = \omega_A = \omega_d$  [9].

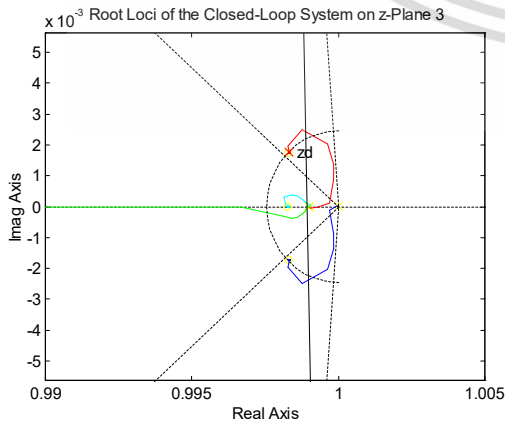


Figure 9. Root loci for  $\omega_0 = \omega_n$ .

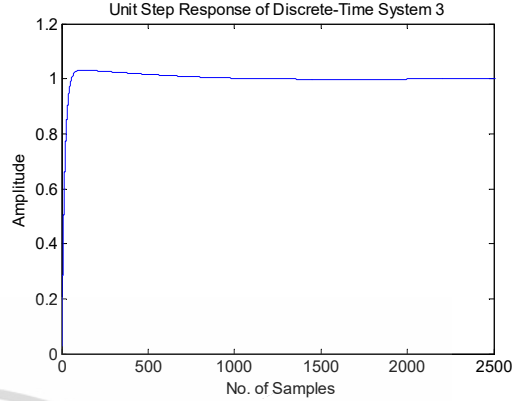


Figure 10. Corresponding unit step response at  $\omega_0 = \omega_n$ .

By substituting (28) into (11), a pair of discrete-time  $G(z)$  and  $K(z)$  by Tustin's method with frequency pre-warping can be achieved as follow:

$$\left\{ \begin{aligned} G(z) &= \frac{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \omega_0 m^2 & m^3 \\ \omega_0 m^2 & 3m^3 \\ -\omega_0 m^2 & 3m^3 \\ -\omega_0 m^2 & m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} z^3 \\ z^2 \\ z \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \omega_0^3 & \omega_0^2 m & \omega_0 m^2 & m^3 \\ -3\omega_0^3 & -\omega_0^2 m & \omega_0 m^2 & 3m^3 \\ 3\omega_0^3 & -\omega_0^2 m & -\omega_0 m^2 & 3m^3 \\ -\omega_0^3 & \omega_0^2 m & -\omega_0 m^2 & m^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}}, \\ K(z) &= \frac{\beta_3 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_1 z + \beta_0}{(z-1)(z+1)(z+1)}, \\ \begin{bmatrix} \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} &= \left( \frac{1}{\omega_0 m^2} \right) \begin{bmatrix} \omega_0 m^2 & m^3 & \omega_0^2 m & \omega_0^3 \\ \omega_0 m^2 & 3m^3 & -\omega_0^2 m & -3\omega_0^3 \\ -\omega_0 m^2 & 3m^3 & -\omega_0^2 m & 3\omega_0^3 \\ -\omega_0 m^2 & m^3 & \omega_0^2 m & -\omega_0^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p \\ K_i \\ K_d \\ K_a \end{bmatrix}, \\ m &= \tan\left(\frac{\omega_0 T}{2}\right), \omega_0 = \text{critical freq.}, T = \text{sampling time.} \end{aligned} \right. \quad (29)$$

With the same of the sampling time  $T=1/500$  sec/samples, while  $\omega_0 = \omega_n$ , the plant and the controller, their transfer functions can be written as follows:

$$\left\{ \begin{aligned} G(z) &\cong \frac{4.9925 \times 10^{-10} (z+1)(z+1)(z+1)}{(z-0.999)(z-0.999)(z-0.999)}, \\ K(z) &\cong \frac{6.0492 \times 10^7 (z-0.9983)(z-0.9983 \pm j0.0017)}{(z-1)(z+1)(z+1)}. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

The root loci for  $\omega_0 = \omega_n$  and corresponding unit step

response are shown in Fig. 9 and Fig.10, respectively. When increase  $\omega_0$  to  $\omega_0=1000\omega_n$ , a pair of transfer functions  $G(z)$  and  $K(z)$  can be written as follows:

$$\begin{cases} G(z) \cong \frac{5.8783 \times 10^{-9} (z+1)(z+1)(z+1)}{(z-0.9977)(z-0.9977)(z-0.9977)}, \\ K(z) \cong \frac{1.1711 \times 10^7 (z-0.9961)(z-0.9962 \pm j0.0039)}{(z-1)(z+1)(z+1)}. \end{cases} \quad (31)$$

The comparing root loci between  $\omega_0=\omega_n$  and  $\omega_0=1000\omega_n$  is shown in Fig.11, while their corresponding unit step responses is shown in Fig.12. Since,  $z_d$  is a representative of the desired specifications, because of it came from  $s_d$  which has the coordinates composed by the following two parameters; damping ratio  $\zeta$  for the desired percent overshoot and  $\zeta, \omega_n$ ; the undamped natural frequency for the desired settling time ( $t_s$ ). So, increasing of the undamped natural frequency  $\omega_n$  at some value of the damping ratio  $\zeta$  means a shorter of the Settling time can be achieved with no effect to the desired percent overshoot at all. From this feature, the desired settling time ( $t_s$ ) can be specified directly in discrete-time domain.

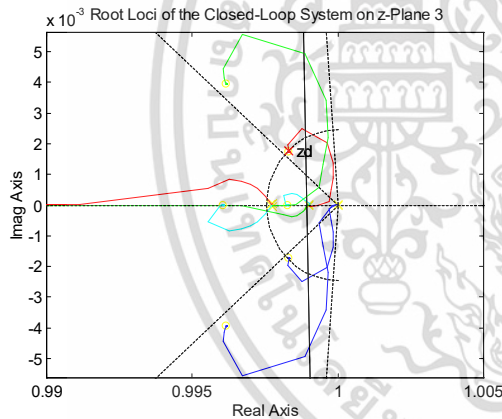


Figure 11. Root loci for  $\omega_0=\omega_n$  and  $\omega_0=1000\omega_n$ .

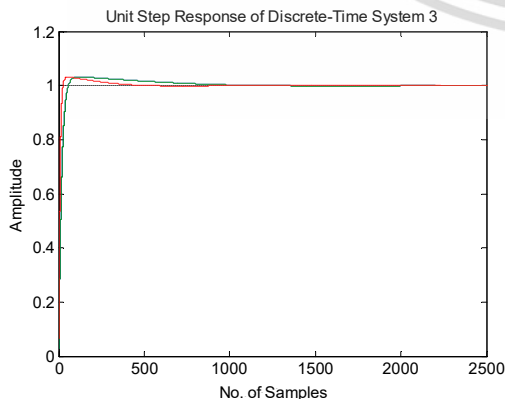


Figure 12. Unit step responses of corresponding RL (Fig.11)

### III. CONCLUSIONS

Most of the desired specifications to be designed for a third order plant cannot obtain by employing the PID controller alone are illustrated. But, that desired specifications are easily achieved with the PIDA controller, who has one more zero than the PID controller. Recently, there are three generations of the discrete-time PIDA controller designed by using Kitti's method; a technique of the zeros placement based on the root locus approach. This paper proposes a pole placement design technique by formulates the formula for finding the continuous-time PIDA controller's parameters. For the discrete-time PIDA controller design, this paper also provides the formulas to design for both of Tustin's method with and without frequency pre-warping. In case of Tustin's method with frequency pre-warping, when the designers specify the critical frequency as undamped natural frequency  $\omega_0=\omega_n$ , the shorter of the settling time can easily be achieved by increasing the  $\omega_0$  as desired.

### REFERENCES

- [1] Seul Jung and Richard C. Dorf, "Novel Analytic Technique for PID and PIDA Controller Design," *Proceedings of the 13<sup>th</sup> Triennial World Congress, IFAC (International Federation of Automatic Control)*, pp. 1146-1151, San Francisco, USA, 30<sup>th</sup> June– 5<sup>th</sup> July 1996.
- [2] Seul Jung and Richard C. Dorf, "Analytic PIDA Controller Design Technique for A Third Order System," *Proceedings of the 35<sup>th</sup> Conference on Decision and Control*, pp. 2513-2518, Kobe, Japan, Dec., 1996.
- [3] Prapart Ukakimarn, Pittaya Pannil, Peerapongpan Boonchuay and Thanit Trisuwannawat, "PIDA Controller Designed by Kitti's Method," *ICROS- SICE International Joint Conference 2009*, pp. 1547-1550, Fukuoka International Congress Center, Japan, August 18-21, 2009.
- [4] Krit Smerpitak, Prapart Ukakimarn, Thanit Trisuwannawat and Prapaisri La-orisri, "Discrete-Time PIDA Controller Designed by Kitti's Method with Bilinear Transform," *2012 12<sup>th</sup> International Conference on Control, Automation and Systems*, pp. 1585-1590, in International Convention Center (ICC), Jeju Island, Korea, Oct. 17-21, 2012.
- [5] Anirut Tongtanee, Pittaya Pannil, Prapart Ukakimarn and Thanit Trisuwannawat, "Discrete-Time PIDA Controller Designed by Kitti's Method; A Third Generation," *Proceedings of the SICE Annual Conference 2017*, pp. 1384-1388, Kanazawa University, Kanazawa, Japan, September 19-22, 2017.
- [6] Numchai Narkvital, Prapart Ukakimarn, Pittaya Pannil and Thanit Trisuwannawat, "Closed-Form Formulas for Continuous/Discrete-Time PIDA Controllers' Parameters," *2015 15<sup>th</sup> International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2015)*, pp. 326-329, Busan, Korea, Oct. 13-16, 2015.
- [7] Guisheng Zhai, Takaaki Norisada, Joe Imae and Tomoaki Kobayashi, "An Extension of Generalized Bilinear Transformation For Digital Redesign," *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, pp.4071-4081, Vol.8, No.6, June 2012.
- [8] Maruthai Suresh, Gunna Jeersamy Srinivasan and Ranganathan Rani Hemamalini, "Integrated Fuzzy Logic Based Intelligent Control of Three Tank System," *Serbian Journal of Electrical Engineering*, Vol. 6, No. 1, pp. 1-14, May 2009.
- [9] The MathWorks, Inc., *Control System Toolbox, User's Guide*, Version 4.2, pp. 3-23, January, 1999.

## ประวัติผู้เขียน

ชื่อ-นามสกุล	นายเมธี ขวัญทอง
วัน เดือน ปีเกิด	19 เมษายน 2530 ที่จังหวัดชุมพร
ที่อยู่	410/556 คอนโดริชพาร์ค เตापูน ถนน ประชาราษฎร์ 2 แขวงบางซื่อ เขตบางซื่อ จังหวัดกรุงเทพมหานคร 10800
ประวัติการศึกษา	2549 วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาระบบควบคุมและเครื่อง มือวัด มหาวิทยาลัยพระจอมเกล้าธนบุรี 2547 ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สาขาเทคนิคคอมพิวเตอร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลสุวรรณภูมิ วิทยาเขตนนทบุรี 2544 ประกาศนียบัตรวิชาชีพ สาขาอิเล็กทรอนิกส์ วิทยาลัยเทคนิคชุมพร

